В.М. Имайкин

Что мы дифференцируем и интегрируем? О дифференциальных формах в малых размерностях. Часть I. Одномерный случай

$$\int_{\partial I} \omega_0 = \int_{I} \partial\, \omega_0$$

Приложение к журналу “Математическое образование”

ISSN 1992-6138

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

В. М. Имайкин

Что мы дифференцируем и интегрируем?
О дифференциальных формах в малых размерностях.
Часть I. Одномерный случай

Учебное пособие для учащихся профильных физико-математических классов.

Москва, 2026

Что мы дифференцируем и интегрируем?
О дифференциальных формах в малых размерностях.
Часть I. Одномерный случай

В. М. Имайкин

Тема "Интеграл" достаточно подробно изучается в профильных физико-математических классах. Обычно рассматривается класс функций, интегрируемых по Риману на отрезке, изучаются основные свойства интеграла и его различные приложения в геометрии, физике и т.п. Формула Ньютона-Лейбница связывает интегрирование с другой важнейшей операцией анализа — дифференцированием.

Настоящее пособие представляет собой введение в более современную теорию интегрирования и, в меньшем объеме, дифференцирования так называемых *дифференциальных форм*. Часть I посвящена наиболее простому одномерному случаю. Объясняется, почему дифференциальная форма в некотором смысле "более правильный объект для интегрирования", чем функция. Пособие доступно учащимся старших профильных классов.

Оглавление

1. Сводка основных фактов одномерного дифференциального и интегрального исчисления

Основные факты одномерного дифференциального и интегрального исчисления приведены на основе курса математического анализа в листках школы 179 г. Москвы.

Определение 1.1. Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности $U(a)$ действительного числа a, называется *непрерывной в точке* a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

1. Многочлены, дробно-рациональные функции, тригонометрические функции непрерывны в каждой точке области определения.

Определение 1.2. Функция $f(x)$ *непрерывна на множестве* X, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Множество всех точек непрерывности называется *областью непрерывности* функции $f(x)$.

2. **Арифметика непрерывных функций.** Сумма, произведение, частное непрерывных в данной точке функций являются непрерывными в данной точке функциями. (В случае частного предполагается, что знаменатель не обращается в ноль в данной точке.)

3. а) **Локальное знакопостоянство.** Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(a)$ числа a, $f(a) \neq 0$ и $f(x)$ непрерывна в a, то существует окрестность $V(a)$ числа a такая, что $f(x)$ имеет знак $f(a)$ в $V(a)$.

б) **Локальная ограниченность.** Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(a)$ числа a и $f(x)$ непрерывна в a, то существует окрестность $V(a)$ числа a такая, что $f(x)$ ограничена в $V(a)$.

в) **Глобальная ограниченность.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

г) **Достижение экстремального значения.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она принимает на нём своё наибольшее и наименьшее значение, то есть $\exists c, d \in [a,b]$: $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

4. **Теорема о промежуточном значении.** а) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает в концах отрезка значения разных знаков, тогда $\exists c \in (a,b) : f(c) = 0$.

б) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает в концах отрезка разные значения, тогда для любого числа t, находящегося между $f(a)$ и $f(b)$ $\exists c \in [a,b] : f(c) = t$.

в) В частности, для любого $n \in \mathbb{N}$ и $t > 0$ существует единственный $\sqrt[n]{t}$.

Определение 1.3. Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности $U(a)$ действительного числа a, называется *дифференцируемой в точке* a, если существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Этот предел называется *производной функции* $f(x)$ в точке a и обозначается $f'(a)$ или $\frac{df}{dx}|_{x=a}$ или $f'(x)|_{x=a}$.

5. В этом пункте речь идет о дифференцируемости в произвольной точке, поэтому используем обозначение x вместо a. Ф) $f'(x) = 0\ \forall x$, если $f(x) = c = const$; б) $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$; в) $|x|' = 1$, $x > 0$, -1, $x < 0$, в 0 производная не существует; г) $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$, $n \in \mathbb{N}$; д) $\sqrt[n]{(x)}' = \frac{1}{n}x^{1/n-1}$, $x > 0$; е) $\sin x' = \cos x$; ж) $\cos x' = -\sin x$.

6. Если функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности $U(x_0)$ действительного числа x_0, дифференцируема в точке x_0, то $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Обратное утверждение неверно — например, модуль в точке $x_0 = 0$.

7. **Арифметические свойства производной**. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности $U(x_0)$ действительного числа x_0 и дифференцируемы в точке x_0. Тогда:

а) если $u(x) = af(x)+bg(x)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, то $u(x)$ дифференцируема в x_0 и $u'(x_0) = af'(x_0)+bg'(x_0)$;

б) если $u(x) = f(x) \cdot g(x)$, то $u(x)$ дифференцируема в x_0 и $u'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (формула Лейбница);

в) если $u(x) = f(x)/g(x)$, и $g(x_0) \neq 0$, то $u(x)$ дифференцируема в x_0 и

$$u'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Определение 1.4. Пусть дана функция $y = f(x)$ и точка $A(x_0; f(x_0))$ на графике этой функции. Пусть $B(x; f(x))$ — произвольная точка на графике. Обозначим $k(x)$ — угловой коэффициент прямой AB. Прямая l, проходящая через точку A, называется *наклонной касательной* к графику функции $f(x)$ в точке x_0, если её угловой коэффициент $k = \lim\limits_{x\to x_0} k(x)$.

8. Наклонная касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 существует титтк[1] $f(x)$

[1]Здесь и ниже титтк — “тогда и только тогда, когда”.

дифференцируема в точке x_0. При этом угловой коэффициент касательной $k = f'(x_0)$.

9. Пусть точка движется по прямой так, что её координата в момент времени t равна $x(t)$. Тогда считаем, что скорость (мгновенная в момент t) $v(t) = x'(t)$ (знак производной отвечает за направление скорости).

10. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности U точки x_0 верно равенство $f(x_0 + h) = f(x_0) + K \cdot h + \alpha(h) \cdot h$, где $\lim\limits_{h \to 0} \alpha(h) = 0,\ x_0 + h \in U$, причём $K = f'(x_0)$.

11. **Непрерывность и дифференцируемость сложной функции.** Пусть $h(x) = f(g(x))$, функция g определена в некоторой окрестности точки x_0, функция f определена в некоторой окрестности точки $g(x_0)$, тогда

а) если g непрерывна в x_0, а f непрерывна в $g(x_0)$, то h непрерывна в x_0;

б) если g дифференцируема в x_0, а f дифференцируема в $g(x_0)$, то h дифференцируема в x_0 и $h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Определение 1.5. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке и существует окрестность U точки x_0 такая, что $\forall x \in U\ f(x) \leqslant f(x_0)$ $(f(x) \geqslant f(x_0))$, тогда точка x_0 называется точкой *локального максимума* (*локального минимума*) функции $f(x)$. Точки локального максимума и точки локального минимума называются точками *локального экстремума.*

12. **Классические теоремы о дифференцируемых функциях.**

а) **Теорема Ферма.** Пусть x_0 точка *локального экстремума* функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0, тогда $f'(x_0) = 0$. Обратное утверждение неверно, пример: $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$. Геометрический смысл теоремы Ферма: если в точке экстремума определена касательная, то она “горизонтальна” — параллельна оси OX. Механический смысл теоремы: в момент изменения направления движения точки ее скорость равна нулю. См. рис. 1.1.

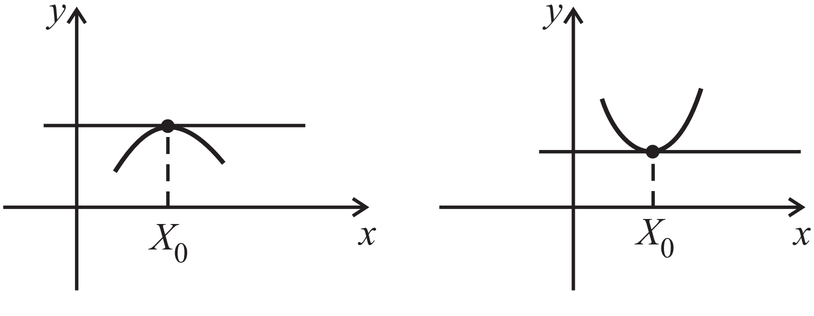


Рис. 1-1.

б) **Теорема Ролля.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема во всех точках интервала $(a; b)$ и $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $x_0 \in (a; b)$, в которой $f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля: в некоторой точке касательная к графику горизонтальна. Механический смысл теоремы: если точка вернулась в исходное положения то в некоторый момент ее скорость была равна нулю. См. рис. 1.2.

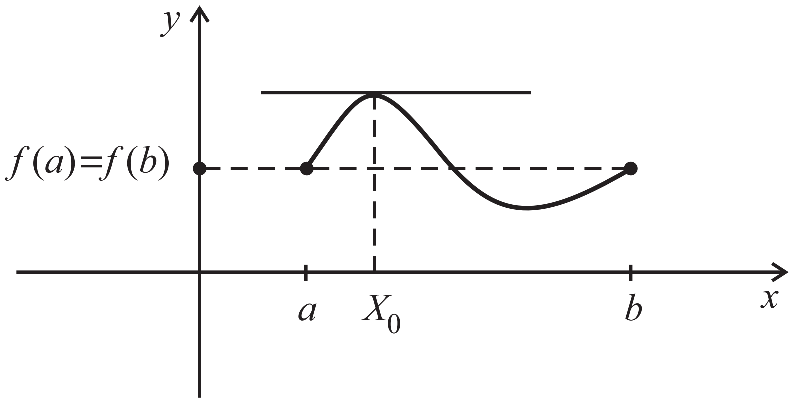


Рис. 1-2.

в) **Теорема Лагранжа (о конечном приращении).** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема во всех точках интервала $(a;b)$, тогда существует точка $x_0 \in (a;b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b-a)$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: в некоторой точке касательная к графику параллельна секущей. Механический смысл теоремы: в некоторый момент мгновенная скорость точки была равна средней скорости движения за данный отрезок времени. См. рис. 1.3.

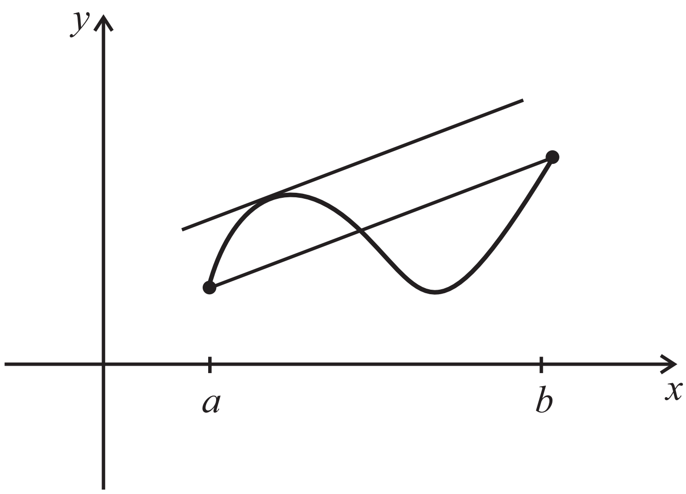


Рис. 1-3.

г) **Теорема Коши.** Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы во всех точках интервала $(a;b)$, тогда существует точка $x_0 \in (a;b)$ такая, что

$$g'(x_0) \cdot (f(b) - f(a)) = f'(x_0) \cdot (g(b) - g(a)).$$

Механический смысл теоремы. Пусть x имеет смысл времени, а функции $f(x)$, $g(x)$ задают изменение координат f, g точки, двигающейся на плоскости Ofg, в зависимости от времени. Вектор мгновенной скорости в момент x_0 равен $(f'(x_0), g'(x_0))$, вектор перемещения за все время движения —- $(f(b) - f(a), g(b) - g(a))$. Перепишем утверждение теоремы в виде $f'(x_0)/g'(x_0) = (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a))$. Это значит, что координаты векторов пропорциональны, значит, сами векторы коллинеарны. Итак, при движении точки по плоскости в некоторый момент вектор скорости коллинеарен вектору перемещения, см. рис. 1.4.

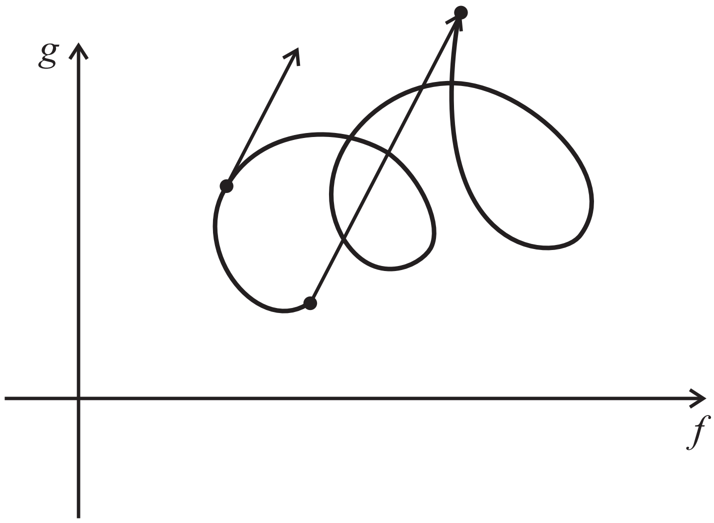


Рис. 1-4.

д) **Теорема Дарбу.** Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема в каждой точке некоторой окрестности отрезка $[a;b]$. Тогда производная $f'(x)$ принимает на $[a;b]$ все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$.

Упражнение 1.1. а) Найдите точку x_0 из теоремы Ролля для данных функций и отрезков: $y = 3x^2 - 24x + 48,\ x \in [3;5]$; $y = \sin x,\ x \in [-17\pi; -15\pi]$; $y = \operatorname{tg} x,\ x \in [0;\pi]$.

б) Найдите точку x_0 из теоремы Лагранжа для данных функций и отрезков: $y = x^3,\ x \in [0;1]$; $y = \sqrt{x},\ x \in [1;8]$; $y = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

13. **Следствия из классических теорем о производной:**

а) Если функция f дифференцируема на $(a;b)$ и $f'(x) = 0\ \forall x \in (a;b)$, то f постоянна на $(a;b)$; если функции f и g дифференцируемы на $(a;b)$ и $f'(x) = g'(x)\ \forall x \in (a;b)$, то $f - g$ постоянна на $(a;b)$.

б) Если функция f дифференцируема на $(a;b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in (a;b)$, то f строго возрастает (убывает) на $(a;b)$.

Упражнение 1.2. Пусть функция f строго возрастает и дифференцируема на $(a;b)$. Верно ли, что $\forall x \in (a;b)$ (1) $f'(x) > 0$; (2) $f'(x) \geqslant 0$?

14. **Непрерывность и дифференцируемость обратной функции.** а) Если функция f строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a;b]$, тогда определена на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$ обратная функция g, которая непрерывна на нём.

б) Если функции f и g взаимно обратны на некотором промежутке , функция f дифференцируема в x_0 и $f'(x) \neq 0$, то g дифференцируема в точке $f(x_0)$, причём $g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Упражнение 1.3. Используя утверждение пункта 14 б), найдите производную $\arcsin x$ и $\arccos x$. *Ответ*: $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$, $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$.)

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором (конечном или бесконечном) промежутке I.

Определение 1.5. *Первообразной* функции $f(x)$ на промежутке I называется всякая функция $F(x)$ со следующими свойствами:

1) $F(x)$ непрерывна на I и дифференцируема во всех внутренних (то есть не являющимся концами) точках I;

2) $F'(x) = f(x)$ для всех внутренних точек x промежутка I.

Определение 1.6. Если у функции $f(x)$ на промежутке I существует первообразная, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на I. Совокупность всех первообразных функции f (на промежутке I) называется её *неопределённым интегралом* (на I) и обозначается через $\int f(x)\,dx$. Символ

$\int$ называется *знаком интеграла*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ – *подынтегральным выражением*.

15. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные функции $f(x)$ на промежутке I. Тогда $F_1(x) = F_2(x) + C$ для некоторой константы C. Графики двух различных первообразных на промежутке не могут иметь на нём общую точку. В частности, если $F(x)$ – какая-либо первообразная функция $f(x)$, то множество всех её первообразных (на промежутке I) имеет вид $\{F(x)+C \mid C \in \mathbb{R}\}$. Это записывается следующим образом: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Отметим, что для всякой дифференцируемой на I функции $f(x)$ выполняется равенство $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$.

16. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены на промежутке I и имеют на нём первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно. Тогда для любых $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ функция $c_1F_1(x) + c_2F_2(x)$ является первообразной для функции $c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$. Иными словами, $\int (c_1f_1(x) + c_2f_2(x))\,dx = c_1\int f_1(x)\,dx + c_2\int f_2(x)\,dx$.

17. **Формула интегрирования по частям.** Пусть функции u, v дифференцируемы на промежутке I. Тогда
$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\,dx.$$

18. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$, то одна из первообразных функций $f(kx+t)$, где k и t – константы, равна $\frac{1}{k}F(kx+t)$ на промежутке $(c;d)$.

Упражнение 1.4. Как выражаются c и d через a, b, k, t?

19. **Общая формула замены переменной в интеграле.** Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале E первообразную $F(x)$, а $t(x)$ – дифференцируемая функция на интервале I, где $t(I) \subset E$. Тогда
$$\int f(t(x))t'(x)\,dx = F(t(x)) + C.$$

Формулы пунктов 17 и 19 принято записывать в сокращённом виде: $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$; $\displaystyle\int f(t(x))\cdot t'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$.

Определение 1.7. Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. *Функцией площади* для функции $f(x)$ называется функция $S_f(x)$, определённая на $[a,b]$ и обладающая следующими свойствами:

1) $S_f(a) = 0$;

2) для любых двух точек $c, d \in [a,b]$ с условием $c < d$ справедливы неравенства $m(d-c) \leqslant S_f(d) - S_f(c) \leqslant M(d-c)$, где m и M – соответственно минимальное и максимальное значения функции $f(x)$ на отрезке $[c,d]$.

Если $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in [a,b]$, то значение $S_f(b)$ называют *площадью под графиком* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Функция площади существует для всякой функции, непрерывной на отрезке, см ниже пункт 25.

20. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда:

а) $S_f(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$;

б) при всех $x \in [a,b]$ справедливо равенство $S_f(x) = F(x) - F(a)$, где $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$ на $[a,b]$.

Замечание 1.1. Значение $S_f(b)$ имеет геометрический смысл площади под графиком функции $f(x)$ на $[a,b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Определение 1.8. Пусть $f(x)$ ограничена на $[a;b]$ и T — разбиение множеством точек $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка $[a,b]$. Для каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, введём величины $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $M_i = \sup\limits_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$ и $m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$. Положим $S(T) = S(f,T) = \sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i$ и $s(T) = s(f,T) = \sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i$. Величина $S(T)$ (соответственно, $s(T)$) называется *верхней* (соответственно, *нижней*) *суммой Дарбу́* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, отвечающей разбиению T.

21. Пусть $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция. Тогда:

а) для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение данного отрезка, что $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

б) существует единственное число I такое, что для любого разбиения T выполнено неравенство $s(T) \leqslant I \leqslant S(T)$.

в) $I = \lim\limits_{n\to\infty} S(T_n) = \lim\limits_{n\to\infty} s(T_n)$, где T_n — равномерное разбиение отрезка $[a;b]$ на n частей.

Определение 1.9. Число I из пункта 21 б), в) называется *определённым интегралом* (*интегралом Ри́мана*) функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. Функция $f(x)$ в этом случае (если она не обязательно непрерывна, но выполнено условие а) пункта 21) называется *интегрируемой* на отрезке $[a;b]$.

Замечание 1.2. Из пункта 21 следует, что непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём.

22. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, то:

а) (**аддитивность интеграла**) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, где $a \leqslant c \leqslant b$;

б) (**линейность интеграла**) $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, где k — константа, и $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$.

23. Всякая ограниченная функция, имеющая конечное или счетное число точек разрыва на отрезке, интегрируема на нём.

24. Пусть числа c, d и функция $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ таковы, что f интегрируема на $[a;b]$ и при всех $x \in [a;b]$ выполнено $d \leqslant f(x) \leqslant c$. Тогда $d(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant c(b-a)$.

25. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Определим на $[a;b]$ функцию $S_f(x)$ следующим образом: $S_f(a) = 0, S_f(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ при $a < x \leqslant b$. Тогда $S_f(x)$ является первообразной и функцией площади для $f(x)$ на $[a;b]$.

26. **Формула Ньютона-Лейбница.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на нём, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Определение 1.10. Множество точек на прямой имеет *меру нуль*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся система (конечная или счётная) интервалов, покрывающая все точки множества и такая, что сумма длин этих интервалов меньше ε.

27. Любое конечное или счётное множество точек на прямой имеет меру нуль.

28. **Критерий интегрируемости функции на отрезке.** Ограниченная на отрезке функция интегрируема по Риману на нём тогда и только тогда, когда множество точек разрыва функции на отрезке имеет меру нуль.

29. **Обобщенное свойство аддитивности.** Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$, то $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{c_0}^{c_1} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,dx$.

30. **Монотонность интеграла.** Если интегрируемые на $[a,b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворят неравенству $m \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant M$, то и $\displaystyle m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \leqslant M(b-a)$.

31. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то имеется точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)$.

Величина $\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется (*интегральным*) *средним* значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

32. Если функция $f(x)$ интегрируема, то функция $|f(x)|$ тоже интегрируема.

33. Если функция $f(x)$ интегрируема, то $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

34. Пусть $g(x) \geqslant 0$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$. Тогда мера множества точек, в которых $g(x) > 0$, равна 0.

35. **Предельный переход под знаком интеграла.** Пусть $\{f_n(x) : [a;b] \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ – такая последовательность непрерывных функций, что при всех $x \in [a;b]$ верно $f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant f_3(x) \geqslant \ldots$. Известно также, что при всех $x \in [a;b]$ выполнено $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \to 0$ при $n \to \infty$.

36. **Замена переменной в определенном интеграле.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, функция $\varphi(t)$ взаимно-однозначно отображает отрезок $[\alpha,\beta]$ на $[a,b]$, дифференцируема на $[\alpha,\beta]$, $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$ и $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

2. Касательное расслоение

С понятием производной связана полезная геометрическая конструкция (хотя ее можно задать независимо от производной как чисто геометрическую). Зафиксируем точку $x \in \mathbb{R}$. В этой точке можно рассматривать приращения аргумента, которые будем обозначать h: если аргументу x придать приращение h, получим $x+h$. Рассмотрим еще одну числовую прямую $\mathbb{R}$, такую же, как исходная, но с началом координат, сдвинутым в точку x. Такая прямая называется *касательной прямой к исходной прямой* $\mathbb{R}$ *в точке* x и обозначается $T_x\mathbb{R}$ (T от латинского слова tangent — касательный).

