

# **Математическое Образование**

**Журнал Фонда математического  
образования и просвещения**

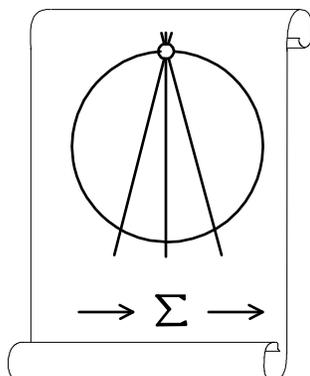
**Год двадцать пятый**

**№ 2 (98)**

**апрель – июнь 2021 г.**

**Москва**

*Периодическое учебно-методическое издание  
в области математического образования*



Издатель и учредитель: Фонд  
математического образования и просвещения  
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

### **Главный редактор**

Имайкин В.М.

### **Редакционная коллегия**

Бондал А.И.

Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)

Дубовицкий А.В.

Канель-Белов А.Я.

Комаров С.И.

Константинов Н.Н.

Костенко И.П.

Саблин А.И.

№2 (98), 2021 г.

© “Математическое образование”, составление, 2021 г.

---

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2021 г.

“Математическое образование”, периодическое издание.

Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.

Подписано к печати 15.07.2021 г.

Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.

Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.

Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.

Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

# Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (98), апрель – июнь 2021 г.

## Содержание

### Память

*Коллективный некролог.* Сергей Алексеевич Кулешов (24.12.1962 – 15.05.2021) 2

### Студентам и преподавателям математических специальностей

*Г. А. Клековкин.* Моделирование контуров листьев растений в среде GeoGebra 5

*В. Н. Новиков.* О неравенствах в тетраэдре 18

*С. Ф. Осинкин.* Треугольники с заданными значениями радиусов вписанной и описанной окружностей 28

*Коллектив НИУ “МЭИ”.* Математика и новые информационные технологии. Окончание 34

*Л. И. Родина.* Задачи о максимизации прибыли в различных экономических моделях 44

*В. М. Федосеев.* Способы вычисления числа “ $e$ ”. Тема учебного исследования 50

### Образовательные инициативы

*А. А. Андреев, Е. А. Скородумова, Е. А. Максимова.* Олимпиада школьников “ТИИМ – Технологии. Интеллект. Информатика. Математика” 54

### Из истории математики

*Б. Л. Дружинин.* Две заметки по истории математики 71

## Память

**Сергей Алексеевич Кулешов (24.12.1962 – 15.05.2021)**

### *Коллективный некролог*

15 мая 2021 года после тяжелой продолжительной болезни скончался математик-алгебраист, доктор физико-математических наук, бессменный сотрудник нашего журнала Сергей Алексеевич Кулешов. Приводим коллективный некролог, включающий описание его научных результатов.



С.А. Кулешов

Сергей Алексеевич Кулешов родился в 1962 году в Москве в рабочей семье. Проявив математические способности еще в средней школе, он после вступительных испытаний был зачислен в 179-ю школу, которую закончил в 1980 году, на всю жизнь сохранив огромную признательность своим учителям — Н.Н. Константинову, В.В. Бронфману, С.Г. Роману. В этом же году поступил на механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, где уже на первых курсах определилась его дальнейшая математическая судьба, во многом благодаря встрече с будущим научным руководителем А.Н. Рудаковым, организовавшим для студентов младших курсов семинар по алгебраической геометрии, на который он вскоре пригласил А.Н. Тюрину, выдающегося геометра, занимавшегося в те годы векторными расслоениями на алгебраических поверхностях. Совместный семинар Рудакова–Тюринина быстро стал одной из ведущих отечественных школ по исследованию многообразий модулей векторных расслоений и производных категорий когерентных пучков на алгебраических многообразиях, вырастившей целое поколение молодых талантливых математиков.

По существующей традиции все участники семинара со студенческих лет ходили и на «взрослые» семинары в Математическом институте им. В.А. Стеклова — знаменитый семинар Шафаревича и семинар по поверхностям  $K3$ , проходивший под руководством Игоря Ростиславовича в середине восьмидесятых годов. В конце восьмидесятых семинар Рудакова–Тюринина тоже полностью переместился в МИАН.

Одной из основных задач, обсуждавшихся в те годы на семинаре, было описание исключительных векторных расслоений, или, более общим образом, таких когерентных пучков и комплексов пучков  $E$ , что  $\text{Ext}^i(E, E) = 0$  при всех  $i > 0$ , а  $\dim \text{Hom}(E, E) = 1$ . Исключительные объекты встречаются на многообразиях с обильным антиканоническим классом. Их аналогами на многообразиях с нулевым каноническим классом (в частности, на поверхностях  $K3$ ) являются пучки и комплексы  $E$  с алгеброй  $\bigoplus \text{Ext}^i(E, E)$ , изоморфной алгебре сингулярных когомологий сферы. Сейчас такие объекты принято называть сферическими.

В конце восьмидесятых А.Н. Рудаков решил задачу конструктивного описания исключительных расслоений на двумерной квадратике, поставив своим ученикам ряд похожих задач. В 1989 г. С.А. Кулешов после окончания в 1988 г. аспирантуры защитил на мехмате МГУ кандидатскую диссертацию «Исключительные расслоения на  $K3$ -поверхностях», в которой решил проблему существования сферического расслоения с любым набором характеристических классов, имеющим квадрат 2 в решётке Мукаи, и доказал, что на  $K3$ -поверхности с числом Пикара 1 такое расслоение единственно.

В следующих своих работах С.А. Кулешов полностью решил проблему конструктивного описания исключительных расслоений и исключительных базисов производных категорий на поверхностях Дель Пеццо. Эти результаты составили основу докторской диссертации «Исключительные и жёсткие расслоения на поверхности с антиканоническим классом без базисных компонент», которую С.А. Кулешов защитил осенью 1996 года в Математическом институте им. В.А. Стеклова, и стали частью доклада А.Н. Рудакова на Международном математическом конгрессе 1994 г. в Цюрихе.

В это время уже проявилось тяжелое заболевание, с которым Сергеем пришлось жить и бороться на протяжении многих лет, однако еще много лет он оставался активным участником научной жизни, при этом его основные интересы сместились в область исследований условий стабильности, без которых невозможно построение разумных многообразий модулей, а также в сторону загадочной связи стабильных расслоений с диофантовой геометрией, а именно с гипотезой А.А. Маркова.

Помимо научных исследований, Сергей также активно занимался преподавательской деятельностью. После окончания аспирантуры он недолгое время преподавал в МГТУ им. Н.Э. Баумана, а с 1992 года перешел на постоянную работу в ВВИА им. Н.Е. Жуковского, где до 2010 года занимал должность профессора. Однако это была только часть его нагрузки: начиная с первого набора Независимого Московского университета и до реформирования НМУ Сергей вместе с другими участниками семинара Рудакова–Тюрина активно участвовал в его работе. Кроме стандартных курсов (алгебры и начал алгебраической геометрии) Сергей предлагал студентам самостоятельные задачи, в том числе связанные и с владевшей тогда его умом гипотезой Маркова, много неформально общался и помогал в выборе дальнейших исследований математической молодежи. Каждый, кто сталкивался с Сергеем на этом поприще, отмечал огромный педагогический талант, внимание и такт по отношению к обучаемым.

В дальнейшем это выразилось в многолетнем сотрудничестве Сергея с журналом «Математическое образование»; им в одиночку и в соавторстве были опубликованы десять статей, объясняющих базовые понятия как математического анализа, так и аналитической геометрии. Кроме того, им были разработаны различные методические материалы и для «регулярного» преподавания в ВВИА им. Н.Е. Жуковского.

Центральное место в жизни Сергея занимала его семья, помощницей в трудах и поддержкой в болезни была жена Ольга, с которой они вырастили троих сыновей.

#### Основные научные публикации:

1. *Теорема существования исключительных расслоений на поверхностях типа  $K3$* , Изв. АН СССР, сер. матем. 1989. Т. 53, № 2, 363–378;
2. *Стабильные расслоения на  $K3$ -поверхностях*, Изв. АН СССР, сер. матем. 1990. Т. 54, № 1, 213–220;

3. *Исключительные расслоения на поверхностях Дель Пеццо* (совм. с Д. Орловым), Изв. РАН, сер. матем. 1994. Т. 58, № 3, 53–87;
4. *Exceptional and rigid sheaves on surfaces with anticanonical class without base components*, Algebraic geometry, 2. J. Math. Sci. (New York) 86 (1997), no. 5, 2951–3003;
5. *Ramified coverings of  $S^2$  with two degenerate branching points*. Max-Planck-Institut preprint, 2001 (62).

Кузнецов Александр Геннадьевич,  
главный научный сотрудник МИ РАН,  
доктор физ.-мат. наук, член-корр. РАН.

E-mail: akuznet@mi-ras.ru

Орлов Дмитрий Олегович,  
заведующий отделом МИ РАН,  
доктор физ.-мат. наук, академик РАН.

E-mail: orlov@mi-ras.ru

Тюрин Николай Андреевич,  
нач. сектора ЛТФ ОИЯИ (Дубна),  
доктор физ.-мат. наук, профессор РАН.

E-mail: ntyurin@theor.jinr.ru

Городец Алексей Львович,  
профессор факультета математики НИУ ВШЭ,  
снс ИТЭФ, кандидат физ.-мат. наук, доцент.

E-mail: gorod@itep.ru

### От редакции журнала «Математическое образование»

Сергей много лет, сейчас уже трудно сказать, с какого именно года, плодотворно сотрудничал с редакцией нашего журнала. Как автор он опубликовал ряд статей и учебных материалов, см. список ниже. Занимался набором статей и версткой номера, сначала вручную, а затем этот процесс был им автоматизирован, в частности, он разработал постоянный стиль оформления статей. (Отметим, что журнал, по согласию большинства членов редколлегии, сохраняет академичный стиль; оформление внешней обложки частично воспроизводит оформление дореволюционной серии журнала.) Участие Сергея отмечено в выходных данных каждого номера журнала на протяжении многих лет. В связи с печальным поводом редакция хотела бы еще раз выразить ему огромную благодарность и принести соболезнования родным и близким.

### Список публикаций С.А. Кулешова в журнале «Математическое образование»

1. Сравнение множеств, № 3(22), 2002 г.
2. Предел последовательности, № 4(23), 2002 г.
3. Наглядное объяснение предела, № 2(46), 2008 г.
4. Лекции по аналитической геометрии (соавторы А.Ф. Салимова, С.Л. Ставцев), с продолжением, № № 4(48), 2008 г.; 1(49), 2(50), 3(51), 4(52), 2009 г.; 1(53), 3-4(55-56), 2010 г.

Имайкин Валерий Марсович,  
главный редактор журнала  
«Математическое образование»,  
доктор физ.-мат. наук.

E-mail: ivm61@mail.ru

Комаров Станислав Игоревич,  
Генеральный директор организации-учредителя  
журнала «Математическое образование»,  
Зам. директора ГБОУ Школа № 179 г. Москвы.

E-mail: matob@yandex.ru

## Моделирование контуров листьев растений в среде GeoGebra

Г. А. Клековкин

В статье рассматривается использование возможностей интерактивной математической системы GeoGebra для моделирования контуров листьев растений уравнениями, заданными в полярной системе координат.

Статья печатается с продолжением.

### 1. Математическая флористика Б. Хабенихта

В 1930 году в пятом номере журнала “Математическое образование” была опубликована статья [5] известного советского математика и педагога Н.Ф. Четверухина, знакомящая читателей с моделированием с помощью уравнений некоторых объектов органического мира. Значительную часть статьи занимает обзор результатов исследований немецкого математика и натуралиста Б. Хабенихта (Bodo Habenicht), посвященных аналитическому описанию контуров листьев растений. Анализируя работы Б. Хабенихта [6, 7, 8], пишет Н.Ф. Четверухин, он внес “те или другие изменения в изложение автора, в особенности, если они способны упростить рассуждение” [5, с. 145] (журнал со статьей [5] размещен в электронной библиотеке “Математическое образование” — [www.mathedu.ru](http://www.mathedu.ru)). В отечественной литературе краткое упоминание об исследованиях немецкого ученого можно также найти в книге А.А. Савелова [4, с. 167-168]. Получить доступ к оригинальным работам Б. Хабенихта, относящимся к концу 19-го — началу 20-го веков, сегодня достаточно проблематично, поэтому будем в дальнейшем опираться главным образом на работу Н.Ф. Четверухина.

В своих исследованиях Б. Хабенихт исходит из того, что контуры листьев растений в подавляющем большинстве случаев представляют собой замкнутые кривые, имеющие ось симметрии. Поэтому в полярной системе координат подобную кривую можно интерполировать с помощью непрерывной ограниченной четной функции с периодом  $2\pi$ . Функцией, обладающей этими свойствами, является функция  $\cos x$ , а также ее целые неотрицательные степени. Следовательно, размещая полярную ось на оси симметрии листа, уравнение контура листа можно представить в виде

$$\rho = b_0 + b_1 \cos \varphi + b_2 \cos^2 \varphi + \dots + b_n \cos^n \varphi, \quad (1)$$

где  $\rho$  — полярный радиус,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  — полярный угол.

Выражая в (1)  $\cos^k \varphi$  с помощью известной формулы

$$\cos^k \varphi = \begin{cases} \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=0}^l C_k^i \cos(k-2i)\varphi & \text{при } k = 2l + 1, \\ \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=0}^{l-1} C_k^i \cos(k-2i)\varphi + \frac{1}{2^k} C_k^i & \text{при } k = 2l, \end{cases} \quad (2)$$

Б. Хабенихт использует также представление полярного радиуса в виде суммы Фурье [2]:

$$\rho = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + a_3 \cos 3\varphi + \dots + a_n \cos n\varphi. \quad (3)$$

Таким образом, чтобы найти аналитическое представление в полярной системе координат контура конкретного листа, нужно подобрать соответствующие коэффициенты  $b_i$  в уравнении (1) либо коэффициенты  $a_i$  в уравнении (3) ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

Вид (3), например, имеют уравнение  $\rho = 8 + \cos \varphi + \cos 5\varphi$  кривой, которую можно считать изображением контура листа *настуриции* (рис. 1), и уравнение  $\rho = 48 + 27 \cos \varphi + 12 \cos 3\varphi + 8 \cos 5\varphi + \cos 7\varphi$  кривой, которую с большой натяжкой можно принять за изображение контура листа *стрелололиста* (рис. 2).

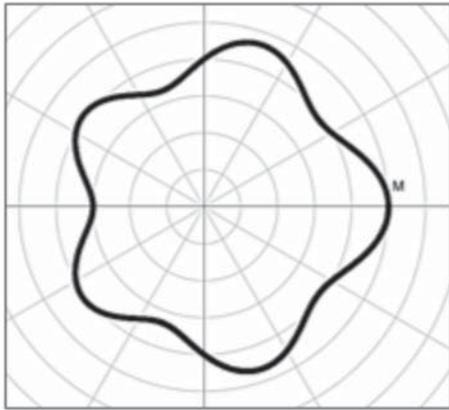


Рис. 1.

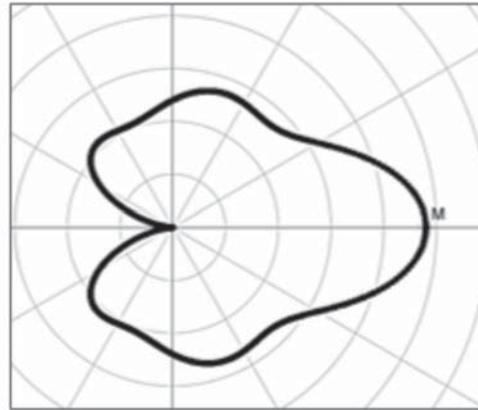


Рис. 2.

Как найдены коэффициенты в этих уравнениях? Как искать коэффициенты в уравнениях контуров листьев других растений? Тех, кто надеется, что это можно легко и быстро сделать методом проб и ошибок, ждет большое разочарование. Случай, когда наудачу составленное уравнение вида (3) будет задавать кривую, в которой можно узнать контур листа какого-либо растения, — большая удача.

Поставленную задачу можно решить путем интерполирования функции  $\rho(\varphi)$  — построения по значениям в выбранных опорных точках. Для этого сначала придется выполнить ряд измерений и вычислений. Можно, например, наложить лист растения на бумагу и тщательно его обвести, затем присоединить к этому изображению полярную систему координат так, чтобы полярная ось проходила через ось симметрии листа. После этого развернутый угол с вершиной в полюсе  $O$ , одна из сторон которого лежит на полярной оси, разбить на  $n$  частей и для каждого полярного угла  $\varphi_i$  измерить длину соответствующего ему полярного радиуса  $\rho_i$  (рис. 3). Вычислить косинусы углов  $k\varphi_i$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Затем, используя уравнение (3), по результатам измерений и вычислений составить и решить систему  $n + 1$  линейных уравнений с  $n + 1$  неизвестными  $a_i$ . Наконец, чтобы выяснить, дает ли найденная таким образом кривая “хорошее” визуальное представление о форме контура рассматриваемого листа, остается построить ее с помощью транспортира и измерительной линейки.

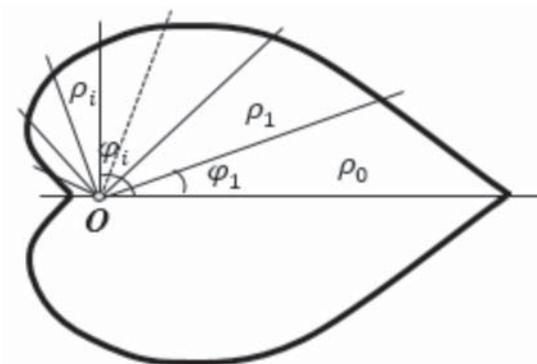


Рис. 3.

Именно таким способом, как пишет Н.Ф. Четверухин, московскому энтомологу Е.С. Смирнову удалось классифицировать жуков семейства Coccinellidae (божьих коровок) по уравнениям их надкрыльев [5, с. 155-156].

Сегодня решение любой системы линейных уравнений можно легко и быстро найти с помощью систем компьютерной математики, во времена же Хабенихта выполнение этой трудоемкой работы требовало огромных временных затрат. Единственным инструментом, с помощью которого он мог автоматизировать процесс вычислений, был арифмометр — механическая вычислительная машина, предназначенная для выполнения арифметических действий. Поэтому, как можно заключить по виду уравнений контуров листьев, найденных Б. Хабенихтом, которые имеются в книге [4] и в статье [5], он отказывается от такого, казалось бы, простого способа решения интерполяционной задачи.

Кроме того, его отказ можно объяснить и тем, что вряд ли удастся найти два полностью одинаковых листа одного и того же растения, а значит, всегда остается достаточно широкий произвол при выборе эталонного листа, представляющего это растение. Ученый, скорее всего, часто совсем не прибегал к измерениям, а добивался лишь чисто внешнего сходства найденных кривых с их прототипами. Уравнение контура листа рассматриваемого растения он ищет путем усложнения одного из простейших уравнений вида (1), (3) с помощью “нужного” дополнительного члена.

Очевидно, что всякий раз при конструировании такого члена Б. Хабенихт руководствовался некоторыми гипотетическими теоретическими соображениями, правильность которых затем проверял вычислениями и построением кривой “по точкам”. Если построенная кривая недостаточно точно отражала форму контура листа, то дополнительный член приходилось корректировать либо менять, и опять проверять новую гипотезу вычислениями и построением. Очевидно и то, что в отдельных случаях эта процедура повторялась неоднократно. Разумеется, по мере расширения коллекции найденных уравнений и приобретения на этой основе соответствующего опыта и интуиции количество неудачных попыток удавалось значительно сократить. Вместе с тем, учитывая вычислительные инструменты, имеющиеся в то время в распоряжении исследователя, и “ручной” способ визуализации полученных результатов, нельзя вслед за Четверухиным не восхищаться его терпением и титаническим трудолюбием.

В настоящее время даже интерактивные математические системы (ИМС), предназначенные для электронного сопровождения процесса обучения математике в средней школе, позволяют не только избежать долгих и утомительных вычислений, но и практически мгновенно визуально наблюдать, как меняется вид кривой при изменении коэффициентов в уравнении кривой или при добавлении к нему некоторых дополнительных членов. Поэтому при обращении к ИМС открывается возможность без больших временных затрат не только строить кривые, найденные Хабенихтом, но и попытаться понять, а затем и реконструировать ход его рассуждений. Для этого, как увидим, достаточно обладать знаниями о тригонометрических функциях и их свойствах в объеме средней школы. Поэтому подобные реконструкции могут стать источником исследовательских задач разной степени трудности и темами интересных исследовательских проектов.

## 2. Визуализация кривых, заданных полярными уравнениями

Напомним, что для введения полярных координат на плоскости задают точку  $O$ , единичный вектор  $\vec{i}$  и луч  $OP$ , на котором вектор  $\vec{i}$  определяет положительное направление (рис. 4). Точку  $O$  называют полюсом, а направленный луч  $OP$  — полярной осью полярной системы координат.

Пусть  $M$  — произвольная точка плоскости. Через  $\rho$  обычно обозначают расстояние от точки  $M$  до точки  $O$ , через  $\varphi$  — направленный угол между вектором  $\vec{i}$  и радиус-вектором  $\vec{OM}$  точки  $M$ . Расстояние  $\rho = |\vec{OM}|$  называют полярным радиусом, а направленный угол  $\varphi = \angle(\vec{i}, \vec{OM})$  — полярным углом точки  $M$ . Если полярный угол  $-\pi < \varphi \leq \pi$ , то соответствие между точками плоскости и упорядоченными парами чисел  $(\rho, \varphi)$  является взаимно однозначным. (Для точки  $O$  полярный радиус  $\rho = 0$ , полярный угол  $\varphi$  — неопределенный, однако условие  $\rho = 0$  эту точку однозначно определя-

ет.) Таким образом, в полярной системе координат положение точки  $M$  однозначно определяется ее полярными координатами: полярным радиусом  $\rho$  и полярным углом  $\varphi$ .

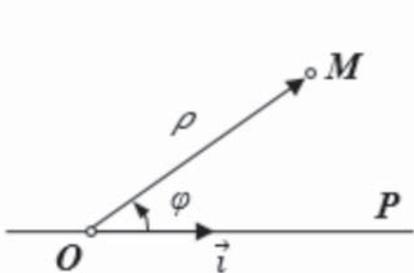


Рис. 4.

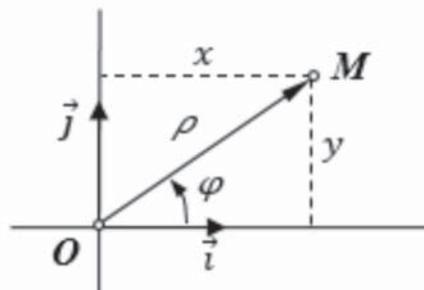


Рис. 5.

В некоторых случаях, например при изучении спиралей, удобно считать, что полярный угол  $\varphi$  может принимать любые действительные значения. Тогда пары  $(\rho, \varphi_0)$  и  $(\rho, \varphi)$ , где  $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  будут определять одну и ту же точку. Точка, таким образом, будет иметь бесконечно много полярных координат, вместе с тем, любая упорядоченная пара чисел  $(\rho, \varphi)$  будет по-прежнему определять единственную точку плоскости.

