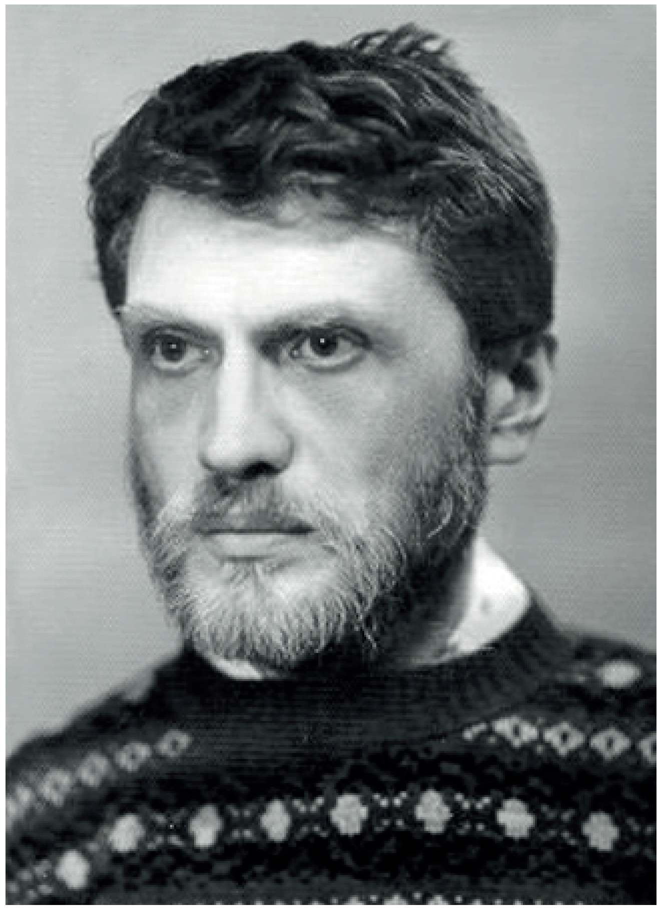
Памяти Валерия Анатольевича Сендерова



Приложение к журналу «Математическое образование»
Серия «Образование: история, персоналии, проблемы»

Выпуск 1 (05), февраль 2021 г.

Москва, 2021

Приложение к журналу “Математическое образование”

ISSN 1992-6138

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Составитель и редактор Канель-Белов А.Я.
Ответственный за выпуск Комаров С.И.

Выпуск 1 (05), 2021 г.

В настоящем выпуске представлены: воспоминания о ярком преподавателе математики и правозащитнике Валерии Анатольевиче Сендерове, правила проведения математических боев между различными командами (классами, школами, сборными школ и городов), а также краткие отчеты о проведении ряда математических боев с указанием даты и места проведения, участников и результатов (В.А. Сендеров был активным разработчиком правил, организатором и членом жюри многочисленных матбоев). В приложении даны ссылки на материалы о правозащитной и общественной деятельности В.А. Сендерова.

Адрес электронной почты для материалов: matob@yandex.ru

Подписано в печать 21.02.2021. Объем 3 п.л. Тираж 200 экз. Цена свободная.

Памяти Валерия Анатольевича Сендерова

Приложение к журналу “Математическое образование”

Выпуск 1 (05), февраль 2021 г.

Содержание

А. Я. Канель-Белов

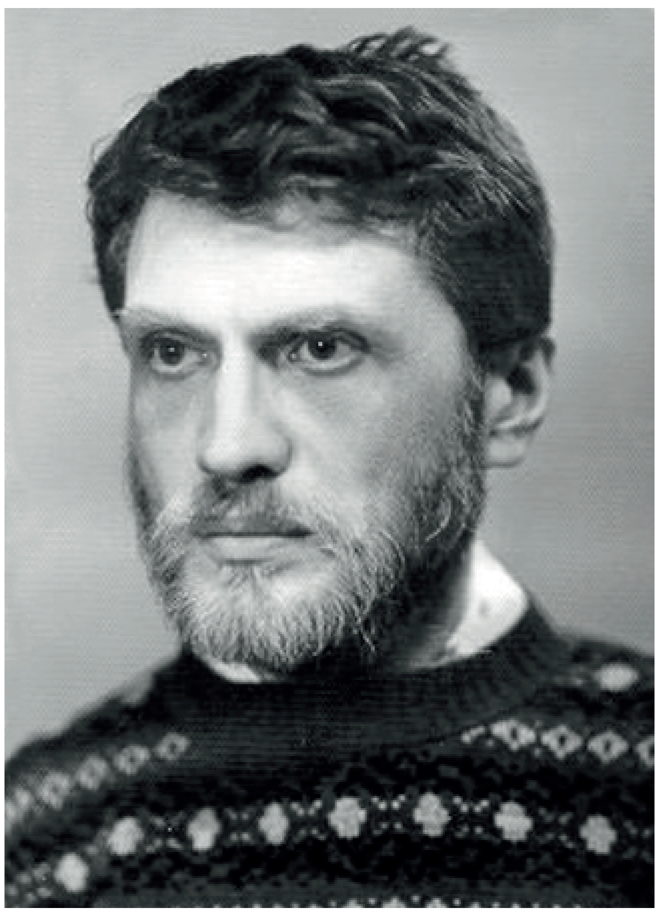
Памяти Валерия Анатольевича Сендерова

В прошедшем году испрлнилось 75 лет со дня рождения Валерия Анатольевича Сендерова – яркого педагога-математика, общественного деятеля, правозащитника, политзаключенного 80-х годов. Настоящий выпуск Приложения к журналу “Математическое образование” посвящен этому юбилею.

В связи с общей тематикой Приложения в выпуске подробно раскрывается только одна из сторон деятельности В.А. – участие в организации и проведении “математических боев”, очень популярных в Москве и ряде других городов в 70-е – 90-е годы (традиция их проведения сохраняется до сих пор).

Выпуск начинается воспоминаниями профессора, доктора физ.-мат. наук Алексея Яковлевича Канель-Белова.

В конце сборника даны ссылки на материалы об общественной и правозащитной деятельности В.А.



Валерий Анатольевич Сендеров, портрет 1980 г.

Я знал Валерия Анатольевича будучи школьником, он постоянно организовывал математические бои, а я был их постоянным участником. Помнятся несколько матбоев, где Саша Разборов был капитаном команды Второй школы, я заместителем, а капитаном команды 91-й школы был Максим Концевич.

Сендеров научил меня одной важной вещи. Говоря о решении задач, он показывал идейное ядро, где всё и происходит. Оно маленькое – это как жало станка, и именно это – главное, что надо увидеть. Станок состоит из большой станины, приводных ремней, таблички с указанием производителя, и т.п., а жало маленькое. Так же и задача: важно выделять, где всё происходит и почему происходит.

Выделению ядра или “жала” он научил не только меня. Привожу воспоминание одного математика:

Мне тоже вспомнилось что-то из моего небольшого опыта общения с В.А. Так случилось, что вышел он из тюрьмы в 1987 году, когда я был в выпускном классе. И возникла активность по натаскиванию всех желающих из Второй и 57-й школ на мехматские “гробы”, с тем чтобы поступить на мехмат, точнее поступать. Я на мехмат поступать не стал, в чем ни на минуту не раскаиваюсь, но вот сами эти занятия... Их было несколько. Разбирались реально сложные задачи, вполне олимпиадные, но в олимпиадных предполагается элемент красоты, что для мехматских “гробов” необязательно. И вот, хоть я никогда олимпиады особо не любил, эти занятия имели какую-то особую красоту. Действительно, как Лёша пишет, В.А. показывал некоторое “ядро” и “всё остальное”, и делал это так мастерски, как никто другой в контексте олимпиадных задач. Я первый раз в жизни ощутил какую-то красоту олимпиадных задач, и мне хотелось ходить на эти занятия независимо от мехмата и т.п. И это была даже красота не самих задач, а красота раскладывания на “ядро” и “всё остальное”. Ну и, конечно, было ощущение, что ты общаешься с совершенно героическим человеком, просидевшим 5 лет в тюрьмах, значительную часть этого в карцере. В.А. несомненно обладал некоторым гипнотизмом, исходившим из его могучей внутренней силы. Людям, окружавшим меня, от родителей до Гриши К., потребовалось немало усилий, чтобы заставить меня рассмотреть незамутнённым сознанием слова В.А. “ну если вас завалят, что наверняка и будет, то по вашим костям пройдут другие”. Когда я находился рядом с ним, критическое мышление (типа “а завалюсь так заберут в армию” и проч.) совсем отшибало. Этот человек пошел на намного бо́льшие лишения, и думать о собственном комфорте рядом с ним было невозможно. Я слышал от разных людей, особенно старшего поколения, с которыми В.А. общался до тюрьмы, что так реагировали очень многие[1].

Валерий Анатольевич Сендеров вместе с Борисом Ильичом Каневским заложили традицию олимпиад и математических боев во Второй школе, продолжающуюся и по сей день. Очень часто эти матбои Вторая Школа выигрывала. Такая традиция принесла плоды не только во Второй школе. В последующем покойный Митя Дерягин (выпускник 1981 года, победитель Всесоюзной олимпиады) начал кодификацию правил. Более-менее окончательную форму матбои приняли в начале 90-х, после синтеза московской и питерской версии правил, большая в этом заслуга Саши Ковальджи (ныне – зам. директора по науке лицея “Вторая Школа”)[2]. Упомянем Московские Турниры математических боев.

В.А. Сендеров был активным общественным деятелем, участвовал в работе университета Б.А. Суботовской, борьбе за интересы абитуриентов. Говорить о нем нельзы, не упомянув политику. Чтобы не создалось искажённого представления об общественных взглядах Валерия Анатольевича, следует отметить, что он был государственник. Его последнее интервью можно найти по ссылке

http://www.russ.ru/pole/Kak-byvshij-dissident-i-politzaklyuchionnyj-stanovitsya-ohranitelem

Заголовок и манера, в которой было взято интервью, автору совсем не нравятся – в конце концов, интервьюер не должен давать ярлыки, тем более в заголовке. Я привожу эту ссылку только потому, что это интервью – последнее. Вот выдержка из интервью: “Поймите, я не о том, что власть хороша. Я о том, что вы, господа, – много хуже. И лучше иметь дело с циничным квалифицированным

[1]Автор не одобряет вовлечение молодежи, особенно несовершеннолетних, в политику.

[2]См. Дерягин Д.В., Канель А.Я., Ковальджи А.К., Кондаков Г.В., Рубанов И.С., Финашин С.М., Фомин Д.В., Шапиро А.А., Яценко А.Д, “Математический бой двух команд: Правила, комментарии, опыт проведения”, Математика в школе, 1990, № 4, 20–25. Вариант этой статьи содержится в данном выпуске, стр. 6

юристом Путиным, чем с воем толпы: «Навальный вас любит!»"

Вот последняя статья Валерия Анатольевича (совместно с Ю. Кублановским и Ф. Разумовским):

http://www.rg.ru/2014/03/12/pismo.html

Ее первый абзац таков: "Тревожно за Родину. Складывается впечатление, что оппозиционная новая интеллигенция ведет Россию к новому Февралю, а значит, к очередному крушению. Мы уже давно не видим нормальной конструктивной критики правительства и власти. Слышны только пораженческие вопли и оскорбительные, совершенно невыполнимые требования. И все это делается ради одной плохо скрываемой цели - капитуляции. Российская власть и государство снова должны капитулировать – перед очередным «освободительным полем»."

Он высоко ценил "Вехи" – сборник статей о русской интеллигенции, созданный деятелями Серебрянного Века. Этот сборник перевернул моё сознание, дал мне порцию свободы и понимания, в том числе того слоя людей, с которым часто приходится иметь дело. Одна из мыслей ему и мне, как человеку, занимающемуся классификацией идей решения олимпиадных задач, оказалась близка. Давайте разберемся, что такое "правые" и что такое "левые". Для этого выпишем типичные "правые" и типичные "левые" взгляды и заметим, что люди мыслят "пакетно". (Вспоминается остроумное высказывание Валерия Анатольевича о характере дискуссий: "они каются в грехах друг друга"). Эти взгляды надо объяснять, но не исходя из их "истинности" или "ложности", а исходя из эмоционального строя. И такая попытка, пусть весьма не полная, в сборнике была дана. Я бы добавил, что анализ должен использовать технику, в частности, З. Фрейда и К. Юнга, находивших "смысл" в симптомах. И в этом есть родство с книгой В. Проппа "Исторические корни волшебной сказки" (в первой части классифицируются сюжеты и элементы сказки, дается структурный анализ, во второй даются объяснения).

Моя личная эволюция взглядов была во многом схожа. До начала 90-х у меня были либеральные взгляды (в том числе связанные с проблемами при поступлении), потом они стали эволюционировать. Началось с крамольной для меня тогдашнего мысли. Если великие квантовские деятели появлись в начале 70-х, а в течение более 20 лет не появлялись – то означает ли это что они, подавляя других создавали выжженую землю? Я изучал *структуры подавления людей и скрытые мотивы* – и мысль, бывшая крамольной, стала очевидной. Как поломать это – не только для себя, но и для других (и самому не стать ревнивцем) – и я осуществил несколько шагов. Осознание структуры подавления и принципиальной позиции – помогать в реализации – стало очень важным фактором того, что я стал одним из немногих достаточно сильных математиков, возникших из олимпиадных деятелей. Размышление над скрытыми мотивами срезонировало с "Вехами" (а также с работой Гротендика "Урожаи и Посевы"). Я долгое время дружил с покойным А.В. Гладким – а он был близок к так называемой "Хельсинской группе". Общался я и с Пигуро С.С. Довелось в доме у Е.Г. Глаголевой встретиться с С.А. Ковалевым в начале 90-х. Меня поразила "литературность" мышления – люди мыслили не реальностью, а литературными образами – в первую очередь из антисоветской литературы, во вторую – из русских классиков (подобное свойство в одобрительной (противоположной моей) – коннотации отмечал Ю. Лотман). Многие из них, искренне думая что борятся за права человека, на подсознательном уровне – т.е. на деле – реализовывали свою агрессию к стране. Интеллигенция не изменилась, ничему не научилась за 150 лет, осталась враждебной стране, и я перестал быть интеллигентом. Интересно, что моя лекция об идеологических искажениях и подсознательных мотивов, влияющих на научные теории, в особенности в гуманитарной сфере, при том что в ней не обсуждалась политика, вызвала куда более резкое неприятие

http://usdp.ru/files/kanel1.pdf

(с заменой аргументов острыми эмоциональными высказываниями) у представителей либеральной интеллигенции чем прямая полемика. См. также

https://www.youtube.com/watch?v=lhRH1BAFSoI

Один из либеральных деятелей говорил мне, что я по его мнению человек "имперский", потому что заинтересован не в ценностях простой жизни для людей но в ценности сверхрезультатов. С гордостью посвященного, получившего тайные знания от тайных жрецов, он сказал, что Европу держат вместе (во избежание войн) подавляя национализм, изводя крайне левые и правые партии, навязывая простые мещанские ценности (т.е. кастрируя национальный дух (интересно, какая это демократия?) – ясно что Россия не исключение – ее хотят уничтожить как цивилизацию). Приведу еще отзыв о Валерии Анатольевиче от деятеля 90-х – достаточно крупного, чтобы видеть верхушку – отзыв пристрастный, совершенно несправедливый, но говорящий много как о собеседнике, так и о Валерии Анатольевиче.

"В связи со ссылками на Валеру Сендерова и цитатами, приведенными Алексеем, подумал, что Валера, при все уважении и симпатии к его могучему (хотя и очень специфическому) интеллекту и мужеству политзека, был абсолютно внечеловечен. Живые, реальные люди, их жизни, их судьбы, их радости и их беды не интересовали его совершенно – он оперировал лишь процессами и идеями, в которых все эти люди были лишь объектами, но не субъектами Кстати, к себе самому как к живому человеку он относился столь же равнодушно – интеллект (рацио) был единственным, что он считал для себя ценным. В некотором смысле это был худший вариант "человека-математика". И большая удача, как ни дико это звучит, что тупость советского режима сделала его честным политзеком – в иных условиях из него мог бы, вероятно, получиться комиксовый mad scientist. Как-то, году, кажется, в 72-м или 73-м по дороге от Второй[3] до редакции "Кванта" он изложил мне свою модель общественного переустройства (названную им "аристократическим радикализмом"), основная идея которой состояла в механическом разделении общества на социальне группы по критерию "уровня интеллекта" (он предлагал для его измерения пресловутый IQ). Каждой группе предписывался определенный "обобщенный" вид деятельности – от простейших низкоквалифицированных работ до наук, искусств и управления. Измерения интеллекта проводились несколько раз за жизнь человека – в детстве, юности и еще пару раз во взрослом состоянии (кажется, в 35 и в 45 лет). Соответственно, "социальный лифт" определялся в пределах социальных групп, соответствующих очередному измерению IQ. Никакие (очевидные даже мне тогдашнему) проблемы в реализации этой системы (не говоря уже о ее отвратительной бесчеловечности, о десубъективации человека, низведении его до уровня и роли муравья или робота) Валеру совершенно не беспокоили и не интересовали. Мы тогда крепко поругались... Собственно, уже из-за этих своих особенностей Валера не мог не быть государственником. И никак не мог быть либералом, поскольку в центре и основе либерализма – именно свободный живой человек, автономная самостоятельная личность."

На деле проповедь такой истеричной автономизации моим собеседником приводит к деградации личности, уничтожении успехов и прекращении цивилизации, если только для избранного слоя не проповедовать обратного. Об издержках индивидуализма говорил еще Токвиль в своей работе "Демократия в Америке", прочитанной мной по совету А.В. Гладкого (и пассаж моего собеседника хорошо иллюстрирует начало вырождения).

Есть люди, с которыми не во всём соглашаешься, но с их уходом возникает некая пустота (такими, например, для автора были Н. Б. Васильев и И. Ф. Шарыгин). Я хотел обсудить с В.А. ряд вещей, собирался позвонить – но как-то всё откладывалось...

Канель-Белов Алексей Яковлевич,
профессор Bar-Ilan University, Израиль,
доктор физ.-мат. наук.

E-mail: kanelster@gmail.com

[3]школы

Математический бой двух команд: правила, комментарии, опыт проведения

Коллектив авторов

Один из вариантов статьи, опубликованной в журнале "Математика в школе", 1990, № 4, с. 20-25. Рассказывает о правилах проведения специфического соревнования, между командами школьников профильных физико-математических классов однй или различных школ — "математического боя". К 1990 году был накоплен большой опыт проведения матбоев (начали проводиться в 70-е годы) и правила после многочисленных доработок и согласований обрели более-менее окончательную форму, которая здесь изложена. Также приведены рекомендации по тактике, описания различных ситуаций в ходе проведения матбоя, примеры задач с краткими решениями для конкурса капитанов и для самих команд.

Одним из основоположников создания матбоев, активным организатором, составителем задач, а также членом жюри был Валерий Анатольевич Сендеров, памяти которого посвящен этот выпуск.

Предисловие

Матбой чем-то напоминает турнир рыцарей, где вопросы честного ведения боя (по всем правилам) стоят на первом месте. Как и всякий рыцарь, капитан побежденной команды должен иметь мужество поздравить капитана-победителя, ибо главное — не победа, а искусство коллективного разума и творческая работа каждого.

Если в школе по большей части решают задачи для учителя, на олимпиадах — для себя, то во время матбоя — для победы всей команды. Сегодняшний принцип обучения коллективный, но антиколлективистский: считается, что решать задачи вместе плохо, будет "списывание", — забывают, что "сильный" учится объяснять "слабому", а "слабый" получает индивидуальную помощь, на которую у учителя нет времени. А бывает, что один найдет идею, а другой ее подхватит и оформит! Не потому ли сейчас редко встречаются дружные классы, что каждый за себя?

