Константиновский сборник

Памяти Семёна Григорьевича Слободника

(04.03.1948 – 27.02.2024)

Приложение к журналу «Математическое образование».
Серия «Образование: история, персоналии, проблемы»

Выпуск 1 (10), февраль 2025 г.

Москва, 2025

Константиновский сборник

179

Памяти Семёна Григорьевича Слободника
(04.03.1948 – 27.02.2024)

Приложение к журналу «Математическое образование».
Серия «Образование: история, персоналии, проблемы»

Выпуск 1 (10), февраль 2025 г.

Москва, 2025

Приложение к журналу “Математическое образование”

ISSN 1992-6138

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Редактор серии Комаров С.И.

Ответственный за выпуск Имайкин В.М.

Выпуск 1 (10), 2025 г.

Представляем вниманию читателя краткий некролог и авторские материалы Семёна Григорьевича Слободника, учителя математики ГБОУ Школа 179 г. Москвы.

Адрес электронной почты для материалов: matob@yandex.ru

Подписано в печать 09.02.2025. Объем 5 п.л. Тираж 500 экз. Цена свободная.

Константиновский сборник

Приложение к журналу «Математическое образование».
Серия «Образование: история, персоналии, проблемы»

Выпуск 1 (10), февраль 2025 г.

Содержание

Памяти Семёна Григорьевича Слободника

От редакции. Семён Григорьевич Слободник (04.03.1948 – 27.02.2024) 1

С. Г. Слободник. **Учебные материалы по геометрии, алгебре и анализу**

Предисловие 5

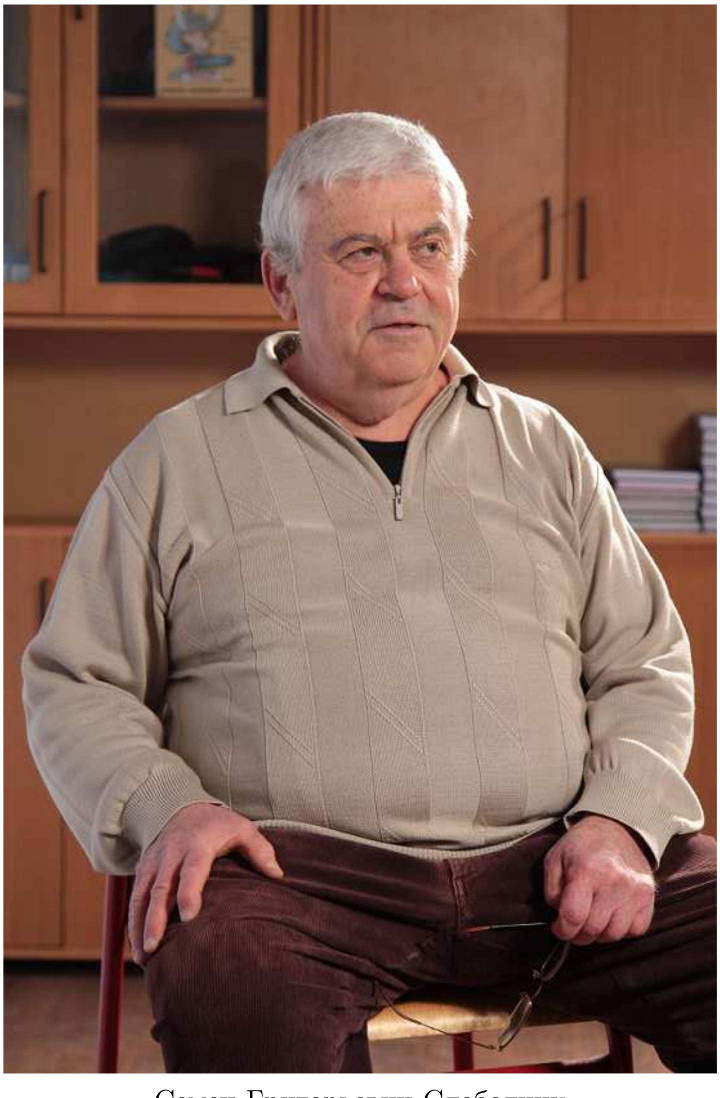
Геометрия и линейная алгебра 6

Алгебра и математический анализ 55

Семён Григорьевич Слободник (04.03.1948 – 27.02.2024)

От редакции

Представляем вниманию читателя краткий некролог Семёна Григорьевича Слободника, учителя математики ГБОУ Школа 179 г. Москвы, и воспоминания коллег о нем. Также приведены его яркие высказывания на уроках, записанные учениками.



Семен Григорьевич Слободник

Семён Григорьевич Слободник был учеником первогоматкласса, выпущенного Николаем Николаевичем Константиновым. Получил высшее образование на математическом факультете Московского государственного педагогического института им. Ленина, защитил диссертацию кандидата физико-математических наук. В 2001 году, когда 179-я школа вновь возрождалась как математическая, он пришёл в неё преподавать алгебру, геометрию, матанализ и больше со школой не расставался.

На протяжении всей жизни, со школьных лет, Семён Григорьевич радовался любой красивой задаче, любому красивому решению. Он светился от этой радости и невольно заражал окружающих этой своей способностью так же радоваться.

Семён Григорьевич знал математику очень хорошо, но всё время совершенствовался в ней. При встрече с коллегами всегда задавал новую задачу, обычно своего авторства. Рассказывал о том, какие новые подходы он обдумывал в преподавании какой-нибудь темы или какое придумал оригинальное доказательство известной сложной теоремы. Очень любил общаться с молодыми преподавателями и студентами, помогая им профессионально, а зачастую и соревнуясь с ними в решении задач.

За годы работы в школе написал много учебных материалов по геометрии, алгебре и анализу. Все материалы тщательно продуманы методически и, независимо от сложности темы, написаны оригинально и изящно. Они и дальше будут использованы в школе как педагогическое наследие Семёна Григорьевича.

Мы запомним Семёна Григорьевича добрым и весёлым человеком, с неизменным чувством юмора, всегда готовым прийти на помощь, артистичным в своих рассказах т объяснениях, посвятившим себя математике и её преподаванию.

Мой друг и коллега Сэм

Я познакомился с Семёном Григорьевичем в 9-ом классе, когда начал учиться в математическом классе Николая Николаевича Константинова. В школе он был одним из тех, кто лучше всех решал задачи Николая Николаевича. Т.е. как бы входил в элиту класса. При этом он был достаточно самолюбив и понимал свою силу. Вспоминается забавный случай, когда девочка Маша практически мгновенно решила задачу, которая Семёну не давалась. Он помнил об этом и хранил «обиду» на это обстоятельство даже тогда, когда мы вместе работали в 179 школе. Правда, надо отметить, что относился к этому всегда с юмором. В школьные годы он получил своё прозвище Сэм. Которое сохранил навсегда. Даже в 179 школе все ученики его так звали (особенно за глаза).

Затем жизнь нас раскидала, и я встретился с ним опять, когда он уже преподавал в 179 школе. Именно он уговорил меня принять предложение Николая Николаевича по поводу преподавания «анализа» в школе. Я был уверен, что буду связан со школой не больше года, однако во многом благодаря Сэму работаю до сих пор. Сначала я вёл в классах анализ, а он алгебру и геометрию. Но вскоре мы объединились, стали вместе вести все эти предметы. И тут я увидел Сэма в работе. Он очень многое брал на себя, придумывал красивые решения задач, продумывал изложение теории.

Сэм не любил проверять домашние задания и контрольные. Он не очень обращал внимание на дисциплину. Его сила была в решении задач и выявлении их связей. Он был удивительным учителем, к которому можно было обратиться с вопросом по поводу любой задачи. И он не уходил в кусты, как, увы, это делают некоторые наши коллеги, а начинал решать задачу. Практически всегда успешно. При этом он всегда радовался, когда ученики находили лучшее решение, или решение, основанное на других идеях. Правда, иногда в шутку «обижался» если ученики сильно обходили его. Честно говоря, я никогда не понимал, была ли это игра или ему и правда было в какой-то степени обидно (как с ученицей Машей в школьные годы).

Сэм всегда продумывал свои учебные программы, часто тратя на это летние месяцы. Помню, когда мы вели в Бауманке подготовительные курсы, он придумал алгоритмы решения многих типовых задач, которые давались в этом институте на приёмных экзаменах (когда ещё не было ЕГЭ). Благодаря этому, у тех, кто посещал наши группы, проблем со сдачей математики, как правило, не было.

Сэм был достаточно вспыльчивым человеком. Он легко мог наорать на коллегу (но никогда не на ученика), угрожать уходом из класса. Но очень быстро остывал и я не помню, чтобы он хоть однажды исполнил какую-то свою угрозу. Хотя мне «пару раз» пришлось мирить его с некоторыми коллегами.

Я люблю оценивать качество учителя по тому, каких детей он вырастил. Сэм сумел привить своей дочери умение решать задачи: она удивляла этим даже Гордина. И хотя математика не стала её профессией, она до сих пор прекрасно решает задачи и осваивает элементы математики.

Многие из учеников Сэма, получив высшее образование, приходят в школу помогая вести спецматематику (матанализ). Это говорит о том, как ученики очень его любили и уважали Его фразы вошли в устную «мифологию» 179 школы и часто я слышу их в разговорах учеников.

В заключении хочу отметить, что теперь без Сэма мне в школе как бы «одиноко и грустно» и очень часто его не хватает. Так хочется с ним посоветоваться и пообщаться.

Бабат Лев Георгиевич,
учитель математики ГБОУ Школа 179 г. Москвы,
старший научный сотрудник ЦЭМИ РАН,
кандидат физ.-мат. наук.

Цитатник Сэма

В школе существует традиция записывать яркие остроумные высказывания учителей — "цитаты" — и собирать их в "цитатники", некоторые цитатники изданы в печатном виде. Приводим ряд цитат Семёна Григорьевича — Сэма, записанных в разные годы. Если цитата не подписана, автор — Сэм. В диалогах участники указаны.

Я думаю, что вы поймете это лучше меня!

Я нарисую не так, как я нарисую.

Нарисовав прямоугольник: "Представьте, что это окружность".

Задача: жил-был треугольник...

Лучше всего на мой вопрос ответил Арсений, правда, я не понял, что он ответил.

Ученик: "Да эти экзамены — что для обычных классов, что для математических (по алгебре) — почти не отличаются".
Сэм: "Парень, один ты напишешь, а второй нет".

Вы должны это понять, это даже я понял.

$\sin 60^\circ = 1/2$, это даже я помню!!!

Сэм: Ну и какой график будет у этой функции?
Ученик: Окружность.
Сэм: М-да, окружность... А посередине бутерброд.

Некоторые люди здесь умеют решать задачи с параметрами, а остальные не умеют. Кто-нибудь здесь из остальных умеет решать задачи с параметрами??

Чтобы задача была сложнее, напишу её зелёным маркером!

И остались от катета рожки да ножки.

400 человек берут на мехмат. Как туда не попасть, я даже не знаю.

Не думайте о природе, думайте об аксиомах и всё получите. Человечество уже продумало этот вопрос...

Ученик 1: Какие инструменты мы можем использовать? Циркуль и линейку?
Сэм: Я обычно использую это (показывает на голову).
Через некоторое время.
Ученик 2: Какие инструменты можно использовать?
Сэм: Вам я отвечу так: пользуйтесь циркулем и линейкой.

За год вы умнее не станете, вы станете старше!

В следующий раз я поставлю тебе столбик двоек!

У вас хорошие оценки только потому, что я их поставил так.

Я понимаю, что я люблю свои решения, но только потому, что они действительно хорошие.

Я рассказываю хорошие доказательства. Если ты считаешь, что твоё лучше, значит, у тебя ошибка.

Существует два типа задач: 1) тривиальные и 2) те, которые я решить не могу.

Вы в задачах не ответы получайте — вы получайте удовольствие!

Учебные материалы по геометрии, алгебре и анализу

С. Г. Слободник

Представляем подборку материалов по геометрии, алгебре и математическому анализу, которые Семен Григорьевич составил сам и использовал в учебном процессе в 179-й школе.

Предисловие

Семен Григорьевич был знатоком как школьной, так и многих разделов высшей математики, а также замечательным методистом. Работая в профильной школе с большой вариативной составляющей программы по математике, он имел возможность сам создавать учебные материалы, которые, по его мнению, могли быть интересны детям, и использовать их в учебном процессе.

Предлагаем вашему вниманию обширную подборку материалов, состоящую из двух частей: материалы по геометрии и линейной алгебре, а также материалы по алгебре и математическому анализу. Каждая часть представляет собой не полноценный курс, а набор отдельных, независимых математических сюжетов. На освоение каждой такой темы детьми тратится от одного (если тема небольшая) до нескольких, в случае больших тем, занятий.

Отметим, что каждая тема тщательно проработана методически; изложение даже самых сложных из них понятно, элегантно и доступно старшим школьникам профильных классов. Автор сохраняет необходимый баланс между достаточной математической строгостью и отсутствием “педантизма” и “занудства”, свойственных многим учебным пособиям.

Вызывает уважение разнообразие тематики: от обычной школьной темы координат на плоскости до подробного исследования, с применением методов матанализа, задачи о точке Торичелли — по геометрии; от простых фактов про деление с остатком до построения меры Каратеодори — по алгебре и анализу. Многие темы изложены нестандартно, оригинально, изложение несет на себе отпечаток яркой творческой личности автора.

Геометрия и линейная алгебра

Сначала, в хронологическом порядке, представлены материалы, датированные автором. Затем в произвольном порядке идут материалы без датировки. Большинство рисунков дано в авторском исполнении.

Координаты. 10.02.2013

На плоскости с ортогональной системой координат XOY рассмотрим произвольный вектор $\overline{e} = \overline{OE}$ единичной длины. Пусть $M(x;y)$ - некоторая точка нашей плоскости. Опустим из M перпендикуляр MH на прямую OE. Справедливо равенство

$$MO^2 - ME^2 = OH^2 - HE^2. \tag{1}$$

Введем некоторые определения и соглашения:

Если на прямой выделена точка начала, скажем, O, и точка E так, что $OE = 1$, то такую прямую назовем осью. На оси каждой точке будет соответствовать число. А именно, если H — произвольная точка оси, то поставим ей в соответствие число, по модулю равное длине отрезка OH. Знак же этого числа выбирается в зависимости от того, где лежит точка H. Если H и E лежат по одну сторону от точки O, то знак числа плюс. Если E и H лежат по разные стороны от O, то знак — минус. Если же H совпадает с O, то знак не существен, так как точке H в этом случае соответствует число ноль.

Сначала разберемся с правой частью равенства (1). Положим, точка E имеет координаты $(a;b)$, а точка M — координаты $(x;y)$. Так как $OE = 1$, то $a^2 + b^2 = 1$. Применив теорему Пифагора, получим

$$MO^2 - ME^2 = x^2 + y^2 - (x-a)^2 + (y-b)^2 = 2ax + 2ay - (a^2 + b^2) = 2ax + 2ay - 1.$$

Т.е.

$$MO^2 - ME^2 = 2ax + 2ay - 1 \tag{2}$$

Теперь оценим левую часть равенства (1). Пусть точке H на оси OE соответствует число c. (Ясно, что $|c| = OH$). Тогда

$$OH^2 - HE^2 = c^2 - (c-1)^2 = 2c - 1.$$

Из (1) и (2) с учетом последнего равенства получим: $2ax + 2ay - 1 = 2c - 1$, или окончательно

$$ax + by = c. \tag{3}$$

Напомним что скалярное произведение $\overline{c} \cdot \overline{d}$ двух векторов $\overline{c}$ и $\overline{d}$ определяется формулой

$$\overline{c} \cdot \overline{d} = |c| \cdot |d| \cdot cos\varphi, \tag{4}$$

где φ — угол между векторами $\overline{c}$ и $\overline{d}$, Мы доказали, что в случае, если вектор $\overline{d}$ единичный, то

$$\overline{c} \cdot \overline{d} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, \tag{5}$$

где $(x_1; y_1)$ - координаты вектора $\overline{c}$, а $(x_2; y_2)$ - координаты вектора $\overline{d}$.

Несложно доказать, что и в случае, когда $\overline{d}$ — не единичный вектор, справедлива формула (5). Действительно, так как $\dfrac{\overline{d}}{|d|}$ - единичный вектор, образующий с $\overline{c}$ такой же угол, как и вектор $\overline{d}$, получим

$$\overline{c} \cdot \overline{d} = |\overline{d}| \cdot \left(\overline{c} \cdot \frac{\overline{d}}{|d|} \right) \tag{6}$$

Далее, поскольку вектор $\overline{d} = (x_2; y_2)$, то $\dfrac{\overline{d}}{|d|} = \left(\dfrac{x_2}{|d|}; \dfrac{y_2}{|d|}\right)$. Используя (6), получим:

$$\overline{c} \cdot \overline{d} = |d| \cdot \left(\overline{c} \cdot \frac{\overline{d}}{|d|}\right) = |d| \cdot \left(x_1 \cdot \frac{x_2}{|d|} + y_1 \cdot \frac{y_2}{|d|}\right) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Таким образом, для любых векторов $\overline{c}(x_1; y_1), \overline{d}(x_2; y_2)$ справедливо равенство

$$\overline{c} \cdot \overline{d} = x_1x_2 + y_1y_2. \qquad (7)$$

Теперь мы в состоянии выписать основные свойства скалярного произведения:

1)$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$

2)$k\overline{a} \cdot \overline{b} = k(\overline{a} \cdot \overline{b})$

3)$(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{ac} + \overline{bc}$

4)$\overline{a} \cdot \overline{a} \geq 0$, и из $\overline{a} \cdot \overline{a} = 0$ следует, что $\overline{a} = 0$.

Посмотрим, что дадут наши рассуждения при изучении прямой, лежащей в плоскости с декартовой системой координат.

Итак, пусть l — прямая на плоскости XOY. Рассмотрим единичный вектор $\overline{OE}$ (точка E имеет координаты $(a; b)$), перпендикулярный прямой l. Точку пересечения OE и l обозначим через H. Если точке H соответствует число c на оси OE (точка O — точка начала и точка E — единичная точка оси OE), то для любой точки $M(x; y)$, лежащей на прямой l, будет выполняться соотношение (3), т.е.

$$ax + by = c \qquad (8)$$

Заметим, что этому уравнению будут удовлетворять те и только те точки, которые лежат на прямой l.

Итак, положим число $-d = c$. Тогда из (8) получим

$$ax + by + d = 0, \qquad (9)$$

где $a^2 + b^2 = 1$. Такое уравнение называют *нормальным уравнением прямой*. Легко видеть, что геометрическое место точек, удовлетворяющих нормальному уравнению (9), является некоторой прямой. Ясно, что это будет прямая, перпендикулярная единичному вектору $\overline{OE} = (a; b)$ и пересекающая ось OE в точке H, которой соответствует число $-d$. Если $ax + by + d = 0$ и $a^2 + b^2 \neq 0$, то уравнение называют *общим уравнением прямой*. Это уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot y + \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0,$$

которое уже является нормальным.

Мы хотим показать, как найти расстояние от точки $M(x_1; y_1)$ плоскости до прямой l, заданной нормальным уравнением

$$ax + by + d = 0. \qquad (10)$$

Рассмотрим точку $E(a; b)$. Прямая OE пересекает l в точке H. Обозначим через K основание перпендикуляра из M на прямую l. Ясно, что длина отрезка MK и есть расстояние от M до l. Если P — основание перпендикуляра, опущенного из M на прямую OE, то $PH = MK$. Точке P на оси OE соответствует число $p = \overline{OM} \cdot \overline{OE} = x_1a + y_1b$. Точке H — число $-d$ из уравнения (10). Ясно, что

$$PH = |p - (-d)| = |x_1a + y_1b + d|.$$

Таким образом, для определения расстояния от точки $M(x_1; y_1)$ до прямой l, заданной нормальным уравнением $ax + by + d = 0$, достаточно подставить координаты точки M в это уравнение и взять модуль полученного результата.

Теорема Морлея. 01.03.2013

Пусть точки M, N, K лежат внутри треугольника ABC. При этом прямые AM и AN являются триссектрисами угла A, (т.е., они делят A на три равные части),прямые CN и CK — триссектрисы угла C, и наконец прямые BK и BM — триссектрисы угла B. Тогда треугольник MNK правильный.

Доказательство. Начнем с некоторых обозначений. Положим $\alpha = \frac{1}{3}A$, $\beta = \frac{1}{3}B$ и $\gamma = \frac{1}{3}C$. Для любого угла ξ через ξ^* обозначим угол, равный $\xi + \frac{\pi}{3}$. Далее рассмотрим равносторонний треугольник PQR с единичными сторонами. Построим на сторонах PQ, QR и RP треугольника PQR во внешнюю сторону от него три треугольника PQA', QRC' и RPB'. При этом положим $\angle A'PQ = \beta^*$, $\angle A'QP = \gamma^*$ и $\angle PA'Q = \alpha$.

Это возможно, т.к. $\beta^* + \gamma^* + \alpha = \frac{A+B+C}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$.

Аналогично, положим $\angle RQC' = \alpha^*$, $\angle QRC' = \beta^*$ и $\angle RC'Q = \gamma$ и в треугольнике $P'BR$ положим $\angle B'PR = \alpha^*$, $\angle B'RP = \gamma^*$ и $\angle PB'R = \beta$.

Рассмотрим треугольник $A'QC'$. $\angle A'QC' = 2\pi - \frac{\pi}{3} - \gamma^* - \alpha^* = \pi - \alpha - \gamma$.

Таким образом, если от стороны $A'Q$ отложить прямую, проходящую через точку A' и под углом α, то она пересечет прямую QC' в некоторой точке C'' так, что $\angle QAC'' = \alpha$, $\angle QC''A' = \gamma$.

Докажем, что точки C'' и C' совпадают. По теореме синусов для треугольника APQ получим

$$\frac{PQ}{A'Q} = \frac{1}{A'Q} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta^*}, \frac{RQ}{QC'} = \frac{1}{QC'} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta^*}.$$

Следовательно,

$$\frac{A'Q}{QC'} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \tag{1}$$

Применив теорему синусов к треугольнику $A'QC''$, получим:

$$\frac{A'Q}{QC''} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $QC' = QC''$, т.е., точки C' и C'' совпадают. Значит, $\angle QA'C' = \alpha$, $\angle QC'A' = \gamma$.

Совершенно аналогично доказывается, что $\angle B'A'P = \alpha$, $\angle A'B'P = \beta$ и наконец $\angle RB'C' = \beta$, $\angle RC'B' = \gamma$.

Т.е. треугольник $A'B'C'$ имеет такие же углы, как и треугольник ABC, т.е. эти треугольники подобны, а триссектрисы треугольника $A'B'C'$ попарно пересекаясь образуют правильный треугольник PQR. Теорема доказана.

Формула Герона для треугольников. 11.03.2013

Пусть ABC — треугольник. Обозначим длины сторон: BC через a, AB через c и AC через b. Периметр треугольника обозначим через $2p$. Т.е. $\dfrac{a+b+c}{2} = p$. Площадь треугольника обозначим через s. Тогда получим:

$$4s = 2cb \cdot \sin A$$

Возведя обе части в квадрат, получим:

$$16s^2 = 4c^2b^2\sin^2 A. \tag{1}$$

Из теоремы косинусов следует:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cdot \cos A.$$

Т.е. $2cb \cdot \cos A = c^2 + b^2 - a^2$. Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим

$$4c^2b^2\cos^2 A = (c^2 + b^2 - a^2)^2 \tag{2}$$

Прибавим к правой части равенства (1) $4c^2b^2\cos^2 A$ и, чтобы ничего не изменилось, вычтем $(c^2 + b^2 - a^2)^2$. Получим

$$16s^2 = 4c^2b^2\sin^2 A + 4c^2b^2\cos^2 A - (c^2 + b^2 - a^2)^2.$$

Следовательно, $16s^2 = 4c^2b^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2 = (2cb + c^2 + b^2 - a^2)(2cb + a^2 - c^2 - b^2) =$
$= ((c+b)^2 - a^2)(a - (c-b)^2) = (c+b-a)(c+b+a)(a+c-b)(a+b-c) =$
$= 2\dfrac{a+b+c}{2} \cdot 2(\dfrac{a+b+c}{2} - a) \cdot 2(\dfrac{a+b+c}{2} - b) \cdot 2(\dfrac{a+b+c}{2} - c) =$
$= 16p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c).$

Таким образом, имеем

$$s^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

и окончательно,

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Неравенство Птолемея, теорема Птолемея. 09.04.2013

Выделим (произвольно) некоторую точку O на плоскости α и определим преобразование φ, которое каждой точке $A \in \alpha,\ \ A \neq O$ ставит в соответствие точку A_1 такую, что A_1 лежит на луче OA и $OA_1 \cdot OA = 1$. Обычное расстояние между точками A, B плоскости α будем обозначать через AB. Так, если A, B, C — три точки плоскости, то неравенство треугольника записывается выражением

$$AB + BC \geq AC.$$

Мы введем новое расстояние ρ между точками плоскости α, положив для произвольных точек A, B, отличных от O,

$$\rho(A, B) = A_1B_1, \tag{1}$$

где $A_1 = \varphi(A)$, $B_1 = \varphi(B)$.

Вычислим $\rho(AB)$ зная, что $AB = c$, $OA = a$ и $OB = b$. Ясно, что $\triangle OAB \backsim \triangle OB_1A_1$, кроме того, из определения отображения φ следует, что $OA_1 = \frac{1}{a}$. Поэтому

$$\rho(AB) = A_1B_1 = \frac{A_1B_1}{AB} \cdot AB = \frac{OA_1}{OB} \cdot AB = \frac{c}{ab}. \tag{2}$$

Пусть A, B, C — произвольные три точки плоскости, отличные от точки O. Тогда $\rho(AB)+\rho(BC) \geq \rho(AC)$, следовательно,

$$\frac{AB}{OA \cdot OB} + \frac{BC}{OB \cdot OC} \geq \frac{AC}{OA \cdot OC}. \tag{3}$$

Умножив каждый член неравенства (3) на $OA \cdot OB \cdot OC$, получим:

$$AB \cdot OC + BC \cdot OA \geq AC \cdot OB. \tag{4}$$

Мы получили замечательную формулу — „ Неравенство Птолемея”, утверждающую, что произведение диагоналей произвольного четырехугольника не превосходит суммы произведений его противоположных сторон.

Пусть теперь $OABC$ — выпуклый четырехугольник, вписанный в окружность. Преобразование φ плоскости с центром в точке O переведет точки A, B, C в точки A_1, B_1, C_1, лежащие на прямой. При этом B_1 окажется между точками A_1 и C_1. Но тогда

$$A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1. \tag{5}$$

Следовательно, неравенство (3) превратится в равенство

$$\frac{AB}{OA \cdot OB} + \frac{BC}{OB \cdot OC} = \frac{AC}{OA \cdot OC}. \tag{6}$$

Окончательно, домножив каждый член равенства (6) на $OA \cdot OB \cdot OC$, получим

$$AB \cdot OC + BC \cdot OA = AC \cdot OB. \tag{7}$$

Последняя формула, по сути, является теоремой Птолемея, утверждающей, что если выпуклый четырехугольник вписан в окружность, то сумма произведений его противоположных сторон равна произведению диагоналей.

Уравнение плоскости. 19.02.2014

Расстояние от точки до плоскости.

Рассмотрим прямоугольную систему координат $OXYZ$. Пусть α — некоторая плоскость.

$\overline{OE}$ — единичный вектор, (т.е. вектор единичной длины), перпендикулярный плоскости α.

M — точка пересечения прямой OE и α.

Отметим, что точка O совпадает с началом координат. Итак, на прямой OE выделены две точки: O, которую будем считать началом на этой прямой, и E – единица на этой прямой. Отметим, что OE — отрезок единичной длины.

Наличие этих точек позволяет каждой точке прямой OE поставить в соответствие действительное число. А именно, если точка B лежит на прямой OE, то поставим ей в соответствие число b, модуль которого равен длине отрезка OB. При этом если E и B лежат по одну сторону от O, то b — положительное число, а если E и B лежат по разные стороны от O, то b — отрицательное число.

Так как точка M лежит на прямой OE, то ей соответствует некоторое число $\boldsymbol{d}$. Поскольку точка E лежит в пространстве с системой координат, то она имеет некоторые координаты $(a; b; c)$. И, так как $\overline{OE}$ — единичный вектор, то $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Для любой точки $(x; y; z)$ плоскости получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2 - (z-c)^2 = d^2 - (d-1)^2.$$

Следовательно, $2xa + 2yb + 2zc - a^2 - b^2 - c^2 = 2d - 1$.

И окончательно,

$$xa + yb + zc = d. \tag{1}$$

Отметим, что мы доказали следующее:

Пусть $\overline{f} = (x; y; z)$ - произвольный вектор, $\overline{e} = (a; b; c)$ - вектор единичной длины. Тогда

$$xa + yb + zc = |\overline{f}| \cdot cos\varphi,$$

где φ - угол между векторами $\overline{e}$ и $\overline{f}$.

Докажем, что если $\overline{f} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\overline{g} = (x_2; y_2; z_2)$ — два произвольных вектора, то

$$|\overline{f}| \cdot |\overline{g}| \cdot cos\varphi = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

(Здесь φ — угол между векторами $\overline{f}$ и $\overline{g}$).

Ясно, что $\dfrac{1}{|\overline{g}|} \cdot \overline{g} = \left(\dfrac{x_2}{|\overline{g}|}; \dfrac{y_2}{|\overline{g}|}; \dfrac{z_2}{|\overline{g}|} \right)$. При этом $\dfrac{1}{|\overline{g}|} \cdot \overline{g}$ — единичный вектор. Кроме того, угол φ между векторами $\overline{f}$ и $\overline{g}$ совпадает с углом между векторами $\overline{f}$ и $\frac{\overline{g}}{|g|}$. А так как вектор $\frac{\overline{g}}{|g|}$ — единичный, то по доказанному

$$\overline{f} \cdot \frac{\overline{g}}{|g|} = \overline{|f|} \cdot \cos\varphi = x_1 \cdot \frac{x_2}{|g|} + y_1 \cdot \frac{y_2}{|g|} + z_1 \cdot \frac{z_2}{|g|}. \tag{2}$$

Следовательно, $\overline{|g|} \cdot \overline{|f|} \cdot \cos\varphi = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

Таким образом, каждой паре векторов $\overline{f}, \overline{g}$ мы поставили в соответствие число $\overline{f} \cdot \overline{g} = |\overline{f}| \cdot |\overline{g}| \cdot cos\varphi = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$, где $\overline{f} = (x_1; y_1; z_1)$, $\overline{g} = (x_2; y_2; z_2)$, φ — угол между векторами $\overline{f}$ и $\overline{g}$. При этом легко проверить следующие соотношения:

$\overline{f} \cdot \overline{g} = \overline{g} \cdot \overline{f}$, $\quad (k\overline{f}) \cdot \overline{g} = k(\overline{f} \cdot \overline{g})$, $\quad \overline{f} \cdot \overline{f} = |\overline{f}|^2$, $\quad (\overline{f} + \overline{g}) \cdot \overline{h} = \overline{f} \cdot \overline{h} + \overline{g} \cdot \overline{h}$.

Вернемся к уравнению плоскости.

Мы видим, что плоскость — это геометрическое место тех и только тех точек, которые для некоторого набора a, b, c, d, где $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, удовлетворяют уравнению $ax + by + cz = d$.

Если есть четверка чисел a, b, c, d такая, что $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, то $ax + by + cz = d$ — уравнение плоскости.

Уравнение $ax + by + cz = d$, где $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ задает плоскость. Действительно, если умножить все коэффициенты этого уравнения на любое не равное нулю число, то получим уравнение, эквивалентное исходному. Поэтому, умножив все коэффициенты на $(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})^{-1}$, получим уравнение

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\ x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\ y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\ z = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

А в этом уравнении сумма квадратов коэффициентов при x, y и z равна 1. Такое уравнение называют *нормальным.*

Отметим, что если $ax + by + cz = d$ — нормальное уравнение плоскости α, то единичный вектор $(a; b; c)$ перпендикулярен плоскости α.

Попробуем найти расстояние от произвольной точки $A(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости α, задаваемой уравнением

$$ax + by + cz = d. \tag{3}$$

При этом, так как любое общее уравнение плоскости можно привести к эквивалентному ему нормальному, сразу предположим, что (3) — нормальное уравнение, т.е. $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Рассмотрим точку E с координатами $(a; b; c)$. Ясно, что $\overline{OE}$ — единичный вектор. Будем считать, что прямая OE пересекает плоскость (α) в точке M. Опустим из A перпендикуляр AH к плоскости (α). Прямые AH и OE параллельны.

Ясно, что основанием перпендикуляра из точки H на OE будет точка M (точка пересечения прямой OE с плоскостью α). Основание перпендикуляра из точки A на прямую OE обозначим через B.

Расстояние от A до плоскости α равно AH. А так как $AHMB$ — прямоугольник, то оно равно BM. Поскольку точки B и M лежат на оси OE, причем точке B соответствует число $ax_1+by_1+cz_1$, а точке M — число d, то расстояние между точкой A и плоскостью α равно $|ax_1+by_1+cz_1-d|$.

Заметим, что уравнение $ax+by+cz-d=0$ — это уравнение плоскости α. Таким образом, для определения расстояния от точки $A(x_1;y_1;z_1)$ до плоскости, описываемой уравнением $ax+by+cz-d=0$, можно воспользоваться формулой

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Уравнение плоскости в отрезках. 18.12.2015

Рассмотрим три некомпланарных вектора $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ с началом в точке O. Эти векторы задают систему координат. А именно, если $\overline{OM}=x\overline{e_1}+y\overline{e_2}+z\overline{e_3}$, то $M=M(x,y,z)$.

Пусть $A=(a;0;0)$, $B=(0;b;0)$ и $C=(0;0;c)$, где $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$. Ясно, что в этом случае точки A, B, C не лежат на одной прямой (Иначе $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ были бы компланарны). Через точки A, B, C проходит одна и только одна плоскость. Докажем, что уравнение этой плоскости имеет вид:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{1}$$

Что это значит? Это значит, что

а) координаты любой точки плоскости, проходящей через точки A, B, C удовлетворяют уравнению (1) и

б) если координаты некоторой точки удовлетворяют уравнению (1), то точка лежит в плоскости, проходящей через A, B, C.

Начнем с пункта а). Пусть α — плоскость, проходящая через точки A, B, C. Ясно, что $A=(a;0;0)$, $\overline{AB}=(-a;b;0)$, $\overline{AC}=(-a;0;c)$. Так как точки A, B, C не лежат на одной прямой, то $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ — неколлинеарные векторы. Значит, любая точка плоскости α может быть представлена в виде $\overline{OA}+k\overline{AB}+m\overline{AC}$. Но тогда ее координаты равны:

$(a;0;0)+(-ka;kb;0)+(-ma;0;mc)=(a(1-k-m);kb;mc)$, т.е. удовлетворяют (1).

Докажем б). Пусть $M(x;y;z)$ — точка с координатами x, y, z, удовлетворяющими (1). Ясно, что конец вектора

$$\overline{OA}+\frac{y}{b}\overline{AB}+\frac{z}{c}\overline{AC}=(a;0;0)+(-\frac{ay}{b};y;0)+(-\frac{az}{c};0;z)=(a(1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c});y;z) \tag{2}$$

лежит в плоскости α.

Так как $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, то $x=a(1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c})$. Из (2) следует, что M лежит в плоскости α.

(M совпадает с концом вектора $\overline{OA}+\frac{y}{b}\overline{AB}+\frac{z}{c}\overline{AC}$).

Задача 1. Пусть точка M лежит внутри трехгранного угла. Докажите, что если плоскость α проходит через M и отсекает от трехгранного угла тетраэдр наименьшего объема, то точка M является точкой пересечения медиан треугольника, являющегося гранью, образованной пересечением трехгранного угла и плоскости α.