Возможно также дальнейшее обобщение полярных координат. Каждой точке  $M$  с полярными координатами  $(\rho, \varphi)$  ставится в соответствие упорядоченная пара  $(-\rho, \varphi')$ , где  $\varphi'$  — направленный угол, соответствующий точке  $M'$ , симметричной точке  $M$  относительно полюса  $O$ , т.е.

$$\varphi' = \varphi + \pi = \varphi_0 + (2k + 1)\pi.$$

Теперь пары  $(\rho, \varphi_0)$  и  $((-1)^l \rho, \varphi_0 + l\pi)$ , где  $l \in \mathbb{Z}$ , будут по-прежнему определять одну и ту же точку, но новые полярные координаты, которые называют обобщенными, могут принимать любые действительные значения:  $-\infty < \rho < +\infty$ ,  $-\infty < \varphi < +\infty$ .

Плоская линия  $\gamma$  в полярных системах координат может быть задана неявным уравнением  $F(\rho, \varphi) = 0$  либо явным уравнением  $\rho = f(\varphi)$ , которые связывают полярные координаты  $\rho$  и  $\varphi$  текущей точки кривой. Можно также рассматривать параметрические уравнения линии в полярных координатах, задавая полярные координаты  $\rho$  и  $\varphi$  как функции некоторого параметра  $t$ .

Часто при изучении свойств кривых приходится использовать как декартовы, так и полярные координаты. Если совместить полюс  $O$  полярной системы координат с началом декартовой системы координат  $Oxy$ , а полярную ось разместить на оси  $Ox$  (рис. 5), то легко найти формулы перехода от полярных координат  $\rho, \varphi$  к декартовым:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi; \tag{4}$$

и от декартовых  $x, y$  к полярным:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}.$$

Рассмотрим различные способы визуализации кривой, заданной явным уравнением  $\rho = \rho(\varphi)$  в полярной системе координат, с помощью интерактивной математической системы GeoGebra (в настоящее время эта свободно распространяемая ИМС является в средней школе одной из наиболее популярных). В дальнейшем предполагается, что читатель данной статьи обладает начальными навыками работы в этой системе. В качестве источника дополнительных сведений о возможностях и инструментах ИМС GeoGebra можно рекомендовать учебное пособие [1].

**Способ 1.** Начнем с построения кривой с помощью команды *Полярные Координаты*, которая находится в строке *GeoGebra* каталога *Математические операции*. Для большей наглядности визуализируем на *Графическом полотне* полярную координатную сетку. Это можно сделать с помощью следующего последовательного выбора опций:

*Настройки > Полотно > Сетка > Полярная.*

Сначала с помощью инструмента **Ползунок** расположенного на *Панели инструментов*, создается ползунок для полярного угла  $\varphi$ . По умолчанию параметр *Угол* и шаг его изменения измеряются в градусах (в соответствующих полях ввода после значений указан символ  $^\circ$ ), а параметр может принимать значения в промежутке от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ . После создания ползунка можно, удаляя символ  $^\circ$ , сменить единицу измерения угла на радианы, а также указать новые границы промежутка изменения параметра.

Затем после вызова команды *Полярные Координаты* выбирается инструмент **Полярные Координаты**(**<Вектор>**) и с помощью опции *Вставить* сбрасывается в строку *Ввод*. При этом в строке ввода появляется надпись **Полярные Координаты**]. В квадратные скобки вносятся координаты радиус-вектора текущей точки кривой в виде  $(\rho(\varphi); \varphi)$  и нажимается клавиша *Enter*. В результате на *Панели объектов* появляются обозначение точки и ее полярные координаты, например,  $M = (\rho(\varphi_0), \varphi_0)$ , где  $\varphi_0$  — значение величины угла, установленное на ползунке, а на *Полотне* — ее изображение. После активации у точки  $M$  опции *Оставлять след* и анимации угла  $\varphi$  точка  $M$  будет вычерчивать на *Полотне* рассматриваемую кривую. Нетрудно догадаться, что при этом система продельывает те же самые операции, которые приходится выполнять при построении кривой “по точкам”. Для того чтобы вычерчиваемая кривая казалась непрерывной, нужно в случае необходимости уменьшить скорость (шаг) изменения параметра  $\varphi$ .

Таким образом, используя этот способ визуализации кривой, мы вместо ее привычного статичного изображения создаем виртуальный анимационный ролик, демонстрирующий процесс вычерчивания кривой.

В качестве примера продемонстрируем результаты вычерчивания спирали Архимеда  $\rho = a\varphi$ . Если не менять границы изменения параметра, установленные по умолчанию, то GeoGebra вычертит всего один виток левозакрученной спирали. Для того чтобы вычертить несколько витков, например три, нужно сменить максимальное значение параметра на  $360^\circ \cdot 3 = 1080^\circ$  (рис. 6, а). Если параметр будет изменяться от  $-1080^\circ$  до  $0^\circ$ , то GeoGebra вычертит три витка правозакрученной спирали (рис. 6, б). Если же параметр будет пробегать промежутки от  $-1080^\circ$  до  $1080^\circ$ , система вычертит по три витка каждой из спиралей (рис. 6, в).

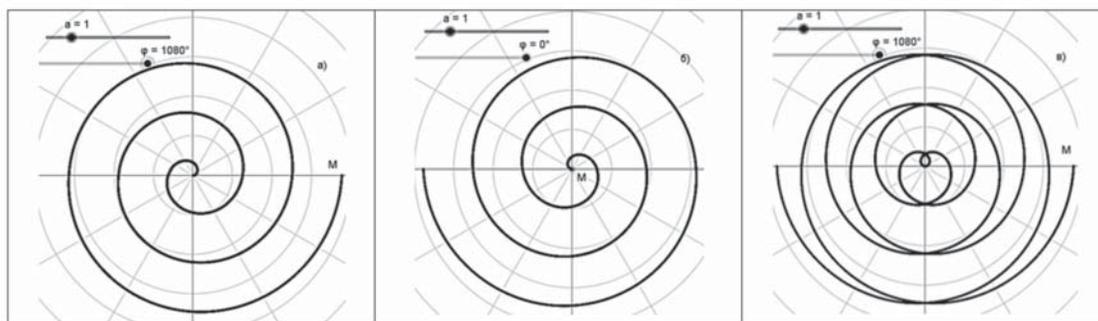


Рис. 6 а).

Рис. 6 б).

Рис. 6 в).

**Способ 2.** Принимая полярный угол  $\varphi$  за параметр и используя формулы (4), выражающие декартовы координаты точки через полярные, перейдем от уравнения  $\rho = \rho(\varphi)$  кривой к ее параметрическим уравнениям

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi \end{cases} \quad (5)$$

в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxy$ .

Теперь кривую можно построить с помощью инструмента **Кривая**, расположенного в строке *Функции и исчисление* каталога *Математические операции*:

**Кривая**( $\langle$ Выражение $\rangle$ ,  $\langle$ Выражение $\rangle$ ,  $\langle$ Параметр $\rangle$ ,  
 $\langle$ Начальное значение $\rangle$ ,  $\langle$ Конечное значение $\rangle$ ).

Для получения изображения трех витков правозакрученной и трех витков левозакрученной спиралей Архимеда  $\rho = \varphi$  в строку ввода вносим запись:

**Кривая** ( $\varphi \cos \varphi, \varphi \sin \varphi, \varphi, -6\pi, 6\pi$ ).

Изображение, полученное после исполнения команды, представлено на рис. 7.

С помощью параметрических уравнений (5) можно также демонстрировать процесс вычерчивания кривой. Для этого нужно создать ползунок для полярного угла  $\varphi$  и задать в строке *Ввод* текущую точку кривой ее декартовыми координатами:  $M = (\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi)$ . Затем после сбрасывания точки на *Панель объектов* и *Полотно* у нее требуется активировать опцию *Оставлять след*, а у параметра  $\varphi$  — опцию *Анимировать*.

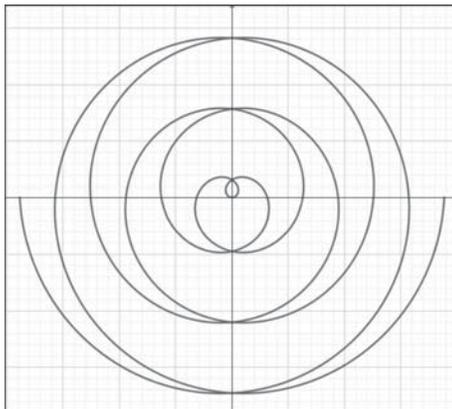


Рис. 7.

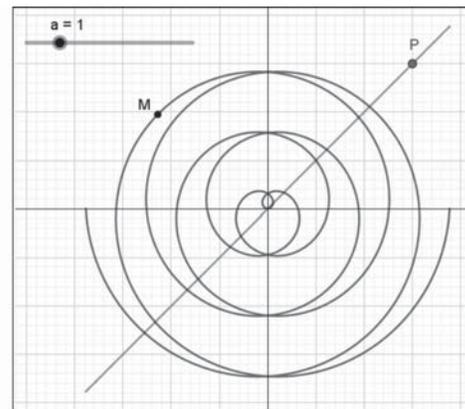


Рис. 8.

**Способ 3.** Этот способ построения кривой реализуется с помощью инструмента **Локус**, находящегося на *Панели инструментов*. Данный инструмент позволяет в прямоугольной декартовой системе координат строить траекторию  $\gamma$  точки  $M$ , связанной функциональной или геометрической зависимостью с другой точкой  $P$ , которая перемещается по заданной кривой  $\gamma_1$  [3].

Пусть в полярной системе координат кривая  $\gamma$  задана уравнением  $\rho = \rho(\varphi)$ , где  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ . С помощью инструмента

**Функция**( $\langle$ Функция $\rangle$ ,  $\langle$ Начальное значение $\rangle$ ,  $\langle$ Конечное значение $\rangle$ )

из строки *Функции и исчисление* каталога *Математические операции* в прямоугольной декартовой системе координат строится график  $\gamma_1$  вспомогательной функции  $y = \rho(x)$ . Инструментом **Точка на объекте**, расположенным на *Панели инструментов*, на этом графике задается произвольная точка  $P$ . Затем посредством строки ввода создается точка

$$M = (y[P] \cos(x[P]), y[P] \sin(x[P])),$$

координаты которой связаны с координатами точки  $P$  формулами (4). После этого активируется инструмент **Локус** и последовательно выполняются щелчки левой кнопкой мыши сначала по точке  $P$ , а затем по зависимой от нее точке  $M$ .

Результат построения спирали Архимеда этим способом представлен на рис. 8.

### 3. Интерполирование уравнения контура листа на основе результатов измерений

Рассмотрим на конкретном примере использование интерактивной математической системы GeoGebra для реализации алгоритма конструирования уравнения контура листа, описанного в пункте 1. Выберем для этого лист *плюща*, который по сравнению с листьями многих других растений имеет относительно “простую” форму, .

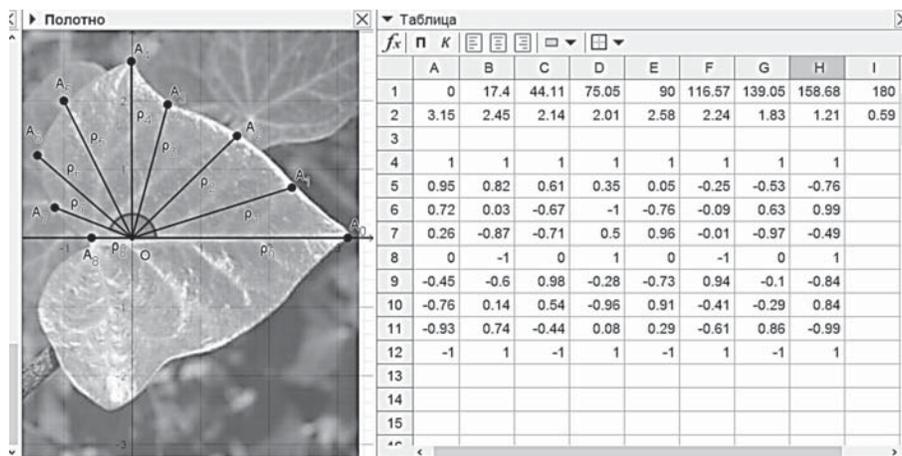


Рис.9

В настоящее время различные электронные фотографии листа плюща легко найти в сети Интернет. Импортируем выбранную в сети фотографию в среду GeoGebra [1, с. 41-42]. Расположим при этом лист на *Полотне* так, чтобы полярная ось лежала на его оси симметрии (рис. 9).

Будем искать уравнение в виде (3). Для этого с помощью инструментов системы выполним следующие построения и измерения:

1) отметим на краю листа опорные точки  $A_0, A_1, \dots, A_8$  и построим полярные радиусы  $\rho_i = OA_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 8$ ) этих точек (левая половина рис. 9);

2) с помощью инструмента **Угол** измерим углы  $\varphi_i = \angle A_0OA_i$ , образованные полярными радиусами  $\rho_i$  с полярной осью. Результаты измерений внесены в верхнюю строку *Таблицы* (правая половина рис. 9);

3) во вторую строку *Таблицы* впишем соответствующие углам длины полярных радиусов  $\rho_i$  (ищутся с помощью инструмента **Расстояние или длина**);

4) последовательно вычислим в GeoGebra косинусы углов  $\varphi_i, 2\varphi_i, \dots, 8\varphi_i$  (результаты вычислений вписаны в строки 4 – 11).

На основании результатов измерений и вычислений составляем систему девяти линейных уравнений с девятью неизвестными:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 3.15, \\ a_0 + 0.95a_1 + 0.82a_2 + 0.61a_3 + 0.35a_4 + 0.05a_5 - 0.25a_6 - 0.53a_7 - 0.76a_8 = 2.45, \\ a_0 + 0.72a_1 + 0.03a_2 - 0.67a_3 - a_4 - 0.76a_5 - 0.09a_6 + 0.63a_7 + 0.99a_8 = 2.14, \\ a_0 + 0.26a_1 - 0.87a_2 - 0.71a_3 + 0.5a_4 + 0.96a_5 - 0.01a_6 + 0.97a_7 - 0.49a_8 = 2.01, \\ a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + a_8 = 2.58, \\ a_0 - 0.45a_1 - 0.6a_2 + 0.98a_3 + 0.28a_4 - 0.73a_5 + 0.94a_6 - 0.1a_7 - 0.84a_8 = 2.24, \\ a_0 - 0.76a_1 + 0.14a_2 + 0.54a_3 - 0.96a_4 + 0.91a_5 - 0.41a_6 - 0.29a_7 + 0.84a_8 = 1.83, \\ a_0 - 0.93a_1 + 0.74a_2 - 0.44a_3 + 0.08a_4 + 0.29a_5 - 0.61a_6 + 0.86a_7 - 0.99a_8 = 1.21, \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 = 0.59. \end{cases}$$

Система имеет решение:

$$a_0 = 2.02, a_1 = 0.54, a_2 = -0.31, a_3 = 0.46, a_4 = 0.11, a_5 = 0.08, a_6 = -0.05, a_7 = 0.19, a_8 = 0.1$$

(решение найдено с помощью системы компьютерной математики *Mathima*). Это означает, что в полярной системе координат контур рассматриваемого листа плюща можно задать уравнением:

$$\rho = 2.02 + 0.54 \cos \varphi - 0.31 \cos 2\varphi + 0.46 \cos 3\varphi + 0.11 \cos 4\varphi + 0.08 \cos 5\varphi - 0.05 \cos 6\varphi + 0.19 \cos 7\varphi + \cos 8\varphi.$$

Кривая, определяемая найденным уравнением и построенная в среде *GeoGebra*, показана на рис. 10. Кроме того, на этом же рисунке изображены точки  $A_i$ , использованные при вычислениях в качестве опорных.

Нетрудно представить, какие временные затраты потребуются для того, чтобы построить эту кривую “вручную” с помощью измерительной линейки, транспортира и таблицы значений тригонометрических функций.

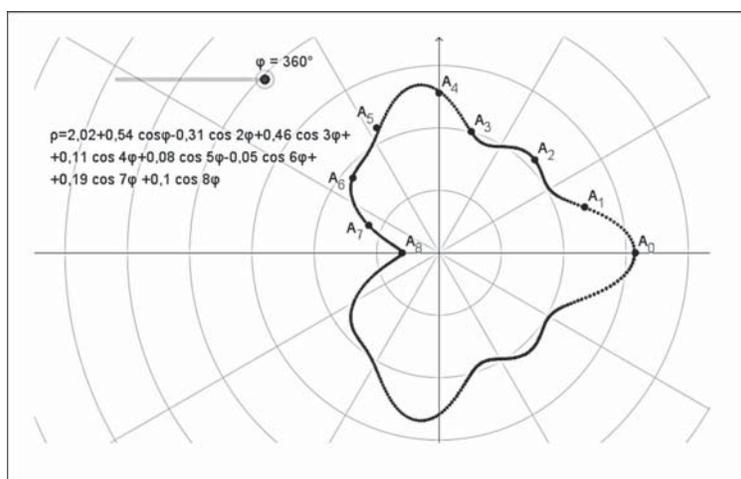


Рис. 10.

Видим, что наша кривая “недостаточно хорошо” отражает форму своего оригинала (края листа). Для достижения более полного соответствия кривой и ее прототипа придется увеличивать число опорных точек. Это приведет к росту числа уравнений и неизвестных в соответствующей системе линейных уравнений, а в конечном итоге, скорее всего, — к усложнению уравнения кривой. Опять же легко представить, с какими системами линейных уравнений придется столкнуться при отыскании подобным способом уравнений, например, контура листа смородины или клена.

Попутно заметим, что уравнение на странице 168 в книге [4], названное уравнением контура листа плюща, приведено с ошибкой, которая, возможно, была допущена при наборе и затем не замечена автором при чтении корректуры или верстки. Существуют разные виды плющей, имеющие некоторые различия в форме листьев. Однако кривая, построенная по приведенному в книге уравнению, близко не напоминает контур листа ни одного из них. Скорее всего, в этом уравнении при наборе был потерян знак квадратного корня, и уравнение, найденное Хабенихтом, имеет вид:

$$\rho = 3\sqrt{1 + \cos^2 \varphi} + 2 \cos \varphi + \sin^2 \varphi - 3 \sin^2 3\varphi \cdot \cos^4(\varphi/2). \quad (6)$$

Кривая, построенная по этому уравнению в среде *GeoGebra*, представлена на рис. 11. Сразу понять, как ученый пришел к уравнению (6), достаточно трудно. Поэтому попытаемся восстановить путь его рассуждений, догадок и находок.

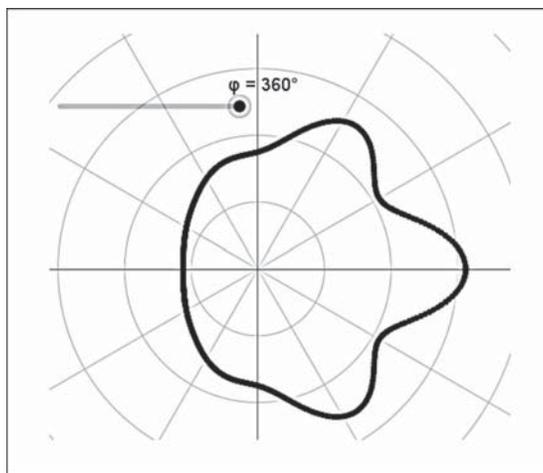


Рис. 11.

#### 4. Окружность и улитки Паскаля

Вслед за Хабенихтом начнем с исследования простейших уравнений

$$\rho = a_0 + a_1 \cos \varphi \tag{7}$$

вида (1), (3). Будем при этом считать, что  $a_0 \geq 0$ ,  $a_1 \geq 0$ .

При  $n = 0$  полярный радиус  $\rho$  для любого полярного угла  $\varphi$  сохраняет постоянную величину  $a_0$ . Следовательно, при  $a_0 > 0$  уравнение  $\rho = a_0$  задает окружность радиуса  $a_0$  с центром в полюсе  $O$  полярной системы координат.

При  $n = 1$  уравнения (1), (3) принимают вид (7). Если  $a_0 = 0$ , то имеем уравнение  $\rho = a_1 \cos \varphi$ , которое является уравнением окружности радиуса  $a_1/2$  с центром в точке  $A(a_1/2, 0^\circ)$  (рис. 12, а). Когда  $\varphi$  изменяется в промежутке от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ , то вычерчивающая кривую точка  $M(a_1 \cos \varphi, \varphi)$  “пробегает” эту окружность дважды. При этом полярный радиус  $\rho > 0$ , если  $\varphi \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ , и  $\rho < 0$ , если  $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$ .

Если  $a_0 \neq 0$  и  $a_1 \neq 0$ , то уравнение (6) определяет *улитку Паскаля* [4, с. 106]. В зависимости от значений коэффициентов  $a_0$ ,  $a_1$  выделяются три типа улиток. Для визуальной демонстрации этих улиток достаточно создать динамическую модель кривой, позволяющую с помощью ползунков менять значения  $a_0$  и  $a_1$ .

Если  $a_0 > a_1$ , то для любого  $\varphi$  полярный радиус  $\rho > 0$ . В этом случае полюс  $O(0, 0^\circ)$  является внутренней точкой области, ограниченной рассматриваемой кривой (рис. 12, б).

Если  $a_0 < a_1$ , то кривая имеет две петли, пересекающиеся в полюсе  $O$ , т.е. полюс является узловой точкой (или точкой самопересечения) кривой (рис. 12, в). Для углов, при которых вычерчивающая кривую точка  $M$  проходит через полюс, полярный радиус равен нулю:  $\rho = 0$ . Поэтому они могут быть найдены из уравнения  $\cos \varphi = -a_0/a_1$ , которое в промежутке от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  всегда имеет два решения  $\varphi_1, \varphi_2$ , ( $\varphi_1 < \varphi_2$ ). Для точек внешней петли  $\rho > 0$  (при  $\varphi \in (0, \varphi_1) \cup (\varphi_2, 2\pi)$ ), а для точек внутренней петли  $\rho < 0$  (при  $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ ).