В классе все организует учитель, ему легче работать с послушными исполнителями и получать стандартные ответы на стандартные вопросы, а растить творческих самостоятельных людей — трудно. На матбоях — полная самоорганизация, вся ответственность — на самих ребятах, и результат — осязаемый, зависящий от множества удач и просчетов, переживаемых у всех на глазах.

Желание — великий двигатель, с которым человеку не страшны горы черновой работы, он стремится к цели, не замечая усталости. Такого энтузиазма в решении трудных задач и такой мобилизации всех сил и способностей, как во время матбоя, нигде не увидишь. Матбой — это еще и игра с неполной информацией о партнере, где нужны интуиция и верная тактика; это и увлекательный "спектакль", когда перед всеми надо исполнить непростую роль.

Это не значит, что олимпиады и конкурсы — хуже, нет, на олимпиадах, например, школьники учатся оформлять свои мысли письменно, проверять самих себя, не надеясь на чью-то помощь; это очень важно, но того, что дает матбой, заменить не может.

Все сказанное относится к *хорошо подготовленному матбою*, когда уровень задач соответствует уровню команд, когда четко решены оргвопросы, когда внимание участников сосредоточено на содержательных моментах, а не на желании победить любой ценой. Именно поэтому рыцарские качества — чести, выдержки и уважения к противнику — имеют первостепенное значение.

Опыт матбоев поможет участникам в будущем: умение сделать научный доклад, умение выслушать и понять работу другого, умение задавать четкие вопросы по существу — все это пригодится на семинарах и конференциях, для рецензирования книг и статей, для совместной научной работы.

А еще ученики разных школ знакомятся, создают новый круг общения. И последнее: после удачно проведенного матбоя просыпается вкус к хорошей работе, хочется выступить еще раз, но как следует, учтя все промахи. Поэтому проиграть командам подчас бывает полезнее, чем победить.

Матбои зародились в Ленинграде и были придуманы Иосифом Яковлевичем Веребейчиком примерно в 1965 году. Первые матбои проводились в стенах школы № 30, где Иосиф Яковлевич работал учителем математики и вел кружки. Через много лет появилось краткое сообщение о матбоях в журнале "Квант" (1972, № 10), а еще через много лет — задачи матбоев в журнале "Математика в школе" (1989, № 5), но правил, как таковых, опубликовано не было. Матбои стали проводиться в разных городах, но при этом возникли отдельные расхождения в правилах. С большим трудом, благодаря летним математическим школам в г. Кирове, где встречались московские, ленинградские и кировские преподаватели, в долгих спорах удалось преодолеть эти расхождения.

Статью подготовили |Д.В. Дерягин|, А.Я. Канель, А.К. Ковальджи, Г.В. Кондаков, И.С. Рубанов, С.М. Финашин, Д.В. Фомин, А.А. Шапиро, А.Д. Яценко, полезные замечания сделали: Д.В. Аблов, А.И. Артемьев, И.А. Биндер, Ю.М. Бурман, К.Н. Игнатьев, Э.Ю. Красс, Н.А. Кузьмичева, В.А. Уфнаровский, М.Ю. Чечельницкий.

Мы не могли изучить все варианты проведения матбоя, поэтому будем благодарны читателям, которые пришлют нам свои варианты, идеи, критику или вопросы — это поможет в дальнейшей работе[1].

А теперь о самих правилах. Они выглядят сложными, но здесь, как в спорте: в футбол, например, играют даже дети, а правила международных соревнований — это горы пунктов, подпунктов и примечаний! Идея матбоя тоже проста: команды решают одни и те же задачи, потом по очереди отвечают решения, а соперники их проверяют. Однако, осуществить эту идею непросто — неизбежно возникают вопросы: что делать, если у команды нет решения? Может ли команда помогать выступающему? Может ли проверяющий (оппонент) дополнять отвечающего (докладчика)? Как оценивать работу докладчика и оппонента? и т.д. Затем возникают непредвиденные ситуации, которые приводили к изменению или уточнению правил, — и появились "пункты, подпункты и примечания" (излишние при первом чтении, но необходимые в дальнейшем).

Схема боя

Матбой — это соревнование двух команд в решении специально подобранных задач, в умении отвечать решения у доски и в умении проверять чужие решения.

Команды получают одинаковые задачи, и решают их в разных помещениях заданное время, потом собираются вместе для проверки решений. Таким образом, матбой состоит из двух частей: решения задач и собственно боя.

Чтобы определить, кто какую задачу будет отвечать, команды делают "вызовы". Вызывающая команда сообщает номер задачи, решение которой она хочет услышать, а другая сообщает принят ли вызов. Обычно команды вызывают друг друга по очереди.

Если вызванная команда хочет отвечать, то она выставляет докладчика, а другая команда — оппонента для проверки решения. Командам могут даваться минутные перерывы для помощи докладчику или оппоненту.

Если решение задачи верное, то переходят к обсуждению другой задачи, а если неверное, то см. "Перемена ролей" и "Корректность вызова".

Если вызванная команда отказалась отвечать, то вызывавшая команда должна сама рассказать решение задачи. При этом, если оппонент докажет, что у докладчика нет решения, то вызов считается некорректным. Тогда вызывавшая команда должна повторить вызов.

[1] Это обращение было актуально на момент написания публикуемого здесь варианта статьи — 30.11.1990.

Команда может отказаться делать очередной вызов (если у нее не осталось решенных задач и она не хочет делать некорректный вызов). Тогда другая команда получает право рассказать решения оставшихся задач.

После каждого выступления жюри дает командам очки как за доклад, так и за оппонирование.

Порядок проведения матбоя

Ответственный матбой лучше проводить в учебное время (и занятия, и матбой — большая нагрузка, а если проводить в воскресенье, то не будет отдыха и участники не успеют подготовиться к урокам).

Договорные условия

Организаторы боя заранее договариваются о следующем:

1. Ограничено ли число участников в команде.
2. Время на решение задач.
2. Ограничено ли время на бой.
3. Будет ли кормление участников.
4. Допускаются ли зрители.

Перед началом решения задач жюри напоминает основные моменты правил и устанавливает условия боя:

1. Предельное число выходов к доске одного человека (обычно 2).

2. Число минутных перерывов (обычно 3).

3. Формулировка некорректного вызова: ошибку нашел оппонент или жюри (см. “Корректность вызова”).

4. Примерное время на доклад (обычно 15 минут), после которого жюри решает: дать еще время или передать слово оппоненту.

5. Какой круг фактов и методов можно использовать без доказательства (например: принцип Дирихле, математическая индукция, остатки по модулю, алгоритм Евклида, неравенство для средних, эйлерова характеристика, теорема о промежуточном значении, теорема Безу).

6. Можно ли пользоваться литературой и калькуляторами во время решения задач (обычно “да”).

7. Можно ли выходить к доске с записанным решением (обычно “да”).

8. Можно ли перед началом доклада подготовить доску: сделать чертежи, написать формулы (обычно “да”).

9. Можно ли оппоненту дополнять докладчика, если он не нашел пробелов в решении (обычно “нет”, см. “Перемена ролей”).

10. Можно ли при замене докладчика рассказать другое решение (обычно “нет”).

11. Какую разницу очков считать ничейной (обычно не больше 6).

Решение задач

Есть джентльменское правило: прежде чем решать задачи, команды сообщают жюри все задачи, решения которых им известны (матбой — это не клуб знатоков). Жюри исключает или заменяет эти задачи (предварительно проверив, что идея решения действительно известна).

Представитель жюри регулярно посещает команды и отвечает на вопросы по условиям задач. При этом каждое уточнение условий, данное одной команде, сразу же должно сообщаться и другой команде.

Жюри не должно давать информации о трудности задач. В процессе решения задач и во время боя команды не должны общаться и знать количество решенных задач у соперников.

Начало боя

Когда время на решение задач истекло, команды и жюри собираются вместе.

Целесообразно создать обстановку (расставить столы) для удобного общения членов команд и жюри (рис. 1).

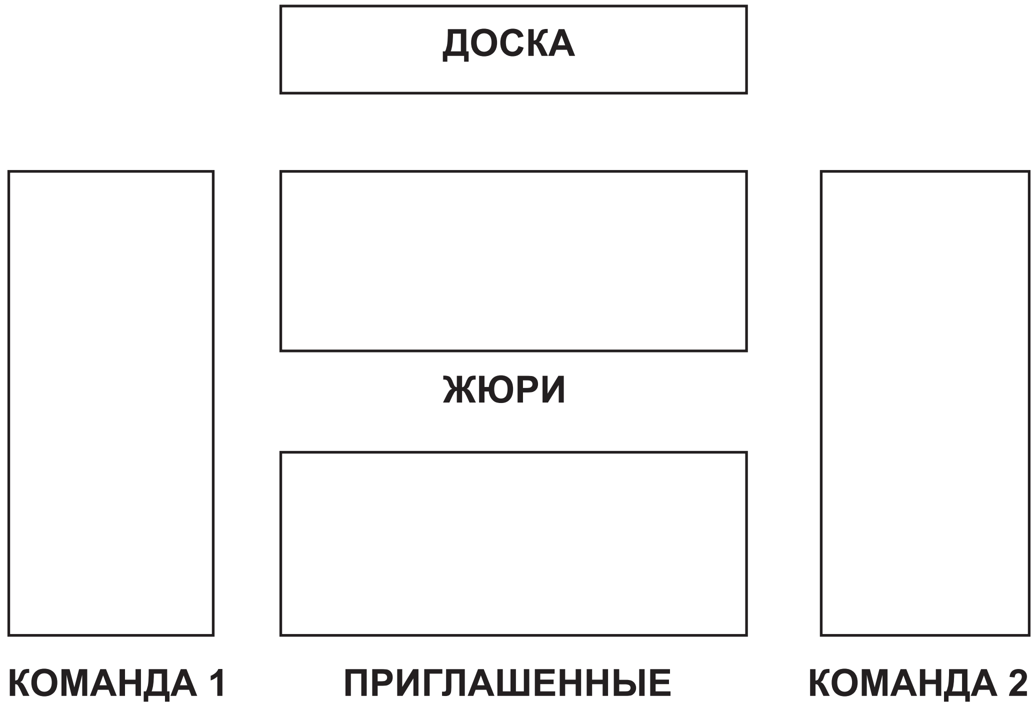


Рис. 1

Капитаны сообщают названия команд. На доске рисуется таблица результатов:

Задача	Очки команды 1	Вызов	Очки команды 2	Очки жюри

Существуют ограничения на общение участников, которые показаны на схеме (рис. 2; например, оппонент может общаться только с докладчиком и с жюри, а капитан — только со своей командой и с жюри).

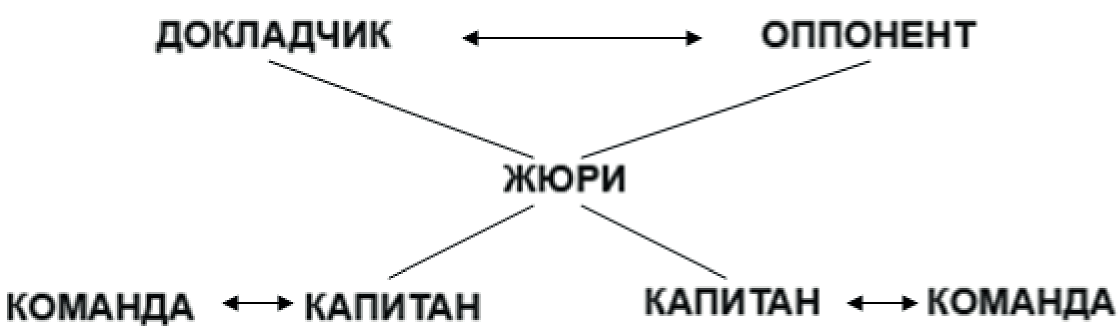


Рис. 2

Конкурс капитанов

Капитаны выходят к доске и получают достаточно простую задачу на сообразительность, в которой требуется дать только ответ, или игру, в которой не видно простой выигрышной стратегии (при этом капитанов спрашивают, кто хочет начать игру). Кто раньше ответит — определит очередность.

Конкурс кончается, когда один из капитанов даст ответ или победит в игре. Если ответ верен, то капитан победил, если — неверен, то победил другой капитан.

Капитан, победивший в конкурсе, сообщает, какая команда сделает первый вызов. (За победу в конкурсе капитанов очки не даются).

Вызов

Капитан вызывающей команды сообщает номер задачи, решение которой команда хочет услышать, а другая команда отвечает, принят ли вызов.

Если вызванная команда хочет отвечать, то она сообщает, что вызов принят и выставляет докладчика, а вызывавшая команда - оппонента для проверки решения.

Если вызванная команда отказалась отвечать, то вызывавшая команда должна сама предъявить решение (выставить докладчика, а другая команда - оппонента). В этом случае говорят, что происходит проверка корректности вызова.

Докладчик и оппонент

В идеале: сначала докладчик сообщает решение, затем ему задают вопросы оппонент, потом жюри. В процессе доклада оппонент и жюри стремятся не прерывать докладчика и пользуются фразами типа: “это очевидно, можно не доказывать”, “повторите, пожалуйста, этот момент”.

Докладчик может не отвечать на вопросы оппонента во время доклада, но по требованию оппонента или жюри должен дать план решения.

Оппонент не должен требовать доказательства утверждений из школьной программы или круга “известных” фактов. В спорных случаях вопрос решает жюри.

Время на обдумывание вопросов у доски 1 минута (оппоненту — чтобы задать, докладчику — чтобы ответить).

Команды могут помогать докладчику и оппоненту только во время минутного перерыва (соперники тоже пользуются этой минутой). Во время минутного перерыва можно заменить докладчика или оппонента (при этом учитывается выход к доске).

Если докладчик уважает оппонента и указывает на пробелы в своем решении, то считается, что оппонент тоже их нашел.

Если оппонент согласился с решением докладчика или за минуту не подготовил вопрос, и его команда не взяла минутный перерыв, то оппонент и его команда больше не участвуют в обсуждении задачи.

Часть решения

Если за минуту, данную на обдумывание вопроса, который жюри считает существенным, докладчик не подготовил ответ и команда не взяла минутный перерыв, то считается, что в решении есть пробел (“дырка”).

Решена ли задача, определяет жюри (рассуждают, например, так: “разобран только один из двух случаев"” или: “вряд ли за разумное время можно доделать решение у доски” — решение не принято, или: “ясно, что таким способом можно найти все ответы, поэтому нет смысла проводить выкладки” — решение принято).

Перемена ролей

Если вызов был принят, а докладчик предъявил только часть решения, то возможна перемена ролей.

Вариант для сильных команд: вызывавшая команда получает право рассказать свое решение только в том случае, когда оппонент показал, что у докладчика нет решения; если оппонент нашел лишь небольшие пробелы в решении, то он имеет право сразу их восполнить, но не рассказывать свое решение. Если оппонент не нашел пробелов, то он и его команда в обсуждении задачи больше не участвуют.

Вариант для слабых или неопытных команд: вызывавшая команда может рассказать свое решение, если решение докладчика не принято жюри (даже когда оппонент не нашел пробелов).

Во время перемены ролей можно заменить бывших докладчика или оппонента (при этом учитывается выход к доске и минутный перерыв).

Новый докладчик может пользоваться всеми результатами, которые доказал бывший докладчик.

Корректность вызова

Если вызов принят, то вопроса о его корректности не ставится (иногда говорят: “принятый вызов всегда корректен”).

Если вызов не принят, то вызывавшая команда должна сама рассказать решение, и здесь возможны два случая:

1. Вызывавшая команда не стала отвечать. Тогда вызов “автоматически” считается некорректным.

2. Вызывавшая команда выставила докладчика. Тогда происходит проверка корректности вызова. Есть два подхода к определению корректности:

Вариант для сильных команд: если оппонент показал, что у докладчика нет решения, то вызов считается некорректным (если оппонент не нашел “липу” в решении, то вызов считается корректным независимо от исхода диалога докладчика и жюри).

Вариант для команд, не умеющих оппонировать: вызов считается некорректным, если жюри не приняло решение докладчика (исход диалога докладчика и оппонента не имеет значения).

При некорректном вызове оппонент получает 6 очков, а вызывавшая команда — до 6 очков за верные идеи и должна повторить вызов.

Начисление очков

Каждая задача стоит 12 очков (чтобы не сообщать трудность задач). Эти очки распределяются между докладчиком, оппонентом и жюри (жюри достается остаток от 12 очков).

Очки даются как за положительный вклад в решение задачи, так и за нахождение ошибок и пробелов в решении. За чистое решение задачи дается 12 очков, а за “полное” оппонирование — 6 очков (если оппонент показал, что у докладчика совсем нет положительных результатов).

Оппонент получает очки в основном за те вопросы по решению, на которые докладчик не смог ответить (рассуждают примерно так: если бы докладчик ответил на вопросы оппонента, то он получил бы на 4 очка больше, поэтому оппонент получает 2 очка, остальные 2 очка он может получить, если восполнит сам эти пробелы. Если число очков не делится на 2, то, учитывая другие соображения, округляют в ту или другую сторону).

Если оппонент указал на существенные ошибки и пробелы в решении, которые, однако, докладчик исправил у доски, то он может получить до двух очков. Иначе говоря, за “латание дыр” у доски жюри может снять с докладчика 1-2 очка, которые может получить оппонент.

За красивое решение или красивое оппонирование жюри может дать одно премиальное очко (оно не входит в те 12 очков).

Жюри дает очки гласно, т.е. объясняет, за что они даны или сняты.

Жюри может оштрафовать команду на очко за шум, за неэтичное поведение (после предупреждения). За подсказку штраф может быть больше и с прекращением дискуссии по задаче и удалением подсказавшего. Если остается время, жюри может выслушать более красивые решения и давать за них премиальные очки.

Отказ делать вызов

Если у команды не осталось решенных задач, то она отказывается делать вызов (чтобы избежать некорректного вызова). Тогда другая команда получает право рассказать все оставшиеся у нее решения.

После отказа от вызова команда до конца боя теряет право рассказывать решения задач и становится “вечным оппонентом”, т.е. может получать очки за оппонирование.

Итоги

После каждого вызова жюри сообщает, поясняет и записывает сколько очков получила каждая команда. Жюри ведет протокол матбоя в виде таблицы, в которой указываются: фамилии выступающих, номер обсуждаемой задачи, направление вызова и количество очков, полученных командами и оставшихся у жюри. На доске рисуется упрощенная таблица, без указания фамилий.

Вариант протокола матбоя

Конкурс капитанов выиграла команда

m — минутный перерыв, —> вызов, —>< отказ.

Время	Задача	“Мнимая i”	Вызов и очки	“Супремум”	Жюри
12-00	3. Города	Кондаков	8 <— 2	Яценко	2
12-22	7. Тождества	Рубанов m	11 —>< 1	Канель	0

После боя очки у каждой команды и жюри складываются. (Количество очков, оставшихся у жюри, характеризует трудность задач и силу команд).

Если разность очков команд не превышает установленной в договорных условиях величины, то засчитывается ничья.

Если остается время, то жюри рассказывает решения нерешенных во время матбоя задач или показывает более удачные решения.

Статус жюри

Жюри является верховным толкователем правил матбоя. Если ситуация правилами не предусмотрена, жюри принимает решение по своему усмотрению. Решение жюри является обязательным для команд.

Жюри может снять вопрос оппонента (если вопрос не по существу), прекратить доклад или оппонирование (если дискуссия затягивается). Во всех подобных случаях жюри обосновывает свое решение.

Всякие соображения по уже разобранным задачам жюри рассматривает после боя. Задним числом счет изменять нельзя.

Статус капитана

Капитан отвечает перед командой за организацию решения задач, подготовку докладчиков и оппонентов, тактику ведения боя.

Он является представителем команды по всем оргвопросам: только он делает вызов, берет минутный перерыв, общается с жюри. (Если капитан выходит к доске, то он оставляет заместителя).

Заранее выясняет, кто будет докладчиком и кто оппонентом по каждой задаче, решает взять или отдать первый вызов.

Готовит название команды.