Решение. Пусть $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ — единичные векторы с началом в точке O — вершине трехгранного угла, идущие каждый по одному из ребер этого угла (по вектору на ребро). Эти векторы определяют систему координат. Пусть $M=(x_1;y_1;z_1)$. Если плоскость α проходит через точку $(x_1;y_1;z_1)$ и пересекает ребра в точках с координатами $(a;0;0)$, $(0;b;0)$ и $(0;0;c)$, то уравнение плоскости

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, и так как $M\in\alpha$, то $\dfrac{x_1}{a}+\dfrac{y_1}{b}+\dfrac{z_1}{c}=1$. Ясно, что объем отсекаемого тетраэдра равен $k\ a\cdot b\cdot c$, где k зависит от трехгранного угла, а не от a, b, c. Следовательно, мы должны найти a, b, c такие, что $\dfrac{x_1}{a}+\dfrac{y_1}{b}+\dfrac{z_1}{c}=1$, а $a\cdot b\cdot c$ минимально. Т.е.,

$$\frac{x_1}{a}\cdot\frac{y_1}{b}\cdot\frac{z_1}{c}\qquad\text{максимально.}\tag{3}$$

Но $\sqrt[3]{\dfrac{x_1}{a}\cdot\dfrac{y_1}{b}\cdot\dfrac{z_1}{c}}\le\left(\dfrac{x_1}{a}+\dfrac{y_1}{b}+\dfrac{z_1}{c}\right)/3=\dfrac{1}{3}$. При этом наибольшее значение произведения (3) достигается лишь при $\dfrac{x_1}{a}=\dfrac{y_1}{b}=\dfrac{z_1}{c}=\dfrac{1}{3}$, т.е. когда $a=3x_1$, $b=3y_1$ и $c=3z_1$. Но в этом случае $\dfrac{(3x_1;0;0)+(0;3y_1;0)+(0;0;3z_1)}{3}=(x_1;y_1;z_1)$, т.е. $(x_1;y_1;z_1)$ — точка пересечения медиан грани, полученной при пересечении α и нашего трехгранного угла.

Задача 2. Параллелепипед вписан в тетраэдр $SABC$ так, что одна из вершин параллелепипеда совпадает с точкой S, еще 3 лежат на ребрах SA, SB и SC. Остальные вершины параллелепипеда лежат внутри граней SAB, SAC, SBC и ABC (по одной на грань). Все ребра параллелепипеда равны 5, $SA=15$, $SB=17$. Найдите длину ребра SC.

Векторы на плоскости и введение в тригонометрию. 15.02.2015

Пусть на прямой l выбрали две точки O и E такие, что длина отрезка OE равна 1. Мы будем называть точку O *началом*, а точку E — *единичной* точкой. Выбор точки начала и единичной точки позволяет каждой точке прямой l поставить в соответствие действительное число. А именно: произвольной точке $A\in l$ поставим в соответствие число x такое, что модуль x равен длине отрезка OA. Если точки A и O совпадают, то число $x=0$ и знак не существен, если E и A лежат по одну сторону от точки O, то знак числа x — плюс, если по разные, то знак минус. Число x называют *координатой* точки A. Прямую с введенными таким образом координатами назовем *осью*. Для обозначения точки A на оси можно использовать символы A, (x) или $A(x)$, где x – координата точки A на оси l.

Задача 1. Докажите, что если точки A и B лежат на оси l, то длина отрезка $AB=|A(x)-B(x)|$.

Проведем через произвольную точку O плоскости две перпендикулярные прямые OX и OY. Назовем их *осями координат*. Прямую OX — *осью абсцисс*, а прямую OY — *осью ординат*.

Обычно на чертеже ось OX изображают горизонтальной, а ось OY вертикальной прямой. Точку O будем называть *началом координат*. Точка O разбивает ось абсцисс на две части: *положительную*, расположенную справа от точки O, и *отрицательную*, расположенную слева от точки O. Аналогично, ось ординат разбивается точкой O на две полуоси: *положительную*, расположенную над точкой O, и *отрицательную*, расположенную под точкой O. На каждой из осей координат OX и OY выберем по точке E_x и E_y сооответственно. При этом точки выберем в положительных полуосях так, чтобы выполнялось равенство $OE_x=OE_y=1$. Отрезки OE_x и OE_y назовем *единичными отрезками* осей OX и OY.

Обозначим через A_x проекцию произвольной точки A на ось X, а через A_y проекцию этой точки на ось Y. Мы уже знаем, что каждой точке на оси соответствует действительное число. Число, соответствующее точке A_x на оси абсцисс, назовем *абсциссой* или *иксовой координатой* точки A, а число, соответствующее точке A_y оси ординат, назовем *ординатой* или *игрековой координатой* точки A. Для обозначения точки A пишут A, $A(x;y)$, $(x;y)$, где x — абсцисса, y — ордината точки A.

Введенные таким образом координаты называют *декартовой (прямоугольной)* системой координат. Оси координат делят плоскость на *четверти* или *квадранты*. Они нумеруются против часовой стрелки, начиная с квадранта, в котором обе координаты неотрицательны, символами I, II, III, IV

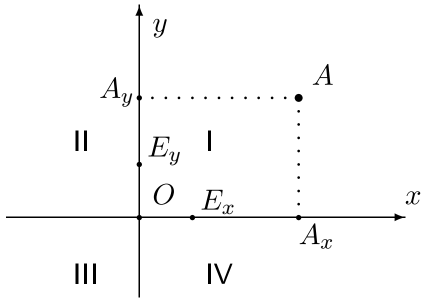


Рис. 1. Здесь изображена декартова система координат. На каждой оси ставится стрелка, показывающая направление от отрицательной полуоси к положительной. Порядок квадрантов идет против часовой стрелки. Обозначена точка A и ее ортогональные проекции на оси OX и OY.

Направленный отрезок назовем *вектором*. Если A, B — точки плоскости, то символом $\overline{AB}$ назовем вектор, у которого A — начало, B — конец. Часто для обозначения вектора будем использовать малые латинские буквы: $\overline{a}$. *Модулем* вектора $\overline{AB}$ назовем длину отрезка AB. Через $|\ \overline{AB}\ |$ обозначают модуль вектора $\overline{AB}$, а через $|\ \overline{a}\ |$ модуль вектора $\overline{a}$.

В дальнейшем векторы $\overline{OE_x}$ и $\overline{OE_y}$ будем обозначать через $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ соответственно.

Если начало и конец вектора совпадают, то такой вектор называют *нулевым* вектором и обозначают символом $\overline{0}$.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или на параллельных прямых. Ясно, что если один из двух векторов нулевой, то эти векторы коллинеарны.

Пусть $A = A(x_1; y_1)$ и $B = B(x_2; y_2)$. Тогда числа $x = x_2 - x_1$ и $y = y_2 - y_1$ назовем соответственно *иксовой* и *игрековой координатами* вектора $\overline{AB}$. В этом случае пишут $\overline{AB}(x; y)$.

Будем говорить, что векторы $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_2B_2}$ равны и писать $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$, если середины отрезков A_1B_2 и B_1A_2 совпадают.

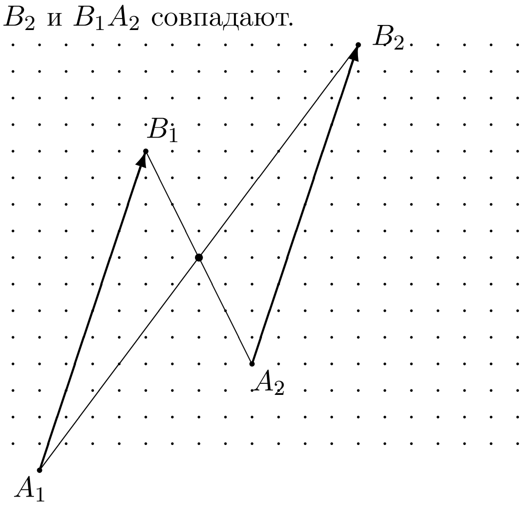


Рис. 2. Векторы $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_2B_2}$ равны, поскольку отрезки A_1B_2 и A_2B_1 точкой пересечения делятся пополам.

Задача 2. Докажите, что если векторы $\overline{AB}(x_1; y_1)$ и $\overline{CD}(x_2; y_2)$ равны, то $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. И наоборот, из равенства координат двух векторов следует, что они равны.

Вектор $\overline{OA}$, где O — начало координат, называют *радиус-вектором* (точки A). Понятия “точка” и “радиус-вектор” тождественны. В частности, если $\overline{a} = \overline{OM}$, где $M = M(x; y)$, то числа x, y являются координатами вектора $\overline{a}$.

Приступим к подробному изучению радиус-векторов. Мы временно будем считать, что все векторы, с которыми мы сейчас будем работать, начинаются в точке O — начале координат.

Символом $\alpha \cdot \overline{OA}$ будем обозначать произведение действительного числа α на вектор $\overline{OA}$. При этом если $\alpha \cdot \overline{OA} = \overline{OB}$, то точка B лежит на прямой OA, длина отрезка OB равна произведению числа $|\alpha|$ на длину отрезка OA, и если $\alpha > 0$, то точки A и B лежат по одну сторону от точки O, а если $\alpha < 0$, то по разные стороны от точки O. Отметим, что если $\overline{OA} = \overline{0}$, то $\alpha \cdot \overline{OA} = \overline{0}$ и $\alpha \cdot \overline{0} = 0$. Для простоты часто вместо $\alpha \cdot \overline{OA}$ пишут $\alpha\overline{OA}$.

Суммой векторов $\overline{OB}$ и $\overline{OA}$ назовем вектор $\overline{OC}$ такой, что середины отрезков AB и OC совпадают. При этом пишут $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$.

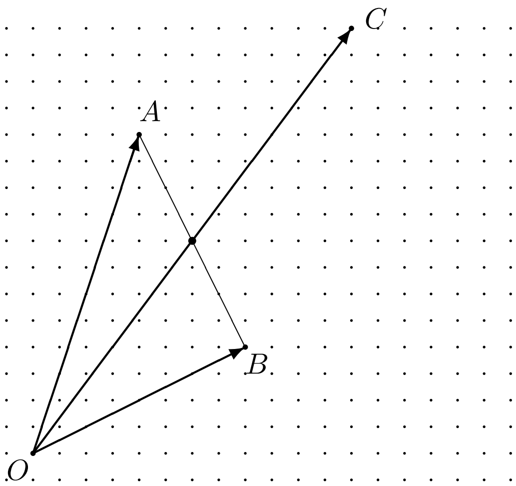


Рис. 3. Вектор $\overline{OC}$ равен сумме векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, поскольку середина отрезка AB является серединой отрезка OC.

Задача 3. Докажите, что если $(x; y)$ — координаты вектора $\overline{OA}$, то $(\alpha x; \alpha y)$ — координаты вектора $\alpha \cdot \overline{OA}$.

Задача 4. Докажите, что если $\overline{OA} = (x_1; y_1)$, $\overline{OB} = (x_2; y_2)$ и $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$, то $\overline{OC} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.

Для определения тригонометрических функций рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице. Такую окружность будем называть *координатной окружностью* или *тригонометрическим кругом.*

Движение точки по координатной окружности против часовой стрелки — это движение в положительном направлении, движение по часовой стрелке считается движением в отрицательном направлении. Точку M_0 на координатной окружности, которая имеет декартовы координаты $(1; 0)$, называют *точкой начала координатной окружности* (или просто точкой начала, когда из контекста ясно, о чем идет речь).

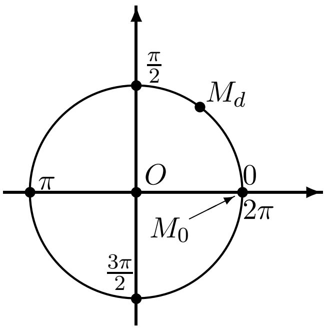


Рис. 4. Это тригонометрическая окружность. На ней обычно подписывают не координаты точек, а радианные меры соответствующих углов или, что то же самое, радианные меры соответствующих дуг. Путь M_0M_d имеет длину d.

Каждому действительному числу d поставим в соответствие точку M_d, лежащую на координатной окружности, такую, что длина дуги $\smile M_0M_d$ равна $|d|$.

При этом дуга откладывается в положительном направлении, если $d > 0$, и в отрицательном, если $d < 0$. Если же $d = 0$, то в качестве M_d возьмем точку M_0 — точку начала на координатной окружности.

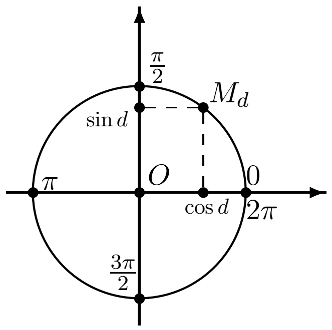


Рис. 5. Тригонометрическая окружность с отмеченными координатами точки M_d: $\cos d$ и $\sin d$.

Так как центральный угол определяется дугой, на которую он опирается, то если дуга $\smile AB$ координатной окружности с началом в A и концом B равна d (с учетом направления движения от A к B), то говорят, что угол AOB равен d (или d радиан). Функцию, которая числу d ставит в соответствие абсциссу точки M_d, называют *косинусом*. Значение этой функции в точке d обозначают через $\cos d$. Аналогично функцию, которая каждой точке d ставит в соответствие ординату точки M_d, называют *синусом*. Значение этой функции в точке d обозначают через $\sin d$.

Обозначим через $\overline{f_\alpha}$ вектор единичной длины, образующий угол α с осью OX (или, что то же самое, с вектором $\overline{e_1}$).

Задача 5. Докажите, что

$$\overline{f_\alpha} = \cos\alpha \cdot \overline{e_1} + \sin\alpha \cdot \overline{e_2}. \tag{1}$$

Символом φ_α обозначим преобразование поворота плоскости на угол α около начала координат - точки O.

Задача 6. Докажите, что

$$\varphi_\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \varphi_\alpha(\overline{a}) + \varphi_\alpha(\overline{b}), \tag{2}$$

$$\varphi_\alpha(k\overline{a}) = k\varphi_\alpha(\overline{a}), \tag{3}$$

$$\varphi_\beta(\varphi_\alpha(\overline{a})) = \varphi_{\alpha+\beta}(\overline{a}). \tag{4}$$

Задача 7. Докажите, что

$$\varphi_\alpha(\overline{e_1}) = \cos\alpha \cdot \overline{e_1} + \sin\alpha \cdot \overline{e_2}. \tag{5}$$

Задача 8. Докажите, что

$$\varphi_\alpha(\overline{e_2}) = -\sin\alpha \cdot \overline{e_1} + \cos\alpha \cdot \overline{e_2}. \tag{6}$$

Указание. Ясно, что $\varphi_\alpha(\overline{e_2}) = \varphi_\alpha(\varphi_{\frac{\pi}{2}}(\overline{e_1})) = \varphi_{\frac{\pi}{2}}(\varphi_\alpha(\overline{e_1})) = \varphi_{\frac{\pi}{2}}(\cos\alpha \cdot \overline{e_1} + \sin\alpha \cdot \overline{e_2}) =$

$= \varphi_{\frac{\pi}{2}}(\cos\alpha \cdot \overline{e_1}) + \varphi_{\frac{\pi}{2}}(\sin\alpha \cdot \overline{e_2}) = \cos\alpha(\varphi_{\frac{\pi}{2}}\overline{e_1}) + \sin\alpha(\varphi_{\frac{\pi}{2}}\overline{e_2}) =$

$= \cos\alpha \cdot \overline{e_2} + \sin\alpha \cdot (-\overline{e_1}) = -\sin\alpha \cdot \overline{e_1} + \cos\alpha \cdot \overline{e_2}.$

Таким образом, (6) доказано.

Так как $\varphi_{\alpha+\beta}(\overline{e_1}) = \cos(\alpha+\beta) \cdot \overline{e_1} + \sin(\alpha+\beta) \cdot \overline{e_2}$, то, определив координаты вектора $\varphi_{\alpha+\beta}(\overline{e_1})$, мы найдем $\cos(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha+\beta)$.

Задача 9. Проделайте соответствующие вычисления:

Указание. Ясно, что

$$\varphi_{\alpha+\beta}(\overline{e_1}) = \varphi_\alpha(\varphi_\beta(\overline{e_1})) = \varphi_\alpha(\cos\beta \cdot \overline{e_1} + \sin\beta \cdot \overline{e_2}) = \cos\beta \cdot \varphi_\alpha(\overline{e_1}) + \sin\beta \cdot \varphi_\alpha(\overline{e_2}) =$$

$$= \cos\beta \cdot (\cos\alpha \cdot \overline{e_1} + \sin\alpha \cdot \overline{e_2}) + \sin\beta \cdot (-\sin\alpha \cdot \overline{e_1} + \cos\alpha \cdot \overline{e_2}) =$$

$$= (\cos\beta \cdot \cos\alpha - \sin\beta \cdot \sin\alpha) \cdot \overline{e_1} + (\cos\beta \cdot \sin\alpha + \sin\beta \cdot \cos\alpha) \cdot \overline{e_2}.$$

Мы показали, что

$$\varphi_{\alpha+\beta}(\overline{e_1}) = (\cos\beta \cdot \cos\alpha - \sin\beta \cdot \sin\alpha) \cdot \overline{e_1} + (\cos\beta \cdot \sin\alpha + \sin\beta \cdot \cos\alpha) \cdot \overline{e_2}. \tag{7}$$

Из (5), примененного к $\varphi_{\alpha+\beta}(\overline{e_1})$ и (7) следует, что

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta, \tag{8}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta. \tag{9}$$

Задача 10. Докажите, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ для любого действительного числа x.
Задача 11. Докажите, что если $a^2 + b^2 = 1$, то найдется такое x, что $a = \sin x$, $b = \cos x$.

Уравнение прямой, расстояние от точки до прямой. 15.02.2015

На плоскости с ортогональной системой координат рассмотрим вектор $\overline{e} = \overline{OE}$ единичной длины. Прямая OE является осью (O – точка начала, E – единичная точка). Из точки $M(x;y)$ опустим перпендикуляр MH на ось OE.

Задача 1. Докажите (рис. 1), что

$$MO^2 - ME^2 = OH^2 - HE^2 \tag{1}$$

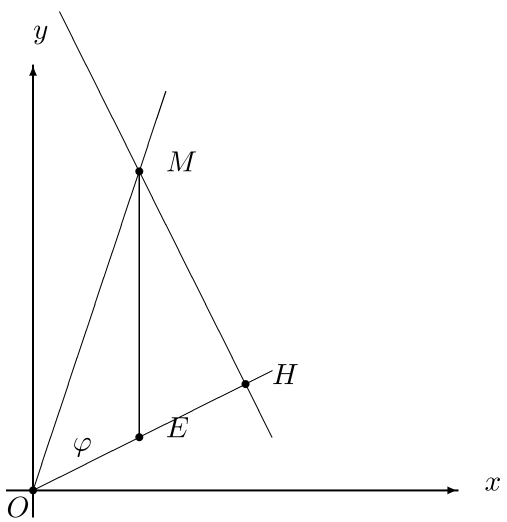


Рис. 1.

Задача 2. Точка H лежит на оси OE. На этой оси ей отвечает число h (h — это координата точки H на оси OE). Докажите, что

$$h = |\overline{OM}| \cdot \cos\varphi, \tag{2}$$

где φ – угол между векторами $\overline{OE}$ и $\overline{OM}$ (см. рис. 1).

Задача 3. Если $|\overline{OE}| = 1$, $\overline{OE} = (a;b)$, а $\overline{OM}(x_1;y_1)$ — вектор, образующий угол φ с вектором $\overline{OE}$, то

$$x_1 a + y_1 b = |\overline{OM}| \cdot \cos\varphi. \tag{3}$$

Указание. Необходимо выразить величины, участвующие в равенстве (1), через координаты: $MO^2 = x_1^2 + y_1^2$, $ME^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2$, $OH^2 = (|\overline{OM}|\cos\varphi)^2$, $HE^2 = (|\overline{OM}|\cos\varphi - 1)^2$. Равенство (1) преобразуется в равенство:

$$x_1^2 + y_1^2 - (x_1^2 - 2ax_1 + a^2 + y_1^2 - 2by_1 + b^2) = (|\overline{OM}|\cos\varphi)^2 - ((|\overline{OM}|\cos\varphi)^2 - 2|\overline{OM}|\cos\varphi + 1).$$

Так как $a^2 + b^2 = 1$, то окончательно получим $xa + yb = |\overline{OM}|\cos\varphi$.

Задача 4. Докажите, что если угол между векторами $\overline{OA}(x_1; y_1)$ и $\overline{OB}(x_2; y_2)$ равен φ, то

$$|\overline{OA}| \cdot |\overline{OB}|\cos\varphi = x_1x_2 + y_1y_2. \tag{4}$$

Пусть l — прямая на плоскости с декартовой системой координат. Рассмотрим вектор единичной длины $\overline{OE}(a; b)$, перпендикулярный прямой l. Ясно, что l пересекает прямую OE в некоторой точке C. Точке C на оси OE соответствует некоторое число c.

Задача 5. Докажите, что уравнению

$$ax + by = c \tag{5}$$

удовлетворяют те и только те точки, которые лежат на прямой l.

Задача 6. Пусть точка $E(a; b)$ такова, что $a^2 + b^2 = 1$. Докажите, что уравнение $ax + by = c$ задает прямую l, которая перпендикулярна прямой OE. Кроме того, прямая l пересекает ось OE в точке с координатой c на оси OE.

Положим $d = -c$. Тогда уравнение

$$ax + by + d = 0, \tag{6}$$

где $a^2 + b^2 = 1$, называют *нормальным уравнением прямой.*

Задача 7. Докажите, что если $a^2 + b^2 \neq 0$, то уравнение $ax + by + c = 0$ можно преобразовать в эквивалентное нормальное:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$$

Задача 8. Докажите, что расстояние от точки $M(x_1; y_1)$ до прямой l, заданной нормальным уравнением $ax + by + c = 0$, равно $|ax_1 + by_1 + c|$.

Указание. Рассмотрим точку $E(a; b)$. Прямая l пересекает прямую OE в точке с координатой $-c$ на оси OE. А проекция точки M на ось OE имеет координату равную $ax_1 + by_1$.

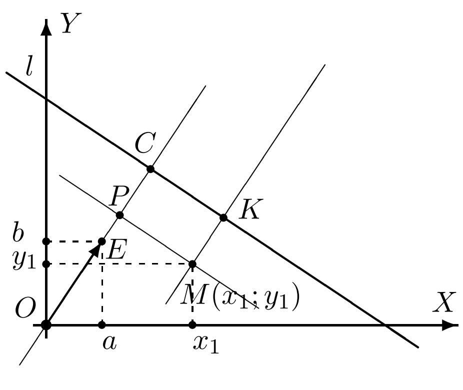


Рис. 2. Поиск расстояния от точки M до прямой l.

Скалярное произведение.

Пусть $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OB}$. Если $\overline{a} = (x_1; y_1)$, $\overline{b} = (x_2; y_2)$ и φ — угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то справедливо следующее равенство:

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi. \qquad (1)$$

Для любых двух векторов $\overline{a} = (x_1; y_1)$ и $\overline{b} = (x_2; y_2)$ величину $|\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$ (φ — угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$) назовем *скалярным произведением* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначается через $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

Задача 1. Докажите, что скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$.

2) $(k\overline{a}) \cdot \overline{b} = k(\overline{a} \cdot \overline{b})$.

3) $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$

4) $\overline{a} \cdot \overline{a} \geq 0$ и если $\overline{a} \cdot \overline{a} = 0$, то $\overline{a} = \overline{0}$.

Задача 2. Докажите, что $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}}$.

Задача 3. Докажите, что $(|\overline{a} \cdot \overline{b}|) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}|$.

Задача 4. (Теорема косинусов). Докажите, что в треугольнике ABC

$$AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos A = BC^2.$$

Задача 5. Докажите, что S — площадь параллелограмма $ABCD$ — удовлетворяет следующим равенствам:

1) $S = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| \cdot \sin A$.

2) $S = \sqrt{(\overline{AB})^2 \cdot (\overline{AD}^2) - (\overline{AB} \cdot \overline{AD})^2}$.

3) $S = |x_1 y_2 - y_1 x_2|$, где $\overline{AB} = (x_1; y_1)$; $\overline{AD} = (x_2; y_2)$.

Отметим, что в предыдущем изложении мы существенным образом использовали теорему Пифагора. Сейчас мы приведем другой путь доказательства равенства (1). Будем исходить из следующего определения скалярного произведения: $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\overline{a}(x_1; y_1)$ и $\overline{b}(x_2; y_2)$.

Задача 6. Докажите, что $(k \cdot \overline{a}) \cdot \overline{b} = k \cdot (\overline{a} \cdot \overline{b})$.

Задача 7. Если $\overline{e}$ – единичный вектор, то для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ справедливо равенство

$$(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{e} = \overline{a} \cdot \overline{e} + \overline{b} \cdot \overline{e}.$$

Задача 8. Докажите, что для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{f}$ справедливо равенство

$$(\overline{a} + \overline{b})\overline{f} = \overline{a} \cdot \overline{f} + \overline{b} \cdot \overline{f}.$$

Задача 9. Докажите, что $\overline{a}(x_1; y_1) \cdot \overline{b}(x_2; y_2) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

Указание. $\overline{a} = x_1\overline{e_1} + y_1\overline{e_2}$, $\overline{b} = x_2\overline{e_1} + y_2\overline{e_2}$. Используя утверждение задачи 8 получим
$\overline{a} \cdot \overline{b} = (x_1\overline{e_1} + y_1\overline{e_2}) \cdot (x_2\overline{e_1} + y_2\overline{e_2}) = x_1 \cdot x_2(\overline{e_1} \cdot \overline{e_2}) + x_1 \cdot y_2(\overline{e_1} \cdot \overline{e_2}) + y_1 \cdot x_2(\overline{e_1} \cdot \overline{e_2}) + y_1 \cdot y_2(\overline{e_1} \cdot \overline{e_2}) =$
$= x_1 \cdot x_2(\overline{e_1} \cdot \overline{e_2}) + y_1 \cdot y_2(\overline{e_1} \cdot \overline{e_2}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

Задачи по теме "Векторы".

1. Даны точки A и B. Докажите, что для любых положительных чисел k и l вектор $\overline{OC} = \dfrac{k \cdot \overline{OA} + l \cdot \overline{OB}}{k + l}$, где $AC : CB = l : m$.

2. Докажите, что вектор $\overline{a}(p; q)$ перпендикулярен прямой $px + qy + d = 0$.

3. Докажите, что если прямая l проходит через точки $M(p; 0)$ и $N(0; q)$ $(p, q \neq 0)$, то уравнение этой прямой имеет вид $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$.

4. Пусть на сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрали точки M и N так, что $AM : MB = DN : NC = k$. Докажите, что отрезок MN пересечет отрезок PQ (P — середина BC, Q — середина AD) в точке R так, что $QR : RP = k$.

5. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки пересечения окружностей: одна с центром в точке $(2; 4)$ и радиусом 2, другая с центром $(5; 8)$ и радиусом 4.

6. Докажите, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC} = 0$.

7. Докажите, что

$\sin(\alpha + \frac{2\pi}{5}) + \sin(\alpha + 2\cdot\frac{2\pi}{5}) + \sin(\alpha + 3\cdot\frac{2\pi}{5}) + \sin(\alpha + 4\cdot\frac{2\pi}{5}) + \sin(\alpha + 5\cdot\frac{2\pi}{5}) = 0.$

8. Докажите, что если центр окружности Q совпадает с центром правильного треугольника ABC, то сумма квадратов расстояний от любой точки M окружности Q до вершин треугольника не зависит от выбора точки M.

Метод весов в стереометрии. 20.12.2015

Любая плоскость в пространстве задается уравнением

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{1}$$

где a, b, c не обращаются в 0 одновременно.

Рассмотрим функцию $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$. Функция f каждой точке $M(x_1, y_1, z_1)$ ставит в соответствие некоторое число $f(M) = ax_1 + by_1 + cz_1 + d$. Многие задачи сводятся к определению значения функции f в каких-то нужных нам точках. Сначала перечислим некоторые простые свойства функции f.

1. Ясно, что если мы все коэффициенты и свободный член уравнения (1) умножим на число $k \neq 0$, то снова получим уравнение той же плоскости. При этом значение в определенной точке M, не лежащей в нашей плоскости, можно сделать равным 1.

2. Если $\overline{AB}$ — произвольный вектор, то положим $f(\overline{AB}) = f(B) - f(A)$. Ясно, что $f(\overline{AB})$ — это скалярное произведение вектора $\overline{AB}$ на вектор $(a; b; c)$, где a, b, c — коэффициенты уравнения (1). Поэтому f — линейная функция на множестве векторов трехмерного пространства. Это позволяет легко отвечать, например, на такие вопросы:

Если $f(E) = e$, $f(F) = f$, то в каком отношении плоскость (1) делит отрезок EF. Ясно, что если плоскость пересекает отрезок EF во внутренней точке D, то числа f и e разных знаков и $ED/DF = |e/f|$.

Пример использования. Пусть $SABC$ — правильный тетраэдр, все ребра которого равны 18. Точка M — середина ребра SC, точка D лежит на ребре AB и делит его на части $AD : DB = 2 : 7$. Точка O — основание перпендикуляра из вершины S на грань ABC, S_1 — точка, симметричная точке S относительно O. Плоскость α проходит через точки M, D и S_1. Докажите, что α пересекает тетраэдр $SABC$ по трапеции и найдите ее среднюю линию.

Решение. Плоскость α, проходящая через точки M, D и S_1 определяет некоторую функцию f в соответствии со сказанным раньше. Мы можем считать, что $f(S) = 1$. Так как $f(S) = f(M) = f(D) = 0$ и $f(MS) = f(CS)$, то $f(S) - f(M) = f(M) - f(C)$, значит, $f(C) = -1$. Аналогичным образом получим $f(O) = \frac{1}{2}$ (потому, что $f(\overline{S_1O}) + f(\overline{S_1S}) = 1$ и $\overline{S_1O} = \overline{S_1S}$). Так как $\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OB} = 0$, то

$$f(\overline{OA}) + f(\overline{OB}) + f(\overline{OC}) = 0 \tag{2}$$

А так как $AD : DB = 2 : 7$, то если $f(A) = x$, то $f(B) = -\frac{7}{2}x$. Используя (2) получим $\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}\right) + \left(-1 - \frac{1}{2}\right) = 0$, т.е., $-\frac{5}{2}x - \frac{5}{2} = 0$ и $x = -1$. Итак, $f(A) = -1$; $f(B) = \frac{7}{2}$; $f(C) = -1$;

$f(S) = 1$. Мы видим, что плоскость α пересекает грань ASC по средней линии, а грань ABC по прямой, параллельной AC. Т.о., сечение тетраэдра представляет собой трапецию с основаниями $\frac{18}{2} = 9$ и $18 \cdot \frac{7}{9} = 14$. Следовательно, средняя линия равна $\frac{14+9}{2} = 11,5$.

Основная теорема о линейной зависимости. 18.01.2017

Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ называются *независимыми*, если для любых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ из равенства $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k = 0$ следует, что $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_k = 0$. В противном случае векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ называются *зависимыми*. Для набора векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ положим

$\mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k) = \{\boldsymbol{b} : \boldsymbol{b} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{b}_k$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — некоторый набор действительных чисел$\}$.

Вектор $\boldsymbol{b}$ называется *линейной комбинацией* векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$, если $\boldsymbol{b} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$.

Набор векторов E называется *линейным (векторным) пространством*, если вектор $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} \in E$ для $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in E$ и вектор $k \cdot \boldsymbol{c} \in E$ для любого действительного k и $\boldsymbol{c} \in E$.

Лемма 1. *Множество $\mathcal{L}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k)$ является линейным пространством.*

Лемма 2. *Если $\mathbf{a} \in \mathcal{L}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k)$, то $\mathcal{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k) = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$.*

Доказательство этих лемм очевидно.

Подпространство $\mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$ называют *подпространством, натянутым на векторы* $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$.

Лемма 3. *Если один из векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$, скажем $\mathbf{b}_i$, является линейной комбинацией остальных векторов этого набора, т.е.,*

$$\mathbf{b}_i \in \mathcal{L}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \widehat{\mathbf{b}}_i, \ldots, \mathbf{b}_k) \tag{1}$$

(запись $\mathbf{b}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{b}}_i, \ldots, \mathbf{b}_k$ означает, что вектор $\mathbf{b}_i$ отсутствует в наборе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_i, \ldots, \mathbf{b}_k$), то векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ зависимы.

Доказательство. Из (1) следует, что $\boldsymbol{b}_i = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \alpha_{i-1} \boldsymbol{b}_{i-1} + \alpha_{i+1} \boldsymbol{b}_{i+1} + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{b}_k$. Значит, $\alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \alpha_{i-1} \boldsymbol{b}_{i-1} - \boldsymbol{b}_i + \alpha_{i+1} \boldsymbol{b}_{i+1} + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{b}_k = 0$, причем коэффициент при $\boldsymbol{b}_i$ не равен 0.

Лемма 4. *Если векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ зависимы, т.е. для некоторого набора действительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ таких, что по крайней мере одно из них, скажем $\alpha_i \neq 0$, выполняется равенство*

$$\alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \alpha_i \boldsymbol{b}_i + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{b}_k = 0, \tag{2}$$

$$\text{то } \boldsymbol{b}_i \in \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \widehat{\boldsymbol{b}}_i, \ldots, \boldsymbol{b}_k). \tag{3}$$

Доказательство. Из (2) с учетом $\alpha_i \neq 0$ следует, что $\boldsymbol{b}_i = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\right) \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right) \boldsymbol{b}_{i-1} + \left(-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\right) \boldsymbol{b}_{i+1} + \ldots + \left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_i}\right) \boldsymbol{b}_k = 0$. Таким образом, (3) доказано.

Лемма 5. *Если векторы $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_p, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_q$ зависимы, а векторы $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_p$ независимы, тогда один из векторов $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_p$, скажем $\mathbf{d}_i$, зависит от остальных векторов набора $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_p, \boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_q$.* Т.е.

$$\boldsymbol{d}_i \in \mathcal{L}(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_p, \boldsymbol{d}_1, \ldots, \widehat{\boldsymbol{d}}_i, \ldots, \boldsymbol{d}_q). \tag{4}$$

Доказательство. Найдутся числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_p, \delta_1, \ldots, \delta_q$, не все из которых равны 0 и такие, что $\gamma_1 \boldsymbol{c}_1 + \ldots + \gamma_p \boldsymbol{c}_p + \delta_1 \boldsymbol{d}_1 + \ldots + \delta_q \boldsymbol{d}_q = 0$. Если все $\delta_1, \ldots, \delta_q$ равны 0, то векторы $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_p$ зависимы. Что не так. Значит, одно из чисел $\delta_1, \ldots, \delta_q$, скажем $\delta_i \neq 0$. Но тогда из Леммы 4 вытекает требуемое включение (4).

Теорема 1. *Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$ независимы и принадлежат $\mathcal{L}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_q)$. Тогда $p \leq q$.*

Доказательство. (От противного). Пусть $p > q$. Мы по индукции определим q множеств $B_1, ...,$ B_q, для которых справедливы следующие требования:

1. $\mathcal{L}(B_1) = \mathcal{L}(B_2) = \ldots = \mathcal{L}(B_q) = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_q)$.

2. Каждый набор B_m для $1 \leq m \leq q$ состоит из q векторов. А именно, $B_m = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1^m, ...,$ $\boldsymbol{b}_{q-m}^m)$. Здесь векторы $\boldsymbol{b}_1^m, \ldots, \boldsymbol{b}_{q-m}^m$ — это $q - m$ векторов из набора $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$. Перейдем к индуктивному построению этих множеств.