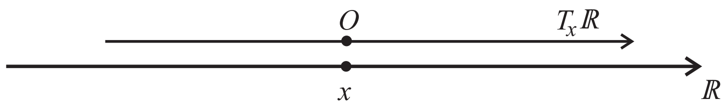


Рис. 2-1. Касательная прямая к $\mathbb{R}$ в точке x

Зачем нужна такая конструкция: при определении производной в точке x сама точка фиксирована, а в качестве переменной, по которой берется предел, выступает приращение h: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ — выражение под знаком предела является функцией от h. Поэтому удобно считать, что приращения “живут в своем собственном пространстве” $T_x\mathbb{R}$. Его также полезно рассматривать как одномерное векторное пространство, в котором приращения h — одномерные векторы с обычными правилами сложения и умножения вектора на число.

Касательные прямые можно рассмотреть в каждой точке x исходной прямой. Множество всех касательных прямых $T_x\mathbb{R}$ во всех точках x прямой называется *касательным расслоением* $T\mathbb{R}$ *данной прямой*, исходная прямая $\mathbb{R}$ называется *базой* расслоения, а отдельная прямая $T_x\mathbb{R}$ — *слоем* расслоения в данной точке x.

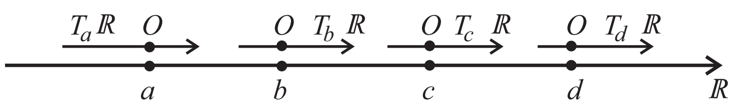


Рис. 2-2. Касательное расслоение действительной прямой

Геометрический пример. Касательные прямые к действительной прямой как бы сливаются с ней (так же как график линейной функции сливается со своей касательной в каждой точке), и картинка получается не очень внятная. Если в качестве исходного пространства взять не прямую, а, например, окружность (мы можем изучать функции на окружности — это то же самое, что изучать периодические функции на прямой), то картинка получится более наглядной. Касательная прямая к окружности в каждой точке — это обычная касательная, которую мы считаем числовой прямой с нулем, помещенным в точку касания, см. рис. 2-3.

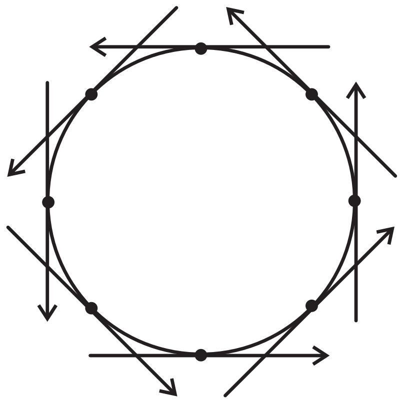


Рис. 2-3. Касательное расслоение окружности

С другой стороны, можно представить себе, какой геометрический объект “в целом” представляет собой касательное расслоение прямой или окружности. Это нетрудно сделать при помощи введения единой системы координат. Элемент касательного расслоения $T\mathbb{R}$ определяется двумя координатами (x, y), где x — координата точки на базе, а y — координата в слое $T_x\mathbb{R}$ (напомним, что все слои мы считаем одинаковыми). В итоге, TR можно отождествить с координатной плоскостью Oxy, см. рис. 2.4.

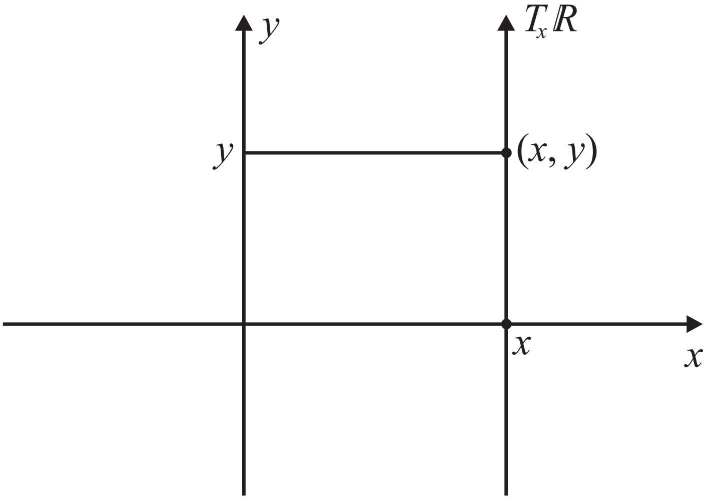


Рис. 2-4. Касательное расслоение прямой — плоскость.

Аналогично, элемент касательного расслоения TS окружности S определяется двумя координатами (φ, y), где φ — координата точки на базе-окружности, эта координата угловая, $\varphi \in [0, 2\pi)$, а y — координата в слое $T_\varphi S$. В итоге, TS можно отождествить с цилиндром, см. рис. 2.5.

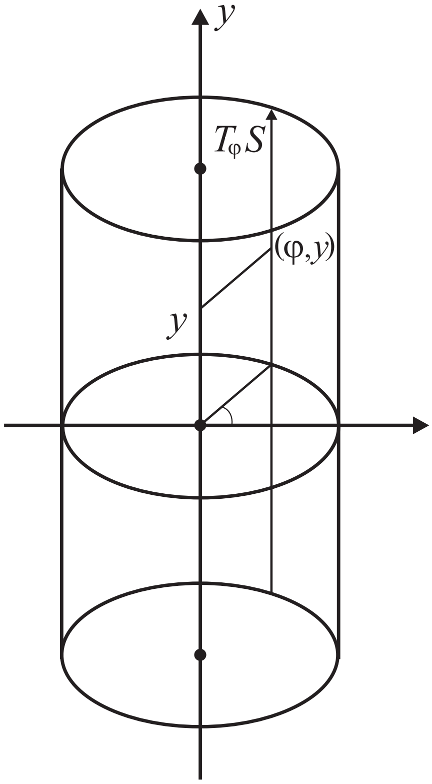


Рис. 2-5. Касательное расслоение окружности — цилиндр.

3. Линейные отображения одномерных векторных пространств

Числовая прямая является одномерным векторным пространством над полем вещественных чисел, т.е. над самой собой. Каждое число можно считать вектором, сложение чисел — сложением векторов, лежащих на одной прямой, обычное умножение чисел — умножением вектора на число; в этом случае надо указывать, какой множитель мы считаем вектором, а какой числом. Чтобы избежать путаницы, обычно числа-векторы обозначают латинскими буквами, а числа-элементы поля — греческими. Естественным базисом этого пространства является число-вектор 1, так как любое другое число-вектор ему пропорционально. При этом базисом является и любой другое ненулевое число-вектор.

Определение 3.1. Отображение $l : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — векторное пространство, называется *линейным*, если $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — полю и $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ — векторному пространству $l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y)$.

Линейные отображения одномерных пространств устроены очень просто. Действительно, $x = x \cdot 1$, здесь мы считаем x элементом поля, а 1 — вектором. Тогда $l(x) = l(x \cdot 1) = x \cdot l(1)$. Теперь в пространстве-образе считаем x вектором, а $k = l(1)$ — элементом поля. Итак, для любого линейного отображения l найдется такое число k, что $l(x) = kx$.

Композиция линейных отображений. Обратное линейное отображение Пусть l_1, l_2 — линейные отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $l_1(h) = k_1 h$, $l_2(h) = k_2 h$. Тогда композиция $l = l_2 \circ l_1$ этих линейных отображений, очевидно, также является линейным отображением и определяется формулой $l(h) = kh$, где $k = k_1 \cdot k_2$.

Пусть l, — линейное отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $l(h) = kh$. Обратное отображение l^{-1} существует титтк $k \neq 0$. При этом оно является линейным и задается формулой $l^{-1}(h) = (1/k)h$.

4. Дифференциал

4.1. Определение дифференциала функции в точке

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, причем $f(x_0) = y_0$. В этом случае возникает линейное отображение из касательного пространства $T_{x_0}\mathbb{R}$ в касательное пространство $T_{y_0}\mathbb{R}$, определенное формулой $p = f'(x_0) \cdot h$, $h \in T_{x_0}\mathbb{R}$, $p \in T_{y_0}\mathbb{R}$.

Определение 4.1. Это отображение называют *дифференциалом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначают $df(x_0)$: $df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in T_{x_0}\mathbb{R}$.

Пример. Пусть $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$.

а) $x_0 = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$. Тогда $df(0)(h) = 0 \cdot h = 0$ для любого $h \in T_0\mathbb{R}$. Таким образом, $dx^2(0)$ — нулевое линейное отображение из $T_0\mathbb{R}$ в $T_0\mathbb{R}$.

б) $x_0 = 1/2$, $f(1/2) = 1/4$, $f'(1/2) = 1$. Тогда $df(1/2)(h) = 1 \cdot h = h$ для любого $h \in T_{1/2}\mathbb{R}$. Хотя численные значения прообраза и образа совпадают, лежат они в разных пространствах: прообраз в $T_{1/2}\mathbb{R}$, а образ — в $T_{1/4}\mathbb{R}$.

в) Аналогично, $df(1)(h) = 2h$, $df(-2)(h) = -4h$.

4.2. Теоремы о производной сложной функции и производной обратной функции

Понятия касательного пространства и дифференциала проясняют смысл теорем о производной сложной и обратной функции.

Теорема о дифференциале композиции отображений. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и дифференцируема в точке x_0, функция $g(y)$ определена в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ и дифференцируема в точке y_0. Тогда композиция $g \circ f$ отображений g и f определена в некоторой окрестности точки x_0, дифференцируема в точке x_0, причем дифференциал композиции $g \circ f$ в точке x_0 равен композиции дифференциалов: $d(g \circ f)(x_0) = dg(y_0) \circ df(x_0)$.

Теорема о дифференциале обратного отображения. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и дифференцируема в точке x_0, и обратная функция $f^{-1}(y)$ определена в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$. Тогда если дифференциал исходной функции в точке x_0 ненулевой, то обратная функция дифференцируема в точке y_0 и ее дифференциал в этой точке обратен к дифференциалу исходной функции в точке x_0: $df^{-1}(y_0) = (df(x_0))^{-1}$.

Замечание 4.1. В случае анализа функций одной переменной эти новые понятия и формулировки не выглядят очень существенными, но они играют решающую роль в случае анализа функций многих переменных. Например, теоремы о дифференциале композиции отображений и о дифференциале обратного отображения в многомерном случае имеют такие же формулировки, как вышеприведенные для одномерного случая. Но формулировку, как в пункте 17 б) параграфа 1 в многомерном случае дать нельзя, поскольку отсутствует деление. Кстати, и определение дифференцируемости отображения в многомерном случае дается так же, как в пункте 10 параграфа 1, а определение типа определения 1.8 дать нельзя, опять же поскольку нет деления. (Определение этого типа годится только для так называемых *частных производных*).

5. Дифференциальные формы на числовой прямой

5.1. Основные определения

В обозначении интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ имеется символ dx. Обычно его объясняют как “бесконечно малый элемент длины Δx_i отрезка разбиения” в интегральной сумме. Назовем такой его смысл “эмпирическим”.

Оказывается, имея в виду касательное расслоение прямой, символу dx можно придать точный геометрический смысл, который не противоречит эмпирическому. Рассмотрим произвольный слой касательного расслоения числовой прямой как одномерное векторное пространство.

Определение 5.1. dx — это линейное отображение слоя в множество действительных чисел, которое действует по формуле $dx(he) = h$, где e — базисный единичный вектор слоя.

Простыми словами, dx ставит в соответствие вектору слоя его координату относительно базиса, состоящего из одного вектора e.

Теперь выражение dx приобретает смысл само по себе, независимо от знака интеграла.

Определение 5.2. *Дифференциальной 1-формой* $f(x)dx$ называется отображение касательного расслоения числовой прямой в множество действительных чисел, которое действует так: если из слоя в точке x взят вектор he, то $f(x)dx(he) = f(x)h$.

Опять простыми словами: координату вектора из слоя, взятого в точке x умножаем на значение функции в этой точке.

Из определения видно, что при каждом фиксированном x отображение линейно по h, но по x отображение не будет линейным, если не является линейной функция $f(x)$.

Функцию $f(x)$ будем считать как минимум непрерывной. В этом случае дифференциальная форма $f(x)dx$ также называется *непрерывной.* В зависимости от решаемых задач мы будем уточнять свойства функции $f(x)$.

Название “1-форма” объясняется тем, что в каждой точке числовой прямой она действует на один вектор из слоя в этой точке.

Соответственно просто функцию, определенную на исходной числовой прямой, будем называть *дифференциальной 0-формой.* В каждой точке прямой функция имеет свое значение, которое ни на что не умножается, т.е. форма действует на ноль векторов слоя.

Традиционно дифференциальную форму обозначают буквой ω.

Примеры. 1) $\omega = x^2dx$. Эта 1-форма определена на всей числовой прямой и $x^2dx(x, he) = x^2h$. Например, $x^2dx(1, 5e) = 1^2 \cdot 5 = 5$, $x^2dx(-2, 3e) = (-2)^2 \cdot 3 = 12$ и т.д.

2) Форма $\omega = \cos x\, dx$ также определена на всей числовой прямой. Найдите самостоятельно значения $\cos x\, dx(0, -2e)$, $\cos x\, dx(\pi/2, 6e)$, $\cos x\, dx(3\pi, \pi e)$.

Важный пример — дифференциал функции. Выше мы определили дифференциал функции в данной точке x. Теперь мы можем определить дифференциал функции "в целом".

Определение 5.3. *Дифференциалом функции* $f(x)$, определенной и дифференцируемой на некотором интервале числовой прямой, называется дифференциальная форма $\omega = df(x) = f'(x)dx$, определенная на том же интервале.

Как мы уже договорились, функция $f'(x)$ предполагается непрерывной. В таком случае исходная функция $f(x)$ называется *непрерывно дифференцируемой.*

5.2. Операции с дифференциальными формами

5.2.1. Алгебраические операции

Начнем с 0-форм, т.е. функций, определенных на некотором промежутке числовой прямой. Во-первых, функции можно складывать и умножать на действительные числа. Такие операции называются *линейными.* При этом выполнены все те свойства линейных операций, чтобы получилось *линейное пространство функций.* Считаем, что понятие линейного пространства и ряд примеров вам известны.

Примеры.

1) Множество всех непрерывных функций на данном отрезке образует линейное пространство. Это пространство обозначают $C[a;b]$.

2) Множество всех дифференцируемых (т.е. имеющих производную) функций на данном интервале образует линейное пространство. Это пространство обозначают $D[a;b]$.

3) Множество всех непрерывно дифференцируемых (определение дано выше) функций на данном интервале образует линейное пространство. Это пространство обозначают $C^1[a;b]$.

Заметим, что все эти пространства имеют бесконечную размерность, т.е. не содержат конечного базиса.

Во-вторых, функции можно умножать друг на друга. Множество определенных на числовом промежутке функций с линейными операциями и операцией умножения образует алгебраическую структуру, называемую *алгеброй.* Этот момент не будем подробно объяснять, можно посмотреть алгебраическую литературу.

Если взять 0-форму и 1-форму, то нет естественной операции их сложения, но операция умножения есть.

Определение 5.4. *Произведением* дифференциальных 0-формы $f(x)$ и 1-формы $g(x)dx$ называют дифференциальную 1-форму $(f(x)g(x))dx$.

Над двумя дифференциальными 1-формами также можно определить линейные операции. Определим сразу линейную комбинацию двух 1-форм.

Определение 5.5. *Линейной комбинацией* $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2$ 1-форм $\omega_1 = f(x)dx$ и $\omega_2 = g(x)dx$ называется 1-форма $(\alpha f(x) + \beta g(x))dx$.

Легко проверить, что определенные на некотором числовом промежутке дифференциальные 1-формы с линейными операциями образуют линейное пространство. Оно также имеет бесконечную размерность.

Можно перемножить две 1-формы: $f(x)dx \cdot g(x)dx = (f(x)g(x))dxdx$. Получится 2-форма, так как в нее надо подставлять уже два вектора из слоя в точке x: $(f(x)g(x))dxdx(h_1e, h_2e) = f(x)g(x)h_1h_2$.

Это выражение при фиксированном h_2 линейно зависит от h_1 и наоборот. Такая 2-форма называется *билинейной.* Вроде бы при умножении двух дифференциальных 1-форм мы получили дифференциальную 2-форму. Оказывается, это не так. По причине, которая объяснена в Дополнении, дифференциальная 2-форма должна быть *кососимметричной.*

Определение 5.6. 2-форма называется *кососимметричной* (или *антисимметричной*, или просто *косой*), если при перестановке аргументов она меняет знак: $\omega(h_1e, h_2e) = -\omega(h_2e, h_1e)$.

Вычислим значение косой 2-формы на двух векторах из слоя: $\omega(h_1 e, h_2 e) = h_1 h_2 \omega(e,e)$ по билинейности. Заметим, что $\omega(e,e) = -\omega(e,e)$, если переставить вектор e сам с собой и воспользоваться свойством кососимметричности. А значит, $\omega(e,e) = 0$ и косая 2-форма в одномерном случае оказывается тождественно равной нулю.

Итак, любая дифференциальная 2-форма в одномерном случае — нулевая.

Что касается 0-форм и 1-форм, то их можно считать косыми, так как выполнение свойства кососимметричности, когда нет двух векторов, верно по правилам математической логики.

Общий итог: в одномерном случае есть нетривиальные дифференциальные 0- и 1-формы, а 2-формы только нулевые.

5.2.2. Дифференцирование (взятие дифференциала) дифференциальной формы

Дифференциал 0-формы — функции — уже определен: $df(x) = f'(x)dx$.

Заметим, что получилась 1-форма. Соответственно, дифференциалом 1-формы должна быть 2-форма. Но мы выяснили, что дифференциальные 2-формы в одномерном случае — только нулевые.

Итак, в одномерном случае дифференциалом 1-формы является нулевая форма.

Примеры 1) $f(x) = x^2$, $df(x) = 2xdx$, $x \in \mathbb{R}$. 2) $f(x) = \sin x$, $df(x) = \cos x dx$, $x \in \mathbb{R}$. 3) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $df(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $x \in (-1;1)$.

5.2.3. Интегрирование дифференциальных форм

0-форма — это функция, и можно было бы предположить, что интеграл от нее по отрезку — это интеграл по отрезку от этой функции.

Но с дифференциальными формами логика другая.

0-форма действует только на точку, не затрагивая касательные векторы из слоя в этой точке. Точку можно считать 0-мерным векторным пространством. Будем интегрировать 0-форму именно по 0-мерному пространству. Интегралом естественно считать просто значение функции в данной точке.

Определение 5.7. *Интегралом 0-формы по точке* называется значение соответствующей функции в данной точке: $\int\limits_x f = f(x)$.

В дальнейшем мы будем рассматривать точку с ориентацией. Ориентаций две: положительная и отрицательная. Положительно ориентированную точку x будем обозначать x_+, отрицательно ориентированную — x_-.

Определение 5.8. *Интеграл 0-формы по ориентированной точке*: $\int\limits_{x_+} f = f(x)$, $\int\limits_{x_-} f = -f(x)$.

Заметим, что само значение $f(x)$ определено независимо от ориентации. Ориентация влияет только на знак.

Перейдем к интегрированию 1-форм. Соответственно, 1-форма интегрируется по одномерному ориентированному отрезку. Рассмотрим отрезок $[a;b]$, $a < b$.

Положительно ориентированным назовем направленный отрезок $[a;b]_+$ с направлением от a к b, отрицательно ориентированным — $[a;b]_-$ с направлением от b к a.

Рассмотрим на $[a;b]$ непрерывную функцию $f(x)$. Рассмотрим разбиение отрезка конечным числом точек $x_1 < x_2 < ... < x_{n+1}$, $x_1 = a$, $x_{n+1} = b$ и составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$. Заметим, что приращение $x_{i+1} - x_i$ можно считать вектором слоя в точке x_i касательного расслоения отрезка. Тогда величина $f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ равна значению дифференциальной формы $f(x)dx$ на векторе $\xi_i = x_{i+1} - x_i$.

Интегральная сумма принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)dx(\xi_i).$$

Обозначим $\Delta_i = |\xi_i|$.

Определение 5.9. *Интегралом от дифференциальной формы $f(x)dx$ по положительно ориентированному отрезку* $[a;b]_+$ называется предел интегральных сумм

$$\int\limits_{[a;b]_+} f(x)dx = \lim_{\max \Delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)dx(\xi_i).$$

Интегралом по отрицательно ориентированному отрезку $[a;b]_-$ называется противоположная величина:

$$\int\limits_{[a;b]_-} f(x)dx = -\int\limits_{[a;b]_+} f(x)dx.$$

Замечание 5.1. 1) Численно интеграл от дифференциальной формы по положительно ориентированному отрезку совпадает с интегралом, который был введен ранее как бы просто для функций:

$$\int\limits_{[a;b]_+} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

В традиционном обозначении справа также видно, что имеется в виду интеграл по ориентированному отрезку: интегрирование производится в направлении от нижнего конца к верхнему. То же показывает и формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x),$$

в ней левый и правый концы участвуют не симметричным образом. А также следствие из формулы Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Поэтому для обозначения интеграла от 1-формы по ориентированному отрезку можно пользоваться традиционным обозначением $\int\limits_a^b f(x)dx$.

2) Возникает вопрос, зачем вообще надо вводить интеграл от дифференциальной 1-формы по отрезку, если в итоге он и численно, и по обозначению совпадает с традиционным вариантом "интеграла от функции". Объяснения, почему дифференциальная форма — "более правильный объект для интегрирования", чем просто функция, будут даны ниже в Дополнении. Сейчас только заметим, что, оказывается, функция и отрезок порождают не один, а несколько разных видов интеграла, которые отличаются по своим свойствам.

5.2.4. Определение дифференциала формы через интегрирование[2]

Рассмотрим определенную на некотором интервале числовой прямой дифференциальную 0-форму $\omega_0 = f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема. Мы хотим определить $d\omega_0$ как 1-форму, которая действует в точке x на один касательный вектор h слоя в этой точке. На самой числовой прямой (базе расслоения) вектору h соответствует направленный отрезок $[x;x+h]$ такой же длины и направления, как h. Его границу, которую обозначим $\partial[x;x+h]$, образуют две точки: x и $x+h$. Придадим этим точкам ориентацию так, чтобы она была согласована с ориентацией самого отрезка. По определению это значит, что начало направленного отрезка — точка x — ориентируется знаком "-", а конец — знаком "+".