Участники не должны шуметь — это очень мешает думать.

Памятка жюри

Желательно формировать нейтральное жюри, а если это не удается, то вводить представителей обеих команд.

Жюри должно знать решения всех задач.

На ответственных боях жюри не должно задавать лишних вопросов командам, например о ходе решения задач.

Жюри должно помнить, что своими вопросами оно помогает докладчику доработать решение у доски, а вмешиваясь в диалог, “ест хлеб” оппонента.

Если жюри (после вопросов оппонента) видит пробел в решении, то оно должно проверить, может ли докладчик его закрыть.

Сначала обсуждаются принципиальные вопросы (наличие решения, достаточность оппонирования и т.д.), Затем обсуждаются очки.

Жюри стремится осуществить синтез мнений. Всякое мнение или несогласие с ним должно быть обосновано. Только после исчерпания всех аргументов происходит голосование.

Очки начисляют путем усреднения и округления мнений жюри до ближайшего целого числа.

Желательно сначала объяснить мнение жюри по поводу начисления очков, а затем сделать запись счета, поскольку жюри может не заметить всех пробелов в решении, а у капитанов есть право высказать свои замечания (очки за это не даются).

Если жюри не может быстро разобраться в решении, то в целях экономии времени и сил участников с согласия капитанов жюри может выделить своего представителя, который пойдет разбираться с докладчиком и оппонентом в другое помещение. При этом бой продолжается, а очки по задаче начисляются позднее. (Это возможно, если нет проверки корректности вызова).

Желательно в течение боя в аналогичных ситуациях принимать аналогичные решения (правило прецедента).

О подборе задач

В задачах должен быть "хлеб" для оппонента, т.е. при оформлении решения должны быть трудности (этим задачи для матбоя отличаются от задач для олимпиады).

Общее число задач, а также число задач малой и средней трудности должно быть четным, поскольку при равном числе решенных задач и корректности вызовов команды должны рассказать равное количество решений.

Обычно дают 2 простые задачи, 2 трудные, остальные — средние (средняя задача с трудом решается средним участником за отведенное время, а трудные задачи должны быть поучительны).

Число задач обычно близко к числу участников в команде. (Если много задач, то бой может затянуться, а если мало, то не все участники смогут выступить). Число и трудность задач зависят также от ограничений по времени.

Нужны запасные задачи и для боя, и для конкурса капитанов (чтобы заменить известные), причем разной трудности.

О формировании команд

Обычно в командах от 3 до 12 человек. Если условлено, например, что в командах будет не более 8 человек, а претендентов больше, то можно провести отборочный тур, либо взять по 2-3 запасных, а команды сформировать после решения задач.

Время на бой (памятка)

На решение задач (в зависимости от их числа и трудности) дают от 1 до 5 ч. Бывает блиц-бой: 15 минут на решение всех задач (соответственно, задачи проще).

Прикидка: число часов на разбор задач примерно равно трети числа задач (с учетом переговоров, подведения итогов, рассказа двух решений и т.п.)

Хорошо оставить время для разбора нерешенных задач.

Бывает перерыв на обед (между решением и разбором).

Не стоит в один день решать задачи, а в другой — разбирать решения.

Советы по тактике

Во время решения задач капитану стоит узнать, кто какие задачи хочет решать, и распределить задачи; вести учет решенных задач и проверенных решений.

Участники должны стараться не шуметь — это очень мешает думать.

Если в команде есть сильный "решатель", то неразумно тратить его время на доведение решений до конца — это могут сделать другие. Пусть он генерирует идеи и отдает их на доработку.

За некоторое время до конца решения задач стоит переключиться всей команде на штурм одной задачи.

Вызывать обычно выгодно на самую трудную из решенных командой задач или на задачу, где есть "подводные камни".

Докладчику бывает удобно сначала подготовить доску (сделать чертеж, выписать формулы), а затем приступить к решению.

Если оппонент не может разобраться в логике решения, то разумно попросить план решения.

Полезно кратко записывать свои вопросы, чтобы не забыть.

Правом рассказать другое решение не всегда надо пользоваться — есть риск отдать очки оппоненту.

Проблемные ситуации

1. Бывает, что условие задачи понято неправильно. Часто в этом виновато жюри (например, комментарии к задаче даны только одной команде). Конечно, надо тщательно продумывать формулировки, но, на всякий случай, стоит напоминать командам перед решением задач, что если задача кажется вам тривиальной, то, скорее всего вы неправильно поняли условие — уточните его у жюри. Если все же ЧП произошло и условие действительно допускает другое толкование, то посоветуйтесь с капитанами: согласны ли они снять задачу или выслушать обе команды без изменения порядка вызова, а каждый рассказ оценивать из 6 очков (а если трудность задачи существенно зависит от понимания условия, то например, из 8 и из 4 очков)?

2. После исчерпания полных решений у команд могут остаться соображения по нерешенным задачам. Нам думается, что если останется время, то можно продолжить выступления по очереди, но при этом заранее оговорить ту часть решения, которая будет рассказана, а жюри должно сразу определить стоимость этого результата (например, 4 очка; тогда оппонент может заработать до 2 очков).

Примеры задач и игр для конкурса капитанов

1. Сколько существует трехзначных чисел?

2. На столе лежат 20 спичек. Двое по очереди берут 1 или 2 спички. Побеждает тот, кто возьмет последнюю спичку.

3. Газету разорвали на три части, потом одну из частей разорвали еще на три части, и так делали 40 раз. Сколько получилось частей?

4. Полный бидон с молоком весит 30 кг, а наполненный наполовину — 15,5 кг. Сколько весит бидон?

5. Разрежьте квадрат на 5 прямоугольников так, чтобы у соседних прямоугольников стороны не совпадали.

6. Найдите хотя бы одно решение неравенства $0,01 < x < 0,011$.

7. Сколько диагоналей в правильном 7-угольнике?

8. В строке написано несколько минусов. Двое по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает тот, кто переправит последний минус.

9. Замените звездочки числами так, чтобы сумма любых трех соседних чисел равнялась 20:

$$7, *, *, *, *, *, *, *, 9.$$

10. Найдите значение дроби

$$\frac{в \cdot а \cdot р \cdot е \cdot н \cdot ь \cdot е}{к \cdot а \cdot р \cdot л \cdot с \cdot о \cdot н},$$

где разные буквы — это разные цифры, а между буквами стоит знак умножения.

11. Три охотника варили кашу. Один положил 2 кружки крупы, второй — 1 кружку, а у третьего крупы не было. Они съели кашу поровну. Третий охотник и говорит: “спасибо за кашу! У меня остались 5 патронов, и вот вам задача: как поделить патроны в соответствии с вашим вкладом?”

12. На озере росли лилии. Каждый день их число удваивалось, и на 20-й день заросло все озеро. На какой день заросла половина озера?

13. Есть две сковородки. На каждой помещается один блин. Надо пожарить три блина с двух сторон. Каждая сторона блина жарится одну минуту. За какое наименьшее время можно это сделать?

14. Два мальчика хотели купить книгу. Одному из них не хватило 27 копеек, а второму — одной копейки. Они сложили свои деньги, но денег все равно не хватило. Сколько стоит книга?

15. Одна кастрюля вдвое выше другой, зато вторая вдвое шире первой. В какую из них больше войдет воды?

16. Шоколадка стоит рубль и еще полшоколадки. Сколько стоит шоколадка?

Ответы к задачам конкурса капитанов

1. 900. 2. Первый каждым ходом берет столько спичек, чтобы число оставшихся делилось на три. 3. 81. 4. 1кг. 5. См. рис. 3. 6. $x = 0,0105$. 7. 14. 8. Первый ходит в центр, а затем симметрично второму. 9. 7,9,4,7,9,4,7,9. 10. 0. 11. Все патроны надо отдать первому охотнику. 12. За 19 дней. 13. За 3 минуты. 14. 27 коп. 15. В широкую войдет вдвое больше. 16. 2 р.

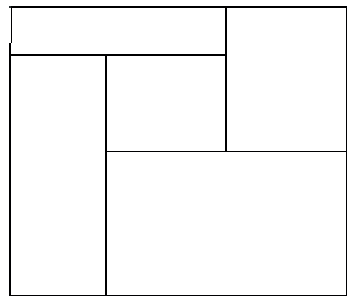


Рис. 3

Образцы задач матбоя для 8-9 классов

1. Какое наименьшее число выстрелов всегда достаточно, чтобы попасть в четырехклеточный корабль при игре в “морской бой”?

2. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше: доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей ?

3. На сторонах произвольного многоугольника произвольным образом расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.

4. Докажите, что среднее арифметическое двух последовательных простых чисел не является простым числом.

5. На прямой отмечено 45 точек, лежащих вне отрезка AB. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до точки A не равна сумме расстояний от этих точек до точки B.

6. Дано 100 положительных чисел. Известно, что произведение любых семи из них больше 1. Докажите, что произведение всех чисел больше 1.

7. Путешественник отправился из родного города A в самый удаленный от него город страны B, затем из B — в самый удаленный от него город C и т.д. Докажите, что если C не совпадает с A, то путешественник никогда не вернется домой. (Расстояния между городами различны.)

8. В углах шахматной доски 3 на 3 стоят 4 коня: 2 белых (в соседних углах) и два черных. Можно ли за несколько ходов (по шахматным правилам) поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?

9. На стороне угла дана точка A. Постройте на этой же стороне точку M, которая одинаково удалена от точки A и от другой стороны угла.

10. По кругу расставлены 10 точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Начало первого отрезка — в любой точке, а каждый следующий отрезок начинается из конца предыдущего. Проигрывает тот, кто не может провести новый отрезок (дважды проводить отрезок нельзя, а пересекать — можно). Предположим, что игроки не делают ошибок. Кто из них победит: первый или второй?

Примечание. Задачи 4 и 9 кажутся простыми, однако в них есть “подводные камни”.

Краткие решения задач матбоя

1. Будем располагать выстрелы по параллельным диагоналям с интервалом 3 клетки начиная с диагонали a4-г1. Понятно, что четырехклеточному кораблю (крейсеру) укрыться будет негде. Получаем, что 24 выстрелов всегда достаточно. Покажем, что 24 выстрела сделать необходимо. Для

этого разместим на доске 24 крейсера без наложений. (Кстати, мы заодно доказали, что на доске 10 на 10 нельзя разместить 25 крейсеров без наложений - иначе не хватило бы 24 выстрелов.)

2. Обозначим Nб — число блондинов, Nг - число голубоглазых, Nбг — число голубоглазых блондинов, Nв — число всех людей. Тогда по условию:

$$\frac{\text{Nбг}}{\text{Nг}} > \frac{\text{Nб}}{\text{Nв}} \Rightarrow \frac{\text{Nбг}}{\text{Nб}} > \frac{\text{Nг}}{\text{Nв}},$$

итак, доля голубоглазых среди блондинов больше, чем доля голубоглазых среди всех людей.

3. У каждой стрелки одно начало и один конец, значит, число всех начал равно числу концов, поэтому число вершин с двумя началами равно числу вершин с двумя концами (поскольку в остальных вершинах сходятся одно начало и один конец, т.е. поровну).

4. Задача кажется простой, поскольку по определению последовательных простых чисел между ними нет простых чисел. Но вот неожиданный вопрос: "почему среднее арифметическое двух чисел лежит между ними?" Нагляднее всего это можно доказать это так: пусть $a < b$, тогда

$$a = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b.$$

5. Заметим, что расстояния от любой точки до A и до B отличаются на длину отрезка AB. При переходе от точки A к точке B все расстояния от "левых" точек увеличиваются, а от "правых" — уменьшаются на величину отрезка AB. Но число точек слева не равно числу точек справа, следовательно, сумма расстояний до точки B будет отличаться от суммы расстояний до точки A по крайней мере на величину отрезка AB.

6. Заметим, что количество чисел, меньших 1, не больше 6, а все остальные числа больше 1. Перемножим все числа, меньшие 1, и еще несколько чисел, чтобы всего было 7 чисел. Их произведение больше 1, а все остальные числа больше 1, значит, произведение всех чисел больше 1.

7. Если путник из B не вернулся в A, то расстояние BC строго больше AB, а каждое следующее расстояние не меньше предыдущего (почему нельзя сказать: "больше предыдущего", ведь все расстояния различны?). Если бы путник потом вернулся в A, то последнее расстояние было бы больше AB, а это противоречит тому, что B — самый дальний город для A.

8. Построим схему движения коней по клеткам. Для этого занумеруем клетки и выпишем их номера в том порядке, в котором конь может их обойти. На схеме (рис. 4) видно, что кони "бегают по кругу", т.е. любой ход коня не меняет порядка следования их цветов на схеме, а значит, нельзя изменить чередование их цветов в углах доски.

9. Пусть M — искомая точка (рис. 5). Опустим из нее перпендикуляр на другую сторону угла и получим точку C. Можно выразить углы треугольника AMC через величину исходного угла, а тогда легко построить тоски C и M. Но "соль" задачи состоит в том, что у нее есть два решения, одно из которых обычно теряют: точку M можно отложить по разные стороны от точки A.

10. Выигрывает начинающий: первым ходом он соединяет любые точки A и B, а затем проводит отрезок либо к точке A, либо к точке B. Это всегда возможно, поскольку второй игрок вынужден каждый раз ходить в новую точку, которая еще не была соединена с точками A и B. При такой стратегии начинающий не может проиграть, а ничья невозможна, поскольку число отрезков конечно.

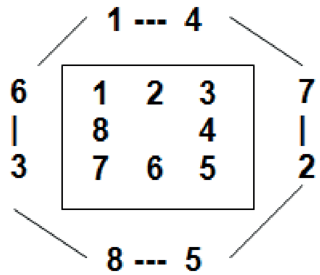


Рис. 4

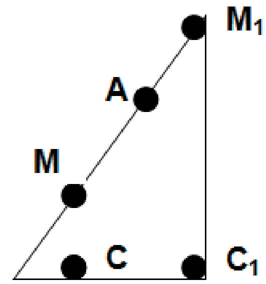


Рис. 5

Послесловие

Матбой — это соревнование двух команд в умении: решать задачи (индивидуально и коллективно), готовить докладчиков и оппонентов, оценивать трудность задач и выбирать тактику боя, рассказывать решения и отвечать на вопросы, разбираться в чужом решении и формулировать вопросы.

* * *

Правила определяют: участников и их роли, основные ситуации и терминологию, права участников и последствия тех или иных действий, принципы начисления очков,

* * *

- Работа над правилами - это законодательство в миниатюре.

- Изложение имеет два уровня: общее представление и строгие формулировки, затем толкования и рекомендации.

- Пункты должны сложиться в систему, полную и непротиворечивую.

- Надо разделять процедурные вопросы и количественные оценки.

- Должна быть общая логика изложения. Нужны и хронология событий, и справочник ситуаций.

- Терминология вводится по ходу дела.

- Интересно проследить эволюцию отдельных положений.

Приложение

Вопросы

1. Почему команды вызывают друг друга?

Конечно, для объективности хотелось бы выслушать все решения обеих команд и сравнить результаты, но тогда команды не должны слышать решений друг друга, а это привело бы к потере зрелищности, поэтому придумали поочередные вызовы и проверку их корректности.

2. Почему за оппонирование даются очки?

- Оппонирование может выявить недоделки в решении и натолкнуть на недостающие идеи, т.е. внести вклад в решение задачи.

- Если не давать очки за оппонирование, то в ряде случаев оппоненту незачем трудиться — все равно ошибки найдет жюри.

- Умению оппонировать надо учить, а значит его надо поощрять.

3. Почему не даются очки за победу в конкурсе капитанов?

Право начать бой является и тактическим, и психологическим преимуществом.

4. Что делать, если решение докладчика — сплошная “липа”?

В таком решении нет смысла находить всю “липу”, можно считать оппонирование полным, если оппонент нашел хотя бы один существенный пробел.

5. Почему для сильных команд вызов считается корректным, если оппонент не заметил ошибку в решении? Ведь задача не решена.

При таком определении корректности,

- докладчик все равно не получит очков,
- оппонент и его команда получат урок на будущее,
- есть возможность передать вызов без изменения счета,
- стимулируется рассказ тонких ошибок.

6. Докладчику дано думать над вопросом не более минуты, но он может сказать нечто относящееся к делу, после чего получит очередную минуту, и т.д. Такое допустимо?

У жюри есть право прервать докладчика или оппонента, если дискуссия топчется на месте.

Задачник ситуаций

1. Оппонент: где в вашем решении использовалось такое-то условие задачи?

Обязан ли докладчик отвечать на подобный вопрос? Может ли докладчик ответить так: "меня не интересует в какой момент использовалось это условие. Я рассказал решение, а вы должны проверить правильность каждого шага. Если каждый шаг верен, то и все решение верно"?

Вариант: если докладчик затрудняется ответить, а жюри видит, что условие действительно использовано, то можно снять вопрос оппонента. Кроме того, затруднительно отвечать на вопрос: где использовался тот факт, что плоскость евклидова? Такого рода вопросы "законны", если свойство действительно нигде не использовано, а без него можно построить контрпример. Такие вопросы являются косвенным обнаружением дырок, поэтому должны оцениваться ниже.

2. Что делать, если оппонент указывает на дырку в утверждении, которое не понадобилось в решении?

Все зависит от целей жюри: из педагогических соображений лучше выслушать ответ на вопрос, а при ограниченном времени лучше снять вопрос. Рекомендация докладчику: если оппонент просит вас доказать некоторое утверждение, а вы не можете ответить, то подумайте, нельзя ли без него обойтись. Такую дырку надо считать "грязью" в решении и снимать 1-2 очка.

3. Известно, что в команде нет могучего решателя, но команда выдает очень красивое решение.

После боя спросить: "не могли бы вы ответить, кто придумал решение и каков был ход его мысли?"

4. Оппонент приводит неверный контрпример, а докладчик этого не видит и думает, что его опровергли.

Это является маленькой "дыркой" в решении (точнее, в докладе).

5. Оппонент признал решение верным, жюри тоже не видит ошибки, а один из членов команды считает, что нашел ошибку. Как поступить жюри?

По просьбе капитана жюри рассматривает замечания члена команды (необязательно у доски и в полном составе).

Математические бои разных лет: дата проведения, задачи, результат

От составителей задач

Приведено содержание ряда математических боев, сосоявшихся в 1975–1991 гг.: дата проведения боя, участники результат, условия задач. Иногда не все данные можно установить по исходным материалам — листкам, напечатанным на пишущей машинке. Материалы для выпуска представил А.Я. Канель-Белов. Расположение материалов — в хронологическом порядке.

Как видно по спискам членов жюри и составителей задач, активнейшую роль в организации и проведении матбоев в разные годы играл Валерий Анатольевич Сендеров, памяти которого посвящен этот выпуск.

Валерий Анатольевич Сендеров, портрет 1975 г.

Дата проведения 17.05.1975. Участники: Школа № 2 и Школа № 91, обе Москва

Задача 1. Дано n-элементное множество и его непустые подмножества $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$. Доказать, что найдутся r, s и попарно различные индексы $i_1, i_2, \ldots, i_r, j_1, j_2, \ldots, j_s$ такие, что $M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \ldots \cup M_{i_r} = M_{j_1} \cup M_{j_2} \cup \ldots \cup M_{j_s}$.

Задача 2. Среди кривых, делящих пополам площадь правильного треугольника, указать кривую минимальной длины.

Задача 3. Доказать неравенство: $2 > \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{n}}}}$.

Задача 4. Решить в целых числах уравнение: $x^3 + y^3 + z^3 = 1975$.

Задача 5. Внутри треугольника ABC берётся точка X. Пусть A_1 (B_1, C_1) есть точка пересечения прямых AX (BX, CX) и CB (AC, AB). Построить такую точку X, для которой площадь треугольника $A_1B_1C_1$ минимальна.

Задача 6. Четырёхугольник описан около окружности. Доказать, что прямые, соединяющие соседние точки касания, пересекаются на продолжении диагонали или параллельны ей.