Множество B_1 получается в два этапа. Сначала мы добавляем к набору векторов $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_q$ вектор $\boldsymbol{a}_1$. Так как $\boldsymbol{a}_1 \in \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_q)$, то по Лемме 2 $\mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_q) = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_q)$. Далее, из Леммы 5 следует, что для некоторого $1 \leq i \leq q$ будет $\boldsymbol{b}_i \in \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \widehat{\boldsymbol{b}}_i, \ldots, \boldsymbol{b}_q)$. Перенумеруем векторы набора $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \widehat{\boldsymbol{b}}_i, \ldots, \boldsymbol{b}_q)$ двумя индексами — верхний 1 для всех векторов, а нижний номерами $1, 2, \ldots, q-1$. Получим набор $B_1 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1^1, \ldots, \boldsymbol{b}_{q-1}^1)$. Ясно, что условия 1, 2 для него выполнены.

Пусть мы уже построили наборы $B_1, \ldots, B_m$, удовлетворяющие условиям 1, 2. Перенесем вектор $\boldsymbol{a}_{m+1}$ в набор $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1^m, \ldots, \boldsymbol{b}_{q-m}^m)$. Так как по индуктивному предположению $\mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m,$ $\boldsymbol{b}_1^m, \ldots, \boldsymbol{b}_{q-m}^m) = \mathcal{L}(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_q)$, то $\boldsymbol{a}_{m+1} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1^m, \ldots, \boldsymbol{b}_{q-m}^m)$.

Следовательно, $\mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \boldsymbol{b}_1^m, \ldots, \boldsymbol{b}_{q-m}^m) = \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_1^m, \ldots, \boldsymbol{b}_{q-m}^m)$.

Так как векторы $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, a_{m+1}, \boldsymbol{b}_1^m, \ldots, \boldsymbol{b}_{q-m}^m)$ зависимы, а векторы $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1})$ независимы, то по Лемме 5 найдется такое i, что $b_i^m \in \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \boldsymbol{b}_1^m, \ldots, \boldsymbol{b}_i^m, \ldots, \boldsymbol{b}_{q-m}^m)$.

Перенумеруем векторы $\boldsymbol{b}_1^m, \ldots, \widehat{\boldsymbol{b}}_i^m, \ldots, \boldsymbol{b}_{q-m}^m$ так, что верхний индекс станет $m+1$, а снизу будут номера $1, 2, \ldots, q-m-1$. Положим $B_{m+1} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{m+1}, \boldsymbol{b}_1^{m+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{q-m-1}^{m+1})$.

Ясно, что набор B_{m+1} удовлетворяет требованиям 1, 2. Индуктивное построение проведено.

Рассмотрим набор $B_q = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_q)$.

Мы предположили, что $q < p$, поэтому векторы $\boldsymbol{a}_{q+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_p \in \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_q)$, что противоречит тому, что векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_q$ независимы. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема Шаля. 03.11.2017

Пусть π — плоскость. Расстояние между точками A, B плоскости обозначим символом $|AB|$.

Лемма 1. *Если точки A, B, C плоскости π не лежат на одной прямой, а точки D и D' таковы, что $|AD| = |AD'|$, $|BD| = |BD'|$, $|CD| = |CD'|$, то точки D и D' совпадают. Другими словами, расстояние от точки до трех не лежащих на прямой точек однозначно определяют эту точку.*

Доказательство. Предположим, что точки D, D' различны. Тогда точки A, B, C лежат на серединном перпендикуляре к отрезку DD', т.е. на одной прямой. Противоречие.

Движением называют такое отображение φ плоскости π в себя, которое сохраняет расстояние между точками. Т.е., если A, B — произвольные точки плоскости, то $|AB| = |A'B'|$, где $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$.

Ясно, что движение переводит точки, лежащие на прямой, в точки, лежащие на прямой. Более того, если точка C принадлежит отрезку AB, то $\varphi(C)$ принадлежит отрезку $\varphi(A)\varphi(B)$.

Задача 1. Докажите, что образом прямой при любом движении будет прямая.

Лемма 2. *Любое движение φ является биективным отображением плоскости π в себя.*

Доказательство. В доказательстве нуждается только сюръективность отображения φ. Если A, B переходят в точки A', B', то вся прямая AB перейдет **на** прямую $A'B'$. (Почему?).

Далее, возьмем три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Они перейдут в точки A', B', C', не лежащие на одной прямой. Легко видеть, что образ треугольника ABC со всеми внутренними точками будет содержать внутренние точки треугольника $A'B'C'$. Кроме того, через любую точку плоскости можно провести прямую, пересекающую треугольник $A'B'C'$ не менее чем в двух точках. И т.д., завершите доказательство самостоятельно.

Лемма 3. *Пусть φ и ψ — два движения такие, что для некоторых точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, $\varphi(A) = \psi(A)$, $\varphi(B) = \psi(B)$, $\varphi(C) = \psi(C)$, тогда движения φ и ψ совпадают, т.е., для любой точки D плоскости $\varphi(D) = \psi(D)$.*

Другими словами, любое движение полностью определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой.

Задача 2. Докажите, что следующие преобразования являются движениями:

1. Центральная симметрия.
2. Осевая симметрия.
3. Параллельный перенос.
4. Поворот на угол α около некоторой точки O.

Задача 3. Существует ли движение, которое одновременно принадлежит а) к п. 1 и п. 4; б) к п. 3 и п. 4; в) к п. 1 и п. 2 ?

Если у нас есть два отображения плоскости φ и ψ (в частности два движения), то *композицией* движений назовем движение, которое получается, если сначала осуществить движение ψ, а затем φ. Такое движение обозначают через $\varphi\cdot\psi$. Ясно, что для любой точки $A\in\pi$ имеем $\varphi\cdot\psi(A)=\varphi(\psi(A))$.

Обозначим через $\overline{\overline{S}}_A$ центральную симметрию с центром в точке A.

Задача 4. Докажите, что $\overline{\overline{S}}_B\cdot\overline{\overline{S}}_A$ — это параллельный перенос на вектор $\overline{BA}$.

Для любой прямой l плоскости символом S_l обозначим осевую симметрию относительно этой прямой l.

Лемма 5. *Если S_l и S_m — симметрии относительно прямых l и m, пересекающихся в точке O, то $S_m\cdot S_l$, т.е. последовательное выполнение сначала осевой симметрии S_l, а затем S_m является поворотом около O (с центром в точке O) на угол, равный удвоенному углу между прямыми l и m.*

Доказательство. Рассмотрим точки A, B, C такие, что A совпадает с O, B лежит на прямой l, C лежит на прямой m', симметричной прямой m относительно прямой l и $A\neq B$, $A\neq C$.

Ясно, что точки A, B, C при повороте на угол φ, равный удвоенному углу между прямыми l и m, перейдут в точки A', B', C'. Но и $S_m\cdot S_l$ переводят точки A, B, C в A', B', C'.

Лемма 6. *Если треугольник ABC равен треугольнику $A'B'C'$, то существует движение, являющееся композицией не более трех осевых симметрий, переводящее точки A, B, C в A', B', C'.*

Указание. Для любых точек A, A' существует осевая симметрия, переводящая A в A'. Далее, если отрезки AB и AB' равны, то существует осевая симметрия, оставляющая A на месте и переводящая точку B в B'. И наконец, если $CA=C'A$, $C'B=CB$, то треугольники ABC и ABC' либо совпадают, либо симметричны относительно прямой AB.

Итак, любое движение есть либо тождественное отображение, либо осевая симметрия, либо две симметрии, т.е. $S_m\cdot S_l$, либо три осевые симметрии $S_m\cdot S_l\cdot S_k$.

В случае, когда $\varphi=S_m\cdot S_l$, движение является либо поворотом, либо параллельным переносом.

Выясним, как выглядит движение $\varphi=S_m\cdot S_l\cdot S_k$. Если $m\|l\|k$, то справедлива

Лемма 7. *Движение $\varphi=S_m\cdot S_l\cdot S_k$ является симметрией.*

Действительно, $S_m\cdot S_l\cdot S_k=S_m\cdot(S_l\cdot S_k)$. Прямые l и k можно пареллельно переместить так, что прямая l совпадет с прямой m. Но тогда мы получим $S_l\cdot S_k=S_m\cdot S_{k'}$ и $S_m\cdot(S_m\cdot S_{k'})=(S_m\cdot S_m)\cdot S_{k'}=S_{k'}$.

Мы знаем, что композиция двух осевых симметрий $S_p\cdot S_q$ относительно прямых p и q можно заменить на композицию двух других осевых симметрий, лишь бы новые прямые пересекались в той же точке, что и прямые p и q и образовывали тот же угол, что и прямые p, q.

Задача 5. Если среди трех прямых m, l, k есть не параллельные, то движение $\varphi=S_m\cdot S_l\cdot S_k$ можно представить в виде произведения трех осевых симметрий $S_{m'}\cdot S_{l'}\cdot S_{k'}$ относительно прямых m', l', k', среди которых нет параллельных.

Ясно, что если среди прямых m, l, k нет параллельных, то движение $\varphi=S_m\cdot S_l\cdot S_k$ можно представить в виде композиции симметрий относительно прямых l, m', k' таких, что $m'\perp l$. Далее, мы можем заменить прямые m' и l на новые прямые m'' и l' такие, что $S_{l'}\cdot S_{m''}=S_l\cdot S_{m'}$, причем прямая m'' станет параллельной прямой k'. В итоге мы композицию из трех симметрий $S_l \cdot S_m \cdot S_k$ заменили на композицию из трех новых симметрий $S_{l'} \cdot S_{m''} \cdot S_{k'}$ такую, что прямые m'' и k' параллельны и перпендикулярны прямой l'. Ясно, что движение φ является композицией параллельного переноса и симметрии относительно прямой, параллельной направлению параллельного переноса. Такое движение называется *скользящей симметрией.*

Таким образом, справедлива

Теорема (Шаль). *Любое движение является либо тождественным, либо параллельным переносом, либо поворотом, либо скользящей симметрией.*

Прямая Гаусса. 02.11.2018; 26.10.2022

Теорема. *Точки A_1, B_1 лежат на одной, а точки B_2, A_2 — на другой из сторон угла с вершиной в точке O. При этом отрезки B_1B_2 и A_1A_2 пересекаются в точке M. Отрезки A_0A_1 и A_2A_3 параллельны отрезку B_2B_1 и их концы лежат на разных сторонах угла. Аналогично, отрезки B_3B_2 и B_1B_0 параллельны отрезку A_1A_2 и их концы лежат на разных сторонах угла. Тогда прямая, проходящая через точку E пересечения отрезков A_1A_0 и B_2B_3 и точку F пересечения отрезков A_2A_3 и B_1B_0, пройдет через точку O.*

Доказательство. Положим $\dfrac{OB_1}{OB_2} = p$, $\dfrac{OA_2}{OA_1} = q$.

Тогда $\dfrac{OA_3}{OA_1} = \dfrac{OA_3}{OA_2} \cdot \dfrac{OA_2}{OA_1} = p \cdot q$, $\dfrac{OB_0}{OB_2} = \dfrac{OB_0}{OB_1} \cdot \dfrac{OB_1}{OB_2} = q \cdot p$.

Ясно, что гомотетия с центром в точке O и коэффициентом pq точку A_3 переводит в A_1, B_0 — в B_2. Значит, эта гомотетия переводит отрезок A_3A_2 в A_1A_0, а отрезок B_1B_0 — в B_3B_2. Эта гомотетия общую точку отрезков B_1B_0 и A_3A_2 переводит в общую точку отрезков B_3B_0 и A_1A_0, т.е. точку E в точку F.

Мы доказали, что точки O, E, F лежат на одной прямой.

Следствие. *Гомотетия с центром в точке M и коэффициентом $\dfrac{1}{2}$ переводит точки O, E, F в точки O', E', F', где O' — середина отрезка OM, E' — середина отрезка A_1B_2 и F' — середина отрезка B_1A_2. Т.е. O', E', F' лежат на одной прямой. Значит, середина отрезка, соединяющего пересечения противоположных сторон, для нашего случая сторон четырехугольника OA_1MB_2, и середины диагоналей этого четырехугольника лежат на одной прямой.*

Доказательство. Точка E лежит на стороне AB, а точка F — на стороне AD параллелограмма $ABCD$. Точка M лежит внутри параллелограмма $ABCD$, причем $AEMF$ — параллелограмм. Прямые BF и ED пересекаются в точке G. Докажем, что точки G, M, C лежат на одной прямой.

Пусть P — пересечение прямых BF и EM, Q — прямых ED и MF. Также рассмотрим точку N такую, что $PMQN$ — параллелограмм. Утверждение будет доказано, если мы покажем, что параллелограммы $ABCD$ и $NPMQ$ подобны.

С этого и начнем. Из подобия треугольников PMF и FAB следует, что $PM = \dfrac{FM \cdot AF}{AB}$. Аналогично из подобия $\triangle\, EMQ$ и $\triangle\, DAF$ следует, что $QM = \dfrac{EM \cdot EA}{AD}$.

Значит, $\dfrac{PM}{QM} = \dfrac{FM \cdot AF \cdot AD}{AB \cdot EM \cdot EA} = \dfrac{AD}{AB}$ (мы воспользовались тем, что $FM = EA$, $AF = EM$). Следовательно, параллелограммы подобны; причем точка G — центр гомотетии, переводящей параллелограмм $PMQN$ в параллелограмм $BCDA$. Ясно, что при этой гомотетии точка M перейдет в точку C, т.е. точки G, M, C лежат на одной прямой.

Примечание. Интересно, что мы доказали еще одну теорему, а именно теорему о *прямой Гаусса.*

Рассмотрим четырехугольник $AEGF$. Теорема о прямой Гаусса утверждает, что

если B — точка пересечения сторон AE и FG, а D — точка пересечения сторон EG и AB, то точки R — середина диагонали EF, S — середина BD и T — середина диагонали AG — лежат на одной прямой.

Если мы по четырехугольнику $AEGF$ восстановим чертеж предыдущей теоремы, то получим, что точки C, M, G лежат на одной прямой. Подвергнем точки C, M, G гомотетии с центром A и коэффициентом $\frac{1}{2}$; получим, что C перейдет в S, M — в R и наконец G в T.

Векторы на плоскости. 23.02.2022

Вектором называют направленный отрезок, один из концов которого называют *началом*, а другой — *концом* вектора. Для обозначения вектора с началом A и концом B пишут $\overline{AB}$. Первая буква обозначает начало, а вторая — конец вектора. Иногда, когда не важно, какие точки выбраны в качестве начала и конца вектора, его обозначают одной латинской буквой. Возможны записи: $\boldsymbol{a}$, $\overline{a}$ или $\overline{\boldsymbol{a}}$.

Введем понятие равенства векторов. Скажем, что вектор $\overline{AB}$ *равен* вектору $\overline{CD}$, если середины отрезков AD и BC совпадают. При этом пишут $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Если на плоскости задана декартова ортогональная система координат, то мы можем каждому вектору $\overline{AB}$ поставить в соответствие пару чисел $\overline{AB}_x$, $\overline{AB}_y$ — *координаты вектора.* При этом абсцисса вектора $\overline{AB}$ определяется равенством $\overline{AB}_x = B_x - A_x$, а ордината вектора $\overline{AB}$ определяется равенством $\overline{AB}_y = B_y - A_y$. здесь символом A_x мы обозначаем абсциссу точки A, а символом A_y — ординату точки A.

Покажем, что если векторы равны, то и их координаты равны в любой декартовой системе координат. И наоборот, если в какой-нибудь системе координат два вектора имеют одинаковые координаты, то эти векторы равны.

Лемма 1. *Если точка C является серединой отрезка AB, то* $C_x = \dfrac{A_x + B_x}{2}$, $C_y = \dfrac{A_y + B_y}{2}$.

Доказательство леммы очевидно. Оно следует из теоремы Фалеса и того факта, что проекция сохраняет порядок точек.

Лемма 2. *Если $\overline{AB} = \overline{CD}$, то $\overline{AB}_x = \overline{CD}_x$, $\overline{AB}_y = \overline{CD}_y$.*

Действительно, пусть $\overline{AB} = \overline{CD}$. Это значит, что точка M — середина отрезка AD — совпадает с точкой N — серединой отрезка BC. Но тогда $\dfrac{A_x + D_x}{2} = \dfrac{B_x + C_x}{2}$, следовательно, $B_x - A_x = D_x - C_x$. Аналогично устанавливается и равенство $B_y - A_y = D_y - C_y$.

Лемма 3. *Если $\overline{AB}_x = \overline{CD}_x$, $\overline{AB}_y = \overline{CD}_y$, то вектор $\overline{AB}$ равен вектору $\overline{CD}$.*

Действительно, из условия следует, что $B_x - A_x = D_x - C_x$, т.е., $B_x + C_x = A_x + D_x$, и окончательно, $\dfrac{B_x + C_x}{2} = \dfrac{A_x + D_x}{2}$. Равенство $\dfrac{B_y + C_y}{2} = \dfrac{A_y + D_y}{2}$ устанавливается аналогично.

Введенное нами отношение равенства обладает следующими свойствами:

1. $\overline{a} = \overline{b} \to \overline{b} = \overline{a}$.
2. $\overline{a} = \overline{a}$.
3. Из $\overline{a} = \overline{b}$ и $\overline{b} = \overline{c}$ следует, что $\overline{a} = \overline{c}$.

Это значит, что отношение равенства является *отношением эквивалентности.*

Иногда векторы типа $\overline{AB}$ называют *прикрепленными*, а классы эквивалентных векторов — *свободными* векторами. Вектор, начало которого совпадает с концом ($\overline{AA}$) называют *нулевым.* Для обозначения нулевого вектора пишут $\overline{0}$. Вектор $\overline{BA}$ называют *противоположным* вектору $\overline{AB}$ и пишут $\overline{BA} = -\overline{AB}$. Ясно, что если координаты вектора $\overline{AB}$ — пара чисел $(x; y)$, то координатами противоположного ему вектора будет пара чисел $(-x; -y)$.

Лемма 4. *Для любого вектора $\overline{AB}$ и точки M плоскости существует вектор $\overline{MN}$ с началом в точке M и равный вектору $\overline{AB}$.*

Ясно, что для каждого вектора $\overline{AB}$ плоскости существует ровно один вектор, равный вектору $\overline{AB}$, с началом в начале координат. Такие векторы называют *радиус-векторами.* (Здесь уместно сравнение с дробями. В каждом классе эквивалентных дробей есть дробь с взаимно простыми числителем и знаменателем).

Лемма 5. *Координаты любого радиус-вектора совпадают с координатами его конца.*

Мы хотим ввести операцию сложения векторов. Казалось бы, самый простой способ сказать, что суммой радиус-векторов $\overline{OA}+\overline{OB}$ будет вектор $\overline{OC}$, где $C_x = A_x + B_x$, $C_y = A_y + B_y$. Но тогда операция сложения будет зависеть от системы координат.

Дадим другое определение операции сложения, не зависящее от системы координат. А именно, скажем, что $\overline{OA}+\overline{OB} = \overline{OC}$, где точка C выбирается так, что отрезки AB и OC имеют общую середину. Т.е., точка M — середина отрезка AB и точка N — середина отрезка OC — совпадают.

Лемма 6. *Вектор $\overline{OC}$ однозначно определен предыдущим описанием.*

Лемма 7. *В любой системе координат $\overline{OA}_x+\overline{OB}_x=\overline{OC}_x$ и $\overline{OA}_y+\overline{OB}_y=\overline{OC}_y$.*

Действительно, сама операция сложения не зависит от выбранной системы координат. Важна только точка начала. Но в любой системе координат будет

$\overline{OC}_x = C_x = \dfrac{2(A_x+B_x)}{2} = A_x + B_x = \overline{OA}_x + \overline{OB}_x$. Ясно, что $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$.

Введем операцию умножения вектора на действительное число. Рассмотрим радиус-вектор $\overline{OA}$ и число $k > 0$. Вектор $k\cdot\overline{OA}$ получается при помощи операции гомотетии с коэффициентом k и центром в точке O. Ясно, что координаты вектора $\overline{OA}$ при этом умножаются на k. Если $k = 0$, то результатом умножения будет вектор $\overline{0}$ вне зависимости от вектора $\overline{OA}$. И наконец, если $k < 0$, то мы берем вектор, противоположный вектору $\overline{OA}$ и умножаем его на $|k|$. Т.е., снова применяем гомотетию с центром в точке O и коэффициентом k. Ясно, что в результате получается вектор, координаты которого образованы из координат исходного путем умножения на k.

Неколлинеарные векторы.

Пусть векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, начала которых совпадают с началом координат, неколлинеарны, т.е., не лежат на одной прямой. (Т.е., точки O, A, B не лежат на одной прямой). Тогда справедливо следующее утверждение:

Лемма 7. *Для любого радиус-вектора $\overline{OC}$ существуют числа m, n такие, что* $\overline{OC} = m\cdot\overline{OA}+n\cdot\overline{OB}$.

Доказательство. Если через конец вектора $\overline{OC}$, т.е. точку C, провести прямую, параллельную вектору $\overline{OB}$, то она пересечет прямую OA в некоторой точке E. Аналогично прямая, проходящая через точку C параллельно $\overline{OA}$, пересечет прямую OB в точке F. Здесь некий фокус с пятым постулатом Евклида. Действительно, если C не лежит ни на прямой OA, ни на прямой OB, то прямая, проходящая через C параллельно одной из них, будет пересекать другую. (Иначе противоречие с пятым постулатом). Случай, когда C лежит на одной из прямых OA, OB, — очевиден.

Лемма 8. *Представление вектора $\overline{OC}$ из леммы 7 единственно.*

Действительно, пусть $\overline{OC} = k\cdot\overline{OA}+m\cdot\overline{OB} = p\cdot\overline{OA}+q\cdot\overline{OB}$. Но тогда $k\cdot\overline{OA}-p\cdot\overline{OA} = q\cdot\overline{OB}-m\cdot\overline{OB} \to (k-p)\cdot\overline{OA} = (q-m)\cdot\overline{OB} \to$ векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ коллинеарны.

Движение плоскости.

Каждой паре точек A, B плоскости поставим в соответствие число $\rho(A,B)$ — расстояние между точками A и B. Отображение φ плоскости в себя назовем *движением*, если $\rho(\varphi(A),\varphi(B)) = \rho(A,B)$. Т.о., движение — это отображение, сохраняющее расстояние между точками.

Лемма 9. *Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой. Тогда если D, E — различные точки, то равенства $\rho(D,A)=\rho(E,A)$, $\rho(D,B)=\rho(E,B)$, $\rho(D,C)=\rho(E,C)$ не могут одновременно выполняться.*

Лемма 10. *Существует только одно движение, которое три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, переводит в точки A', B', C'.* (Ясно, что точки, не лежащие на прямой, перейдут в точки, не лежащие на прямой).

Лемма 11. *Осевая симметрия — движение.*

Лемма 12. *Любое не тождественное движение это 1, 2 или 3 осевые симметрии.*

Отображение φ_a — это поворот около точки O — начала координат — на угол a радиан. Если $a > 0$, то поворот против часовой стрелки (положительное направление); если $a < 0$, то поворот по часовой стрелке (отрицательное направление); в обоих случаях на $|a|$ радиан.

Два важных свойства поворота.

Лемма 13. $\varphi_a(\overline{c} + \overline{d}) = \varphi_a(\overline{c}) + \varphi_a(\overline{d})$. *Т.е. поворот около точки начала координат переводит сумму векторов в вектор, равный сумме двух векторов, каждый из которых есть результат поворота слагаемых.*

Пусть $\overline{OC} + \overline{OD} = \overline{OE}$. ($\overline{OC} = \overline{c}$, $\overline{OD} = \overline{d}$). Рассмотрим точку Q — середину отрезков CD и OE. Ясно, что φ_a переводит точки C, D, Q, E в точки C_1, D_1, Q_1, E_1, при этом точка O остается на месте. Ясно, что $\overline{OE_1} = \overline{OC_1} + \overline{OD_1}$. Т.е., $\varphi_a(\overline{OE}) = \varphi_a(\overline{OC}) + \varphi_a(\overline{OD})$!!!

Лемма 14. $\varphi_a(k\overline{e}) = k\varphi_a(\overline{e})$.

Введение в тригонометрию.

Рассмотрим ортогональный базис. Единичный по длине вектор, направленный по оси OX, назовем $\overline{e_1}$, а единичный вектор, направленный по оси OY, назовем $\overline{e_2}$. Оба вектора начинаются в начале координат. Ясно, что если $\overline{e}$ — произвольный вектор, образующий угол a с положительным направлением оси OX, то после поворота на угол b он перейдет в вектор $\varphi_b(\overline{e})$. Попробуем выразить этот вектор через векторы $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$. Ясно, что вектор $\overline{e} = \cos a \cdot \overline{e_1} + \sin a \cdot \overline{e_2}$. Ясно, что $\varphi_b(\overline{e}) = \cos b \cdot \overline{e_1} + \sin b \cdot \overline{e_2}$. Выясним, куда перейдет при повороте φ_b вектор $\overline{e_2}$. Для этого рассмотрим поворот на $\dfrac{\pi}{2}$: $\varphi_{\pi/2}$. Ясно, что $\varphi_{\pi/2}(\overline{e_1}) = \overline{e_2}$, $\varphi_{\pi/2}(\overline{e_2}) = -\overline{e_1}$. Очевидно, что

$\varphi_b(\overline{e_2}) = \varphi_b(\varphi_{\pi/2}(\overline{e_1})) = \varphi_{\pi/2}(\varphi_b(\overline{e_1})) = \varphi_{\pi/2}(\cos b \cdot \overline{e_1} + \sin b \cdot \overline{e}_2) = -\sin b \cdot \overline{e_1} + \cos b \cdot \overline{e_2}$.

Далее, если мы выразим вектор $\overline{e}$, образующий с положительным направлением оси OX угол $a + b$, через $\sin a$, $\cos a$, $\sin b$, $\cos b$, т.е., найдем новое выражение вектора $\cos(a+b) \cdot \overline{e_1} + \sin(a+b) \cdot \overline{e_2}$, то получим известные формулы сложения для функций синус и косинус. Начнем вычисления.

$\varphi_b(\cos a \cdot \overline{e_1} + \sin_a \cdot \overline{e_2}) = \varphi_b(\cos a \cdot \overline{e_1}) + \varphi_b(\sin a \cdot \overline{e_2}) = \cos a \cdot \varphi_b(\overline{e_1}) + \sin a \cdot \varphi_b(\overline{e_2}) =$
$= \cos a(\cos b \cdot \overline{e_1} + \sin b \cdot \overline{e_2}) + \sin a(-\sin b \cdot \overline{e_1} + \cos b \cdot \overline{e_2}) =$
$= \cos a \cos b \cdot \overline{e_1} - \sin a \sin b \cdot \overline{e_1} + \cos a \sin b \cdot \overline{e_2} + \sin a \cos b \cdot \overline{e_2} =$
$= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) \cdot \overline{e_1} + (\cos a \sin b + \sin a \cos b) \cdot \overline{e_2}$.

Мы получили:

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; $\qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Площадь четырехугольника

В четырехугольнике $ABCD$ длины сторон AB, BC, CD и DA равны соответственно a, b, c и d. Периметр четырехугольника обозначим через $2p$. Т.е. $\dfrac{a+b+c+d}{2} = p$.

Для определения площади s четырехугольника $ABCD$ сложим площади треугольников DAB и DBC. Получим $s = \dfrac{da \sin A}{2} + \dfrac{cb \sin C}{2}$. Следовательно, $4s = 2da \sin A + 2cb \sin C$. Возведя обе части последнего равенства в квадрат получим:

$$16s^2 = 4d^2a^2 \sin^2 A + 4c^2b^2 \sin^2 C + 8dacb \sin A \sin C. \tag{1}$$

Далее, воспользовавшись теоремой косинусов, выразим сторону DB, общую для двух треугольников DAB и DBC. Получим:

$$DB^2 = d^2 + a^2 - da \cdot \cos A = c^2 + b^2 - 2cb \cdot \cos C.$$

Отсюда $d^2+a^2-c^2-b^2=2da\cos A-2cb\cos C$. Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим:

$$(d^2+a^2-c^2-b^2)^2=4d^2a^2\cos^2 A+4c^2b^2\cos^2 C-8dacb\cos A\cos C. \tag{2}$$

$$\text{т.е.}\qquad 4d^2a^2\cos^2 A+4c^2b^2\cos^2 C-8dacb\cos A\cos C-(d^2+a^2-c^2-b^2)^2=0. \tag{3}$$

Прибавив левую часть равенства (3) к правой части равенства (1), получим:

$$16s^2=4d^2a^2+4c^2b^2-8abcd(\cos A\cos C-\sin A\sin C)-(d^2+a^2-c^2-b^2)^2.$$

Далее прибавим и вычтем из правой части последнего равенства $8abcd$. Получим:

$$16s^2=4d^2a^2+4c^2b^2+8abcd-8abcd-8abcd\cos(A+C)-(d^2+a^2-c^2-b^2)^2=$$

$$=(2da+2cb)^2-8abcd(1+\cos(A+C))-(d^2+a^2-c^2-b^2)^2=$$

$$=(2da+2cb)^2-(d^2+a^2-c^2-b^2)^2-16abcd\cos^2\tfrac{A+C}{2}=$$

$$=(2da+2cb+d^2+a^2-c^2-b^2)(2da+2cb+c^2+b^2-d^2-a^2)-16abcd\cos^2\tfrac{A+C}{2}=$$

$$=((d+a)^2-(c-b)^2)((c+b)^2-(d-a)^2)-16abcd\cos^2\tfrac{A+C}{2}=$$

$$=(d+a+c-b)(d+a+b-c)(c+b+d-a)(c+b+a-d)-16abcd\cos^2\tfrac{A+C}{2}=$$

$$=(a+b+c+d-2b)(a+b+c+d-2c)(a+b+c+d-2a)(a+b+c+d-2d)-$$

$$-16abcd\cos^2\tfrac{A+C}{2}=2(p-b)\cdot 2(p-c)\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-d)-16abcd\cos^2\tfrac{A+C}{2}.$$

Таким образом, $16s^2=16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$. Окончательно получим:

$$s=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}.$$

Вот некоторые следствия:

Если $ABCD$ - четырехугольник, вписанный в окружность, то его площадь равна

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Если в четырехугольник можно вписать окружность, то

$$s=\sqrt{abcd-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}.$$

Если четырехугольник можно описать окружностью и вписать в него окружность, то

$$s=\sqrt{abcd}.$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми

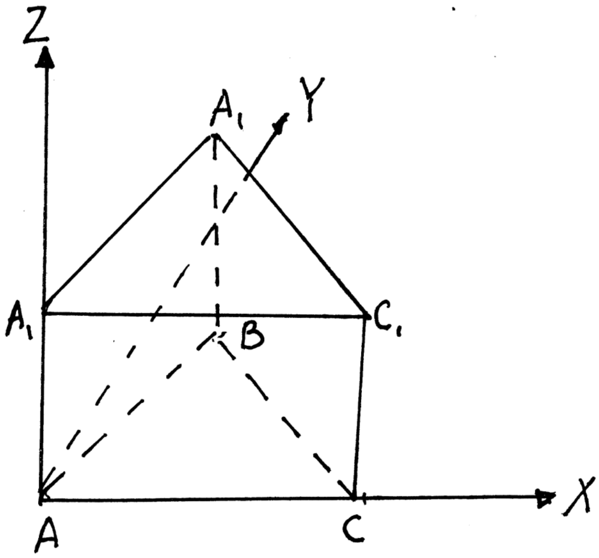
При решении нижеследующих задач, в которых необходимо определить расстояние между скрещивающимися прямыми l и m, мы поступаем следующим образом: Сначала определяем вектор $\overline{f}$, перпендикулярный обеим прямым. Затем выбираем произвольно вектор $\overline{AB}$ такой, что $A\in l$, $B\in m$. Расстояние $\rho(l,m)$ вычисляется по формуле $\rho(l,m)=\left|\dfrac{\overline{f}\cdot\overline{AB}}{|\overline{f}|}\right|$.

Определим вектор $\overline{f}$.

Выбираем вектор $\overline{a}(x_1; y_1; z_1)$ с концами на прямой l и вектор $\overline{b}(x_2; y_2; z_2)$ с концами на прямой m. Систему координат расположим таким образом, чтобы одна из координат одного из векторов $\overline{a}$ или $\overline{b}$ была нулевая; для определенности $\overline{a} = (0; y_1; z_1)$. В этом случае вектор $\overline{c} = (d; -z_1; y_1)$ будет перпендикулярен $\overline{a}$ при любом d. Осталось подобрать d таким образом, чтобы $(d; -z_1; y_1)$ стал перпендикулярен $\overline{b}$. Для этого достаточно положить $d = \frac{z_1 y_2 - z_2 y_1}{x_2}$. Т.е., $(\frac{z_1 y_2 - z_2 y_1}{x_2}; -z_1; y_1)$ — вектор, ортогональный как $\overline{a}$, так и $\overline{b}$.

Задача 1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром 1 найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

Ответ: 1,5.

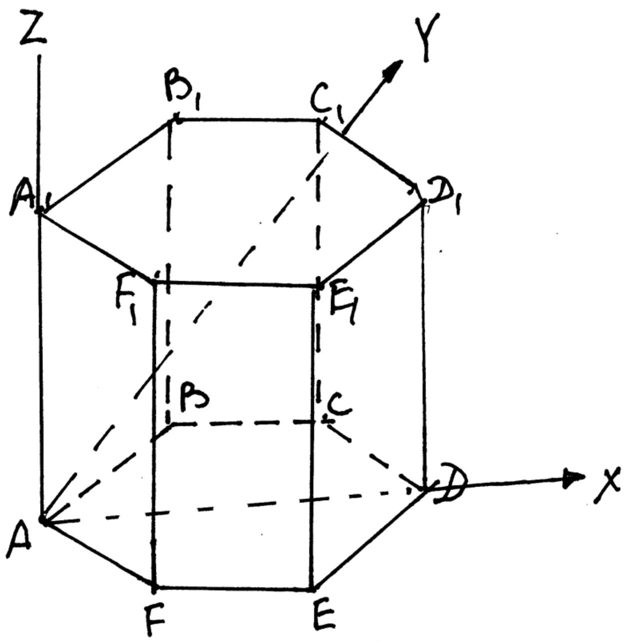


Решение. Расположим нашу призму так, чтобы основание ABC лежало в плоскости XOY, точка A совпадала с началом координат, точка C имела координаты $(\sqrt{3}; 0; 0)$, а точка A_1 — координаты $(0; 0; 1)$. Тогда $\overline{AA_1} = (0; 0; 1)$, $\overline{BC_1} = (\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{3}{2}; 1)$.

Ясно, что вектор $\overline{f} = (3; \sqrt{3}; 0)$ перпендикулярен как $\overline{AA_1}$, так и $\overline{BC_1}$, а вектор $\overline{A_1C_1} = (\sqrt{3}; 0; 0)$ соединяет точки на прямых AA_1 и BC_1: $A_1 \in AA_1$, $C_1 \in BC_1$. Искомое расстояние $\rho(AA_1, BC_1) = \left| \frac{\overline{A_1C_1} \cdot \overline{f}}{|\overline{f}|} \right| = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = 1,5$.

Задача 2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром 1 найдите расстояние между прямыми AA_1 и C_1D.

Ответ: 3.



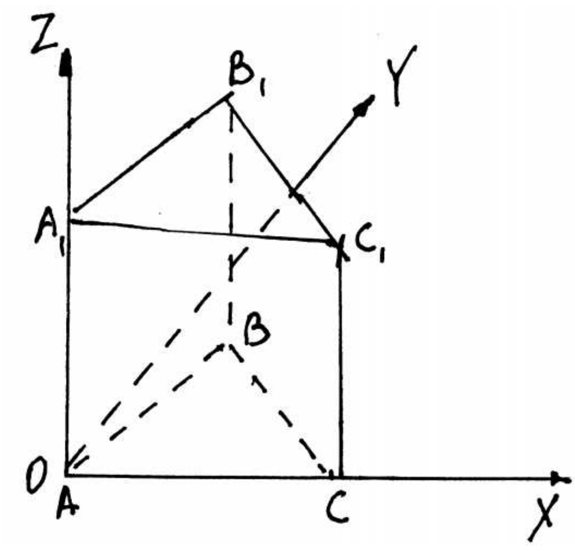
Решение. Расположим призму так, чтобы ее основание $ABCDEF$ лежало в плоскости XOY, точка A совпадала с началом координат, точка D имела координаты $(2\sqrt{3};0;0)$, а точка A_1 — координаты $(0;0;1)$. Имеем: $\overline{AA_1}=(0;0;1)$, $\overline{C_1D}=(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{3}{2};-1)$.