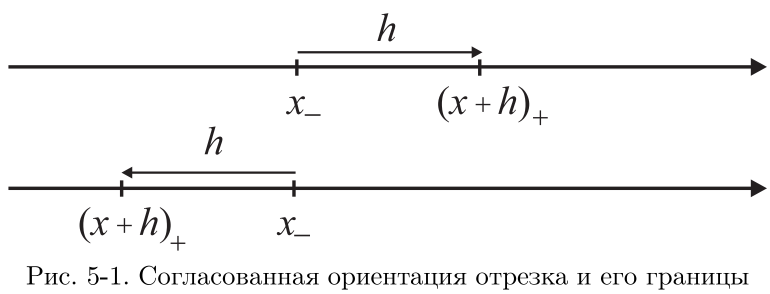


Рис. 5-1. Согласованная ориентация отрезка и его границы

[2]Здесь мы излагаем простой одномерный случай, следуя [1, глава 7, § 36]. Смысл определение дифференциала через интегрирование в его геометрическом характере и инвариантности, т.е. независимости от выбранной системы координат. Более интересный и содержательный двумерный случай изложен в пункте 13.3.3.

Вычислим интеграл формы ω_0 по границе нашего ориентированного отрезка:

$$\int\limits_{\partial[x;x+h]} \omega_0 = f(x+h) - f(x).$$

В итоге он равен приращению функции в точке x при приращении аргумента h.

Определение 5.10. *Дифференциалом 0-формы* $\omega_0 = f(x)$ называется главная линейная часть ее интеграла по границе указанного отрезка, когда вектор приращения h стремится к 0.

Известно (пункт 10 раздела 1), что для дифференцируемой в точке x функции $f(x)$ выполнено равенство $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \alpha(h)h$, где $\alpha(h)$ — бесконечно малая при $h \to 0$. Тогда главная линейная часть приращения равна $f'(x)h$ и, по определению, $d\omega_0(h) = f'(x)h$.

Итак, $d\omega_0(h) = f'(x)h = df(x)(h)$, последнее выражение есть предыдущее определение дифференциала.

Теперь определим дифференциал 1-формы $\omega_1 = f(x)dx$ как 2-форму, которая действует в точке x на два касательных вектора h_1, h_2 слоя в этой точке. Как и раньше, каждый касательный вектор порождает ориентированный отрезок на исходной числовой прямой (базе расслоения). Два направленных отрезка порождают построенный на них параллелограмм, но в данном случае он вырожденный, так как отрезки лежат на одной прямой.

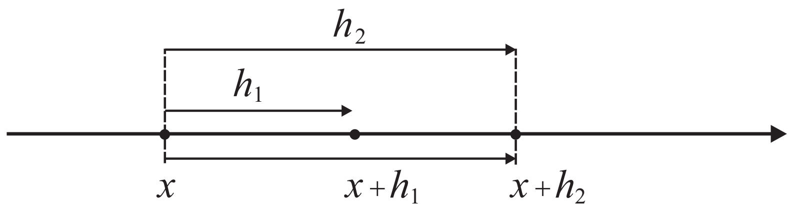


Рис 5-2. Вырожденный параллелограмм и его граница

Граница этого параллелограмма состоит из направленных отрезков $[x; x+h_1]$, $[x+h_1; x+h_2]$, $[x+h_2; x]$, в этом случае ориентация границы согласована с ориентацией самого параллелограмма. Интеграл от формы $\omega_1 = f(x)dx$ по границе равен

$$\int\limits_{x}^{x+h_1} f(x)dx + \int\limits_{x+h_1}^{x+h_2} f(x)dx + \int\limits_{x+h_2}^{x} f(x)dx = 0,$$

следовательно главная линейная часть тоже равна 0. Поэтому дифференциалом 1-формы будет нулевая форма, как мы выяснили это раньше. Отметим, что в интегральном определении свойство кососимметричности не потребовалось.

5.2.5. Формула Ньютона-Лейбница как частный случай формулы Стокса

С учетом приведенных выше определений формулу Ньютона-Лейбница можно интерпретировать так: пусть ориентация границы ориентированного отрезка согласована с ориентацией самого отрезка. Тогда интеграл от 0-формы по границе отрезка равен интегралу от дифференциала этой формы по отрезку:

$$\int\limits_{\partial[a;b]} \omega_0 = \int\limits_{[a;b]} d\omega_0.$$

В таком виде она является частным случаем так называемой *формулы Стокса*, которая верна в очень общей ситуации, см. Дополнение.

5.2.6. Замена переменной в интеграле от дифференциальной формы

Рассмотрим отображение $x = \varphi(t)$ отрезка $[\alpha; \beta]$, $t \in [\alpha; \beta]$ на отрезок $[a; b]$, $x \in [a; b]$. Будем считать, что функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(\alpha; \beta)$ и непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Рассмотрим 0-форму $\omega_0 = f(x)$, $x \in [a; b]$. Рассмотрим некоторую точку $x \in [a; b]$

с положительной ориентацией. Тогда $\int\limits_{x_+} \omega_0 = f(x)$. Рассмотрим композицию $g(t) = f(\varphi(t))$ как 0-форму $\tilde{\omega}_0 = g(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$. Пусть $x = \varphi(\gamma)$ и точка γ тоже ориентирована положительно. Тогда

$$\int\limits_{\gamma_+} \tilde{\omega}_0 = g(\gamma) = f(\varphi(\gamma)) = f(x) = \int\limits_{x_+} \omega_0.$$

Если обе точки x и γ ориентировать отрицательно, то получим аналогичное равенство

$$\int\limits_{\gamma_-} \tilde{\omega}_0 = -g(\gamma) = -f(\varphi(\gamma)) = -f(x) = \int\limits_{x_-} \omega_0.$$

Пусть теперь на отрезке $[a;b]$ определена 1-форма $\omega_1 = f(x)dx$. Она естественным образом порождает 1-форму на отрезке $[\alpha;\beta]$. А именно, пусть $x = \varphi(\gamma)$. Дифференциал $d\varphi(\gamma)$ отображения φ в точке γ переводит касательный вектор ξ в точке γ в касательный вектор h в точке x по формуле $h = d\varphi(\gamma)\xi = \varphi'(\gamma)\xi$. Определим 1-форму ω_1^* на отрезке $[\alpha;\beta]$ следующим образом: $\omega_1^*(\gamma)\xi = \omega_1(x)h = f(\varphi(\gamma))d\varphi(\gamma)\xi = f(\varphi(\gamma))\varphi'(\gamma)\xi$, т.е. эта форма $f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, см. рисунок 5-3.

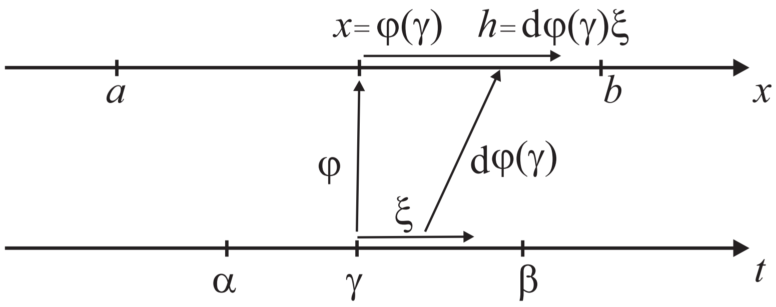


Рис. 5-3. Перенос 1-формы с отрезка $[a;b]$ на отрезок $[\alpha;\beta]$

Положительной ориентацией отрезков считаем направления от a к b и от α к β. Тогда, по формуле замены переменной в интеграле (пункт 36 раздела 1) получим:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \omega_1^* = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} \omega_1.$$

Итак,

$$\int\limits_{a}^{b} \omega_1 = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \omega_1^*.$$

6. Дифференциальные формы на плоскости и в пространстве

Теория интегрирования 1-форм на плоскости и в пространстве достаточно проста и не очень отличается от рассмотренного выше случая интегрирования 1-форм на прямой. Кроме того, в этом случае нужны только самые минимальные сведения из математического анализа функций нескольких переменных — двух и трех.

6.1. Линейные функции на плоскости и в пространстве

Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами (x,y). Любой вектор на этой плоскости с началом в точке $(0,0)$ (двумерное линейное пространство всех таких векторов обозначим V^2) имеет вид $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, где $\mathbf{i} = (1,0)$, $\mathbf{j} = (0,1)$ — базисные векторы.

Определение 6.1. *Линейной функцией* на V^2 называется отображение $l : V^2 \to \mathbb{R}$, сохраняющие линейные операции: $l(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha l(\mathbf{u}) + \beta l(\mathbf{v})$, где $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Нетрудно вычислить значение $l(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in V^2$ в координатах. Если $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, то $l(\mathbf{v}) = l(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = xl(\mathbf{i}) + yl(\mathbf{j}) = ax + by$, $a = l(\mathbf{i})$, $b = l(\mathbf{j})$.

Таким образом, значение линейной функции на произвольном векторе является линейной комбинацией координат вектора с коэффициентами — значениями функции на базисных векторах.

Аналогично, в трехмерном пространстве с координатами x, y, z обозначим V^3 — трехмерное линейное пространство векторов с началом в точке $(0,0,0)$. Любой вектор $\mathbf{u} \in V^3$ имеет вид $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}$, где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — базисные векторы. Тогда для линейной функции $l : V^3 \to \mathbb{R}$ получим $l(\mathbf{u}) = l(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = ax + by + cz$, где $a = l(\mathbf{i})$, $b = l(\mathbf{j})$, $c = l(\mathbf{k})$.

6.2. Касательное расслоение плоскости и пространства

В каждой точке A двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим экземпляр такой же плоскости $\mathbb{R}^2$ с началом координат, помещенным в точку A. Двумерное линейное пространство векторов этой плоскости — их можно представлять, как множество векторов с началом в точке A, — обозначим $T_A\mathbb{R}^2$. Они называются *касательными векторами в точке A к исходной плоскости* $\mathbb{R}^2$, а все $T_A\mathbb{R}^2$ — касательной плоскостью к $\mathbb{R}^2$ в точке A, см. рисунок 6-1.

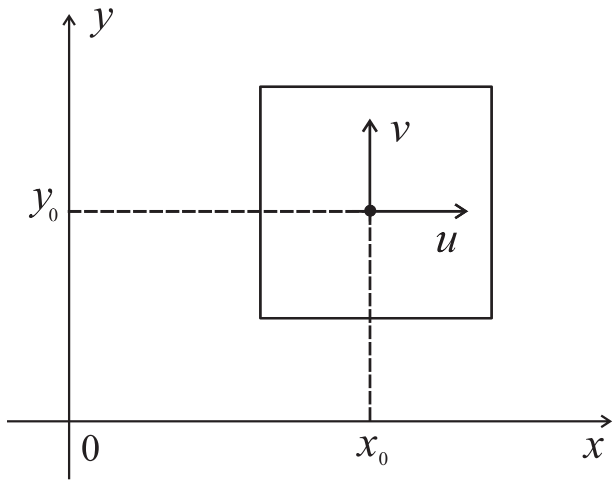


Рис. 6-1. Касательная плоскость к $\mathbb{R}^2$ в точке $A(x_0, y_0)$.

Определение 6.2. *Касательным расслоением плоскости* $\mathbb{R}^2$ называется множество $T\mathbb{R}^2$ всех касательных векторов во всех точках плоскости $\mathbb{R}^2$.

Аналогично, в каждой точке A трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ рассмотрим экземпляр такого же пространства $\mathbb{R}^3$ с началом координат, помещенным в точку A. Трехмерное линейное пространство векторов этого пространства — их можно представлять, как множество векторов с началом в точке A, — обозначим $T_A\mathbb{R}^3$. Они называются *касательными векторами в точке A к исходному пространству* $\mathbb{R}^3$, а все $T_A\mathbb{R}^3$ — *касательным пространством к* $\mathbb{R}^3$ *в точке* A, см. рисунок 6-2.

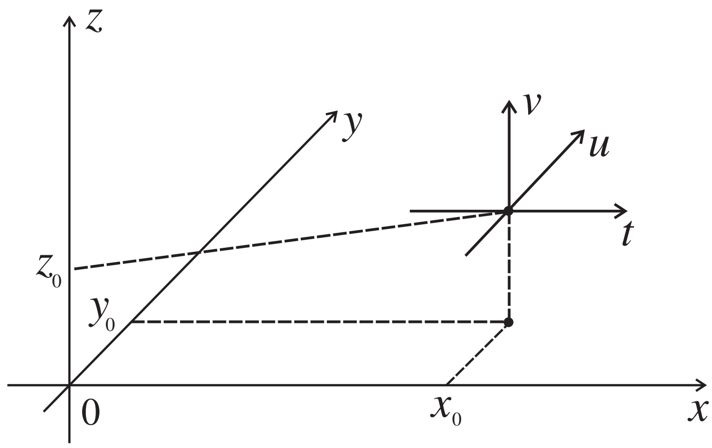


Рис. 6-2. Касательное пространство к $\mathbb{R}^3$ в точке $A(x_0, y_0, z_0)$.

Определение 6.3. *Касательным расслоением пространства* $\mathbb{R}^3$ называется множество $T\mathbb{R}^3$ всех касательных векторов во всех точках пространства $\mathbb{R}^3$.

Заметим, что фактически касательное расслоение плоскости $\mathbb{R}^2$ является четырехмерным пространством $\mathbb{R}^4$, а касательное расслоение пространства $\mathbb{R}^3$ — шестимерным пространством $\mathbb{R}^6$. Образно представить себе и изобразить графически такие объекты довольно сложно, хотя ряд способов для этого разработан, см., например, [2].

6.3. Дифференциальные 0-формы и 1-формы на $T\mathbb{R}^2$ и $T\mathbb{R}^3$.

Дифференциальной 0-формой ω_0 на $T\mathbb{R}^2$ будем считать просто отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, т.е. числовую функцию, определенную на плоскости. Действительно, значение формы должно зависеть от точки плоскости, но действует эта форма на 0 касательных векторов в данной точке, т.е. не зависит от них. Получается, что каждой точке (x, y) плоскости сопоставляем просто число $f(x, y)$.

Дифференциальной 1-формой на плоскости называется отображение $T\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, которое для каждой точки A плоскости линейно на $T_A\mathbb{R}^2$, но от точки A не обязано линейно зависеть.

Мы знаем, что в любой касательной плоскости $T_A\mathbb{R}^2$ линейная функция имеет вид $pdx + qdy$ (напомним, что значение формы dx на касательном векторе равно его первой координате, а формы dy — второй); теперь p и q будут зависеть от координат (x, y) точки A. Таким образом, любая 1-форма на $T\mathbb{R}^2$ имеет вид $p(x, y)dx + q(x, y)dy$.

Аналогично, на $T\mathbb{R}^3$ любая 1-форма имеет вид $p(x, y, z)dx + q(x, y, z)dy + r(x, y, z)dz$.

7. Элементы анализа функций нескольких переменных

Чтобы построить теорию интегрирования 0- и 1-форм в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, нам потребуется, чтобы 0-формы $f(x, y)$, $f(x, y, z)$, а также коэффициенты 1-форм $p(x, y)$, $q(x, y)$, $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$, $r(x, y, z)$ имели хорошие свойства типа непрерывности и дифференцируемости. Поэтому изложим основы математического анализа функций двух и трех переменных.

7.1. Предел и непрерывность

7.1.1. Одномерный случай

Вернемся к понятиям предела и непрерывности в одномерном случае. Сначала напомним формулу расстояния (его также называют *метрикой*) между точками на числовой прямой:

$$d_1(a, b) = |a - b|, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Это расстояние обладает свойствами, которые в математике называют *аксиомами метрического пространства*:

$$d_1(a, b) \in \mathbb{R}, \quad d_1(a, b) \geq 0, \quad d_1(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b. \tag{D1}$$

$$d_1(a, b) = d_1(b, a) \quad \text{(симметричность).} \tag{D2}$$

$$d_1(a, b) \leq d_1(a, c) + d_1(b, c) \quad \text{(неравенство треугольника).} \tag{D3}$$

Определение 7.1. 1) Для $\varepsilon > 0$ *ε-окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$* (она же *открытый шар радиуса ε с центром a*) называется множество $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : d_1(a, x) < \varepsilon\}$; это просто интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

2) *Окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$* называется некоторый интервал (не обязательно симметричный), содержащий a.

3) *Проколотой окрестностью $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a* называется окрестность a, не содержащая саму точку a: $\overset{\circ}{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$.

Теперь запишем определения предела и непрерывности в терминах расстояния.

Определение 7.2. предела. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0.

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_1(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_1(A, f(x)) < \varepsilon.$$

Определение 7.3. непрерывности. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0.

$$f(x) \ \textit{непрерывна в точке} \ x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : d_1(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_1(f(x_0), f(x)) < \varepsilon \ \ (\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)).$$

В терминах расстояния мы переписали эти определения потому, что они будут иметь тот же единый вид и в случае нескольких переменных (пока 2-х или 3-х). Надо только понять, как выглядит формула для расстояния в области определения функции.

7.1.2. Расстояния, виды множеств, окрестности

На плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) определим обычное евклидово расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

$$d_2(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Аналогично, в пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (x, y, z) расстояние между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ определяется как

$$d_3(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Упражнение 7.1. Проверьте, что для расстояний d_2 и d_3 выполнены аксиомы метрического пространства $D1$, $D2$, $D3$.

Определения 7.4. 1) *Открытым шаром* на плоскости $\mathbb{R}^2$ с центром в точке A радиуса $R > 0$ называется множество $B_R(A) = \{X \in \mathbb{R}^2 : d_2(A, X) < R\}$.

Аналогично, *открытым шаром* в пространстве $\mathbb{R}^3$ с центром в точке A радиуса $R > 0$ называется множество $B_R(A) = \{U \in \mathbb{R}^2 : d_3(A, U) < R\}$.

(Геометрически, открытый шар на плоскости — это просто открытый круг без границы-окружности, которая задается уравнением $d_2(A, X) = R$; открытый шар в пространстве — это обычный открытый шар без границы-сферы, которая задается уравнением $d_3(A, X) = R$.)

2) Для $\varepsilon > 0$ *ε-окрестностью точки* $A \in \mathbb{R}^2$ ($A \in \mathbb{R}^3$) называется открытый шар $B_\varepsilon(A)$.

3) Множество $U \subset \mathbb{R}^2$ ($U \subset \mathbb{R}^3$) называется *открытым*, если вместе с каждой точкой оно содержит некоторую ε-окрестность этой точки.

4) Множество $V \subset \mathbb{R}^2$ ($V \subset \mathbb{R}^3$) называется *замкнутым*, если его дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus V$ ($\mathbb{R}^3 \setminus V$) открыто.

5) Множество в $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре.

6) *Окрестностью точки* в $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) называется открытое множество, содержащее эту точку.

7.2. Непрерывность. Свойства непрерывных функций

Поскольку отдельное рассмотрение предела функции для наших целей не требуется, начнем сразу с непрерывности.

Определение 7.5. Пусть функция $f(A)$, $A = (x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $A_0(x_0, y_0)$. F называется *непрерывной в точке* A_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_2(A_0, A) < \delta \Rightarrow d_1(f(A_0), f(A)) < \varepsilon.$$

Аналогично, пусть функция $f(A)$, $A = (x, y, z)$ определена в некоторой окрестности точки $A_0(x_0, y_0, z_0)$. f называется непрерывной в точке A_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_3(A_0, A) < \delta \Rightarrow d_1(f(A_0), f(A)) < \varepsilon.$$

Функция называется *непрерывной на множестве* $M \subset \mathbb{R}^2$ ($M \subset \mathbb{R}^3$), если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Верны следующие теоремы о свойствах непрерывных функций:

7.2.1. Арифметика непрерывных функций

Теорема 7.1. *Если функции $f(A)$, $g(A)$, $A \in \mathbb{R}^2$ ($A \in \mathbb{R}^3$) непрерывны в точке $A_0 \in \mathbb{R}^2$ ($A_0 \in \mathbb{R}^3$), то в этой точке непрерывны: их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; их произведение fg, а если $g(A_0) \neq 0$, то и их частное f/g.*

Упражнение 7.2. Докажите эти утверждения.

7.2.2. Локальные свойства непрерывных функций

Теорема 7.2.

1) Если функция $f(A)$, $A \in \mathbb{R}^2$ ($A \in \mathbb{R}^3$) непрерывна в точке $A_0 \in \mathbb{R}^2$ ($A_0 \in \mathbb{R}^3$), то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

2) Если функция $f(A)$, $A \in \mathbb{R}^2$ ($A \in \mathbb{R}^3$) непрерывна в точке $A_0 \in \mathbb{R}^2$ ($A_0 \in \mathbb{R}^3$) и $f(A_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности этой точки она имеет тот же знак, что и $f(A_0)$.

Упражнение 7.3. Докажите эти утверждения.

7.2.3. Глобальные свойства непрерывных функций

В одномерном случае *глобальные* свойства непрерывных функций — это свойства функций, непрерывных на отрезке. В двумерном случае аналогом отрезка является прямоугольник (двумерный отрезок) $\{(x,y):a_1\le x\le b_1, a_2\le y\le b_2\}$, $a_1<b_1$, $a_2<b_2$ а в трехмерном — прямоугольный параллелепипед (трехмерный отрезок) $\{(x,y,z):a_1\le x\le b_1, a_2\le y\le b_2, a_3\le z\le b_3\}$, $a_1<b_1$, $a_2<b_2$, $a_3<b_3$.

Теорема 7.3. *Пусть функция $f(A)$, $A\in\mathbb{R}^2$, ($A\in\mathbb{R}^3$) непрерывна на двумерном (трехмерном) отрезке. Тогда:*

1) Она ограничена на этом отрезке.

2) Она принимает на этом отрезке минимальное и максимальное значения m и M.

3) Она принимает на этом отрезке все промежуточные значения между m и M.

Упражнение 7.4. Докажите эту теорему.

7.2.4. Непрерывность сложной функции (композиции)

Теорема 7.4. *Пусть функция $f(A)$, $A\in\mathbb{R}^2$ ($A\in\mathbb{R}^3$) непрерывна в точке $A_0\in\mathbb{R}^2$ ($A_0\in\mathbb{R}^3$), а функция $g(y), y\in\mathbb{R}$, непрерывна в точке $f(A_0)$ Тогда функция $g(f(A))$ непрерывна в точке A_0.*

Упражнение 7.5. Докажите эту теорему.