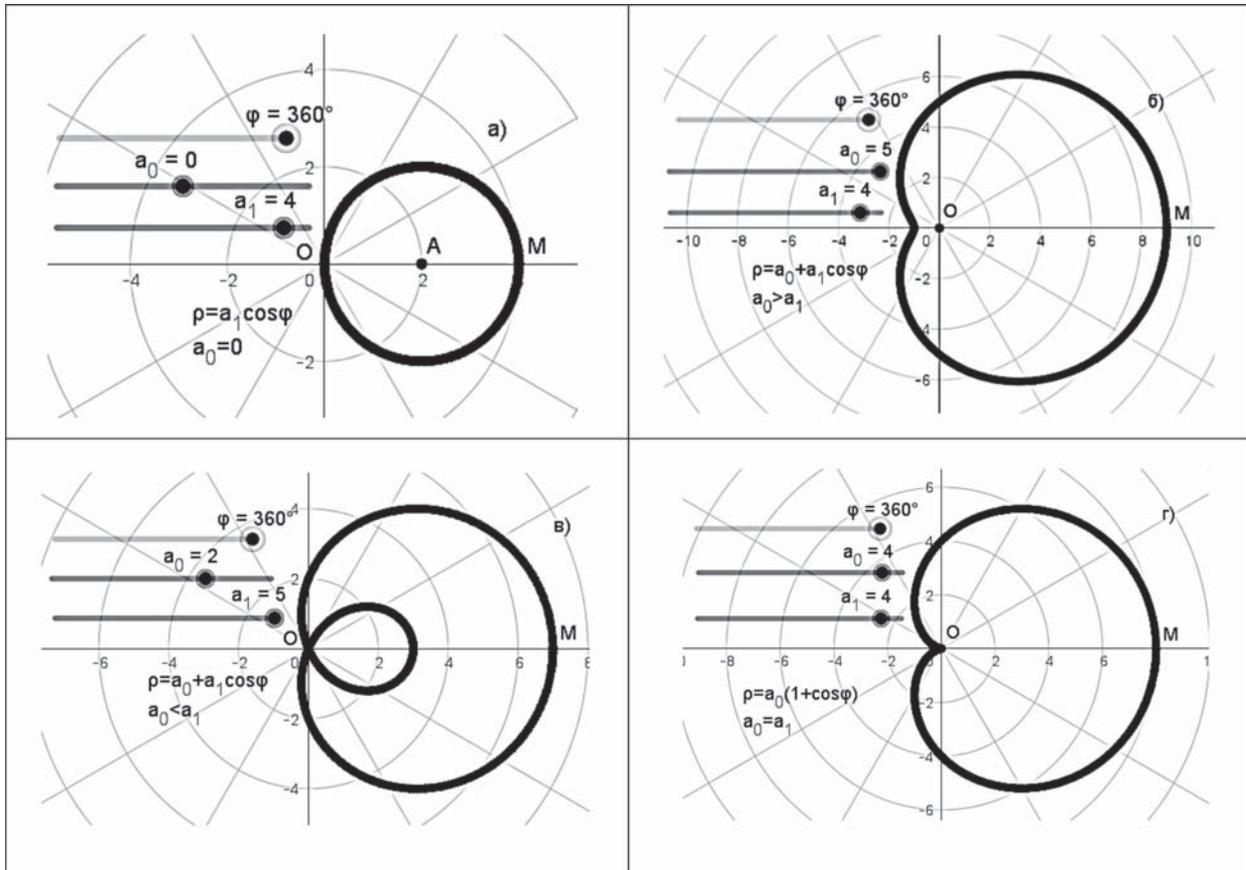


Рис. 12.

Если  $a_0 = a_1$ , то уравнение кривой принимает вид

$$\rho = a_0(1 + \cos \varphi), \quad (8)$$

т.е. улитка Паскаля становится *кардиоидой* [4, с. 121]; для нее полюс  $O$  является точкой возврата (или точкой заострения) первого рода (рис. 12, г). Заметим, что кардиоида может быть рассмотрена в качестве кривой, описывающей контур листа *кубышки*.

Для визуального наблюдения зависимости полярного радиуса  $\rho$  текущей точки кривой, заданной явным уравнением  $\rho = \rho(\varphi)$ , от полярного угла  $\varphi$  можно использовать вспомогательный график функции  $\rho = \rho(\varphi)$ , построенный в более привычной декартовой системе координат. Для окружности и улиток Паскаля, изображенных на рис. 12, подобные вспомогательные графики в декартовой системе координат  $O\varphi\rho$  показаны на рис. 13 (на промежутке  $[0, 2\pi]$ ). Эти графики сразу “делают видимыми” все отмеченные выше свойства улиток различных типов.

Нетрудно заметить, что с помощью инструмента **Локус** можно совместить изображение кривой и ее вспомогательный график на одном чертеже. Такое совмещение для улитки Паскаля  $\rho = 2 + 5 \cos \varphi$  показано на рис. 14 (график вспомогательной функции изображен штриховой линией).

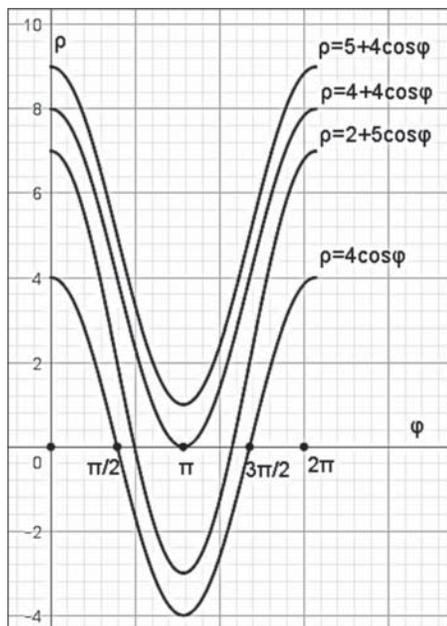


Рис.13.

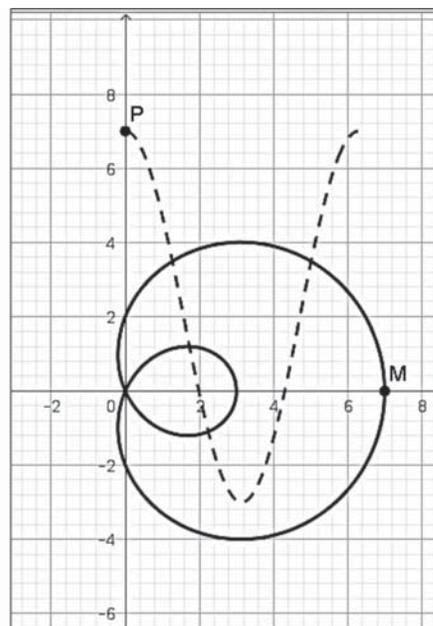


Рис.14

В GeoGebra, как можно было убедиться в пункте 2, используются обобщенные полярные координаты, в исследованиях же Б. Хабенихта, как отмечает Н.Ф. Четверухин, — обыкновенные. Это означает, что немецкого ученого при интерполировании контуров листьев интересуют только те дуги кривых, для точек которых полярный радиус неотрицателен:  $\rho \geq 0$ . Поэтому, если следовать Хабенихту, при вычерчивании кривых в полярной системе координат нужно каким-то образом скрывать точки, для которых  $\rho < 0$ . Как выполнить построение с таким ограничением, рассмотрим на примере улитки 12, в.

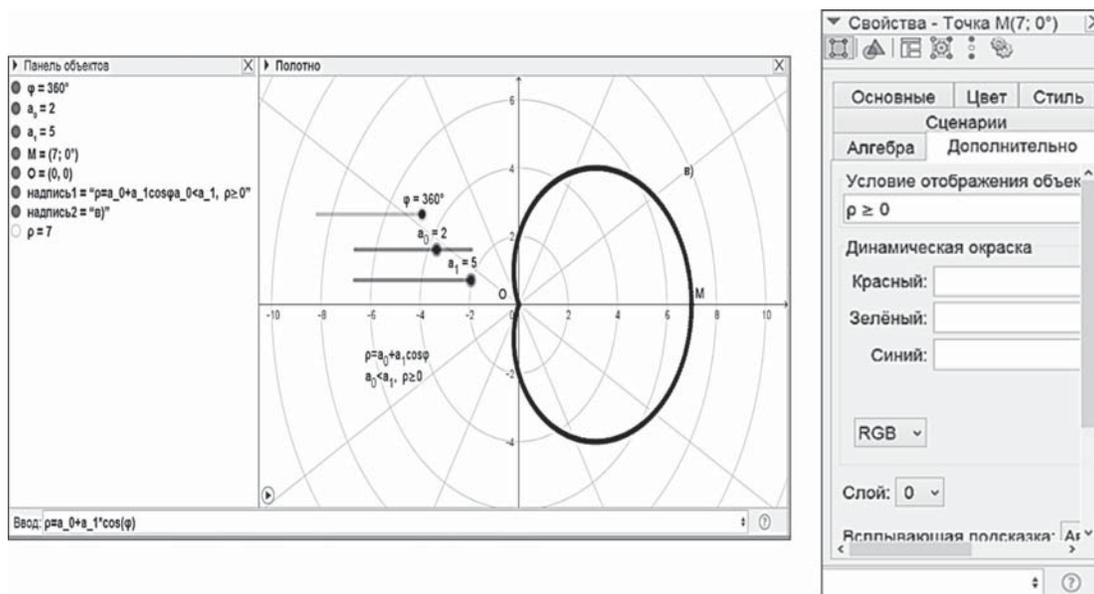


Рис.15

На чертеже-модели для вычерчивания этой улитки дополнительно в строку ввода вписываем уравнение улитки  $\rho = a_0 + a_1 \cos \varphi$ . После исполнения этой команды на *Панели объектов* появляется длина  $\rho$  полярного радиуса текущей точки  $M$  кривой (левая часть рис. 15). Затем у точки  $M$  активлируем опцию *Свойства*, во всплывающем при этом окне выбираем раздел *Дополнительно*, и в

строку **Условие отображения объекта** вносим ограничение  $\rho \geq 0$  (правая часть рис. 15). Теперь после анимации полярного угла  $\varphi$  текущая точка  $M$  будет вычерчивать только ту часть улитки, точки которой имеют неотрицательный полярный радиус. В дальнейшем на рисунках с подобными построениями условимся дополнительно вносить ограничение  $\rho \geq 0$  в надпись, содержащую уравнение кривой (рис. 15).

### Задания и задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что в полярной системе координат уравнение  $\rho = a \cos \varphi$ , где  $\varphi \in [0, \pi)$ , определяет окружность радиуса  $a/2$  с центром в точке  $A(a/2, 0^\circ)$ .

2. В ряде случаев Хабенихт при конструировании уравнений контуров листьев в качестве исходных кривых использует окружности с центром, лежащим на полярной оси. Докажите, что в полярной системе координат окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $(a, 0^\circ)$  имеет уравнение

$$\rho = a \cos \varphi + \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \varphi}. \quad (9)$$

3. Создайте динамическую модель, позволяющую вычерчивать все типы улиток Паскаля (7). С помощью этой модели проведите наблюдение, как меняются тип и форма улитки с фиксированным коэффициентом  $a_0$  при изменении коэффициента  $a_1$  (с фиксированным коэффициентом  $a_1$  при изменении коэффициента  $a_0$ ).

4. Выбрав какие-либо конкретные значения коэффициентов  $a_0$  и  $a_1$ , постройте в полярной системе координат соответствующую улитку Паскаля “по точкам”, используя для этого измерительную линейку, транспортир и таблицы косинусов. Это поможет на практике осознать, какие преимущества открывает использование интерактивных математических систем при построении кривых и графиков функций.

5. Предложите способ “ручного” построения кривой  $\rho = \rho(\varphi)$  в полярной системе координат, основанный на использовании графика функции  $\rho = \rho(\varphi)$  в декартовой системе координат  $O\varphi\rho$ .

6\*. Исследуйте улитки Паскаля (7) при  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_0 \neq a_1$  и  $a_0 \neq 2a_1$  на наличие точек перегиба<sup>1</sup>.

7\*. При  $a_0 < a_1$  с помощью инструмента **Касательная** постройте касательные улитки Паскаля (7) в ее узловой точке. Докажите аналитически, что в этом случае полюс  $O$  полярной системы координат действительно является узловой точкой кривой.

8\*. Постройте касательную кардиоиды в ее точке возврата. Докажите, что полюс  $O$  полярной системы координат действительно является точкой возврата кардиоиды (8).

### Литература

1. Безумова О.Л., Овчинникова Р.П., Троицкая О.Н. и др. Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra: Учеб.-метод. пособие. - Архангельск: КИРА, 2011. - 140 с.
2. Воробьев Н.Н. Теория рядов. 6-е изд., стереотип. - СПб.: Лань, 2002. - 408 с.
3. Есаян А.Р. Построение локусов в GeoGebra // Вестник РУДН. Серия: Информа-тизация образования. - Том 14. - № 3. - 2017. - С. 334-347.
4. Савелов А.А. Плоские кривые: Систематика, свойства, применения. Справочное руководство. / Под ред. А. П. Нордена. Изд. стереотип. - М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2014. - 296 с.
5. Четверухин Н.Ф. Геометрические формы органического мира // Математическое образование. - № 5. - 1930. - С. 2-14.

<sup>1</sup>Задания, отмеченные звездочкой, могут быть рекомендованы будущим учителям математики и школьникам, изучающим математику на углубленном уровне.

6. Habenicht В. Analytische Form der Blätter. - Quedlinburg, 1895.
7. Habenicht В. Flächengleichungen organischer und verwandter Formen, intuitiv behandelt. - Quedlinburg, 1897.
8. Habenicht В. Beiträge zur mathematischen Begründung einer Morphologie der Blätter. - Berlin: O. Salle, 1905.

*Клековкин Геннадий Анатольевич,  
кандидат физико-математических наук, доцент,  
г. Самара.*

*E-mail: klekovkin\_ga@mail.ru*

# О неравенствах в тетраэдре

*В. Н. Новиков*

Найдены точные границы изменения площади поверхности, объема и других величин тетраэдров для заданного отношения радиусов вписанной и описанной сфер. На достаточно ярких и содержательных примерах рассмотрена взаимосвязь метода условного экстремума и огибающих.

Статья печатается с продолжением.

Ряд хорошо известных проблем, таких как задача Дидоны (форма верёвки, охватывающий наибольшую площадь) и др. послужили стимулом к развитию актуальной и быстро развивающийся в настоящее время теории оптимизации. Если в задаче Дидоны экстремальная форма верёвки интуитивно очевидна: окружность, в других случаях это совсем не так. Например, в известной проблеме Понселе экстремальные значения периметра треугольников в зависимости от отношения радиусов вписанной и описанной окружностей (фундаментальное неравенство треугольника) описываются достаточно сложными формулами, которые играют важную роль в математике. Казалось бы, аналогичный вопрос для тетраэдра уже давно мог быть детально исследован, однако до сего момента, в отличие от случая треугольника, имелись лишь приближённые оценки, получаемые обычно с помощью классических неравенств Коши-Буняковского и их аналогов (см. [1] и др.) для границ изменения объёма, площади поверхности и т.п. в зависимости от отношения радиусов вписанных и описанных сфер. Такие оценки, можно сказать, уже столетия кочуют из учебника в учебник. Видимо, прежде всего, эта ситуация объясняется сложностью возникающей в 5-мерном (одно из ребер можно принять за 1) пространстве задачи на условный экстремум с сильно нелинейными функциями. Оказывается, что можно развить регулярный метод предсказания и практического нахождения точных границ распределений на основе подхода, включающего дифференциальную геометрию и метод Монте-Карло, чему и посвящена настоящая работа.

Работа обсуждалась с рядом известных математиков, в том числе по приглашению члена-корреспондента РАН Е.В. Щепина была доложена на семинаре Н.П. Долбилина в математическом институте им. В.А. Стеклова и получила положительную оценку. По значимости результатов в такой, казалось бы, классической и устоявшейся области науки, можно ожидать, что они со временем должны быть приняты во внимание, как в методике преподавания, так и в теоретических разработках, по крайней мере — в стереометрии или теории оптимизации.

## Основной метод. Точные формулы для границ поверхности

Для определения экстремальных значений различных величин произвольных тетраэдров, таких как полная площадь поверхности, периметр и др. в зависимости от отношения радиусов вписанной и описанной сфер  $\rho = r/R$  будем рассматривать тетраэдры, задаваемыми длинами своих ребер:  $(a, b, c, e, f, g)$ , где  $e, f, g$  — ребра противоположные соответственно  $a, b, c$  для различных типов симметрии. При этом, так как  $\rho$  — безразмерная величина, одно из ребер всегда можно принять за 1. Как показано ниже, для полной площади поверхности подходит конфигурация с четырьмя равными сторонами вида  $(1, 1, x, 1, 1, y)$ . Для объема, радиуса описанной сферы и площади поверхности тогда справедливы формулы:

$$V = \frac{1}{12}xy\sqrt{4-x^2-y^2}, \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4-x^2y^2}{4-x^2-y^2}}, \quad S = \frac{1}{2}(x\sqrt{4-x^2} + y\sqrt{4-y^2}).$$

Так как радиус вписанной сферы  $r = 3V/S$ , то

$$\rho = \frac{xy(4-x^2-y^2)}{\sqrt{4-x^2y^2}(x\sqrt{4-x^2} + y\sqrt{4-y^2})}, \quad \hat{S} = \frac{2(4-x^2-y^2)(x\sqrt{4-x^2} + y\sqrt{4-y^2})}{4-x^2-y^2}, \quad (1)$$

где  $\hat{S}$  — безразмерная площадь поверхности. Параметрические кривые  $\rho(x, y_0), \hat{S}(x, y_0)$ , замыкающие область между нижней и верхней границей  $S$ , показаны на Рис. 1, где точки соответствуют  $y_0 = 1.4$ ;  $0 \leq x \leq \sqrt{4 - y_0^2}$ , пунктир:  $y_0 = 1.4$ . Видно, что верхняя и нижняя граница соответствуют некоторым огибающим, которые, как известно (см., например, [2]), должны удовлетворять условию обращения в ноль якобиана, или

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \hat{S}}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \hat{S}}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Используя (1), можно непосредственно убедиться, что (2) удовлетворяется для связи:  $y = x$ . Но тогда, решив первое из уравнений (1) относительно  $x$ , и подставляя  $x = x(\rho)$  во второе, после упрощений приходим к формуле для огибающей или верхней границе распределения:

$$S = R^2 2\sqrt{2} \sqrt{1 + 18\rho^2 - 27\rho^4 + (1 - 9\rho^2)\sqrt{1 - 10\rho^2 + 9\rho^4}}. \quad (3)$$

Как можно проверить, (3) заодно дает и верхнюю границу распределения  $S$  для равногранных тетраэдров, а нижняя граница для них получается из (3), если поменять знак перед внутренним радикалом. При этом, по аналогии с двумерным случаем, грани равногранных тетраэдров на границах вырождаются в равнобедренные треугольники. Для нижней границы связь на огибающей получается в виде кубического уравнения относительно квадратов  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} -16 + 36x^2 - 24x^4 + 4x^6 + 36y^2 - 72x^2y^2 + 42x^4y^2 - 5x^6y^2 - 24y^2 + \\ + 42x^2y^4 - 22x^4y^4 + 2x^6y^4 + 4y^6 - 5x^2y^6 + 2x^4y^6 = 0. \end{aligned}$$

Сама граница получается в параметрическом виде как множество точек  $(\rho(x, y(x)), \hat{S}(x, y(x)))$ , где, например,  $y(x)$  определяется уравнением связи.

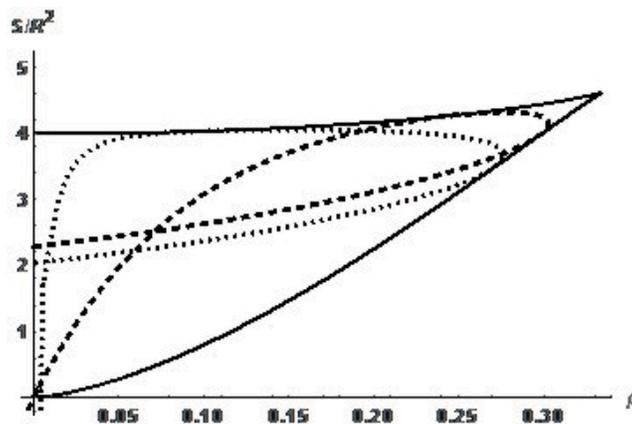


Рис. 1.

На Рис. 2 точками представлены результаты моделирования методом Монте-Карло распределения  $S$ . Для этого все множество (произвольных) тетраэдров с точностью до подобия задавалось случайными и равномерно распределенными по поверхности единичной сферы четверками точек-вершин (числом 10000), по которым вычислялись  $\hat{S}$  и  $\rho$ . Сплошными линиями показаны границы, найденные выше. Светлые линии — система параметрических кривых  $(\rho(y_0, z), \hat{S}(y_0, z))$ ,  $y = 0.15; 0.3; 1/\sqrt{2}$ , найденных из другого представления для рассмотренной выше конфигурации, когда тетраэдры задаются координатами своих вершин следующим образом:

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), \left(\frac{1}{2}, y, z\right), \left(\frac{1}{2}, y, -z\right), \text{ где } 0 < z \leq \frac{1}{2}; 0 < y. \quad (4)$$

Тогда

$$V = \frac{zy}{3}, \quad R = \frac{\sqrt{(1+4y^2+4z^2)^2 - 16x^2}}{8y}, \quad S = z\sqrt{1+4y^2} + \sqrt{y^2+z^2}. \quad (5)$$

При вычислениях представление (4) может оказаться удобнее, чем (1). Далее отличать их будем по используемым переменным:  $y, z$  или  $x, y$ .

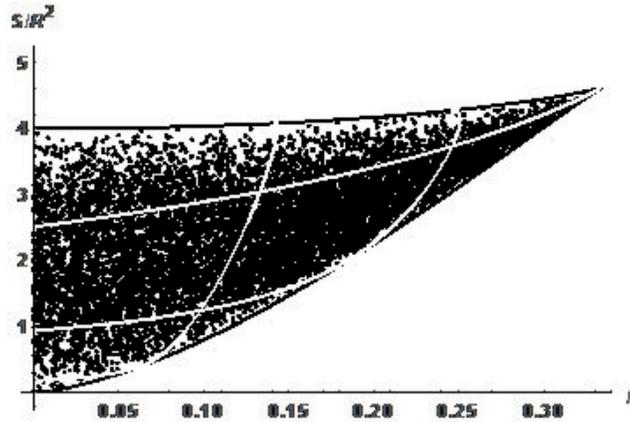


Рис. 2.

Как видно из Рис. 2, верхняя граница распределения, хотя и является также огибающей (светлые линии касаются ее, как и нижней границы), может быть найдена как предел при  $z \rightarrow 1/2$  при фиксированных  $y$ :  $1/\sqrt{2} \geq y > 0$ . Полагая  $z = 1/2$ , получаем уравнения:

$$\rho = \frac{3V}{SR} = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+4y^2}}, \quad \frac{S}{R^2} = \frac{\sqrt{1+4y^2}}{1+y^2}.$$

Выражая  $y$  через  $\rho$ :

$$y = \frac{\sqrt{1-5\rho^2} - \sqrt{1-10\rho^2+9\rho^4}}{2\sqrt{2}\rho}$$

(одно из решений), и подставляя во второе уравнение, после упрощений получим опять формулу (3).

Имеется еще только одна возможная конфигурация с четырьмя равными сторонами:  $(1, 1, 1, 1, x, y)$ . Ее можно описать так: берется правильный треугольник с единичными сторонами-ребрами и из одной его вершины в произвольном направлении в пространстве строится еще одно единичное ребро, остальные два ребра обозначаются за  $x, y$ . Численный эксперимент показывает, что эта конфигурация “слабее” рассмотренной выше, в том смысле, что границы нового распределения  $\hat{S}$  находятся целиком внутри старых. Это можно объяснить тем, что первая конфигурация имеет не только четыре одинаковых стороны, но и две попарно-одинаковых грани, т.е. ее симметрия совершеннее.