Тогда вектор $\overline{f}=(-3;\sqrt{3};0)$ ортогонален векторам $\overline{AA_1}$ и $\overline{C_1D}$, а вектор $\overline{AD}=(2\sqrt{3};0;0)$ соединяет точки A и D, лежащие на прямых AA_1 и C_1D соответственно.

Т.о., искомое расстояние равно $\left|\dfrac{\overline{f}\cdot\overline{AD}}{|\overline{f}|}\right|=\left|\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right|=3.$

Задача 3. В правильной треугольной призме, все ребра которой равны $\sqrt{2}$, найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней.

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{5}$.



Решение. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — наша призма. Расположим ABC в плоскости XOY так, чтобы A совпала с точкой O — началом координат, ребро AC пошло по оси OX, AA_1 — по оси OZ. Точка C будет иметь координаты $(\sqrt{2};0;0)$, точка A_1 — координаты $(0;0;\sqrt{2})$. Мы хотим определить расстояние между прямыми AC_1 и CB_1. Вектор $\overline{AC_1}=(\sqrt{2};0;\sqrt{2})$, $\overline{CB_1}=(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2};\sqrt{2})$.

Ясно, что вектор $\overline{f}=(-1;-\frac{3}{\sqrt{3}};1)$ ортогонален как $\overline{AC_1}$, так и $\overline{CB_1}$.

Поэтому расстояние $\rho(AC_1,CB_1)=\left|\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{f}}{|\overline{f}|}\right|=\left|\dfrac{(\sqrt{2};0;0)\cdot(-1;-\frac{3}{\sqrt{3}};1)}{\sqrt{5}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}.$

Задача 4. В правильной четырехугольной призме, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями соседних боковых граней.

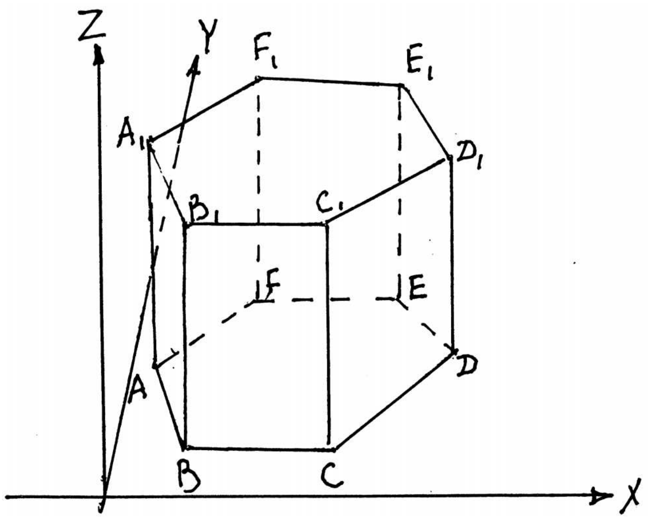
Ответ: 1.

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — наша правильная четырехугольная призма. Нам необходимо найти расстояние между диагоналями A_1D и D_1C. Мы можем поступить аналогично предыдущим задачам 1 — 3. Но поступим чуть иначе. Легко видеть, что диагональ AC_1 куба $ADCBA_1D_1C_1B_1$ ортогональна плоскостям A_1DB и D_1CB_1. Действительно, проекция AC_1 на грань AA_1D_1D — диагональ AD_1 — перпендикулярна A_1D. Следовательно, $AC_1 \perp A_1D$. Аналогично доказывается, что $AC_1 \perp DB$, значит, AC_1 перпендикулярна плоскости A_1DB. Так же доказывается, что $AC_1 \perp CD_1B_1$. Вектор $\overline{A_1D_1}$ соединяет точки $A_1 \in A_1D$ и $D_1 \in D_1C$. Значит,

$$\rho(A_1D,D_1C)=\frac{|\overline{AC_1}\cdot\overline{A_1D_1}|}{|\overline{AC_1}|}=\frac{|(\overline{AD}+\overline{DD_1}+\overline{D_1C_1})\cdot\overline{A_1D_1}|}{|\overline{AC_1}|}=\frac{3}{|\overline{AC_1}|}=\frac{3}{\sqrt{9}}=1.$$

Задача 5. В правильной шестиугольной призме, все ребра которой равны $\sqrt{21}$, найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями соседних боковых граней.

Ответ: 3.

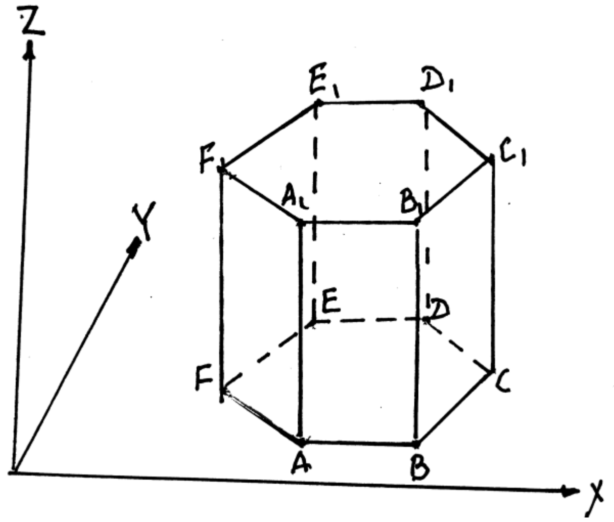


Решение. Рассмотрим призму $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Мы хотим найти расстояние между диагоналями CD_1 и BC_1. Расположим призму так, что основание $ABCDEF$ будет лежать в плоскости XOY, ребро BC будет параллельно оси OX, ребро AA_1 — параллельно оси OZ. Выпишем координаты векторов $\overline{CD_1}$ и $\overline{BC_1}$: $\overline{CD_1}=(\frac{\sqrt{21}}{2};\frac{\sqrt{21}\sqrt{3}}{2};\sqrt{21})$; $\overline{BC_1}=(\sqrt{21};0;\sqrt{21})$.

Найдем вектор $\overline{f}$, ортогональный $\overline{CD_1}$ и $\overline{BC_1}$. В качестве $\overline{f}$ можно взять вектор $(-1;-\frac{\sqrt{3}}{3};1)$. Вектор $\overline{BC}=(\sqrt{21};0;0)$ соединяет точки $B\in BC_1$ и $C\in CD_1$. Поэтому расстояние между прямыми CD_1 и BC_1 равно $\left|\dfrac{\overline{f}\cdot\overline{BC}}{|\overline{f}|}\right|=\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{1+\frac{1}{3}+1}}=\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{21}}{\sqrt{7}}=3.$

Задача 6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{5}$, найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней ABB_1A_1 и CDD_1C_1.

Ответ: 3.



Решение. Расположим призму $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ в системе координат так, чтобы основание $ABCDEF$ лежало в плоскости XOY, причем ребро AB было параллельно оси OX, ребро AA_1 — параллельно оси OZ. Найдем координаты векторов $\overline{AB_1}$ и $\overline{CD_1}$:

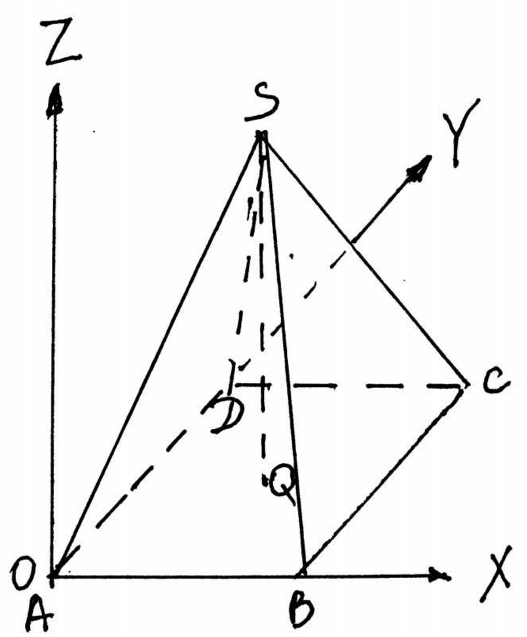
$\overline{AB_1} = (\sqrt{5}; 0; \sqrt{5})$; $\overline{CD_1} = (-\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{2}; \sqrt{5})$.

Вектор $\overline{f} = (-1; -\sqrt{3}; 1)$ перпендикулярен как $\overline{AB_1}$, так и $\overline{CD_1}$, а вектор $\overline{B_1D_1} = (0; \sqrt{5}\sqrt{3}; 0)$ соединяет точки $B_1 \in B_1D_1$ и $D_1 \in CD_1$.

Значит, $\rho(AB_1, CD_1) = \left|\dfrac{\overline{f} \cdot \overline{B_1D_1}}{|\overline{f}|}\right| = \dfrac{\sqrt{5} \cdot 3}{\sqrt{5}} = 3$.

Задача 7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны $\sqrt{6}$, найдите расстояние между прямыми AB и SC.

Ответ: 2.



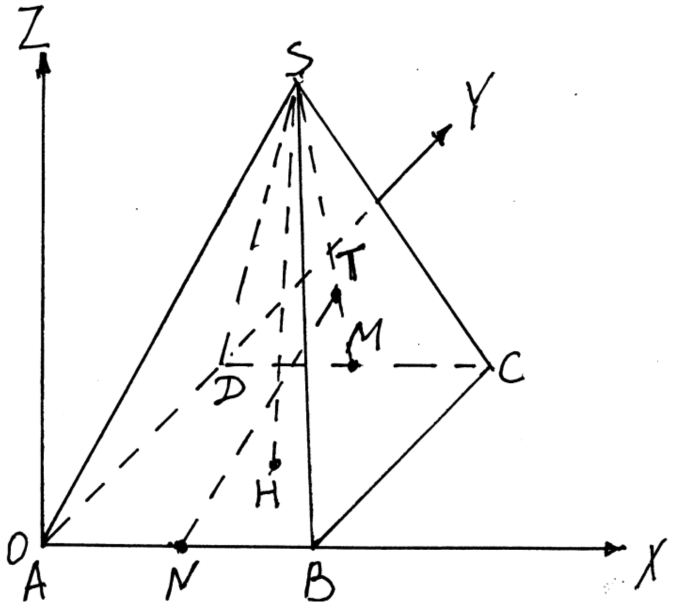
Решение. Пусть Q — центр основания пирамиды. Высота пирамиды SQ равна $\sqrt{SC^2 - CQ^2} = \sqrt{6-3} = \sqrt{3}$. Если разместить пирамиду в системе координат так, что AB пойдет по оси OX (A

совпадает с началом координат), а AD — по оси OY, причем QS будет параллельна оси OZ, то $\overline{AB}$ и $\overline{SC}$ будут иметь координаты: $\overline{AB} = (\sqrt{6}; 0; 0)$, $\overline{SC} = (\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}; -\sqrt{3})$; вектор $\overline{f} = (0; \sqrt{3}; \frac{\sqrt{6}}{2})$ будет ортогонален как $\overline{AB}$, так и $\overline{SC}$. Вектор $\overline{BC}$ с координатами $(0; \sqrt{6}; 0)$ соединяет точку B на прямой AB с точкой C на прямой SC.

Ясно, что $\rho(AB, SC) = \left|\dfrac{\overline{f} \cdot \overline{BC}}{|\overline{f}|}\right| = \dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3 + \frac{6}{4}}} = \dfrac{\sqrt{18} \cdot 2}{\sqrt{18}} = 2.$

Задача 8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{5}$, а высота SH пирамиды равна $\sqrt{15}$. Точки M и N — середины ребер CD и AB соответственно, а NT — высота пирамиды с вершиной N и основанием SCD. Найдите расстояние между прямыми NT и SC.

Ответ: 1.



Решение. Разместим пирамиду так, что точка A совпадет с началом координат — точкой O, ребро AB пойдет по оси OX, AD — по оси OY.

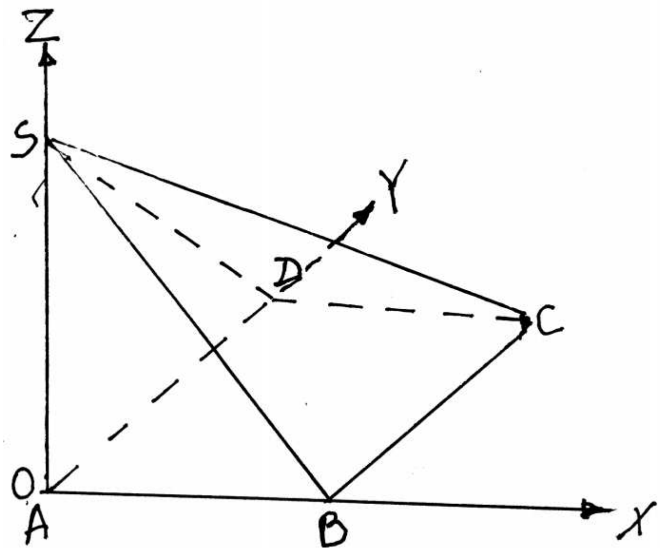
Ясно, что $\overline{SC} = (\sqrt{5}; \sqrt{5}; -\sqrt{15})$, $\overline{DC} = (2\sqrt{5}; 0; 0)$.

В качестве вектора, перпендикулярного $\overline{SC}$ и $\overline{DC}$, можно взять вектор $\overline{g} = (0; \sqrt{3}; 1)$. Вектор $\overline{NT}$ коллинеарен вектору $\overline{g}$. Найдем вектор $\overline{f}$, ортогональный $\overline{NT}$ и $\overline{SC}$. Понятно, что он также ортогонален $\overline{g}$ и $\overline{SC}$. В качестве $\overline{f}$ можно взять вектор $(4; -1; \sqrt{3})$.

Очевидно, что расстояние $\rho(\overline{NT}, \overline{SC}) = \left|\dfrac{\overline{NC} \cdot \overline{f}}{|\overline{f}|}\right| = \left|\dfrac{(\sqrt{5}; 2\sqrt{5}; 0) \cdot (4; -1; \sqrt{3})}{\sqrt{16 + 1 + 3}}\right| = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = 1.$

Задача 9. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$ со стороной $2\sqrt{6}$, а боковое ребро SA перпендикулярно плоскости этого квадрата. Найдите расстояние между прямыми BD и SC, если известно, что треугольник SBD равносторонний.

Ответ: 2.



Решение. Расположим $SABCD$ так, что A совпадет с началом координат, AS пойдет по оси OZ, AB — по оси OX и AD — по оси OY.

Тогда $\overline{DB} = (2\sqrt{6}; -2\sqrt{6}; 0)$; т.к. SBD — равносторонний, то $AS = AB = 2\sqrt{6}$. Значит, $\overline{SC} = (2\sqrt{6}; 2\sqrt{6}; -2\sqrt{6})$ и вектор $\overline{f} = (1; 1; 2)$ перпендикулярен как $\overline{DB}$, так и $\overline{SC}$. Вектор $\overline{DC} = (2\sqrt{6}; 0; 0)$ содержит точки $D \in DC$ и $C \in SC$. Значит, $\rho(DB, SC) = \left|\dfrac{\overline{DC} \cdot \overline{f}}{|\overline{f}|}\right| = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{1+1+4}} = 2$.

Задача 10. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ со стороной основания $AB = \sqrt{3}$ и боковым ребром $SA = 2\sqrt{3}$ найдите расстояние между прямыми AB и SC.

Ответ: 1,5.

Решение. Рассмотрим плоскость CSF. Ясно, что $AB \parallel FC$, следовательно, $AB \parallel CSF$ и искомое расстояние равно расстоянию между прямой AB и плоскостью CSF. Очевидно, что если O — центр $ABCDEF$, а K — середина AB, то $KO \perp CSF$, $KO \perp AB$.

Но тогда $KO = AB \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1,5$. Это и есть искомое расстояние.

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние $\rho(A, \alpha)$ от точки $A(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости α, заданной уравнением

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

вычисляется следующим образом:

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad (2)$$

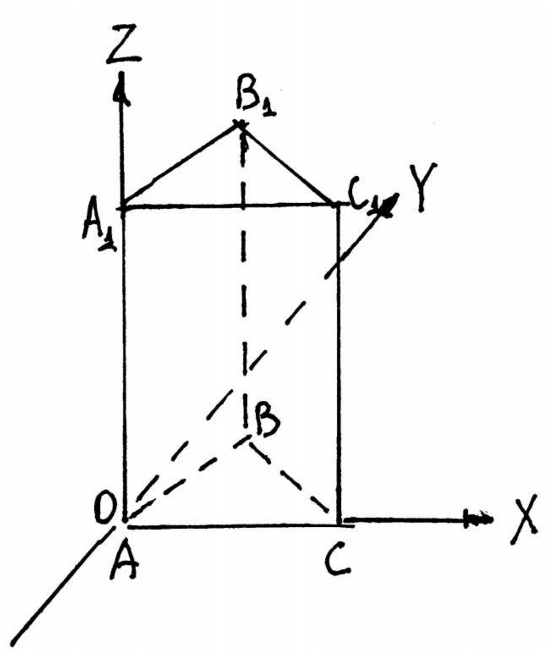
Для определения коэффициентов a, b, c уравнения (1) надо взять любые два неколлинеарных вектора $\overline{f}$, $\overline{g}$ в плоскости α и воспользоваться тем, что вектор $(a; b; c)$, координаты которого являются коэффициентами при x, y, z в уравнении (1), ортогонален плоскости α, т.е., $(a; b; c) \perp \overline{f}$, $(a, b, c) \perp \overline{g}$. Это позволяет нам определить коэффициенты уравнения плоскости α с точностью до пропорциональности. Если $B(x_2; y_2; z_2)$ — некоторая точка плоскости α, то $ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0$, поэтому

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - ax_2 - by_2 - cz_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|\overline{AB} \cdot (a; b; c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad (3)$$

Итак, мы для решения следующих задач сначала ищем вектор $(a; b; c)$, ортогональный двум неколлинеарным векторам плоскости α. Затем выбираем любую точку $B \in \alpha$ и вычисляем расстояние $\rho(A, \alpha)$ по формуле (3).

Задача 1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны $\sqrt{21}$, найдите расстояние от точки A до плоскости BCA_1.

Ответ: 3.



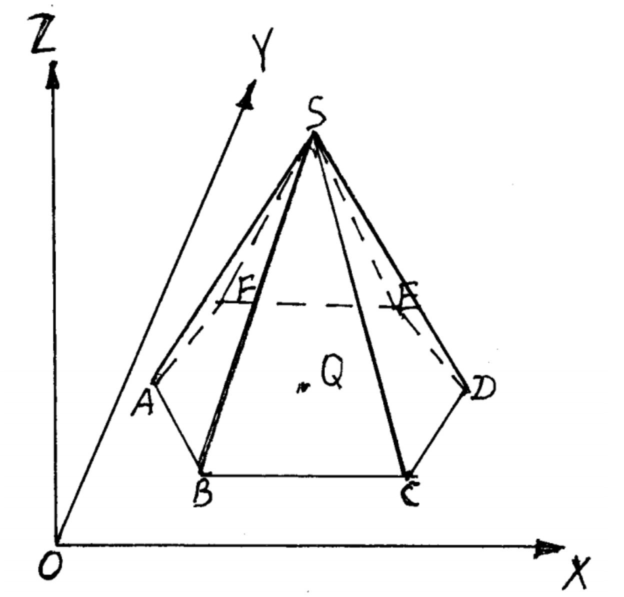
Решение. Рассмотрим систему координат такую, что ребро AC лежит на оси OX, A совпадает с началом координат, $A = (0; 0; 0)$, $A_1 = (0; 0; \sqrt{21})$.

Векторы $\overline{A_1C} = (\sqrt{21}; 0; -\sqrt{21})$, $\overline{BC} = (\frac{\sqrt{21}}{2}; -\frac{\sqrt{21}\cdot\sqrt{3}}{2}; 0)$.

Вектор $(1; \frac{\sqrt{3}}{3}; 1)$ ортогонален $\overline{A_1C}$ и $\overline{BC}$. $\rho(A, BCA_1) = \dfrac{|\overline{AC} \cdot (1; \frac{\sqrt{3}}{3}; 1)|}{\sqrt{1 + \frac{1}{3} + 1}} = \dfrac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{7}} = 3.$

Задача 2. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны $\sqrt{15}$, а боковые ребра равны $2\sqrt{15}$, найдите расстояние от точки B до плоскости SEF.

Ответ: 6.



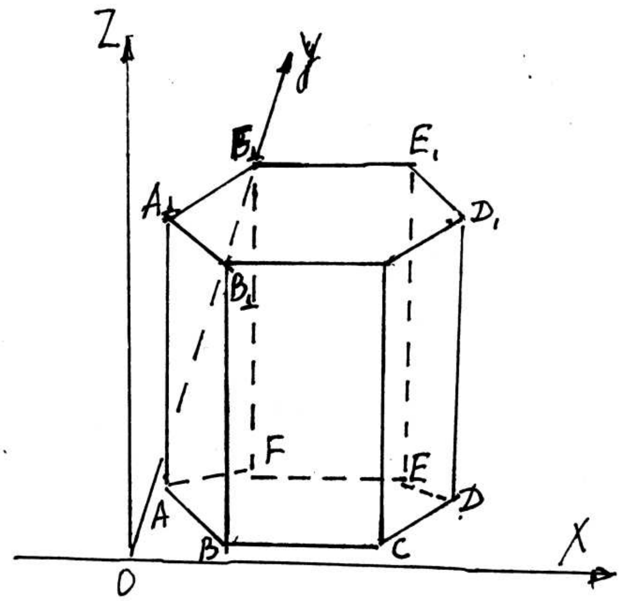
Решение. Пусть основание пирамиды лежит в плоскости XOY, BC параллельна оси OX. Если Q — центр шестиугольника $ABCDEF$, то $\overline{QS} = \sqrt{FS^2 - QF^2} = 3\sqrt{5}$; $\overline{FS} = (\frac{\sqrt{15}}{2}; -\frac{\sqrt{15}\cdot\sqrt{3}}{2}; 3\sqrt{5})$; $\overline{FE} = (\sqrt{15}; 0; 0)$.

Вектор $(0; 2; 1)$ можно взять в качестве $(a; b; c)$. Он перпендикулярен векторам $\overline{FS}$ и $\overline{FE}$. $\overline{BF} = (0; \sqrt{15}\cdot\sqrt{3}; 0)$.

Значит, $\rho(B, SEF) = \dfrac{(a; b; c)\cdot\overline{BF}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{2\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = 6.$

Задача 3. В правильной шестиугольной призме $AB \ldots F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки A до плоскости DEA_1.

Ответ: 1,5.

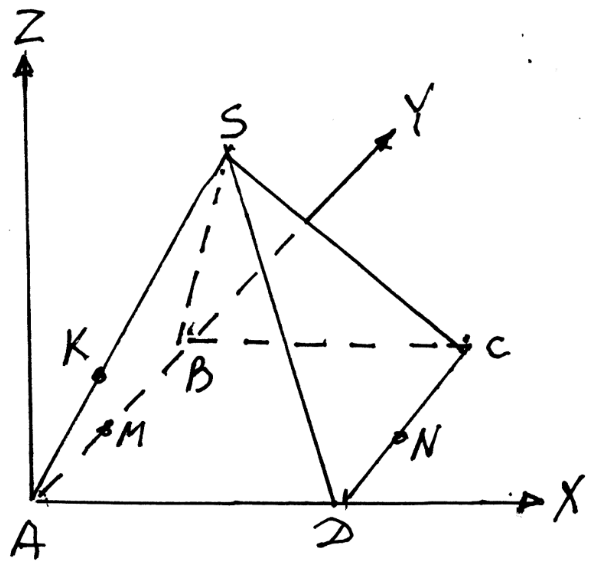


Решение. Расположим призму так, чтобы основание $ABCDEF$ лежало в плоскости XOY, ребро BC было параллельно оси OX, ребро AA_1 параллельно оси OZ. Тогда $\overline{DE} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 0)$, $\overline{DA_1} = (-2\sqrt{3}; 0; \sqrt{3})$. В качестве $(a; b; c)$ возьмем $(1; \frac{\sqrt{3}}{3}; 2)$. Вектор $\overline{AA_1} = (0; 0; \sqrt{3})$.

$$\rho(A, DEA_1) = \frac{(1; \frac{\sqrt{3}}{3}; 2) \cdot \overline{AA_1}}{\sqrt{1 + \frac{3}{9} + 4}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 3}{\sqrt{48}} = \frac{6}{4} = 1,5.$$

Задача 4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $4\sqrt{5}$, а высота пирамиды равна $\sqrt{5}$. Точки M, N и K лежат на ребрах AB, CD и AS соответственно, $AM = DN = \sqrt{5}$, а $AK = \frac{3\sqrt{5}}{4}$. Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны и найдите расстояние между ними.

Ответ: 3.

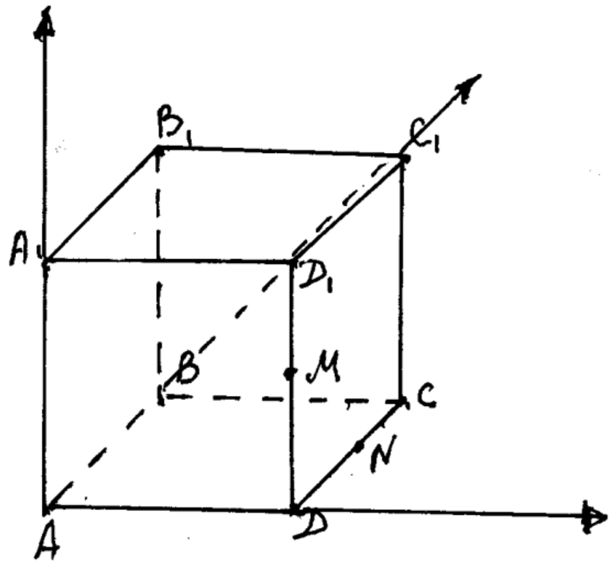


Решение. Расположим пирамиду $SABCD$ так, чтобы ее основание $ABCD$ лежало в плоскости XOY, точка A совпадала с началом координат, ребро AD лежало на оси OX, ребро AB — на оси OY. Гомотетия с центром в точке A и коэффициентом $\frac{1}{4}$ переводит плоскость SBC в плоскость KMN, следовательно, эти плоскости параллельны. Для решения задачи необходимо найти расстояние от точки M до плоскости SBC. $\overline{BC} = (4\sqrt{5}; 0; 0)$, $\quad \overline{SC} = (2\sqrt{5}; 2\sqrt{5}; -\sqrt{5})$.

В качестве $(a; b; c)$ возьмем вектор $(0; 1; 2)$. Вектор $\overline{MB} = (0; 3\sqrt{5}; 0)$. Поэтому искомое расстояние равно $\dfrac{(a; b; c) \cdot \overline{MB}}{|a; b; c|} = \dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3.$

Задача 5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным $\sqrt{6}$, через точки A_1, C_1 и середину ребра DD_1 проведена плоскость. Найдите расстояние от середины ребра CD до этой плоскости.

Ответ: 1,5.



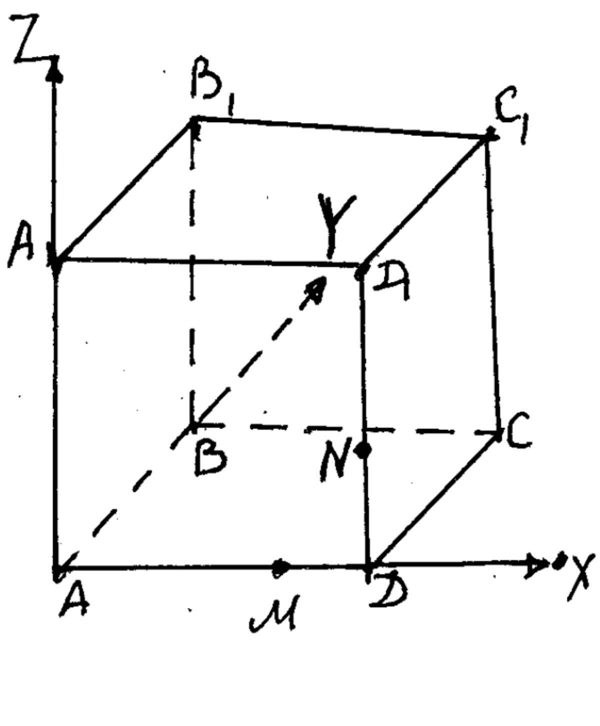
Решение. Расположим куб в системе координат так, чтобы основание лежало в плоскости XOY, точка A совпадала с началом координат, прямая AD совпадала с осью OX, AB — с осью OY, AA_1 — с осью OZ. Тогда $\overline{A_1C_1} = (\sqrt{6}; \sqrt{6}; 0)$. Если M — середина ребра DD_1, N — середина ребра DC, то $\overline{A_1M} = (\sqrt{6}; 0; -\frac{\sqrt{6}}{2})$.

В качестве вектора $(a; b; c)$, перпендикулярного $\overline{A_1C_1}$ и $\overline{A_1M}$, возьмем $(1; -1; 2)$.

Вектор $\overline{MN} = (0; \frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2})$. Искомое расстояние $\rho(N, A_1C_1M) = \dfrac{|(1; -1; 2) \cdot \overline{MN}|}{\sqrt{1+1+4}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = 1,5.$

Задача 6. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. На ребрах AD и DD_1 взяты точки M и N, причем $\frac{AM}{AD} = 2$, $\frac{ND}{ND_1} = \frac{1}{2}$. Найдите расстояние от точки A до плоскости, проходящей через точки M, N и C_1.

Ответ: $\dfrac{5}{\sqrt{19}}$



Анализ условия. На ребре AD нельзя взять точку M так, чтобы $\frac{AM}{AD} = 2$. Вероятно, M находится на прямой AD. Но тогда есть два варианта расположения точки M. Лучше всего выбрать M так, что $\frac{AM}{MD} = 2$; тогда:

Решение. Расположим куб так, что A совпадет с началом координат, ребро AD пойдет по оси OX, ребро AB — по оси OY, ребро AA — по оси OZ. Тогда $\overline{MN} = (\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3})$, $\overline{MC} = (\frac{1}{3}; 1; 0)$.

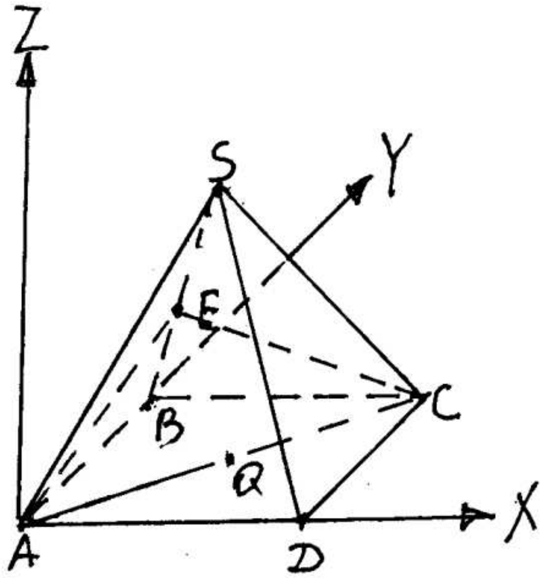
В качестве вектора $(a; b; c)$, перпендикулярного $\overline{MN}$ и $\overline{MC}$, возьмем вектор $(1; -\frac{1}{3}; -1)$. Вектор $\overline{AM} = (\frac{2}{3}; 0; -1)$.

Искомое расстояние $\rho(A, MNC) = = \frac{|(\frac{2}{3};0;-1)\cdot(1;-\frac{1}{3};-1)|}{\sqrt{1+\frac{1}{9}+1}} = \frac{\frac{2}{3}+1}{\sqrt{\frac{19}{9}}} = \frac{\frac{5}{3}\cdot 3}{\sqrt{19}} = \frac{5}{\sqrt{19}}$.

Ответ: $\dfrac{5}{\sqrt{19}}$

Задача 7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 2, точка E — середина ребра SB. Найдите расстояние от точки B до плоскости ACE.

Ответ: 1.



Решение. Расположим пирамиду так, что точка A совпадет с началом координат, ребро AD пойдет по оси OX, ребро AB — по оси OY.

Если Q — центр основания, то $Q = (1; 1; 0)$, $SO = \sqrt{AS^2 - 1^2 - 1^2} = \sqrt{2}$.

Т.к. расстояние от E до плоскости ABC равно $\frac{1}{2}SQ$, то $\overline{AE} = (\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\overline{AC} = (2; 2; 0)$. В качестве $(a; b; c)$ можем взять вектор $(-1; 1; -\sqrt{2})$.

Расстояние от B до плоскости ACE равно $\frac{|\overline{BC}\cdot(-1;1;-\sqrt{2})|}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{|(2;0;0)(-1;1;-\sqrt{2})|}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Ответ: 1.

Решетки на плоскости

Изучим сначала несколько важных свойств векторов на плоскости.

Задача 1. Если $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ — два неколлинеарных вектора плоскости, то любой вектор $\overline{OC}$ можно представить в виде

$$\overline{OC} = k \cdot \overline{OA} + l \cdot \overline{OB} \qquad (1)$$

для некоторых действительных чисел k и l.

Выражение $k \cdot \overline{a} + l \cdot \overline{b}$ называют *линейной комбинацией векторов* $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Задача 2. Докажите, что если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ не коллинеарны, то из $k \cdot \overline{a} + k \cdot \overline{b} = \overline{0}$ следует, что $k = 0$, $b = 0$.

Задача 3. Докажите, что коэффициенты k и l в равенстве (1) определены однозначно, т.е. если наряду с представлением (1) вектора $\overline{OC}$ существует другое такое представление: $\overline{OC} = k_1 \cdot \overline{OA} + l_1 \cdot \overline{OB}$, то $k_1 = k$, $l_1 = l$.

Задача 4. Докажите, что для любого вектора $\overline{a}$ и точки A плоскости существует одна и только одна точка B плоскости такая, что $\overline{AB} = \overline{a}$.

Отображение $\varphi_{\overline{a}}$, которое каждой точке плоскости A ставит в соответствие точку $B = \varphi_{\overline{a}}(A)$ такую, что $\overline{AB} = \overline{a}$, называется *параллельным переносом на вектор* $\overline{a}$.

Пусть C — некоторая точка плоскости, а $\overline{a}$ — вектор. Рассмотрим отображение $\psi_{\overline{a}}$, которое каждой точке A плоскости ставит в соответствие точку B такую, что $\overline{CB} = \overline{CA} + \overline{a}$.

Задача 5. Докажите, что $\varphi_{\overline{a}} = \psi_{\overline{a}}$.

Рассмотрим прямую l с выделенной точкой начала — O. Семейство точек $L \subset l$ назовем *решеткой* на прямой l, если $O \in L$ и точки множества L разбивают прямую l на равные отрезки. Элементы множества L будем называть *узлами* решетки L. Точка $O \in L$ делит прямую l на две части. Одну из них (произвольно) назовем *левой*, а другую *правой* частью прямой l.

Далее, n–й по порядку узел, лежащий в правой части прямой l, обозначим через L_n, аналогично n–й по порядку узел, лежащий в левой части прямой L, обозначим через L_{-n}. Узел O обозначим через L_0.