Задача 7. Дан квадрат 15×15. Какое минимальное число клеток нужно закрасить, чтобы всякий прямоугольник 5×3 со сторонами, параллельными сторонам квадрата, содержал закрашенную клетку?

Задача 8. Доказать, что для любого n существует окружность с центром в начале координат, на которой лежит ровно $4n$ точек с целыми координатами.

Победила команда Школы № 2 со счётом $62:27$.

* * *

Дата проведения 17.10.1975. Участники: Школа № 2 и Школа № 91, обе Москва

Задача 1. Назовём числами 1 типа числа вида $\sqrt[k_1]{n_1} + \ldots + \sqrt[k_l]{n_l} - \sqrt[k_{l+1}]{n_{l+1}} - \ldots - \sqrt[k_m]{n_m}$, где $k_1, \ldots, k_m, n_1, \ldots n_m$ – натуральные числа, числами 2 типа – отличные от нуля числа, являющиеся частными от деления двух чисел 1 типа. Известно, что числа $a_1, \ldots, a_p$ – 2 типа, причём для любых двух из них a_i и a_j либо $\frac{a_i}{a_j}$, либо $\frac{a_j}{a_i}$ является числом 1 типа. Доказать, что среди всех этих чисел есть такое число a_r, что $\frac{a_i}{a_r}$ есть число 1 типа для всех a_i из этих p чисел.

Задача 2. Существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $x^2 - y^3$, где x и y – целые числа. Доказать.

Задача 3. На координатной плоскости в точках с обеими целыми неотрицательными координатами расставлены числа $f(x, y)$. Известно, что $f(x, 0) = k_1$, $f(0, y) = k_2$, где k_1 и k_2 – фиксированные числа; кроме того, $f(x, y) = k_1 f(x-1, y) + k_2 f(x, y-1)$ при $x \geqslant 1, y \geqslant 1$. Найти $f(x, y)$.

Задача 4. Существует ли множество бесконечных (в обе стороны) целочисленных арифметических прогрессий, каждые две из которых имеют общий член, однако нет члена, общего для всех последовательностей данного множества?

Задача 5. На прямоугольном листе бумаги начерчены куски сторон треугольника. Найти метацентр этого треугольника, проведя построения лишь на данном листе. (*Метацентром* треугольника называется точка пересечения его медиан.)

Задача 6. Существует ли четырёугольная пирамида $IABCD$, обладающая следующими свойствами:

а) боковые грани IAB и ICD перпендикулярны плоскости основания и между собой;

б) все боковые грани являются равнобедренными треугольниками?

Задача 7. Для данного числа n составляется число n_1, равное сумме тринадцатых степеней цифр числа n. Для числа n_1 таким же образом составляется число n_2 и так далее. Доказать, что, начиная с некоторого номера, числа в этой последовательности начнут периодически повторяться.

Задача 8. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Доказать, что центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB, являются вершинами прямоугольника.

Задача 9. Десять томов стоят в таком порядке: 2, 1, 6, 10, 3, 8, 4, 7, 9, 5. Разрешается брать два соседних тома и ставить их, не меняя порядка, рядом на новое место в начало, конец или между двумя томами. Можно ли такими операциями добиться растановки томов в следующем порядке: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10?

Задача 10. Дан выпуклый четырёхугольник. Вписать в него параллелограмм так, чтобы его стороны имели данные направления.

Задача 11. Даны два многочлена $P(x)$ и $K(x)$ с целыми коэффициентами. Их произведение есть многочлен, у которого все коэффициенты делятся на 13. Доказать, что хотя бы у одного из данных многочленов все коэффициенты делятся на 13.

Задача 12. В $\angle DCE$ вписаны окружности O_1 и O_2; окружность O_1 касается прямой CD в точке A, окружность O_2 касается прямой CE в точке B. Доказать, что хорды, высекаемые на AB окружностями O_1 и O_2, равны.

Победила команда Школы № 2 со счётом $58:49$.

* * *

Дата проведения 21.11.1975. Участники: Школа № 2 и Школа № 444, обе Москва

Задача 1. Решить в целых числах следующее уравнение: $19x^2 - 75y^2 = 1975$.

Задача 2. В единичном квадрате находится n точек. Доказать, что существует несамопересекающаяся ломаная, на которой лежат все эти точки и длина которой меньше, чем $3\sqrt{n}$.

Задача 3. Фиксируется вершина A выпуклого девятивершинника и рассматриваются всевозможные сдвиги, переводящие вершину A в остальные вершины девятивершинника. Доказать, что хотя бы два из полученных девяти девятивершинников пересекаются.

Задача 4. Доказать, что корни многочлена $P_n(z) = \dfrac{z^n}{n!} + \dfrac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + z + 1$ по модулю не меньше единицы.

Задача 5. Дано множество $A = \{\pm a_1, \pm a_2, \ldots, \pm a_n\}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – целые числа; известно, что $m < 2^n$. Доказать, что в A можно выделить подмножество S, обладающее следующими свойствами:

а) для всякого i элементы a_i и $-a_i$ не оба содержатся в S;

б) сумма элементов множества S делится на m.

Задача 6. Длины сторон треугольника ABC выражаются последовательными натуральными числами: $AB = n-1$, $BC = n$, $CA = n+1$; кроме того, известно, что $S_{\triangle ABC}$ – целое число. Доказать, что высота AD делит основание BC на отрезки, разность длин которых равна четырём.

Задача 7. Назовём натуральные числа m и n *родственными*, если, во-первых, они имеют одни и те же простые делители, и, во-вторых, числа $m+1$ и $n+1$ имеют одни и те же простые делители. Доказать, что существует бесконечно много пар различных родственных чисел.

Задача 8. Определить целую часть числа $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{1000000}}$.

Задача 9. Построить четырёугольник по его углам и диагоналям. Провести исследование.

Задача 10. Пусть $ACDE$ и $BAFH$ – квадраты, построенные внешним образом на сторонах AC и BA треугольника ABC. Доказать, что, если точки B и C фиксированы, то при всех положениях точки A прямая DH проходит через фиксированную точку.

Бой окончился вничью со счётом $36:36$.

* * *

Дата проведения 30.09.1976. Участники: Школа № 2 и Школа № 91, обе Москва

Задача 1. Через точки пересечения двух окружностей проводятся две произвольные секущие. Доказать, что хорды, соединяющие новые точки пересечения этих секущих с окружностями, параллельны.

Задача 2. Для данного числа n составляется число n_1, равное сумме кубов цифр числа n. Для числа n_1 таким же образом составляется число n_2 и т.д. Доказать, что, начиная с некоторого номера, числа в этой последовательности начнут повторяться.

Задача 3. Сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} \cos x_1 = x_2; \\ \cos x_2 = x_3; \\ \ldots \\ \cos x_{n-1} = x_n; \\ \cos x_n = x_1. \end{cases}$$

Задача 4. Из шахматной доски вырезаны одна чёрная и одна белая клетки. Доказать, что её можно замостить без наложения фишками домино. Размер фишки равен двум клеткам.

Задача 5. Клетчатая плоскость раскрашивается десятью красками так, что клетки с общей стороной (соседние) покрашены в разные цвета, причём все десять красок использованы. Две краски называются соседними, если ими где-нибудь покрашены соседние клетки. Каково минимальное возможнное число пар соседних красок?

Задача 6. Двое пишут $2n$-значное число, употребляя тоько цифры 6, 7, 8, 9. Первую цифру числа пишет первый, затем вторую пишет второй, за ним третью пишет снова первый и т.д. При каких значениях n второй может добиться того, что полученное число будет делиться на 9?

Задача 7. Из некоторого числа одинаковых равносторонних треугольников чёрного и белого цвета сложен большой равносторонний треугольник, причём каждый из чёрных треугольников граничит по стороне лишь с чётным числом белых треугольников, а каждый белый треугольник граничит с нечётным числом белых треугольников. Доказать, что маленькие треугольники, стоящие в вершинах большого треугольника, обязаны быть одного и того же цвета.

Задача 8. Дан выпуклый 1976-угольник. Рассматриваются все треугольники с вершинами в вершинах этого многоугольника. Доказать, что всякая точка многоугольника, не лежащая ни на одной из сторон этих треугольников, покрыта чётным числом указанных треугольников.

Победила команда Школы № 2 со счётом $60:9$.

* * *

Дата проведения 17.02.1978. Участники: классы Школы № 145, г. Киев

Задача 1. Билет вкладывается в компостер определённым образом. В нём пробивается от 0 до 16 дырок в 16 определённых местах. Какое наибольшее число автобусов можно пустить по городу так, чтобы нельзя было проехать в двух автобусах по одному билету (при необходимости докомпостировав билет во стором автобусе)?

Задача 2. Дано 2 кучки по 5 шаров. Известно, что в каждой из них есть радиоактивный. За одну проверку можно о любой группе сказать, есть ли в ней радиоактивные, но нельзя узнать, сколько их. Можно ли за 5 проверок найти оба радиоактивных шара?

Задача 3. 10 пятаков расположены в виде замкнутой цепочки: первый касается второго, второй – третьего и т.д., десятый – первого. Одиннадцатый пятак катится без скольжения по внешней стороне цепочки, касаясь по очереди каждого из 10 пятаков. Сколько оборотов сделает этот пятак, вернувшись в исходное положение? Доказать, что число оборотов не зависит от формы цепочки.

Задача 4. В вершинах квадрата написаны числа a, b, c, d, сумма которых равна нулю. Все числа по модулю меньше 1000. Каждое число заменяется полусуммой соседей. На 20 шаге получились числа $a_{20}, b_{20}, c_{20}, d_{20}$. Доказать, что $a_{20} \cdot b_{20} < 1$.

Задача 5. Найти сумму всех чисел, состоящих из трёх различных нечётных цифр.

Задача 6. Найти все составные числа q такие, что $(q-1)!$ не делятся на q.

Задача 7. 40 человек собрались вместе, каждый из них принёс по 30 грибов. Все грибы расположили в 40 корзин по 30 грибов в каждом. Доказать, что корзины можно раздать собравшимся так, чтобы каждому досталось хотя бы по одному грибу, который он сам принёс.

Задача 8. Медианы разбивают треугольник ABC на 6 треугольников. Окзаалось, что 4 из 6 окружностей, вписанных в эти треугольники, равны. Доказать, что $\triangle ABC$ – правильный.

Задача 9. Доказать, что не существует арифметической прогрессии с разностью, меньшей 1978, в которой подряд располагалось бы 11 простых чисел.

* * *

Дата проведения 10.04.78. Участники: классы Школы № 145, г. Киев

Задача 1. Пусть $\theta(n)$ – сумма цифр числа 2^n. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\theta(n) = +\infty$.

Задача 2. Доказать, что для любых действительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполняется неравенство:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \frac{2}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{n-k}}\cdot(x_1 + \ldots + x_k)\cdot(x_{k+1} + \ldots + x_n).$$

Задача 3. Имеются две бочки с водой достаточно большой вместимости и четыре ковша ёмкостью $2+\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{2}+7\sqrt[3]{4}$, $1978+19\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$. Можно ли с их помощью перелить из одной бочки в другую ровно 1 литр воды?

Задача 4. Пусть f – всюду дифференцируемая функция, ограниченная сверху, и её производная неотрицательна. Доказать, что

а) если $f'(x)$ невозрастает, то $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot f'(x) = 0$;

б) если не требовать монотонности f', то условие задачи может не выполняться.

Задача 5. На шахматной доске 8×8 в каждой клетке, кроме поля $a1$ стоит фишка. Можно прыгать любой фишкой через любые 2 стоящие рядом по горизонтали или по вертикали на свободное поле. Все перепрыгнутые фишки снимаются. Какое минимальное число фишек может остаться?

Задача 6. Полуокружность строится на диаметре AB. Точка $M\in[AB]$. На отрезках AM и MB как на диаметре строятся полуокружности, расположенные внутри первой. Строится окружность, касающаяся трёх построенных окружностей.

а) Найти множество центров этих окружностей.

б) Докажите, что все они касаются ещё одной окружности.

Задача 7. $\pi(n)$ – число простых чисел, не больших n. Доказать, что $\pi(n)\geqslant \log_2(n)/2$.

Задача 8. Пусть $P_n(x)$ – многочлен степени $n\geqslant 5$. Доказать, что существует $x_0\in[0,\pi]$ такое, что $|P_n(x_0) - x_0\cdot\sin(1/x_0)| > 1/5n$.

Задача 9. Доказать, что любое целое представимо в виде суммы пяти кубов целых чисел.

Задача 10. Назовём ядром n-угольника множество точек, из которых целиком видны все его стороны.

а) Доказать, что ядро многоугольника – многоугольник.

б) Сколько сторон может иметь ядро 1978-угольника?

в) Доказать, что ядро всегда выпуклое.

г) Доказать, что ядро n-угольника имеет не более n сторон.

д) Сколько сторон может иметь ядро n-угольника?

Задача 11. Пусть (a_n) – последовательность чисел такая, что:

1. Она ограничена. (Можно требовать только ограниченность снизу.)

2. $\forall n\geqslant k+1:\ a_n\leqslant(a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_{n-k})/k$. ($k$ – фиксировано.)

3. Для некоторых положительных $p_1, p_2, \ldots, p_k$ таких, что $\sum p_i = 1$, $\forall n \geqslant k+1:\ a_n \leqslant p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \ldots + p_k a_{n-k}$.

Доказать, что (a_n) сходится.

Задача 12. Дана таблица **а)** 8×8, **б)** $n \times n$, **в)** $n \times l$, в одной из клеток которой стоят знак “$-$”, а в остальных — “$+$”. Разрешается за один ход менять[1]

* * *

Дата проведения 27.10.78. Участники: Школа № 2 и Школа № 91, обе Москва, 9 классы. Жюри: В.А. Сендеров, А.Х. Шень

Задача 1. Обозначим через $T(N)$ число всех делителей натурального числа N. Существует такое натуральное число k, что для всех $N > k$ имеем: $T(N)/N < 1/19^{84}$. Доказать.

Задача 2. Произведение двух слов (т.е. последовательностей букв) – есть результат приписывания одного слова к другому. Пусть P и Q – слова, причем $PQ = QP$, тогда они оба являются степенями одного и того же слова S. Доказать.

Задача 3. На плоскости дано множество A, площадь которого меньше 1, и N точек. Доказать, что множество A можно сдвинуть на вектор, длина которого $\sqrt{N/\pi}$, где $\pi = 3,14159\ldots$, так, что множество, полученное в результате сдвига, не будет покрывать на одной из данных N точек.

Задача 4. A – отображение плоскости в себя, сохраняющее расстояние ($|XY| = |A(X)A(Y)|$ для любых точек X, Y плоскости). Доказать, что A – отображение плоскости на себя (т.е. каждая точка имеет прообраз при этом отображении).

Задача 5. На полке стоят тома. Разрешается брать любые два тома, идущие в обратном порядке, и менять их местами (в обратном порядке значит, что том с большим номером стоит левее тома с меньшим номером). Доказать, что это процесс закончится.

Задача 6. Существует ли бесконечное множество попарно неконгруэнтных прямоугольных треугольников, длины сторон которых целые числа, причем длины катетов каждого из них отличаются одна от другой на 1?

Задача 7. Рассматривается некоторая последовательность натуральных чисел, больших 1, все члены которой различны. Доказать, что в этой последовательности найдется бесконечно много членов, больших своего номера.

Задача 8. Любая последовательность, состоящая из чисел: $+1$ и -1 и удовлетворяющая соотношению $a_n = a_{n-1948} \cdot a_{n-1984}$, при всех $n > 1984$ имеет чистый период (т.е. существует натуральное T такое, что $a_{n+T} = a_n$ для всех n). Доказать.

Задача 9. Из точки X полуокружности опущен перпендикуляр XY на ее диаметр AB. В криволинейные треугольники AXY и XYB вписаны окружности, касающиеся отрезка AB в точках P и T соответственно. Доказать, что величина угла PXT не зависит от выбора положения точки X на полуокружности.

Задача 10. Найти все натуральные числа N такие, что N делится на все натуральные числа, не превосходящие $\sqrt{N}$.

Победила команда Школы № 2 со счётом $27:25$.

* * *

[1] Далее в исходных материалах текст отсутствует.

Дата проведения 28.11.1978. Участники: Школа № 2 и Школа № 444, обе Москва

Задача 1. Пусть n – натуральное число, большее 2. Положим $A_n = \{1+kn\}_{k=1}^{\infty}$. Назовём число $b \in A_n$ неприводимым в A_n, если не существует таких чисел $c \in A_n$, $d \in A_n$, что $b = cd$. Доказать, что в A_n существует число R, которое можно разложить на неприводимые в A_n множители более чем одним способом.

Задача 2. $P(x)$ – многочлен с вещественными коэффициентами такой, что $P(x) > 0$ при $x > 0$. Доказать, что существуют многочлены $F(x)$ и $R(x)$ с неотрицательными коэффициентами такие, что $P(x) = F(x)/R(x)$ при $x > 0$.

Задача 3. Доказать равенство:

$$\cos\frac{8\pi}{35} + \cos\frac{12\pi}{35} + \cos\frac{18\pi}{35} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5} + \frac{\sqrt{7}}{2}\sin\frac{\pi}{5}.$$

Задача 4. Для всякого натурального k через $C(k)$ обозначим сумму его цифр. Доказать, что $C(k^n) \to \infty$ при $n \to \infty$ для всякого натурального чётного натурального n, не делящегося на 10.

Задача 5. Если длины всех биссектрис треугольника меньше 1, то его площадь меньше $1/\sqrt{3}$. Доказать.

Задача 6. Ограничена ли последовательность $A_n = C(n)/C(n^2)$, где $C(n)$ – сумма цифр числа n?

Задача 7. Из точки, лежащей внутри выпуклого многогранника с n вершинами, по направлению к его вершинам проведены n векторов единичной длины. Доказать, что длина суммы этих векторов не превосходит числа $n-2$.

Задача 8. Два четырёхточечных множества расположены на плоскости. Известно, что набор из шести расстояний между точками одного из них совпадает с набором из 6 расстояний между точкми другого. Можно ли утверждать, что эти множества конгруэнтны?

Задача 9. На координатной плоскости расположен направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с $|AB| = 2^{1978}$, на котором не лежит ни одна точка с целыми координатами. Можно ли, перемещая отрезок в этой плоскости так, чтобы ни при каком его положении на нём не лежала ни одна точка с целыми координатами, изменить его направление на противоположное?

Задача 10. В треугольнике ABC, где $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, $a < b \leqslant c$, O – центр описанного круга, K – центр вписанного круга, построен отрезок DE так, что $D \in [AB]$, $E \in [AC]$, $|BD| = |CE| = |BC|$. Доказать, что радиус окружности, описанной около треугольника ADE, равен $|OK|$.

Победила команда Школы № 2 со счётом $45:(-4)$**.**

* * *

Дата проведения 15.12.1978. Участники: Школа № 2 и Школа № 57, обе Москва

Задача 1. Существует ли тетраэдр, отличный от правильного, у которого пять двугранных углов конгруэнтны?

Задача 2. Многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами обладает следующим свойством: $f(x+a) - f(x)$ — рациональное число при любом рациональном a и действительном x. Доказать, что его степень не выше 1.

Задача 3. Существует ли натуральное число n такое, что при любых цифрах a и b число $\overline{anb}$ делится на $\overline{ab}$?

Задача 4. Построить треугольник по радиусу вписанной окружности, радиусу описанной окружности и одной из высот.

Задача 5. Доказать, что при $k > 1$ число $\dfrac{(nk)!}{(n!)^k \cdot k!}$ – целое, делится на $2n-1$.

Задача 6. Рассмотрим кривые, каждая из которых соединяет две какие-нибудь точки, лежащие на сторонах правильного треугольника, и делят его площадь пополам. Среди них указать кривую наименьшей длины.