Примеры. Важными примерами непрерывных функций являются координатные функции (проекции). На плоскости $\mathbb{R}^2$ для $A=(x,y)$ это функции $f_1(A)=x$, $f_2(A)=y$. Аналогично, в пространстве $\mathbb{R}^3$ для $A=(x,y,z)$ это функции $f_1(A)=x$, $f_2(A)=y$, $f_3(A)=z$.

Упражнение 7.6. Докажите, что координатные функции а) на $\mathbb{R}^2$; б) на $\mathbb{R}^3$ непрерывны.

Отсюда и из теорем 7.1, 7.4 следует, что на своей области определения непрерывны функции:

1) Многочлены, например, $f(x,y)=x^2+y^2$, $f(x,y,z)=4xy-5z^2+6xy^2z$ и т.п.

2) Рациональные функции — отношения двух многочленов, например,

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2},\;\; f(x,y,z)=\frac{6xyz}{x^3-4y^2+5xyz}$$

и т.п.

3) Элементарные функции от многочленов и рациональных функций, например, $f(x,y)=\sin(x+y)$, $f(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2}$, $f(x,y,z)=e^{xy/z^2}$.

4) Функции, полученные из функций пункта 3) применением теоремы об арифметике непрерывных функций и теоремы о непрерывности сложной функции, например,

$$f(x,y)=\frac{e^{x^2+y^2}}{\sin(x+y)},\quad f(x,y)=e^{\sin(x+y)},$$

$$f(x,y,z)=\ln(x-y+z)\cdot\cos(x+y+2z),\;\; f(x,y,z)=\cos(\operatorname{arctg}(\frac{\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2}{\mathrm{x}+\mathrm{z}})).$$

7.3. Дифференцируемость

Вопрос дифференцируемости функций нескольких переменных довольно сложный, и мы пока ограничимся частным случаем. Общее определение будет дано в Части II.

Для простоты проведем изложение для случая двух переменных, затем дадим краткую сводку результатов для трех.

Пусть функция $f(x,y)$ определена в окрестности точки (x_0,y_0). Зафиксируем y_0 и будем менять только x. Получим функцию одной переменной $f_1(x)=f(x,y_0)$, определенную в некоторой окрестности точки x_0 на одномерной числовой прямой $\mathbb{R}$. Индекс 1 означает, что меняется только первая переменная, а значение второй фиксировано.

Примеры. Пусть для всех примеров $(x_0,y_0)=(1,2)$.

1) $f(x,y)=x+y$. Тогда $f_1(x)=x+2$.

2) $f(x,y)=xy$. Тогда $f_1(x)=2x$.

3) $f(x,y)=y/x$. Тогда $f_1(x)=2/x$.

4) $f(x,y)=e^{x+y}$. Тогда $f_1(x)=e^{x+2}=e^2e^x$.

5) $f(x,y)=\frac{\sin(x+y)}{1+x^2+y^2}$. Тогда $f_1(x)=\frac{\sin(2x)}{5+x^2}$.

Пусть функция $f_1(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда ее производная в этой точке $f_1'(x_0)$ называется *частной производной функции* $f(x,y)$ *по переменной* x *в точке* (x_0, y_0). Используются различные обозначения для этой частной производной:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \partial_x f(x_0, y_0) = f_x'(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) := f_1'(x_0).$$

Мы будем пользоваться коротким обозначением $f_x'(x_0, y_0)$.

Примеры. Для всех примеров $(x_0, y_0) = (1, 2)$.
1) $f(x,y) = x + y$. Тогда $(x+y)_x'(1,2) = (x+2)'(1) = 1$.
2) $f(x,y) = xy$; $(xy)_x'(1,2) = (2x)'(1) = 2$.
3) $f(x,y) = y/x$; $(y/x)_x'(1,2) = (2/x)'(1) = -2/x^2(1) = -2$.
4) $f(x,y) = e^{x+y}$; $(e^{x+y})_x'(1,2) = (e^2 e^x)'(1) = e^3$.
5)

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{1+x^2+y^2}; \left(\frac{\sin(xy)}{1+x^2+y^2}\right)_x'(1,2) = \left(\frac{\sin(2x)}{5+x^2}\right)'(1) = \frac{2\cos(2x)(5+x^2) - \sin(2x)\cdot 2x}{(5+x^2)^2}(1) =$$

$$\frac{2\cos(2)\cdot 6 - \sin(2)\cdot 2}{(5+1)^2} = \frac{12\cos(2) - 2\sin(2)}{36} = \frac{\cos 2}{3} - \frac{\sin 2}{18}.$$

Аналогично определяется частная производная по переменной y. Фиксируем x_0 и получаем функцию $f_2(y)$, определенную в окрестности точки y_0. Если она имеет производную в точке y_0, ее называют *частной производной функции* $f(x,y)$ *по переменной* y *в точке* (x_0, y_0) и обозначают

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = \partial_y f(x_0, y_0) = f_y'(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) := f_2'(y_0),$$

мы будем пользоваться кратким обозначением $f_y'(x_0, y_0)$.

Примеры. Для всех примеров $(x_0, y_0) = (1, 2)$.
1) $f(x,y) = x - y$. Тогда $(x-y)_y'(1,2) = (1-y)'(2) = -1$.
2) $f(x,y) = xy$; $(xy)_y'(1,2) = (y)'(2) = 1$.
3) $f(x,y) = y/x$; $(y/x)_y'(1,2) = y'(2) = 1$.
4) $f(x,y) = e^{x-y}$; $(e^{x-y})_y'(1,2) = e\cdot(e^{-y})'(2) = -e\cdot e^{-y}(2) = e\cdot e^{-2} = 1/e$.
5)

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{1+x^2-y^2}; \left(\frac{\sin(xy)}{1+x^2-y^2}\right)_y'(1,2) = \left(\frac{\sin(y)}{2-y^2}\right)'(2) = \frac{\cos y(2-y^2) - \sin y(-2y)}{(2-y^2)^2}(2) =$$

$$\frac{-2\cos 2 + 4\sin 2}{4} = \sin 2 - (\cos 2)/2.$$

Ниже для простоты мы будем рассматривать только функции $f(x,y)$, которые имеют частные производные в каждой точке области определения.

При практическом вычислении частной производной, например, по x в произвольной точке (x,y), надо считать y постоянным числом и вычислять производную по x от полученной функции одной переменной. Это аналогично тому, как мы, например, берем производную в общем виде от функции обратной пропорциональности: $(k/x)' = k(1/x)' = k(-1/x^2) = -k/x^2$, только здесь пользуемся буквой k вместо y.

Так как частные производные — это производные функций одной переменной, то для них верны все теоремы о дифференцировании, см. пункт 7 раздела 1; ими следует пользоваться при вычислении.

Примеры. 1) $f(x,y) = x - y$; $f_x' = 1$; $f_y' = -1$.
2) $f(x,y) = xy$; $f_x' = y$; $f_y' = x$.
3) $f(x,y) = y/x$; $f_x' = -y/x^2$; $f_y' = 1/x$.
4) $f(x,y) = e^{x-y}$; $f_x' = e^{x-y}$; $f_y' = e^{x-y}\cdot(-1) = -e^{x-y}$.
5) $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{1+x^2-y^2}$;

$$f_x' = \frac{\cos(xy)\cdot y(1+x^2-y^2) - \sin(xy)(1+2x)}{(1+x^2-y^2)^2}; \quad f_y' = \frac{\cos(xy)\cdot x(1+x^2-y^2) - \sin(xy)(1-2y)}{(1+x^2-y^2)^2}.$$

6) $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$;

$$f'_x=\frac{1}{1+x^2+y^2}(1+x^2+y^2)'_x=\frac{2x}{1+x^2+y^2};\quad f'_y=\frac{1}{1+x^2+y^2}(1+x^2+y^2)'_y=\frac{2y}{1+x^2+y^2}.$$

7) $f(x,e)=e^{\frac{x+y}{x-y}}$;

$$f'_x=e^{\frac{x+y}{x-y}}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_x=e^{\frac{x+y}{x-y}}\frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot 1}{(x-y)^2}=-\frac{2ye^{\frac{x+y}{x-y}}}{(x-y)^2};$$

$$f'_y=e^{\frac{x+y}{x-y}}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)'_y=e^{\frac{x+y}{x-y}}\frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot(-1)}{(x-y)^2}=\frac{2xe^{\frac{x+y}{x-y}}}{(x-y)^2}.$$

Рассмотрим случай трех переменных. Пусть функция $f(x,y,z)$ определена в окрестности точки (x_0,y_0,z_0). Зафиксируем значения y_0,z_0 и рассмотрим функцию одной переменной $f_1(x)=f(x,y_0,z_0)$, определенную в некоторой одномерной окрестности точки x_0. Если она имеет производную в точке x_0, то эта производная называется *частной производной функции* $f(x,y,z)$ *по переменной* x *в точке* (x_0,y_0,z_0): $\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0,z_0)=\partial_x f(x_0,y_0,z_0)=f'_x(x_0,y_0,z_0)=f_x(x_0,y_0,z_0):=f'_1(x_0)$.

Аналогично определяются и обозначаются частные производные по y и по z. По y: фиксируем x_0,z_0, получаем функцию одной переменной $f_2(y)=f(x_0,y,z_0)$, тогда $\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0,z_0)=\partial_y f(x_0,y_0,z_0)=f'_y(x_0,y_0,z_0)=f_y(x_0,y_0,z_0):=f'_2(y_0)$.

Упражнение 7.6. Сформулируйте определение и запишите обозначения частной производной функции $f(x,y,z)$ по переменной z в точке (x_0,y_0,z_0).

При практическом вычислении частной производной по x в произвольной точке (x,y,z) считаем y и z постоянными числами и вычисляем производную функции одной переменной $f_1(x)$. Это аналогично тому, как мы вычисляем производную линейного двучлена в общем виде: $(ax+b)'=a$. Вместо a можно было написать y, а вместо b — z.

Используем теоремы о производных функций одной переменной. Приведем примеры вычисления частных производных сразу в произвольной точке.

Примеры. 1) $f(x,y,z)=x+2y+3z$; $f'_x=1$; $f'_y=2$; $f'_z=3$.
2) $f(x,y,z)=xy^2z^3$; $f'_x=y^2z^3$; $f'_y=2xyz^3$; $f'_z=3xy^2z^2$.
3) $f(x,y,z)=\frac{y}{xz^2}$; $f'_x=-\frac{y}{x^2z^2}$; $f'_y=\frac{1}{xz^2}$; $f'_x=-2\frac{y}{x^2z^3}$.
4) $f(z,y,z)=e^{x-y+2z}$; $f'_x=e^{x-y+2z}$; $f'_y=e^{x-y+2z}\cdot(-1)=-e^{x-y+2z}$; $f'_z=e^{x-y+2z}\cdot(2)=e^{x-y+2z}$.
5) $f(z,y,z)=\frac{\sin(xyz)}{1+x^2-y^2+2z^2}$;

$$f'_x=\frac{\cos(xyz)yz(1+x^2-y^2+2z^2)-\sin(xyz)\cdot(2x)}{(1+x^2-y^2+2z^2)^2};\quad f'_y=\frac{\cos(xyz)xz(1+x^2-y^2+2z^2)-\sin(xyz)\cdot(-2y)}{(1+x^2-y^2+2z^2)^2};$$

$$f'_z=\frac{\cos(xyz)xy(1+x^2-y^2+2z^2)-\sin(xyz)\cdot(4z)}{(1+x^2-y^2+2^2)^2}.$$

6) $f(z,y,z)=\ln(1+x^2+y^2+z^2)$;

$$f'_x=\frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)'_x=\frac{2x}{1+x^2+y^2+z^2};$$

$$f'_y=\frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)'_y=\frac{2}{1+x^2+y^2+z^2};$$

$$f'_z=\frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}(1+x^2+y^2+z^2)'_z=\frac{2z}{1+x^2+y^2+z^2}.$$

7) $f(z,y,z)=e^{\frac{x+y+z}{x-y+2z}}$;

$$f'_x=e^{\frac{x+y+z}{x-y+2z}}\left(\frac{x+y+z}{x-y+2z}\right)'_x=e^{\frac{x+y+z}{x-y+2z}}\frac{1\cdot(x-y+2z)-(x+y+z)\dot{1}}{(x-y+2z)^2}=e^{\frac{x+y+z}{x-y+2z}}\frac{-2y+z}{(x-y+2z)^2};$$

$$f'_y = e^{\frac{x+y+z}{x-y+2z}} \left(\frac{x+y+z}{x-y+2z}\right)'_y = e^{\frac{x+y+z}{x-y+2z}} \frac{1\cdot(x-y+2z)-(x+y+z)\cdot(-1)}{(x-y+2z)^2} = e^{\frac{x+y+z}{x-y+2z}} \frac{2x+3z}{(x-y+2z)^2};$$

$$f'_z = e^{\frac{x+y+z}{x-y+2z}} \left(\frac{x+y+z}{x-y+2z}\right)'_z = e^{\frac{x+y+z}{x-y+2z}} \frac{1\cdot(x-y+2z)-(x+y+z)\cdot(2)}{(x-y+2z)^2} = e^{\frac{x+y+z}{x-y+2z}} \frac{-x-3y}{(x-y+2z)^2}.$$

8. Дифференциал функции двух и трех переменных

8.1. Определения

Пусть функция $f(x,y)$ определена на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, имеет частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ во всех точках $\mathbb{R}^2$, причем эти производные непрерывны на $\mathbb{R}^2$.

Определение 8.1. *Дифференциалом функции* $f(x,y)$ называется дифференциальная 1-форма $df(x,y) := f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$, определенная на $T\mathbb{R}^2$.

Подробно: возьмем точку $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Касательная плоскость $T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$ к $\mathbb{R}^2$ в точке (x,y) состоит из двумерных векторов с началом в этой точке. Если такой вектор имеет координаты ξ_1, ξ_2, то значение формы $df(x,y)$ на этом векторе равно $df(x,y)(\xi_1,\xi_2) = f'_x(x,y)dx(\xi_1,\xi_2) + f'_y(x,y)dy(\xi_1,\xi_2) = f'_x(x,y)\xi_1 + f'_y(x,y)\xi_2$.

Примеры. 1) $f(x,y) = x+y$; $df(x,y) = f'_x dx + f'_y dy = dx + dy$, $df(x,y)(\xi_1,\xi_2) = (x+y)'_x dx(\xi_1,\xi_2) + (x+y)'_y dy(\xi_1,\xi_2) = 1\cdot\xi_1 + 1\cdot\xi_2 = \xi_1+\xi_2$.

Далее подробности вычисления частных производных опускаем.

2) $f(x,y) = xy$; $df(x,y)(\xi_1,\xi_2) = y\xi_1 + x\xi_2$.

3) $f(x,y) = y/(1+x^2)$; $df(x,y)(\xi_1,\xi_2) = -(2xy/(1+x^2)^2)\xi_1 + (1/(1+x^2))\xi_2$.

4) $f(x,y) = \sin(x+2y)$; $df(x,y)(\xi_1,\xi_2) = \cos(x+2y)\xi_1 + 2\cos(x+2y)\xi_2$.

5) $f(x,y) = e^{x-y}$; $df(x,y)(\xi_1,\xi_2) = e^{x-y}\xi_1 - e^{x-y}\xi_2$.

Аналогично, для случая трех переменных:

Пусть функция $f(x,y,z)$ определена на всем пространстве $\mathbb{R}^3$, имеет частные производные $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$ и $f'_z(x,y,z)$ во всех точках $\mathbb{R}^3$, причем эти производные непрерывны на $\mathbb{R}^3$.

Определение 8.2. *Дифференциалом функции* $f(x,y,z)$ называется дифференциальная 1-форма $df(x,y,z) := f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz$, определенная на $T\mathbb{R}^3$.

Подробно: возьмем точку (x,y,z). Касательное пространство $T_{(x,y,z)}\mathbb{R}^3$ к $\mathbb{R}^3$ в точке (x,y,z) состоит из трехмерных векторов с началом в этой точке. Если такой вектор имеет координаты ξ_1,ξ_2,ξ_3, то значение формы $df(x,y)$ на этом векторе равно $df(x,y,z)(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = f'_x(x,y,z)dx(\xi_1,\xi_2,\xi_3) + f'_y(x,y,z)dy(\xi_1,\xi_2,xi_3) + f'_z(x,y,z)dz(\xi_1,\xi_2,xi_3) = f'_x(x,y,z)\xi_1 + f'_y(x,y,z)\xi_2 + f'_z(x,y,z)\xi_3$.

Примеры. 1) $f(x,y,z) = x+y+z$; $df(x,y)(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \xi_1+\xi_2+\xi_3$.

2) $f(x,y,z) = xyz$; $df(x,y)(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = yz\xi_1 + xz\xi_2 + xy\xi_3$.

3) $f(x,y,z) = yz^2/(1+x^2)$; $df(x,y,z)(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = -(2xyz^2/(1+x^2)^2)\xi_1 + (z^2/(1+x^2))\xi_2 + (2yz/(1+x^2))\xi_3$.

4) $f(x,y,z) = \sin(x+2y-z)$; $df(x,y,z)(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \cos(x+2y-z)\xi_1 + 2\cos(x+2y-z)\xi_2 - \cos(x+2y-z)\xi_3$.

5) $f(x,y) = e^{x-y+3z}$; $df(x,y)(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = e^{x-y+3z}\xi_1 - e^{x-y+3z}\xi_2 + 3e^{x-y+3z}\xi_3$.

8.2. Свойства дифференциалов

Эти свойства формулируются одинаково для случая функций двух и трех переменных, поэтому будем пользоваться кратким обозначением функции — f.

1) $d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ (линейность);

2) $d(fg) = df\cdot g + f\cdot dg$ (формула Лейбница);

3) $d(f/g) = (df\cdot g - f\cdot dg)/g^2$, $g \neq 0$.

Упражнение 8.1. Докажите эти свойства. (*Подсказка*: они следуют из свойств производной функции одной переменной.)

9. Геометрический смысл дифференциала

9.1. График функции двух переменных

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, удовлетворяющую условиям предыдущего пункта. *Графиком* этой функции называется множество точек вида $\{(x, y, z) : z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$. Это некоторая двумерная поверхность в трехмерном промтранстве $\mathbb{R}^3$. "Двумерная" означает, что каждая ее точка, лежащая в трехмерном пространстве, определяется значением только двух переменных x, y.

Примеры. 1) $z = f(x, y) = ax + by + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. (9.1)

Из геометрии известно, что графиком такой функции является плоскость. Построить этот график можно, отметив в пространстве три точки, вычисленные по формуле (9.1) и не лежащие на одной прямой.

а) $z = 1$. Отмечаем три точки $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ и проводим через них плоскость, которая оказывается горизонтальной, т.е. параллельной плоскости OXY и лежащей на высоте 1 по оси OZ, см. рисунок 9-1.

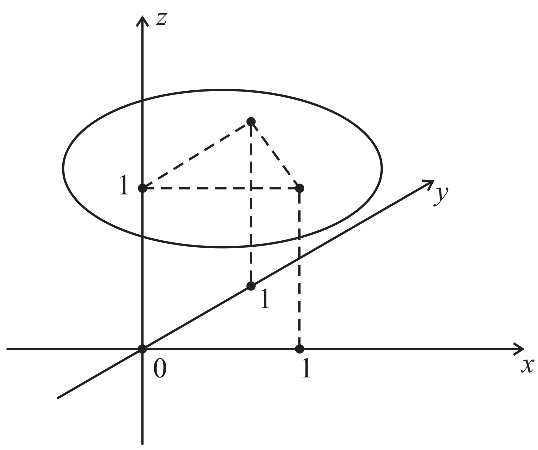


Рис. 9-1.

б) $z = x - 2y + 3$. Отмечаем три точки $(0, 0, 3)$, $(1, 0, 4)$, $(0, 1, 1)$ и проводим через них плоскость, см. рисунок 9-2.

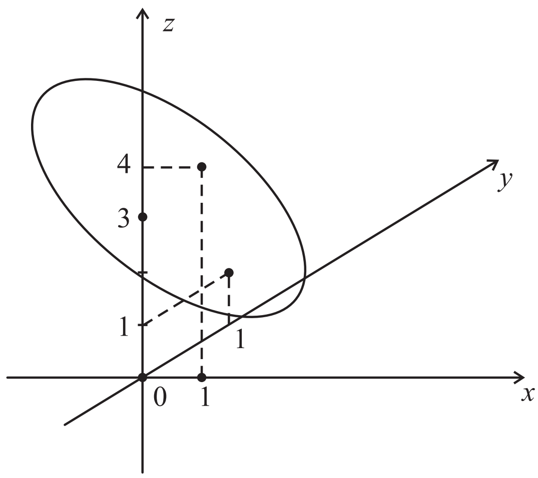


Рис. 9-2.

Нетрудно построить график, когда зависимость есть только от одной переменной из двух. Например, $z = f(x)$. В плоскости OXZ строим график функции $z = f(x)$ и переносим его параллельно оси OY на все значения y, см. рисунок 9-3. Получится так называемая *цилиндрическая поверхность*, которая является графиком функции $x = f(x)$ во всем пространстве, рис. 9-3.

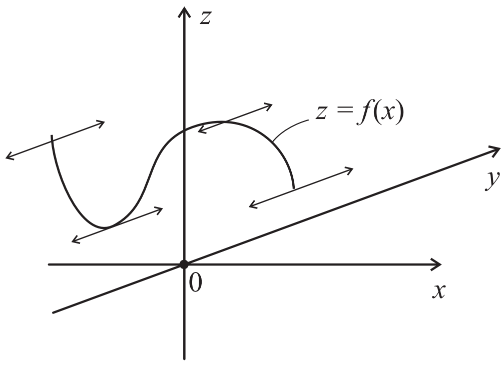


Рис. 9-3.

Упражнение 9.1. 1) Объясните, почему это верно. 2) Как строится график функции $z = f(y)$?

Рассмотрим более сложный пример $z = x^2 + y^2$. (9.2)

Пусть $y = 0$, тогда $z = x^2$. Таким образом, в плоскости OXZ получаем обычную параболу $z = x^2$. (9.3)

Упражнение 9.2. Докажите, что график функции (9.2) получается вращением параболы (9.3) вокруг оси OZ.

Получается поверхность вращения, которая называется *параболоидом вращения*, см. рисунок 9-4.