Для определения решетки на плоскости рассмотрим две различные, пересекающиеся в точке O — точке начала координат плоскости, прямые l и m. Пусть $L = \{L_0 = O, L_1, L_{-1}, L_2, L_{-2}, \ldots\}$ — решетка на прямой l,а $M = \{M_0 = O, M_1, M_{-1}, M_2, M_{-2}, \ldots\}$ — решетка на m. Проведем через каждый узел L_i решетки L прямую m_i, параллельную прямой m, а через каждый узел M_i решетки M проведем прямую l_i, параллельную прямой l. Эти прямые разобьют плоскость на равные параллелограммы — *фундаментальные параллелограммы* решетки. Точки пересечения прямых l_i и m_j называют *узлами* решетки. Мы будем использовать для обозначения узла, являющегося пересечением прямых l_i и m_j, символом (i, j). Таким образом, $(i, j) = l_i \cap m_j$.

Нам понадобится еще одно определение решетки. Пусть $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OB}$ — два вектора с общим началом в точке O, причем точки O, A, B не лежат на одной прямой (т.е. векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ неколлинеарны). Множество всех точек C таких, что

$$\overline{OC} = k \cdot \overline{a} + m \cdot \overline{b} \tag{2}$$

для целых чисел k и m является решеткой. Мы назовем ее *решеткой, порожденной векторами* $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Ясно, что узлами такой решетки будут все точки C такие, что вектор $\overline{OC}$ удовлетворяет равенству (2). Таким образом, решетка — это множество точек (узлов), построенных одним из перечисленных правил. При этом само построение для нас не существенно. В частности, если решетка E порождена векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, а векторы $\overline{c}$, $\overline{d}$ таковы, что $\overline{c} = \overline{a} + 2\overline{b}$, $\overline{d} = \overline{a} + \overline{b}$, то решетка, порожденная векторами $\overline{c}$ и $\overline{d}$, совпадает с решеткой E.

Задача 6. Докажите это.

Задача 7. Докажите, что для любого параллелограмма $ABCD$ и числа $\varepsilon > 0$ существует такой параллелограмм $A'B'C'D'$, что $A'B' < AB$, $A'C' < AC$, $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, а площади S и S' параллелограммов $ABCD$ и $A'B'C'D'$ удовлетворяют неравенству $S - S' < \varepsilon$.

Рассмотрим на плоскости с декартовой системой координат множество $\mathbb{Z}^2$ всех точек, обе координаты которых целые числа.

Задача 8. Докажите, что $\mathbb{Z}^2$ — решетка. (Точки с обеими целыми координатами — узлы этой решетки).

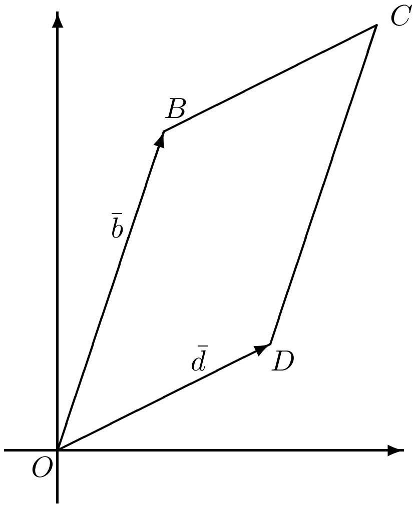
Задача 9!!! Пусть Φ — некоторая плоская фигура, площадь которой больше 1. Тогда найдется такой вектор $\overline{a}$, что $\varphi_{\overline{a}}(\Phi)$ (напомним, что $\varphi_{\overline{a}}(\Phi)$ — результат параллельного переноса фигуры Φ на вектор $\overline{a}$) будет содержать не меньше двух узлов решетки $\mathbb{Z}^2$.

Указание. Рассмотрим прямые $l_i : x = i$ $(i = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots)$ и $m_i : y = i$ $(i = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots)$. Эти прямые разделяют плоскость на единичные квадраты с вершинами в узлах решетки $\mathbb{Z}^2$. Рассмотрим все квадраты, имеющие общие точки с нашей фигурой Φ. Выберем один из таких квадратов и все другие перенесем параллельно, так чтобы они совпали с выделенным квадратом. Так как площадь фигуры Φ больше 1, то некоторая точка в выделенном квадрате будет покрыта фрагментами фигуры Φ как минимум дважды. Пусть это будет точка A. Обозначим через B левый нижний угол квадрата. Докажите, что в качестве $\overline{a}$ можно взять вектор $\overline{AB}$.

Задача 10. 1) Докажите, что для любого вектора $\overline{a}$ и решетки E либо $E \cap \varphi_{\overline{a}}(E) = 0$, либо $E \cap \varphi_{\overline{a}} = E$.

2) Докажите, что если параллельно переместить вектор $\overline{AB}$, оба конца которого — узлы решетки E, то если один из концов после переноса будет узлом решетки E, то и второй конец будет узлом этой решетки.

Задача 11. Пусть $OBCD$ — параллелограмм с вершинами в узлах решетки $\mathbb{Z}^2$. (Напомним, что $O = (0; 0)$). Известно, что ни внутри, ни на границах этого параллелограмма нет других узлов решетки $\mathbb{Z}^2$ кроме O, B, C, D. Положим $\overline{c} = \overline{OB}$, $\overline{d} = \overline{OD}$. Тогда векторы $\overline{b}$ и $\overline{d}$ порождают сеть $\mathbb{Z}^2$.



Указание. Любой узел C решетки Z^2 удовлетворяет равенству $\overline{OC} = p\overline{b} + q\overline{d}$, где p, q однозначно определенные действительные числа. Ясно, что p можно представить в виде $m + p'$, где m — целое, а $p' \in [0; 1)$. Аналогично $q = n + q'$, где n — целое, а $q' \in [0; 1)$. Значит, $\overline{OC} = (m + p')\overline{b} + (n + q')\overline{d}$. Рассмотрим $\overline{OM} = p'\overline{b} + q'\overline{d}$. Ясно, что $M \in ABCD$ и M — узел решетки Z^2. Значит, $p' = q' = 0$. Т.е., C принадлежит решетке Z^2.

Задача 12. Докажите, что если $OBCD$ — параллелограмм, вершины которого являются узлами решетки $\mathbb{Z}^2$, и $OBCD$ не содержит других узлов этой решетки, то площадь S параллелограмма $OBCD$ равна 1.

Указание. Так как S — число целое (почему?), то если оно не 1, то $S > 1$. Значит (см. задачу 6), существует параллелограмм $A'B'C'D'$, стороны которого меньше и попарно параллельны соответствующим сторонам параллелограмма $OBCD$. При этом площадь параллелограмма $O'B'C'D'$ больше 1. Значит, $\varphi_{\overline{a}}(O'B'C'D')$ для некоторого вектора $\overline{a}$ будет содержать минимум два узла решетки $\mathbb{Z}^2$. Но это невозможно (почему?).

Задача 13. Если числа m, n взаимно простые, то на отрезке OA, где $O = (0; 0)$, $A = (m; n)$ нет других узлов решетки $\mathbb{Z}^2$.

Задача 14. Пусть $B = (m; n)$, где m, n — взаимно простые числа. Для любой точки $C \in \mathbb{Z}^2$ и такой, что $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ неколлинеарны, рассмотрим параллелограмм $OBCD$, где $\overline{OD} = \overline{OB} + \overline{OC}$. Выберем теперь C так, чтобы площадь параллелограмма $OBCD$ была минимальна. Докажите, что его площадь равна 1.

Задача 15. Если числа m и n взаимно простые, то найдутся такие целые p и q, что $mp + nq = 1$.

Задача 16. Если произведение целых чисел ab делится на целое число d и a, d — взаимно простые, то b делится на d.

Скалярное произведение

Положим $\overline{a} = (x_1; y_1)$, $\overline{b} = (x_2; y_2)$, φ– угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Существует два определения скалярного произведения векторов:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2. \tag{1}$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi \tag{2}$$

Напомним, что

$$|\overline{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}. \tag{3}$$

Интересно, что определения (1) и (2) одинаковы, т.е. для любой пары векторов они дают одинаковый результат. Докажем это.

Изучим свойства первого определения. Легко видеть, что

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$

2) $(k\overline{a}) \cdot \overline{b} = k(\overline{a} \cdot \overline{b})$ для любого действительного числа k.

3) $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$

4) $\overline{a} \cdot \overline{a} \geq 0$ и если $\overline{a} \cdot \overline{a} = 0$, то $\overline{a} = 0$

Длина вектора $\overline{a}$ с координатами $(x_1; y_1)$ вычисляется по формуле (3). Это является простым следствием теоремы Пифагора. При сложении векторов складываются их соответствующие координаты (Почему?), а при умножении на число k соответствующие координаты умножаются на k.

Ясно, что $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}}$, т.е. $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$.

Так как $\overline{a} \cdot \overline{b} = \frac{1}{2}((\overline{a} + \overline{b})(\overline{a} + \overline{b}) - \overline{a} \cdot \overline{a} - \overline{b} \cdot \overline{b})$, то $\overline{a} \cdot \overline{b} = \frac{1}{2}(|\overline{a} + \overline{b}|^2 - |\overline{a}|^2 - |\overline{b}|^2)$.

Из последнего следует, что поворот не меняет скалярного произведения, заданного определением (1). Это значит, что если задать поворот F плоскости около начала координат, то $\overline{a} \cdot \overline{b} = F(\overline{a}) \cdot F(\overline{b})$.

Ясно, что $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} \cdot \frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$. Действительно,

$$\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} \cdot \frac{\overline{b}}{|\overline{b}|} = \frac{1}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} \cdot \overline{a} \cdot \overline{b}. \tag{4}$$

Умножив обе части равенства (4) на $|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|$, получим требуемое равенство.

Чему же равно произведение $\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} \cdot \frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$?

Во-первых, $\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$ и $\frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$ – –– это единичные по модулю векторы: $\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = (\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}; \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}})$

$$\left|\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}\right| = \sqrt{\frac{x_1^2}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}} = \sqrt{1} = 1.$$

Аналогично и для $\frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$. Можно так повернуть плоскость около точки O начала координат, что направление вектора $\overline{b}$ совпадет с положительным направлением оси X. Тогда получим $\frac{\overline{b}}{|\overline{b}|} = (1; 0)$, а $\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = (\cos\varphi; \sin\varphi)$. В этом случае $d\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} \cdot \frac{\overline{b}}{|\overline{b}|} = \cos\varphi$ и мы доказали, что

$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot (\frac{\overline{a}}{|a|}) \cdot (\frac{\overline{b}}{|b|}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cdot \cos\varphi$.

Теорема Ферма

Пьер Ферма (P. Fermat, 1601–1665) поставил следующую интересную задачу: для треугольника ABC найти точку M такую, что сумма расстояний от M до вершин A, B, C минимальна. Эту задачу в дальнейшем решил ученик Ферма Торричелли. Он доказал, что для остроугольного треугольника это будет такая точка, из которой каждая сторона треугольника будет видна под углом 120°.

Было замечено, что требование остроугольности треугольника слишком сильно (см. Pedoe D. Cercles N.Y., 1957). Основные результаты о точках Ферма-Торричелли можно доказать для треугольников, у которых каждый угол меньше 120°. Задача, поставленная Ферма, оказалась очень интересной, у нее существует множество различных красивых решений.

Некоторые из приводимых нами доказательств являются пересказом, адаптированным в интересах статьи, доказательств из учебника В.В. Прасолова "Задачи по планиметрии", Москва, МЦМО, 2007. В дальнейшем ссылки на эту книжку будем для сокращения обозначать так: ЗП(14.6) — в данном случае имеется в виду "Задачи по планиметрии", задача 6 из главы 14.

Для удобства изложения мы будем называть точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника ABC минимальна, — *точкой Ферма* треугольника ABC. А точку, из которой стороны треугольника видны каждая под углом 120°, — *точкой Торричелли* этого треугольника.

Лемма 1. *Две различные точки не могут быть точками Ферма треугольника ABC.*

Доказательство. (От противного). Предположим, что M и N — различные точки Ферма треугольника ABC. Тогда

$$MA + MB + MC = NA + NB + NC = m, \tag{1}$$

где m не превосходит суммы расстояний от любой другой точки плоскости до вершин треугольника ABC. Рассмотрим точку K — середину отрезка MN. Ясно, что AK — медиана треугольника AMN, поэтому $KA \leq (\frac{MA+NA}{2})$, аналогично $KB \leq \frac{MB+NB}{2}, KC \leq \frac{MC+NC}{2}$. (Доказательство этих неравенств – ЗП(9.1)). Так как A, B, C не лежат на одной прямой, то хотя бы один из треугольников AMN, BMN, CMN — не вырожденный (иначе точки A, B, C лежат на прямой MN) и хотя бы одно из перечисленных выше неравенств строгое, т.е.

$$KA + KB + KC < \frac{MA + MB + MC + NA + NB + NC}{2} = m.$$

Значит, сумма расстояний от K до вершин треугольника ABC меньше, чем минимальная такая сумма. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2. *Если M - точка Ферма треугольника ABC, то M не может лежать вне треугольника ABC.*

Доказательство. (От противного.) Пусть M — точка Ферма треугольника ABC и M лежит вне этого треугольника. Это значит, что найдется сторона треугольника ABC, отделяющая точку M от вершины, не лежащей на этой стороне. Пусть, например, прямая BC разделяет точки A и M . Ясно, что тогда

$$MA + MB + MC > MA' + MB' + MC',$$

где M' — точка, симметричная точке M относительно BC. Это противоречие доказывает лемму.

Лемма 3. *Точка Торричелли треугольника ABC принадлежит треугольнику ABC.*

Доказательство. Пусть M — точка Торричелли. Тогда

$$\frac{\overline{MA}}{|MA|} + \frac{\overline{MB}}{|MB|} + \frac{\overline{MC}}{|MC|} = 0. \tag{2}$$

Для доказательства (2) положим

$$\overline{e}_1 = \frac{\overline{MA}}{|MA|}, \quad \overline{e}_2 = \frac{\overline{MB}}{|MB|}, \quad \overline{e}_3 = \frac{\overline{MC}}{|MC|}.$$

Ясно,что $\overline{e}_1+\overline{e}_2+\overline{e}_3 = 0$. Действительно, каждый из векторов $\overline{e}_i$ по модулю равен 1 для $i = 1,2,3$, а так как каждые два из них образуют угол 120°, то приложив вектор $\overline{e}_2$ к концу вектора $\overline{e}_1$, а $\overline{e}_3$ к концу $\overline{e}_2$, получим правильный треугольник. Это и доказывает (2). Пусть точка M не лежит в треугольнике ABC. Тогда найдется прямая l, отделяющая M от треугольника ABC. Это означает, что M и треугольник ABC лежат по разные стороны от l. Пусть $\overline{f}$ — вектор с началом в точке M, перпендикулярный прямой l и направленный к этой прямой, а $\overline{g}$ — произвольный ненулевой вектор, коллинеарный l. Любой вектор $\overline{e}_i (i = 1,2,3)$ разлагается по векторам $\overline{f}$ и $\overline{g}$, причем если

$\overline{e}_i = \alpha_i \overline{f} + \beta_i \overline{g}$, то $\alpha_i > 0$. Следовательно, $\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\overline{f} + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\overline{g}$, где коэффициент при $\overline{f}$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \neq 0$. Значит $\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3 \neq 0$. Полученное противоречие доказывает лемму. Заметим что точка Торричелли не может лежать на границе треугольника и тем более в одной из его вершин.

Лемма 4 (неравенство Птолемея). *Если $ABOC$ — произвольный четырехугольник, то*

$$AB \cdot OC + OD \cdot BC \geq AC \cdot OB \tag{3}$$

Доказательство. Выделим на плоскости некоторую точку O; каждой другой точке A поставим в соответствие некоторую точку $A' = \varphi(A)$ по следующему правилу: точка A' лежит на луче OA и $OA' \cdot OA = 1$. Теперь наряду с обычным расстоянием между точками мы рассмотрим новое. Новое расстояние между точками A, B равно расстоянию между точками $A' = \varphi(A)$ и $B' = \varphi(B)$. Обозначим это расстояние через $\rho(A,B)$. Так как $\triangle OAB \backsim \triangle OB'A'$, то

$$\rho(A,B) = A'B' = AB \cdot \frac{OA'}{OB} = \frac{AB}{OA \cdot OB}. \tag{4}$$

Для расстояния ρ справедливо неравенство треугольника: $\rho(A,B) + \rho(B,C) \geq \rho(A,C)$. То есть

$$\frac{AB}{OA \cdot OB} + \frac{BC}{OB \cdot OC} \geq \frac{AC}{OA \cdot OC} \Rightarrow \frac{AB \cdot OC}{OA \cdot OB \cdot OC} + \frac{BC \cdot OA}{OA \cdot OB \cdot OC} \geq \frac{AC \cdot OB}{OA \cdot OB \cdot OC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB \cdot OC + BC \cdot OA \geq AC \cdot OB \tag{5}$$

Мы доказали важное неравенство (неравенство Птолемея). А именно: *произведение диагоналей четырехугольника не превосходит суммы произведений его противоположных сторон.* Если же точки $OABC$ — вершины выпуклого четырехугольника, вписанного в окружность, то преобразование φ переводит точки A, B, C в точки, лежащие на прямой, причем $B' = f(B)$ будет лежать между A' и C' ($A' = f(A)$, $C' = f(C)$. Ясно, что в этом случае неравенство Птолемея превратится в равенство. Т.е. *сумма произведений противоположных сторон выпуклого четырехугольника, вписанного в окружность, равна произведению его диагоналей.* (Это и есть теорема Птолемея).

Лемма 5. *Если ABC - правильный треугольник, то*

$$MA \leq MB + MC \tag{6}$$

для любой точки M плоскости. Если же M лежит на окружности, описанной около ABC на дуге BC, не содержащей точки A, то

$$MB + MC = MA. \tag{7}$$

Доказательство. В случае, когда M — произвольная точка плоскости, то применив Лемму 4 получим

$$MC \cdot AB + MB \cdot AC \geq MA \cdot BC. \tag{8}$$

Из неравенства (8) так как $AB = AC = BC$ следует (6). Аналогично, воспользовавшись теоремой Птолемея получим равенство (7) . Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть ABC — треугольник, каждый угол которого меньше $120°$. Треугольник PBC — равносторонний и точки P и A лежат по разные стороны от прямой AB. Прямая AP пересекает окружность, описанную около треугольника PBC в некоторой точке M, отличной от P. В этом случае M — точка Ферма треугольника ABC. Она же будет и точкой Торричелли этого треугольника.*

Доказательство. Четырехугольник $ABPC$ выпуклый, так как все углы этого четырехугольника меньше $180°$. Точки A и P лежат по разные стороны от BC, значит отрезок AP пересекает BC в некоторой точке K. Угол $BAC < 120°$ значит точка A лежит вне окружности, описанной около треугольника BPC. Следовательно, отрезок AK пересекает эту окружность в точке M, причем точки M и P лежат по разные стороны от BC. Применив теорему Птолемея, получим $MB + MC = MP$. Следовательно

$$MA + MB + MC = MA + MP = AP \tag{9}$$

Если N- любая другая точка плоскости, то в соответствии с леммой 5 получим

$$NA + NB + NC \geq NA + NP \geq AP \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что M — точка Ферма. Легко видеть, что $\angle BMC + \angle BPC = 180°$, следовательно, $\angle BMC = 120°$. То есть сторона BC видна из точки Ферма треугольника ABC под углом в $120°$. Ясно что и остальные две стороны треугольника ABC видны из M под углом в $120°$. Теорема 1 доказана.

Так как для любой точки M, лежащей внутри треугольника ABC будет $\angle AMB > \angle ACB$, то точка Торричелли не существует у треугольников у которых хотя бы один угол больше или равен $120°$.

Дальнейшие рассуждения требуют знания начал математического анализа и могут быть пропущены неподготовленным читателем.

Изучим, как будет меняться расстояние от точки B, двигающейся по некоторой прямой l до фиксированной точки A.

Итак, пусть точка B лежит на прямой l и ее положение на прямой определено параметром h. Т.о., $B(0) = B$, а $B(h)$ - точка, лежащая на l и отстоящая от B на h с учетом выбранного на l направления.

Для определенности будем считать, что направление задает единичный вектор $\overline{e}$, коллинеарный l. Пусть φ — угол между BA и $\overline{e}$. Через $a(h)$ обозначим расстояние от $B(h)$ до A. Так как расстояние от A до l постоянно, то получим

$$a^2(h) - a^2(0) = (a(0)cos\varphi - h)^2 - (a(0)cos\varphi)^2$$

Следовательно

$$\frac{a(h) - a(0)}{h} = -\frac{2a(0)cos\varphi - h}{a(h) + a(0)}.$$

Переходя к пределу при $h \to 0$ получим

$$a'(0) = -cos\varphi = -\frac{\overline{BA}}{|BA|} \cdot \overline{e}.$$

Так как расстояние от точки M до фиксированной точки плоскости есть непрерывная функция относительно обычной метрики на плоскости, то найдется точка M, для которой сумма расстояний $MA + MB + MC$ минимальна. Это будет точка Ферма треугольника ABC. Мы видели, что M не может располагаться вне треугольника ABC.

Изучим все возможные варианты размещения точки M. Пусть M лежит на стороне BC треугольника ABC, не совпадая ни с B, ни с C. Движение по прямой MA определено параметром h. Положим $a(h)$ — расстояние от $M(h)$ до A, $b(h)$ — расстояние от $M(h)$ до B и $C(h)$ — расстояние от $M(h)$ до C. Ясно, что

$$a'(0) + b'(0) + c'(0) = -(\frac{\overline{MC}}{|MC|} \cdot \overline{e} + \frac{\overline{MB}}{|MB|} \cdot \overline{e} + \frac{\overline{MA}}{|MA|} \cdot \overline{e}) = -\frac{\overline{MA}}{|MA|} \cdot \frac{\overline{MA}}{|MA|}.$$

Последнее равенство следует из того, что

$$\frac{\overline{MC}}{MC} + \frac{\overline{MB}}{MB} = 0, \quad \overline{e} = \frac{\overline{MA}}{|MA|}.$$

Так как производная меньше 0, то M — не точка Ферма. Значит, точка Ферма может лежать либо в вершине ABC, либо во внутренней точке треугольника.

Пусть точка Ферма M лежит в вершине A треугольника ABC. Если точка M будет двигаться по биссектрисе A, то

$$a'(0) + b'(0) + c'(0) = 1 - cos(\frac{A}{2}) - cos(\frac{A}{2}) = 1 - 2cos(\frac{A}{2}).$$

Если угол $A < 120^\circ$, то $cos(\frac{A}{2}) > 1/2$ и $a'(0) + b'(0) + c'(0) < 0$. Это значит, что в случае, когда M лежит в вершине треугольника с углом, меньшим 120°, то M не может быть точкой Ферма. Мы доказали фактически, что точка Ферма либо лежит в вершине треугольника ABC, если угол, соответствующий этой вершине, больше или равен 120°, либо является внутренней точкой треугольника. Если M — точка Ферма и является внутренней точкой, то для любой прямой l, проходящей через M с единичным вектором $\overline{e}$, коллинеарным прямой, получим:

$$a'(0) + b'(0) + c'(0) = -(\frac{\overline{MA}}{|MA|} + \frac{\overline{MB}}{|MB|} + \frac{\overline{MC}}{|MC|})\overline{e} = 0.$$

Это значит, что

$$\frac{\overline{MA}}{|MA} + \frac{\overline{MB}}{|MB|} + \frac{\overline{MC}}{|MC|} = 0,$$

т.е. M — точка Торричелли треугольника ABC.

Поворот на 120° около точки a комплексной плоскости задается формулой

$$f(x) = a + (x - a) \cdot e$$

где $e = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Заметим, что

$$|e + 1| = |\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}| = 1.$$

Пусть $M(m), N(n), Q(q)$ — точки комплексной плоскости — вершины треугольника MNQ: (M, N, Q — точки, а m, n, q — соответствующие им числа). Точки a, b, c — центры трех вращений на 120° таких, что первое переводит M в N, второе N — в Q и третье Q — в N. Тогда

$$n = a + (m - a)e = a + me - ae, \qquad q = b + (n - b)e = b + ae + me^2 - ae^2 - be,$$

$$m = c + (q - c)e = c + be + ae^2 + me^3 - ae^3 - be^2 - ce.$$

Так как $e^3 = 1$ то из полученных равенств следует

$$(c - a) + (b - c)e + (a - b)e^2 = 0 \tag{11}$$

Далее,

$$0 = (c - a) + (b - c)e + (a - b)e^2 - (c - a) + (b - c) + (a - b) =$$
$$= (b - c)(e - 1) + (a - b)(e^2 - 1) = (e - 1)((b - c) + (a - b)(e + 1)).$$

Так как $(e-1) \neq 0$, то $(b-c)+(a-b)(e+1) = 0$, значит (с учетом того, что $|e+1| = 1$) $|b-c| = |a-b|$. Аналогично доказывается, что $|c - a| = |b - c|$, то есть a, b, c — вершины правильного треугольника. Другие доказательства этого положения можно прочесть в ЗП(1.48), ЗП(14.42), ЗП(29.42).

Рассмотрим треугольник ABC, каждый угол которого меньше $120°$. Точки C', A', B' выберем так, что $\angle BC'A = \angle BA'C = \angle AB'C = 120°$ и треугольники $BC'A, BA'C, AB'C$ — равнобедренные, расположенные во внешнюю сторону от ABC. Ясно, что $C'A'B'$ — правильный треугольник, а шестиугольник $AC'BA'CB'$ — выпуклый, т.к. каждый его угол меньше $180°$.

Симметрия относительно $C'B'$ переводит точку A в некоторую точку M, которая при симметрии относительно $C'A$ попадет в точку B. Действительно, $\angle AC'B = 120°$, а две симметрии: сначала относительно прямой $C'B$, а потом относительно $C'A'$ — это поворот на удвоенный угол $B'C'A' = 60°$. Таким образом, точка M симметрична A относительно $C'B'$ и B относительно $C'A'$.

Аналогично, M симметрична C относительно $A'B'$. Ясно, что M лежит внутри $C'A'B'$ (почему?) и M — точка Торричелли треугольника ABC. Докажем (независимо от предыдущего), что M — точка Ферма треугольника ABC.

Действительно, положим $A'C' = C'B' = B'A' = a$

$$2S_{AD'CA'BC'} = 2S_{AC'MB'} + 2S_{B'MA'C} + 2S_{C'MA'B'} = (MA + MB + MC) \cdot a.$$

Мы воспользовались тем, что площадь четырехугольника с диагоналями a, b не превосходит $\frac{1}{2}ab$. При этом равенство достигается лишь в случае, когда диагонали перпендикулярны.

Таким образом, для любой точки N из шестиугольника $AC'BA'CB'$ имеем

$$S_{AC'BA'CB'} = S_{AB'MC'} + S_{B'CA'M} + S_{A'BC'M} = MB \cdot a + MC \cdot a + MA \cdot a =$$
$$= S_{AB'NC'} + S_{B'CA'N} + S_{A'BC'N} \leq a \cdot N;$$
$$a \cdot NA + a \cdot NB + a \cdot NC \geq S_{AB'NC'} + S_{B'CA'N} + S_{A'BC'N} =$$
$$= S_{AB'MC} + S_{B'CA'M} + S_{A'BC'M} = a \cdot MA + a \cdot MB + a \cdot MC.$$

То есть $NA + NB + NC \geq MA + MB + MC$.

Рассмотрим треугольник ABC с углом A, бо́льшим или равным $120°$. Докажем, что в этом случае точка Ферма совпадает с вершиной A. Рассмотрим равнобедренный треугольник DEF с основанием EF и таким, что

$$\angle D = 180° - \angle A.$$

На стороне EF возьмем точку A' такую, что

$$\frac{EA'}{A'F} = \frac{BA}{AC}.$$

Из точки A' опустим перпендикуляр $A'B'$ и $A'C'$ на стороны ED и FD соответственно. Ясно, что $\triangle_{ABC} \sim \triangle_{A'B'C'}$. Для завершения доказательства достаточно показать, что A' — точка Ферма треугольника $A'B'C'$.

Положим $b = EF$ и $a = DE = DF$. Так как $\angle D = 180^\circ - \angle A$ то $\angle D \le 60^\circ$, значит, $\angle E = \angle F \ge 60^\circ$ и $b \le a$.

Так как для любого треугольника ABC будет

$$4S_{ABC} = BC \cdot AH \le BC \cdot AK,$$

где $K \in BC$ — произвольна, а H — основание высоты из вершины A, то для любой точки N принадлежащей треугольнику $A'B'C'$ получим:

$$2S_{EDF} = A'B' \cdot a + A'C' \cdot a \le NB' \cdot a + NC' \cdot a + NA' \cdot a.$$

Следовательно,

$$A'B' + A'C' \le NA' + NB' + NC'.$$

Утверждение доказано.

Если плоскость движется по себе так, что две пересекающиеся прямые l и m этой плоскости все время проходят каждая через свою неподвижную точку, то любая прямая k, проходящая через общую точку прямых l и m, будет все время проходить через некоторую неподвижную точку.

Рассмотрим треугольник ABC с углами меньшими 120°. Пусть два из трех лучей l_1, l_2, l_3, а именно, l_1 и l_2, образующих между собой углы в 120° и пересекающиеся в одной точке, двигаются так, что l_1 и l_2 все время проходят через точки A и B. Значит, прямая, содержащая l_3, будет все время проходить через некоторую неподвижную точку. Ее легко найти.

Построим на AB во внешнюю сторону от ABC треугольник ABP. Ясно, что если l_1 проходит через A, l_2 — через B, то прямая, содержащая l_3, пройдет через P.

Если точка k — точка пересечения l_1 и l_2 — будет описывать дугу окружности $\breve{AB}$, не содержащую точки C, то прямая, содержащая l_3 будет все время проходить через точку P. Искомое расположение точки Торричелли можно найти, пересекая дугу $\breve{AB}$ с PA.

Напомним следующее известное утверждение.

Лемма (Шпернер, см. ЗП(23,7)) *Вершины треугольника помечены числами* $0, 1, 2$. *Треугольник разбили на конечное число треугольников, каждые два из которых либо не пересекаются, либо пересе каются по вершине, или целиком по стороне каждого их них. Затем вершины треугольников разбиения занумеруем. Вершинам треугольников разбиения, совпавшим с вершинами исходного треугольника, присвоим те номера, которые имели вершины исходного треугольника. Вершины треугольников разбиения, принадлежащие стороне исходного с вершинами* i, j $(i, j \in 0, 1, 2)$ *будут произвольно занумерованы числами* i *или* j. *Вершинам, лежащим внутри исходного треугольни ка, мы будем присваивать номера* $0, 1, 2$ *произвольно. Тогда обязательно найдется треугольник разбиения с вершинами* $0, 1, 2$.

Мы воспользуемся леммой Шпернера для доказательства существования точки Торричелли. Пусть треугольник с вершинами, помеченными числами $0, 1, 2$ таков, что $\angle 0 < 120^\circ$, $\angle 1 < 120^\circ$, $\angle 2 < 120^\circ$.

Разделим каждую сторону треугольника на n равных частей. Через каждую точку деления проведем две прямые, параллельные сторонам, не содержащим эту точку. Эти прямые разобьют треугольник на n^2 одинаковых треугольников. Укажем, как мы будем нумеровать вершины этих треугольников. Одно правило будет действовать всегда:

Вершине C может быть присвоен номер 0, если угол $\angle 1C2 \le 120^\circ$. (Здесь $1, 2$ — названия вершин исходного треугольника). Аналогично, если угол $\angle 0C2 \le 120^\circ$, то C можно присвоить номер 1 и если угол $\angle 0C1 \le 120^\circ$, то C можно присвоить номер 2. Номера вершин исходного треугольника менять не будем. Так как $\angle 210 < 120^\circ$, то найдется такая окрестность точки 1, что если M лежит в этой окрестности, то $\angle 2M0 < 120^\circ$.

Значит, есть окрестность точки 0 такая, что все вершины треугольников разбиения, попавшие в эту окрестность, будут занумерованы числом 0. Аналогично для вершин 1 и 2. Далее, если вершина треугольника разбиения C попала на сторону исходного треугольника (для определенности — на сторону 01), то один из углов $0C2, 1C2$ будет меньше 120°. Точке C можно присвоить номер 1, если угол $0C2 \leq 120^\circ$, номер 0, если угол $1C2 \leq 120^\circ$, а если каждый из углов не превосходит 120°, то выбор между 1 и 0 произволен. Все остальные точки нумеруются произвольно.

Из леммы Шпернера следует, что найдется один треугольник разбиения такой, что его вершины помечены числами $0, 1, 2$. Устремим n к бесконечности и для каждого N выберем треугольник разбиения с вершинами $0, 1, 2$. Последовательность таких треугольников сводится к некоторой точке M. Эта точка лежит в исходном треугольнике и не совпадает ни с одной из его вершин (Почему?). Ясно, что все стороны исходного треугольника видны из этой точки под углом меньшим или равным 120°.

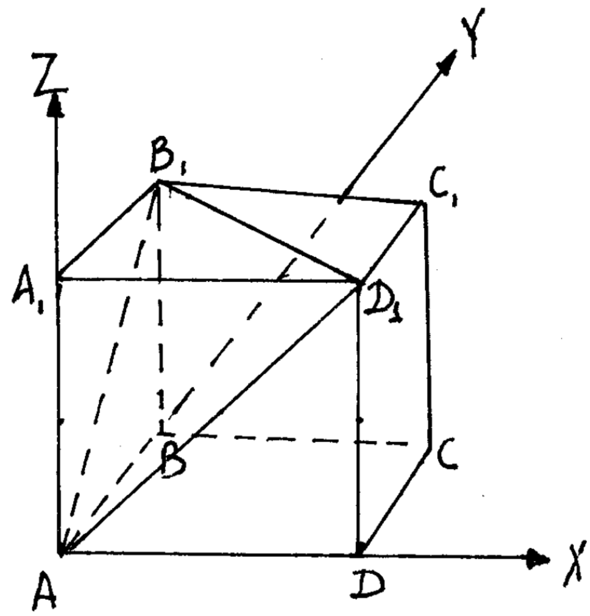
Так как сумма этих углов равна 360°, то M — точка Торричелли.

Угол между прямой и плоскостью

Для нахождения угла между прямой l и плоскостью α мы выбираем любой вектор $\overline{f}$, коллинеарный прямой l и вектор $\overline{g}$, ортогональный плоскости α. Если a — угол между прямой l и плоскостью α, то $\sin a = \frac{|\overline{f}\cdot\overline{g}|}{|\overline{f}|\cdot|\overline{g}|} = \cos b$, где b — угол между нормалью к плоскости α и прямой l.

Задача 1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 2$, $AD = AA_1 = 1$. Найдите угол между прямой A_1B_1 и плоскостью AB_1D_1.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$**.**



Решение. Разместим пареллелепипед так, что точка A совместится с началом координат; отрезки AD, AB и AA_1 пойдут соответственно по осям OX, OY, OZ. Тогда

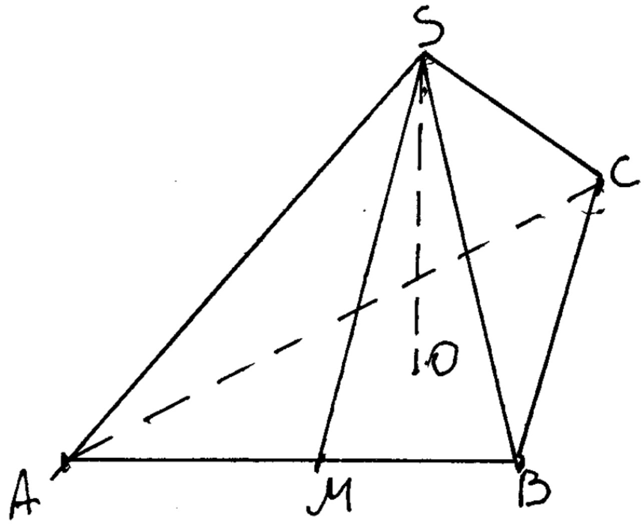
$$\overline{AD_1} = (1; 0; 1),$$

$$\overline{AB_1} = (0; 2; 1).$$

Ясно, что в качестве вектора $\overline{g}$, ортогонального плоскости AB_1D_1, можно взять вектор $(-2; -1; 2)$.
Положим $\overline{f} = \overline{A_1B_1} = (0; 2; 0)$. Тогда искомый угол φ равен $\arcsin\frac{|\overline{f}\cdot\overline{g}|}{|\overline{f}|\cdot|\overline{g}|} = \arcsin\frac{1}{3}$.
Значит, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1\cdot 3}{3\cdot\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Т.е., $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Задача 2. Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{5}{7}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью ее основания.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{6}}{24}$.