Задача 7. Решить в действительных числах систему:

$$\begin{cases} 1 - x_1^2 = x_2; \\ 1 - x_2^2 = x_3; \\ \ldots \\ 1 - x_n^2 = x_1. \end{cases}$$

Задача 8. На клетчатой бумаге 11×11 отмечены 22 клетки так, что на каждой горизонтали и на каждой вертикали отмечены ровно две клетки. Два расположения называются эквивалентными, если, меняя конечное число раз две горизонтали между собой и (или) две вертикали между собой, можно из первого получить второе. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных точек?

Победила команда Школы № 2 со счётом $55:15$.

* * *

Дата проведения: май 1979 г. Участники: Школа № 2 и Школа № 179, обе Москва, 10 классы. Жюри: В.А. Сендеров и др.

Задача 1. В банку посадили $M \cdot P + 1$ пауков, про которых известно, что из любых $P + 1$ пауков найдутся два, один из которых сожрет другого. Доказать, что из них можно выбрать цепочку из $M + 1$ паука, каждый из которых сожрет следующего. (Пауков можно рассматривать как частично упорядоченное множество относительно операции пожирания.)

Задача 2. $n < k$, и кроме того, число k нечётно. Доказать, что число $(2^n + 1) \cdot \ldots \cdot (2^k - 2)$ не является полным квадратом.

Задача 3. $x_1 = 1, \ldots, x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 9}{10 \cdot x_n}$. Найти $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$

Задача 4. На плоскости даны K окружностей: известно, что любые P из них имеют общую точку. При каких K и P обязана существовать точка, в которой пересекаются более, чем P окружностей?

Задача 5. На какое наименьшее число тупоугольных треугольников можно разрезать правильный двенадцатиугольник?

Задача 6. Докажите, что неравенство $|\sqrt{2} - X/Y| \leqslant 1/(5 \cdot Y)^2$ не имеет целых решений.

Задача 7. Найти все такие многочлены $P_k(X)$ с целыми коэффициентами, принимающие в k различных точках значение k, такие, что $P_k(0) = 0$.

Задача 8. Доказать неравенство: $(1 - \cos\alpha)(1 - \cos\beta)(1 - \cos\gamma) \geqslant \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$, где α, β, γ – углы треугольника.

Задача 9. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Точки A_1, B_1, C_1 – основания перпендикуляров, опущенных из точки O на прямые BC, AC, AB соответственно. Около треугольников AOA_1, BOB_1, COC_1 описаны три окружности. Доказать, что эти три окружности, кроме точки O, имеют еще одну общую точку.

Задача 10. Дан додекаэдр. Каково наименьшее число движений этого додекаэдра таких, что в виде композиции некоторого набора степеней, положительных и отрицательных, этих движений можно представить любое движение данного додекаэдра.

Победила команда Школы № 2.

* * *

Дата проведения 10.12.1979. Участники: Школа № 2 и Школа № 179, обе Москва, 10 классы. Жюри: В.А. Сендеров и др.

Задача 1. Страны планеты Антитерра заключают договоры о дружбе и сотрудничестве. Лишь только такие договоры будут заключены между любыми странами, существование планеты прекратится. Среди любых $2k$ стран найдётся хотя бы одна, заключившая договор с остальными странами этой группы. Какое наибольшее число договоров осталось заключить до уничтожения планеты?

Задача 2. Найти все полиномы $F(X)$ с вещественными коэффициентами такие, что $F(X) \cdot F(2 \cdot X^2) = F(2 \cdot X^3 + X)$.

Задача 3. $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ – углы остроугольного треугольника. Доказать неравенство: $\sin^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C} > 2$.

Задача 4. Докажите, что для любого натурального числа A, которое не является полным квадратом, найдётся такое число C, что для любых целых m и n выполняется неравенство: $|\sqrt{A} - m/n| \geqslant 1/(C \cdot n)^2$.

Задача 5. В треугольной пирамиде $SABC$ грани SAB, SAC, SBC взаимно перпендикулярны. Обозначим через O ортоцентр грани ABC. Доказать неравенство: $|AO| + |OB| + |OC| \geqslant 3\sqrt{2} \cdot |SO|$.

Задача 6. Назовем сеточными точки (X, Y) плоскости, обе координаты которых – целые числа. У каждой сеточной точки имеются 4 соседние точки: верхняя, нижняя, левая, правая. Пусть O– окружность с $R \geqslant 2$ такая, что ни одна сеточная точка не принадлежит ей. Внутренней граничной точкой назовём каждую сеточную точку, лежащую внутри круга K и имеющую хотя бы одну соседнюю точку вне круга K, внешней граничной точкой назовём каждую сеточную точку, лежащую вне круга K и имеющую хотя бы одну соседнюю точку внутри круга O. Доказать, что внешних граничных точек на 4 больше, чем внутренних.

Задача 7. Две окружности касаются друг друга внешним образом и третьей изнутри. Проводятся внешняя и внутренняя общие касательные к первым двум окружностям. Доказать, что внутренняя касательная делит пополам дугу, отсекаемую внешней касательной на третьей окружности.

Задача 8. a – натуральное число, $a > 2$, p – простое число, $p > 2$, $a + 1$ делится на p, но не делится на p^2. Докажите, что $a^{p^k} + 1$ делится на p^{k+1}, но не делится на p^{k+2}

Задача 9. Пусть N – количество целых решений уравнения $X^2 - Y^2 = Z^3 - T^3$, удовлетворяющих условию: $0 \leqslant X, Y, Z, T \leqslant 10^{1984}$, M – количество целых решений уравнения $X^2 - Y^2 = Z^3 - T^3 + 1$, таких, что $0 \leqslant X, Y, Z, T \leqslant 10^{1984}$. Доказать, что N больше M.

Задача 10. Найти все многочлены с натуральными коэффициентами, обладающие свойством: $F(p)$ – простое при всяком простом p.

Задача 11. Функция $F(x)$ непрерывна при $x > 0$. Известно, что при любом фиксированном $x > 0$ последовательность $F(x+N) \to 0$ при $N \to \infty$. Следует ли отсюда, что $F(X) \to 0$ при $x \to \infty$?

Победила команда Школы № 2 со счётом $60 : (-3)$**.**

* * *

Дата проведения 20.02.1980. Участники: Школа № 2 и Школа № 91, обе Москва, 10 классы. Жюри: В.А. Сендеров

Задача 1. Доказать, что если число $2^{2k}+2^k+1$ – простое, то оно делитель числа $2^{2^k+1}-1$.

Задача 2. Решить в целых числах уравнение: $x^2+4=y^3$.

Задача 3. Доказать, что для любого многочлена с целыми коэффициентами $p_1(X)\not\equiv 0$ существуют многочлены с целыми коэффициентами $p_2(X)\not\equiv 0$ и $p_3(X)$ такие, что $p_1(X)\cdot p_2(X)=p_3(X^{1984})$.

Задача 4. A, B, C – длины сторон тругольника. M_a, M_b, M_c – длины медиан, проведённые к сторонам A, B, C соответственно. Доказать:

$$\frac{M_a\cdot A}{B\cdot C}+\frac{M_b\cdot B}{A\cdot C}+\frac{M_c\cdot C}{B\cdot A}\leqslant\frac{M_a}{A}+\frac{M_b}{B}+\frac{M_c}{C}.$$

Задача 5. Можно ли расположить в правильном треугольнике со стороной $1,5$ без пересечений по внутренним точкам правильные треугольники со сторонами 1, $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5,\ldots$?

Задача 6. Доказать, что для любого K существует окружность с центром в начале координат, на которой лежат ровно $4K$ точек с целыми координатами.

Задача 7. Рассмотрим бесконечную десятичную дробь $0,1234\ldots$ (после запятой идут подряд все натуральные числа). Пусть сочетание 1984 встречается среди первых N цифр этой дроби ровно $\phi(N)$ раз. Найти $\lim\limits_{N\to\infty}\phi(N)/N$.

Задача 8. Периметр любого сечения произвольной треугольной пирамиды не больше периметра хотя бы одной грани. Доказать.

Задача 9. Доказать, что при простом p многочлен $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+1$ не разлагается в произведение многочленов с неотрицательными коэффициентами.

Задача 10. Дан треугольник. Доказать, что существует окружность, касающаяся вписанной и 3 вневписанных окружностей.

Победила команда Школы № 2 со счётом $52:(-4)$.

* * *

Дата проведения: март 1982 г. Участники: Школа № 2 и Школа № 91, обе Москва, 9-10 классы. Жюри: Д.В. Дерягин, А.Я. Белов

Задача 1. Пауки. В банку посадили $M\cdot P+1$ пауков, про которых известно, что из любых $P+1$ пауков найдутся два, один из которых сожрёт другого. Доказать, что из них можно выбрать цепочку из $M+1$ паука, каждый из которых сожрёт следующего. (Пауков можно рассматривать как частично упорядоченное множество относительно операции пожирания.)

Задача 2. Квадрат. Доказать, что выражение $(2^n+1)(2^n+2)\cdot\ldots\cdot(2^k-2)$ не является полным квадратом ($n<k$).

Задача 3. Многогранник(*повтор*). Выпуклый многогранник имеет N вершин ($N>3$). A – точка внутри него. Из точки A к вершинам многогранника проводятся единичные вектора. Доказать, что их сумма не больше $N-2$.

Задача 4. Система(*повтор*). Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}1-x_1^2=x_2,\\ 1-x_2^2=x_3,\\ \ldots\\ 1-x_n^2=x_1.\end{cases}$$

Задача 5. Факториал(*повтор*). Доказать, что для любых натуральных N, k $(k > 1)$

$$\frac{(N \cdot k)!}{(N!)^k \cdot k! \cdot (2N-1)} \in \mathbb{Z}.$$

Задача 6. Делимость. Найти все натуральные числа N такие, что N делится на все натуральные числа, не превосходящие $\sqrt{N}$.

Задача 7. Пирамида. Дан выпуклый многогранник единичного объёма. Верно ли, что в него можно вписать пирамиду объёма $1/8$?

Задача 8. Что больше? $\sqrt[3]{413}$ или $6 + \sqrt[3]{3}$?

Задача 9. $MABC$ – треугольная пирамида. Треугольник ABC – правильный. Углы MAB, MCA, MBC равны. Доказать, что пирамида правильная.

Задача 10. Множество. На плоскости дано множество A, площадь которого меньше 1, и N точек. Доказать, что множество A можно сдвинуть на вектор, длина которого меньше $\sqrt{N/\pi}$, где $\pi = 3,14159\ldots$, так, что множество, полученное в результате сдвига, не будет покрывать ни одной из данных N точек.

Задача 11. Многочлен. Дан многочлен $P(X)$. Для любого $X > 0 : P(X) > 0$. Доказать, что $P = Q/T$, где Q и T – многочлены с неотрицательными коэффициентами.

Задача 12. Общая сторона(*нз*). Выпуклый четырёхугольник разрезан на треугольники. Доказать, что у двух из них есть общая сторона.

Победила команда Школы № 2.

* * *

Дата проведения 25-26.05.1982. Участники: Школа № 2 и Школа № 18, обе Москва, 9-10 классы. Жюри: аспирант МФТИ Сергей

Задача 1. Вычислить без таблиц: $\mathrm{tg}(\pi/11) \cdot \mathrm{tg}(2\pi/11) \cdot \mathrm{tg}(3\pi/11) \cdot \mathrm{tg}(4\pi/11) \cdot \mathrm{tg}(5\pi/11)$.

Задача 2. Пусть N – целое. Доказать, что все коэффициенты разложения бинома Ньютона $(1+x)^n$ нечётны тогда и только тогда, когда n имеет вид $2^k - 1$ (k – натуральное число).

Задача 3. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках M, N и S. Периметр треугольника ABC вдвое больше периметра треугольника MNS. Доказать, что продолжения высот треугольника MNS проходят через точки A, B и C.

Задача 4. На доске отмечены N точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждый из трёх игроков (по очереди) соединяет отрезком прямой какие-либо две точки. Запрещается проводить отрезки, пересекающие ранее проведенные отрезки. Выигравшим считается тот, кто сделал последний ход. В игре победил игрок, сделавший первый ход. Мог ли исход быть иным, если бы второй и третий игроки придерживались иной стратегии игры?

Задача 5. Лист бумаги разделен линиями на 12 частей, и каждая из этих частей закрашена в один из 12 различных цветов. Затем на листе проведены несколько линий, разделивших его на 12 новых частей, и вновь каждая из этих частей закрашена в один из тех же 12 цветов. Доказать, что повторную раскраску можно осуществить так, что не менее $1/12$ площади листа не придётся перекрашивать.

Задача 6. Найти:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n!)^{n+1}} \cdot \prod_{k=1}^{n} (k^k \cdot k!).$$

Задача 7. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд. Доказать, что если каждый диаметр пересекает не более k хорд, то сумма длин хорд меньше $3,15 \cdot k$.

Задача 8. Числа a_n определяются рекуррентно:

$$a_{n+1} = 1/28 \cdot \left(a_n^4 + \frac{27}{a_n^2}\right),\ a_1 = 2.$$

Доказать, что $1/2 < a_n \leqslant 2$ при всех $n \geqslant 1$.

Задача 9. В треугольнике со сторонами A, B и C проведена прямая через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности. Доказать, что если эта прямая перпендикулярна биссектрисе угла C, то $(A + B + C)/3 = 2 \cdot A \cdot B/(A + B)$.

Задача 10. Имеется натуральное число $k > 1000$. Доказать, что сумма остатков от деления числа 2^k на числа $1, 2, 3, \ldots, k$ больше, чем $k/2 \cdot (\log k - 4)$.

Победила команда Школы № 18.

* * *

Дата проведения 18.12.1982. Участники: Школа № 2 и Школа № 7, обе Москва, 10 классы. Составители: Д.В. Дерягин, А.Я. Канель, А.К. Ковальджи, А.А. Шапиро

Задача 1. Коробки. В коробке первой величины содержатся две коробки второй величины. В коробках K-ой величины содержатся две коробки $(K + 1)$-ой величины. В коробках последней N-ой величины лежит по одной монете. За один ход разрешается в одной из коробок любой величины перевернуть все монеты. Доказать, что за $[N/2] + 1$ ходов можно уравнять число монет, лежащих орлом вверх и орлом вниз.

Задача 2. Число. Дано натуральное число N. К нему справа приписывают по одной цифре, кроме девятки. Доказать, что рано или поздно получится составное число.

Задача 3. Многочлен. Найти многочлен минимальной степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число: $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$.

Задача 4. Фигура. Доказать, что в любую выпуклую фигуру площади 1 можно вписать треугольник площади: **а*)** $3/8$; **б**)** $3\sqrt{3}/4\pi$.

Задача 5. Сумма цифр. Последовательность задана формулой: (сумма цифр числа N)/(сумма цифр N^2). Ограничена ли эта последовательность сверху?

Задача 6. Последовательность. Дана строго возрастающая последовательность целых чисел (U_n). Известно, что $U_1 = 1$, $U_2 = 2$ и, если $(m, n) = 1$, то $U_{mn} = U_m U_n$. Доказать, что $U_k = k$, при всех k.

Задача 7. 1000 прямых. Плоскость разрезали вдоль 1000 прямых. Известно, что никакие две прямые не параллельны и никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Доказать, что среди полученных кусков плоскости будет не менее 998 треугольников.

Задача 8. Числа по кругу. На окружности записаны 128 целых чисел. За один ход между каждой парой соседних чисел записывается их сумма, а сами эти числа стираются. Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на 128.

Задача 9. Старшие члены. Последовательность задана формулой $Q(1, X) = X$, $Q(N+1, X) = Q(N, X + 1)/Q(N, X)$. Пусть $Q(N, X) - 1 = A(N, X)/B(N, X)$, где $A(N, X)$, $B(N, X)$ – многочлены. Найти отношение старших членов этих многочленов.

Задача 10. Черноморск(*новая, Дерягин*). В Черноморске во время обсуждения вопроса о том, когда же наконец Черноморск объявят вольным городом, сложилась занятная ситуация. Все черноморцы разбились на партии, а все партии на фракции так, что: 1) Все черноморцы объединились в одну партию. 2) Каждая партия состояла ровно из двух непересекающихся фракций. 3) Каждая фракция численностью более одного человека считала себя партией. Каждый член каждой партии платил членские взносы (1 руб.). Как им надо было организоваться, чтобы сумма взноса была: **а)** максимальной; **б)** минимальной?

Победила команда Школы № 2.

* * *

Дата проведения 18.12.1983. Участники: Школы № 2 и № 57, обе Москва, 9-10 классы. Задачи готовили: Д.В. Дерягин, А.Я. Канель, А.К. Ковальджи, А.А. Шапиро

Задача 1. Коровы. В стаде 101 корова. Любые 100 из них можно разделить на 2 стада по 50 коров так, что общие веса стад будут равны. Докажите, что веса всех коров равны.

Задача 2. Круг. Можно ли тремя прямыми разделить круг на семь равновеликих частей?

Задача 3. Неравенство. Доказать, что для положительных x, y: $x^y + y^x > 1$.

Задача 4. Раскраска. Плоскость раскрашена в четыре цвета. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся две точки A и B одного цвета, расстояние между которыми отличается от единицы меньше, чем на ε.

Задача 5. Радикальная. Доказать, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ – иррациональное

Задача 6. N **Точек.** Доказать, что в единичном квадрате можно разместить N точек $(N > 2)$ так, что любые три точки определяли треугольник площади не менее, чем $1/(2N^2)$.

Задача 7. Семь чисел. Существует ли семь различных натуральных чисел таких, что произведение любых шести из них плюс единица делится на седьмое число?

Задача 8. Целая сторона. Прямоугольник разрезан на конечное число прямоугольничков. У каждого прямоугольничка есть целая сторона. Доказать, что у прямоугольника тоже есть целая сторона.

Задача 9. Завы и Замы(*фор, Келлин*). 100 замов получили взыскания от 100 завов. При этом каждый зав наложил по одному взысканию на 15 замов, а каждый зам получил по одному взысканию от 15 завов. Доказать, что директор может снять 1400 взысканий так, что у каждого зама останется по одному взысканию, и все взыскания будут наложены разными завами.

Задача 10. 10-угольник(*МГО-72*). 10-угольник пересечён окружностью так, что каждая сторона делится на три отрезка. Два отрезка, прилежащие к каждой из девяти вершин, равны. Доказать, что отрезки, прилежащие к десятой вершине, тоже равны.

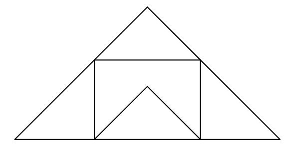
Задача 11. Сходимость. Сходится ли сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\ln n}}{n}$?

Задача 12. DIV-GRAD. Городок DIV-GRAD обладает отличной автобусной сетью! С каждой остановки можно проехать на любую другую без пересадок. Каждый маршрут имеет пять остановок, а каждые два маршрута имеют единственную общую остановку. Сколько же автобусных маршрутов в этом дивном граде? Нарисуйте карту.

* * *

Дата проведения 28.01.1984. Участники: 8 и 10 классы Школы № 2. Задачи готовили: Д.В. Дерягин, А.Я. Канель, А.К. Ковальджи, Г.В. Кондаков, А.А. Шапиро

Задача 1. Матрёшка(*фор, Ковальджи*). В треугольник вложен параллелограмм, а в параллелограмм вложен треугольник. Найти наибольшее отношение площади вложенного треугольника к площади исходного.



Задача 2. Открытка. Участники новогоднего конкурса ВМШ получают открытки. За первое место даётся одна открытка и десятая часть оставшихся, за второе место – две и десятая часть оставшихся, за N место – N и десятая часть оставшихся, все открытки были розданы. Сколько было участников?

Задача 3. Квадраты(*новая, Ковальджи*). Вершины квадратов $OABC$ и $ODEF$ отмечены по ходу часовой стрелки. Найти угол между прямыми AD и BE.