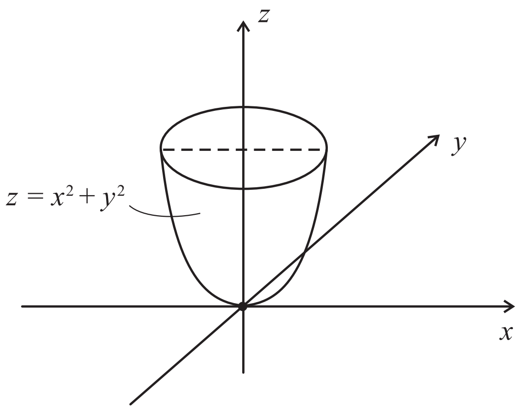


Рис. 9-4.

9.2. Касательная плоскость к графику функции

Пусть для функции $z = f(x, y)$ определен дифференциал $df(x_0, y_0)$ в некоторой точке (x_0, y_0). Зафиксируем y_0, получим функцию $z = f_1(x)$, графиком которой является сечение графика функции $z = f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$, см. рисунок 9-5.

Аналогично, зафиксируем x_0, получим функцию $z = f_2(y)$, графиком которой является сечение графика функции $z = f(x, y)$ плоскостью $x = x_0$, рис. 9-5.

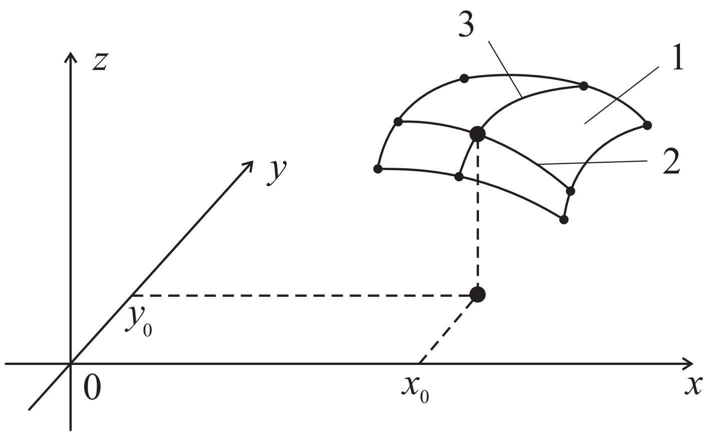


Рис. 9-5. 1 — график функции $z = f(x, y)$, 2 — график функции $z = f_1(x)$, 3 — график функции $z = f_2(y)$

Далее, $f'_x(x_0, y_0)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции $z = f_1(x)$ в плоскости $y = y_0$, в точке x_0; $f'_y(x_0, y_0)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции $z = f_2(y)$ в плоскости $x = x_0$, в точке y_0, см. рисунок 9-6.

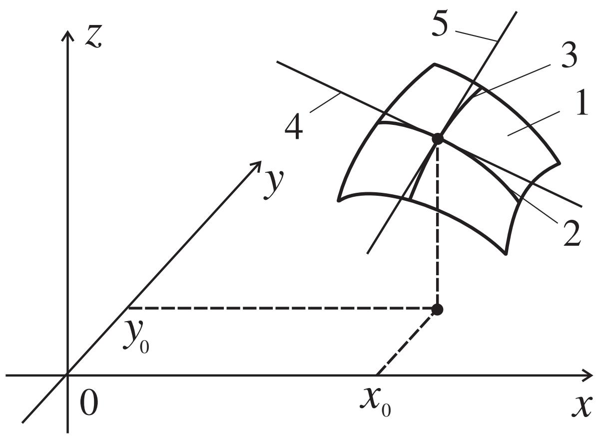


Рис. 9-6. 1 — график функции $z = f(x, y)$, 2 — график функции $z = f_1(x)$, 3 — график функции $z = f_2(y)$, 4. Касательная к графику $z = f_1(x)$ в точке x_0, 5. Касательная к графику $z = f_2(y)$ в точке y_0

Эти касательные пересекаются в точке (x_0, y_0, z_0), $z_0 = f(x_0, y_0))$, значит, через них можно провести единственную плоскость. Естественно эту плоскость назвать *касательной плоскостью к графику функции* $z = f(x, y)$ *в точке* x_0, y_0, z_0, см. рисунок 9-7.

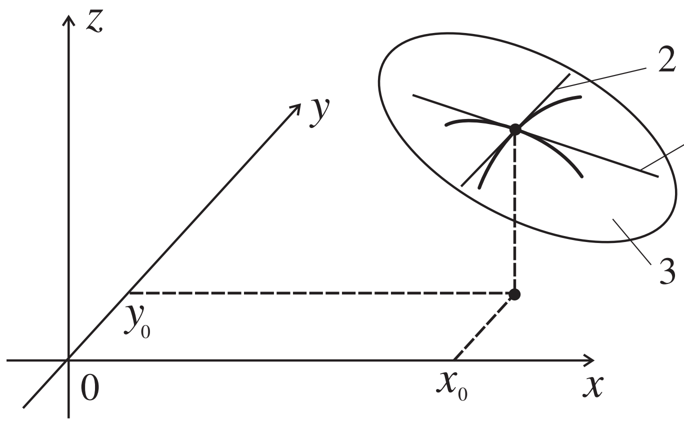


Рис. 9-7.

1 — касательная прямая к графику $z = f_1(x)$ в точке (x_0, z_0)

2 — касательная прямая к графику $z = f_2(y)$ в точке (y_0, z_0)

3 — касательная плоскость к графику $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0)

Более строгое обоснование, почему это касательная плоскость, будет дано в части II.

Теперь рассмотрим касательную плоскость $T_{(x_0,y_0)}\mathbb{R}^2$, с координатами u, v, в точке (x_0, y_0), к исходной плоскости $\mathbb{R}^2$ — с координатами x, y, см. рисунок 9-8.

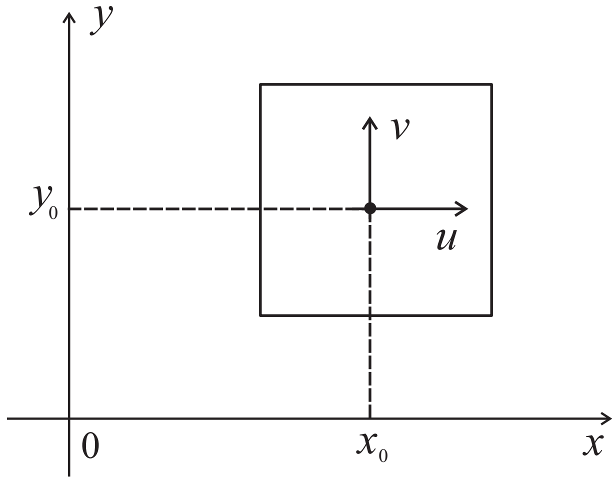


Рис. 9-8.

Упражнение 9.3. Докажите, что в координатах (u, v, z) уравнение касательной плоскости к графику функции $z = f(x, y)$ в точке x_0, y_0, z_0 имеет вид

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)u + f'_y(x_0, y_0)v. \tag{9.4}$$

Теперь заметим, что это уравнение можно переписать в виде $z = z_0 + df(x_0, y_0)(u, v)$.

Из этой формулы виден геометрический смысл дифференциала функции двух переменных в данной точке (x_0, y_0): дифференциал определяет направление касательной плоскости в пространстве, а значение функции $z_0 = f(x_0, y_0)$ показывает, на какой "высоте" над точкой (x_0, y_0) проходит эта плоскость.

Заметим, что уравнение (9.4) легко записать в исходных координатах x, y: поскольку $u = x - x_0, v = y - y_0$, см. рис. 9-8, имеем: $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

Пример. Пусть $z = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (3, 4)$. Тогда $z_0 = 25$, $f'_x(x_0, y_0) = 6$, $f'_y(x_0, y_0) = 8$; уравнение касательной плоскости к графику в точке $(3, 4, 25)$ имеет вид $z = 25 + 6u + 8v$ в координатах u, v, z, а также $z = 25 + 6(x - 3) + 8(y - 4)$ в координатах x, y, z.

9.3. Случай трех переменных

График функции трех переменных $w = f(z, y, z)$ — это множество $\{(x, y, z, w) : w = f(x, y, z)\} \subset \mathbb{R}^4$. Это трехмерная поверхность в четырехмерном пространстве; трехмерная — так как каждая ее точка определяется значениями трех переменных x, y, z. Иллюстрировать такой график и его сечения мы не будем (хотя способы визуализации множеств в четырехмерном пространстве существуют, см. [2]). Аналитически же рассуждения аналогичны случаю двух переменных.

Пусть $w_0 = f(x_0, y_0, z_0)$ и определен дифференциал $df(x_0, y_0, z_0)$. Зафиксируем y_0, z_0, получим функцию $w = f_1(x) = f(x, y_0, z_0)$. Производная $f'_1(x_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции $f_1(x)$ в точке (x_0, w_0). Аналогично, производные $f'_2(y_0) = f'_y(x_0, y_0, z_0)$ и $f'_3(z_0) = f'_z(x_0, y_0, z_0)$ — угловые коэффициенты касательных к графикам функций $f_2(y) = f(x_0, y, z_0)$, $f_3(z) = f(x_0, y_0, z)$ в точках (y_0, w_0), (z_0, w_0) соответственно.

Три касательные к графикам $f_1(x)$, $f_2(y)$ и $f_3(z)$ не лежат в одной плоскости, поэтому они однозначно определяют трехмерное пространство, содержащее точку (x_0, y_0, z_0) и лежащее в четырехмерном пространстве с координатами x, y, z, w. Это трехмерное пространство называют *касательной гиперплоскостью к графику функции* $w = f(x, y, z)$ *в точке* (x_0, y_0, z_0, w_0).

Рассмотрим в точке (x_0, y_0, z_0) касательное пространство $T_{(x_0,y_0,z_0)}\mathbb{R}^3$, с координатами t, u, v, к исходному пространству $\mathbb{R}^3$ — с координатами x, y, z, см. рисунок 9-9.

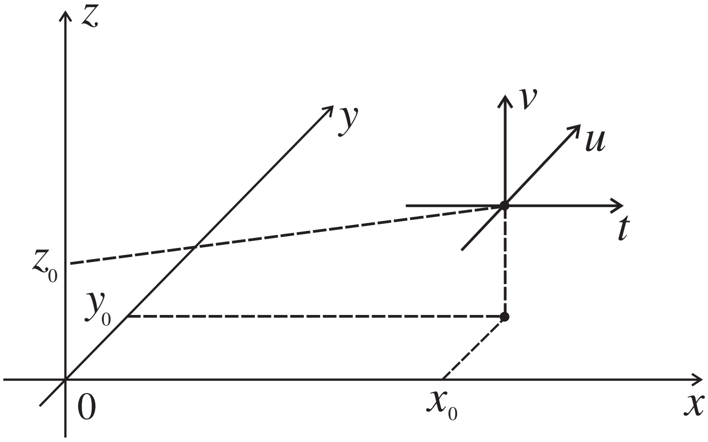


Рис. 9-9.

Упражнение 9.4. Докажите, что в координатах (t, u, v, w) уравнение касательной гиперплоскости имеет вид $w = f(x_0, y_0, z_0) + f'_x(x_0, y_0, z_0)t + f'_y(x_0, y_0, z_0)u + f'_z(x_0, y_0, z_0)v = w_0 + df(x_0, y_0, z_0)(t, u, v)$. (9.5)

Соответственно, в координатах x, y, z, w уравнение (9.5) имеет вид
$w = f(x_0, y_0, z_0) + f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$.

Таким образом, дифференциал определяет направление касательной гиперплоскости в четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$, а значение функции $w_0 = f(x_0, y_0, z_0)$ задает точку (x_0, y_0, z_0, w_0), через которую проходит эта гиперплоскость.

Пример. Пусть $w = x^2+2y^2-z^2$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 3, 2)$. Тогда $w_0 = 14$, $f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0, z_0) = 12$, $f'_z(x_0, y_0, z_0) = -4$; уравнение касательной плоскости к графику в точке $(0, 3, 2, 14)$ имеет вид $w = 14+12u-4v$ в координатах t, u, v, w, а также $w = 14 + 12(y - 3) - 4(z - 2)$ в координатах x, y, z, w.

10. Интеграл 0- и 1-формы на плоскости и в пространстве

10.1. 0-форма

0-форма на плоскости — это просто функция $\omega_0 = f(x, y)$, в пространстве — $\omega_0 = f(x, y, z)$. Интеграл от 0-формы берется по 0-мерному объекту, т.е. точке.

Мы рассматриваем точки, ориентированные приписыванием знака “+” или “−”. Тогда на плоскости, для точки $A(x_0, y_0)$, по определению,

$$\int\limits_{A_+} \omega_0 = f(x_0, y_0), \quad \int\limits_{A_-} \omega_0 = -f(x_0, y_0).$$

В пространстве, для точки $A(x_0, y_0, z_0)$, по определению,

$$\int\limits_{A_+} \omega_0 = f(x_0, y_0, z_0), \quad \int\limits_{A_-} \omega_0 = -f(x_0, y_0, z_0).$$

10.2. 1-форма

1-форма на плоскости имеет вид $\omega_1 = p(x, y)dx+q(x, y)dy$, в пространстве — $\omega_1 = p(x, y, z)dx+q(x, y, z)dy+ r(x, y, z)dz$. Интеграл от 1-формы берется по одномерному объекту — гладкой кривой, — который мы теперь введем.

10.3. Гладкие кривые на плоскости и в пространстве

10.3.1. Случай плоскости

Определение 10.1. *Гладкой кривой на плоскости* называется отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$, причем существуют производные $x'(t)$, $y'(t)$, непрерывные на $[t_1, t_2]$, и
$(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)\ \forall\, t \in [t_1, t_2]$. (10.1)

Замечание 10.1.: 1) Условие (10.1) можно также записать в виде $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0\, \forall\, t \in [t_1, t_2]$.

2) Поясним смысл условия (10.1). С геометрической точки зрения отображение $\gamma(t)$ задает некоторую кривую на плоскости. Хорошо известный в школе пример: $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, t \in [0, 2\pi]$. Получим окружность, уравнение которой в декартовых координатах имеет вид $x^2+y^2 = 1$. Условия (10.1) обеспечивает, что в каждой точке кривой определена единственная касательная прямая с направляющим вектором $(x'(t), y'(t))$. Например, для окружности $(x'(t), y'(t)) = (-\sin t, \cos t) \perp (\cos t, \sin t) = (x(t), y(t))$ — мы видим, что касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Если при каком-то t_0 окажется $(x'(t_0), y'(t_0)) = (0, 0)$, то касательная в этой точке не определена. Геометрически при этом могут возникнуть “уголки”, “клювы” и т.п., см. рисунок 10-1.

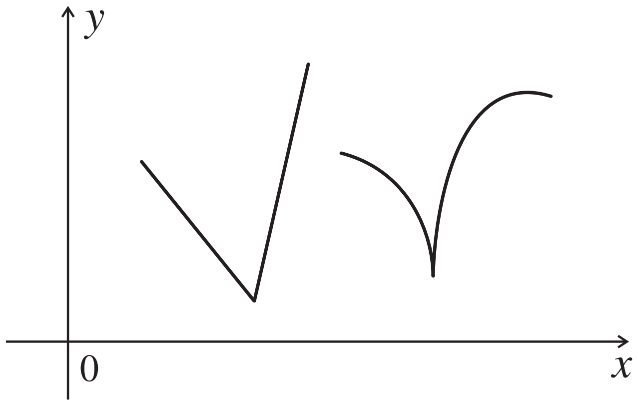


Рис. 10-1.

Условие (10.1) исключает подобные линии.

С точки зрения механики отображение $\gamma(t)$ задает движение точки $(x(t), y(t))$ по плоскости в зависимости от времени t. Вектор $(x'(t), y'(t))$ является вектором скорости движения точки в момент времени t и является касательным вектором к траектории в точке $(x(t), y(t))$, см. рисунок 10-2.

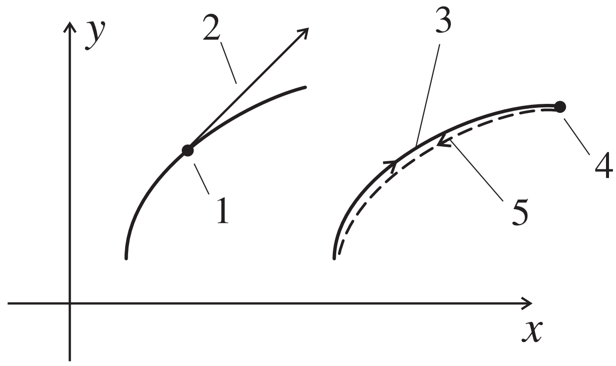


Рис. 10-2.
1. Точка траектории $(x(t), y(t))$; 2. вектор скорости $(x'(t), y'(t))$; 3. “движение вперед”;
4. точка остановки; 5. “движение назад”.

Условие (10.1) означает, что ни в какой момент скорость движения точки не равна нулю. Нулевая скорость означала бы, что в этот момент точка остановилась. После чего движение можно продолжить в произвольном направлении, что соответствует отсутствию касательной у траектории. Например, можно продолжить движение по той же траектории в обратную сторону, см. рис. 10-2. Условием (10.1) мы исключаем подобные ситуации.

3) Следует отличать само *отображение* $\gamma(t)$ от его *образа* — линии на плоскости. Например, образы отображений $\gamma_1(t) : x(t) = \cos t, y(t) = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$ и $\gamma_2(t) : x(t) = \cos t, y(t) = \sin t,\ t \in [0, 4\pi]$ одинаковы — это единичная окружность $x^2 + y^2 = 1$, но отображения γ_1 и γ_2 различны. Под гладкой кривой мы понимаем именно **отображение**, а не его образ.

Ориентация гладкой кривой

Будем считать, что гладкая кривая ориентирована так же, как отрезок $[t_1, t_2]$, $t_1 < t_2$, на котором определено отображение γ. Т.е. направление от t_1 к t_2 считаем положительным, а противоположное — отрицательным.

10.3.2. Случай трехмерного пространства

Определение 10.2. *Гладкой кривой в пространстве* называется отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$, причем существуют производные $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$, непрерывные на $[t_1, t_2]$, и

$$(x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0)\ \forall t \in [t_1, t_2]. \tag{10.2}$$

Замечание 10.1. остается в силе с учетом увеличения размерности на 1. Определение ориентации то же.

11. Интегрирование 1-формы по гладкой кривой

11.1. Случай плоскости. Основные определения

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ определена 1-форма $\omega_1 = p(x, y)dx + q(x, y)dy$. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$.

Чтобы проинтегрировать форму ω_1 по кривой γ, "перенесем" ее на отрезок $[t_1, t_2]$ (это аналогично замене переменной в одномерном случае, см. 5.2.6). А именно, определим на отрезке $[t_1, t_2]$ одномерную 1-форму ω_1^* подстановкой $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ в форму ω_1: $\omega_1^* = p(x(t), y(t))dx(t) + q(x(t), y(t))dy(t) = p(x(t), y(t))x'(t)dt + q(x(t), y(t))y'(t)dt = (p(x(t), y(t))x'(t) + q(x(t), y(t))y'(t))dt$. Кратко это выражение можно записать как $\omega_1^* = ((p, q) \cdot (x', y'))dt$, где точка означает скалярное произведение.

Определение 11.1. *Интегралом 1-формы ω_1 по ориентированной гладкой кривой γ* называется интеграл от перенесенной формы ω_1^* по ориентированному отрезку $[t_1, t_2]$:

$$\int_\gamma \omega_1 := \int_{[t_1,t_2]} \omega_1^*.$$

Примеры. 1) Пусть γ — отрезок $[x_1, x_2]$ на оси OX, где $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$, т.е. $x(t) = t$, $y(t) = 0$. Пусть $p(x, y)$ зависит только от x: $p(x, y) = p(x)$; $q(x, y) = 0$. Тогда $\omega_1 = p(x)dx$, $\omega_1^* = p(x(t))dx(t) = p(t)t'dt = p(t)dt$ и $\int_\gamma \omega_1 = \int_{[t_1,t_2]} \omega_1^* = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt$.

2) Пусть γ — отрезок $x(t) = t$, $y(t) = t$, $t \in [0, 1]$, $\omega_1 = (x + y)dx + (x - 2y)dy$. Тогда $\omega_1^* = 2tdt - tdt = tdt$,

$$\int_\gamma \omega_1 = \int_{[0,1]} \omega_1^* = \int_0^1 tdt = \frac{t^2}{2}|_0^1 = 1/2.$$

3) а) Пусть γ — окружность $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, $\omega_1 = xdy - ydx$. Тогда $\omega_1^* = \cos t(\sin t)'dt - \sin t(\cos t)'dt = (\cos^2 t + \sin^2 t)dt = dt$.

$$\int_\gamma \omega_1 = \int_{[0,2\pi]} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

что совпало с угловым размером окружности, т.е. углом, под которым она видна из начала координат . Это не случайно, см. пункт 12.1 ниже.

б) То же, но $t \in [0, 4\pi]$. Тогда

$$\int_\gamma \omega_1 = \int_{[0,4\pi]} dt = \int_0^{4\pi} dt = 4\pi,$$

получили удвоенную длину окружности, так как при заданном отображении γ окружность "проходится два раза".

4) Пусть γ — та же окружность, $t \in [0, 1]$, $\omega_1 = xdx + ydy$. Тогда $\omega_1^* = \cos t(\cos t)'dt + \sin t(\sin t)'dt = (-\cos t \sin t + \sin t \cos t)dt = 0$, поэтому $\int_\gamma \omega_1 = 0$. Это тоже не случайный результат, см. пункт 12.2 ниже.

11.2. Замена переменной в интеграле. Случай плоскости

Рассмотрим отображение $\varphi : [\tau_1, \tau_2] \to [t_1, t_2]$, такое, что
$\varphi(\tau_1) = t_1$, $\varphi(\tau_2) = t_2$ и производная $\varphi'(\tau)$ непрерывна на $[\tau_1, \tau_2]$. (11.1)

Пусть γ — гладкая кривая на плоскости, заданная на $[t_1, t_2]$. Тогда на $[\tau_1, \tau_2]$ получим гладкую кривую $\gamma_\varphi(\tau) = \gamma(\varphi(\tau))$. Пусть в $\mathbb{R}^2$ задана 1-форма $\omega_1 = p(x, y)dx + q(x, y)dy$.