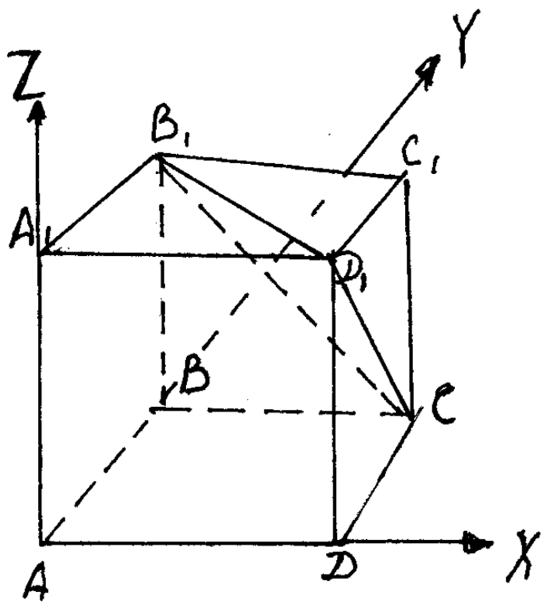


Решение. Без потери общности можно считать, что $SM = 1$; тогда $SO = \frac{5}{7}$, а $OM = \sqrt{1^2 - (\frac{5}{7})^2} = \frac{\sqrt{24}}{7}$. Кроме того, $OM = \frac{1}{2}AO$, значит, $AO = \frac{2\sqrt{24}}{7}$. Искомый угол — это $\angle SAO$.

Т.о., $\operatorname{tg}(\angle SAO) = \frac{5}{7} : \frac{2\sqrt{24}}{7} = \frac{5}{2\sqrt{24}} = \frac{5}{4\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{24}$. Значит, $\angle(SAO) = \operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{6}}{24}$.

Задача 3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AB и плоскостью CB_1D_1.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

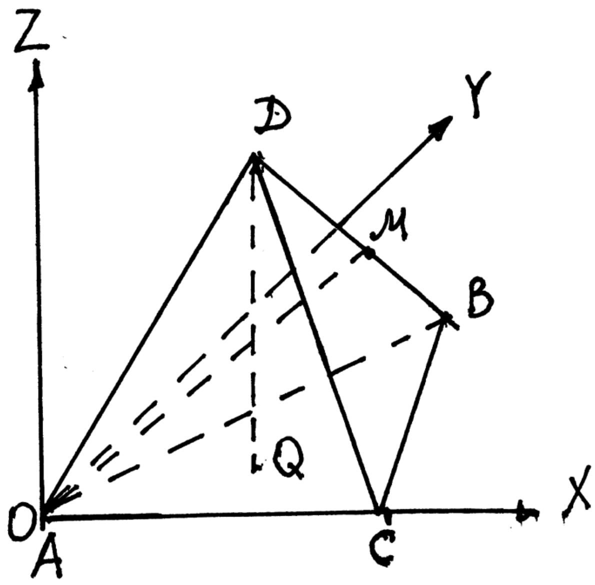


Решение. Без потери общности будем считать, что все ребра куба равны 1, точка A лежит в начале координат, точки D, B и A_1 лежат на осях OX, OY и OZ и имеют координаты $(1;0;0)$, $(0;1;0)$ и $(0;0;1)$ соответственно. Ясно, что плоскость CB_1D_1 перпендикулярна прямой AC_1, т.к. проекция AC_1 на грань $A_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна диагонали B_1D_1 этой грани. Аналогично проекция AC_1 на грань DD_1C_1C перпендикулярна диагонали D_1C этой грани. Значит, прямая AC_1 перпендикулярна пересекающимся прямым B_1D_1 и D_1C плоскости CB_1D_1, т.е., $AC_1 \perp CB_1D_1$.

Если φ — искомый угол, то $\sin\varphi = \frac{|(1;1;1)\cdot(1;0;0)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 4. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка M — середина ребра BD. Найдите угол между прямой AM и плоскостью ABC.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$.



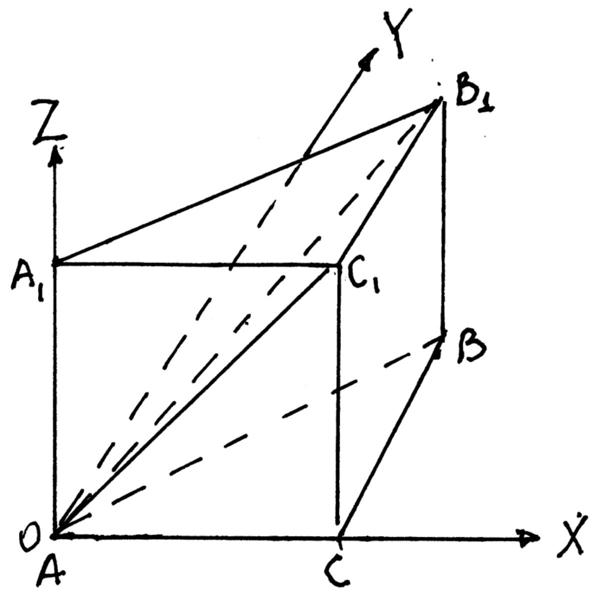
Решение. Будем считать, что все ребра тетраэдра равны 1. Расположим тетраэдр так, что точка A совпадет с началом координат, вершины A, B, C расположатся в плоскости XOY, а точка C окажется на оси OX с координатой $(1;0;0)$. Обозначим через Q проекцию точки D на плоскость XOY.

Тогда $Q = (\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}; 0)$, $QD = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\overline{AM} = (\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{QD}{2}) = (\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}})$.

Вектор $(0;0;1)$ перпендикулярен плоскости ABC. Поэтому $\sin\varphi$, где φ — угол между прямой AM и плоскостью DBC, равен $\frac{|\overline{AM}\cdot(0;0;1)|}{|\overline{AM}|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \quad / \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{2}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Задача 5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой имеют одинаковую длину, найдите угол между прямой BB_1 и плоскостью AB_1C_1.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Решение. Будем считать, что все ребра призмы равны 1. Расположим призму так, что точки A, B, C лежат в плоскости XOY, точка A совпадает с началом координат, точки C, C_1 имеют координаты $(1;0;0)$ и $(1;0;1)$ соответственно. Имеем:

$$\overline{AC_1} = (1;0;1),$$

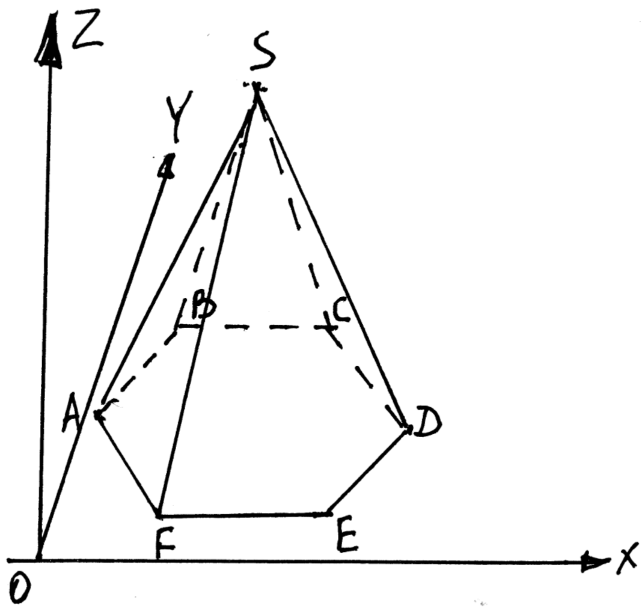
$$\overline{C_1B_1} = (-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0).$$

В качестве вектора $\overline{g}$, перпендикулярного плоскости AB_1C_1, возьмем вектор $(2;\frac{2}{\sqrt{3}};-2)$. Вектор $\overline{BB_1} = (0;0;1)$.

Если φ — искомый угол, то $\sin\varphi = \frac{|(2;\frac{2}{\sqrt{3}};-2)(0;0;1)|}{|(2;\frac{2}{\sqrt{3}};-2)|} = \frac{2}{\sqrt{4+\frac{4}{3}+4}}$. $\varphi = \arcsin\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, или $\varphi = \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}/\frac{2}{\sqrt{7}}) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямой BC и плоскостью SAF.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.



Решение. Расположим пирамиду так, чтобы основание $ABCDEF$ лежало в плоскости XOY, прямая FE была параллельна оси OX, а S имела положительную координату S_z. Тогда

$$\overline{AS} = (1; 0; \sqrt{4-1}) = (1; 0; \sqrt{3}),$$

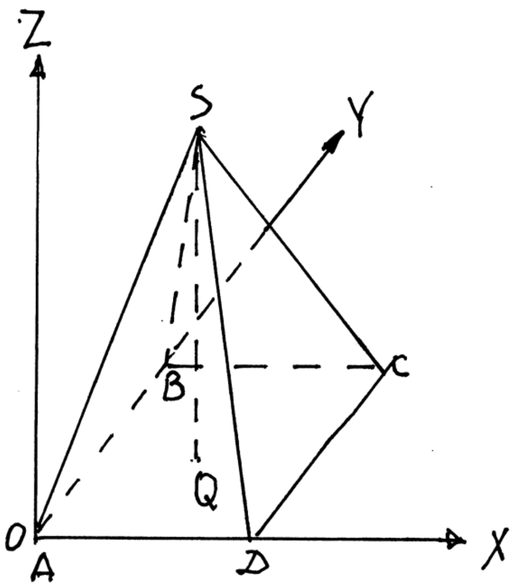
$$\overline{AF} = (\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0).$$

В качестве вектора $\overline{g}$, ортогонального плоскости SAF возьмем вектор $(\sqrt{3}; 1; -1)$.

Угол φ между плоскостью SAF и $\overline{BC}$ равен $\arcsin \frac{|(\sqrt{3};1;-1)(1;0;0)|}{\sqrt{3+1+1}} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Задача 7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S известно, что все ребра имеют одинаковую длину. Найдите угол между прямой BD и плоскостью SBC.

Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Решение. Будем считать, что все ребра пирамиды равны 1. Расположим пирамиду так, что точки A, B, C, D лежат в плоскости XOY, точка A совпадает с началом координат, AD идет по оси OX, AB — по оси OY.

Если Q — проекция точки S на плоскость $ABCD$, то $QS = \sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; вектор $\overline{BS} = (\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$, вектор $\overline{BC} = (1; 0; 0)$.

В качестве вектора $\overline{g}$, ортогонального плоскости SBC, возьмем $(0; \sqrt{2}; 1)$. Вектор $\overline{BD} = (1; -1; 0)$.

Если φ — угол между прямой BD и плоскостью SBC, то $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Алгебра и математический анализ

Большинство материалов датировано автором и расположено в хронологическом порядке.

Кривая Пеано. 31.08.2013

Мы хотим построить непрерывное отображение отрезка $I = [0;1]$ на квадрат $K = \{(x;y) : x \in [0;1],\ y \in [0;1]\}$. Для этого разобьем I на 4^n равных между собой отрезка, а K — на 4^n равных квадрата со сторонами, параллельными соответствующим сторонам квадрата K. Полученные отрезки назовем *отрезками n-го уровня*, а квадраты — *квадратами n-го уровня*. Отрезки n-го уровня пронумеруем слева направо и присвоим названия I_1^n, $I_2^n, \ldots, I_{4^n}^n$. Здесь верхний индекс указывает номер уровня, нижний — порядковый номер отрезка, присвоенный при нумерации. Два различных отрезка n-го уровня назовем *соседними*, если они имеют непустое пересечение. Аналогично два различных квадрата n-го уровня назовем *соседними*, если у них есть общая сторона. Так как количество отрезков и квадратов n-го уровня одинаково, мы можем установить между ними биективное соответствие (причем многими разными способами). Квадрат, соответствующий отрезку I_m^n, обозначим через K_m^n. При этом выбранное нами биективное отображение (или, что то же самое, нумерация квадратов) должно обладать следующими двумя свойствами:

1. Свойство сохранения соседей.

Это значит, что квадраты K_l^n и K_{l+1}^n — соседние для любых натуральных n и $1 \le l < 4^n$. (Так же как и отрезки I_l^n и I_{l+1}^n).

2. Свойство вложенности.

Это значит, что если $I_p^{n+1} \subset I_q^n$, то $K_p^{n+1} \subset K_q^n$.

Лемма 1. *Существует такая нумерация квадратов всех уровней, для которой выполняются условия 1 и 2.*

В дальнейшем мы будем предполагать, что квадраты всех уровней занумерованы в соответствии с утверждением леммы 1.

Лемма 2. *Для любой точки $x \in [0;1]$ можно указать вложенную стягивающуюся последовательность отрезков $I_{p_1}^1 \supset I_{p_2}^2 \supset \cdots \supset I_{p_m}^m \supset \cdots$ такую, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_{p_n}^n = \{x\}$.*

Лемма 3. *Если $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_{p_n}^n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_{q_n}^n = \{x\}$, то одноточечное множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_{p_n}^n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_{q_n}^n$.*

Используя леммы 2 и 3 каждой точке $x \in [0;1]$ такой, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_{p_n}^n = \{x\}$, поставим в соответствие точку $M(x)$ такую, что $\{M(x)\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_{p_n}^n$. Мы таким образом построили отображение $\varphi : I \to K$, где $\varphi(x) = M(x) \in K$. Так как $M(x)$ — точка плоскости, то обозначив ее первую (X-овую) координату через $f_1(x)$, а вторую (Y-овую) через $f_2(x)$, получим $\varphi(x) = (f_1(x); f_2(x))$.

Лемма 4. *Отображение $M : I \to K$, так же как и обе функции $f_1 : I \to \mathbb{R}$, $f_2 : I \to \mathbb{R}$ непрерывны.*

Лемма 5. *Множество $M(I)$ всюду плотно в K. Аналогично множество $M(I_m^n)$ всюду плотно в K_m^n для любого n и $1 \le m \le 4^n$.*

Лемма 6. $M(I) = K$ и $M(I_p^n) = K_p^n$ *для любого n и $1 \le p \le 4^n$.*

Лемма 7. *Для любого натурального n и $x \in [0;1]$ для функции f_1 найдется $h \neq 0$, $|h| < \dfrac{1}{n}$ такое, что $\left|\dfrac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h}\right| > n$.*

Лемма 8. *Для любого $x \in [0;1]$ в любой окрестности точки x найдется точка x_1 такая, что $f_1(x) = f_1(x_1)$.*

Немного про компактность. 19.09.2013

Подпоследовательность.

Последовательностью элементов метрического пространства E назовем функцию, отображающую множество N натуральных чисел в E. Элемент метрического пространства E, соответствующий числу $n \in N$ обозначим через a_n и назовем *n-ым членом последовательности.* Последовательность $a_1, a_2, a_3, ...a_n, ...$ будем обозначать через $\{a_n\}$.

Последовательность $\{b_n\}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$, если каждый член b_n входит в последовательность $\{a_n\}$, т.е. $b_1 = a_{n_1}$, $b_2 = a_{n_2}, ..., b_k = a_{n_k}$, причем если $i < j$, то $a_{n_i} < b_{n_j}$.

Другими словами, подпоследовательность — это часть членов исходной последовательности, пронумерованная в порядке возрастания номеров этих членов в исходной последовательности.

Определение. 1) Метрическое пространство называется *компактным*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

2) Метрическое пространство называется *секвенциально компактным*, если любая последовательность его элементов имеет *предельную точку* (т.е. точку, в любой окрестности которой содержится бесконечно много элементов последовательности).

Теорема 1. *Компактное пространство E является секвенциально компактным.*

Доказательство. (От противного). Если предположить, что это не так, то найдется последовательность $\{a_n\}$ элементов множества E, которая не будет иметь предельных точек. Это значит, что для каждой точки $x \in E$ найдется число $r_x > 0$ такое, что окрестность Q_{x,r_x} точки x содержит лишь конечное число элементов последовательности $\{a_n\}$. Семейство открытых шаров $\{Q_{x,r_x}\}$ является покрытием компактного пространства E. Выделим из этого покрытия конечный набор шаров: $Q_{x_1,r_{x_1}}, ...Q_{x_n,r_{x_n}}$, покрывающий E. Каждый из этих шаров $Q_{x_i,r_{x_i}} (i = 1, ..., n)$ содержит конечное число членов последовательности $\{a_n\}$. Значит, множество всех натуральных чисел конечно. Противоречие.

Теорема 2. *Секвенциально компактное метрическое пространство E компактно.*

Доказательство. Пусть набор открытых множеств $\{Q_\alpha\}$ покрывает пространство E. Возьмем произвольную точку $x \in E$. Она войдет в одно из открытых Q_{α_i}, покрывающих E. Значит, существует некоторое $r > 0$ такое, что $Q_{x,r} \subset Q_\alpha$. Но в этом случае найдется такое натуральное число n, что $Q_{x,\frac{1}{n}} \subset Q_\alpha$.

Мы доказали, что для каждой точки $x \in E$ найдется такое натуральное число n, что окрестность $Q_{x,\frac{1}{n}}$ будет целиком лежать в одном из открытых множеств, покрывающих E.

Теперь поступим следующим образом. Для каждой точки $x \in E$ найдем такое минимальное натуральное n, что окрестность точки x радиуса $\frac{1}{n}$ лежит целиком в одном из элементов покрытия множества E. Мы таким образом определили функцию $f : E \to \mathbb{N}$, отображающую пространство E в множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Покажем, что эта функция ограничена. Т.е. найдется такое натуральное k, что $f(x) < k$ для любого $x \in E$.

Действительно, если предположить, что это не так, то мы выберем элементы $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ пространства E такие, что $f(x_n) \geq n$ для любого натурального n. (Эту последовательность легко построить по индукции). Так как E секвенциально компактно, то последовательность $\{x_n\}$ имеет предельную точку, которую обозначим через x.

Пусть $f(x) = m$. Тогда окрестность $Q_{x,\frac{1}{m}} \subset Q_\alpha$ для некоторого α (напомним, что $Q_{x,\frac{1}{m}}$ лежит целиком в одном из открытых, покрывающих E). Рассмотрим окрестность $Q_{x,\frac{1}{2m}}$. Ясно, что для любой точки $y \in Q_{x,\frac{1}{2m}}$ окрестность $Q_{y,\frac{1}{2m}} \subset Q_{x,\frac{1}{m}} \subset Q_\alpha$. Действительно, для любой точки $z \in Q_{y,\frac{1}{2m}}$, будет $\rho(z,y) < \frac{1}{2m}$ и т.к. $y \in Q_{x,\frac{1}{2m}}$, то $\rho(x,y) < \frac{1}{2m}$. Значит $\rho(z,x) \in \frac{1}{m}$. Т.е. $z \in Q_{x,\frac{1}{m}}$. Таким образом, если $y \in Q_{x,\frac{1}{2m}}$, то

$$f(y) \leq 2m. \tag{1}$$

Но точка x — предельная точка последовательности $\{x_n\}$. Значит, окрестность $Q_{x,\frac{1}{2m}}$ будет содержать бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, т.е. в $Q_{x,\frac{1}{2m}}$ найдутся члены последовательности x_n с номерами большими $2m$. Если $x_k \in Q_{x,\frac{1}{2m}}$, и $k > 2m$, то $f(x_k) \geq k > 2m$, а из (1) следует, что $f(x_k) \leq 2m$.

Мы видим, что построенная нами функция оказалась ограниченной. Т.е., $f(x) < k$ для некоторого k и всех $x \in E$. Следовательно, для любой точки $x \in E$ окрестность $Q_{x,\frac{1}{k}}$ целиком лежит в одном из открытых Q_α, покрывающих E.

Итак, мы доказали, что для покрытия $\{Q_\alpha\}$ секвенциально компактного пространства E существует такое число $l > 0$ такое, что для любой точки $x \in E$ шар $Q_{x,l}$ целиком лежит в одном из открытых множеств $Q_\alpha \in \{Q_\alpha\}$. Это же верно для компактного пространства ввиду теоремы 1. В нашем случае роль l играет $\frac{1}{k}$. Такое число называют *числом Лебега покрытия* Q_α пространства E.

Теперь по индукции построим последовательность $\{a_n\}$. Первый член выберем произвольно. Если уже определены члены $a_1, ..., a_m$, то либо шары $Q_{a_{i,l}}$ $(i = 1, ..., m)$ покрывают E, либо есть точки пространства E, не лежащие в объединении шаров $Q_{a_{1,l}}, ..., Q_{a_m,l}$. Любую из этих точек возьмем в качестве a_{m+1}. Ясно, что процесс построения рано или поздно прервется. Иначе мы построим бесконечную последовательность $\{a_n\}$ такую, что расстояние между любыми различными членами этой последовательности не меньше $l > 0$. Но такая последовательность не имеет предельных точек, что противоречит секвенциальной компактности E.

Итак, выбор элементов по указанному нами правилу в любом случае оборвется. Если при этом мы определим m членов $a_1, ..., a_m$, то

$$\bigcup_{i=n}^{m} Q_{a_{i,l}} = E.$$

Каждое из $Q_{a_{i,l}}$ лежит в некотором открытом из семейства открытых множеств $\{Q_\alpha\}$. Выбрав для каждого из m множеств $Q_{a_{1,l}}, ..., Q_{a_{m,l}}$ элемент из $\{Q_\alpha\}$, его содержащий, получим конечный набор открытых покрывающий пространство E. Теорема доказана.

Действительные числа. 17.09.2014

Рассмотрим множество R, на котором определены две операции: *сложение*, которое каждой паре элементов $a, b \in R$ ставит в соответствие элемент $c = a + b$, $c \in R$, и *умножение*, которое каждой паре a, b ставит в соответствие элемент $d = a \cdot b$, $d \in R$. Элемент c называют *суммой*, а элемент d — *произведением* элементов a и b. При этом выполняются следующие условия (аксиомы):

1. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения).
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения).
3. Существует такой элемент $0 \in R$, что $a + 0 = a$ для любого элемента $a \in R$ (существование нуля).
4. Для любого $a \in R$ существует элемент $-a \in R$ такой, что $a + (-a) = 0$ (существование противоположного элемента).
5. $a \cdot b = b \cdot a$ для любых $a, b \in R$ (коммутативность умножения).
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для любых $a, b \in R$ (ассоциативность умножения).
7. Существует такой элемент $1 \in R$, что $1 \neq 0$ и $a \cdot 1 = a$ для любого $a \in R$ (существование единицы).
8. Для любого $a \in R$, $a \neq 0$ существует такой элемент $a^{-1} \in R$, что $a \cdot a^{-1} = 1$ (существование обратного элемента).

9. $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ (закон дистрибутивности).

Множество R, на котором выполняются аксиомы $1-9$, называют *полем*. Соответственно, аксиомы $1-9$ называются *аксиомами поля*.

Кроме того, на множестве R определен *порядок*. Порядок на множестве R задается набором следующих аксиом:

10. Для любых двух элементов $a, b \in R$ выполняется одно и только одно из соотношений : либо $a = b$, либо $a < b$, либо $b < a$.

11. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (транзитивность).

12. Если $a, b, c \in R$ и $a > b$, то $a + c > b + c$.

13. Если $a, b \in R$ и $a > 0$, $b > 0$, то $a \cdot b > 0$.

Аксиомы $10-13$ называют *аксиомами порядка*.

Записи $a < b$ и $b > a$ эквивалентны. В случае $a < b$ говорят: "a меньше b" или "b больше a". Будем писать $a \le b$, если либо $a < b$, либо $a = b$. Запись $a \le b$ эквивалентна записи $b \ge a$. В случае $a \le b$ говорят "a меньше или равно b" или "a не превосходит b" или "a не больше b". В случае $a \ge b$ говорят "a больше или равно b", или "a не меньше b".

Множество действительных чисел A называют *ограниченным сверху (снизу)*, если существует такое число c, что для любого $a \in A$ будет $a \le c$ ($a \ge c$). В этом случае c называют *верхней (нижней) границей множества A*.

Множество A называют *ограниченным*, если A ограничено и сверху и снизу.

Верхней гранью[1] ограниченного сверху непустого множества A называют число c, которое является верхней границей множества A, а любое число $c' < c$ уже не является верхней границей A. При этом пишут $c = \sup A$. Аналогично, *нижней гранью*[2] ограниченного снизу непустого множества A называют число c, которое является нижней границей множества A, а любое число $c' > c$ уже не будет нижней границей множества A. В этом случае пишут $c = \inf A$. Легко видеть, что $\sup A$ — это наименьшая из верхних границ множества A, аналогично $\inf A$ — это наибольшая из нижних границ множества A.

Будем писать $A < B$ в том случае, когда для любых $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a < b$. Аналогично пишут $A \le B$, если для любых $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \le b$. Если $a \in A$ и $a \ge A$, то a называют *максимальным элементом* множества A и пишут $a = \max A$. Если же $a \in A$ и $a \le A$, то a называют *минимальным элементом* множества A и пишут $a = \min A$.

Будем писать $A < b$ ($A \le b$), если для любого $a \in A$ выполняется неравенство $a < b$ ($a \le b$). Аналогично будем писать $A > b$ ($A \ge b$), если для любого $a \in A$ выполняется неравенство $a > b$ ($a \ge b$).

Задача 1. Докажите, что множество A ограничено тогда и только тогда, когда найдется такое $c > 0$, что для любого $a \in A$ верно неравенство $|a| < c$.

Все эти аксиомы известны из школьного курса. И только в конце 19 века были открыты новые свойства действительных чисел. Это было сделано сразу несколькими учеными: Вейерштрассом, Кантором и Дедекиндом. Эти свойства формулируются в виде одной или двух аксиом, называемых *аксиомами полноты*.

14. Пусть A — непустое, ограниченное сверху множество. Тогда A обладает верхней гранью. (Аксиома полноты).

Множество R, для которого верны аксиомы $1-14$, называют *множеством действительных или вещественных чисел*, для него общепринято обозначение $\mathbb{R}$; соответственно элементы множества $\mathbb{R}$ называют *действительными или вещественными числами*.

Приступим к изучению некоторых простых свойств множества действительных чисел.

---

[1] В литературе часто верхнюю границу называют верхней гранью, а верхнюю грань — точной верхней гранью.

[2] Аналогичное примечание относительно нижней границы и грани.

Задача 2. Для любых действительных чисел a, b уравнение $a + x = b$ имеет одно и только одно решение.

Указание. Ясно, что $(-a) + b$ является решением нашего уравнения. С другой стороны, если к обеим частям этого уравнения прибавить $-a$, то получим равенство $x = (-a) + b$.

Задача 3. Докажите, что если $a \neq 0$, то для любого b существует одно и только одно действительное число x такое, что $a \cdot x = b$. При этом $x = a^{-1} \cdot b$.

Задача 4. Докажите, что число 0 единственно, т.е., если $a + c = a$, то $c = 0$.

Задача 5. Докажите, что действительное число, противоположное a равно $-a$. Т.е. если $a+c = 0$, то $c = -a$.

Задача 6. Докажите, что если $a \cdot b = 1$ и $a \neq 0$ то $b = a^{-1}$.

Задача 7. Докажите, что если $a \cdot b = a$ и $a \neq 0$ то $b = 1$.

Задача 8. Докажите, что $a \cdot 0 = 0$.
Указание. $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0$.

Задача 9. Докажите, что $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.
Указание. $(-a) \cdot b + a \cdot b = ((-a) + a) \cdot b = 0$.

Задача 10. Докажите, что $-(-a) = a$.

Задача 11. Докажите, что если $a < 0$, то $0 < -a$.
Указание. Прибавим число $-a$ к обеим частям равенства $a < 0$.

Задача 12. Докажите, что для любого действительного числа a справедливо неравенство $a^2 \geq 0$
.

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *индуктивным*, если $1 \in E$, и если $a \in E$, то $a + 1 \in E$.

Задача 13. Докажите, что в множестве R существует минимальное индуктивное множество .

Мы обозначим минимальное индуктивное подмножество множества действительных чисел через $\mathbb{N}$.

Задача 14. Докажите, что если N' — подмножество $\mathbb{N}$, причем $1 \in N'$ и если $a \in N'$, то $a+1 \in N'$, то $N' = \mathbb{N}$. (Принцип математической индукции).

Задача 15. Я ее пропускаю и даю вам передохнуть.

Можно из аксиом $1 - 14$ получить все свойства действительных, натуральных и рациональных чисел. Чего нам будет не хватать? Не ясно, существует ли такое множество $\mathbb{R}$, с аксиомами $1-14$. Что надо для доказательства существования? Надо построить *модель* множества $\mathbb{R}$, где выполняются все аксиомы $1-14$. Мы попробуем это сделать, предполагая, что читатель знает, что такое натуральные числа, целые и рациональные числа. (Напомним здесь обозначения: $\mathbb{N}$ — множество натуральных, $\mathbb{Z}$ — целых, $\mathbb{Q}$ — рациональных чисел). Почему для математики недостаточно иметь эти числовые системы? Традиционный ответ такой. В множестве $\mathbb{N}$ не любые числа можно вычитать, в множестве $\mathbb{Z}$ уже выполняется операция вычитания, но не выполняется операция деления для произвольных чисел из $\mathbb{Z}$. И наконец, в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ уравнение $x^2 = 2$ не имеет решения.

Задача 16. Докажите, что уравнение $x^2 = 2$ не имеет решения в множестве рациональных чисел.

Указание. Пусть дробь $(\frac{p}{q})^2 = 2$. При этом q — натуральное, а p — целое. Так как $p \neq 0$, и $p > 0$, то p также натуральное. Кроме того, так как $p^2 = 2q^2$, то при разложении на простые сомножители число 2 входит в p^2 в четной степени, а в $2q^2$ — в нечетной.

Задача 17. Покажите, что не каждое ограниченое сверху подмножество рациональных чисел Q обладает верхней гранью, принадлежащей Q.

Указание. Рассмотрим множество $B = \{x :\in Q,\ x > 0,\ x^2 < 2\}$. Если $c \in Q$ и $c = \sup B$, то так как $c^2 \neq 2$ (см.задачу 16), то либо $c^2 < 2$, либо $c^2 > 2$. Так как $1,5^2 = 2,25 > 2$, то $c \leq 1,5$. Рассмотрим отдельно каждый из возможных случаев.

Пусть $c^2 < 2$.

Рассмотрим рациональное число ε, удовлетворяющее условиям: $\varepsilon \in (0;1)$, $\varepsilon < \dfrac{2-c^2}{4}$. Ясно, что $(c+\varepsilon)^2 = c^2+2c\varepsilon+\varepsilon^2 \leq c^2+3\varepsilon+\varepsilon^2 < c^2+4\varepsilon < c^2+4\dfrac{2-c^2}{4} < 2$. Т.е., $c+\varepsilon^2 < 2$. Так как $0 < c+\varepsilon \in Q$, то $c+\varepsilon \in B$. Значит, $c \neq \sup B$.

Пусть $c^2 > 2$.

Рассмотрим рациональное число ε, удовлетворяющее условиям: $\varepsilon \in (0;1)$, $\varepsilon < \dfrac{c^2-2}{3}$, $\varepsilon < c$. Тогда $(c-\varepsilon)^2 = c^2 - 2c\varepsilon + \varepsilon^2 > c^2 - 3\varepsilon + \varepsilon^2 > c^2 - 3\varepsilon = c^2 + 3\dfrac{c^2-2}{3} = 2$.

Значит, $(c-\varepsilon)^2 > 2$. Так как по условию $c - \varepsilon > 0$ и $c - \varepsilon \geq B$, то $c \neq \sup B$.

(Мы воспользовались тем, что $\sup B$ — наименьшая из верхних границ множества B.)

Задача 18. Докажите, что если A не пусто и ограничено снизу, то A обладает нижней гранью.

Указание. Пусть A' — множество всех нижних границ непустого множества A. Тогда A содержится в множестве верхних границ A'. Значит, $A' \leq \sup A' \leq A$. (Мы воспользовались тем фактом, что $\sup A'$ — это минимальная из всех верхних границ множества A'.)

Задача 19. Если $A \leq B$ — два непустых подмножества множества действительных чисел, то найдется число c такое, что $A \leq c \leq B$. Докажите.

Указание. Докажите, что в качестве c можно взять $\sup A$.

Задача 20 (теорема Кантора). Пусть $R \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots$ последовательность отрезков таких, что $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n$. (Такую последовательность называют вложенной последовательностью отрезков). Тогда найдется точка c, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности.

Указание. Пусть $\Delta_n = [a_n; b_n]$. Положим $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Ясно, что $A < B$. Действительно: $a_n \leq a_m < b_m$ для всех $n \leq m$; $a_n < b_n \leq b_m$ для всех $n \geq m$. Т.е., $a_n < b_m$ для любых m и n. Далее легко видеть, что в качестве c можно взять $\sup\{a_n\}$.

Задача 21 (теорема Архимеда). Докажите, что для любых положительных действительных чисел a, b найдется такое натуральное n, что $na \geq b$.

Указание. Пусть (от противного) $na \leq b$ для любого натурального n. Значит, множество $A = \{a, 2a, 3a, \ldots\}$ ограничено. Но тогда если $c = \sup A$, то $na \leq c$ для $n = 1, 2, \ldots$. В то же время найдется натуральное m такое, что $ma > c - a$. Следовательно, $(m+1)a > c$.

Задача 22. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное n, что $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Указание. Из теоремы Архимеда следует, что $n\varepsilon > 1$ для некоторого натурального n. Следовательно, умножив обе части нашего неравенства на n^{-1}, получим $\varepsilon > \dfrac{1}{n}$.

Задача 23. Докажите, что для любого $a > 0$ и натурального $n > 1$ найдется такое $b > 0$, что $b^n = a$.

Указание. Отметим, что случай $n = 1$ тривиален. Поэтому считаем $n > 1$. Число b такое, что $b^n = a$ и $b > 0$ называется *арифметическим корнем степени n из числа a* и обозначается через $\sqrt[n]{a}$ или $a^{\frac{1}{n}}$. Нам достаточно доказать существование корня n-й степени для числа $a \in (0;1)$. Действительно, пусть a — произвольное положительное число. Возьмем натуральное $k > a$. Тогда $\dfrac{a}{k^n} \in (0;1)$ и если $c = \sqrt[n]{\dfrac{a}{k^n}}$, то $(ck)^n = a$.

Итак, докажем существование корня n-й степени из числа $a \in (0;1)$. Сначала докажем вспомогательное неравенство: если $0 \leq a \leq b \leq 1$, то $0 \leq b^n - a^n \leq n(b-a)$.

Действительно, $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + ba^{n-1} + a^{n-1} \le (b-a)\cdot n \cdot b^n \le (b-a)n$.

Положим $B = \{x : x > 0, x^n < a\}$. Пусть нет такого числа d, что $d^n = a$. Поэтому если $c = \sup B$, то $c^n \neq a$. Т.е., либо $c^n < a$, либо $c^n > a$. Покажем, что $c < 1$. Действительно, $1^n - (1 - \dfrac{1-a}{n})^n \le n\dfrac{1-a}{n} = 1 - a$, т.е., $(1 - \dfrac{1-a}{n})^n > a$. Значит, $B < 1 - \dfrac{1-a}{n}$, т.е., $1 - \dfrac{1-a}{n} \ge c$. Итак, $c < 1$.

Рассмотрим случай $c^n < a$. Так как $c < 1$, то найдется число ε такое, что $\varepsilon > 0$, $c + \varepsilon < 1$, $\varepsilon < \dfrac{a - c^n}{n}$. Но тогда $(c+\varepsilon)^n - c^n < \varepsilon n < \dfrac{a-c^n}{n} \cdot n = a - c^n$, т.е., $(c+\varepsilon)^n < a$. Значит, $c \neq \sup B$.