Задача 4. Числа. В ряду стоят более 10 чисел. Известно, что сумма любых семи, стоящих подряд, отрицательна, а сумма любых девяти, стоящих подряд, положительна. Сколько чисел стоит в ряду?

. . . [. . . . .] . . .
7−
. . [. . . . .] . .
9+

Задача 5. Коридор. На плоскости расположен бесконечный коридор прямоугольной формы шириной один метр, рис. 5. Найти наибольший диаметр фигуры, которую можно протащить через прямой угол.

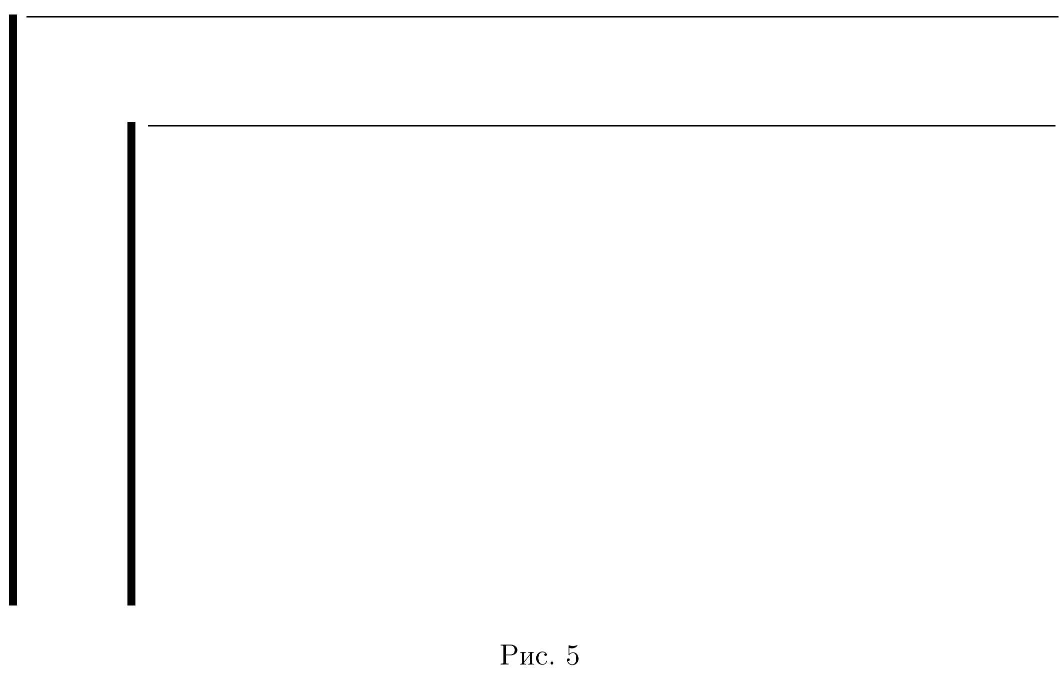


Рис. 5

Задача 6. Функции. Рассмотрим множество непрерывных функций на отрезке $[0, 2N]$, таких, что $F(0) = 0$ и на любом отрезке $(K, K+1)$, K – целое, производная равна $+1$ либо -1, рис. 6. Каких функций больше: неотрицательных или таких, что $F(2N) = 0$?

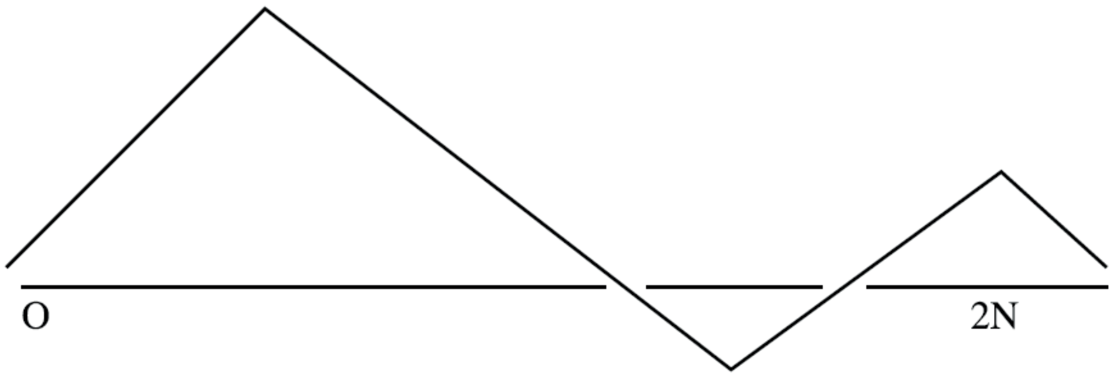


Рис. 6

Задача 7. Угол. Внутри угла даны две точки. Провести через эти точки равнобедренный треугольник с основанием на одной стороне угла и вершиной на другой стороне.

Задача 8. Сумма. Рассмотрим все натуральные числа $N > 1$, представимые в виде степени натурального числа с натуральным показателем $K > 1$. Найти сумму обратных величин всех этих чисел, уменьшенных на единицу.

Задача 9. Прожекторы(*фор, Дерягин*). Две телекомпании получили право освещать столицу международной шахматной мысли Нью-Васюки, представляющую собой прямоугольную сетку улиц M на N. Они по очереди ставят на неосвещённый перекрёсток прожектор, который освещает весь северо-восточный угол города (от нуля до 90 градусов). Премию О.Бендера получит та компания, которой на своём ходу нечего будет освещать. Кто выиграет при правильной игре, начинающая или вторая сторона?

Задача 10. Рыцари. На пир при дворе короля Артура собрались N рыцарей. Они либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у всех рыцарей друзей больше, чем врагов (среди собравшихся). Можно ли рассадить рыцарей за круглым столом так, чтобы справа и слева от каждого сидел друг?

* * *

Дата проведения 06.02.1984. Участники: Школы № 2 и № 179, обе Москва, 8 – 10 классы. Задачи готовили: Г.В. Кондаков, А.А. Шапиро, С.Г. Роман

Задача 1. Число. Запись числа состоит из нулей и единиц. Любой фрагмент числа “10” заменяют на “0001”. Доказать, что рано или поздно заменять будет нечего.

Задача 2. Множество. Множество содержит 1000 различных элементов. Каково наибольшее количество его подмножеств, попарно несравнимых по включению?

Задача 3. Прямоугольники. Стороны нескольких прямоугольников параллельны осям координат. Любые два из них имеют общую точку. Доказать, что все прямоугольники имеют общую точку.

Задача 4. Нули. Доказать, что в числе $(6 + \sqrt{37})^{999}$ первые 999 знаков справа после запятой – нули.

Задача 5. Нью-Васюки. Остап Бендер организовал в Нью-Васюках раздачу слонов населению. На раздачу явились 28 членов профсоюза и 37 не членов профсоюза, причем Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну всем не членам. Оказалось, что существует единственный способ раздать таким образом всех слонов. Какое наибольшее число слонов могло быть у Остапа Бендера? (Каждому достался по крайней мере один слон.)

Задача 6. Ломаная(*ВМШ-65*). Доказать, что замкнутую ломаную длины 1 можно заключить в круг радиуса $\frac{1}{4}$.

Задача 7. Сотый член. Первый член последовательности a_k равен 1, остальные вычисляются по правилу: $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_k}$. Доказать, что $a_{100} > 14$.

Задача 8. Система(*повтор*). Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 - x_1^2 = x_2; \\ 1 - x_2^2 = x_3; \\ \dots \\ 1 - x_n^2 = x_1. \end{cases}$$

Задача 9. Поверхность. (*новая, Шапиро*) Дана непрерывная поверхность без самопересечений. Известно, что на ней есть 2 точки, расстояние между которыми максимально для всех пар точек данной поверхности. Известно также, что любая ее проекция есть круг. Доказать, что эта поверхность – сфера.

Задача 10. ГМТ. Дан треугольник ABC. Через точку O внутри него проведены отрезки AK, BL, CM. Известно, что $S_{BOM} = S_{AOL} = S_{COK}$. Найти геометрическое место точек O.

Задача 11. Неравенство. $A^3 + B^3 + C^3 + A^2B + B^2C + C^2A \geqslant 2 \cdot (B^2A + C^2B + A^2C)$.

Победила команда Школы № 2.

* * *

Дата проведения 21.03.1984. Участники: Школы № 2 и № 57, обе Москва, 9 – 10 классы. Задачи готовили: А.Я. Канель, А.К. Ковальджи, Г.В. Кондаков

Задача 1. Стрелки. В $(2N + 1)$-угольнике проведены все диагонали. Можно ли на сторонах и диагоналях поставить стрелки так, чтобы сумма получившихся векторов равнялась нулю?

Задача 2. Уравнение. Сколько решений имеет уравнение $F(F(F(X))) = X$, где $F(X) = 3X - 16X^3$?

Задача 3. Пешеходы. Три пешехода идут по прямым дорогам, каждый со своей постоянной скоростью. Доказать, что если они три раза оказались на одной прямой, то они все время будут на одной прямой.

Задача 4. Прожектор. Прожектор освещает октант. Доказать, что прожектор можно поместить в центр куба так, что он не осветит ни одной вершины.

Задача 5. Король(*фор, Канель и Ковальджи*). На шахматной доске $2N \times 2N$ стоят N ладей и король. Ходят по очереди. Доказать, что король сможет либо съесть ладью, либо встать под шах.

Задача 6. Сечение. Всякий ли трёхгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный треугольник?

Задача 7. Расстояние. На плоскости расположено 10 точек и 10 прямых. Доказать, что можно найти такую точку, расстояние от которой до любой прямой будет меньше, чем до любой из точек.

Задача 8. Угол. Через точку внутри угла провели прямую, которая отсекла треугольник наименьшей площади. Доказать, что отрезок прямой делится этой точкой пополам.

Задача 9. Числа. Назовём числовым отрезком 99 последовательных натуральных чисел. Два отрезка расположили один под другим. Доказать, что в каждом отрезке можно переставить числа так, что суммы двух чисел в каждом столбце будут образовывать числовой отрезок.

Задача 10. Спички. 45 спичек разложили на несколько кучек. Из каждой кучки взяли по одной спичке и сделали новую кучку, затем снова взяли по одной спичке и сделали новую кучку и т. д. Доказать, что рано или поздно получатся 9 кучек с числом спичек $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

* * *

Дата проведения 08.12.1985. Участники: Школа № 2 и Школа № 679, обе Москва, 9 классы. Задачи готовили: А.Я. Канель, А.К. Ковальджи, Г.В. Кондаков

Задача 1. Короли(*решение неизвестно*). В противоположных углах шахматной доски стоят короли: синий и красный. Они закрашивают в свой цвет клетки, на которых стоят, ходят по очереди на соседнюю клетку, которая не закрашена другим королём. Они хотят закрасить побольше клеток и ходят наилучшим образом. Будет ли закрашено одним цветом более половины клеток? (короли могут стоять рядом).

Задача 2. Среднее. Даны числа: 1 и девять нулей. Разрешается выбирать два числа и заменять каждое их средним арифметическим. Какое наименьшее число может оказаться на месте единицы?

Задача 3. 1985-угольник. Почему на клетчатой бумаге нельзя нарисовать правильный 1985-угольник с вершинами в узлах сетки?

Задача 4. Подмножества. Разбейте множество натуральных чисел на два подмножества A, B так, чтобы множество средних арифметических двух различных элементов из A содержало множество B и не пересекалось с множеством A.

Задача 5. Ладьи. Сколько ладей можно расставить в ячейках 4-мерного куба со стороной N, чтобы они не били друг друга?

Задача 6. Вид числа. Целое число N таково, что число $3N$ представимо в виде $X^2 + 2Y^2$, где X, Y – целые числа. Докажите, что само число N представимо в таком виде.

Задача 7. Пятна. На Солнце расположены непересекающиеся круглые пятна, каждое из которых занимает меньше половины поверхности. Докажите, что найдутся две противоположные не закрытые пятнами точки.

Задача 8. Раскраска. В N-мерном кубе покрашено более половины вершин. Ребро называется покрашенным, если покрашены обе ограничивающие его вершины. Докажите, что покрашено не менее N рёбер.

Задача 9. Таблица. Положительные числа $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_n$ таковы, что $a_1 + \ldots + a_k = b_1 + \ldots + b_n$. Докажите, что в прямоугольной таблице k на n клеток можно расставить неотрицательные числа так, чтобы суммы чисел в строках равнялись $a_1, \ldots, a_k$, а в столбцах — $b_1, \ldots, b_n$, причём нулей в таблице будет не менее $(k-1) \cdot (n-1)$.

Задача 10. Граф. Все ребра полного графа с N вершинами покрасили в M цветов. Докажите, что в нём найдется полный подграф с K вершинами, все ребра которого покрашены в один цвет, при условии, что M и K заданы, а N достаточно большое.

Конкурс капитанов. Дана последовательность: $a_1, a_2, \ldots = 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, \ldots$. Напишите формулу общего члена a_n.

Победила команда Школы № 2.

* * *

Дата проведения 04.08.1986. Участники: Школа № 2 и Школа № 57, обе Москва, 9-10 классы. Жюри: Ю.М. Бурман, А. Беренштейн, Г.В. Кондаков

Задача 1. О. Бендер(*повтор фев. 84*). Остап Бендер организовал в Нью-Васюках раздачу слонов населению. На раздачу явилось 28 членов профсоюза и 37 не членов профсоюза, причём Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну всем не членам. Оказалось, что существует единственный способ раздать таким образом всех слонов. Какое наибольшее число слонов могло быть у О. Бендера? (Каждому достался хотя бы один слон.)

Задача 2. Слон. Какое количество ходов требуется хромому слону, чтобы обойти все белые клетки доски 10×10? (Он ходит только на одну клетку по диагонали.)

Задача 3. Куб. Расставить в N-мерном кубе различные натуральные числа так, чтобы суммы в горизонталях всех измерений были одинаковы (куб $K \cdot K \cdot \ldots \cdot K$).

Задача 4. Простое(*повтор дек. 82*). Дано натуральное число N. К нему справа приписывают по одной цифре, кроме девятки. Доказать, что рано или поздно получится составное число.

Задача 5. Раскраска. Квадрат 7×7 раскрашен в 2 цвета. Можно полностью перекрашивать любую диагональ, вертикаль или горизонталь. Можно ли таким путём перекрасить его в 1 цвет?

Задача 6. Игра. Двое играют на квадратном (30×30) клетчатом листе бумаги. Начинающий делает разрез единичной длины по линии сетки от края листа, второй продолжает этот разрез аналогичным образом и т.д. Выигрывает тот, после чьего хода от листа отвалится кусок. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 7. Неравенство. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} \geqslant 24.$$

Задача 8. Максимум. Известно, что все числа x_i положительны и $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$. Найдите максимум $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \ldots + x_n \cdot x_1$.

Задача 9. Разрезание. Линия делит квадрат на две равные части. Всегда ли она проходит через центр квадрата? Тот же вопрос для куба.

* * *

**Дата проведения 08.08.1986. Участники:
Школа № 145, г. Киев против Школ № 57 и № 2, обе Москва, 8-10 классы.
Жюри: А. Беренштейн, Ю.М. Бурман, Г.В. Кондаков, А.А. Шапиро**

Задача 1. Куб. Дан куб $6 \times 6 \times 6$. Найти максимально возможное число параллелепипедов $4 \times 1 \times 1$, которые можно поместить в этот куб без пересечений.

Задача 2. Функции. Рассмотрим множество непрерывных функций на отрезке $[0, 2N]$, таких, что $F(0)=0$ и на любом отрезке $(K, K+1)$, K-целое, производная равна $+1$ либо -1, рис. 1. Каких функций больше: неотрицательных или таких, что $F(2N)=0$?

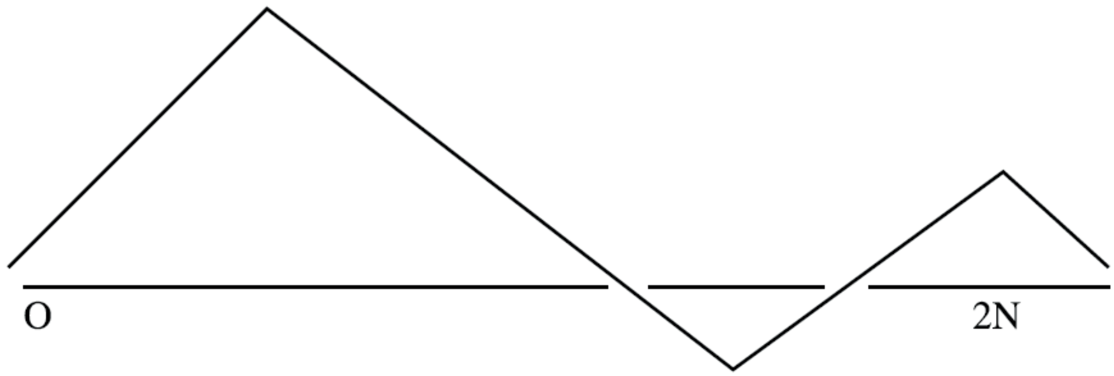


Рис. 1

Задача 3. Неравенство(*повтор дек. 83*). Доказать, что для положительных x, y: $x^y + y^x > 1$.

Задача 4. Коридор. На плоскости расположен бесконечный коридор прямоугольной формы шириной один метр, рис. 2. Найти наибольший диаметр фигуры, которую можно протащить через прямой угол.

Рис. 2

Задача 5. Морской бой(*новая, Игнатьев*). Доска 10×10 заполняется “кораблями” для “морского боя”:

а) Сначала 4-клеточный, затем 3-ёх, 2-ух, 1-но клеточные;

б) В обратном порядке.

Может ли не хватить места?

Задача 6. Дробь. Дано выражение: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$. Удалить иррациональность из знаменателя.

Задача 7. Покрытие. Дан тетраэдр. 4 шара с центрами в его вершинах покрывают его весь. Ребра тетраэдра не увеличили, оставив те же шары в соответствующих вершинах. Верно ли, что шары также покрывают тетраэдр?

Задача 8. Прогрессии. Дано N целочисленных арифметических прогрессий, причём каждые две имеют хотя бы одно общее число. Доказать, что найдется число, входящее во все прогрессии.

Задача 9. Фигура. Рис. 3. $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle DBC = 36^\circ$, остальные произвольные. Доказать: $|AD| + |CD| + |AC| \geqslant 2|BD|$.

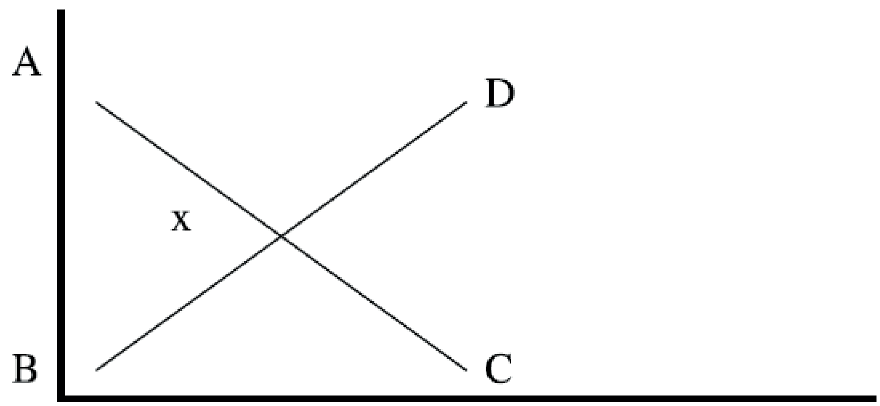


Рис. 3

Задача 10. Раскраска(*новая, Кондаков*). Решётка из правильных треугольников со стороной 1 см раскрашена в N цветов. Для любой ли раскраски верно, что найдется точка, из которой улитка может проползти 100 см по одноцветным рёбрам без повторений? Решить задачу в зависимости от N (каждое ребро покрашено в один цвет).