Теорема 11.1.

$$\int\limits_\gamma \omega_1 = \int\limits_{\gamma_\varphi} \omega_1 \cdot \varphi'(\tau).$$

Доказательство. Вычислим левую часть:

$$\int\limits_{\gamma_\varphi} \omega_1 = \int\limits_{[t_1,t_2]} (p(x(t)), y(t)), q(x(t)), y(t))) \cdot (x'_t(t)), y'_t(t)))dt, \tag{11.2}$$

мы указали, что производная берется по переменной t. Вычислим правую часть:

$$\int\limits_\gamma \omega_1 = \int\limits_{[\tau_1,\tau_2]} (p(x(\varphi(\tau))), y(\varphi(\tau))), q(x(\varphi(\tau))), y(\varphi(\tau)))) \cdot (x'_\tau(\varphi(\tau))), y'_\tau(\varphi(\tau))))d\varphi(\tau), \tag{11.3}$$

мы указали, что производная берется по переменной τ. Это выражение равно

$$\int\limits_{[\tau_1,\tau_2]} (p(x(\varphi(\tau))), y(\varphi(\tau))), q(x(\varphi(\tau))), y(\varphi(\tau)))) \cdot (x'_\tau(\varphi(\tau))), y'_\tau(\varphi(\tau))))\varphi'(\tau)d\tau,$$

что совпадает с (11.2) по теореме о замене переменной в одномерном интеграле.

Примеры. 1) Пусть γ задана как $x(t) = t$, $y(t) = 0$, $t \in [t_1, t_2]$, $\omega_1 = p(x)dx$; φ удовлетворяет условиям (11.1). Тогда

$$\int\limits_\gamma \omega_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} p(t)dt; \quad \int\limits_{\gamma_\varphi} \omega_1\varphi'(\tau) = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} p(\varphi(t))\varphi'(\tau)d\tau$$

и эти интегралы равны — это просто теорема о замене переменной в одномерном интеграле.

2) Пусть γ задана как $x(t) = t$, $y(t) = t$, $t \in [0, 1]$, $\omega_1 = (x + y)dx + (x - 2y)dy$. Мы раньше вычислили $\int\limits_\gamma \omega_1 = 1/2$.

Рассмотрим отображение $\varphi(\tau) = \sin\tau$, $\tau \in [0, \pi/2]$. Тогда, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\pi/2) = 1$, $\varphi'(\tau) = \cos\tau$. Кривая γ_φ задается как $x = \sin\tau$, $y = \sin\tau$, $\tau \in [0, \pi/2]$. Вычисляем

$$\int\limits_{\gamma_\varphi} \omega_1\varphi'(\tau) = \int\limits_{[0,\pi/2]} (2\sin\tau - \sin\tau)\cos\tau\, d\tau = \int\limits_0^{\pi/2} \sin\tau\cos\tau\, d\tau = 1/2\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\tau\, d\tau =$$

$$1/2(-1/2\cos 2\tau)|_0^{\pi/2} = (-1/4\cos 2\tau)|_0^{\pi/2} = -1/4\cos\pi + 1/4\cos 0 = 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

Видим, что результаты совпадают.

3а) Пусть γ задана как $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$; $\omega_1 = xdy - ydx$. Мы раньше вычислили $\int\limits_\gamma \omega_1 = 2\pi$.

Определим $\varphi : [0, 1] \to [0, 2\pi]$, $\varphi(\tau) = 2\pi\tau$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 2\pi$, $\varphi'(\tau) = 2\pi$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma_\varphi} \omega_1\varphi'(\tau) = \int\limits_{[0,1]} (\cos 2\pi\tau \cdot \cos 2\pi\tau - \sin 2\pi\tau(-\sin 2\pi\tau))d\tau = 2\pi\int\limits_0^1 (\cos^2 2\pi\tau 2\pi\tau + \sin^2 2\pi\tau) =$$

$$2\pi\int\limits_0^1 d\tau = 2\pi \cdot 1 = 2\pi,$$

результаты совпадают.

3б) Пусть γ задана как $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$, $t\in[0,4\pi]$; $\omega_1=xdy-ydx$. Мы раньше вычислили $\int\limits_\gamma \omega_1=4\pi$. Определим $\varphi:[0,1]\to[0,4\pi]$, $\varphi(\tau)=4\pi\tau$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=4\pi$, $\varphi'(\tau)=4\pi$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma_\varphi}\omega_1\varphi'(\tau)=\int\limits_{[0,1]}(\cos 4\pi\tau\cdot\cos 4\pi\tau-\sin 4\pi\tau(-\sin 4\pi\tau))d\tau=4\pi\int\limits_0^1(\cos^2 4\pi\tau 2\pi\tau+\sin^2 4\pi\tau)=$$

$$4\pi\int\limits_0^1 d\tau=4\pi\cdot 1=4\pi.$$

4) Пусть γ — дуга параболы $x=t$, $y=t^2$, $t\in[t_1,t_2]$, $\omega_1=x^2dx+ydy$. Тогда

$$\int\limits_\gamma\omega_1=\int\limits_{[1,2]}(t^2+t^2\cdot 2t)dt=\int\limits_0^1(t^2+2t^3)dt=(t^3/3+2t^4/4)|_1^2=59/6.$$

Определим отображение $\varphi:[1,4]\to[1,2]$, $\varphi(t)=\sqrt{t}$, $\varphi(1)=1$, $\varphi(4)=2$. Тогда $\varphi'(\tau)=1/(2\sqrt{\tau})$ и

$$\int\limits_{\gamma_\varphi}\omega_1\varphi'(\tau)=\int\limits_{[1,4]}(\tau+2\tau\sqrt{\tau})1/(2\sqrt{\tau})=\int\limits_1^4(\sqrt{\tau}/2+\tau)d\tau=((2/3)(\tau)^{3/2}/2+\tau^2/2)|_1^4=59/6,$$

результаты совпали.

11.3. Случай пространства

Случай пространства полностью аналогичен случаю плоскости, поэтому ограничимся необходимыми определениями, формулировкой теоремы о замене переменной в интеграле и двумя примерами.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ определена 1-форма $\omega_1=p(x,y,z)dx+q(x,y,z)dy+r(x,y,z)dz$. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma:[t_1,t_2]\to\mathbb{R}^3$.

Переносим форму на отрезок $[t_1,t_2]$:

$$\omega_1^*=p(x(t),y(t),z(t))dx(t)+q(x(t),y(t),z(t))dy(t)+r(x(t),y(t),z(t))dz(t)=$$

$$p(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt+q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt+r(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt=$$

$$(p(x(t),y(t),z(t))x'(t)+q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+q(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt=((p,q,r)\cdot(x',y',z'))dt,$$

где точка означает скалярное произведение.

Определение 11.2. *Интегралом 1-формы* ω_1 *по ориентированной гладкой кривой* γ называется интеграл от перенесенной формы ω_1^* по ориентированному отрезку $[t_1,t_2]$:

$$\int\limits_\gamma\omega_1:=\int\limits_{[t_1,t_2]}\omega_1^*.$$

Это определение фактически совпадает с определением для случая плоскости.

Пример. Пусть γ — отрезок $x(t)=t$, $y(t)=t$, $z(t)=t$ $t\in[0,1]$, $\omega_1=(x+y+z)dx+(x-y+z)dy+(x+3y-2z)dz$. Тогда $\omega_1^*=3tdt+tdt+2tdt=6tdt$,

$$\int\limits_\gamma\omega_1=\int\limits_{[0,1]}\omega_1^*=\int\limits_0^1 6tdt=6\frac{t^2}{2}|_0^1=6/2=3.$$

Рассмотрим отображение $\varphi:[\tau_1,\tau_2]\to[t_1,t_2]$, такое, что
$\varphi(\tau_1)=t_1$, $\varphi(\tau_2)=t_2$ и производная $\varphi'(\tau)$ непрерывна на $[\tau_1,\tau_2]$.

Пусть γ — гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$, заданная на $[t_1,t_2]$. Тогда на $[\tau_1,\tau_2]$ получим гладкую кривую $\gamma_\varphi(\tau)=\gamma(\varphi(\tau))$. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана 1-форма $\omega_1=p(x,y,z)dx+q(x,y,z)dy+r(x,y,z)dz$.

Теорема 11.2.

$$\int\limits_{\gamma} \omega_1 = \int\limits_{\gamma_\varphi} \omega_1 \cdot \varphi'(\tau).$$

Снова видим, что формулировка теоремы совпадает с формулировкой для случая плоскости.

Пример. Пусть γ — отрезок $x(t) = t$, $y(t) = t$, $z(t) = t$ $t \in [0,1]$, $\omega_1 = (x+y+z)dx + (x-y+z)dy + (x+3y-2z)dz$. Мы раньше вычислили $\int\limits_{\gamma} \omega_1 = 3$.

Рассмотрим отображение $\varphi(\tau) = \sin\tau$, $\tau \in [0, \pi/2]$. Тогда, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\pi/2) = 1$, $\varphi'(\tau) = \cos\tau$. Кривая γ_φ задается как $x = \sin\tau$, $y = \sin\tau$, $z = \sin\tau$, $\tau \in [0, \pi/2]$. Вычисляем

$$\int\limits_{\gamma_\varphi} \omega_1 \varphi'(\tau) = \int\limits_{[0,\pi/2]} (3\sin\tau + \sin\tau + 2\sin\tau)\cos\tau\, d\tau = 6\int\limits_0^{\pi/2} \sin\tau\cos\tau\, d\tau = 3\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\tau\, d\tau =$$

$$3(-1/2\cos 2\tau)|_0^{\pi/2} = (-3/2\cos 2\tau)|_0^{\pi/2} = -3/2\cos\pi + 3/2\cos 0 = 3/2 + 3/2 = 3.$$

Видим, что результаты совпадают.

Замечание 11.1. Мы рассмотрели простой случай замены, когда заменяется переменная на отрезке, на котором задана кривая. Более сложно выяснить, как изменяется дифференциальная форма и ее интеграл, если заменить переменные в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$. Мы обсудим этот вопрос в части II.

11.4. Формула Стокса

Эта формула, обобщающая одномерную формулу Ньютона-Лейбница, выглядит одинаково для 1-форм в пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

Теорема 11.3. (Формула Стокса, теорема Стокса). *Пусть функция f определена в $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) и имеет непрерывные частные производные по всем переменным во всех точках. Рассмотри дифференциальную форму df — дифференциал функции f. Пусть $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) — гладкая кривая, $\gamma(t_1) = A$, $\gamma(t_2) = B$. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} df = f(B) - f(A).$$

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай плоскости, для пространства доказательство аналогично. $df = f'_x dx + f'_y dy$, тогда $\int\limits_{\gamma} df = \int\limits_{[t_1,t_2]} (f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t))dt$. По лемме 11.1 о производной композиции, которую докажем ниже, подынтегральное выражение равно $f'_t(x(t), y(t))$. Тогда $\int\limits_{\gamma} df = \int\limits_{t_1}^{t_2} f'_t(x(t), y(t))dt = f(x(t), y(t))|_{t_1}^{t_2} = f(x(t_2), y(t_2)) - f(x(t_1), y(t_1)) = f(B) - f(A)$.

Следствие 11.1. *Если гладкая кривая замкнута, т.е. $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, то $\int\limits_{\gamma} df = 0$.*

Лемма 11.1. $(f(x(t), y(t)))'_t = f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t)$.

Доказательство. Согласно эквивалентному определению дифференцируемости (10, раздел 1) надо доказать, что $f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t)) = (f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t))h + \alpha(h)h$, где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. (11.4)

Имеем:

$$f(x(t+h), y(t+h) - f(x(t), y(t))) = f(x(t+h), y(t+h) - f(x(t), y(t+h))) + f(x(t), y(t+h) - f(x(t), y(t))) =$$

$$f(x(t) + x'(t)h + \beta(h)h, y(t+h) - f(x(t), y(t+h))) + f(x(t), y(t) + y'(t)h + \gamma(h)h) - f(x(t), y(t))) \qquad (11.5)$$

по тому же определению дифференцируемости, примененному к функциям $x(t)$, $y(t)$. $\beta(h) \to 0$, $\gamma(h) \to 0$ при $h \to 0$. Обозначим $h_1 = x'(t)h + \beta(h)h$, $h_1 = x'(t)h + \beta(h)h$. Первая разность в (11.5) равна $f'_x(x(t), y(t+h))h_1 + \delta(h_1)h_1$, вторая равна $f'_y(x(t), y(t))h_2 + \varepsilon(h_2)h_2$ — снова применили определение дифференцируемости, отдельно по переменным x и y; $\delta(h_1)$ — бесконечно малая при $h_1 \to 0$; $\varepsilon(h_2)$ — бесконечно малая при $h_2 \to 0$. Наконец, первая разность отличается от $f'_x(x(t), y(t))h_1 + \delta(h_1)h_1$ на бесконечно малую при $h \to 0$, по непрерывности частных производных. В итоге, собрав вместе все слагаемые, получим (11.4).

Замечание 11.2. Было дано формальное доказательство, а теперь проверим, что результат соответствует общему принципу (сформулированному для одномерного случая в разделе 4.2): для дифференцируемых отображений дифференциал композиции равен композиции дифференциалов.

Действительно, для отображения $t \mapsto (x(t), y(t))$ дифференциал равен $(dx(t), dy(t)) = (x'(t)dt, y'(t)dt)$, для отображения $(x, y) \mapsto f(x, y)$ дифференциал равен $f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$. Для композиции отображений $f(x(t), y(t))$ запишем композицию дифференциалов:

$$f'_x(x(t), y(t))dx(t) + f'_y(x(t), y(t))dy(t) = f'_x(x(t), y(t))x'(t)dt + f'_y(x(t), y(t))y'(t)dt =$$
$$(f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t))dt.$$

Тогда множитель при dt есть производная $(f(x(t), y(t)))'_t$, что совпадает с утверждением леммы.

Упражнение 11.1. Напишите выражение для $(f(x(t), y(t), z(t)))'_t$

Примеры. 1) Пусть $\omega_1 = xdx + ydy$, тогда $\omega_1 = df(x, y)$, где $f(x, y) = (x^2 + y^2)/2$. Если гладкая кривая γ начинается в точке $A(x_1, y_1)$ и заканчивается в точке $B(x_2, y_2)$, то

$$\int_\gamma \omega_1 = f(B) - f(A) = \frac{(x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2)}{2}.$$

2) Пусть $f(x, y, z) = \sin(xyz)$, тогда $\omega_1 = df = \cos(xyz)yzdx + \cos(xyz)xzdy + \cos(xyz)xydz = \cos(xyz)(yzdx + xzdy + xydz)$. Если гладкая кривая γ начинается в точке $A(x_1, y_1, z_1)$ и заканчивается в точке (x_2, y_2, z_2), то

$$\int_\gamma \omega_1 = f(B) - f(A) = \sin(x_2y_2z_2) - \sin(x_1y_1z_1).$$

11.5. Обобщенная формулировка теоремы Стокса

С учетом приведенных выше определений формулу Стокса — теорему 11.3 — можно интерпретировать так. Начальную и конечную точку гладкой кривой γ будем считать границей γ и обозначать $\partial\gamma$. Если начальной точке приписать отрицательную ориентацию "-", а конечной — положительную ориентацию "+", ориентация границы будет согласована с ориентацией γ. Граница $\partial\gamma$ имеет нулевую размерность, по $\partial\gamma$ интегрируется 0-форма $\omega_0 = f$ — просто функция. Сама кривая γ одномерна, по ней интегрируется 1-форма $\omega_1 = d\omega_0 = df$. Тогда формула Стокса принимает вид (одинаковый для случаев $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$):

$$\int_{\partial\gamma} \omega_0 = \int_\gamma d\omega_0.$$

12. Геометрические и физические приложения

12.1. Форма угла

Рассмотрим на плоскости 1-форму $\omega_1 = \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx$. Проинтегрируем ее по дуге окружности $\{x^2 + y^2 = R^2\}$ с центром в начале координат радиуса R, у которой начальная точка имеет с положительным направлением оси OX угол φ_1, а конечная —- угол φ_2, см. рис. 12-1.

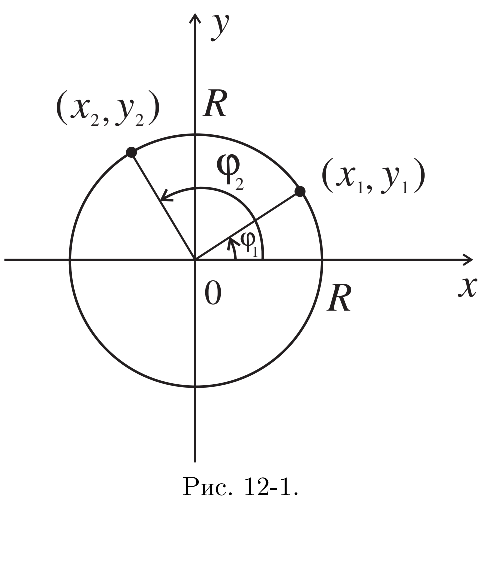


Рис. 12-1.

Представим дугу в виде гладкой кривой γ: $x = R\cos t, y = R\sin t$, $t \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Тогда $dx = -R\sin t\,dt$, $dy = R\cos t\,dt$, $\omega_1^* = \frac{1}{R^2}(R^2\cos^2 t - R\sin t(-R\sin t)) = \frac{R^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}{R^2} = dt$. Имеем: $\int\limits_\gamma \omega_1 = \int\limits_{[\varphi_1,\varphi_2]} \omega_1^* = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} dt = \varphi_2 - \varphi_1$, т.е. проинтегрировав форму по дуге окружности, мы получили угловой размер этой дуги. Поэтому естественно назвать эту дифференциальную форму *формой угла.*

Замечание 12.1. Угловой размер дуги как гладкой кривой отличается от угла, под которым из начала координат виден геометрический образ кривой. Например, геометрический образ кривой $x = R\cos t, y = R\sin t$, $t \in [0, 4\pi]$ представляет собой окружность $\{x^2 + y^2 = R^2\}$, которая видна из начала координат под углом 2π. А в результате интегрирования формы угла по этой кривой получим 4π, так как кривая делает два полных оборота вокруг начала координат.

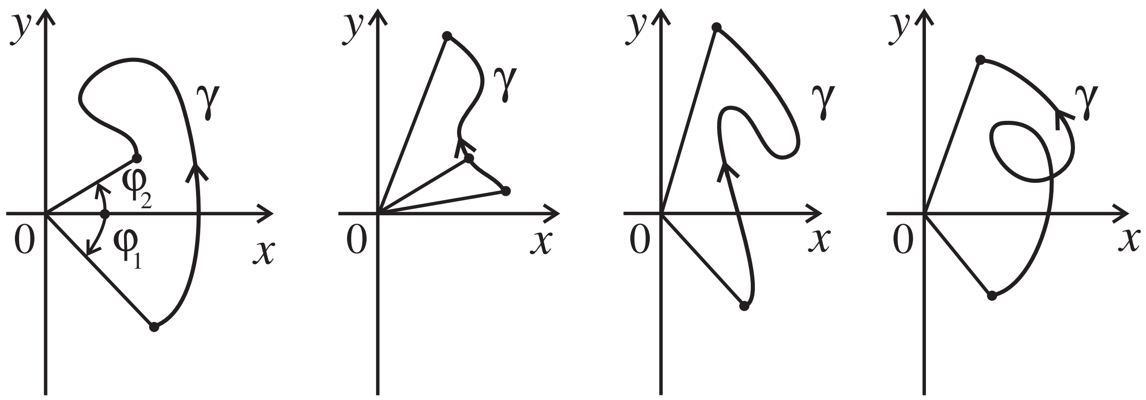
Теперь рассмотрим форму угла ω_1 только в полуплоскости $\Pi_+ = \{x > 0\}$.

Упражнение 12.1. Проверьте, что в этой полуплоскости $\omega_1 = d\varphi$, где $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$ — ориентированный угол от положительного направления оси OX до точки (x, y).

Тогда, если вся кривая γ лежит в Π_+, по формуле Стокса получим

$$\int\limits_\gamma \omega_1 = \int\limits_\gamma d\varphi = \varphi(t_2) - \varphi(t_1),$$

т.е. интеграл равен ориентированному углу от начальной до конечной точки кривой, см. рис. 12-2 а. В частности, если кривая лежит в Π_+ и замкнута, интеграл равен нулю. Если кривая расположена "достаточно удачно" относительно начала координат, см. рис. 12-2 б, в, г, то интеграл будет равен ориентированному углу (от начальной к конечной точке), под которым кривая видна из начала координат.



а) б) в) г)

Рис. 12-2.

Замечание 12.2. Если мы рассматриваем всю область $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, форма угла ω_1 не является дифференциалом функции $\varphi(x, y)$, которая не определена при $x = 0$. Пример замечания 12.1 показывает, что в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ форма ω_1 не является дифференциалом никакой функции, так как интеграл по замкнутой кривой оказался не равен нулю.

12.2. Форма работы

Пусть в некоторой области D плоскости $\mathbb{R}^2$ задано так называемое *векторное поле.* Это значит, что в каждой точке $B(x, y)$ определен вектор $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$, причем функции $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ непрерывны на D.

Мы будем интерпретировать это поле как *поле сил*, т.е. считать, что на материальную точку, находящуюся в положении $B(x, y)$, действует сила $\mathbf{F}(x, y)$.

Из курса физики известно, что при малом смещении $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ от точки $B(x, y)$ работа силы $\mathbf{F}$ на этом смещении равна скалярному произведению $\mathbf{F}(x, y) \cdot \xi$. Тем самым в D задана дифференциальная 1-форма $\omega_{1,F}(\xi) = \mathbf{F}(x, y) \cdot \xi$. Очевидно, что $\omega_{1,F} = F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy$.

Если точка переместилась из положения $B_1(x_1, y_1)$ в положение $B_2(x_2, y_2)$ вдоль некоторой гладкой кривой $\gamma = (x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, то работу поля сил $\mathbf{F}(x, y)$ по ее перемещению из B_1 в B_2 естественно определить как

$$\int_\gamma \omega_{1,F}. \tag{12.1}$$

Дадим пояснение, почему это так. Рассмотрим две близкие точки B', B'' на образе γ, соответствующие близким точкам t', t" на отрезке $[t_1, t_2]$, на котором задана гладкая кривая γ, см. рис. 12-3.

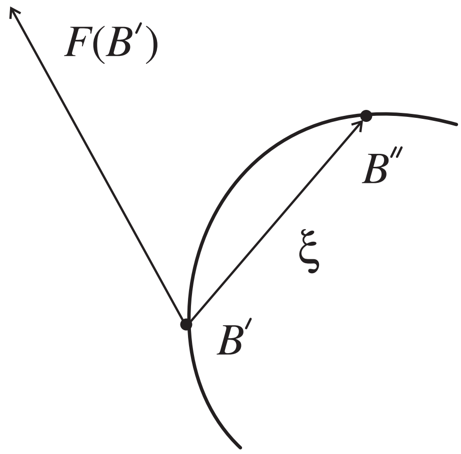


Рис. 12-3.