Рассмотрим случай $c^n > a$. Возьмем такое число ε, что $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < c$, $\varepsilon < \dfrac{c^n - a}{n}$. Тогда $c^n - (c-\varepsilon)^n < n\varepsilon < c^n - a$. Следовательно, $a < (c-\varepsilon)^n$, т.е., $B < c - \varepsilon$, значит, и в случае когда $c^n > a$, $c \neq \sup B$.

Задача 24. Докажите, что если для любой точки отрезка $[a;b] = \{x :\in R, a \le x \le b\}$ найдется интервал Q из системы интервалов $A = \{(a_\alpha; b_\alpha)\}$, где $(a_\alpha; b_\alpha) = \{x : x \in R, a_\alpha < x < b_\alpha\}$ такой, что $x \in Q$, то можно выделить некоторое конечное подмножество I множества интервалов A такое, что для каждой точки $x \in [a;b]$ найдется интервал из I, содержащий эту точку x.

Построение действительных чисел.

Функцию $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, отображающую множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ в множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, называют *последовательностью рациональных чисел.* Если мы будем использовать термин "последовательность", то подразумевается, что мы говорим (если не оговорено иное) о последовательности рациональных чисел. Величину $a(n)$ будем обозначать через a_n. Для обозначения последовательности будем писать a, $a = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ или $a = \{a_n\}$. Будем говорить, что последовательность a удовлетворяет *условию Коши* (или, что a — *фундаментальная последовательность*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N, что для любых $l, m > N$ выполняется неравенство

$$|a_m - a_l| < \varepsilon \tag{1}$$

Скажем, что последовательность $\{a_n\}$ *проскакивает в отрезок* $[c;d]$ ($c, d \in Q$, $c < d$), если существует такое натуральное N, что для всех $m > N$ будет $a_m \in [c;d]$.

Задача 1. Последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ последовательность $\{a_n\}$ проскакивает в некоторый отрезок, длина которого не больше ε.

Скажем, что последовательность $\{a_n\}$ *часто встречается с отрезком* $[c;d]$, если бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$ лежат в отрезке $[c;d]$.

Задача 2. Последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ $\{a_n\}$ часто встречается с некоторым отрезком $[c;d]$, длина которого не больше ε.

Будем говорить, что последовательность $\{a_n\}$ *стремится к нулю*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N (зависящее от ε), что $|a_n| < \varepsilon$ если $n > N$. В этом случае пишут $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ или $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Задача 3. Докажите, что если $\{a_n\} \to 0$ при $n \to \infty$, то $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность.

Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — последовательности Коши. Скажем, что $\{a_n\}$ *эквивалентна* $\{b_n\}$, если $a_n - b_n \to 0$ при $n \to \infty$. При этом пишут $\{a_n\} \sim \{b_n\}$. Запись $\{a_n\} \nsim \{b_n\}$ означает, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ не эквивалентны.

Задача 4. Докажите, что если $a = \{a_n\}$ — последовательность Коши, то множество значений всех ее членов ограничено. Т.е. $|a_n| < c$ для всех n и некоторого положительного числа c.

Задача 5. Докажите, что если a — фундаментальная последовательность, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется отрезок $[c;d]$, длина которого не превосходит ε и с которым последовательность a часто встречается.

Указание. Воспользуйтесь тем, что фундаментальная последовательность ограничена.

Задача 6. Докажите, что если a — фундаментальная последовательность, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется отрезок $[c; d]$, длина которого не превосходит ε и последовательность a проскакивает в $[c; d]$.

Задача 7. Докажите, что две фундаментальные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ эквивалентны, если для любого $\varepsilon > 0$ существует отрезок $[c; d]$, длина которого не больше ε, в который проскакивают обе последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

Задача 8. Докажите, что две фундаментальные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ эквивалентны, если для любого $\varepsilon > 0$ существует отрезок $[c; d]$, длина которого не больше ε, с которым часто встречается каждая из последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

Задача 9. Пусть фундаментальная последовательность a проскакивает в каждый из отрезков $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, а фундаментальная последовательность b проскакивает в каждый из отрезков $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$. Длина отрезков α_n, β_n не превосходит $\dfrac{1}{2n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Докажите следующие утверждения:

Если для любого натурального n пересечение $\alpha_n \cap \beta_n \neq 0$, то $a \sim b$. Если же найдется такое n, что $\alpha_n \cap \beta_n = 0$, то если $\alpha_n > \beta_n$, то $a > b$, а если $\alpha_n < \beta_n$, то $a < b$.

Задача 10. Докажите, что если $a = \{a_n\}$ — последовательность Коши, то последовательность $-a = \{-a_n\}$ — тоже последовательность Коши

Теорема. Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности Коши, то возможно ровно одно из соотношений: $\{a_n\} \backsim \{b_n\}$, $\{a_n\} > \{b_n\}$, $\{a_n\} < \{b_n\}$

Задача 11. Докажите, что если $a = \{a_n\}$ и $b = \{b_n\}$ — последовательности Коши, то $a + b = \{a_n + b_n\}$ — последовательность Коши.

Задача 12. Докажите, что если $a = \{a_n\}$ и $b = \{b_n\}$ — последовательности Коши, то $a{\cdot}b = \{a_n{\cdot}b_n\}$ — последовательность Коши.

Указание. $|a_m \cdot b_m - a_n \cdot b_n| = |a_m b_m - a_m b_n + a_m b_n - a_n b_n| \leq |a_m(b_m - b_n)| + |(a_m - a_n)b_n|$. Далее необходимо воспользоваться тем, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ ограничены и фундаментальны.

Задача 13. Докажите, что если последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ фундаментальны и $\{a_n\}{>}\{b_n\}$, $\{b_n\}{>}\{c_n\}$, то $\{a_n\}{>}\{c_n\}$.

Пусть $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$— возрастающая последовательность натуральных чисел. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$. Тогда последовательность $\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots\}$ называют *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$. Другими словами, мы выбираем часть членов последовательности $\{a_n\}$ так, что номера выбранных членов возрастают. Можно сказать по другому: $\{b_i\}$ есть подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$, если $b_i = a_{n_i}$ (n_i — некоторое натуральное число), причем если $i < j$, то $n_i < n_j$.

Задача 14. Докажите, что если $\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots\}$ — подпоследовательность последовательности Коши $\{a_n\}$, то $\{a_{n_i}\}$ — последовательность Коши.

Задача 15. Докажите, что если $\{a_{n_i}\}$ — подпоследовательность последовательности Коши, то последовательности $\{a_n\}$ и $\{a_{n_i}\}$ эквивалентны.

Указание. Для $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N, что если $k, l > N$, то $|a_k - a_l| < \varepsilon$. Ясно, что если $k > N$, то и $n_k > N$, так как $n_k \geq k$. Значит, $|a_k - a_{n_k}| < \varepsilon$ для всех $k > N$.

Задача 16. Докажите, что если $\{a_n\} \to 0$ при $n \to \infty$, то $\{a_n\}$ — последовательность

Задача 17. Пусть $\{a_n\}$ последовательность Коши и a_n не стремится к 0. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N, что $|a_n| > \varepsilon$ для всех $n > N$. Более того, найдется такое натуральное $M > N$, что все a_n, у которых $n > M$, будут одновременно либо больше, либо меньше нуля. Докажите.

Определим последовательность, обратную к фундаментальной последовательности $a = \{a_n\}$ в случае, когда a_n не стремится к нулю. Мы знаем, что если последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна и не стремится к нулю, то для некоторого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности начиная с некоторого номера m удовлетворяют неравенству $|a_n| > \varepsilon$. Значит, только конечное число членов последовательности $\{a_n\}$ может принимать нулевые значения. Мы положим $a_n^{-1} = \frac{1}{a_n}$, если $a_n \neq 0$ и $a_n^{-1} = 1$, если $a_n = 0$. Таким образом, мы для любой последовательности $\{a_n\}$ построили последовательность $\{a_n^{-1}\}$.

Задача 18. Докажите, что если последовательность Коши $\{a_n\}$ не стремится к нулю, то последовательность $a^{-1} = \{a_n^{-1}\}$ — последовательность Коши.

Указание. Так как последовательность $\{a_n\} \nrightarrow 0$ (последовательность $\{a_n\}$ не стремится к нулю), то найдутся такие N и $\varepsilon > 0$ (N — натуральное число), что $|a_n| > \varepsilon$ для всех $n > N$. Значит, если $m, k > N$, то $\left|\dfrac{1}{a_m} - \dfrac{1}{a_k}\right| = \left|\dfrac{a_m - a_k}{a_m \cdot a_k}\right| < \dfrac{|a_m - a_k|}{\varepsilon^2}$.

Возьмем любое число $\delta > 0$. Так как $\{a_n\}$ — фундаментальна, то для числа $\delta \cdot \varepsilon^2$ найдется такое натуральное M, что если $m, k > M$, то $|a_m - a_k| < \delta \cdot \varepsilon^2$. При этом можно считать, что $M > N$. Тогда получим $\left|\dfrac{1}{a_m} - \dfrac{1}{a_k}\right| \leq \left|\dfrac{a_m - a_k}{a_m \cdot a_k}\right| < \dfrac{\delta \cdot \varepsilon^2}{\varepsilon^2} = \delta$. Это и значит, что a^{-1} — фундаментальная последовательность.

Итак. Обозначим через E множество всех фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Каждая последовательность $a \in E$ определяет множество

$$E_a = \{b : b \in E,\ b \backsim a\}.$$

Т.е. множество E_a состоит из эквивалентных a фундаментальных последовательностей. Это значит, что все последовательности, входящие в множество E_a эквивалентны друг другу. Действительно, если $c \backsim a$, $b \backsim a$, то $c \backsim b$ (почему?).

Задача 19. Докажите, что любые два множества E_a и E_b либо не пересекаются, либо совпадают.

Указание. Пусть последовательность $c \in E_a$ и $c \in E_b$. Но тогда $E_c = E_a$, $E_c = E_b$, т.е., $E_a = E_b$.

Теперь мы рассмотрим подмножества вида E_a множества E. Множество всех таких подмножеств обозначим через $E/\backsim$ (*фактор-множество* множества E по эквивалентности $\backsim$). Итак, элементами нашего множества $E/\backsim$ будут подмножества вида E_a.

Определим операции сложения и умножения и отношения порядка на множестве $E/\backsim$.

Рассмотрим два множества E_a и E_b. Если $\{c_n\} \in E_a$, $\{d_n\} \in E_b$, то положим $E_f = E_a + E_b$, если $f = \{c_n + d_n\}$; аналогично положим $E_g = E_a \cdot E_b$, если $g = \{c_n \cdot d_n\}$.

Задача 20. Докажите, что $\{c_n + d_n\} \backsim \{a_n + b_n\}$.

Указание. Так как $\{a_n\} \backsim \{c_n\}$, то для $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $|a_n - c_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для $n > N$, аналогично, $|b_n - d_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, если $n > M$. Для $n > k = max(N, M)$ получим $|(c_n + d_n) - (a_n + b_n)| \leq |a_n - c_n| + |b_n - d_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Задача 21. Докажите, что $\{c_n \cdot d_n\} \backsim \{a_n \cdot b_n\}$.

Указание. Так как $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ — фундаментальные последовательности, то они ограничены, т.е. $|b_n| < l$, $|c_n| < k$ для всех натуральных n. Пусть $m = \max(l, k)$. Так как $a_n - c_n \to 0$, $b_n - d_n \to 0$ при $n \to \infty$, то для $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное M, что для $n > M$ будет верно $|a_n - c_n| < \dfrac{\varepsilon}{2m}$, и такое натуральное N, что $|b_n - d_n| < \dfrac{\varepsilon}{2m}$, если $n > N$. Тогда для $K > \max(M, N)$ получим $|a_n \cdot b_n - c_n \cdot d_n| = |a_n \cdot b_n - b_n \cdot c_n + b_n \cdot c_n - c_n \cdot d_n| \leq |b_n||a_n - c_n| + |c_n||b_n - d_n| < m \cdot \dfrac{\varepsilon}{2m} + m \cdot \dfrac{\varepsilon}{2m} = \varepsilon$.

Т.е. $|a_n \cdot b_n - c_n \cdot d_n| < \varepsilon$ для всех $n > K$. Это значит, что $\{a_n \cdot b_n\} \backsim \{c_n \cdot d_n\}$.

Итак, мы ввели две операции на множестве $E/\backsim$. Положим $-E_a = E_{-a}$. Далее, последовательность $\{0, 0, 0, \ldots\}$ обозначим символом 0. Т.е., $0 = \{0, 0, 0 \ldots\}$. Аналогично, положим $1 = \{1, 1, 1, \ldots\}$.

Задача 22. Докажите, что $E_a + E_{-a} = E_0$.

Задача 23. Докажите, что $E_a \cdot E_1 = E_a$.

Задача 24. Докажите, что $E_a + E_b = E_b + E_a$, $E_a \cdot E_b = E_b \cdot E_a$, $(E_a + E_b) \cdot E_c = E_a \cdot E_c + E_b \cdot E_c$.

Задача 25. Докажите, что если $E_a \neq E_0$, то $E_a \cdot E_{a^{-1}} = E_1$.

Скажем, что $E_a > E_b$, если для любых $c \in E_a$, $d \in E_b$ справедливо соотношение $c > b$.

Задача 26. Докажите корректность отношения порядка. То есть, достаточно показать, что если $a > b$, то $c > d$.

Задача 27. Докажите, что если E_a и E_b не совпадают, то верно либо $E_a < E_b$, либо $E_b < E_a$.

Задача 28. Докажите, что если $E_a < E_b$, то $E_a + E_c > E_b + E_c$.

Задача 29. Докажите, что если $E_a > E_0$, $E_b > E_0$, то $E_a \cdot E_b > E_0$.

Мы видим, что множество $E/\backsim$ с определенными нами операциями "$\cdot$" и "$+$" и отношением порядка удовлетворяют требованиям аксиом 1—13. Нам осталось проверить выполнение аксиомы 14.

Полнота множества действительных чисел.

Идея изложения.

Мы хотим показать, что множество B последовательностей Коши, ограниченное сверху, обладает верхней гранью. Т.е., найдется последовательность Коши d такая, что $d \geq b$ для любой последовательности Коши $b \in B$, причем любая последовательность Коши $d' < d$ уже не будет верхней границей для B. Для доказательства определяются *канонические* последовательности, которые обладают рядом дополнительных по отношению к фундаментальным последовательностям свойств. Кроме того, будет показано, что для любой фундаментальной последовательности существует эквивалентная каноническая последовательность. Это позволяет проводить все рассуждения с каноническими последовательностями, что значительно упрощает нашу задачу.

Определение. Последовательность $a = \{a_n\}$ называется *канонической*, если a_1 — целое, а каждое приращение $a' = a_n - a_{n-1}$ равно либо 0, либо $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ для всех $n > 1$. Доопределим последовательность $\{a'_n\}$ положив $a'_1 = a_1$.

Задача 1. Докажите, что для любого натурального n число

$$a_n = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n. \tag{1}$$

Лемма 1. *Для любого числа $b > 0$ справедливо неравенство*

$$\frac{b}{2} + \frac{b}{4} + \ldots + \frac{b}{2^n} < b \tag{2}$$

Доказательство (по индукции). Проверка для $n = 1$ очевидна. Пусть Лемма верна для числа n. Из (2) следует, что $\dfrac{b}{4} + \dfrac{b}{8} + \ldots + \dfrac{b}{2^{n+1}} < \dfrac{b}{2}$. Прибавим $\dfrac{b}{2}$ к обеим частям последнего неравенства. Получим $\dfrac{b}{2} + \dfrac{b}{4} + \dfrac{b}{8} \ldots + \dfrac{b}{2^{n+1}} < b$.

Из Леммы 1 легко получить следующее утверждение:

Лемма 2. *Если $\{a_n\}$ — каноническая последовательность, то для любых натуральных $k < m$ будет*

$$a_m - a_k < \frac{2}{2^k}$$

Доказательство. Воспользовавшись (1), выразим a_m и a_k. Получим $a_m - a_k = a'_{k+1} + a'_{k+2} + \ldots + a'_m$. Так как для любого натурального $n > 1$ величина a'_n равна либо 0, либо $\frac{1}{2_{n-1}}$, то $a_m - a_k \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{2}{2^k}$.

Лемма 3. *Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две не совпадающие канонические последовательности. Если k — минимальное натуральное число такое, что $a_k \neq b_k$, причем $b_k < a_k$, то для всех $m > k$ будет $b_m < a_k$.*

Доказательство. Если $k = 1$, то так как a_1 и b_1 — целые числа, то

$$b_1 + 1 \leq a_1. \tag{3}$$

Если $m > 1$, то из Леммы 2 получим $b_m - b_1 < \frac{2}{2^1} = 1$, т.е. $b_1 + 1 > b_m$. Используя (3) из последнего неравенства, получим $b_m < a_1$. Пусть $k > 1$. Тогда $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, …, $b_{k-1} = a_{k-1}$, $b_k < a_k$. Значит,

$$b'_1 = a'_1, \quad b'_2 = a'_2, \quad \ldots, \quad b'_{k-1} = a'_{k-1}, \quad b'_k = 0, \quad a'_k = \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{4}$$

Из Леммы 2 следует для $m > k$:

$$b_m - b_k < \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{5}$$

Так как

$$a_k = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_{k-1} + a'_k, \qquad b_k = b'_1 + b'_2 + \ldots + b'_{k-1} + 0, \tag{6}$$

то с учетом (4) и (6) получим:

$$a_k - b_k = a'_k = \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{7}$$

Из (5) и (7) следует, что $b_m - b_k < \frac{1}{2^{k-1}} = a_k - b_k$. Значит, $b_m < a_k$. Лемма доказана полностью.

Что мы уже знаем о канонических последовательностях?

Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две несовпадающие канонические последовательности, то все члены одной из них с некоторого места будут меньше членов другой с одинаковыми номерами. Если для определенности $a_n < b_n$ для всех $n > N$, то для любых натуральных n справедливо неравенство $a_n \leq b_n$. Заметьте, что мы не беремся утверждать, что $\{a_n\} < \{b_n\}$.

Задача 2. Приведите пример канонических последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ что $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, …, но $\{a_n\} = \{b_n\}$.

Лемма 4. *Если $c = \{c_n\}$ — последовательность Коши, а $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ — некоторая последовательность натуральных чисел, то последовательность $b = \{b_i\}$, где $b_i = c_{n_i}$, эквивалентна последовательности $\{c_n\}$.*

Доказательство. Так как c — фундаментальная последовательность, то для $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что если $k, l > N$, то $|c_l - c_k| < \varepsilon$. Пусть $i > N$, но тогда $n_i \geq i > N$. Значит, $|c_i - c_{n_i}| < \varepsilon$, т.е., $|c_i - b_i| < \varepsilon$ для всех $i > N$, это и значит, что $b \backsim c$.

Задача 3. Если $c \backsim b$, $b \backsim d$, то $c \backsim d$.

Теорема 1. *Если b — последовательность Коши, то найдется каноническая последовательность d такая, что $b \backsim d$.*

Доказательство. Так как b — последовательность Коши, то она ограничена. Значит, найдется целое число m такое, что $-m < b_n < m$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим $2m$ отрезков единичной длины $[-m; -m+1]$, $[-m+1; -m+2]$, …, $[m-2; m-1]$, $[m-1; m]$. Обозначим через Δ_1 один из этих отрезков, содержащий бесконечно много членов последовательности b. Концы отрезка Δ_1 обозначим через c_1, d_1. Т.е., $\Delta_1 = [c_1; d_1]$. Разделим Δ_1 точкой $\frac{c_1 + d_1}{2}$ на два равных отрезка и выберем любую его половину, содержащую бесконечно много элементов последовательности b. Обозначим полученный отрезок символом Δ_2, а его концы через c_2, d_2, $\Delta_2 = [c_2; d_2]$. И так далее. Мы получим последовательность отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$. Каждый отрезок лежит в предыдущем и содержит бесконечно много членов последовательности b. Выберем теперь натуральные числа $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ так, чтобы $b_{n_1} \in \Delta_1$, $b_{n_2} \in \Delta_2$, ..., $b_{n_i} \in \Delta_i$. Ясно, что $\{b_{n_i}\} \backsim \{c_i\}$. Действительно, $|b_{n_i} - c_i| \le \dfrac{1}{2^{i-1}}$; а так как $\{b_{n_i}\} \backsim b$, то $\{c_i\} \backsim b$. Ясно также, что $\{c_i\}$ — каноническая последовательность. Действительно, c_1 — целое число, а c_{n+1} как легко видеть равно либо c_n, либо $c_n + \dfrac{1}{2^n}$. Теорема доказана.

Лемма 5. *Пусть B — ограниченное сверху множество канонических последовательностей и последовательность c является верхней границей B, тогда $c_1 + 2$ будет верхней границей множества D — первых элементов всех последовательностей из B.*

Доказательство. (От противного). Пусть найдется число $b_1 \in D$ (b_1 — первый член канонической последовательности $b = \{b_1, b_2, \dots\}$) такое, что $c_1 + 2 < b_1$. Следовательно,

$$c_n < c_1 + 1 < c_1 + 2 < b_1 \le b_n. \tag{8}$$

(Мы воспользовались Леммой 3 для вывода последнего неравенства). Из неравенства (8) следует, что $b_n - c_n > c_1 + 2 - (c_1 + 1) = 1$. Это значит, что $b > c$ вопреки условию.

Приступим к построению канонической последовательности $d = \{d_1, d_2, \dots\}$, которая является верхней гранью ограниченного множества B канонических последовательностей. Для этого определим множества $B_1 \supset B_2 \supset \dots$. Множество $B_1 \subset B$ и состоит из всех канонических последовательностей, лежащих в B, первый элемент которых принимает наибольшее значение. Обозначим его через d_1.

Ясно, что B_1 — это множество всех последовательностей из B, первый элемент которых равен d_1. Далее, вторые элементы последовательностей из B_1 равны либо d_1, либо $d_1 + \dfrac{1}{2}$. Положим d_2 равным максимальному значению вторых элементов последовательностей из B_1 и обозначим через B_2 все последовательности из B_1, вторые элементы которых равны $d_2, \dots$. Пусть уже построены множества $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n$ и числа $d_1, d_2, \dots, d_n$. Рассмотрим $(n+1)$-е элементы всех последовательностей из B_n. Они могут принимать значения либо d_n, либо $d_n + \dfrac{1}{2^n}$. Положим d_{n+1} равным максимальному значению $(n+1)$-го числа последовательностей из B_n. Множество B_{n+1} определим как подмножество B_n, состоящее из тех последовательностей, входящих в B_n, $(n+1)$-е элементы которых равны $d_{n+1} \dots$. Таким образом мы определили последовательность $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n, \dots\}$. Ясно, что d — каноническая последовательность.

Докажем, что последовательность d является верхней гранью множества B. Сначала покажем, что $d \ge B$.

Действительно (от противного), пусть для некоторого $b \in B$ справедливо неравенство $b > d$. Из этого неравенства следует, что для некоторого m будет

$$b_m > d_m \tag{9}$$

В этом случае справедливо неравенство

$$b_n \ge d_n \qquad \text{(n=1,2,...)} \tag{10}$$

Но из определения d_1 следует, что $d_1 \ge b_1$. С учетом (10) получим $b_1 = d_1$. Далее по индукции. Пусть для всех номеров k, не превосходящих n, будет верно $d_k = b_k$. Но тогда из (10) следует, что $b_{n+1} \ge d_{n+1}$. А из построения d_{n+1} следует, что $d_{n+1} \le b_{n+1}$. Т.е. $b_n = d_n$ для всех натуральных n, что противоречит (9). Итак, d — верхняя граница B.

Осталось показать, что если каноническая последовательность $d^* < d$, то d^* уже не будет верхней границей B. Нам понадобится несложное утверждение.

Лемма 6. *Пусть B, C — два непустых множества канонических последовательностей. Если для любой последовательности $c \in C$ найдется последовательность $b \in B$ такая, что $b \geq c$, тогда если $a = \sup C$ и $a \geq B$, то $a = \sup B$.*

Доказательство очевидно.

Вновь рассмотрим построенную выше последовательность $d = \{d_1, d_2, d_3, \ldots\}$. Положим $c^{(1)} = \{d_1, d_1, d_1, \ldots\}$, $c^{(2)} = \{d_1, d_2, d_2, \ldots\}$, $c^{(3)} = \{d_1, d_2, d_3, d_3, d_3, \ldots\}, \ldots,$
$c^{(m)} = \{d_1, d_2, d_3, \ldots, d_m, d_m, d_m, \ldots\}, \quad \ldots$

Рассмотрим множество $C = \{c^{(1)}, c^{(2)}, c^3, \ldots\}$. Ясно, что для любого $c^{(i)} \in C$ найдется последовательность $b \in B$ такая, что $b \geq c^{(i)}$. (Легко видеть, что в качестве b можно взять любую последовательность из множества B_i). Также ясно, что $d \geq C$. С учетом Леммы 6 достаточно показать, что $d = \sup C$. Для этого рассмотрим произвольную каноническую последовательность $d^* < d$.

Рассмотрим сначала случай, когда последовательность d содержит элемент с наибольшим значением. Т.е., $d = \{d_1, d_2, \ldots, d_k, d_k, \ldots\}$. Но тогда C содержит элемент $c^{(k)} = \{d_1, \ldots, d_k, d_k \ldots\}$. Т.е., C содержит последовательность d. Значит, $d = \sup C$. Пусть последовательность d не содержит члена с максимальным значением. Тогда существует возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ такая, что $d_{n_1} < d_{n_2} < d_{n_3} < \ldots$. Пусть каноническая последовательность $d^* < d$. Тогда найдется натуральное k такое, что $d^*_k < d_k$. Воспользовавшись тем, что $i \leq n_i$ и $c^{(k)}_k = d_k$ получим $d^*_k < d_k = c^{(k)}_k$, Значит, $d^* \leq c^{(k)} \leq c^{(n_k)} < c^{(n_{k+1})} \leq d$. Т.е. последовательность $d^* < d$ уже не будет верхней границей множества C. То есть каноническая последовательность d — верхняя грань множества C. Следовательно, $d = \sup B$.

Интегрирование по частям и формула Валлиса. 11.11.2014

1. Пусть u и v — непрерывно дифференцируемые функции. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b uv'dx + \int_a^b u'vdx = \Big|_a^b uv. \tag{1}$$

2. Используем (1) для вычисления $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m xdx$.

Напомним, что символом $n!!$ обозначают произведение всех натуральных чисел, не превосходящих натурального числа n и одинаковой с n четности. Таким образом $1!! = 1$, $2!! = 2$, $10!! = 10{\cdot}8{\cdot}6{\cdot}4{\cdot}2$.

Итак,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cdot (-\cos x)'dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cos' xdx. \tag{2}$$

Далее, используя (1), получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cos' xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{m-1} x)' \cos xdx = \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cos x = 0. \tag{3}$$

Из (3) и (2) получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m xdx = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 xdx = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x(1-\sin^2 x)dx.$$

Следовательно,

$$m\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x dx=(m-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2} x dx \tag{4}$$

Положим $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x dx=I_m$. Из (4) получим

$$I_m=\frac{m-1}{m}I_{m-2}.$$

3. Докажите, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x dx=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!}{m!!} & \text{для нечетных } m,\\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\dfrac{\pi}{2} & \text{для четных } m.\end{cases}$$

Указание. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(-\cos x)' dx=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(\cos x)' dx$.

Т.к. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(\cos x)' dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)'\cos x dx=\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x=0$, то $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx$.

Следовательно, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x+\cos^2 x) dx=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$.

4. Мы доказали, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n} x dx=\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\frac{\pi}{2};\qquad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1} x dx=\frac{2n!!}{(2n+1)!!}.$$

Так как $\sin^{2n-1}x\geq\sin^{2n}x\geq\sin^{2n+1}x$, то

$$\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\geq\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\geq\frac{2n!!}{(2n+1)!!} \tag{5}$$

Следовательно, $\dfrac{(2n-2)!!\cdot(2n)!!}{[(2n-1)!!]^2}\geq\dfrac{\pi}{2}\geq\dfrac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!}$, т.е.

$$\frac{[(2n)!!]^2}{2n[(2n-1)!!]^2}\geq\frac{\pi}{2}\geq\frac{(2n!!)^2}{(2n+1)[(2n-1)!!]^2}.$$

Рассмотрим разность между левой и правой границами. Она равна $\dfrac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2}\dfrac{1}{2n(2n+1)}$, т.е. меньше $\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{2n}$. Это значит, что как левая, так и правая границы стремятся к $\dfrac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot\ldots\cdot2n\cdot2n}{1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n-1)}\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}.$$

Комбинаторика. 20.06.2015

Определения. *Перестановкой n элементов* называют их расположение на n различных местах. Число таких перестановок обозначают символом P_n. Ясно, что $P_n = n!$. Конечный набор элементов $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ будем называть *генеральной совокупностью.* Набор элементов $a_{i_1}, \ldots, a_{i_z}$, где каждое $a_{i_j} \in A$, называют *выборкой.* Если порядок расположения элементов выборки не существен, то выборка называется *неупорядоченной*, если существен, выборка *упорядоченная.* Элементы выборки могут повторяться, тогда выборка называется *выборкой с повторениями*, а могут не повторяться, тогда выборка называется *выборкой без повторений.* Например, слово "мама" может рассматриваться как упорядоченная выборка с повторениями из букв русского алфавита. Количество элементов выборки называется ее *объемом.* Выборку объема k называют *k-выборкой.*

Размещением из n элементов по m называют упорядоченную m-выборку без повторений из n элементов генеральной совокупности. Число таких выборок обозначают через A_n^m. Число же размещений с повторениями обозначают через $\overline{A}_n^m$.

Сочетанием из n элементов по m называют неупорядоченную m-выборку из n элементной генеральной совокупности. Число таких выборок без повторений обозначим через C_n^m, а с повторениями — через $\overline{C}_n^m$. (Заметим, что m — это количество выбранных элементов с учетом повторений).

1. Докажите, что $A_n^m = (n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \dfrac{n!}{m!}$. (Заметим, что $0! = 1$ по определению).

2. Докажите, что $\overline{A}_n^k = n^k$.

3. Докажите, что $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$.

4. Докажите, что количество всех подмножеств n–элементной генеральной совокупности равно 2^n, а число подмножеств из m элементов равно C_n^m.

5. Используя **4**, докажите, что $\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$.

6. Заметим, что $\overline{A}_n^m$ – это количество различных слов из m букв алфавита $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Если мы сначала выпишем все слова, затем разрежем их на буквы и сложим в конверты, то некоторые конверты будут с одинаковым содержимым.

6.1. При каких m все конверты будут с разным содержимым?

6.2. Докажите, что $\overline{C}_n^m$ равно количеству конвертов с разным содержимым.

Указание. Чтобы понять, какие конверты с одинаковым, а какие — с разным наполнением, надо их толково промаркировать. Для этого нарисуем на конверте у нижнего края $n-1$ звездочку. Они определят n мест: до первой звездочки, между первой и второй, ... , после $n-1$-ой. На i-м месте напишем количество букв a_i в конверте. (Так сделаем для всех $i = 1, \ldots, n$).

6.3. Докажите, что количество различных решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$$

в целых неотрицательных числах равно C_n^m.

6.4. Докажите, что $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \dfrac{(n+m-1)!}{m!\cdot(n-1)!}$.

6.5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$, где $m \geq n$?

7.1. Перестановки с повторением.

У нас есть генеральная совокупность из k элементов $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Число перестановок, где элемент x_1 встречается n_1 раз, x_i встречается n_i раз, ... , x_k – n_k раз (все $n_1, \ldots, n_k$ – неотрицательные целые числа) обозначают через $P(n_1, \ldots, n_k)$.

Докажите, что при $n = n_1 + \cdots + n_k$ будет $P(n_1, \ldots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1!\cdot\cdots\cdot n_k!}$.

7.2. Выражение $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ можно рассматривать как перечень всех однобуквенных слов в алфавите $\{x_1, \dots, x_k\}$, разделенных символом "$+$". Рассмотрим произведение $(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_k) \cdot \ldots \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_k)$ (всего n сомножителей). При этом мы не будем приводить подобные члены. Докажите, что в результате мы получим последовательность всех слов длины n в алфавите $\{x_1, \dots, x_k\}$, разделенных знаком "$+$". Докажите, что всего слов будет $\overline{A}_k^n = k^n$.

7.3. Получите результат задачи **7.2**, заменив каждую переменную x_i на 1.

7.4. Приведем подобные члены в нашем многочлене. Мы получим сумму одночленов вида $x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$, где $n_i \geq 0$ $(i = 1, \dots, k)$ и $n_1 + \dots + n_k = n$. Докажите, что количество разных одночленов равно $\overline{C}_k^n$.

7.5. Докажите равенство (полиномиальная формула):

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}.$$

7.6. Докажите, что $\sum\limits_{n_1 + \dots + n_k = n} \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} = k^n$. $(n_i \geq 0)$.

7.7 Следствие (Бином Ньютона).

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n; \qquad \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Деление с остатком. 24.10.2015

Здесь запрещено пользоваться единственностью разложения на простые сомножители. Пусть a, b — натуральные. Представление a, b в виде

$$a = kb + r, \tag{1}$$

где k — целое, а $0 \leq r < b$ называется делением с остатком. При этом число a называют *делимым*, b — *делителем*, k — *неполным частным*, а r — *остатком* от деления числа a на число b. Таким образом, операция деления каждой паре натуральных чисел a и b ставит в соответствие два целых числа k и r: неполное частное и остаток от деления числа a на число b.

Если остаток от деления числа a на число b равен 0 (см. (1)), то говорят, что a *делится* на b, а неполное частное называют *частным* от деления a на b.

Если $a < b$, то (1) принимает вид $a = 0 \cdot b + a$, т.е., в случае $a < b$ неполным частным будет число 0, а остатком — число a.

Если $a = b$, то $a = 1 \cdot b + 0$, т.е., неполное частное равно 1, а остаток равен 0.

В общем случае справедлива

Лемма 1. *Для любых натуральных чисел a, b существует, и притом единственная, пара целых чисел k, r $(r \geq 0)$, для которых выполняется равенство (1).*

Указание. Докажите Лемму сначала для случаев $a < b$ и $a = b$.

Пусть теперь $a > b$. Рассмотрим множество $B = \{n : n$ натуральное, а $n \cdot b > a\}$. Множество $B \neq \varnothing$. Если l наименьший элемент B, то положите $k = l - 1$, а $r = a - kb$.

Два натуральных числа называют *взаимно простыми*, если у них нет ни одного общего делителя, кроме числа 1.

Теорема 1. *Если натуральные числа a и b взаимно простые, то существуют такие целые числа p и q, что $ap + bq = 1$.*

Эта теорема имеет много различных доказательств. Мы обсудим идею доказательства, впервые предложенного Гауссом.

Пусть $G = \{d : d$ натуральное число, $d = ap + bq$ для некоторых целых чисел p и $q\}$.

Задача 1. Докажите, что $a, b \in G$.

Задача 2. Докажите, что если числа $m, n \in G$, а r — остаток от деления m на n не равен 0, то $r \in G$.

Задача 3. Пусть l — минимальный элемент множества G. Докажите, что l — общий делитель чисел a и b. Т.е., $l = 1$.

Теорема 2. *Если числа a и b взаимно простые, а произведение ac делится на b, то c делится на b.*

Указание. По теореме 1 найдутся целые p, q, такие что $ap + bq = 1 \Rightarrow apc + bqc = c$.

Из двух слагаемых apc и bqc оба делятся на b, следовательно c делится на b.