* * *

Дата проведения 28.01.1987. Участники: Школы № 2 и № 91, обе Москва, 8-10 классы Жюри: А.Я. Канель, А.К. Ковальджи, Г.В. Кондаков, М.Л. Концевич

Задача 1. Людоеды(*фор, жюри*). На пир собрались $N \cdot K + 1$ людоед. Известно, что среди любых $K + 1$ из них хотя бы один оказался в желудке у другого. Докажите, что есть матрёшка из $N + 1$ людоеда, каждый из которых (кроме последнего) находится в желудке у следующего.

Задача 2. Куб. В вершинах куба написаны числа. Вместо каждого числа записывают среднее арифметическое чисел, стоящих в трёх соседних вершинах (числа заменяют одновременно). После 10 таких операций в вершинах оказались исходные числа. Найти все такие числа.

Задача 3. Многочлены. Найти все многочлены с натуральными коэффициентами, обладающие свойством: $F(p)$ – простое при всяком простом p.

Задача 4. Тело. Внутри куба находится выпуклое тело, проекции которого на грани куба, полностью их покрывают. Доказать, что минимальный объём этого тела не менее 1/3 объёма куба.

Задача 5. Функция(*повтор*). Функция $F(x)$ непрерывна при $x > 0$. Известно, что при любом фиксированном $x > 0$ последовательность $F(x+n) \to 0$ при $n \to \infty$. Следует ли отсюда, что $F(x) \to 0$ при $x \to \infty$?

Задача 6. Сумма. Обозначим через $S(Y)$ сумму цифр числа Y. Докажите, что существует бесконечно много номеров N, таких, что $S(2^N) > S(2^{N+1})$.

Задача 7. Поиск. Один из игроков рисует на плоскости выпуклый N-угольник и записывает координаты некоторой точки. Второй может проводить произвольную прямую, а первый сообщает, с какой стороны от неё расположена точка. Какое наименьшее число прямых всегда достаточно, чтобы определить, внутри или снаружи многоугольника находится точка?

Задача 8. Переливания(*фор, Ковальджи*). На Олимпе есть игра: всем богам наливают поровну амброзии, затем боги переливают один другому столько амброзии, сколько у того уже было. Однажды удалось слить всю амброзию в чашу Зевса. Докажите, что число богов равнялось степени двойки.

Задача 9. Треугольники(*повтор*). Можно ли расположить в правильном треугольнике со стороной $1,5$ без пересечений по внутренним точкам правильные треугольники со сторонами 1, $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $\ldots$?

Задача 10. Заборы. На плоскости отметили N точек и $N-2$ непересекающихся отрезка. Докажите, что найдутся две точки, которые "видят" друг друга (точки не лежат на отрезках).

Задача 11. Сравнение(*запасная доска*). a – натуральное число, $a > 2$, p – простое число, $p > 2$, $a+1$ делится на p, но не делится на p^2. Докажите, что $a^{p^k}+1$ делится на p^{k+1}, но не делится на p^{k+2}.

* * *

Дата проведения 22.05.1987. Участники: Сборная Москвы (Школы №№ 2, 57, 91) – Интернат № 18. Жюри: А.Я. Канель, А.К. Ковальджи, Г.В. Кондаков

Задача 1. Многоугольник. Дан выпуклый K-угольник. В него вписывают N-угольник, где $N < K$. $T(N)$ - наибольшая площадь такого N-угольника. Докажите, что $T(N-1)+T(N+1)$ не больше $2T(N)$.

Задача 2. Гвозди(*повтор*). В целочисленную решётку по плоскости вбили гвозди и положили вектор длины 1987. Можно ли повернуть его на 180 градусов так, чтобы он не задел ни одного гвоздя?

Задача 3. Многочлен. Дан многочлен $P(X)$. Для любого $X > 0 : P(X) > 0$. Доказать, что $P = Q/T$, где Q и T - многочлены с неотрицательными коэффициентами.

Задача 4. Многогранник(*новая, Сендеров*). Существует ли выпуклый многогранник, все рёбра которого равны, все грани имеют одинаковое число сторон, в его каркас можно вписать шар, а описать – нельзя?

Задача 5. Последовательность. Дана строго возрастающая последовательность целых чисел U_n. Известно, что $U_1 = 1, U_2 = 2$ и, если $(m,n) = 1$, то $U_{mn} = U_m U_n$. Доказать, что $U_k = k$ при всех k.

Задача 6. Уравнение. Докажите, что уравнение $x^3 + y^3 + z^3 = 2$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

Задача 7. Положительные члены. $B_1, \ldots, B_n$ – целые числа, сумма которых равна 1. Для каждого k обозначим $T(k)$ – число положительных членов в последовательности: $B_k, B_k+B_{k+1}, \ldots, B_k+B_{k+1}+\ldots+B_n+B_1, \ldots, B_k+\ldots+B_{k-1}$. Докажите, что все $T(k)$ различны.

Задача 8. Делимость (рекурсия) (*новая, Концевич*). Дана последовательность $\{a_k\}$: $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{[n/2]}$. Докажите, что ни один её член не делится на 4.

Задача 9. Многочлены. $P(X), Q(X)$ – многочлены с неотрицательными коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Пусть $P(X)Q(X) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^K$. Докажите, что все их коэффициенты равны 0 или 1.

Задача 10. 4 Краски(*новая, Канель*). Допустим, что любую конечную карту на плоскости можно правильно раскрасить в четыре цвета. Докажите, что тогда бесконечную карту тоже можно правильно раскрасить в четыре цвета.

Задача 11. Черноморск(*повтор дек. 82*). В Черноморске во время обсуждения вопроса о том, когда же наконец Черноморск объявят вольным городом, сложилась занятная ситуация. Все черноморцы разбились на партии, а все партии на фракции так, что: 1) Все черноморцы объединились в одну партию. 2) Каждая партия состояла ровно из двух непересекающихся фракций. 3) Каждая фракция численностью более одного человека считала себя партией. Каждый член каждой партии платил членские взносы (1 руб.). Как им надо было организоваться, чтобы сумма взносов была: **а)** максимальной; **б)** минимальной?

Задача 12. Множество. Множество содержит 1000 различных элементов. Каково наибольшее количество его подмножеств, попарно несравнимых по включению?

Победила сборная Москвы со счётом $50:37:45$**.**

* * *

Дата проведения 03.12.1987. Участники: Школы № 679 и № 179, обе Москва, 9 – 10 классы. Жюри: А.Я. Канель, А.К. Ковальджи, Г.В. Кондаков

Задача 1. Сумма цифр. Последовательность задана формулой: (Сумма цифр числа N)/(Сумма цифр N^2). Ограничена ли эта последовательность сверху?

Задача 2. Граф(*повтор дек. 85*). Все рёбра полного графа с N вершинами покрасили в M цветов. Докажите, что в нём найдется полный подграф с K вершинами, все рёбра которого покрашены в один цвет, при условии, что M и K заданы, а N достаточно большое.

Задача 3. Квадрат. Дан квадрат с вершинами в точках $(\pm1, \pm1)$. Существует ли на оси Ox точка, расстояния от которой до всех вершин рациональные?

Задача 4. Ограниченность. Ограничена ли последовательность: $A_1 = 1$, $A_2 = X$, $A_{n+1} = (A_{n-1} \cdot A_n - 1)/A_{n-1}$, если $1 < X < 2$?

Задача 5. Треугольник. Дан треугольник. Найти геометрическое место центров правильных треугольников, описанных около него.

Задача 6. Круг с дырками. Можно ли непрерывно отобразить круг с N дырками на себя без неподвижных точек?

Задача 7. Многочлен. Многочлен $p(X, Y)$ с целыми коэффициентами принимает всюду положительные значения. Может ли быть $\inf(p(X, Y)) = 0$?

Задача 8. Произведение. Стороны правильного треугольника разделены на N частей, через получившиеся точки проведены прямые, параллельные сторонам. Внутри получившихся треугольников записаны $+1$ или -1 так, что каждое число внутри треугольника равно произведению соседей (по сторонам). Покажите, что в треугольниках при вершинах записаны одинаковые числа.

Задача 9. Разрезание. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на остроугольные треугольники.

Задача 10. Парламент(*новая, Канель*). Разделение парламента на две палаты называется правильным, если у каждого члена не более одного врага в своей палате. Можно ли правильно разделить бесконечный счётный парламент на две палаты, если такое разделение возможно в любом конечном его подмножестве?

Победила команда Школы № 679 со счётом $27:25$**.**

* * *

Дата проведения 05.02.1988. Участники: Школы № 679 и № 179, обе Москва, 9 – 10 классы. Задачи готовил: А.А. Кириллов (младший)

Задача 1. Высотные здания. В Москве 7 высотных зданий. Приезжий математик хочет найти точку, из которой они все видны в заданном порядке (считая от МГУ по часовой стрелке). Для любого ли заданного порядка это возможно?

Задача 2. Окружности. В одну из граней единичного куба вписана окружность, около соседней грани описана окружность. Найти наименьшее расстояние между точками этих двух окружностей.

Задача 3. Предел. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\arcsin \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \arcsin x}$.

Задача 4. 100 точек. На плоскости даны 100 точек. Доказать, что их можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше 100, а расстояние между двумя любыми из которых больше 1. (Расстояние между двумя кругами – это расстояние между их ближайшими точками.)

Задача 5. 1988-угольник. Можно ли построить выпуклый 1988-угольник с длинами сторон $1, 2, \ldots, 1988$ (возможно в другом порядке), все углы которого были бы равны?

Задача 6. Выпуклые фигуры. На плоскости лежат N выпуклых фигур. Докажите, что если любые три из них имеют общую точку, то и все они имеют общую точку.

Задача 7. 987654321. Рассматриваются девятизначные числа, состоящие из всех цифр от 1 до 9. Два таких числа называются дополнительными, если их сумма $a + b = 987654321$. Доказать, что число пар дополнительных чисел нечетно (пары (a, b) и (b, a) – это одна и та же пара).

Задача 8. Разбиения. Разбиением данного числа называется его представление в виде суммы натуральных слагаемых (разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых считаются одинаковыми). Число всех разбиений данного числа N обозначается $P(N)$. Назовём длиной разбиения число различных слагаемых в нём. Доказать, что сумма длин всех разбиений числа N равняется: $P(1) + P(2) + \ldots + P(N - 1)$.

Задача 9. Последовательность. Все последовательности, состоящие из конечного числа 0 и 1, разбиты на два непересекающихся класса: “синие” и “красные”. Доказать, что любую бесконечную последовательность из 0 и 1 можно, откинув несколько первых членов, разбить на куски так, чтобы они имели один цвет.

Задача 10. Решётка. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD разделили на k равных частей, после чего соответствующие точки на сторонах AB и CD соединили. То же повторили со сторонами AD и BC. Из полученных 4-угольников выбрали k так, чтобы в каждой горизонтальной и вертикальной полоске был выбран ровно один 4-угольник. Доказать, что сумма площадей выбранных 4-угольников равна $S(ABCD)/k$.

* * *

Дата проведения 21.04.1988. Участники: Школы № 7 и № 679, обе Москва, 9 классы. Задачи готовили: Ю.М. Бурман, А.Я. Канель, Г.В. Кондаков

Задача 1. Взвешивания. Среди $(3^n - 3)/2$ монет есть одна фальшивая, причём неизвестно, легче она или тяжелее. Докажите, что за N взвешиваний можно определить фальшивую монету и узнать легче она или тяжелее.

Задача 2. Прогрессия. Задана возрастающая положительная геометрическая прогрессия X_n. Может ли дробная часть $\{X_n\}$ стремиться к нулю сверху при N, стремящемся к бесконечности?

Задача 3. Функция(*фор, Канель*). Периодична ли функция:
$y = \cos(x) + \cos(\sqrt[5]{2} \cdot x) - \cos(\sqrt[5]{4} \cdot x) + \cos(\sqrt[5]{8} \cdot x)$?

Задача 4. Непрерывность(*новая, Кондаков*). Функция $F : [0, 1] \to [0, 1]$ монотоннно возрастает. Покажите, что существует точка X на отрезке $[0, 1]$, для которой $F(X) = X$ и F непрерывна в точке X.

Задача 5. Числа. Докажите, что каждое целое положительное число можно представить в виде суммы различных положительных слагаемых столькими способами, сколькими способами его можно представить в виде суммы одинаковых или различных, но нечётных положительных слагаемых.

Задача 6. Минимум. Известно, что числа $x_1, \ldots, x_k$ удовлетворяет неравенствам $x_1 + x_2 \geqslant 1$, $x_2 + x_3 \geqslant 2, \ldots, x_k + x_1 \geqslant k$. Найдите минимум суммы $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$.

Задача 7. Шестиугольник. На сторонах выпуклого центрально симметричного шестиугольника построены во внешнюю сторону правильные треугольники. Вершины этих треугольников, не принадлежащие первоначальному шестиугольнику, соединяются отрезками. Докажите, что середины сторон получившегося шестиугольника являются вершинами правильного шестиугольника.

Задача 8. N-Разбиваемость. На бесконечной ленте напечатана бесконечная последовательность цифр от 1 до 9. Тогда либо какая-то комбинация цифр повторится 10 раз подряд, либо из неё можно вырезать 10 стозначных чисел, идущих в порядке убывания.

Задача 9. Кенгуру(*фор, Канель*). Вокруг каждого узла бесконечной квадратной решетки вырыта яма радиуса ε. Кенгуру прыгает вперёд вдоль прямой $x + \sqrt{2} \cdot y = 1$. Все прыжки имеют длину 1. Докажите, что рано или поздно кенгуру прыгнет в яму.

Задача 10. Целое расстояние. Бесконечное множество точек на плоскости таково, что все попарные расстояния целые. Докажите, что все точки лежат на одной прямой.

Победила команда Школы № 679.

* * *

Дата проведения 17.12.1988. Участники: Школы № 43 и № 179, обе Москва, 9 (8) классы. Жюри: Ю.М. Бурман, Г.В. Кондаков, С.Г.Роман

Задача 1. Окружности. Три данные окружности O_1, O_2, O_3 попарно пересекаются, O_1 и O_2 в точках O_{12} и O_{21}, O_2 и O_3 в точках O_{23} и O_{32} и, наконец, O_1 и O_3 в точках O_{13} и O_{31}. Доказать, что прямые $(O_{12}O_{21})$, $(O_{13}O_{31})$ и $(O_{32}O_{23})$ пересекаются в одной точке.

Задача 2. Сто сумасшедших(*ММО*). Сто сумасшедших красят доску 100×100 в 100 цветов, соблюдая единственное правило: в одной строке и в одном столбце не может быть двух клеток, раскрашенных одинаково. Могут ли сумасшедшие правильно раскрасить доску, если уже раскрашено

а) 100 клеток; **б)** вся доска, кроме одной клетки; **в)** вся доска, кроме двух клеток?

Задача 3. Квадраты(*ВМШ*). На клетчатом листе бумаги расположено несколько квадратов, стороны которых параллельны линиям сетки, но не обязательно идут по ним. Каждые два квадрата имеют общие точки. Докажите, что существует точка, принадлежащая всем квадратам.

Задача 4. Последовательность(*ММО*). Первый член последовательности a_k равен 1, остальные вычисляются по правилу: $a_{k+1} = a_k + 1/a_k$. Доказать, что $a_{100} > 14$.

Задача 5. Многогранник. (*ТГ*) Существует ли многогранник, у которого

а) 8 вершин: A, B, C, D, E, P, T, H;

б) рёбра: AB, AC, BC, BD, CD, EP, ET, PT, TH, PH, AH, DE и других рёбер нет (см. рис. 4);

в) рёбра DE и AH параллельны?

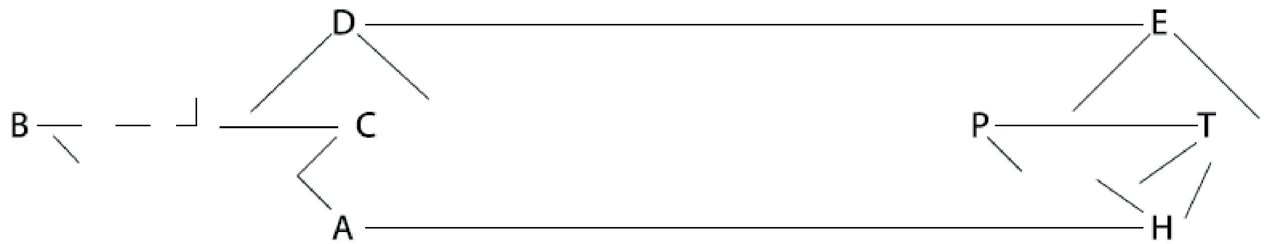


Рис. 4

Задача 6. Что больше? $\sqrt[3]{60}$ или $2+\sqrt[3]{7}$?

Задача 7. Почти центры симметрии(*ТГ*). Точка A называется *почти центром симметрии* фигуры F, если после удаления из F одной точки точка A становится центром симметрии того, что осталось. Сколько почти центров симметрии может иметь плоская фигура?

Задача 8. Максимум. $\sum X_i = 1$ и $\forall_i\ X_i \geqslant 0$. Найдите максимум $X_1X_2 + X_2X_3 + \ldots + X_{n-1}X_n$.

Задача 9. Истина(*ММО*). Бесконечно Мудрый Таракан близорук. Он видит Истину, только когда находится не более, чем в одном шаге от неё. Первоначально Таракан находится в 1000 шагах от Истины. Когда Таракан делает шаг, друзья говорят ему, приблизился он к Истине, или нет. Докажите, что пользуясь этой и только этой информацией, Таракан может достичь Истины менее чем за 1030 шагов.

Задача 10. Коровы. В стаде 101 корова. Любые 100 из них можно разделить на 2 стада по 50 коров так, что общие веса стад будут равны. Докажите, что веса всех коров равны.

Победила команда Школы 43.

* * *

Дата проведения 22.10.1989. Участники: Школы № 43 и № 1101, обе Москва, 9 (8) классы. Жюри: Ю.М. Бурман, А.Я. Канель, Г.В. Кондаков, А.В.Спивак

Задача 1. Дробь. Можно ли сократить дробь $(111N+5)/(64N+3)$ при каком-нибудь целом N, и если да, то на какое число?

Задача 2. Клад. На необитаемом острове пираты нашли записку с указанием, где спрятан клад. В ней говорится: от перевёрнутой лодки идите до пальмы, поверните направо и пройдите столько же. Отметьте точку. Вернитесь к лодке. Идите к скале, поверните налево и пройдите столько же. Отметьте вторую точку. Посредине между вашими отметками зарыт клад. Пираты нашли и пальму, и скалу, но лодки уже не было. Смогут ли они найти клад?

Задача 3. Число. Если среднее арифметическое первых 1989 цифр числа $\sqrt{2}-1$ заключено между $13/3$ и $14/3$, то это же верно для числа $2-\sqrt{2}$. Доказать.

Задача 4. Маршрут. 14 городов соединены дорогами, как показано на рисунке[2]. Нам удалось обойти все города по одному разу и вернутся в исходный город. Докажите, что в наш маршрут входят ровно две радиальные дороги (по одной дороге нельзя проходить дважды).

Задача 5. Птичье молоко. Торт имеет форму прямоугольного параллелепипеда, верхняя грань которого квадрат. Верх и бока его равномерно покрыты глазурью. Как разделить торт на 9 частей, чтобы всем досталось поровну и торта, и глазури? (каждый должен получить ровно один кусок)

Задача 6. Конструктор. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, если его можно составить (без щелей и наложений) из квадратов и правильных треугольников, если длины сторон

[2]Отсутствует в исходных материалах

всех всех этих треугольников и квадратов одни и те же? (на рисунке[3] показан один из способов составления шестиугольника)

Задача 7. Куб. В вершинах куба написаны числа. Вместо каждого числа записывают среднее арифметическое чисел, стоящих в трёх соседних вершинах (числа заменяют одновременно). После 10 таких операций в вершинах оказались исходные числа. Найти все такие числа.