Работу поля на криволинейном участке $B'B''$ можно приближенно заменить работой силы $\mathbf{F}(B')$ на перемещении $\xi = \overrightarrow{B'B''}$, которая равна $\mathbf{F}(B') \cdot \xi$. Далее надо перенести это значение на отрезок $[t_1, t_2]$ в виде $(\mathbf{F}(x(t'), y(t')) \cdot (x'(t), y'(t)))(t'' - t')$ и составить интегральную сумму по разбиению отрезка близкими точками. Наконец, перейти к пределу, когда точки разбиения отрезка сближаются. Мы увидим, что в соответствии с определением 11.1 получится интеграл (12.1).

Пример. Рассмотрим выходящий из начала координат вектор $\mathbf{r} = (x, y)$. Определим $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^{\mathbf{3}}$. В координатах:

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right).$$

Это поле представляет собой упрощенную двумерную модель гравитационного поля материальной точки с массой 1, помещенной в начало координат, действующего на материальную точку, также с массой 1, с координатами (x, y); гравитационную постоянную также принимаем за 1.

Тогда дифференциальная 1-форма работы этого поля равна

$$\omega_{1,F} = \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx + \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy.$$

Заметим, что на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: $\omega_{1,F} = dU(x, y)$, где $U(x, y) = -\frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} = -1/\mathbf{r}$; эту функцию называют *потенциалом* данного поля. Работа поля по перемещению точки из положения $B_1(x_1, y_1)$ в положение $B_2(x_2, y_2)$ по формуле Стокса равна

$$\int_\gamma \omega_{1,F} = U(B_2) - U(B_1)$$

— разности потенциалов. В частности, при перемещении точки по замкнутому контуру работа гравитационного поля равна нулю.

12.3. Форма потока

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задано векторное поле $\mathbf{V}(x, y) = (V_1(x, y), V_2(x, y))$, где V_1, V_2 непрерывны на $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим дифференциальную 1-форму

$$\omega_{1,V}(\xi) = \begin{vmatrix} V_1(x, y) & V_2(x, y) \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix}, \text{ где } \xi = (\xi_1, \xi_2) \in T_B\mathbb{R}^2, \ B = (x, y). \tag{12.2}$$

Из определения очевидно, что $\omega_{1,V} = V_1(x,y)dy - V_2(x,y)dx$.

Эта 1-форма имеет полезную физическую (гидродинамическую) интерпретацию. Представим, что $\mathbf{V}(x,y)$ задает скорость, в точке (x,y), плоского стационарного течения жидкости. "Стационарное" означает, что скорость $\mathbf{V}(x,y)$ частицы жидкости, находящейся в точке (x,y), не зависит от времени.

Геометрически формула (12.2) задает ориентированную площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{V}(x,y)$ и ξ, см. рис. 12-4.

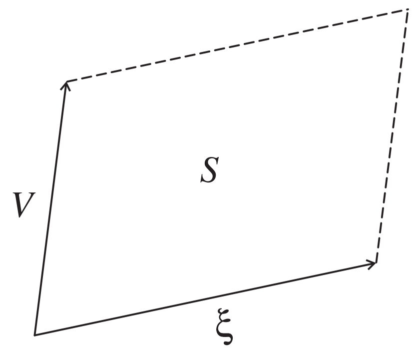


Рис. 12-4.

Так как $\mathbf{V}$ — это скорость течения жидкости в точке (x,y), то эта площадь численно равна количеству жидкости, протекающей с такой скоростью через отрезок ξ за единицу времени, см. рис. 12-5.

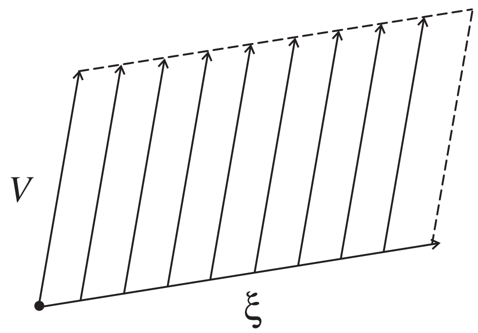


Рис. 12-5.

Эту величину называют *расходом* или *потоком жидкости через "одномерную площадку"* ξ.

Пусть теперь в $\mathbb{R}^2$ есть область D, ограниченная гладкой кривой $\gamma : (x(t), y(t)), t \in [t_1, t_2], x(t_1) = x(t_2), y(t_1) = y(t_2)$ без самопересечений. Тогда поток жидкости через границу области D естественно определить как

$$\Pi = \int\limits_{\gamma} \omega_{1,V}. \tag{12.2}$$

Упражнение 12.2. Объясните, почему это так, по аналогии с тем, как определяли работу поля сил по перемещению материальной точки вдоль гладкой кривой.

По определению 11.1 интеграла (12.2), в координатах получим:

$$\Pi = \int\limits_{t_1}^{t_2} (V_1(x(t), y(t))y'(t) - V_2(x(t), y(t))x'(t))dt.$$

Примеры. 1) Пусть $V(x,y) = (v, 0)$, где $v = const > 0$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Это постоянный параллельный поток, см. рис. 12-6.

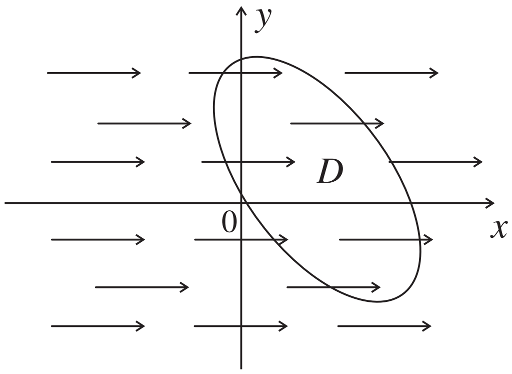


Рис. 12-6.

Пусть область D ограничена кривой γ, тогда поток

$$\Pi = \int\limits_{t_1}^{t_2} (vy'(t) - 0 \cdot x'(t))dt = \Pi = v \int\limits_{t_1}^{t_2} y'(t)dt = vy(t)|_{t_1}^{t_2} = v(y(t_2) - y(t_1)) = 0.$$

Поток через границу области равен нулю: "сколько жидкости втекает, столько же и вытекает".

2) Пусть $V(x, y) = (x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, см. рис. 12-7.

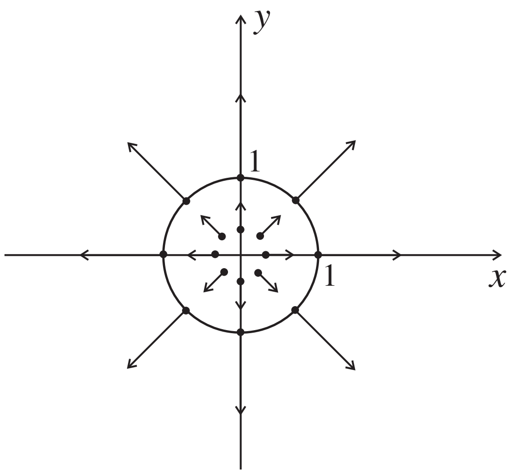


Рис. 12-7.

В качестве D рассмотрим круг $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$, ограниченный окружностью γ : $(x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t), t \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$\Pi = \int\limits_0^{2\pi} (\cos t(\sin t)' - \sin t(\cos t)')dt = \int\limits_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \int\limits_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi.$$

Из рис. 12-7 ясно, что жидкость вытекает из круга, и, так как результат получился положительный, мы вычислили именно исходящий поток. Можно заключить, что внутри круга имеется *источник жидкости* (это будет подробно объяснено в части II).

13. Дополнение

13.1. Простота и недостаточность одномерного случая

Мы увидели, что теория интегрирования 0-форм и 1-форм достаточно простая. Основная теорема — формула Стокса — сводится к формуле Ньютона-Лейбница. То же произойдет и в случае интегрирования дифференциальных форм бо́льших размерностей. Но там сведение к формуле Ньютона-Лейбница произойдет "за несколько ходов", см. часть II, тогда как в одномерном случае это делается "за один ход".

Недостаточность одномерного случая заключается в том, что *разные по существу объекты* в этом случае задаются просто *одним числом.*

Примеры. 1) *Линейный оператор* — отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, сохраняющее линейную комбинацию, — задается одним числом a: $x \mapsto ax$. Матрица этого оператора в базисе, состоящем из единичного вектора, — это то же самое число a. Ее определитель — то же самое a. Транспонированная матрица a^* — то же самое число: $a^* = a$. Отличается только обратная матрица, которая выражается числом a^{-1}.

2) *Линейная функция* (ее также называют *ковектором*) $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ тоже задается одним числом: если $l(e) = a$, то $l(xe) = xl(e) = ax$, т.е. отображение определяется числом a. Отличие линейной функции от линейного оператора в том, что в случае линейной функции $\mathbb{R}'$ — другой экземпляр числовой прямой, который мы отличаем от первого.

Возникает вопрос, как понять, что объекты имеют разную природу? Формально это следует из определений, а по существу проявляется в том, что *разные объекты по-разному преобразуются при замене координат.*

Убедимся в этом на примере линейных объектов: вектор, ковектор, линейный оператор. Рассмотрим случаи размерностей 1 и 2.

13.1.1. Вектор и ковектор, $n = 1$

Пусть e — базисный вектор, вектор $X = xe$, $f = ce$ — новый базисный вектор. В новом базисе $X = yf = yce = xe$. Тогда $x = cy$, $y = c^{-1}x$. (13.1)

Пусть теперь $\tilde{e}$ — такой ковектор, что $\tilde{e}(e) = 1$. Легко проверить, что тогда $\tilde{e}$ образует базис в линейном пространстве всех ковекторов, этот базис называют *двойственным* или *дуальным* по отношению к базису e. Аналогично, пусть $\tilde{f}$ — дуальный базис по отношению к f: $\tilde{f}(f) = 1$. Мы хотим найти координату u ковектора $\tilde{f}$ в базисе $\tilde{e}$, т.е. такое число u, что $\tilde{f} = u\tilde{e}$. Имеем: $\tilde{e}(f) = \tilde{e}(ce) = c\tilde{e}(e) = c$, $\tilde{f}(f) = 1 = u\tilde{e}(f) = uc$, значит, $u = c^{-1}$. Тогда $l = v\tilde{e} = w\tilde{f} = wu\tilde{e} = wc^{-1}\tilde{e}$. В итоге, формула преобразования координат для ковекторов выглядит так:

Старая координата, относительно $\tilde{e}$: $v = c^{-1}w$, где w — новая координата, относительно $\tilde{f}$.

А для векторов:

Старая координата, относительно e: $x = cy$, где y — новая координата, относительно f. Мы видим, что уже в одномерном случае координаты векторов и ковекторов преобразуются по-разному.

13.1.2. Вектор и ковектор, $n = 2$

Пусть e_1, e_2 — базис в $\mathbb{R}^2$, вектор $a = x_1e_1 + x_2e_2$, $f_1 = c_{11}e_1 + c_{12}e_2, f_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2$ — новый базис. В новом базисе $a = y_1f_1 + y_2f_2 = y_1(c_{11}e_1 + c_{12}e_2) + y_2(c_{21}e_1 + c_{22}e_2) = (c_{11}y_1 + c_{21}y_2)e_1 + (c_{12}y_1 + c_{22}y_2)e_2$. Тогда $x_1 = c_{11}y_1 + c_{21}y_2$, $x_2 = c_{12}y_1 + c_{22}y_2$. Выразим эти равенства в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \text{ где } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}. \qquad (13.1)$$

Столбцы матрицы C, называемой *матрицей перехода от первого базиса к второму*, образованы координатами векторов f_1, f_2 нового базиса в старом базисе e_1, e_2.

Теперь в двумерном пространстве ковекторов рассмотрим дуальный базис $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$ по отношению к базису e_1, e_2: $\tilde{e}_1(e_1) = 1, \tilde{e}_1(e_2) = 0, \tilde{e}_2(e_1) = 0, \tilde{e}_2(e_2) = 1$. Пусть f_1, f_2 — новый базис в пространстве векторов: $f_1 = c_{11}e_1 + c_{12}e_2, f_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2$. Тогда $\tilde{e}_1(f_1) = c_{11}$, $\tilde{e}_1(f_2) = c_{21}$, $\tilde{e}_2(f_1) = c_{12}$, $\tilde{e}_1 = 2(f_2) = c_{22}$. Пусть $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ — новый базис в пространстве ковекторов, дуальный по отношению к базису f_1, f_2: $\tilde{f}_1 = u_{11}\tilde{e}_1 + u_{12}\tilde{e}_2, \tilde{f}_2 = u_{21}\tilde{e}_1 + u_{22}\tilde{e}_2$. Тогда

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix}$$

— матрица перехода от базиса $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$ к базису $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ в двумерном пространстве ковекторов. Имеем: $\tilde{f}_1(f_1) = 1 = u_{11}c_{11} + u_{12}c_{12}$, $\tilde{f}_1(f_2) = 0 = u_{11}c_{21} + u_{12}c_{12}$, $\tilde{f}_2(f_1) = 0 = u_{21}c_{11} + u_{22}c_{12}$, $\tilde{f}_2(f_2) = 1 = u_{21}c_{21} + u_{22}c_{12}$.

Упражнение 13.1. Проверьте, что в матричном виде последние четыре равенства записываются как $U^*C = E$, где U — матрица перехода от базиса $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$ к базису $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$, C — матрица перехода от базиса e_1, e_2 к базису f_1, f_2, E — единичная матрица.

Тогда $U^* = C^{-1}$, $U = (C^{-1})^*$. Значит, если ковектор $l = v_1\tilde{e}_1 + v_2\tilde{e}_2 = w_1\tilde{f}_1 + w_2\tilde{f}_2$, то

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (C^{-1})^* \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Эта формула преобразования координат отличается от формулы (13.1).

13.1.3. Линейный оператор, $n = 1$

Пусть e — базис, $f = ce$ — другой базис, тогда $e = c^{-1}f$. Пусть для линейного оператора A $Ae = ae$, число a в данном случае является *матрицей* этого оператора. Тогда $Af = Ace = cAe = cae = cac^{-1}f = af$, мы видим, что в одномерном случае матрица оператора при переходе к другому базису осталось той же.

13.1.4. Линейный оператор, $n = 2$

Пусть e_1, e_2 — базис, f_1, f_2 — новый базис: $f_1 = c_{11}e_1 + c_{12}e_2, f_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2$,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

— матрица перехода. Пусть $Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{12}$, $Ae_2 = a_{21}e_1 + a_{22}$. Если $x = x_1e_1 + x_2e_2$, то $y = Ax = x_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2) + x_2(a_{21}e_1 + a_{22}e_2) = (x_1a_{11} + x_2a_{21})e_1 + (x_1a_{12} + x_2a_{11})e_2$. Тогда

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называют *матрицей оператора A в базисе* e_1, e_2, по столбцам стоят координаты векторов Ae_1, Ae_2 в исходном базисе e_1, e_2.

Теперь вычислим матрицу оператора A в новом базисе f_1, f_2, по столбцам должны стоять координаты векторов $z = Af_1, w = Af_2$ в базисе f_1, f_2. В исходном базисе e_1, e_2 имеем:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где слева — координаты вектора f_1 в базисе e_1, e_2, справа — координаты вектора f_1 в базисе f_1, f_2. Аналогично,

$$\begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В итоге

$$\begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix} = ACE = AC,$$

где слева по столбцам стоят координаты Af_1, Af_2 в старом базисе e_1, e_2. Тогда по (13.1) в новом базисе они равны

$$C^{-1} \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix} = C^{-1}AC$$

Итак, матрица оператора A в новом базисе равна $C^{-1}AC$. В отличие от одномерного случая она не всегда равна A, так как умножение матриц размера 2×2 не коммутативно.

13.2. Почему надо интегрировать именно косые формы[3]

Напомним, что 0-формы и 1-формы по определению являются кососимметричными или просто косыми, а косые 2-формы в одномерном случае тождественно нулевые.

Но уже случай двух переменных является нетривиальным и интересным. Сначала рассмотрим просто билинейную — линейную по каждому аргументу — форму на плоскости $\mathbb{R}^2$.

$\Omega(a, b)$: $\Omega(\alpha a_1 + \beta a_2, b) = \alpha\Omega(a_1, b) + \beta\Omega(a_1, b)$, $\Omega(a, \alpha b_1 + \beta b_2) = \alpha\Omega(a, b_1) + \beta\Omega(a, b_2)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Теорема 13.1. *Любую 2-форму можно представить в виде суммы симметричной и косой 2-форм, причем это разложение единственно.*

[3]Этот раздел написан в результате обсуждения с профессором механико-математического факультета Белорусского государственного университета Виктором Ивановичем Бахтиным, которому автор выражает глубокую благодарность.

Эта теорема аналогична теореме о разложении любой функции на $\mathbb{R}$ в виде суммы четной и нечетной функций, причем единственным образом.

Доказательство. Пусть дана 2-форма $\Omega(a,b)$. Рассмотрим форму $\Omega_1(a,b) = \Omega(a,b) + \Omega(b,a)$.

Упражнение 13.1. Проверьте, что эта форма симметрична, то есть $\Omega_1(a,b) = \Omega_1(b,a)$.

Теперь рассмотрим форму $\Omega_2(a,b) = \Omega(a,b) - \Omega(b,a)$. (13.2)

Упражнение 13.2. Проверьте, что эта форма косая, т.е. $\Omega_2(a,b) = -\Omega_2(b,a)$.

Очевидно, $\Omega(a,b) = (1/2)\Omega_1(a,b) + (1/2)\Omega_2(a,b)$.

Упражнение 13.3. Докажите, что разложение на симметричную и косую формы единственно.

Теперь вычислим все в координатах. Пусть $i = (1,0)$, $j = (0,1)$ — базис в $\mathbb{R}^2$. Тогда $a = a_1 i + a_2 j$, $b = b_1 i + b_2 j$. По свойству билинейности $\Omega(a,b) = \Omega(a_1 i + a_2 j, b_1 i + b_2 j) = a_1 b_1 \Omega(i,i) + a_1 b_2 \Omega(i,j) + a_2 b_1 \Omega(j,i) + a_2 b_2 \Omega(j,j) = a_{11} a_1 b_1 + a_{12} a_1 b_2 + a_{21} a_2 b_1 + a_{22} a_2 b_2$ (13.2), где $a_{ij} = \Omega(i,j)$.

Если форма Ω симметричная, то $a_{12} = a_{21}$ и получаем $\Omega(a,b) = a_{11} a_1 b_1 + a_{12}(a_1 b_2 + a_2 b_1) + a_{22} a_2 b_2$ (13.3).

Пусть теперь задана билинейная 2-форма на касательном расслоении плоскости $\mathbb{R}^2$. Это значит, что в каждой точке $A(x,y) \in \mathbb{R}^2$ задана билинейная форма на касательной плоскости в точке A. Коэффициенты этой формы из (13.2) будут зависеть от точки A исходной плоскости: $a_{ij} = a_{ij}(x,y)$ и мы считаем эти функции непрерывными.

Попробуем проинтегрировать эту билинейную форму. Интегрировать надо по некоторому двумерному объекту, например, по прямоугольнику на исходной плоскости $\mathbb{R}^2$. В соответствии с общей идеей интегрирования сначала разобьем прямоугольник на маленькие, пусть прямоугольные, ячейки, см. рисунок 13-1.

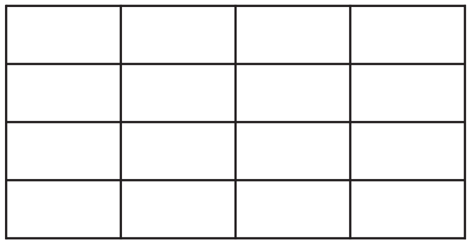


Рис. 13-1.

Рассмотрим некоторую ячейку с номером k. В касательной плоскости в точке A возьмем два вектора a, b, задающие форму ячейки, см. рисунок 13-2.

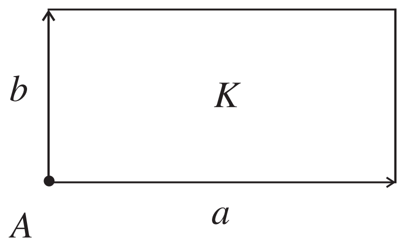


Рис. 13-2.

Вычислим значение $\Omega(a,b)$. После чего все такие значения просуммируем и перейдем к пределу при условии, что размеры ячеек стремятся к нулю. Если предел существует, то он и будет интегралом от нашей билинейной формы по прямоугольнику. При этом *результат не должен зависеть от формы ячеек.*

Теперь в каждой точке A разложим нашу 2-форму в сумму симметрической и косой форм. Рассмотрим сначала симметрическую часть.

Для простоты положим в формуле (13.3) $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$. Тогда получим $A(a,b) = a_1 b_1 + a_2 b_2$ — это просто скалярное произведение векторов a и b в касательной плоскости $T_A\mathbb{R}^2$.

Если ячейка прямоугольная, как на рис. 13-2, то $A(a,b) = 0$. Но если ячейка не прямоугольная, например, параллелограмм, то тогда $A(a,b) \neq 0$, см. рисунок 13-3.

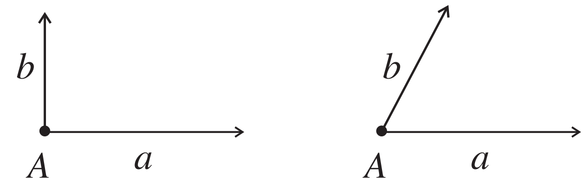


Рис. 13-3.

Значение $A(a, b)$ будет увеличиваться с уменьшением угла между векторами a и b, приближаясь к верхней грани $|a| \cdot |b|$.

Таким образом, интегральная сумма и ее предел — интеграл — будут зависеть от формы ячеек, а значит, определить "настоящий" интеграл, не зависящий от формы ячеек, не получится.

Совсем по-другому обстоит дело с кососимметрической частью. Сначала вычислим кососимметрическую форму в координатах. Для косой формы в формуле (13.2) имеем: $A_{11} = A(e_1, e_1) = 0$, $A_{22} = A(e_2, e_2) = 0$, $A_{12} = A(e_1, e_2) = -A(e_2, e_1) = -A_{21}$. В итоге получаем $A(a, b) = A_{12}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$. То есть в двумерном случае косая форма пропорциональна определителю

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

составленному из координат векторов a, b.