### Огибающие и метод условного экстремума

Выше мы рассматривали определение границ распределения параметров тетраэдров с помощью понятия огибающей, но эквивалентное их определение возможно с помощью понятия условного экстремума. Действительно, если рассмотреть типичную задачу на условный экстремум: найти экстремальные значения функции

$$u = u(x, y) \quad \text{при условии} \quad v = v(x, y) = 0, \quad (6)$$

и составить функцию Лагранжа  $L = u(x, y) + \lambda v(x, y)$ , то из условий

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

получаем  $\lambda = -\frac{\partial u / \partial x}{\partial v / \partial x} = -\frac{\partial u / \partial y}{\partial v / \partial y}$  и уравнение (2) связывающее  $x, y$ , которое вместе с условием  $v(x, y) = 0$  можно использовать для нахождения условного экстремума, не используя с самого начала параметр  $\lambda$ . При этом можно решать и множество задач на условный экстремум, если вместо  $u = u(x, y), v(x, y) = 0$  сразу рассматривать отображение  $u = u(x, y), v = v(x, y)$ . Тогда (2) означает обращение в ноль якобиана этого отображения и является необходимым условием существования огибающей на плоскости  $u, v$ .

**Теорема 1.** Множеству решений задач на условный экстремум, определенных выше, соответствует огибающая для отображения  $u = u(x, y), v = v(x, y)$ , или  $w = w(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ , задаваемая условием (2), а два семейства параметрических кривых  $(u(x, y_0), v(x, y_0))$  и  $(u(x_0, y), v(x_0, y))$ , где  $x, y$  изменяются в некоторых окрестностях  $x_0$  и  $y_0$ , в каждой фиксированной точке огибающей  $(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))$  касаются друг друга и огибающей.

**Доказательство.** Будем предполагать все вводимые ниже функции обладающими необходимой гладкостью. Так как касательные векторы параметрических кривых есть  $t_1 = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x})$  и  $t_2 = (\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y})$ , то (2), взятое в точке  $(x_0, y_0)$ , означает их линейную зависимость, т.е. касание. Пусть  $y = \varphi(x)$  — неявная функция от  $x$ , определяемая соотношением (2),  $h$  — малое число, тогда при  $h \rightarrow 0$  выражение

$$t_3 = \frac{w(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) - w(x_0, \varphi(x_0))}{h}$$

стремится к касательному вектору на огибающей в точке  $(x_0, y_0)$ , и в то же время, как следует из определения  $w$ , будет равно  $t_3 = t_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} t_2$ , что и доказывает теорему, так как векторы  $t_1, t_2$  в этой точке отличаются только множителем.

Имеет место и обратное: если известна огибающая и два семейства параметрических кривых, касающиеся ее в каждой точке, то известно и множество решений соответствующих задач на условный экстремум. Для выяснения типа экстремума в случае использования огибающих можно применить известный критерий для задач на условный экстремум.

Пример определения границ распределения площади тетраэдров как решение задачи на условный экстремум представлен на Рис. 3. Здесь  $u(x, y) = \hat{S}$  (сплошная линия);  $v(x, y) = \rho$  (пунктир), где  $\rho$  и  $\hat{S}$  как функции  $x, y$  определены согласно (1). Пунктир — линия уровня  $v(x, y) = 0.19$ , сплошная линия соответствует  $u(x, y) = 3.47$ . Точка  $(0.19, 3.47)$  как следует из Рис. 1, находится на графике нижней границы распределения безразмерной площади поверхности произвольных тетраэдров. При этом как и должно быть, если исходить из теории условного экстремума, в соответствующей ей на Рис. 3 точке  $C$ , обе линии уровня касаются. Симметричная точка для  $C$  не привносит ничего нового. Точки  $A$  и  $B$  относятся к верхней и нижней границам равногранных тетраэдров и их касаются другие контуры для  $u(x, y)$ .

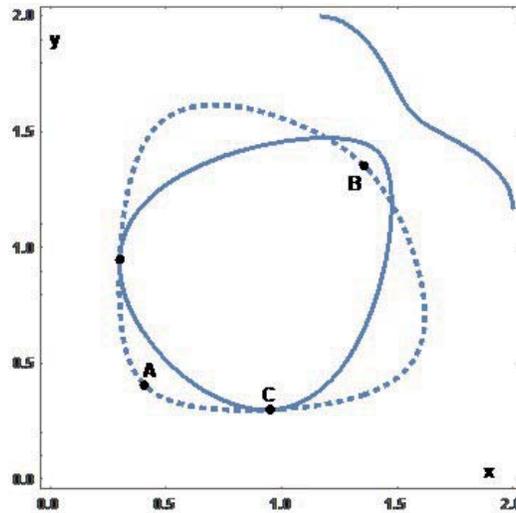


Рис. 3.

### Формулы для объема и сравнение с известными результатами

Верхняя и нижняя границы распределения объема тетраэдра получаются из соответствующих выражений для площади поверхности после умножения на  $R\rho/3$ . Рис. 4 иллюстрирует точность известных приближений для объема тетраэдра:  $r \leq \sqrt[3]{V}/2\sqrt[6]{\sqrt{3}} \leq \sqrt{S}/\sqrt{8}\sqrt[4]{27}$ , или  $8\sqrt{3}\rho^3 \leq \hat{V} \leq \hat{S}^{3/2}/(6\sqrt{2} \cdot 3^{3/4})$ . Самый нижний пунктир — график  $8\sqrt{3}\rho^3$ , пунктиры выше — оценки для нижней и верхней границ, если вместо  $\hat{S}$  в формуле выше взять точные значения. Сплошные линии — точные границы объема.

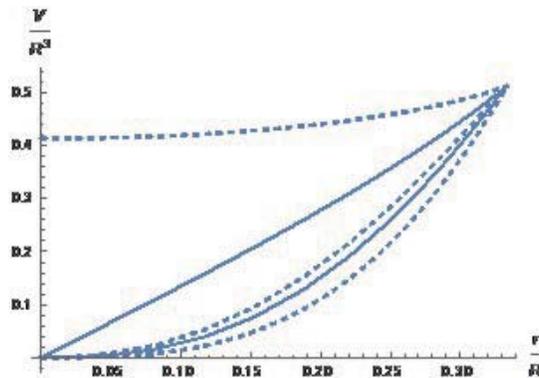


Рис. 4.

### Правильная треугольная пирамида

Рассмотрим теперь правильную треугольную пирамиду, у которой три боковые грани — равнобедренные треугольники с боковыми сторонами  $a$ , основание — правильный треугольник со стороной  $b$ . У таких тетраэдров площади граней, радиусы описанной и вписанной сфер равны:

$$S_a = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}, \quad S_b = \frac{\sqrt{3}b^2}{4}, \quad R = \frac{\sqrt{3}a^2}{2\sqrt{3a^2 - b^2}}, \quad r = \frac{b\sqrt{3a^2 - b^2}}{\sqrt{3b + 3\sqrt{4a^2 - b^2}}}.$$

Все действительные неотрицательные решения системы из последних двух уравнений при  $0 \leq \rho \leq 1/3$  относительно  $a$  и  $b$  имеют вид:

$$a_{1,2} = R\sqrt{2}\sqrt{1 + \rho \mp \sqrt{1 - 2\rho - 3\rho^2}}; \quad b_{1,2} = R\sqrt{6}\sqrt{\rho(1 + \rho \pm \sqrt{1 - 2\rho - 3\rho^2})}. \quad (7)$$

Соответственно, для каждого  $\rho$  существуют только два значения периметра  $P_{1,2} = 3a_{1,2} + 3b_{1,2}$ , и только одно значение площади поверхности:

$$\frac{S}{R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\rho \left( 1 + \rho + \sqrt{1 - 2\rho - 3\rho^2} + \sqrt{2}\sqrt{(1 + \rho)(5 + 3\rho - 3\sqrt{1 - 2\rho - 3\rho^2})} \right). \quad (8)$$

Оказывается, что для тетраэдров, у которых существует сфера, касающаяся во внутренних точках всех его ребер — квазиописанных, —  $P_{1,2}$  являются нижними и верхними точными границами распределения периметра. Поэтому (8) заодно еще дает точную связь между  $S$ ,  $R$  и  $r$ , или  $V$ ,  $R$  и  $r$  для квазиописанных тетраэдров.

### Выражения для периметра

Найдем теперь границы изменения периметра для произвольных тетраэдров. Для верхней границы аналогично тому, как это делалось выше, получаем:

$$P = 8R \frac{\sqrt{2\rho + \sqrt{1 - \rho^2}} - \sqrt{1 - 10\rho^2 + 9\rho^4}}{\sqrt{1 + 3\rho^2} - \sqrt{1 - 10\rho^2 + 9\rho^4}}.$$

Эта же формула справедлива и для равногранных тетраэдров. Нижнюю границу, как и ранее, можно получить с помощью огибающей. На Рис. 5 показано отклонение этой безразмерной границы от нижней границы для правильной треугольной пирамиды, т.е.  $P_1/R$ . Видно, что в отличие от рассмотренных выше случаев объема и полной поверхности, поведение ее существенно сложнее — она пересекает кривую для нижней границы периметра правильной треугольной пирамиды в точке  $\rho \approx 0.2906$ . Как показывает численный расчет, точная нижняя граница периметра для произвольных тетраэдров проходит по огибающей только до этой точки, а далее — по кривой  $P_1$ , т.е. является ломаной.

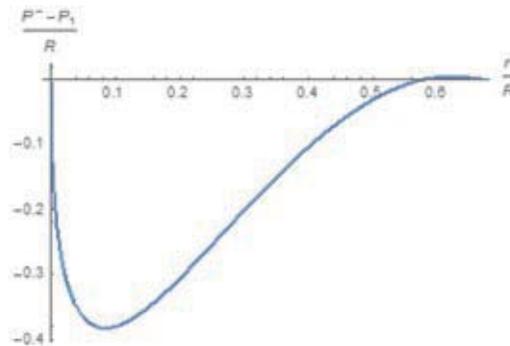


Рис. 5.

### Формулы для высот

Рассмотрим распределение минимальной и максимальной высот тетраэдра, которые обозначим как  $h_1$  и  $h_2$ . Известно, что  $h_1 \leq 4r$  (Бляшке). Как можно проверить, нижняя граница для  $h_1$  и верхняя граница для  $h_2$  даются формулами

$$h_{1,2} = R\sqrt{2}\sqrt{(1 + \rho)(1 - \rho \mp \sqrt{1 - 2\rho - 3\rho^2})},$$

которые совпадают с соответствующими выражениями для правильной треугольной пирамиды. На Рис. 6  $h_1$  и  $h_2$  — соответственно нижняя и верхняя границы овала, само решение Бляшке — прямая

линия, которая практически слилась с параметрической кривой, найденной с помощью семейства (4):  $(r/R, 2yz/R\sqrt{y^2 + z^2})$ , где  $r$  и  $R$  даются формулами (5) при  $z = 0.49$ . Пунктир соответствует  $z = 0.25$ . Видно, что при  $z = 0.25$  параметрическая кривая не достигает границы распределения, т.е. семейства (4) было бы недостаточно для полного заметания всей области изменения  $h_1$  и  $h_2$ .

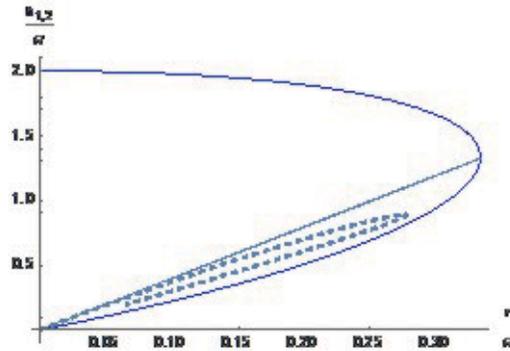


Рис. 6.

На Рис. 7 точками (3000 точек) показан результат численного эксперимента.

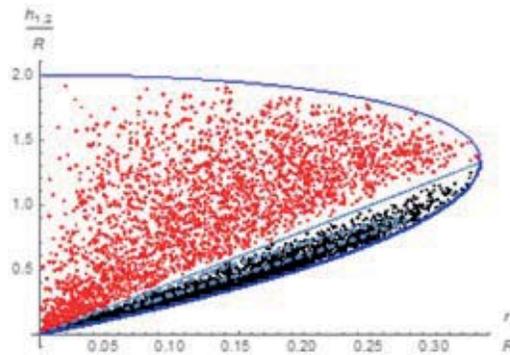


Рис. 7.

В то же время, для суммы всех высот произвольных тетраэдров, семейства (4) оказывается достаточно для нахождения точных границ распределения. Верхнюю границу можно найти в параметрическом виде:

$$\frac{r}{R} = \frac{8z}{\sqrt{9 + 8z^2 + 16z^4(2\sqrt{3}z + \sqrt{2}\sqrt{1 + 2z^2})}},$$

$$\frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{R} = \frac{16(3\sqrt{2}z + \sqrt{3}\sqrt{1 + 2z^2})}{3\sqrt{1 + 2z^2}\sqrt{9 + 8z^2 + 16z^4}}, \text{ где } 0 \leq z \leq \frac{1}{2}.$$

Нижняя граница совпадает с известным результатом:  $16r \leq h_1 + h_2 + h_3 + h_4$ .

### Специальные тетраэдры

Аналогично можно находить точные границы распределений различных характеристик для специальных тетраэдров. Например, для ортоцентрических тетраэдров (суммы квадратов длин противоположных ребер равны) получаем связь:  $y = \sqrt{z^2 + 1/4}$ . Отсюда находим формулы для границ в параметрическом виде:

$$\rho = \frac{2z\sqrt{1 + 4z^2}}{q(2\sqrt{2}z\sqrt{1 + 2z^2} + \sqrt{1 + 8z^2})}, \quad P = R \frac{2(1 + 2z + 2\sqrt{2}\sqrt{1 + 4z^2})}{q},$$

$$S = R^2 \frac{2(2\sqrt{2}z\sqrt{1+2z^2} + \sqrt{1+8z^2})}{q^2}, \text{ где } q = \frac{\sqrt{1+4z^2+16z^4}}{\sqrt{1+4z^2}}, \quad 0 \leq z \leq \frac{1}{2}.$$

Для изодинамических тетраэдров (произведения длин противоположных ребер равны), связь:  $y = \sqrt{2z - 1/4 - z^2}$ . Формулы для границ:

$$\rho = \frac{q^2}{\sqrt{3}(4z\sqrt{(2-z)z} + \sqrt{8z-1})}, \quad P = R \frac{(1 + 4\sqrt{2}z + 2z)q}{\sqrt{3}z},$$

$$S = R^2 \frac{q^2(4z\sqrt{(2-z)z} + \sqrt{8z-1})}{6z^2}, \text{ где } q = \sqrt{8z-1-4z^2}, \quad 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}.$$

Для изогональных тетраэдров (произведения косинусов противоположных половинных двугранных углов равны), связь:  $y = \sqrt{(1+8z+4z^2)/12}$ .

$$\rho = \frac{\sqrt{3}z}{q}, \quad P = R \frac{\sqrt{1+8z+4z^2}(3+6z+4\sqrt{3}\sqrt{1+2z+4z^2})}{\sqrt{3}q},$$

$$S = R^2 \frac{\sqrt{3}(1+8z+4z^2)^2}{2q^2}, \text{ где } q = \sqrt{1+4z+3z^2+16z^3+16z^4}, \quad 0 \leq z \leq \frac{1}{2}.$$

При этом для каждого вида тетраэдра и конкретного распределения (например, периметра) таким способом получается только одна граница, вторая граница совпадает с одной из границ для правильной треугольной пирамиды. На Рис 8. сплошные линии — границы для периметра правильной треугольной пирамиды, верхний пунктир и нижняя сплошная линия — границы для периметра ортоцентрических тетраэдров, нижний пунктир и верхняя сплошная линия — границы для изодинамических тетраэдров, средний пунктир и нижняя сплошная линия — границы для периметра изогональных тетраэдров.

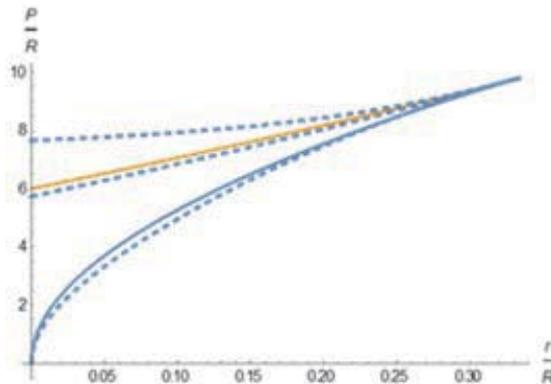


Рис. 8.

### Вихревые структуры

На Рис. 9. показана интересная особенность при заполнении области распределения для ортоцентрических тетраэдров. Если основания тетраэдров — случайные треугольники с длиной максимальной стороны 1, а высота  $h$  тетраэдра принята за параметр, то при некоторых значениях  $h$  появляются своеобразные вихревые структуры (на Рис. 9  $h = 3$ ).

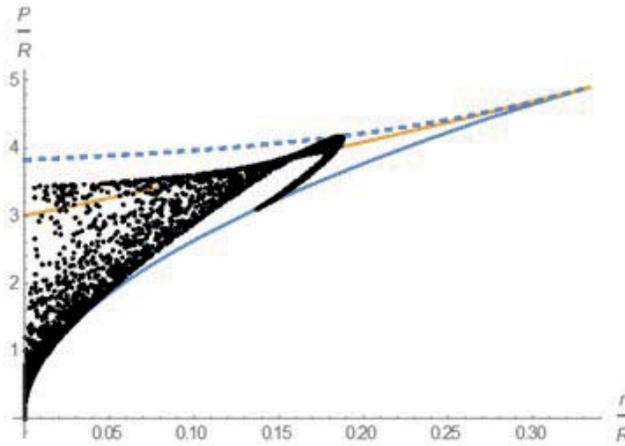


Рис.9.

### О теореме Фейербаха для тетраэдров

На Рис. 10 представлено распределение расстояния  $d$  между центром сферы Фейербаха (сферы, проходящей через центры тяжестей граней) и центром вписанной сферы. Как можно проверить, используя, например координатное представление, ее радиус всегда равен трети радиуса описанной сферы. Верхняя граница распределения находится как огибающая с уравнением для связи  $y$  и  $z$ :

$$y^2z + 5y^4z - 8y^6z - 48y^8z - 8y^2z^3 - 8y^4z^3 - 32y^6z^3 - 8z^5 - 32y^2z^5 + 80y^4z^5 + 64y^2z^7 + \\ +(y^2 + 4y^4 - 4y^2z^2 - 8z^4 - 16y^2z^4 + 64y^4z^4 + 64y^2z^6)\sqrt{(1 + 4y^2)(y^2 + z^2)} = 0.$$

Видно, что хотя теорема Фейербаха для тетраэдров и не выполняется, след от нее все же остается. Точки, для которых имеет место касание сфер, расположены на светлой прямой линии:  $d/R = 1/3 - r/R$ , идущей по вершинам холмов распределения. Т.е. имеют наибольшую вероятность при заданном отношении  $r/R$ .

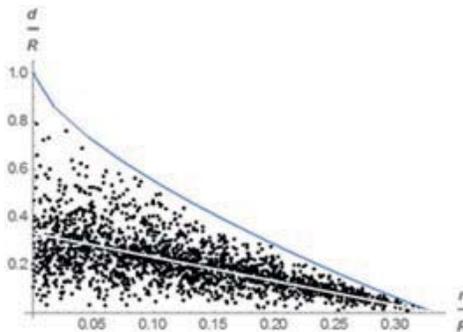


Рис.10.

### Неравенство Грейса-Даниельсона

Хотя история неравенств в треугольнике и тетраэдре восходит к глубокой древности, возможно, наиболее яркие и содержательные результаты, оказавшие влияние на многие разделы математики, были получены около 250 лет назад. Прежде всего — это формула Эйлера (1765), ранее полученная Чеплом (1746), для расстояния между центрами вписанной и описанной окружности  $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ . Из которой следует, что  $R$  в любом треугольнике как минимум в два раза больше  $r$ . Естественно, сразу же возник вопрос об обобщении на случай тетраэдра. Только спустя 170 лет после многочисленных попыток (Жергонн и др.) появился результат Грейса (1918) а затем Даниэльсона (1949):

$d \leq \sqrt{(R+r)(R-3R)}$ , где  $r$  и  $R$  — радиусы вписанной и описанной сфер. Новые доказательства и исследования появляются и в последнее время. Покажем, как эти результаты могут быть получены предлагаемым методом.

Координаты центров описанной и вписанной сфер для семейства (4) по оси  $y$ :

$$y_0 = \frac{-1 + 4y^2 + 4z^2}{8y} \quad \text{и} \quad y_i = \frac{y\sqrt{y^2 + z^2}}{z\sqrt{1 + 4y^2} + \sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Полагая  $\hat{S} \rightarrow \hat{d} = (y_i - y_0)/R$ , получим уравнение связи:

$$8z^3\sqrt{(y^2 + z^2)(1 + 4y^2)} - y^4 - 8y^6 - 16y^8 + 4y^2z^2 + 8y^4z^2 - 32y^6z^2 + 8z^4 + 16y^2z^4 - 16y^4z^4 = 0.$$

Одно из решений его приводит к связи вида  $z = (y/2)\sqrt{(1 + 4y^2)/(2 - y^2)}$ . Отсюда

$$y = \frac{\sqrt{1 - \rho - \sqrt{1 - 3\rho}}}{\sqrt{1 + \rho}} \quad \text{и} \quad \hat{d} = \frac{(1 - 2y^2)\sqrt{1 + 4y^2}}{(1 + y^2)} \quad (\text{верхняя граница}).$$

После преобразований получаем  $\hat{d} = \sqrt{(1 - 3\rho)(1 + \rho)}$ , или  $d^2 \leq (R + r)(R - 3R)$  — неравенство Грейса-Даниельсона.

*Новиков Владимир Николаевич,  
г. Москва.*

*E-mail: noviknovik1944@gmail.com*

# Треугольники с заданными значениями радиусов вписанной и описанной окружностей

*С. Ф. Осинкин*

Определение треугольников по заданным элементам не относится к числу рядовых задач по элементарной геометрии за исключением тех, которые могут быть решены с помощью циркуля и линейки. В этом можно убедиться, ознакомившись с опубликованными в разные годы решениями задачи о трех биссектрисах [1,2,3]. К сожалению, эти интересные оригинальные решения не обладали необходимой универсальностью для того, чтобы воспользоваться ими для решения других аналогичных задач, например, заменив одну из биссектрис соответствующей высотой. Было понятно, что для решения таких задач нужен относительно простой универсальный метод. Такой метод был предложен в [4] и на нескольких примерах показана его эффективность. Приведенный в этой статье анализ треугольников, заданных радиусами вписанной и описанной окружностей, можно рассматривать как еще один пример успешного применения этого метода.

Известно, что для любого треугольника справедливо неравенство  $2r \leq R$ , где  $r$  и  $R$  — радиусы вписанной и описанной окружностей (равенство соответствует равнобедренному треугольнику). Кроме того, было доказано, что, если отрезки  $r$  и  $R$  связаны соотношением  $2r < R$ , то существуют два равнобедренных треугольника, у которых радиусы вписанных и описанных окружностей равны  $r$  и  $R$  [5]. В связи с этим исследованием возникают следующие вопросы:

- 1) Какие еще существуют треугольники с заданными значениями  $r$  и  $R$ ?
- 2) Можно ли эти треугольники построить с помощью циркуля и линейки?
- 3) Чем замечательны эти равнобедренные треугольники?
- 4) Как задать любой третий элемент этих треугольников?