Задача 8. Поезда. Два пути перпендикулярны. Поезда едут к точке пересечения. Один поезд находится на расстоянии 80 км от точки пересечения, и его скорость 30 км/ч. Другой поезд – на расстоянии 40 км, и его скорость 40 км/ч. Через какое время поезда будут на наименьшем расстоянии друг от друга, и чему равно это расстояние?

Задача 9. Точки. На плоскости лежат четыре точки. Докажите, что найдётся треугольник с вершинами в этих точках, у которого один из углов имеет величину не более 45 градусов.

Задача 10. Игра. Есть две кучи камней, причём в большей – 8 камней. Два игрока по очереди берут либо несколько камней из одной кучи, либо по равному количеству камней из обеих куч. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто выиграет при правильной игре?

Победила команда Школы 43 со счётом $100:6$**.**

* * *

Дата проведения 04.11.1989. Участники: ДПиШ, Ленинград и Школа № 57, Москва, 9 (8) классы. Жюри: А. Голованов, Г.В. Кондаков. На решение давалось 4 часа

Задача 1. Плоскость раскрашена в n цветов. Докажите, что на ней найдётся прямоугольник с одноцветными вершинами.

Задача 2. Разложите число $989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320$ на простые множители.

Задача 3. a, b, c – положительные рациональные числа.
Докажите, что $2^{a+b} + 2^{b+c} + 2^{c+a} < 2^{a+b+c} + 1$.

Задача 4. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом. Общая касательная касается их в точках M и N. Докажите, что O_1O_2 касается окружности, построенной на MN как на диаметре.

Задача 5. Решите в целых числах уравнение $x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$.

Задача 6. Стороны описанного четырёхугольника $ABCD$ касаются его вписанной окружности в точках M, N, P, Q. Докажите, что диагонали четырёхугольников $ABCD$ и $MNPQ$ пересекаются в одной точке.

Задача 7. Даны несколько натуральных чисел, не содержащих в десятичной записи цифры 9. Докажите, что сумма их обратных величин не превосходит 1000.

Задача 8. Треугольник, все углы которого не превосходят $120°$, разбит на треугольники. Докажите, что хотя бы в одном из треугольников разбиения все углы также не превосходят $120°$.

Задача 9. Докажите, что в выпуклый многоугольник можно поместить прямоугольник площади, не меньшей 1/4 площади исходного многоугольника.

Задача 10. $\Lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\Lambda_{K+1} = \dfrac{K \cdot \Lambda_K + 1}{K - \Lambda_K}$. Докажите, что в Λ_K бесконечно много чисел больших нуля, и бесконечно много чисел меньше нуля.

* * *

[3] То же.

Дата проведения декабрь 1989 г. Участники: Школы № 2 и № 57, обе Москва, На решение давалось 4 часа. Задачи готовили: А.Я. Канель, Г.В.Кондаков

Задача 1. Докажите, что уравнение $X^2 + 3Y^2 = Z^{1989}$ имеет бесконечное число решений в натуральных числах.

Задача 2. Верно ли, что число 1988^N и число $2^N + 1988^N$ имеют одинаковое количество цифр?

Задача 3. На единичной окружности точка α соответствует углу α. $L(\alpha)$– прямая, проходящая через точки α и $\pi - 2\alpha$. Докажите, что прямые $L(\alpha), L(\beta)$ и $L(\gamma)$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta + \gamma$ делится на π.

Задача 4. Доказать, что две замкнутые кривые имеют чётное число точек пересечения.

Задача 5. Существует ли арифметическая прогрессия с разностью меньше 1990, в которой нашлись бы идущие подряд 11 простых чисел?

Задача 6. $C_N^0 - C_{N-1}^1 + C_{N-2}^2 - C_{N-3}^3 + \ldots = \sqrt{2}\cos(-\pi/6 + N \cdot \pi/3)$. Доказать.

Задача 7. Игра в крестики-нолики на доске 10×10. За каждую пятёрку, стоящую подряд, даётся очко. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 8. Даны 100 чисел, изменяющихся на промежутке $[0; 1]$. Найти максимум суммы модулей попарных разностей этих чисел.

Задача 9. Можно ли придумать последовательность вращений кубика Рубика, чтобы, повторив её какое-то число раз, можно было бы получить произвольное расположение кубиков?

Задача 10. К квадрату из внешней точки проводится касательная. Точка отражается относительно точки касания и через неё проводится другая касательная. Процедура повторяется. Может ли точка убежать на бесконечность?

* * *

Дата проведения 10.12.1989. 9 классы. На решение давалось 4 часа. Задачи готовили: А.Я. Канель, Г.В. Кондаков, И.В. Раскина

Задача 1. Уравнение. Докажите, что найдётся бесконечно много решений уравнения $x^2+y^2 = z^{1989}$, таких что числа x, y, z взаимно просты.

Задача 2. Доска. Доска 8×8 раскрашена в 4 цвета. При этом в любом квадратике 2×2 встречаются все 4 цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в 4 различных цвета.

Задача 3. Градусная мера. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Докажите, что градусная мера угла α иррациональна.

Задача 4. Прямые $L(\alpha)$. Прямая $L(\alpha)$ соединяет концы единичных векторов, образующих с осью (Ox) углы α и $\pi - 2\alpha$ $(\pi = 3,14\ldots)$. Докажите, что прямые $L(\alpha)$, $L(\beta)$ и $L(\gamma)$ пересекаются в одной точке, если $\alpha + \beta + \gamma$ равно π.

Задача 5. Спички. На линиях, разделяющих клетки шахматной доски, лежат спички, так что каждая клетка ограничена четырьмя спичками. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы ладья могла пройти с любого поля на любое?

Задача 6. Закрыть источник. Каким наименьшим числом непересекающихся кругов можно закрыть точечный источник света на поскости, если круги поглащают свет, и ни один из них не накрывает собой источник света?

Задача 7. Стержни и нитки. N стержней (возможно, различной длины), скреплённых шарнирами, образуют N-угольник. Докажите, что эту конструкцию можно сделать жёсткой с помощью не более чем N нитей.

Задача 8. Функция. $F(n) = [\,n+\sqrt{n+0,5}\,]$. Докажите, что если n принимает все натуральные значения, то $F(n)$ пробегает при этом все натуральные числа, кроме точных квадратов.

Задача 9. Одинаковые разности. Даны 20 различных натуральных чисел, меньших 70. Докажите, что среди их разностей найдутся четыре одинаковых.

Задача 10. Дорога. Могут ли три человека, находящиеся на расстоянии 0, 1 и 2 от начала дороги, пройти, не обгоняя друг друга, до точек, находящихся на расстоянии 1000, 1001 и 1002 от начала дороги так, чтоб последний всё время видел первого, но ни в какой момент не видел второго? (дорога прямая, но не ровная)

* * *

Дата проведения февраль 1990 г, Яхрома. Участники: Школы № 43 и № 1101, обе Москва, 9 (8) классы. На решение давалось 4 часа. Задачи готовили: А.В. Спивак, Г.В. Кондаков

Задача 1. Известно, что $\sum\limits_i a_i \sin\alpha_i = 0$ и $\sum\limits_i a_i \sin(\alpha_i+\gamma) = 0$. Докажите, что γ кратно $180°$.

Задача 2. Плоскость разбита на одинаковые правильные треугольнички из которых 100 покрасили в черный цвет так, что они образуют связную фигуру. Докажите, что из неё можно вырезать 33 непересекающихся ромбиков вида $\diamond$.

Задача 3. Без использования дифференцирования найти минимум функции $\sqrt{x^2-x-1}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}\cdot x-1}$.

Задача 4. Доказать, что уравнение $a^3+b^4=c^5$ имет бесконечное множество решений.

Задача 5. Последовательность нулей и единиц $\{a_n\}$ такова, что если $k \leqslant 2^n$, то $a_k \neq a_{k+2^n}$. Докажите, что она непериодична.

Задача 6. Докажите. что внутри выпуклого многоугольника M можно поместить его образ при гомотетии с коэффициентом $-1/2$.

Задача 7. Вершины конечного графа раскрашены в два цвета. Каждую секунду каждая точка меняет свой цвет на тот, в который окрашено большинство её соседей. Докажите, что начиная с некоторого момента часть точек начнёт менять свой цвет каждую секунду, а часть перестанет менять свой цвет вообще.

Задача 8. На Солнце расположены непересекающиеся круглые пятна, каждое из которых занимает меньше половины поверхности. Докажите, что найдутся две противоположные не закрытые пятнами точки.

Задача 9. Может ли сечение куба плоскостью быть правильным пятиугольником?

Задача 10. Пространство разбито на 5 непустых множеств. Докажите, что есть прямая, пересекающая три из них

Задача 11. Каждое x_i равно 0 или 1. Докажите, что

$$x_0+\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{x_2}{\sqrt{2}^2}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{2}^n} \leqslant (1+\sqrt{2})\cdot\sqrt{x_0+\frac{x_1}{2}+\ldots+\frac{x_n}{2^n}}.$$

Задача 12. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 1-x_1^2=x_2; \\ 1-x_2^2=x_3; \\ \ldots \\ 1-x_n^2=x_1. \end{cases}$$

Победила команда Школы № 43.

* * *

Дата проведения 09.02.1990. Участники: Школы № 43 и № 978, обе Москва, 10 (8) классы. На решение давалось 4 часа, решены задачи 1, 4, 5. Задачи готовили: А.Я. Канель, А.К. Ковальджи, Б.П. Гейдман, И.Ф. Шарыгин, М.А. Розенберг

Задача 1. Червячок. По веточке ползёт червячок со скоростью 1 миллиметр в сек., а веточка, в свою очередь, растёт со скоростью 1 метр в сек. Сможет ли червячок проползти всю веточку? (Веточка растёт равномерно, так что её середина удаляется от концов со скоростью 0,5м/с)

Задача 2. Линейный Биллиард. Из точки вне правильного пятиугольника, не лежащей на продолжении сторон, проводят к нему касательную, и точку симметричено отражают относительно точки касания. С новой точкой происходит то же, только выбирается другая касательная и т.д. Если мы выйдем на продолжение стороны, то процесс остановится. Докажите, что найдётся бесконечно много точек периода 10.

Задача 3. Неравенство. Пусть A, B, $C > 0$. Докажите: $\sqrt{\frac{A}{B+C}} + \sqrt{\frac{B}{C+A}} + \sqrt{\frac{C}{A+B}} > 2$.

Задача 4. Уравнение в целых числах. Решите в целых числах уравнение $2^x + 1 = 3^y$.

Задача 5. Монотонная часть. Числа $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ все разные. Докажите, что из них можно вычеркнуть 90 так, что оставшиеся образуют монотонную последовательность.

Задача 6. Фрактал. На плоскости фиксированы три точки A, B, C. Точку X заменяют на гомотетичный образ с коэффициентом $\frac{1}{2}$ относительно любой из точек A, B, C и повторяют ту же операцию. Докажите, что найдётся множество площади 0,0001, в которое мы попадём из любой начальной точки, как бы ни выбирались центры гомотетий A, B, C на каждом шаге.

Задача 7. Шахматы и Домино. На шахматной доске разложили доминошки так, что нельзя добавить ни одной. Какое минимальное их количество?

Задача 8. Касание. Две окружности радиусов R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) касаются друг друга внешним образом. Прямая L касается обеих в точках M и N. В точках A и B окружности касаются внешним образом третьей окружности. Прямые (AB) и (MN) пересекаются в точке C, из точки C проведена касательная к третьей окружности. D – точка касания. Найти $|CD|$.

Запасная задача. Треугольники. Четыре прямые общего положения на плоскости образуют 4 треугольника. Докажите, что все 4 описанные окружности пересекаются в одной точке.

Победила команда Школы № 43 со счётом $22 : 21 : 31$.

* * *

Дата проведения 06.03.1990. Участники: Школы № 57 и № 706, обе Москва, На решение давалось 4 часа. Задачи готовили: А.Я. Канель, Г.В. Кондаков

Задача 1. Что больше $\sqrt{2+\sqrt[3]{3}} + \sqrt{2-\sqrt[3]{3}}$ или $2 \cdot \sqrt[3]{2}$?

Задача 2. Дан угол и точка внутри него. Через эту точку провести прямую, отсекающую треугольник данной площади.

Задача 3. Существует ли многочлен $p(X)$ с целыми коэффициентами
$X^k + \ldots + 100X^m + \ldots + 1$, который делит при некотором n многочлен $X^n - 1$?

Задача 4. На какое минимальное число пирамид можно разрезать куб? Сколькими способами это можно сделать?

Задача 5. На плоскости живёт ограниченная клякса. Каждая точка плоскости в следующую секунду становится чёрной, если в круге единичного радиуса, её окружающем, площадь чёрной области больше площади белой области, в противном случае точка становится белой. Верно ли, что клякса рано или поздно исчезнет?

Задача 6. $X_{n+1} = X_n/2$ если X_n – чётно, иначе $X_{n+1} = 3X_n + 1$. Конечно или бесконечно множество точек периода 1990?

Задача 7. На плоскости нарисована парабола. С помощью циркуля и линейки найти её ось симметрии.

Задача 8. В клетках сетки записаны числа. Докажите, что найдётся прямоугольник, сумма чисел в клетках которого отличается от целого не больше чем на $0,001$.

Задача 9. Можно ли расположить в правильном треугольнике со стороной $1,5$ без пересечений по внутренним точкам правильные треугольники со сторонами $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots$?

Задача 10. Правильный треугольник разбит прямыми, параллельными его сторонам, на равные между собой правильные треугольники. Один из маленьких треугольников чёрный, остальные – белые. Разрешается перекрашивать одновременно все треугольники, пересекаемые прямой, параллельной любой стороне исходного треугольника. Всегда ли можно с помощью нескольких таких перекрашиваний добиться того, чтобы все маленькие треугольники стали белыми?

Победила команда Школы № 57.

* * *

Дата проведения 29.01.1991. Участники: ученики – преподаватели, г. Нижний Тагил. Задачи составили: А.Я. Белов, А.П. Савин

Задача 1. Ладьи. На шахматной доске расположено K ладьей так, чтобы на каждой горизонтали и на каждой вертикали стояла ладья. При каких K заведомо можно убрать одну из них, чтобы указанное условие не нарушалось?

Задача 2. Подпоследовательность. Из любой бесконечной последовательности целых чисел можно выбрать подпоследовательность так, чтобы каждый её член делился на предыдущий или так, чтобы никто ни на кого не делился. Доказать.

Задача 3. ГМТ. Даны три прямые на плоскости. Рассматриваются все такие равносторонние треугольники, вершины которых лежат на всех трех прямых. Найти множество их центров.

Задача 4. Слова. Произведение двух слов (т.е. последовательностей букв) есть результат приписывания одного к другому. Пусть U и V – слова, причём $UV = VU$. Тогда они оба являются степенями одного и того же слова S. Доказать.

Задача 5. Спуск. Двое флатланцев спускаются с вершины “Пик Кипа” один по левому склону, другой по правому так, что они все время находятся на одинаковой высоте. Смогут ли они спуститься до уровня моря? Гора нигде не нависает, и её поверхность – ломаная, см. рис. 7 ниже.

Задача 6. Сумма цифр. При каких натуральных K отношение суммы цифр числа N к сумме цифр числа $K \cdot N$ ограничено (по N)?

Задача 7. Окружности. Дана прямая L на плоскости и окружность O радиуса 1 км, касающаяся её. Окружность O_1 радиуса в 1 мм касается прямой и окружности O, окружность O_2 касается окружностей O, O_1 и прямой и т.д. Окружность O_n касается O, O_{n-1} и прямой. Каково максимальное n?

Задача 8. Выражения. Сколько выражений из N символов можно составить, если использовать только символы двух переменых X и Y, открывающую и закрывающие скобки, запятую и символ двуместной функции q?

Задача 9. Колёса. Три колеса радиусов $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ касаются в одной точке и вращаются без проскальзывания. В начальный момент времени в эту точку поместили липкую красную краску, которая в процессе вращения переходит с колеса на колесо. Сколько точек окажутся окрашенными после того, как самое маленькое колесо сделает 1000 оборотов?

Задача 10. Арксинус. Каждый член последовательности равен арксинусу предыдущего. Докажите, что все они – нули.

* * *

Дата проведения 05.02.1991, г. Яхрома. Участники: Школы № 57 и № 1101, обе Москва. Задачи составили: А.Я. Белов, А.В. Спивак[4]

Задача 1. Многогранник. Правда ли, что если все грани выпуклого многогранника – параллелограммы, то он имеет центр симметрии?

Задача 2. Сумма цифр. При каких натуральных K отношение суммы цифр числа N к сумме цифр числа $K \cdot N$ ограничено (по N)?

Задача 3. Спуск. С вершины спускаются двое: один по левому, другой по правому склону горы. (Гора нигде не нависает и её поверхность – ломаная. Вершина её самая высокая точка.) Смогут ли они спуститься к морю, если всё время они должны находиться на одной и той же высоте?

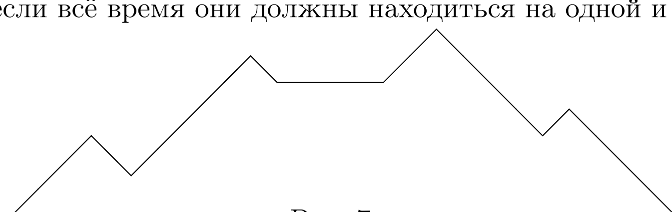


Рис. 7

Задача 4. Округление – это замена числа x на $[x]$ или на $[x+1]$. Можно ли так округлить все числа в данной прямоугольной таблице, чтобы суммы по строкам по столбцам тоже округлились?

Задача 5. Красные числа. Отметим на числовой прямой красным цветом числа вида $81x + 100y$, где $x, y \in \mathbb{N}$. Найдите такое число C (целое или полуцелое) такое, что из любых двух целых чисел, симметричных относительно C ровно одно красное.

Задача 6. Резисторы. Из резисторов собрана цепь. Докажите, что если один из проводов перерезать, то сопротивление между двумя точками A и B не уменьшится.

Задача 7. Делимость. Существует ли 100 различных натуральных чисел, произведение любых пяти из которых делится на сумму этих чисел?

Задача 8. Одна линейка. На плоскости нарисованы две пересекающиеся окружности. Одной линейкой постройте их центры.

Задача 9. Оценка. Найдите $[2^{\sqrt{15}}]$, не пользуясь калькулятором.

Задача 10. Теоремка Жордана. В квадрате проведены две ломаные: из левого нижнего в правый верхний и из левого верхнего в правый нижний. Докажите, что они пересекаются.

Задача 11. Равносоставленность кругу. Круг разрезали (отрезками и дугами) на несколько частей и сложили выпуклую фигуру. Докажите, что она конгруэнтна кругу.

Задача 12. Бесконечное слово. Дано бесконечное слово Z, U и V – его различные подслова. Докажите, что найдутся такие слова S и T, что SVT – подслово Z и при этом в слове Z найдутся сколь угодно длинные куски без вхождений SUT, либо сколь угодно длинные периодические куски.

Победила команда Школы № 57 со счетом $55:20$.

[4]см. Е. Чижов, "Чем кончаются матбои?", МК от 29 марта 1991 г.

Приложение. Ссылки на материалы о правозащитной и общественной деятельности В.А. Сендерова

Краткая биографическая статья:
https://ru.wikipedia.org/wiki/Сендеров_Валерий_Анатольевич

Ссылки из воспоминаний А.Я. Канель-Белова:
http://www.russ.ru/pole/Kak-byvshij-dissident-i-politzaklyuchionnyj-stanovitsya-ohranitelem
http://www.rg.ru/2014/03/12/pismo.html

О защите прав абитуриентов:
Екатерина Соломонова, “Бодались телята с дубом”, Окна, 26.12.1996.
https://www.mccme.ru/shen/senderov/ig-text.pdf

О свободном межпрофессиональном объединении трудящихся:
https://web.archive.org/web/20010519211738/http://www.hro.org/editions/karta/nr2/smot1.htm