Но этот определитель равен площади параллелограмма, построенного на векторах a, b независимо от их взаимного расположения, см. рисунок 13-4.

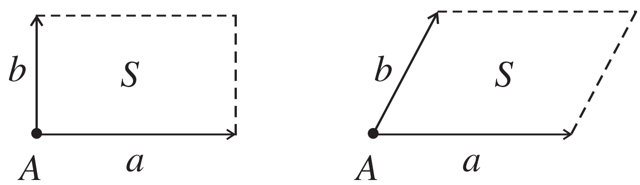


Рис. 13-4.

Напомним, что это ориентированная площадь параллелограмма, т.е. может быть как положительной, так и отрицательной; знак меняется при изменении порядка векторов.

В итоге слагаемые в интегральной сумме не будут зависеть от формы ячеек и процедуру интегрирования можно выполнить.

Итак, интегрировать надо косые дифференциальные формы.

13.3. Алгебраические операции и дифференцирование 1-форм в двумерном случае

13.3.1. Тензорное произведение

Очевидно, что 1-формы — линейные функции на $\mathbb{R}^2$ — образуют линейное пространство с обычными операциями сложения форм между собой и умножения формы на действительное число.

Но их можно также перемножать. Пусть l_1, l_2 — линейные функции на $\mathbb{R}^2$. Определим билинейную форму, которая называется *тензорным произведением* l_1 и l_2: $l_1 \otimes l_2(a, b) := l_1(a) l_2(b)$.

Упражнение 13.4. а) Проверьте, что получилась билинейная форма. б) Вычислите $l_1 \otimes l_2$ в координатах.

Однако, хотя линейные функции l_1 и l_2 по определению косые, их тензорное произведение не обязано быть косым.

Пример. Пусть $l_1(a) = \alpha x$, $l_2(a) = \beta y$, где $a = (x, y)$. Тогда $l_1 \otimes l_2(a, b) = \alpha x_1 \beta y_2$, где $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$. Эта билинейная форма не является косой.

13.3.2. Внешнее произведение

Если применить формулу (13.2) к тензорному произведению $l_1 \otimes l_2$, то получим уже косую 2-форму, которую называют *внешним произведением* исходных 1-форм l_1 и l_2. Рассмотри внешнее произведение более подробно, для дифференциальных форм на $\mathbb{R}^2$.

Начнем с базисных форм dx и dy. 1-Форма dx в любой точке плоскости $\mathbb{R}^2$ выделяет из касательного вектора $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ первую координату: $dx(\xi^1, \xi^2) = \xi^1$; соответственно 1-форма dy выделяет вторую координату: $dy(\xi^1, \xi^2) = \xi^2$. Эти формы базисные, поскольку любая 1-форма на $\mathbb{R}^2$ единственным образом представляется в виде их линейной комбинации: $\omega_1 = p(x,y)dx + q(x,y)dy$, где функции $p(x,y)$ и $q(x,y)$ считаем непрерывными. (Далее для краткости будем писать $\omega_1 = pdx + qdy$, опустив аргументы коэффициентов.)

Внешним произведением $dx \wedge dy$ *1-форм* dx *и* dy назовем форму $dx \otimes dy - dy \otimes dx$. Подробно, пусть $\xi_1 = (\xi_1^1, \xi_1^2)$, $\xi_2 = (\xi_2^1, \xi_2^2)$, тогда

$$dx \wedge dy(\xi_1, \xi_2) = dx \otimes dy(\xi_1, \xi_2) - dy \otimes dx(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^1\xi_2^2 - \xi_1^2\xi_2^1 = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 \end{vmatrix}.$$

Упражнение 13.5. Проверьте, что $dx \wedge dy$ — билинейная косая форма от векторов ξ_1, ξ_2.

Ее геометрический смысл уже описан выше — это ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах ξ_1, ξ_2. Из определения следует, что $dx \wedge dx = 0$, $dy \wedge dy = 0$. (13.3)

Упражнение 13.6. Проверьте, что: а) сама операция внешнего умножения кососимметрична, т.е. $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$. (13.4)

б) Числовой множитель — значение коэффициента в фиксированной точке плоскости $\mathbb{R}^2$ можно выносить за скобку, т.е. $(adx) \wedge dy = a(dx \wedge dy)$ и $dx \wedge (ady) = a(dx \wedge dy)$. (13.5)

Произведение двух произвольных 1-форм на $\mathbb{R}^2$ определим по дистрибутивности с учетом (13.3), (13.4), (13.5):

$$(p_1dx + q_1dy) \wedge (p_2dx + q_2dy) = p_1q_2dx \wedge dy + p_2q_1dy \wedge dx = p_1q_2dx \wedge dy - p_2q_1dx \wedge dy = (p_1q_2 - p_2q_1)dx \wedge dy.$$

Упражнение 13.7. Проверьте следующие свойства внешнего произведения 1-форм:
а) вынесение множителя $(a\omega_1) \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge (a\omega_2) = a(\omega_1 \wedge \omega_2)$;
б) дистрибутивность $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3$;
в) кососимметричность $\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1$;
г) ассоциативность $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$.

13.3.3. Дифференцирование[4]

Дадим определение дифференцирования через интегрирование аналогично пункту 5.2.4. Пусть на $\mathbb{R}^2$ задана 1-форма $\omega_1 = pdx + qdy$. Мы хотим определить ее дифференциал $d\omega_1$ как 2-форму. Зафиксируем точку $B(x_0, y_0)$. Дифференциал в этой точке действует на паре касательных векторов ξ_1, ξ_2. Эти векторы образуют параллелограмм. Ориентируем его границу, см. рис. 13-5 и вычислим интеграл от формы ω_1 по этой границе.

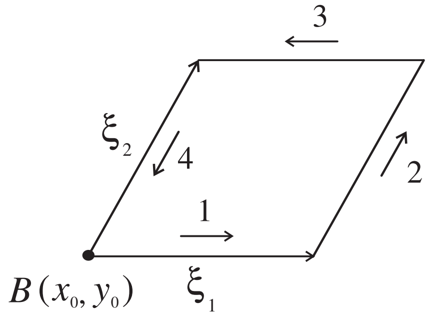


Рис. 13-5.

Главная билинейная часть этого интеграла, по определению, и есть значение дифференциала $d\omega_1$ на паре касательных векторов ξ_1, ξ_2.

Запишем параметрические уравнения для каждого из участков 1 – 4 ориентированной границы параллелограмма.

1) $B + t\xi_1$, $t \in [0,1]$; 2) $B + \xi_1 + (t-1)\xi_2$, $t \in [1,2]$; 3) $B + (3-t)\xi_1 + \xi_2$, $t \in [2,3]$; 4) $B + (4-t)\xi_2$, $t \in [3,4]$. При изменении t от 0 до 4 происходит полный обход границы в направлении ее ориентации.

В координатах:

1) $x = x_0 + t\xi_1^1$, $y = y_0 + t\xi_1^2$. Вычисляем интеграл по первому участку:

[4]Вводимое в этом пункте дифференцирование дифференциальных форм называют *внешним дифференцированием.* Оно имеет ряд свойств, отличающих его от обычного дифференцирования функций. См. подробности в части II.

$$\int\limits_{\gamma_1} \omega_1 = \int\limits_0^1 p(x_0 + t\xi_1^1, y_0 + t\xi_1^2)\xi_1^1 dt + q(x_0 + t\xi_1^1, y_0 + t\xi_1^2)\xi_1^2 dt =$$

$$\int\limits_0^1 (p(x_0, y_0) + p'_x(x_0, y_0))t\xi_1^1 + p'_y(x_0, y_0))t\xi_1^2 + \alpha)\xi_1^1 dt + (q(x_0, y_0) + q'_x(x_0, y_0))t\xi_1^1 + q'_y(x_0, y_0))t\xi_1^2 + \beta)\xi_1^2 dt,$$

где α, β — бесконечно малые при $\xi \to 0$. Главный член получается просто отбрасыванием слагаемых, содержащих α и β. После интегрирования по t он равен

$$p(x_0, y_0)\xi_1^1 + q(x_0, y_0)\xi_1^2 + \frac{1}{2}p'_x(x_0, y_0)\xi_1^1\xi_1^1 + \frac{1}{2}p'_y(x_0, y_0)\xi_1^1\xi_1^2 + \frac{1}{2}q'_x(x_0, y_0)\xi_1^1\xi_1^2 + \frac{1}{2}q'_y(x_0, y_0)\xi_1^2\xi_1^2.$$

Для остальных участков границы параллелограмма подробные вычисления опустим, приведем только ответы.

Главный член интеграла $\int\limits_{\gamma_2} \omega_1$ равен

$$p(x_0, y_0)\xi_2^1 + p'_x(x_0, y_0)(\xi_1^1\xi_2^1 + \frac{1}{2}\xi_2^1\xi_2^1) + p'_y(x_0, y_0)(\xi_1^2\xi_2^1 + \frac{1}{2}\xi_2^2\xi_2^1) +$$

$$q(x_0, y_0)\xi_2^2 + q'_x(x_0, y_0)(\xi_1^1\xi_2^2 + \frac{1}{2}\xi_2^1\xi_2^2) + q'_y(x_0, y_0)(\xi_1^2\xi_2^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2\xi_2^2).$$

Главный член интеграла $\int\limits_{\gamma_3} \omega_1$ равен

$$-[p(x_0, y_0)\xi_1^1 + p'_x(x_0, y_0)(\xi_2^1\xi_2^1 + \frac{1}{2}\xi_1^1\xi_1^1) + p'_y(x_0, y_0)(\xi_1^1\xi_2^2 + \frac{1}{2}\xi_1^2\xi_1^1)]$$

$$-[q(x_0, y_0)\xi_1^2 + q'_x(x_0, y_0)(\xi_2^1\xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_1^1\xi_1^2) + q'_y(x_0, y_0)(\xi_1^2\xi_2^2 + \frac{1}{2}\xi_1^2\xi_1^2)].$$

Главный член интеграла $\int\limits_{\gamma_4} \omega_1$ равен

$$-[p(x_0, y_0)\xi_2^1 + \frac{1}{2}p'_x(x_0, y_0)\xi_2^1\xi_2^1 + \frac{1}{2}p'_y(x_0, y_0)\xi_2^1\xi_2^2 + q(x_0, y_0)\xi_2^2 + \frac{1}{2}q'_x(x_0, y_0)\xi_2^1\xi_2^2 + \frac{1}{2}q'_y(x_0, y_0)\xi_2^2\xi_2^2].$$

Упражнение 13.8. Выполните интегрирование по участкам 2, 3, 4 и проверьте результаты. *Подсказка.* Сделайте замены переменной: на участке 2: $t - 1 = u \in [0, 1]$, на участке 3: $3 - t = u \in [1, 0]$, на участке 4: $4 - t = u \in [1, 0]$.

Просуммировав все главные члены, получим

$$p'_y(x_0, y_0)(\xi_1^2\xi_2^1 - \xi_2^2\xi_1^1) + q'_x(x_0, y_0)(\xi_1^1\xi_2^2 - \xi_1^2\xi_2^1) = (q'_x(x_0, y_0) - p'_y(x_0, y_0))\Delta,$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 \end{vmatrix} = dx \wedge dy(\xi_1, \xi_2).$$

Итак, для $\omega = pdx + qdy$ имеем $d\omega = (q'_x - p'_y)dx \wedge dy$.

Упражнение 13.9. Проверьте, что дифференциал 1-формы $\omega = pdx + qdy$ можно вычислить по формуле $d\omega = dp \wedge dx + dq \wedge dy$.

Замечание 13.1. Предыдущая формула связывает операции дифференцирование и внешнего произведения. Более подробно эта связь будет рассмотрена в части II.

13.4. Немного философии

В заключение обсудим две "философско-математические" идеи. "Философские" они в том смысле, что относятся не только к данной теме, но и к математике в целом, а во-вторых, имеют вид именно идей, а не точных математических утверждений.

13.4.1. Первая идея: *правильно определенные операции над математическими объектами должны соответствовать природе этих объектов.* (Эту идею автор узнал от профессора мехмата МГУ Владимира Антоновича Зорича, который написал замечательный учебник по математическому анализу [3,4]. Теория дифференциальных форм изложена в [4, главы XII–XV].)

Основным объектом в математическом анализе является функция. В одномерном случае это отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, в многомерном — $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Ограничимся одномерным случаем. К настоящему моменту вы знаете, что над функциями можно выполнять много операций: сложение, умножение, вычисление предела, дифференцирование, интегрирование и т.п., причем эти операции имеют ряд "хороших" свойств, например, относительно сложения и умножения функции образуют коммутативное кольцо с единицей.

Однако, если присмотреться внимательно, мы увидим, что эти операции возможны потому, что соответствующие операции имеются в самом множестве $\mathbb{R}$, эти операции с их свойствами задают в $\mathbb{R}$ многочисленные структуры, см. ниже.

Отступим назад, предположим, что функция — это просто отображение множеств $f : A \to B$, причем A, B — множества, не имеющие никакой дополнительной структуры. Оказывается, в этом случае можно указать не так уж много свойств функций и определить не так много операций.

Например, у функций можно выделить такие свойства, как инъективность, сюръективность, биективность и классифицировать их относительно этих свойств. Из операций можно выделить взятие обратной функции (для биективной), а также операцию композиции отображений $g \circ f : A \to C$, если $f : A \to B$, $g : B \to C$. Можно доказать ряд теорем, например, ассоциативность композиции или свойство $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. В целом теория получается не очень богатая, одной из ее вершин является теорема о гомоморфизме для множеств (о факторизации изображений), см [5, § 6].

По-другому обстоит дело, когда множество имеет некоторую структуру. Множество действительных чисел несет на себе несколько структур, которые обеспечивают возможность различных операций над функциями $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а также разнообразие свойств этих функций и операций над ними.

Перечислим ряд структур на множестве $\mathbb{R}$ и соответствующие последствия для функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. $\mathbb{R}$ имеет структуру *линейного пространства* над самим собой (одномерное), а также над $\mathbb{Q}$ (бесконечномерное). Соответственно, можно говорить о линейных в обоих смыслах функциях $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. $\mathbb{R}$ имеет алгебраическую структуру *поля*. Поэтому можно определить алгебраические операции над функциями $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а также выделить такие классы функций, как многочлены и рациональные функции, определяемые в принципе над любым полем.

3. На $\mathbb{R}$ задан *полный линейный порядок* — обычное отношение неравенства. Поэтому можно говорить о монотонных функциях $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и классифицировать функции по типу их монотонности.

4. $\mathbb{R}$ имеет структуру *топологического пространства*. Стандартная топология задается расстоянием (метрикой) $d(x, y) = |x - y|$. Соответственно возникает понятие непрерывной функции и можно развивать теорию непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Кроме стандартной, на $\mathbb{R}$ можно задавать и другие топологии, например, топологию Зарисского, см.[6] и развивать теории непрерывных функций относительно разных топологий.

5. $\mathbb{R}$ обладает свойством *полноты*. Отсюда возникает ряд топологических свойств, таких, как компактность отрезка и т.п., а также можно развивать теорию пределов с такими теоремами, как, например, теорема Вейерштрасса.

6. Дифференцирование связано с еще одной структурой, которая обычно не упоминается в школьном, даже профильном, курсе математики. Это так называемая *гладкая структура*, которая состоит из взаимно-однозначных отображений $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, таких что оба отображения φ и φ^{-1} дифференцируемы. Такие отображения называются *диффеоморфизмами*. Их можно воспринимать как гладкие замены переменной на множестве $\mathbb{R}$. Таким образом, гладкая структура состоит из всех возможных наборов переменных на $\mathbb{R}$, переходы между которыми в обе стороны дифференцируемы.

На практике гладкая структура проявляется в формуле производной сложной функции, а также в формуле замены переменной в интеграле.

7. $\mathbb{R}$ имеет еще структуру так называемого *измеримого пространства* (измеримость связана с топологией) с определенной на нем *мерой Лебега*. Мы не рассматриваем этот вопрос подробно, см. [7, Глава 10], но ниже упомянем эту структуру в связи с интегрированием.

Вернемся к интегрированию. Поясним, почему не совсем правильно интегрировать просто функции $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Как становится понятно, при интегрировании мы будем эксплуатировать некоторые из перечисленных выше структур множества действительных чисел $\mathbb{R}$. И тут возникают два соображения.

Во-первых, видимо, правильный объект для интегрирования должен нести в себе указание на используемую структуру.

Во-вторых, сама по себе функция, без указания на структуру, порождает разные типы интегралов, которые отличаются как по определениям, так и по свойствам. Для примера рассмотрим три типа, при том, что имеются и другие.

1. Интеграл Римана по ориентированному отрезку $[a, b]$. В интегральной сумме с отмеченными точками $\sum f(x_i)\Delta x_i$, а также в суммах Дарбу, определение 1.8, имеем $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, что учитывает ориентацию отрезка. Формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

также учитывает ориентацию отрезка и имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_s^b f(x)dx.$$

2. Если в интегральной сумме взять $\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}|$, т о получим интеграл по неориентированному отрезку. Правильное его обозначение

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)|dx|.$$

Обозначение $[a, b]$ ниже знака интеграла говорит о том, что интеграл берется по отрезку как по множеству, без учета ориентации. Символ $|dx|$ обозначает бесконечно малый элемент длины на отрезке, смысл символа фактически эмпирический, как мы обсуждали в пункте 5.1.

Можно сказать, что в данном случае интегрируется не просто функция, а связка $f(x)|dx|$, указывающая на отсутствие ориентации, а также на использование в интеграле элемента длины отрезка. Иногда эту связку называют "плотностью".

Свойства интеграла $\int\limits_{[a,b]} f(x)|dx|$ отличаются, хотя и не слишком сильно, от свойств интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$. Например, интеграл от положительной непрерывной функции будет обязательно положительным, формула замены переменной будет иметь вид $\int\limits_{[a,b]} f(x)|dx| = \int\limits_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(t))|\varphi'(t)||dt|$, где $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$, причем отображение φ переводит концы отрезка $[\alpha, \beta]$ в концы отрезка $[a, b]$, не важно, в каком порядке.

Упражнение 13.10. Как для интеграла $\int\limits_{[a,b]} f(x)|dx|$ будет выглядеть аналог формулы Ньютона-Лейбница?

3. Если рассмотреть отрезок как измеримое множество с мерой Лебега μ, то можно определить на нем *интеграл Лебега* $\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu$, иногда используют обозначение $\int\limits_{[a,b]} f(x)\mu(dx)$. Определение и свойства интеграла Лебега уже значительно отличаются от случая интеграла Римана. Приведем два примера.

1. Как мы знаем, по Риману могут быть интегрируемы только функции, ограниченные на отрезке. Однако по Лебегу интегрируемы и некоторые неограниченные функции.

2. Функция Дирихле не интегрируема по Риману, но интегрируема по Лебегу и ее интеграл Лебега по любому отрезку равен нулю.

И в случае интеграла Лебега правильно понимать, что интегрируется не сама по себе функция $f(x)$, а связка $f(x)d\mu$, которая указывает на используемую структуру отрезка — измеримое пространство с мерой, а также, что при построении интеграла будет использован элемент меры. Связку $f(x)d\mu$ иногда называют "мерой μ с весом $f(x)$".

13.4.2. Вторая идея: *правильно определенный объект порождает правильный формализм*[5]. Поясним эту идею на двух примерах.

1. Замена переменной в интеграле.

[5]Под формализмом понимается оперирование обозначениями, приводящее к нужному результату без того, чтобы вдаваться в содержательный смысл обозначаемых объектов. Например, изучаемые в школе преобразования алгебраических выражений по определенным правилам.

Если мы понимаем интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ как интеграл от функции и хотим сделать замену переменной $x = \varphi(t)$, то с заменой в самой функции все понятно: $g(t) = f(\varphi(t))$. Но если значок dx воспринимается отдельно от значка функции (имеет эмпирический смысл), то чтобы получить правильную формулу, надо еще дополнительно разбираться.

Если же мы понимаем интеграл как интеграл от дифференциальной формы $f(x)dx$, все получается автоматически. Мы умеем делать замену переменной в самой дифференциальной форме безотносительно к интегрированию. А именно, если $\omega = f(x)dx$, $x = \varphi(t)$, то $\omega^* = f(\varphi(t))d\varphi(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ и при интегрировании автоматически получается правильная формула замены переменной в интеграле. Особенно эффективно этот формализм работает при многомерном интегрировании дифференциальных форм, см. часть II.

2. Координатное определение внешнего дифференцирования.

В пункте 13.3.3 мы дали определение внешнего дифференциала 1-формы через интегрирование. Плюс этого определения в том, что оно инвариантное, т.е. не зависит от выбора исходной системы координат. Однако вычислять дифференциал непосредственно по этому определению достаточно трудоёмко. Упражнение 13.9 показывает, что в координатах дифференциал 1-формы $\omega = pdx + qdy$ вычисляется по простой формуле $d\omega = dp \wedge dx + dq \wedge dy$. Эту формулу можно принять за определение дифференциала. Чтобы определение было корректным, надо проверить, что формула сохраняет свой вид при замене координат. Это будет показано в части II.

Литература

В приведенном ниже списке литературы на пункты 1–7 есть ссылки в основном тексте пособия. Для ознакомления с теорией дифференциальных форм в общем виде рекомендуем очень ясно написанную книгу [8].

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. - М.: Издательство "Наука". Главная редакция физико-математической литературы, 1989 г.
2. Гальперин Г.А. Многомерный куб. - М.: МЦНМО, 2015. - 80 с.
3. Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. - М.: МЦНМО,. 2019. — xii+564 с.
4. Зорич В.А. Математический анализ. Часть II. - М.: МЦНМО,. 2012. — xiv+818 с.
5. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры: Учебник для вузов. - М.: Физико-математическая литература, 2000. - 272 с.
6. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Топология_Зарисского
7. Рудин У. Основы математического анализа. - М.: Мир, 1976. - 320 с.
8. Ефимов Н.В. Введение в теорию внешних форм. - М.: Наука, 1977. - 88 с.

Имайкин Валерий Марсович,
учитель математики
ГБОУ Школа 179 г. Москвы,
Главный редактор журнала
"Математическое образование",
доктор физ.-мат. наук.

E-mail: ivm61@mail.ru

Имайкин Валерий Марсович,
учитель математики ГБОУ Школа 179 г. Москвы,
Главный редактор журнала “Математическое образование”,
доктор физ.-мат. наук.

Подписано в печать 16.03.2026. Объем 3 п.л. Тираж 120 экз. Цена свободная.

ISSN 1992-6138

9 771992 613776