Теорема 3. *Если произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей a_i делится на p.*

Теорема 4. *Если $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_m$ и все числа $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$ простые, причем $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \ldots \leq b_m$, то $n = m$ и $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_n = b_n$.*

Итак, используя Теорему 1, мы доказали единственность разложения натурального числа на простые сомножители.

Задача 4. Докажите Теорему 1, используя то, что разложение на простые сомножители единственно.

Указание. Если a и b взаимно простые числа, то a, $2a, \ldots$, $(b-1)a$ дают при делении на b разные остатки.

Задача 5 (малая теорема Ферма). Если a не делится на простое число p, то $a^{p-1} - 1$ делится на p.

Указание. Воспользуйтесь указанием к предыдущей задаче.

Задача 6 (теорема Вильсона). Докажите, что $(p-1)! + 1$ делится на p, если число p простое, и не делится на p, если p не простое.

Указание. Воспользуйтесь указанием предыдущей задачи и докажите, что для целого числа $1 \leq q \leq p-1$ найдется ровно одно целое число $1 \leq l \leq p-1$ такое, что $q \cdot l$ дает при делении на p остаток 1. Сообразите, когда числа p и q равны.

Задача 7 (теорема Эйлера). Пусть N — произвольное натуральное число. Обозначим через $\varphi(N)$ количество чисел меньших N и взаимно простых с N. Покажите, что если a и N взаимно простые числа, то $a^{\varphi(N)} - 1$ делится на N.

Указание. Пусть $\varphi(N) = k$. Рассмотрим числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, где каждое $a_i < N$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ и взаимно просто с N. Ясно, что $a \cdot a_1$, $a \cdot a_2$, …, $a \cdot a_k$ — набор чисел, взаимно простых с N. Сообразите, какой набор остатков получится при делении чисел $a \cdot a_1$, $a \cdot a_2$, …, $a \cdot a_k$ на N.

Комплексные числа. 02.11.2015

Рассмотрим плоскость с прямоугольной системой координат XOY. Каждая точка a этой плоскости имеет две координаты x и y $(a = a(x, y))$ и определяет вектор $\vec{a}$, с началом в начале координат и концом в точке a.

С этого момента для нас слова *точка* и *вектор* будут синонимами, так как мы рассматриваем только такие векторы, начало которых совпадает с началом координат. Так как каждая точка a плоскости однозначно определяется парой чисел (x, y) — координатами точки a, мы будем отождествлять точки плоскости с парами действительных чисел. При этом паре (x, y) будет соответствовать точка $a = a(x, y)$, у которой первая координата равна x, а вторая y.

Итак, в качестве материала для построения комплексных чисел мы возьмем точки плоскости (векторы) или, что то же самое, пары действительных чисел.

Нам необходимо на выделенном нами множестве определить две операции: сложение и умножение.

Сложение. *Суммой* двух комплексных чисел a и b назовем комплексное число c, которое равно обычной векторной сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Таким образом, если $c = a + b$, то $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Ясно, что при сложении векторов складываются соответствующие координаты. Поэтому если рассматривать в качестве комплексных чисел пары действительных чисел, то сложение определяется для них как покоординатное сложение:

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Точку с двумя нулевыми кооординатами, соответствующую началу координат, обозначим через 0.

Кроме пары $(0, 0)$ выделим пару $(0, 1)$, которую обозначим через i и назовем *мнимой единицей.*

Операция сложения обладает следующими свойствами :

1) $a + b = b + a$ для любых комплексных a и b (коммутативность сложения);

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ для любых комплексных a , b и c (ассоциативность сложения);

3) $a + 0 = a$ для любого комплексного a (существование нуля);

4) для любого a найдется число $-a$ такое, что $(a) + (-a) = 0$ (существование противоположного).

Проверка свойств 1)-4) тривиальна. Первые три вытекают из того, что каждое комплексное число однозначно определяется своими координатами, а сложение векторов сводится к сложению соответствующих координат.

Свойство 4) обеспечивается наличием противоположного вектора для каждого вектора $\vec{a} = \vec{a}(x, y)$. А именно, в качестве $-\vec{a}$ необходимо взять вектор с координатами $(-x, -y)$.

Каждое комплексное число a обладает *модулем*, обозначаемым через $| a |$, а ненулевое комплексное число — *аргументом* $\arg a$.

Модуль комплексного числа a — это длина вектора $\vec{a}$. Ясно, что если $a = a(x, y)$, то $| a | = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Аргумент* вектора $a \neq 0$ — это угол α, между положительным направлением оси OX и этим вектором. (Т.е. угол, на который необходимо повернуть положительную полуось оси OX против часовой стрелки для совмещения с вектором $\vec{a}$).

Так как при повороте на угол $\pm 2\pi$ вектор возвращается в исходное положение, то аргумент определяется с точностью до слагаемого кратного $\pm 2\pi$. Т.е если α — аргумент комплексного числа a то любое число вида $\alpha \pm 2\pi k$ — аргумент a для $(k = 1, 2, 3, ...)$.

Ясно, что для начала координат — точки 0 — аргумент не определен.

Верно и обратное. Для любой пары действительных чисел $p \neq 0, q$ существует ровно одно комплексное число a такое , что $| a |= p$ и $\arg a = q$.

Умножение. По определению, результатом умножения на комплексное число 0 будет 0 вне зависимости от множимого. Т.е. $a \cdot 0 = 0$ для любого числа a.

Для определения операции умножения на комплексное число, отличное от 0, напомним что такое *поворот* плоскости, *гомотетия* плоскости и *поворотная гомотетия* (или, что то же самое, — *центрально-подобное вращение).*

Поворот с центром в точке 0 — начале координат — на угол φ это преобразование плоскости, переводящее точку x в x' такую, что вектор $\vec{x}'$ равен вектору $\vec{x}$ по модулю и при повороте вектора $\vec{x}$ против часовой стрелки на угол φ около точки 0 вектор $\vec{x}$ совпадет с вектором $\vec{x}'$.

Гомотетией с центром в точке 0 и коэффициентом k называют преобразование плоскости, переводящее точку x в точку x' такую что $\vec{x}' = k\vec{x}$.

Каждое комплексное число $a \neq 0$ обладает двумя характеристиками: модулем и аргументом. Это позволяет нам задать центрально-подобное вращение плоскости φ_a.

А именно, преобразование φ_a — это суперпозиция двух преобразований: гомотетии с центром в точке 0 и коэффициентом $| a |$ и преобразования вращения (поворота) около точки 0 в положительном направлении на угол $\arg a$.

Предоставляем читателю проверить, что в нашем случае результат суперпозиции поворота и гомотетии не зависит от порядка, в котором выполняются эти преобразования.

Положим по определению $b \cdot a = \varphi_a(b)$.

Таким образом, для того, чтобы умножить комплексное число b на комплексное число a, необходимо сначала увеличить вектор b в $\mid a \mid$ раз, а затем повернуть полученный вектор на угол $\arg a$ относительно начала координат, т.е. точки 0. Ясно, что произведением комплексных чисел a и b, ни одно из которых не равно нулю, будет число, модуль которого равен $|a|\cdot|b|$ — произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей, т.е. $\arg(a \cdot b) = \arg a + \arg b$.

Приступим к подробному изучения свойств произведения.

Комплексное число с координатами $(1,0)$ обозначим символом 1 и будем называть *единицей.* (Отметим, что это соглашение не приведет к путанице. Ясно что $\mid 1 \mid = 1$ и $\arg 1 = 0$).

Очевидно, что при повороте, а также при гомотетии середина отрезка переходит в середину образа этого отрезка. Поэтому поворотная гомотетия φ_c, задающая умножение на комплексное число c, переводит середину отрезка ab в середину отрезка $\varphi_c(a)\varphi_c(b)$.

Пусть $a + b = d$. Значит $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$. Т.е. найдется точка q, которая будет одновременно серединой отрезков ab и $0d$. Комплексное число $c \neq 0$ задает поворотную гомотетию φ_c. При этом

$$a \cdot c = \varphi_c(a), \quad b \cdot c = \varphi_c(b), \quad d \cdot c = \varphi_c(d). \tag{1}$$

Кроме того,

$$\varphi_c(0) = 0. \tag{2}$$

Мы видим, что $\varphi_c(q)$ является серединой как отрезка $\varphi_c(0)\varphi_c(d) = 0\varphi_c(d)$ так и отрезка $\varphi_c(a)\varphi_c(b)$,

$\varphi_c(0)\varphi_c(d)$ — отрезок с концами $\varphi_c(0)$, $\varphi_c(d)$;
$0\varphi_c(d)$ — отрезок с концами 0, $\varphi_c(d)$;
и наконец $\varphi_c(a)\varphi_c(b)$ — отрезок с концами $\varphi_c(a)$, $\varphi_c(b)$.

значит,

$$\varphi_c(a) + \varphi_c(b) = \varphi_c(d). \tag{3}$$

Из (1), (2) и (3) следует:

$$a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c. \tag{4}$$

Теперь мы в состоянии завершить проверку основных свойств комплексных чисел:

5) $a \cdot b = b \cdot a$ для любых комплексных a и b (коммутативность умножения);

6) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для любых комплексных a , b и c (ассоциативность умножения);

7) $a \cdot 1 = a$ для любого комплексого a (существование единицы);

8) для любого $a \neq 0$ найдется число a^{-1} такое, что $a \cdot a^{-1} = 1$ (существование обратного);

9) $a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c$ (дистрибутивность произведения).

Свойства 5), 6) вытекают из того, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Умножение на 1 сводится к суперпозиции двух тождественных отображений: гомотетии с коэффициентом 1 и поворота на 0 радиан, что и доказывает свойство 7). Для проверки свойства 8) возьмем в качестве комплексного числа a^{-1} комплексное число, модуль которого равен $\mid a \mid^{-1}$, а аргумент равен $-\arg a$.

Свойство 9) только что доказано (см (4)).

Перейдем к подробному изучению свойств комплексных чисел.

Рассмотрим множество D комплексных чисел, принадлежащих оси OX. У всех таких чисел ордината равно нулю. Ясно, что

$$(p, 0) + (q, 0) = (p + q, 0). \tag{5}$$

Для любого комплексного числа $a = (p, q)$ и числа $b = (c, 0) \in D$ справедливо равенство

$$(p, q) \cdot (c, 0) = (pc, qc). \tag{6}$$

Действительно, если $c = 0$ то $(c, 0) = (0, 0)$. В соответствии с правилом умножения но 0 получим $(p, q) \cdot (0, 0) = (0, 0) = (p \cdot 0, q \cdot 0)$, что доказывает (6) для случая $c = 0$.

Если $c > 0$, то $\mid b \mid= c$, а $\arg b = 0$. В этом случае умножение на b сводится к суперпозиции гомотетии с коэффициентом $\mid b \mid= c$ и поворота около начала координат на нулевой угол. Таким образом, (6) верно и для этого случая.

Если $c < 0$, то умножение на b сводится к суперпозиции гомотетии с коэффициентом $\mid b \mid= -c$ и поворота около начала координат на угол π, т.е. центральной симметрии относительно начала координат. Поэтому $(p, q) \cdot (c, 0) = (-(p \cdot (-c)), -(q \ \cdot (-c)) = (p \cdot c, q \cdot c)$.

Мы установили, что умножение произвольного числа $a(p, q)$ на число $b(c, 0) \in D$ сводится к умножению на c каждой координаты вектора b.

Применим формулу (6) к комплексным числам $(p, 0), (q, 0) \in D$. Получим

$$(p, 0) \cdot (q, 0) = (p \cdot q, 0). \tag{7}$$

Если каждой точке $(p, 0)$ поставить в соответствие действительное число p, то мы установим взаимно однозначное соответствие между множеством D и множеством действительных чисел $\mathbb{R}$. Равенства (5) и (7) показывают, что точки из D складываются и перемножаются, как обычные действительные числа. Т.е. множество D, рассматриваемое как часть множества комплексных чисел, по своим свойствам совпадает с множеством действительных чисел. Это позволяет нам вместо $(p, 0)$ использовать обозначение p. (Напомним, что мы уже писали вместо $(0, 0)$ просто 0 и использовали символ 1 вместо $(1, 0)$).

Изучим свойства мнимой единицы, т.е. числа i.

Так как $\mid i \mid= 1$, а $\arg i = \pi/2$, то

$$\mid i^2 \mid= 1, \qquad \arg i^2 = \pi.$$

Последнее означает, что

$$i^2 = -1. \tag{8}$$

Таким образом, множество комплексных чисел — это расширение множества действительных чисел, в котором имеет решение уравнение

$$x^2 = -1.$$

Для любого комплексного числа $(0, q)$, лежащего на оси ординат OY, в соответствии с (6) будет

$$(0, q) = q \cdot i. \tag{9}$$

Так как любое комплексное число $a(p, q) = (p, 0) + (0, q)$, то справедливо равенство

$$a = p + qi. \tag{10}$$

Действия над комплексными числами, записанными в виде $p + qi$.

Сложение, вычитание и умножение, и деление комплексных чисел, заданных в виде $p + qi$, производится следующим образом:

$$(p + qi) + (c + di) = (p + c) + (q + d)i; \qquad (p + qi) - (c + di) = (p - c) + (q - d)i;$$

$$(p + qi) \cdot (c + di) = (pc - qd) + (pd + qc)i; \qquad \frac{p + qi}{c + di} = \frac{pc + qd}{c^2 - d^2} + \frac{qc - pd}{c^2 - d^2} i\,.$$

Доказательство первых двух формул мы предоставляем читателю. Для доказательства третьей формулы воспользуемся доказанными выше свойствами комплексных чисел (в основном, дистрибутивностью произведения (см. 9) и равенством (8)) :

$$(p+q\cdot i)(c+d\cdot i)=p\cdot c+q\cdot i\cdot c+p\cdot d\cdot i+q\cdot i\cdot d\cdot i=p\cdot c+q\cdot d\cdot i^2+(p\cdot d+q\cdot c)\cdot i=(pc-qd)+(pd+qc)i.$$

Для упрощения выражения $\dfrac{p+qi}{c+di}$ умножим числитель и знаменатель этой дроби на $c-di$. В результате получим :

$$\frac{p+qi}{c+di}=\frac{(p+qi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(pc+qd)+(qc-pd)i}{c^2-d^2}=\frac{pc+qd}{c^2-d^2}+\frac{qc-pd}{c^2-d^2}i$$

Для каждого комплексного числа $a=(p+qi)$ положим $\overline{a}=p-qi$. Число $\overline{a}$ назовем *сопряженным к числу* a. Ясно, что сопряженное к a число — это число, симметричное числу (точке) a относительно оси OX.

Легко проверить выполнение следующих свойств:

$$\mid\overline{a}\mid=\mid a\mid,\quad \overline{\overline{a}}=a,\quad \arg a=-\arg\overline{a},$$

$$\overline{a+b}=\overline{a}+\overline{b},\quad \overline{a\cdot b}=\overline{a}\cdot\overline{b},\quad a\cdot\overline{a}=\mid a\mid^2,\quad a^{-1}=\frac{\overline{a}}{\mid a\mid^2}.$$

Теперь воспользуемся полученными нами сведениями о комплексных числах для получения доказательств теорем сложения для тригонометрических функций.

Пусть $\mid a\mid=\mid b\mid=1$ и $\arg a=\alpha, \arg b=\beta$, тогда $\mid a\cdot b\mid=1$ и $\arg(a\cdot b)=\alpha+\beta$.

Поэтому первая координата комплексного числа $a\cdot b$ равна $\cos(\alpha+\beta)$, вторая $\sin(\alpha+\beta)$. Далее $a\cdot b=(\cos\alpha,\sin\alpha)\cdot(\cos\beta,\sin\beta)=(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta,\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)$.

Следовательно,

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta,\qquad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Теоремы сложения доказаны.

Логарифм и экспонента. 14.12.2018

Функция f определена на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условию а):

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \tag{1}$$

Кроме того, функция f строго монотонна (условие б).

Задача 1. Если функция f удовлетворяет условиям а), б), то любая функция $g(x)=f(kx)$ удовлетворяет условиям а), б).

Действительно, $f(k(x+y))=f(kx+ky)=f(kx)\cdot f(ky)\Rightarrow g(x+y)=g(x)\cdot g(y)\ldots$

Задача 2. Функция f, удовлетворяющая а), б) строго положительна.

Действительно, $f(x)=f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=f(\frac{x}{2})\cdot f(\frac{x}{2})$. Значит, $f(x)\geq 0$. Ясно, что т.к. $f(x)$ определена на всей числовой прямой и строго монотонна, то равенство $f(x)=0$ невозможно ни для одной точки x.

Задача 3. Если $f(x)$ удовлетворяет условиям а), б), то $f(0)=1$. (Очевидно).

Задача 4. Для любого числа $a\neq 1$ найдется функция f, удовлетворяющая условию $f(a)=1$. При этом такая функция одна.

Доказательство этого утверждения опускается.

Определение. Для $a > 0$, $a \neq 1$. Функцию f, удовлетворяющую условиям а), б) и такую, что $f(1) = a$, называют *экспонентой по основанию* a и обозначают через $\exp_a x$. Ее также обозначают через a^x и называют *показательной функцией.*

Задача 5. $\exp_a(n) = a^n$, $\exp_a(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{a}$, $\exp a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $\exp a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$ для любого натурального числа n. (В чем смысл этой задачи?).

Задача 6. Функция a^x строго возрастает, если $a > 1$, и строго убывает, если $0 < a < 1$ на всей числовой прямой.

Так как функция a^x биективно отображает множество $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^+$, то для нее существует обратная функция, которую обозначают через $\log_a x$ и называют *логарифмом по основанию* a.

Задача 7. $a^{\log_a x} = x$, $\log_a a^x = x$.

Задача 8. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.

Для доказательства возьмем функцию $\exp_a$ от обеих частей равенства. Ясно, что $a^{\log_a(x+y)} = xy$, а $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy$.

Задача 9. $b^x = a^{(\log_a b)\cdot x}$.

Действительно, справа и слева — функции экспоненты. Если $x = 1$, то слева $b^1 = b$, справа $a^{\log_a b} = b$.

Дадим другое определение функции логарифм. Функция $\log_a x$ строго возрастает при $a > 1$ и строго убывает при $0 < a < 1$; $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; $\log_a x$ — биективное отображение $\mathbb{R}^+$ на $\mathbb{R}$. Основание логарифма — это число, которое функцией логарифм переводится в единицу.

Задача 10. Докажите, что функция, обратная к экспоненте по основанию a, удовлетворяет перечисленным выше свойствам.

Задача 11. Для любого числа $k \neq 0$ функция $k \log_a x$ строго монотонна, биективно отображает $\mathbb{R}^+$ на $\mathbb{R}$; кроме того, $k \log_a(x \cdot y) = k \log_a x + k \log_a y$.

Задача 12. $\dfrac{\log_a x}{\log_a b} = \log_b x$.

Задача 13. $\log_b a \cdot \log_c b = \log_c a$.

Задача 14. $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$.

Задача 15. $\log_{b^y} a^x = \dfrac{\log_b a^x}{\log_b b^y} = \dfrac{1}{y} \log_b a^x = \dfrac{x}{y} \log_b a$.

Задача 16. $\log_b a^x = x \log_b a$, $\log_{b^x} a = \frac{1}{x} \log_b a$.

Задача 17. $(a^x)^y = a^{xy}$.

Интеграл Римана. 20.01.2020

Разбиением отрезка $[a; b]$ назовем конечный набор чисел $I = \{a_0, \ldots, a_n\}$, таких, что $a_0 = a$, $b = a_n$, а сами числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ упорядочены по возрастанию. *Шагом разбиения* I назовем величину $d(I) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})$.

Пусть $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Величину $R_I(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (a_i - a_{i-1})$, где $x_i \in [a_{i-1}; a_i]$, называется *интегральной суммой Римана*, соответствующей разбиению I. Ясно, что интегральная сумма, соответствующая разбиению I, определена не однозначно, так как выбор чисел $x_i \in [a_{i-1}; a_i]$ произволен. Тем не менее, для достаточно широкого класса F функций справедливо утверждение

Для любой последовательности $\{I_n\}$ такой, что $d(I_n) \to 0$, последовательность интегральных сумм $\{R_{I_n}(f)\}$ сходится.

Предел такой последовательности обозначают через $\int\limits_a^b f(x)dx$ и называют *интегралом Римана* функции f.

Докажем, что $\mathcal{C}_{[a;b]}$ — семейство непрерывных на $[a;b]$ функций — принадлежит F. Т.е. любая непрерывная на отрезке $[a;b]$ действительная функция интегрируема по Риману. Нам понадобятся следующие утверждения.

1. Любая непрерывная на отрезке действительная функция достигает на этом отрезке своего максимума и минимума.

Действительно, образ компактного множества при непрерывном отображении — компактное множество. А любое компактное подмножество прямой содержит минимальный и максимальный элементы.

2. Если $\{A_i\}$ — семейство отрезков действительной прямой, содержащее сколь угодно малые отрезки и такие, что любые A_i и A_j этого семейства пересекаются, то $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \neq 0$. Отметим, что среди отрезков $\{A_i\}$ допускаются отрезки с совпадающими концами.

Действительно, пусть $A_i = [a_i; b_i]$. Ясно, что $\overline{a_i} = \max\limits_{1\le i\le n}\{a_i\} \le \min\limits_{1\le i\le n}\{b_i\} \le \overline{b_i}$. Последовательность отрезков $\{[\overline{a_i}; \overline{b_i}]\}$ удовлетворяет аксиоме Кантора, кроме того, отрезок $[\overline{a_i}; \overline{b_i}]$ принадлежит всем отрезкам $[a_m; b_m]$ для $1 \le m \le i$.

Из 2 легко получить

3. Пусть $\{[a_i; b_i]\}$ — последовательность отрезков такая, что каждые два отрезка последовательности пересекаются и $d([a_i; b_i]) = (b_i - a_i) \to 0$. Тогда любая последовательность $\{x_i\}$ чисел $b_i \le x_i \le a_i$ сходится, причем $\lim x_i = c$, где c — общая точка отрезков $[a_i; b_i]$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Приступим к доказательству существования интеграла Римана для функций из $\mathcal{C}_{[a;b]}$.

Для каждого разбиения I отрезка $[a;b]$ положим

$$\overline{D}_I(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (a_i - a_{i-1}), \qquad \underline{D}_I(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (a_i - a_{i-1}), \tag{1}$$

где $M_i = \max\limits_{a_{i-1}\le x\le a_i} f(x)$, $m_i = \min\limits_{a_{i-1}\le x\le a_i} f(x)$.

Положим $c_m = \underline{D}_{I_m}(f)$, $d_m = \overline{D}_{I_m}(f)$. Ясно, что $R_{I_m}(f) \in [\underline{D}_{I_m}(f); \overline{D}_{I_m}(f)] = [c_n; d_m]$. Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что

a) $[c_m; d_m] \bigcap [c_k; d_k] \neq 0$,

b) $d_m - c_m \to 0$ при $m \to \infty$.

Утверждение a) следует из того, что если разбиение $I_1 \subset I_2$, то $\underline{D}_{I_2}(f) \ge \underline{D}_{I_1}(f)$, $\overline{D}_{I_2}(f) \le \overline{D}_{I_1}(f)$, т.е., $[c_1; d_1] \supset [c_2; d_2]$. Взяв произвольные два разбиения I_1 и I_2, а также разбиение I_3, которое является упорядоченным объединением I_1 и I_2, получим: $[c_1; d_1] \supset [c_3; d_3]$; $[c_2; d_2] \supset [c_3; d_3]$.

Осталось доказать b).

Так как f непрерывна на $[a;b]$, то для $\varepsilon > 0$ и точки $x \in [a;b]$ найдется окрестность $Q_x(\varepsilon)$ такая, что

$$Q_x(\varepsilon) = \{y : y \in [a;b], |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\}. \tag{2}$$

Выберем из покрытия отрезка $[a;b]$ интервалами $Q_x(\varepsilon)$ конечное подпокрытие. Рассмотрим набор $\{k_0, \ldots, k_m\}$, состоящий из точек a и b (концов нашего отрезка) и всех концов интервалов конечного покрытия, попавших в отрезок $[a;b]$. Будем предполагать, что числа $\{k_0, \ldots, k_m\}$ упорядочены по возрастанию.

Положим $l = \max\limits_{1\le i\le m}(k_i - k_{i-1})$. Пусть I — разбиение, шаг которого меньше l. Тогда любой отрезок $[a_i; a_{i+1}]$ разбиения I пересекается не более чем с одной из точек множества $\{k_0, \ldots, k_m\}$, значит, лежит в одном из интервалов вида $Q_x(\varepsilon)$. Из последнего следует, что $\overline{D}_I(f) - \underline{D}_I(f) \le \varepsilon(b-a)$. Так как ε произвольно, то последнее неравенство доказывает b). Таким образом, доказано существование интеграла Римана для непрерывных на отрезке действительных функций.

Мера Каратеодори. 27.10.2020

Лебег построил теорию меры, т.е. обобщил понятие длины промежутка на более широкий класс множеств, поставив каждому измеримому множеству $E \subset \mathbb{R}$ число μE (меру множества E). Затем Каратеодори значительно упростил построение Лебега. Мы приступаем к изложению идей Каратеодори.

Каждому множеству E (все дальнейшее происходит на действительной прямой) поставим в соответствие число $\overline{\mu}E$, называемое *внешней мерой* множества E. Наряду с записью $\overline{\mu}E$ можно писать $\overline{\mu}(E)$.

Приступим к определению числа $\overline{\mu}E$.

Для набора $\Delta_1, \dots,$ интервалов таких, что $\bigcup\limits_i \Delta_i \supset E$ (набор $\{\Delta_i\}$ назовем *покрытием множества* E) определим понятие *длины покрытия* $\{\Delta_i\}$, положив ее равной $\sum\limits_{i=1}^{\infty} l(\Delta_i)$, где $l(\Delta_i)$ — длина интервала Δ_i.

Положим $\overline{\mu}E = \inf(\sum\limits_{i=1}^{\infty} l(\Delta_i))$, где inf берется по всем покрытиям множества E.

Далее встает важный вопрос: будет ли внешняя мера *аддитивна*, т.е., верно ли, что $\overline{\mu}(E \cup F) = \overline{\mu}E + \overline{\mu}F$, и более того, будет ли внешняя мера *счетно аддитивна*, т.е., верно ли, что если E есть счетная сумма множеств $E_1 \cup E_2 \cup \dots$, то $\overline{\mu}E = \sum \overline{\mu}E_i$.

Мы увидим, что это не всегда так. Но для некоторых классов множеств аддитивность и счетная аддитивность будут выполняться. На этом классе множеств мы будем называть функцию $\overline{\mu}$ *мерой* и обозначать ее символом μ.

Скажем, что E *измеримо по Каратеодори* (или просто измеримо), если для любого множества A справедливо равенство $\overline{\mu}A = \overline{\mu}(A \cap E) + \overline{\mu}(A \cap E')$. Здесь E' — дополнение E в $\mathbb{R}$.

Теорема. *Если E и F измеримы, то множество $E \cup F$ измеримо.*

Доказательство. Ясно, что мы должны доказать равенство

$$\overline{\mu}(A \cap (E \cup F)) + \overline{\mu}(A \cap (E \cup F)') = \overline{\mu}(A) \tag{1}$$

Воспользуемся измеримостью E и заменим первое слагаемое в (1):

$$\overline{\mu}(A \cap (E \cup F)) = \overline{\mu}((A \cap (E \cup F)) \cap E) + \overline{\mu}((A \cap (E \cup F) \cap E') = \overline{\mu}(A \cap E) + \overline{\mu}(A \cap F \cap E') \tag{2}$$

Используя закон Деморгана, перепишем второе слагаемое в (1):

$$\overline{\mu}(A \cap (E \cup F)') = \overline{\mu}(A \cap E' \cap F') \tag{3}$$

Окончательно, используя измеримость F, получим:
$\overline{\mu}(A \cap (E \cup F)) + \overline{\mu}(A \cap (E \cup F)') = \overline{\mu}(A \cap E) + \overline{\mu}(A \cap F \cap E') + \overline{\mu}(A \cap E' \cap F') =$
$= \overline{\mu}(A \cap E) + \overline{\mu}(A \cap E') = \overline{\mu}A.$

Какие следствия из этой теоремы?

1. Если каждое из множеств E_i $(i = 1, \dots, n)$ измеримо, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ измеримо.

2. Если множества $E_i (i = 1, \dots, n)$ измеримы и попарно не пересекаются, то

$$\overline{\mu}(A \cap (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mu}(A \cap E_i) \tag{4}$$

Действительно, $\overline{\mu}((A \cap (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n)) \cap E_1) + \overline{\mu}((A \cap (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n)) \cap E_1') = \overline{\mu}(A \cap E_1) + \overline{\mu}(A \cap (E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n)) \ldots$

Т.о., аддитивность $\overline{\mu}$ на измеримых множествах доказана.

Настал решающий момент для доказательства счетной аддитивности внешней меры.

Теорема. *Если $\{E_i\}$ — счетный набор измеримых множеств, причем при $i \neq j$ $E_i \cap E_j = \emptyset$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ измеримо.*

Сначала докажем лемму:

Лемма. *В условиях теоремы* $\overline{\mu}(A \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(A \cap E_i)$.

Для доказательства необходимы следующие неравенства:

$$\overline{\mu}(A \cap (\cup E_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(A \cap E_i) \tag{*}$$

и

$$\overline{\mu}(A \cap (\cup E_i)) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(A \cap E_i) \tag{**}$$

Неравенство (*) очевидно. Для доказательства (**) заметим, что
$\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\mu}(A \cap E_i) = \overline{\mu}(A \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i)) \leq \overline{\mu}(A \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i))$, т.е., $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\mu}(A \cap E_i) \leq \overline{\mu}(A \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i))$.
Переходя к пределу в последнем неравенстве, получим (**).

Приступим к доказательству теоремы. Нам необходимо доказать, что
$\overline{\mu}A = \overline{\mu}(A \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i)) + \overline{\mu}(A \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i)')$. Но мы знаем, что $\overline{\mu}A = \overline{\mu}(A \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i)) + \overline{\mu}(A \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i)')$ (мы в каждом слагаемом заменили бесконечные суммы на конечные). Внешняя мера второго множества увеличилась, поэтому $\overline{\mu}A \geq \overline{\mu}(A \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i)) + \overline{\mu}(A \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i)')$.

Переходя к пределу, получим: $\overline{\mu}A \geq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(A \cap E_i) + \overline{\mu}(A \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i)')$ и наконец, применив Лемму, получим: $\overline{\mu}A \geq \overline{\mu}(A \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i)) + \overline{\mu}(A \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i)')$. Мы использовали только (*). Заметим, что в случае, если E_i измеримы и попарно не пересекаются, то из Леммы следует, что $\overline{\mu}(A \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i)) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(A \cap E_i)$. В частности, $\overline{\mu}(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}E_i$.

Корень n-й степени из n. 16.03.2021

Задача. Докажите, что $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Решение. Ясно, что $\sqrt[n]{n} > 1$. Мы покажем, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что $1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$ для всех $n > N$.

Нам достаточно доказать, что

$$(1 + \varepsilon)^n > n \text{ для всех n>N.} \tag{1}$$

Положим $a_n = \dfrac{(1+\varepsilon)^n}{n}$ и докажем, что $a_n \to \infty$. Из этого, в частности, будет следовать, что $\dfrac{(1+\varepsilon)^n}{n} > 1$ для всех достаточно больших n, т.е. нужное нам неравенство (1).

Положим $\alpha_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(1+\varepsilon)^{n+1}\cdot n}{(n+1)(1+\varepsilon)^n} = \dfrac{(1+\varepsilon)}{1+\frac{1}{n}}$. Ясно, что $\dfrac{1+\varepsilon}{1+\frac{1}{n}} > 1$, если $1+\frac{1}{n} < 1+\varepsilon$, т.е. для всех достаточно больших n. Значит, a_n с некоторого места возрастает. Если $\{a_n\}$ ограничена, то a_n имеет предел. Но $a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{1+\varepsilon}{1+\frac{1}{n}}$, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1+\varepsilon}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot (1+\varepsilon).$$

Т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = (1+\varepsilon)\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, значит, $a_n \to \infty$.

Задача об устойчивых паросочетаниях.

Теорема. *Имеется n мужчин и n женщин. Мы хотим разбить их на супружеские пары. Каждая женщина имеет свою собственную оценку каждого мужчины, не зависящую от оценок других женщин. Разные мужчины имеют различные оценки у одной и той же женщины. Аналогично, каждый мужчина имеет независимые от других мужчин оценки женщин. При этом разные женщины получают различные оценки у одного и того же мужчины. Например, каждый мужчина может присвоить каждой женщине некоторое натуральное число. И чем выше присвоенное женщине число, тем предпочтительнее она для этого мужчины. Переженить всех мужчин и женщин означает разбить их на пары. Любое такое разбиение называют* ***паросочетанием****. Члены одной пары назовем* ***супругами****: мужчину —* ***мужем****, а женщину —* ***женой****. Если муж в одной из пар оценивает некоторую женщину другой пары выше своей жены, и при том эта женщина оценивает этого мужчину выше своего мужа, то этот мужчина может образовать новую супружескую пару с такой женщиной и паросочетание при этом разрушается. Паросочетание, в котором это произойти не может, называется* ***устойчивым****. Оказывается, всегда можно так переженить n мужчин и n женщин, что образующееся паросочетание окажется устойчивым.*

Доказательство. По индукции.

Для случая $n = 1$ утверждение теоремы очевидно.

Предположим, что теорема доказана для n. Докажем ее для $n+1$.

Будем произвольно выбирать по n мужчин и n женщин из нашей совокупности из $2n+2$ людей ($n+1$ мужчины и $n+1$ женщины) и рассматривать устойчивые паросочетания между ними. Существование устойчивых паросочетаний обеспечено инуктивным предположением.

Каждому устойчивому паросочетанию K из n мужчин и n женщин поставим в соответствие два числа: $g(K)$ — сумму по всем женщинам паросочетания K их оценок своих мужей и $m(K)$ — сумму по всем мужчинам паросочетания K их оценок своих жен.

Далее, из всех устойчивых паросочетаний, состоящих из n пар, выберем такое паросочетание K, что $m(K)$ максимально.

Покажем, что выбранное паросочетание K таково, что каждый мужчина паросочетания K оценивает свою жену выше единственной свободной женщины. В дальнейшем будем обозначать ее (свободную женщину) символом W.

Предположим противное. Т.е. найдутся мужчины, которые оценивают W выше своих жен.

Среди таких мужчин выберем того, которого W оценивает выше других. Теперь обьединим этого мужчину с W в пару, а бывшую его жену (обозначим ее W') сделаем свободной.

У нас появилось новое паросочетание K'. Ясно, что оно по прежнему устойчиво. Но $m(K') > m(K)$. Последнее противоречит выбору паросочетания K.

Итак, мы доказали существование устойчивых паросочетаний из n пар таких, что женатые мужчины оценивают своих жен выше единственной свободной женщины. Из всех таких паросочетаний выберем такое паросочетание K, что $g(K)$ максимально.

Покажем, что если к найденному паросочетанию добавить пару из свободной женщины и мужчины, то оно останется устойчивым. Символом M обозначим свободного мужчину, а символом W —

свободную женщину. К устойчивому паросочетанию K добавим пару $(W; M)$ и покажем, что новое паросочетание из $n+1$ пары устойчиво.

Легко видеть, что если оно не устойчиво, то найдется женщина, которая оценивает M выше своего мужа. Среди всех таких женщин мы выберем такую W', которую M оценивает выше других, и если верно наше предположение о неустойчивости, то M оценивает W' выше чем W.

Теперь мы в паросочетании K пару, в которую входила женщина W', заменим на пару $(W'; M)$. Легко видеть, что новое паросочетание K', которое получилось из K после нашей замены, устойчиво. Каждый мужчина из K' оценивает свою жену выше, чем свободную женщину W. Но $g(K') > g(K)$. Последнее противоречит выбору паросочетания K.

Таким образом, доказано, что паросочетание K с добавленной парой $(M; W)$ — устойчиво.