Обозначим стороны треугольника  $ABC$  (рис. 1) через  $a$ ,  $b$  и  $c$ , а углы напротив этих сторон — через  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Стороны любого треугольника удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$a + b + c = 2p, \quad ab + bc + ac = p^2 + r^2 + 4rR, \quad abc = 4RS, \quad (1)$$

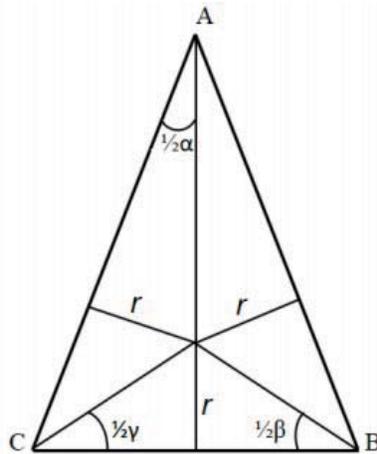


Рис. 1

где  $p$  — полупериметр,  $S = pr$  — площадь. Второе уравнение системы получено из формулы Герона

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c) \quad (2)$$

с использованием первого и третьего уравнений.

Каждое действительное решение (1)  $a = \bar{a}$ ,  $b = \bar{b}$ ,  $c = \bar{c}$  ( $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и  $\bar{c} > 0$ ) удовлетворяет неравенству треугольника:  $a + b > c$ ,  $b + c > a$  и  $a + c > b$ . Это следует из соотношения (2), так как, если два из трех сомножителей, например,  $\bar{p} - \bar{a} < 0$  и  $\bar{p} - \bar{b} < 0$ , то  $\bar{c} < 0$ .

Так как система (1) имеет вид формул Виета для кубического уравнения, то она эквивалентна одному уравнению третьей степени

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4rR)x - 4rRp = 0. \quad (3)$$

Обозначим корни этого уравнения через  $x_1$ ;  $x_2$ ;  $x_3$  и положим  $a = x_1$ ,  $b = x_2$ ,  $c = x_3$ . Очевидно, что задавая значения  $p$  так, чтобы уравнение (3) имело три действительных корня, можно получить все множество треугольников с заданными  $r$  и  $R$ . Среди них будут находиться два равнобедренных треугольника  $B_1C_1A_1$  и  $C_2A_2B_2$  с углами при вершинах  $\gamma_1(a_1 = b_1)$  и  $\alpha_2(b_2 = c_2)$ . Полупериметры и стороны этих треугольников удовлетворяют следующим соотношениям

$$\begin{aligned} p_1 &= r \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma_1(1 + \sin \frac{1}{2}\gamma_1)}{\sin \frac{1}{2}\gamma_1(1 - \sin \frac{1}{2}\gamma_1)}, \quad p_2 = r \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha_2(1 + \sin \frac{1}{2}\alpha_2)}{\sin \frac{1}{2}\alpha_2(1 - \sin \frac{1}{2}\alpha_2)}, \\ a_1 &= r \frac{1 + \sin \frac{1}{2}\gamma_1}{\sin \frac{1}{2}\gamma_1 \cos \frac{1}{2}\gamma_1}, \quad c_1 = r \frac{2(1 + \sin \frac{1}{2}\gamma_1)}{\cos \frac{1}{2}\gamma_1}, \\ a_2 &= r \frac{2(1 + \sin \frac{1}{2}\alpha_2)}{\cos \frac{1}{2}\alpha_2}, \quad c_2 = r \frac{1 + \sin \frac{1}{2}\alpha_2}{\sin \frac{1}{2}\alpha_2 \cos \frac{1}{2}\alpha_2}. \\ \sin \frac{1}{2}\gamma_1 &= (1 + \sqrt{1 - 2r/R})/2, \quad \sin \frac{1}{2}\alpha_1 = (1 - \sqrt{1 - 2r/R})/2. \end{aligned}$$

Можно показать, что  $p_1 \leq p_2$  (равенство, если  $2r = R$ ), и при  $r \rightarrow 0$   $p_1 \rightarrow 0$ , а  $p_2 \rightarrow 2R$ . Кроме того, основание треугольника  $B_1C_1A_1$  больше основания треугольника  $C_2A_2B_2$ , т.е.  $c_1 \geq a_2$  ( $c_1 = a_2$ , если  $2r = R$ ). Приведем еще несколько соотношений, справедливость которых нетрудно проверить:

- 1)  $b_1 \leq c_1$ ;  $a_2 \leq b_2$  (равенство, если  $2r = R$ );
- 2)  $a_2 \leq a_1$ ;  $b_1 \leq b_2$  (равенство, если  $2r = R$ );
- 3) если  $q = \sqrt{1 - 2r/R} = (\sqrt{17} - 3)/2$ , откуда  $r \simeq 0,34 \cdot R$ , то  $c_1 = c_2$ ;  
если  $0 < q < (\sqrt{17} - 3)/2$ , т.е.  $0,34R < r < R/2$ , то  $c_2 < c_1$ ;  
если  $(\sqrt{17} - 3)/2 < q < 1$ , т.е.  $\varepsilon R < r < 0,34R$ , ( $\varepsilon$  — малая величина), то  $c_2 < c_1$ .

Для того, чтобы лучше понять, как зависят корни уравнения (3) от значений  $p$ , рассмотрим в координатах  $(x, y)$  кубическую параболу

$$y(x) = x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4rR)x - 4rRp \quad (4)$$

Так как при  $p = p_1$  и  $p = p_2$  уравнение (3) имеет двойные корни  $x_1 = x_2$  и  $x_2 = x_3$ , то в точках  $(x_1, 0)$  и  $(x_3, 0)$  парабола (4) касается оси  $X$  и, следовательно,  $y'(x_1) |_{p=p_1} = y'(x_3) |_{p=p_2} = 0$ . Кроме того, очевидно, что в этих точках парабола имеет локальные экстремумы — или локальный минимум или локальный максимум. Чтобы выяснить, какой именно экстремум существует в каждой точке, определим в них знак  $y''(x)$ . Найдем  $y''(x_1) |_{p=p_1} = 2(3x_1 - 2p_1) = 2(b_1 - c_1) < 0$  и  $y''(x_3) |_{p=p_2} = 2(3x_3 - 2p_2) = 2(b_2 - a_2) > 0$ . Следовательно, при  $p = p_1$  в точке  $(x_1, 0)$  парабола (4) имеет локальный максимум, а при  $p = p_2$  в точке  $(x_3, 0)$  — локальный минимум.

Сформулируем в виде теоремы интересную особенность равнобедренных треугольников  $B_1C_1A_1$  и  $C_2A_2B_2$ .

**Теорема.** Среди всех треугольников с одинаковыми значениями радиусов вписанных и описанных окружностей, принадлежащие этому множеству два равнобедренных треугольника имеют минимальный —  $2p_1$  и максимальный —  $2p_2$  периметры.

**Доказательство.** Рассмотрим выражение (4) как функцию двух аргументов

$$f = y(p, x) \quad (5)$$

и определим изменение  $f$  при малых изменениях  $p$  и  $x$  в точках  $M_1(p_1, x_1)$  и  $M_2(p_2, x_3)$ . Так как (5) является многочленом от  $p$  и  $x$ , то  $f$  вместе с частными производными  $f'_p$  и  $f'_x$  будут непрерывными функциями в  $M_1$  и  $M_2$ . В точках  $M_1$  и  $M_2$  дадим  $p$  и  $x$  приращения  $\Delta p$  и  $\Delta x$ . В точке  $M_1$  получим

$$f(p_1 + \Delta p, x_1 + \Delta x) - f(p_1, x_1) = f'_p(p_1, x_1)\Delta p + f'_x(p_1, x_1)\Delta x + o(\rho),$$

где  $\rho = \sqrt{\Delta p^2 + \Delta x^2}$ ,  $o(\rho)$  — величина более высокого порядка малости, чем  $\rho$ . В точке  $M_2$

$$f(p_2 + \Delta p, x_3 + \Delta x) - f(p_2, x_3) = f'_p(p_2, x_3)\Delta p + f'_x(p_2, x_3)\Delta x + o(\rho).$$

Но  $f(p_1, x_1) = f(p_2, x_3) = 0$  и  $f'_x(p_1, x_1) = f'_x(p_2, x_3) = 0$ , поэтому в точке  $M_1$  имеем

$$f(p_1 + \Delta p, x_1 + \Delta x) = f'_p(p_1, x_1)\Delta p + o(\rho), \quad (6)$$

а в точке  $M_2$

$$f(p_2 + \Delta p, x_3 + \Delta x) = f'_p(p_2, x_3)\Delta p + o(\rho), \quad (7)$$

Ниже будет показано, что  $f'_p(p_1, x_1) > 0$  и  $f'_p(p_2, x_3) > 0$ . Поэтому при  $\Delta p = p - p_1 < 0$  из (6) следует, что локальный максимум параболы из точки  $(x_1, 0)$  в плоскости  $(x, y)$  переместится в область  $y < 0$ , и у уравнения (3) останется только один действительный корень. Следовательно, при  $p < p_1$  треугольники с заданными значениями  $r$  и  $R$  перестают существовать. Аналогично из (7) следует, что в точке  $M_2$  при  $\Delta p = p - p_2 > 0$ , локальный минимум параболы (4) при  $p = p_2 + \Delta p$  переместится в область  $y > 0$ , и у уравнения (3) останется только один действительный корень. Следовательно, при  $p > p_2$  треугольники с заданными значениями  $r$  и  $R$  перестают существовать. Если предположить, что при каком-то  $p < p_1$  или  $p > p_2$  у уравнения (3) снова появятся три действительных корня, то тогда при некотором  $p = p^*$  парабола (4) обязательно коснется оси  $X$ . В этом случае будет существовать третий равнобедренный треугольник с  $p = p^*$  и теми же значениями  $r$  и  $R$ , а это невозможно.

Покажем, что  $f'_p(p, x) > 0$  в точках  $M_1$  и  $M_2$ . Имеем  $f'_p(p, x) = -2x^2 + 2px - 4rR$ . Так как  $x_1 = a_1 = b_1$  в точке  $M_1(p_1, x_1)$ , то

$$f'_p(p_1, x_1) = x_1(2p_1 - 2x_1) - 4rR = a_1(a_1 + b_1 + c_1 - 2a_1) - 4rR = a_1c_1 - 4rR.$$

Но,

$$a_1c_1 = \frac{1}{b_1}(a_1b_1c_1) = \frac{1}{b_1} \cdot 4S_1R = \frac{1}{b_1}4p_1rR,$$

следовательно,

$$f'_p(p_1, x_1) = \frac{2rR}{b_1}(2p_1 - 2b_1) = \frac{2rR}{b_1}(a_1 + b_1 + c_1 - 2b_1) = \frac{2rRc_1}{b_1}.$$

Аналогично в точке  $M_2(p_2, x_3)$  имеем

$$f'_p(p_2, x_3) = \frac{2rRa_2}{b_2}.$$

На рис. 2 представлены графические изображения параболы (4) при некоторых значениях  $p$ : кривая 1 соответствует  $p < p_1$ , кривая 2 — значению  $p = p_1$ , кривая 3 — случаю  $p_1 < p < p_2$ , кривая 4 — значению  $p = p_2$  и кривая 5 — случаю  $p > p_2$  ( $r = 0,25$ ,  $R = 1$ ). Видно, что при  $p < p_1$  и  $p > p_2$  не существуют треугольники с заданными значениями  $r$  и  $R$ . Заметим, что так как  $S = pr$ , то эта теорема справедлива и для соответствующих площадей.

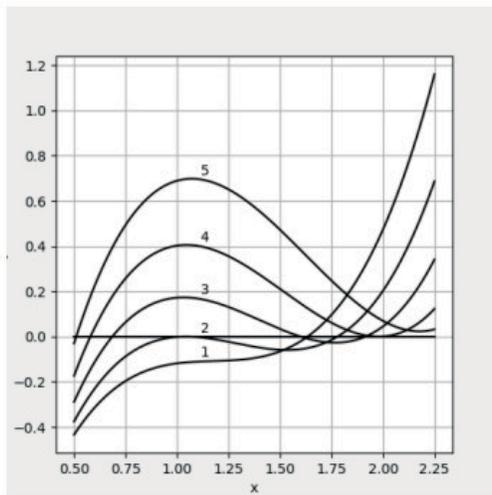


Рис. 2

В дополнение приведем следующий результат: если  $p = \bar{p} = 3\sqrt{2rR - r^2}$ , то точка перегиба ( $y''(\bar{x}) = 0$ ) параболы (4) находится на оси  $X$  и, следовательно,  $\bar{x} = x_2 = 2/3\bar{p}$  будет корнем уравнения (3). Остальные два корня имеют следующий вид

$$x_1 = \frac{2}{3}\bar{p} - \sqrt{2rR - 4r^2}, \quad x_3 = \frac{2}{3}\bar{p} + \sqrt{2rR - 4r^2}.$$

Если  $2r = R$ , то парабола (4) примет вид  $y(x) = (x - \bar{x})^3$  и все три корня уравнения (3) будут равны между собой:  $x_1 = x_2 = x_3 = \bar{x}$ , а интервал изменения  $p$  сократится до одного значения  $p = \bar{p} = 3\sqrt{3}$ .

Для ответа на вопрос, можно ли построить рассматриваемые треугольники с помощью циркуля и линейки, воспользуемся следующей теоремой (см. [6]):

**Теорема.** Если кубическое уравнение с рациональными коэффициентами не имеет рациональных корней, то ни один из его корней не может быть построен с помощью циркуля и линейки, исходя из рационального поля  $F_0$ .

Обратимся к уравнению (3) и докажем, что треугольники заданные значениями  $r$ ,  $R$  и  $p$  не могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Для этого достаточно рассмотреть один типичный вариант. Так как  $p_1 \rightarrow 0$ , а  $p_2 \rightarrow 2R$  при  $r \rightarrow 0$ , то, положив  $R = 1$  и  $r = 1/k$ , где  $k$  — целое простое число, всегда можно выбрать такое  $k$ , чтобы  $p = 1$  находилось в интервале  $[p_1, p_2]$ . Введем обозначение  $z = kx$  и представим уравнение (3) в виде

$$z^3 - 2kz^2 + (k^2 + 4k + 1)z - 4k^2 = 0 \tag{5}$$

Предположим, что (5) имеет рациональный корень  $z = u/v$ , где  $u$  и  $v$  — целые числа без общих множителей. Подставив этот корень в (5), получим

$$u^3 - v[2ku^2 - (k^2 + 4k + 1)uv + 4k^2v^2] = 0$$

Так как  $u$  и  $v$  не имеют общих множителей, то  $v = 1$ . Поэтому рациональные корни уравнения (5) должны быть целыми числами и, следовательно, находятся среди делителей свободного члена. При подстановке их в уравнение (5) получаются многочлены от  $k$

$$M(k) = a_0k^n + a_1k^{n-1} + \dots + a_{n-1}k + a_n \quad (a_0, n \neq 0)$$

где  $a_i$  — целые числа. Очевидно, что всегда можно указать такое  $k$ , для которого выполняется неравенство

$$|a_0k| > |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n|$$

Поэтому при любом  $n$  имеем  $M(k) \neq 0$ . Следовательно, делители свободного члена уравнения (5) не являются его корнями. Поэтому стороны треугольника, заданного элементами  $r$ ,  $R$  и  $p$ , не могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Но существуют по крайней мере три треугольника, допускающие такое построение — два равнобедренных с  $p = p_1$  и  $p = p_2$  и треугольник с  $p = 3\sqrt{2rR - r^2}$  (одна из его сторон  $b = 2/3p$ ). Кроме того, допускают построение треугольники, у которых третьим элементом является сторона или радиус вневписанной окружности (см. [7]).

Прежде чем приступить к определению любого третьего элемента треугольника с заданными  $r$  и  $R$ , сделаем следующее замечание. Если при изменении  $p$  от  $p = p_1$  до  $p = p_2$  этот элемент — обозначим его через  $\tau$  — монотонно увеличивается (или уменьшается), то его значения находятся между  $\tau(p_1)$  и  $\tau(p_2)$ . Но, если изменение  $\tau$  происходит немонотонно, то для установления точных интервалов изменения  $\tau$  необходимо определить его локальные минимальные и максимальные значения.

Из уравнения (3) найдем стороны рассматриваемых треугольников в виде функциональных зависимостей от  $p$  (в [4] для этой цели использовался подходящий угол) для некоторых значений  $r$  из интервала  $\varepsilon < r < 1/2$  ( $R = 1$ ).

Графики этих зависимостей приведены на рис. 3, 4, 5. Видно, что  $a(p)$  (рис. 3) монотонно убывает от  $a = a_1$  до  $a = a_2$ , а  $b(p)$  (рис. 4) монотонно возрастает от  $b = b_1$  до  $b = b_2$  независимо от значений  $r$ . Иначе изменяется  $c(p)$  (рис. 5).

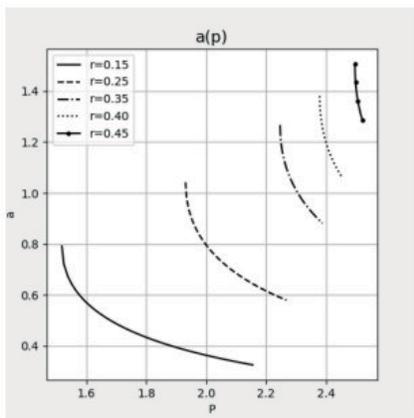


Рис. 3

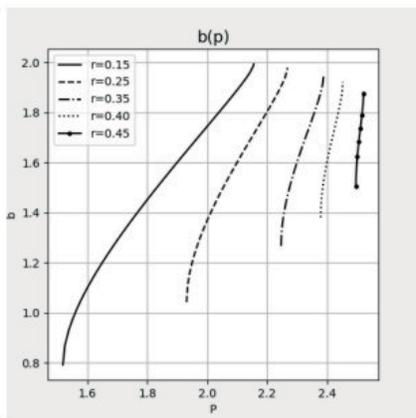


Рис. 4

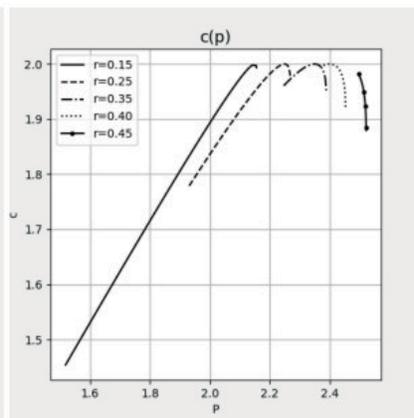


Рис. 5

Если  $\gamma_1$  принимает значения из интервала  $[\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ , что соответствует  $r$  из промежутка  $\sqrt{2} - 1 \leq r \leq \frac{1}{2}$ , то  $c(p)$  монотонно убывает от  $c = c_1$  до  $c = c_2$  (при  $r = \sqrt{2} - 1$ ,  $c_1 = c_{max} = 2$ ). Если  $\gamma_1$  принимает значения из интервала  $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$ , что соответствует  $r$  из промежутка  $\varepsilon < r < \sqrt{2} - 1$ , то  $c(p)$  между  $c = c_1$  и  $c = c_2$  принимает максимальное значение  $c_{max}(p) = 2$ .

Отсюда следует, что, если взять три отрезка  $s_1$ ,  $s_2$  и  $s_3$ , удовлетворяющие неравенствам  $2s_1 \leq s_2$  и  $a_2 \leq s_3 \leq a_1$  ( $b_1 \leq s_3 \leq b_2$ ), то существует единственный треугольник с  $r = s_1$ ,  $R = s_2$ , и  $a = s_3$  ( $b = s_3$ ). Но если в качестве третьего элемента рассмотреть сторону  $c$ , то в зависимости от соотношений между  $s_1$ ,  $s_2$  и  $s_3$  могут существовать один или два треугольника с заданными  $r$ ,  $R$  и  $c$ . Приведем значения сторон равнобедренных треугольников  $B_1C_1A_1$  и  $C_2A_2B_2$  при  $r \rightarrow 0$ :

- 1)  $a_1 = 2\sqrt{rR}(1 + \frac{1}{8}r/R)$ ,  $b_1 = 2\sqrt{rR}(1 + \frac{1}{8}r/R)$ ,  $c_1 = 4\sqrt{rR}(1 - \frac{3}{8}r/R)$ ;
- 2)  $a_2 = 2r(1 + \frac{1}{2}r/R)$ ,  $b_2 = 2R[1 - \frac{1}{8}(r/R)^2]$ ,  $c_2 = 2R[1 - \frac{1}{8}(r/R)^2]$ .

Имея зависимости  $a(p)$ ,  $b(p)$  и  $c(p)$ , можно найти зависимость от  $p$  любого элемента треугольника. Рассмотрим радиусы вневписанных окружностей  $r_a$ ,  $r_b$  и  $r_c$ , значения которых определяются из соотношений

$$r_a = \frac{rp}{p-a}, \quad r_b = \frac{rp}{p-b}, \quad r_c = \frac{rp}{p-c}.$$

На рис. 6, 7, 8 приведены зависимости  $r_a$ ,  $r_b$  и  $r_c$  от значений  $p$ . Видно, что при увеличении  $p$  от  $p = p_1$  до  $p = p_2$ ,  $r_a(p)$  и  $r_c(p)$  монотонно уменьшаются от  $r_a = r_a(p_1)$  до  $r_a = r_a(p_2)$  (от  $r_c = r_c(p_1)$  до  $r_c = r_c(p_2)$ ), тогда как  $r_b$  монотонно увеличивается от  $r_b = r_b(p_1)$  до  $r_b = r_b(p_2)$ . Приведем значения этих радиусов при  $r \rightarrow 0$ :

- 1)  $r_a(p_1) = 2r(1 + \frac{1}{4}r/R)$ ,  $r_b(p_1) = 2r(1 + \frac{1}{4}r/R)$ ,  $r_c(p_1) = 4R(1 - \frac{3}{4}r/R)$ ;
- 2)  $r_a(p_2) = r(1 + r/R)$ ,  $r_b(p_2) = 2R[1 - \frac{1}{4}(r/R)^2]$ ,  $r_c(p_2) = 2R[1 - \frac{1}{4}(r/R)^2]$ .

Отсюда следует, что, если даны три отрезка  $s_1$ ,  $s_2$  и  $s_3$ , причем  $2s_1 \leq s_2$ , и  $r_a(p_2) \leq s_3 \leq r_a(p_1)$ , то существует единственный треугольник с  $r = s_1$ ,  $R = s_2$  и  $r_a = s_3$ . Аналогичные выводы можно сделать, рассматривая в качестве третьего элемента  $r_b$  и  $r_c$ .

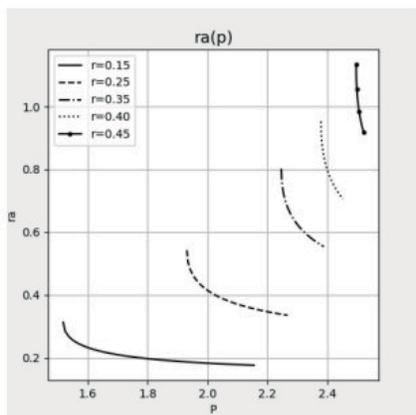


Рис. 6

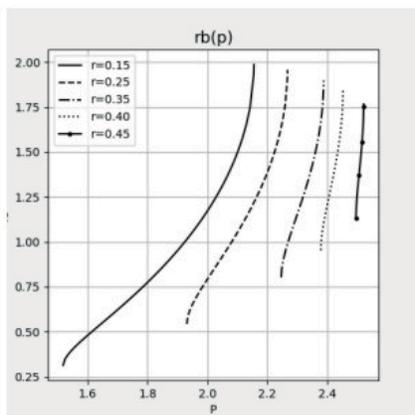


Рис. 7

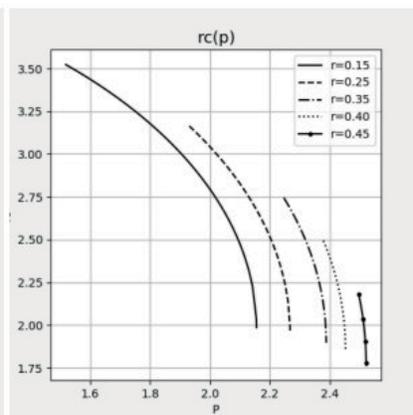


Рис. 8

Автор выражает благодарность канд. физ.-мат. наук Л.В. Терентьевой за помощь в оформлении работы и подготовку графического материала.

### Литература

1. Mironescu P., Panaitopol L. The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths // Amer. Math. Monthly. - 101. - 1994. - p. 58-60.
2. Жуков А., Акулич И. Однозначно ли определяется треугольник? // Квант. - 2003. - № 1. - с. 29-31.
3. Osinkin S. On the existence of a triangle with prescribed bisector lengths // Forum Geometricorum. - Vol.16. - 2016. - p. 399-405.
4. Osinkin S. The method and examples of solving problems analogous to the “problem of three bisectors” // Arxiv: 1910.01855 v1[math.H0].
5. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики: Часть 2. Геометрия (планиметрия). - М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1952.
6. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика?. - М.: МЦНМО, 2004.
7. Голубев В.И., Ерганжиева Л.Н., Мосевич К.К. Построение треугольника. 4-е изд. - М.: Лаборатория знаний, 2015.

Осинкин Сергей Филиппович,  
кандидат физ.-мат. наук,  
г. Пушкино Московской области.

E-mail: osinkin1947@yandex.ru.

# Математика и новые информационные технологии. Окончание

*Коллектив НИУ “МЭИ”*

В статье приведены примеры использования численных методов пакетов Mathcad и Python для инновационного решения некоторых математических задач. Предложены новые схемы построения окружностей Мальфатти и рисования графиков. Дано новое определение окружности через оператор остатка от деления. Вводится понятие “феномен княжны Марьи”. Обсуждаются проблемы STEM-образования с отечественной локализацией в виде инженерных расчетов на компьютере.

Окончание статьи. Первая часть напечатана в предыдущем номере журнала.

### 3. Парабола и десятое определение окружности

Если можно было бы спросить у княжны Марьи, что такое окружность, то она скорее всего дала бы всем известный правильный ответ: окружность — это геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от заданной точки (центр окружности). В справочниках — бумажных и интернетовских — можно найти восемь других определений окружности. Мы ниже постараемся дать еще одно, десятое, определение. Насколько оно оправдано — судить читателям. А вот на вопрос, что такое парабола, правильный ответ не даст не только княжна Марья, но и подавляющее число школьников, студентов, аспирантов и даже профессоров. Все будут вспоминать квадратное уравнение, а не геометрическое место точек. Современные компьютерные средства позволяют опять же очень просто и красиво решить задачу о рисовании кривых по их не алгебраическому, а геометрическому определению. На рисунке 15 показан универсальный способ построения практически любых линий на плоскости — прямых и кривых, замкнутых и разомкнутых, однозначных и неоднозначных, одиночных и в семействе... К описанию этого способа подходит еще одно историческое сравнение из области машиностроения. Раньше, чтобы изготовить какую-либо деталь, нужно было сначала отливать заготовку, а потом обрабатывать её на станках — токарных, сверлильных, фрезерных, строгальных и т.д. Сейчас многие такие детали изготавливаются на 3D-принтерах, которые «тупо» сканируют объем будущей детали и капают материалом детали (пластик, расплавленный металл и др.) в «нужный момент в нужной точке»<sup>1</sup>. Раньше, чтобы построить кривую по ее описанию, а не по формуле, приходилось искать ее аналитическое выражение и работать с ним, что само по себе являлось сложной, а в ряде случаев неразрешимой задачей. Сейчас, в эру быстродействующих компьютеров с дисплеями и принтерами с высоким разрешением, можно также «тупо» сканировать область графика и «капать» краской на экране дисплея или на бумаге принтера в том месте, где должна быть точка на графике [11]. На рисунке 15 показано, как строится парабола и её директриса методом 2D-печати в прямоугольной области, ограниченной заданными значениями  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$  и  $y_2$ . Для этого в расчет вводится вспомогательная функция «примерно равно» (оператор «точно равно» тут по понятным причинам не подходит), а в двойном цикле `for` с параметрами  $x$  и  $y$  формируются два вектора  $X$  и  $Y$ , хранящие значения координат точек будущей параболы и её директрисы. Такое построение параболы, еще раз подчеркиваем, базируется не на её квадратичной аналитической формуле, а на базовом определении параболы как геометрического места точек, равноудаленных от фокуса параболы и её директрисы — заданной прямой линии. Расстояния от текущей точки параболы с координатами  $x$  и  $y$  до её фокуса с координатами  $x_f$  и  $y_f$  и до директрисы с её коэффициентами  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a$  заносятся в переменные  $L_1$  и  $L_2$ , если (оператор `if`) эти расстояния примерно равны.

<sup>1</sup> «Играть на любом музыкальном инструменте очень легко: все, что для этого требуется, — нажимать в нужное время на нужную клавишу. А играть он будет сам». Это шутовское высказывание приписывают Иоганну Себастьяну Баху, который, конечно, имел в виду клавишные музыкальные инструменты. К скрипке, например, это применить невозможно.

```

≈(a, b) := |a - b| < 0.01 m          ORIGIN = 0
x_f := 2.5 m    y_f := 2.5 m    n := 999
a_x · x + a_y · y + a = 0 m  a_x := 1  a_y := 0.5  a := -5 m
x_1 := -1 m    y_1 := -1 m    x_2 := 5 m    y_2 := 5 m

[ X ] := i ← 0
[ Y ]
for x ∈ x_1, x_1 + (x_2 - x_1) / n .. x_2
  for y ∈ y_1, y_1 + (y_2 - y_1) / n .. y_2
    L_1 ← √((x - x_f)² + (y - y_f)²)
    L_2 ← |a_x · x + a_y · y + a| / √(a_x² + a_y²)
    if ≈(L_1, L_2) ∨ ≈((a_x · x + a_y · y + a), 0 m)
      X_i ← x
      Y_i ← y
      i ← i + 1
  [ X ]
  [ Y ]

```

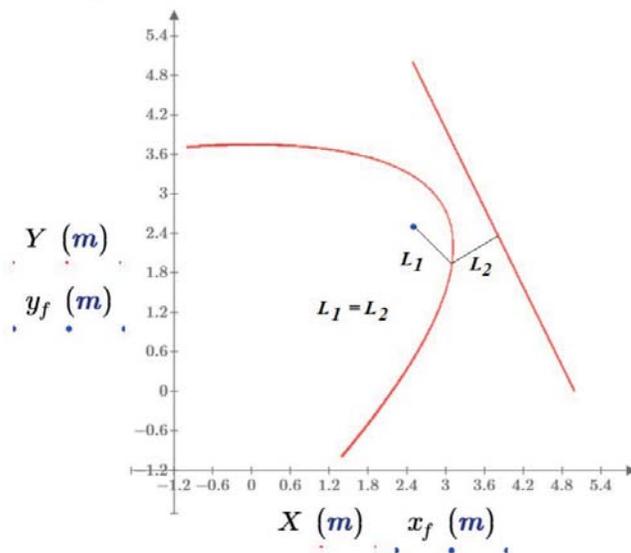


Рис. 15. Построение параболы и ее директрисы сканированием плоской области (примечание: на графике тонкие прямые линии и буквенные обозначения дорисованы в ручном режиме)

Мы могли бы по уравнению прямой с тремя коэффициентами найти уравнение не вертикальной прямой с двумя коэффициентами и построить директрису традиционным способом. Но эта директриса у нас строится на рис. 15 вместе с параболой — сканированием прямоугольной области. Для этого в программном блоке на рис. 15 в операторе if добавлен оператор с символом  $\vee$  — логическое

ИЛИ: в векторы  $X$  и  $Y$  заносятся точки и параболы, и прямой<sup>2</sup>. В расчете можно менять значение переменной  $n$  и понятие того, что такое «примерно равно» (окончание оператора, задающего функцию с именем  $\approx$ ) и добиваться некоего компромисса между качеством графика и временем его построения. Из точек, формирующих на рис. 15 параболу, можно изъять пять точек, по которым через решение системы пяти линейных уравнений с пятью неизвестными, возможно рассчитать коэффициенты уравнения плоской кривой второго порядка и через анализ инварианта убедиться, что это парабола, а не гипербола или эллипс. Все это опять же довольно просто сделать на компьютере с математической программой [12].

Похожим образом можно рассмотреть и другие кривые второго порядка. Так, в определении эллипса фигурирует не равенство (как у параболы), а сумма. Эллипс — это геометрическое место точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух заданных точек (фокусы эллипса) постоянна. В определении же гиперболы фигурирует разность. Гипербола — это геометрическое место точек на плоскости, для которых абсолютное значение разности расстояний до двух выделенных точек (называемых также фокусами) постоянно. Если же сумму или разность в этих определениях заменить на произведение, то мы получим определение так называемых овалов Кассини ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Овал\\_Кассини](https://ru.wikipedia.org/wiki/Овал_Кассини)) — см. рис. 16 с семейством этих овалов, построенных уже нами описанным методом сканирования на плоскости.

Мы перечислили три арифметических действия — сложение, вычитание и умножение, — задающие две кривые второго порядка: эллипс, гиперболу, и одну кривую четвертого порядка — овал Кассини. Четвертое арифметическое действие — деление — генерирует окружность (частный случай эллипса), так называемые *окружности Аполлония* ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Окружность\\_Аполлония](https://ru.wikipedia.org/wiki/Окружность_Аполлония)). На рисунке 17 эти окружности также строятся через сканирование, но не через оператор деления, а с использованием функции `mod` — остаток от деления. За счет этого удалось построить бесконечное семейство окружностей и дуг окружностей, включая и предельный случай — прямую линию.

```

≈(a, b) := |a - b| < 0.01 m2    ORIGIN = 0
xf1 := 2 m      yf1 := 2 m      xf2 := 5 m      yf2 := 5 m
x1 := -1 m     y1 := -1 m     x2 := 7 m      y2 := 7 m     n := 1999
L1 ← √((x - xf1)2 + (y - yf1)2)
L2 ← √((x - xf2)2 + (y - yf2)2)
if ≈(L1 • L2, 4.4 m2) ∨ ≈(L1 • L2, 7 m2) ∨ ≈(L1 • L2, 11 m2)

```

<sup>2</sup>В этом предложении конфликтуют математика и русский язык. Математика требует, чтобы было написано «заносятся точки параболы или прямой» - см. оператор ИЛИ ( $V$ ) на рис. 15: очередная точка принадлежит параболе или прямой. Мы же написали «и параболы, и прямой». А вот еще одно типичное несоответствие русского языка и математики, точнее булевой алгебры. В вопросе «Ты сегодня вечером идешь в театр или в кино?» заключен не оператор ИЛИ ( $V$ ), а оператор исключающее ИЛИ: нельзя одновременно находиться в двух местах. Если быть предельно скрупулёзным, то в программе на рис. 12 нужно использовать не оператор ИЛИ ( $V$ ), а оператор исключающее ИЛИ: у нас нет точек, которые принадлежат и параболы, и прямой.

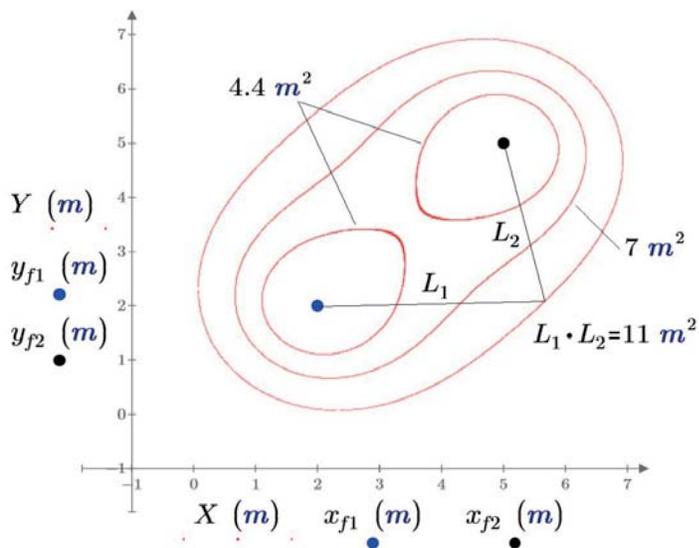
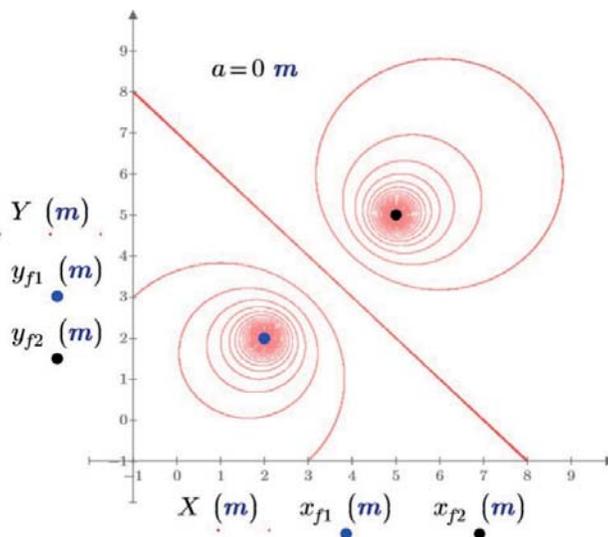


Рис. 16. Построение овалов Кассини сканированием области (примечание: на графике тонкие прямые линии-указатели и буквенные обозначения дорисованы в ручном режиме)

$$\begin{aligned} \approx(a, b) &:= |a - b| < 0.01 \text{ m} & n &:= 3999 \\ x_{f1} &:= 2 \text{ m} & y_{f1} &:= 2 \text{ m} & x_{f2} &:= 5 \text{ m} & y_{f2} &:= 5 \text{ m} \\ x_1 &:= -1 \text{ m} & y_1 &:= -1 \text{ m} & x_2 &:= 8.9 \text{ m} & y_2 &:= 8.9 \text{ m} \\ L_1 &\leftarrow \sqrt{(x - x_{f1})^2 + (y - y_{f1})^2} \\ L_2 &\leftarrow \sqrt{(x - x_{f2})^2 + (y - y_{f2})^2} \\ \text{if } \approx(\text{mod}(L_1, L_2), a) \vee \approx(\text{mod}(L_2, L_1), a) \end{aligned}$$



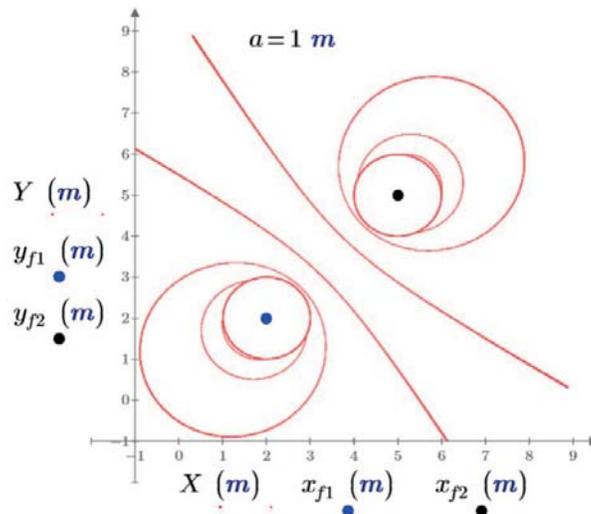


Рис. 17. Построение семейства окружностей Аполлония

Окружности, показанные на рис. 17, построены с опорой на десятое определение окружности, в котором фигурирует остаток от деления.

#### 4. Треугольники, покрывающие двумерную область

Треугольники широко используются и для покрытия двумерных областей, например, когда имеется площадка произвольной формы и её требуется замостить треугольными плитками различных размеров. Такая задача называется *задачей триангуляции* и для её решения в основном используется алгоритм [13], разработанный отечественным математиком Б.Н. Делоне в 1934 году. Задачи триангуляции возникают, например, в компьютерной графике или при проведении расчетов методом конечных элементов.

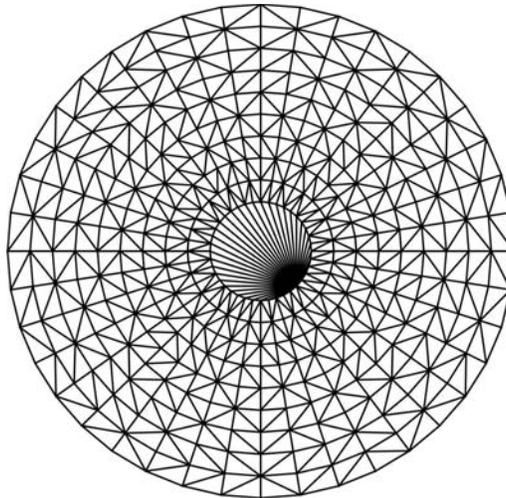
В экосистеме Python триангуляцию можно провести средствами библиотеки `scipy.spatial`, мы же воспользуемся библиотекой научной визуализации `matplotlib`. В простейшем случае необходимо подготовить массивы точек  $x$ ,  $y$  вершин треугольников, сама триангуляция осуществляется в одну строку:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.tri as mtri
#...
tri = mtri.Triangulation(x, y) # триангуляция
```

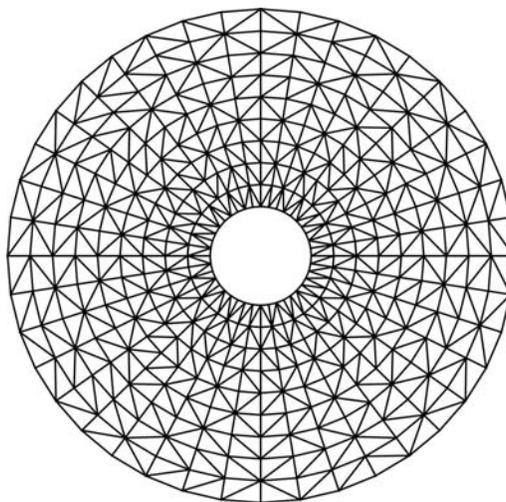
Здесь нам пришлось импортировать NumPy — численный Python для работы с массивами, а также matplotlib для рисования и триангуляция. Мы попытаемся покрыть треугольниками кольцевую область и сразу нарисовать её:

```
triangles = tri.triangles # извлекаем треугольники
plt.figure(figsize=(6,6)) # создаем объект рисунка
plt.triplot(tri, 'k-', lw=1) # рисуем триангуляцию
plt.axis('off'); # отключаем отображение оцифровки осей координат
plt.show() # отображаем рисунок
```

На рис. 18 а) приводится триангуляция кольцевой области.



а) артефакты во внутренней области;



б) устранение артефактов

Рис. 18. Триангуляция кольцевой области

Средства триангуляции ничего не знают о том, что внутренность кольца не принадлежит области, поэтому удалим все треугольники, лежащие во внутреннем круге:

```
# Вычисляем центры треугольников, используя средства NumPy
xm = x[triangles].mean(axis=1)
ym = y[triangles].mean(axis=1)
# Получаем треугольники, лежащие внутри окружности радиуса rmin
mask = np.sqrt(xm**2 + ym**2) < rmin
# Исключаем эти треугольники из рассмотрения
tri.set_mask(mask)
```

Результат доработки триангуляции представлен на рис. 18 б). Можно продолжить пример, заменив внутреннюю окружность на квадрат со стороной  $2 \cdot r_{min}$ , заодно потренировавшись в индексации массивов NumPy:

```
# выделяем квадрат
mask = ((xm < rmin) & (ym < rmin) & (xm > -rmin) & (ym > -rmin))
# удаляем квадрат из области
tri.set_mask(mask)
```

```

# вычисляем точки новой триангуляции
rst = ~((x<rmin) & (y<rmin) & (x>-rmin) & (y>-rmin))
# оставляем только точки, входящие в новую область
x, y = x[rst], y[rst]
# новая триангуляция
tri = mtri.Triangulation(x, y)

```

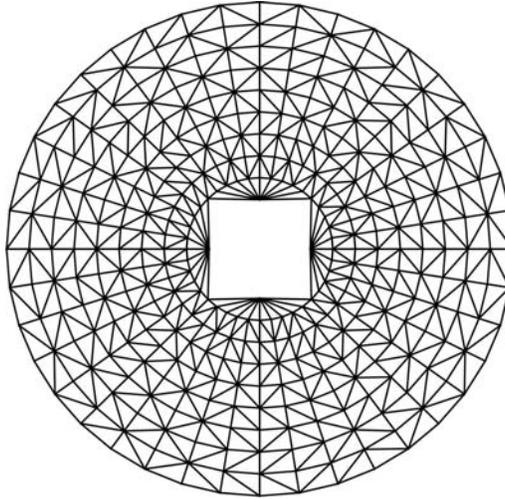


Рис. 19. Область с вырезанным квадратом в середине

## 5. Использование триангуляции для рисования поверхностей

В свою очередь триангуляцию достаточно удобно использовать для рисования поверхностей в трехмерном пространстве. Действительно, методу рисования поверхности достаточно передать последовательности значений по осям координат:

```

# импортируем средства трехмерного рисования
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
z = x**2+y**2 + 0.5 # создаем массив точек по третьей координате
fig = plt.figure(figsize=(6,6))
# создаем объект трехмерного рисунка
ax = Axes3D(fig)
# создаем отрезок прямой, «прокалывающей» поверхность
m, a = 100, 0.7
t = np.linspace(-a*rmax, a*rmax, m)
ax.plot(t, t, t+1, 'k-', lw=1)
# рисуем поверхность, используя триангуляцию
ax.plot_trisurf(x, y, z, triangles=tri.triangles,
               cmap='binary', alpha=0.5)
plt.show()

```

Результатом выполнения данного примера является полупрозрачная поверхность, проколота отрезком прямой (рис. 20).

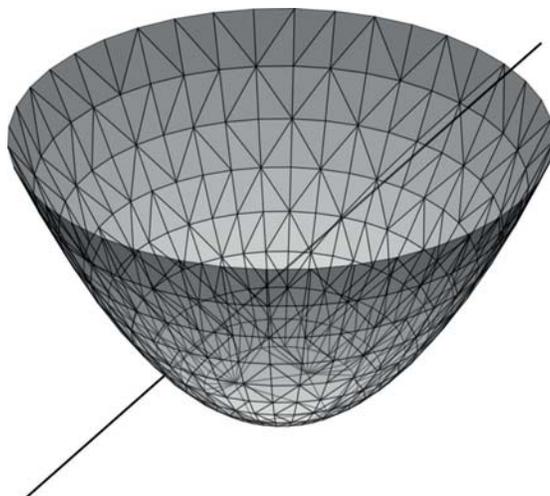


Рис. 20. Поверхность в трехмерном пространстве

Поверхность нарисована с помощью функции `plot_trisurf`, которой предаются массивы по осям координат, треугольники триангуляции передаются в именованном параметре `triangles`. Палитра `binary` передается с помощью именованного параметра `color`, а полупрозрачность поверхности задается с помощью `alpha`.

Вычислим в символьном виде координаты точек пересечения прямой и поверхности:

```

# импортируем символьные переменные
from sympy.abc import x, y, z, t
# импортируем средства решения уравнений
from sympy import solve
# задаем систему из четырех уравнений
eq1 = x**2 + y**2 + 0.5 - z # поверхность
# параметрическое задание прямой, как это сделано при рисовании
eq2 = x - t
eq3 = y - x
eq4 = z - x - 1
# решаем систему уравнений
sol= solve([eq1, eq2, eq3, eq4], [x, y, z, t])
# выдаем на печать результат
print(sol)

```

Как видно из листинга, в символьных вычислениях на Python нет ничего сложного, кроме того, они хорошо интегрированы с другими библиотеками, включая NumPy и matplotlib. В результате мы получили, как и ожидали, два решения:  $x = -0.30901$ ,  $y = -0.30901$ ,  $z = 0.69098$ ,  $t = -0.30901$  и  $x = 0.80902$ ,  $y = 0.80902$ ,  $z = 1.80902$ ,  $t = 0.80902$ .

Приведем еще примеры, как триангуляция может быть использована и для рисования поверхностей. Лента Мёбиуса [14] представляет собой одностороннюю поверхность, получить ее можно взяв полоску бумаги, повернув одну из сторон на  $180^\circ$  и склеив противоположные концы полоски. Параметрическое описание ленты Мёбиуса можно представить следующим набором выражений:

$$x(u, v) = \left( \frac{1 + \frac{v}{2} \cos u}{2} \right) \cos u,$$

$$y(u, v) = \left( \frac{1 + \frac{v}{2} \cos u}{2} \right) \sin u,$$

$$z(u, v) = \frac{v \sin u}{2},$$

где  $0 \leq u < 2\pi$ ,  $-1 \leq v < 1$ . Для рисования пришлось создать прямоугольник на плоскости  $u, v$ , провести триангуляцию, вычисления по приведенным выше формулам, отображение поверхности осуществлялось с помощью рассмотренной выше функции `plot_trisurf` (рис. 21).

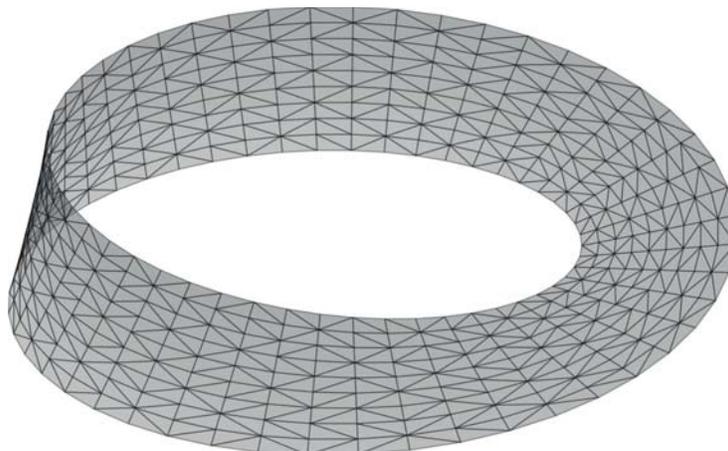


Рис. 21. Лента Мёбиуса

Ф. Клейн построил объект, который представляет собой не только одностороннюю, но и замкнутую поверхность, и при этом не имеющую краев. Эта поверхность называется бутылкой Клейна [15], её параметрическое описание приводится ниже:

$$x(u, v, r) = \left( r + \frac{\cos u}{2} \cdot \sin v - \frac{\sin u}{2} \cdot \sin 2v \right) \cdot \cos u,$$

$$y(u, v, r) = \left( r + \frac{\cos u}{2} \cdot \sin v - \frac{\sin u}{2} \cdot \sin 2v \right) \cdot \sin u,$$

$$z(u, v) = \frac{\sin u}{2} \cdot \sin v + \frac{\cos u}{2} \cdot \sin 2v.$$

Изображение бутылки Клейна приведено на рис. 22.

**Выводы:** Современные численные компьютерные средства позволяют по-новому решать математические задачи методами, понимание которых доступно многим. Современные численные средства, компьютеры и программы позволяют взглянуть по-новому на старые задачи, а анимации наглядно показывают, как машина «думает» за вас. Такие математические пакеты, как Mathcad и экосистема Python, открывают дорогу школьникам и студентам в мир занимательной математики, позволяя решать сложные задания, строить громоздкие графики, столь не любимые многими, не отрываясь от любимого компьютера. Хочется верить, что решение математических задач способно стать таким же увлекательным делом, как «зависание» в социальных сетях или играх.

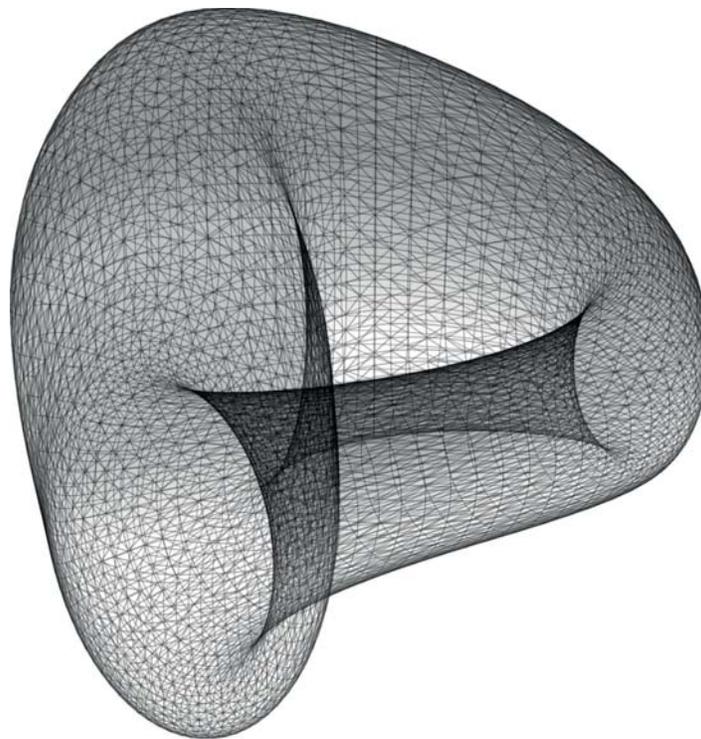


Рис. 22. Бутылка Клейна

### Литература

11. Очков В.Ф., Фалькони А.Д. Семь вычислительных кривых или Велосипед Аполлония // Cloud of Science. - 2016. - Т. 3. - № 3. - С. 397—418. URL: <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/7-curves.pdf>
12. Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Иванов Д.А., Писачич К. Движения планет: расчет и визуализация в среде Mathcad или Часы Кеплера // Cloud of Science. - Т. 2. - № 2. - 2015. - С. 177—215. URL: <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Planets.pdf>
13. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и её применение. - Томск: Изд-во Том. Ун-та, 2002. - 128 с.
14. Лента Мёбиуса. [Электронный ресурс]. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Лента\\_Мёбиуса](https://ru.wikipedia.org/wiki/Лента_Мёбиуса)
15. Бутылка Клейна. [Электронный ресурс]. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Бутылка\\_Клейна](https://ru.wikipedia.org/wiki/Бутылка_Клейна)

Коллектив НИУ «МЭИ»:

Очков Валерий Федорович, дтн, профессор,  
профессор НИУ «МЭИ» (OchkovVF@mpei.ru)

Тихонов Антон Иванович, ктн, профессор,  
снс НИУ «МЭИ» (TikhonovAI@mpei.ru)

Леонова Дарья Сергеевна, студент  
НИУ "МЭИ" (LeonovaDS@mpei.ru)

Шубина Мария Александровна, студент  
НИУ "МЭИ" (ShubinaMA@mpei.ru)

Кулишов Александр Романович, студент  
НИУ "МЭИ" (KulishovAR@mpei.ru)

Зайцев Марк Дмитриевич, студент  
НИУ "МЭИ" (ZaitsevMD@mpei.ru)

Островский Михаил Андреевич, студент  
НИУ "МЭИ" (OstrovskyMA@mpei.ru)

Лымарев Дмитрий Андреевич, студент  
НИУ "МЭИ" (LymarevDA@mpei.ru)

# Задачи о максимизации прибыли в различных экономических моделях

Л. И. Родина

Автором предлагаются оригинальные математические задачи на экстремум разного уровня сложности для студентов математических и экономических специальностей вузов в рамках курсов «Математический анализ», «Стохастический анализ», «Высшая математика». Некоторые задачи доступны школьникам старших классов, а наиболее сложные можно предложить студентам в качестве курсовых или дипломных работ (эти задачи выписаны в конце статьи). Публикация затрагивает вопросы изучения спроса на товары и формирования цен, при которых достигается максимальная прибыль от реализации продукции. Рассматриваются как детерминированные модели, так и модели, зависящие от случайных параметров. Если функция спроса является случайной величиной, то исследуется задача о максимизации математического ожидания прибыли. Показано, что во многих случаях увеличение цены товара выше определенного значения не ведет к увеличению дохода от продаж. Цель работы — показать, как математика помогает решать практические задачи, возникающие в различных отраслях народного хозяйства.

## Введение

Рассматриваются задачи на экстремум, связанные с изучением спроса на товары и определением цен, при которых достигается максимальная прибыль от реализации продукции. Отметим, что некоторые простейшие задачи о формировании цен на товары или услуги можно найти в учебных пособиях по экономике [1]–[4]. Здесь мы рассматриваем задачи, в которых величина спроса меняется во времени или зависит от случайных воздействий.

Напомним известные определения, необходимые для дальнейшей работы. *Спрос* характеризует желание и готовность потребителя приобрести определенное количество товара при некоторых заданных условиях. Величина спроса — максимальное количество экономического блага (товара), которое потребители желают и готовы купить при данном значении цены в определенный период времени (см, например, [1, с. 3]). Пусть  $x$  — цена единицы товара,  $Q(x)$  — величина спроса при данном значении  $x$ . Рассматривая  $Q(x)$  при различных значениях  $x \geq 0$ , получаем функцию спроса. Считается, что зависимость  $Q(x)$  должна удовлетворять закону спроса: *при повышении цены товара величина спроса сокращается, то есть существует отрицательная зависимость между ценой товара и величиной спроса*. Поэтому  $Q'(x) \leq 0$  при всех допустимых значениях  $x$ .

Во многих учебниках по математической экономике приводится следующая задача. Рассматривается линейная функция спроса

$$Q(x) = ax + b, \text{ где } a < 0, b > 0, x \in \left[0, -\frac{b}{a}\right]$$

(здесь и далее предполагаем, что  $Q(x) = 0$  при  $x > -b/a$ ). Нужно найти цену  $x$ , при которой доход от продажи товара  $D(x) = xQ(x)$  является максимальным. Несложно посчитать, что для квадратичной функции  $D(x) = (ax + b)x = ax^2 + bx$  максимальное значение достигается при  $x^* = -\frac{b}{2a}$  и равно  $D(x^*) = -\frac{b^2}{4a}$ . Обычно в литературе не делается предположений об ограниченности количества товара; далее мы рассмотрим задачу с учетом этих ограничений. Будут также решены задачи разного уровня сложности, моделирующие реальные ситуации, в которых функция спроса меняется с течением времени. Это может произойти, например, когда спрос на железнодорожные билеты увеличивается ближе к дате поездки или, наоборот, спрос на продукцию уменьшается при увеличении ее времени хранения. Особое внимание будет уделено задачам, в которых функция спроса зависит от случайных параметров.

### Задачи о максимизации прибыли от реализации продукции

#### Задача 1. Задача о максимизации дохода от продажи железнодорожных билетов.

Предположим, что продаются билеты на поезд на определенную дату и в поезде всего  $m$  мест. У пассажиров есть возможность купить билеты заранее, причем существует  $n$  промежутков времени, на которых спрос одинаковый (на практике обычно выделяют промежутки, на которых спрос приблизительно одинаковый). Например, такая ситуация встречается, когда ближе к дате поездки спрос на билеты повышается. Пусть  $x_i$  — цена билета,  $Q_i(x_i) = a_i x_i + b_i$  — функция спроса в  $i$ -м промежутке. Здесь  $a_i < 0$ ,  $b_i > 0$ ,  $x_i \in \left[0, -\frac{b_i}{a_i}\right]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Найдем общий доход от продажи билетов

$$D(x) = D(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (a_i x_i + b_i) x_i = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + b_i x_i.$$

Будем учитывать, что число проданных билетов не превосходит числа мест в поезде, то есть

$$Q_1(x_1) + \dots + Q_n(x_n) = a_1 x_1 + b_1 + \dots + a_n x_n + b_n \leq m. \quad (1)$$

**Задача** — какие нужно установить цены на билеты  $x_1, \dots, x_n$  в каждый промежуток времени, чтобы общая прибыль  $D(x_1, \dots, x_n)$  при учете ограничения (1) была максимальной?

**Решение.** Пусть сначала  $n = 1$ ; чтобы упростить обозначения, будем полагать  $x_1 = x$ ,  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ . Тогда  $D(x) = x(ax + b)$  при  $x \in \left[0, -\frac{b}{a}\right]$  и  $ax + b \leq m$ . Поэтому нужно найти наибольшее значение функции  $\tilde{D}(x) \doteq \min\{D(x), mx\}$ . Возможны два случая. Если  $b > 2m$ , то для достижения максимальной прибыли нужно продать все  $m$  билетов, в этом случае наибольшее значение функции  $\tilde{D}(x)$  достигается при  $x^* = \frac{m-b}{a}$  и равно  $\frac{m^2 - bm}{a}$ . Если  $b \leq 2m$ , то функция  $\tilde{D}(x)$  достигает наибольшего значения  $-\frac{b^2}{4a}$  в точке  $x^* = -\frac{b}{2a}$  (при этом выполнено неравенство  $ax^* + b \leq m$ , то есть могут быть проданы не все билеты на поезд) (см. рис. 1).

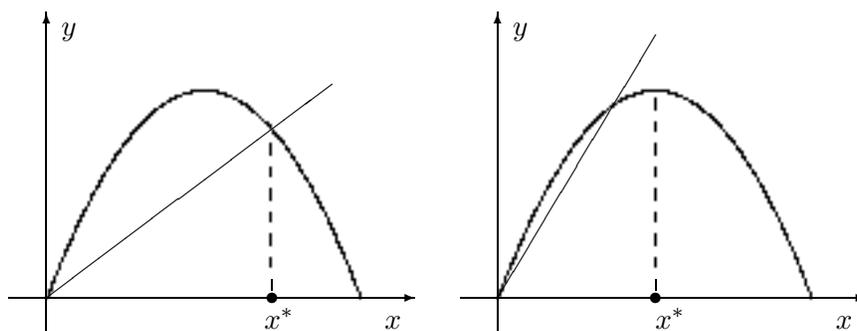


Рис. 1. Функции  $y = D(x)$  и  $y = mx$  при  $b > 2m$  (слева) и при  $b \leq 2m$  (справа). Наибольшее значение функции  $\tilde{D}(x)$  достигается в точке  $x^*$ .

Приведем решение задачи в случае  $n = 2$ . Здесь нужно найти наибольшее значение функции

$$D(x) = D(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

при условии

$$a_1x_1 + b_1 + a_2x_2 + b_2 \leq m. \quad (2)$$

Приравняем к нулю частные производные данной функции

$$\frac{\partial D(x)}{\partial x_1} = 2a_1x_1 + b_1 = 0, \quad \frac{\partial D(x)}{\partial x_2} = 2a_2x_2 + b_2 = 0$$

и найдем стационарную точку:  $x_1^* = -\frac{b_1}{2a_1}$ ,  $x_2^* = -\frac{b_2}{2a_2}$ . Сначала рассмотрим случай, когда координаты точки  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  удовлетворяют неравенству (2), то есть  $b_1 + b_2 \leq 2m$ . Применяя критерий Сильвестра, несложно показать, что в точке  $x^*$  функция  $D(x)$  достигает наибольшего значения

$$D(x^*) = -\frac{b_1^2}{4a_1} - \frac{b_2^2}{4a_2}.$$

Теперь пусть  $b_1 + b_2 > 2m$ . Тогда наибольшее значение функции  $D(x)$  достигается при

$$a_1x_1 + b_1 + a_2x_2 + b_2 = m.$$

Выражая отсюда  $x_2$  и подставляя в  $D(x_1, x_2)$ , получаем функцию одной переменной

$$d(x_1) \doteq a_1x_1^2 + \frac{(m - a_1x_1 - b_1 - b_2)^2}{a_2} + b_1x_1 + \frac{b_2}{a_2}(m - a_1x_1 - b_1 - b_2).$$

Стационарной точкой функции  $d(x_1)$  является

$$x_1^* = \frac{2a_1m - 2a_1b_1 - a_1b_2 - b_1a_2}{2a_1(a_1 + a_2)}.$$

Отметим, что  $d''(x_1) = 2a_1 + \frac{2a_1^2}{a_2} < 0$ , поэтому функция  $d(x_1)$  в точке  $x_1^*$  достигает наибольшего значения (которое равно наибольшему значению функции  $D(x_1, x_2)$ ).

Аналогично, для произвольного  $n \geq 1$ , если координаты точки  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  удовлетворяют неравенству (1), то есть  $b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq 2m$ , функция  $D(x)$  достигает наибольшего значения

$$D(x^*) = -\frac{b_1^2}{4a_1} - \dots - \frac{b_n^2}{4a_n}$$

в точке  $x^* = \left(-\frac{b_1}{2a_1}, \dots, -\frac{b_n}{2a_n}\right)$ .

**Задача 2.** Задача о максимизации математического ожидания прибыли в случае, когда функция спроса является случайной величиной.

**1 случай.** Количество товара не ограничено. Пусть  $x \geq 0$  — цена некоторого товара и  $Q = Q(x)$  — количество человек, желающих купить этот товар (функция спроса). Предположим, что на данную функцию влияют различные случайные факторы, то есть  $Q$  является случайной величиной.

**Задача** — установить такую цену билета, чтобы математическое ожидание прибыли

$$m(x) = M(D(x)) = M(xQ(x))$$

было максимальным.

Предположим, что функция спроса линейная:  $Q = Ax + B$ , где  $A < 0$ ,  $B > 0$  — некоторые случайные величины с математическими ожиданиями  $MA = a < 0$  и  $MB = b > 0$  соответственно. Тогда

$$m(x) = M(D(x)) = M(Ax^2 + Bx) = ax^2 + bx.$$

Аналогично задаче из Введения, математическое ожидание  $m(x)$  достигает максимального значения  $m(x^*) = -\frac{b^2}{4a}$  при  $x^* = -\frac{b}{2a}$ .

**2 случай. Имеется ограниченное количество товара.** Предположим, что количество товара ограничено и равно  $m$  (например, число проданных билетов на поезд ограничено количеством мест). Рассмотрим функцию спроса вида  $Q = \frac{K}{x^2}$ , где  $x > 0$ ,  $K$  — непрерывная случайная величина с плотностью  $f(s)$ , сосредоточенная на  $[0, \infty)$ . Определим случайную величину  $\tilde{D}(x) = \min\{K/x, mx\}$  как доход от продажи товара, если его цена равна  $x$ . Отметим, что  $\tilde{D}(x)$  является случайной величиной смешанного типа (см. [5, с. 77]), ее функция распределения  $G(s)$  при  $s < mx$  непрерывна, а в точке  $s = mx$  имеет скачок, величина которого равна вероятности  $P(\tilde{D}(x) = mx) = P(K \geq mx^2)$ . Поэтому математическое ожидание дохода от продажи товара равно

$$M\tilde{D}(x) = mxP(K \geq mx^2) + \frac{1}{x} \int_0^{mx^2} sf(s)ds. \quad (3)$$

**Замечание.** Стационарная точка функции  $M\tilde{D}(x)$  удовлетворяет уравнению

$$mx^2 \int_{mx^2}^{\infty} f(s)ds = \int_0^{mx^2} sf(s)ds. \quad (4)$$

Действительно,  $P(K \geq mx^2) = \int_{mx^2}^{\infty} f(s)ds$ , тогда

$$M\tilde{D}(x) = mx \int_{mx^2}^{\infty} f(s)ds + \frac{1}{x} \int_0^{mx^2} sf(s)ds.$$

Продифференцируем функцию  $M\tilde{D}(x)$ , используя теорему о дифференцируемости интеграла по параметру (см., например, [6, с. 258]):

$$\begin{aligned} (M\tilde{D}(x))' &= m \int_{mx^2}^{\infty} f(s)ds - 2m^2x^2f(mx^2) - \frac{1}{x^2} \int_0^{mx^2} sf(s)ds + 2m^2x^2f(mx^2) = \\ &= m \int_{mx^2}^{\infty} f(s)ds - \frac{1}{x^2} \int_0^{mx^2} sf(s)ds. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение  $(M\tilde{D}(x))' = 0$  равносильно (4).

**Пример.** Пусть  $K$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[k_1, k_2]$ ,  $0 < k_1 < k_2$ . Найдём  $M\tilde{D}(x)$  при различных ценах на билеты  $x > 0$ . Пусть сначала  $mx^2 \leq k_1$ . Тогда при любых значениях  $K$  функция спроса удовлетворяет неравенству  $Q = \frac{K}{x^2} \geq \frac{k_1}{x^2} \geq m$  и

$$M\tilde{D}(x) = mxP\left(\frac{K}{x^2} \geq m\right) = mx.$$

Рассмотрим случай  $k_1 < mx^2 \leq k_2$ . Поскольку  $K$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[k_1, k_2]$ , то

$$P(Q \geq m) = P(K \geq mx^2) = \frac{k_2 - mx^2}{k_2 - k_1}.$$

Следовательно, из (3) получаем

$$\begin{aligned} M\tilde{D}(x) &= \frac{mx(k_2 - mx^2)}{k_2 - k_1} + \frac{1}{x} \int_{k_1}^{mx^2} \frac{s}{k_2 - k_1} ds = \\ &= \frac{mx(k_2 - mx^2)}{k_2 - k_1} + \frac{m^2x^4 - k_1^2}{2(k_2 - k_1)x} = \frac{1}{k_2 - k_1} \left( mxk_2 - \frac{x^3m^2}{2} - \frac{k_1^2}{2x} \right). \end{aligned}$$

Пусть теперь цена билета удовлетворяет неравенству  $mx^2 > k_2$ . Здесь  $K \leq k_2 < mx^2$ , поэтому  $P(K > mx^2) = 0$  и

$$M\tilde{D}(x) = \frac{1}{x} \int_{k_1}^{k_2} \frac{s}{k_2 - k_1} ds = \frac{k_1 + k_2}{2x}.$$

Рассмотрим математическое ожидание  $M\tilde{D}(x)$  как функцию переменной  $x$ . Очевидно, что данная функция возрастает при  $x \in \left(0, \sqrt{\frac{k_1}{m}}\right)$  и убывает при  $x > \sqrt{\frac{k_2}{m}}$ . Несложно посчитать, что наибольшее

значение функции достигается при  $x^* = \sqrt{\frac{k_2 + \sqrt{k_2^2 + 3k_1^2}}{3m}} \in \left(\sqrt{\frac{k_1}{m}}, \sqrt{\frac{k_2}{m}}\right)$  и равно

$$M\tilde{D}(x^*) = \frac{2\sqrt{3m}(k_2^2 + k_2\sqrt{k_2^2 + 3k_1^2} - 3k_1^2)}{9(k_2 - k_1)\sqrt{k_2 + \sqrt{k_2^2 + 3k_1^2}}}.$$

Отметим, что данное значение  $x^*$  можно также найти из (4). Таким образом, увеличение цены билета выше значения  $x^*$  не ведет к увеличению дохода от продаж всех билетов!

### Задачи для курсовых и выпускных квалификационных работ

1. В задаче 1 рассмотреть случай  $b_1 + \dots + b_n > 2m$  при  $n \geq 3$ .

2. **Задача о цене билетов на поезд.** Предположим, что поезд идет от пункта  $M$  до пункта  $N$  с остановкой в пункте  $V$ ;  $m$  — количество мест в этом поезде,  $x_1$  — цена билета от  $M$  до  $N$ ,  $x_2$  — цена билета от  $M$  до  $V$ ,  $x_3$  — цена билета от  $V$  до  $N$ . Цены билетов удовлетворяют неравенствам:

$$x_2 \leq x_1, \quad x_3 \leq x_1, \quad x_2 + x_3 \geq x_1.$$

Далее, пусть  $y_i$  — количество человек, желающих купить билет,

$$y_1 + y_2 \leq m, \quad y_1 + y_3 \leq m,$$

$y_i = a_i x_i + b_i$  — убывающие линейные функции спроса,  $i = 1, 2, 3$ .

1) Установить такую цену билетов, чтобы прибыль от продажи  $D = \sum_{i=1}^3 x_i f(x_i)$  была максимальной.

2) Сформулировать и решить подобную задачу в случае, когда между пунктами  $M$  до пункта  $N$  есть 2 остановки.

3. Рассмотрим вероятностную модель из задачи 2 в предположении, что количество товара ограничено и равно  $m$ . Для линейной функции спроса  $Y = Ax + B$  решить задачу о максимизации прибыли в следующих случаях:

1)  $A < 0$  — постоянная,  $B$  — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[b_1, b_2]$ , где  $0 < b_1 < b_2$ .

2)  $A$  и  $B$  — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезках  $[a_1, a_2]$  и  $[b_1, b_2]$  соответственно. Здесь  $a_1 < a_2 < 0 < b_1 < b_2$ .

3) Решить эту же задачу в предположении, что случайные величины  $-A$  и  $B$  имеют показательное распределение.

4. Рассмотрим вероятностную модель из задачи 2 в случае, когда количество товара ограничено и равно  $m$ . Для функции спроса  $Y = \frac{K}{x^2}$  решить задачу о максимизации прибыли, если случайная величина  $K$  имеет показательное распределение.

### Литература

1. Силаева М.В., Силаев А.М. Спрос и предложение: учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород: НФ ГУ – ВШЭ, 2006. - 31 с.

2. Выгодчикова И.Ю. Задачи рационального поведения экономических агентов: Учеб. пособие для студентов экон.-мат. спец. - Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2009. - 44 с.

3. Фролова Т.А. Экономическая теория: конспект лекций. - Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2009.

4. Аникина Е.А., Гавриленко Л.И. Экономическая теория: учебник. - Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. - 413 с.

5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. - М.: Высш. шк., 1999. - 576 с.

6. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Продолжение курса. - М.: Изд-во МГУ, 1987. - 358 с.

*Родина Людмила Ивановна,  
профессор кафедры Математики  
Национального исследовательского  
технологического университета «МИСиС»,  
профессор кафедры функционального анализа  
и его приложений Владимирского государственного  
университета им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,  
доктор физико-математических наук.*

*E-mail: LRodina67@mail.ru*

# Способы вычисления числа “ $e$ ”. Тема учебного исследования

*В. М. Федосеев*

Цель настоящей публикации состоит в том, чтобы обратить внимание преподавателей математики вуза и колледжа на возможность образования тематики исследовательских задач путём дополнения классических результатов науки. За исходный пункт исследования взята известная формула математического анализа  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ , поставлена задача повышения скорости сходимости базовой последовательности и на этой основе строится новый способ вычисления. Достоинство предлагаемого методического подхода наряду с его преимущественно исследовательской направленностью состоит в сохранении естественных связей конкретной задачи с основным содержанием систематического курса.

## Введение

Математическая постоянная — число “ $e$ ”, называемое также «Неперовым числом» или «числом Эйлера», наряду с числом “ $\pi$ ” является одной из важнейших математических постоянных. С ней мы встречаемся при рассмотрении самых разнообразных научных вопросов и не только в математическом анализе, где это число является основанием элементарных функций  $y = e^x$ ,  $y = \ln x$  и входит в состав многих формул. Поучительна уже сама история определения этой постоянной, тесно связанная с разработкой основополагающих методов математического анализа.

Используемое ныне обозначение постоянной “ $e$ ” принадлежит Леонарду Эйлеру [1], который понимал под ней сумму числового ряда

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \quad (1)$$

Пользуясь рядом (1), Эйлер вычислил значение постоянной “ $e$ ” с точностью до 22 знаков после запятой. Результат по тем временам удивительный, если учесть тогдашние вычислительные возможности и объём выполненной работы!

Другой важный способ определения числа состоит в известном предельном равенстве

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828\dots \quad (2)$$

В большинстве учебников число “ $e$ ” первоначально вводится именно таким образом. Тождественность обоих определений была установлена швейцарским математиком Даниилом Бернулли. Упоминание об этом содержится в его письме к Христиану Гольдбаху от 1729 года [2].

Имеются и другие способы конструктивного представления числа “ $e$ ” [3], но соотношения (1) и (2) в курсе математического анализа являются базовыми и по ним студент впервые знакомится со способами вычисления этой математической постоянной.

Поставим вопрос о скорости сходимости последовательности правой части предельного равенства (2). Как известно, отклонение элемента этой последовательности от своего предела оценивается неравенством

$$\frac{3}{2n} - \frac{1}{n^2} < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{2n}. \quad (3)$$

Отсюда следует довольно медленная сходимость последовательности  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  к своему пределу. Зададимся целью улучшения её сходимости и, тем самым, приходим к задаче по построению на базе формулы (2) числовой последовательности, позволяющей при фиксированном  $n$  находить значение постоянной “ $e$ ” с более высокой точностью. Другими словами, речь идёт о создании более эффективного способа вычисления на базе существующего. Методически важно, что подход к таким образом поставленной задаче уже проработан в конструкторской терминологии «на уровне прототипа». Понятно, с какой целью и что нужно делать, из чего исходить, в какой области работать. В то же время

он является достаточно неопределённым относительно путей достижения требуемого результата. По всем признакам задача такого типа может быть отнесена к группе поисковых исследовательских задач, а по своей сложности — к типу учебных задач.

### Способы улучшения сходимости базовой последовательности

Обозначим элемент базовой последовательности для вычисления постоянной “e” (2) через  $P_n^{(0)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . В качестве первого варианта решения поставленной задачи рассмотрим числовую последовательность с формулой общего члена

$$P_n^{(1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right). \quad (4)$$

Оценим величину отклонения элемента последовательности (4)  $P_n^{(1)}$  от значения числа “e”. С этой целью, пользуясь теоремой о среднем, преобразуем разность между ними следующим образом

$$e - P_n^{(1)} = e - e^{\ln(1+1/n)^n(1+1/(2n+1))} = e^\xi \cdot \left[1 - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)\right],$$

где  $0 < \xi < 1$ .

Сделаем обозначение  $1/(2n+1) = x$  и тогда выражение в скобках может быть разложено в степенной ряд

$$1 - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \ln(1-x^2) = \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{4 \cdot 5} + \frac{x^6}{6 \cdot 7} + \dots \quad (5)$$

Отсюда приходим к неравенству, оценивающему величину отклонения  $P_n^{(1)}$  от значения числа “e”:

$$e - P_n^{(1)} < \frac{3}{6(2n+1)^2} < \frac{1}{8n^2}. \quad (6)$$

Сравнение оценок (3) и (6) даёт представление о том, насколько сходимость последовательности (4) лучше сходимости базовой последовательности (2). Продемонстрируем это числовым примером и вычислим значения  $P_n^{(0)}$  и  $P_n^{(1)}$  при  $n = 10$ :

$$P_{10}^{(0)} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2,593742 \quad (\Delta = 0,124539);$$

$$P_{10}^{(1)} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 10 + 1}\right) = 2,717254 \quad (\Delta = 0,001028).$$

Из приведённого примера следует, что погрешность вычисления числа “e” (приведена в скобках) в случае  $P_{10}^{(1)}$  примерно в 120 раз меньше чем в случае использования  $P_{10}^{(0)}$ . Улучшение сходимости путём применения последовательности  $P_n^{(1)}$  налицо.

Способ, использованный при составлении формулы (4), можно обобщить, рассмотрев последовательность вида

$$P_n^{(k)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 + \frac{a_2}{(2n+1)^2}\right) \left(1 + \frac{a_3}{(2n+1)^4}\right) \dots \left(1 + \frac{a_k}{(2n+1)^{2k}}\right), \quad (7)$$

в которой коэффициенты  $a_i, i = 2, \dots, k$  находятся из условия равенства нулю коэффициентов при  $\frac{1}{(2n+1)^{2i}}$  разложения в степенной ряд выражения  $1 - \ln P_n^{(k)}$ . Из ряда, аналогичного степенному ряду в формуле (5), для коэффициентов  $a_i$  составляем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2 \cdot 3} - a_2 = 0, \\ \frac{1}{4 \cdot 5} - a_3 + \frac{a_2^2}{2} = 0, \\ \frac{1}{6 \cdot 7} - a_4 - \frac{a_3^2}{2} = 0, \\ \frac{1}{8 \cdot 9} - a_5 + \frac{a_3^2}{2} + \frac{a_2^2}{4} = 0, \\ \dots \end{cases} \quad (8)$$

из которой находим:

$$a_2 = \frac{1}{6}; \quad a_3 = \frac{23}{360}; \quad a_4 = \frac{101}{4536}; \quad a_5 = \frac{1393}{86400}; \quad a_6 = \frac{3877}{427680}; \quad \text{и т.д.}$$

Для оценки отклонения элементов последовательности от числа “e” имеет место неравенство

$$e - P_n^{(k)} < \frac{3a_k}{(2n+1)^{2k}}. \quad (9)$$

Вывод неравенства (9) аналогичен выводу неравенства (6). Формула (9) показывает, каким образом происходит увеличение скорости сходимости последовательности с общим членом  $P_n^{(k)}$  по мере увеличения индекса  $k$ .

Воспользуемся частным случаем формулы (7) при  $k = 2$  и образуем второй вариант способа улучшения сходимости базовой последовательности (2):

$$P_n^{(2)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{6(2n+1)^2}\right). \quad (10)$$

При этом погрешность формулы (10) согласно (9) будет оцениваться неравенством

$$e - P_n^{(2)} < \frac{3}{(2n+1)^4} < \frac{1}{32n^4}. \quad (11)$$

Таким образом, для задачи улучшения сходимости последовательности (2) предлагается два варианта решения в виде формул (4) и (10). Сравнению свойств основанных на них способов вычисления будет посвящён следующий раздел.

### Сравнение вычислительной сложности алгоритмов

На основании формул (1), (2), (4) и (10) могут быть составлены способы вычисления числа “e”. Сравним вычислительную сложность алгоритмов, основанных на перечисленных формулах. В качестве критерия сложности будем использовать число арифметических операций, необходимых для достижения точности  $\varepsilon = 10^{-16}$ .

В случае способа (1) вычисления будем производить по схеме Горнера

$$e = 2 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( 1 + \dots + \frac{1}{n-1} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \dots \right) \right) \right).$$

Для её реализации потребуется выполнить  $(n - 1)$  сложение,  $(n - 2)$  умножения и  $(n - 1)$  деление, всего  $(3n - 4)$  арифметических операций. Так как требуемая точность достигается при  $n = 20$ , то вычислительная сложность алгоритма, основанного на формуле (1), оценивается числом 56.

Возведение в степень выражения с показателем  $n = 2^m$  потребует выполнения  $m$  умножений. При рассмотрении способа (2) по оценке (3) определим значение номера  $n$ , при котором погрешность будет меньше чем  $10^{-16}$ ; показатель степени  $m$  найдём по формуле  $m = \lceil \log_2 n \rceil + 1$ . Для заданной точности  $\varepsilon = 10^{-16}$  будет  $m = 54$  и в сумме получаем 56 арифметических операций, которые следует выполнить. Показательно, что при выбранном критерии вычислительная сложность алгоритмов, основанных на как на формуле (1), так и на формуле (2), оказалась одинаковой, хотя последовательность (2) сходится гораздо медленнее последовательности (1).

Оценки вычислительной сложности алгоритмов, основанных на формулах (4) и (10), рассчитывались аналогично способу (2). В таблице приведены значения критерия вычислительной сложности всех перечисленных алгоритмов.

Таблица

Номер формулы	(1)	(2)	(4)	(10)
Вычислительная сложность	56	56	33	21

Из таблицы видно, что наименьшую вычислительную сложность, оцениваемую по критерию числа использованных арифметических операций, имеет алгоритм, основанный на формуле (10). Его вычислительная сложность более чем в 2,5 раза ниже сложности базовых алгоритмов (1) и (2).

### Задание для самостоятельного исследования

Рассмотренные варианты решения задачи, очевидно, не исчерпывают заданную тему. Их следует расценивать только как примеры существующих возможностей улучшения скорости сходимости последовательности  $(1 + 1/n)^n$ . Следуя намеченному пути, заинтересованному читателю предлагается сконструировать и исследовать собственные способы. Для более близкого знакомства с темой рекомендуется исследовать возможности использования последовательностей с формулой общего члена в виде дробей

$$P_n^{(k)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)}{\left(1 - \frac{b_1}{(2n+1)^2}\right) \left(1 - \frac{b_2}{(2n+1)^4}\right) \dots \left(1 - \frac{b_k}{(2n+1)^{2k}}\right)}. \quad (12)$$

Выполнение исследования предполагает:

- 1) определение значений коэффициентов  $b_i, i = 1, \dots, k$  с предварительным составлением системы уравнений;
- 2) оценку отклонения  $e - P_n^{(k)}$ ;
- 3) сравнительную оценку вычислительной сложности алгоритма, основанного на формуле (12).

### Литература

1. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Том 1. - М.: ГИФМЛ, 1961. - 316 с.
2. Юшкевич А.П. История математики в России. - М.: Наука, 1968. - 592 с.
3. Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби / Справочная математическая библиотека. Под ред. Л.А.Люстерника и А.Р.Янпольского. - М.: Физматгиз, 1961. - 440 с.

Федосеев Виктор Михайлович,  
преподаватель математики Технологического колледжа  
Пензенского государственного технологического  
университета, доцент, кандидат технических наук,  
Почётный работник Высшей школы.

E-mail: fedoseev\_vik@mail.ru

## Олимпиада школьников “ТИИМ — Технологии. Интеллект. Информатика. Математика”

*А. А. Андреев, Е. А. Скородумова, Е. А. Максимова*

В статье рассказано о новой олимпиаде для школьников по математике и информатике “ТИИМ”. Приведены задачи отборочного тура по математике для 10-11 классов с ответами, задачи заключительного тура по математике для 11 класса с решениями, а также примеры задач отборочного и заключительного туров по информатике с решениями.

В декабре 2020 – январе 2021 года впервые прошел отборочный тур олимпиады “ТИИМ — Технологии. Интеллект. Информатика. Математика”. Олимпиада посвящается 100-летию ордена Трудового Красного Знамени федеральному государственному бюджетному образовательному учреждению высшего образования “Московский технический университет связи и информатики” — МТУСИ (ранее Московский ордена Трудового Красного Знамени электротехнический институт связи — МЭИС) и первому ректору МЭИС — Бутягину А.С., который также стоял у истоков олимпиадного движения в России: именно при Бутягине в 1935 г. в Московском университете прошла Первая московская олимпиада школьников по математике, сыгравшая большую роль в отборе перспективных абитуриентов.

Основной задачей олимпиады “ТИИМ” является поддержание и развитие интереса к решению нестандартных задач математики и программирования. Олимпиада проводится образовательными организациями высшего образования, центрами Сириус и школами России и ближнего зарубежья. Олимпиада проводится в два тура: отборочный и заключительный.

В состязании по математике принимали участие школьники 5-11 классов. Для удобства участников отборочный тур проходил как в очной, так и в дистанционной форме. Каждый из 4 вариантов отборочного тура содержал 10 задач. Вариант заключительного тура также включал в себя 10 задач.

Варианты заданий отборочного тура и финала по информатике включали в себя по 6 задач, рассчитанных на учащихся 8-11 классов. Тур проводился с применением системы автоматической проверки решений участников на наборе тестовых данных. Решения оценивались в соответствии с количеством верно пройденных тестов и принимались на языках C++, Python, Pascal, Java.

В олимпиаде по математике приняли участие 2769 школьников из 64 регионов РФ и 7 стран ближнего зарубежья, по информатике — 539 школьников из 62 регионов и 7 стран. Заключительный тур прошел на 18 площадках в Москве, Санкт-Петербурге, Самаре, Белгороде, Омске, Улан-Удэ, Красноярске, Елабуге, Волгограде, Ивановской области, Республике Башкортостан, Ростове, Нижнем Новгороде, а также в Абхазии, Казахстане и Донецкой Народной Республике.

Полный текст заданий с ответами, а также информация о победителях и призерах опубликованы на официальном сайте олимпиады <https://тиим.рф>.

### Задания отборочного тура по математике

#### 10 класс

**Задача 1.** Катеты прямоугольного треугольника равны  $a$  и  $2a$ . Середина катета  $2a$  служит центром окружности радиуса, равного  $a$ . На какие отрезки делится этой окружностью гипотенуза треугольника? В ответе записать отношение длины большого отрезка к длине меньшего отрезка.

**Ответ: 4.**

**Задача 2.** Найти сумму всех целых значений  $d$ , при каждом из которых решения системы неравенств образуют на числовой оси отрезок длины 2.

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 4 + 4d \leq 0 \\ x^2 - 4x - d - 1 \leq 0 \end{cases}$$

**Ответ: -5.**

**Задача 3.** Пусть координаты вектора  $\vec{a} = (x; y)$  удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{6x^2 + 11xy - 2y^2 - 11} + \sin^2 \frac{\pi x}{2} - \left(1 + \left| \sin \frac{\pi y}{2} \right| \right) \sin \frac{\pi x}{2} + 1 = 0.$$

Какое наибольшее значение может принимать скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{l}$ , где  $\vec{l} = (1; 1)$ ?

**Ответ: 6.**

**Задача 4.** Найти сумму всех целых значений  $a$ , при каждом из которых для любого значения  $b$  система

$$\begin{cases} 16bx + 8y + a = 0 \\ (1 - b)x + by = z^2 + z \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение  $(x, y, z)$ .

**Ответ: 7.**

**Задача 5.** Найдите множество значений функции  $y = 100 \cos 2x$ , заданной на отрезке  $[-\arcsin 0, 4; \arccos 0, 4]$ . В ответе укажите количество целых значений, принадлежащих этому множеству.

**Ответ: 169.**

**Задача 6.** Найдите сумму всех натуральных  $a$ , при каждом из которых выражение  $1 + \sin x (3 \sin x + a \cos x)$  не равно нулю ни при каких значениях  $x$ .

**Ответ: 6.**

**Задача 7.** Найдите остаток от деления  $3^{1921} + 3^{2021}$  на 100.

**Ответ: 6.**

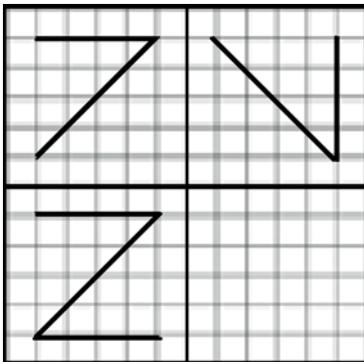
**Задача 8.** Сколько корней имеет уравнение  $\operatorname{ctg} \pi x \cdot \sin 4\pi x + \cos 4\pi x = 0$  на отрезке  $[1921; 2021]$ ?

**Ответ: 400.**

**Задача 9.** Трёхзначное число  $A$  оканчивается цифрой 2. Если её перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 18 больше первоначального. Укажите значение  $\frac{7A-214}{2A-4}$ .

**Ответ: 3.**

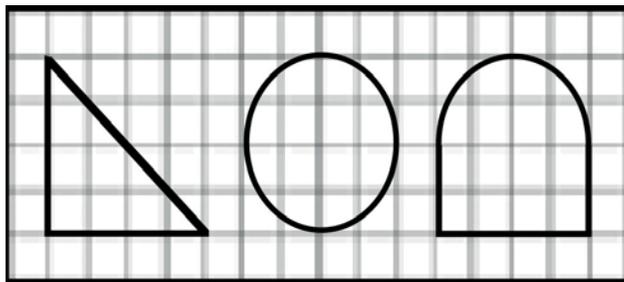
**Задача 10.** На рисунке даны три проекции модели, сделанной из одного куска толстой проволоки. Эта модель не имеет накладывающихся (двойных) участков и скреплённых узлов. По заданным проекциям постройте наглядное изображение фигуры, вписанное в куб с ребром  $a$ . В ответе запишите длину этой проволоки, если  $a = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{6}}{2}$ .



**Ответ: 2.**

**11 класс**

**Задача 1.** Найдите форму пробки, которая пройдет сквозь три заданные отверстия, т.е. плотно закроет любое из заданных отверстий. В ответе запишите отношение объема шара с радиусом  $1,5a$  к объему пробки ( $a = 4$  клетки).



**Ответ: 36.**

**Задача 2.** На десяти одинаковых карточках написаны числа 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. Наугад берутся две карточки. Найти вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима. Ответ записать в виде десятичной дроби с тремя знаками после запятой.

**Ответ: 0,311.**

**Задача 3.** Последовательность  $(a_n)$  задана соотношением  $\forall n > 2 : a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ;  $a_1 = 1921$ ,  $a_2 = 2021$ . Найдите  $|a_{2021} - a_{1921}|$ .

**Ответ: 3942.**

**Задача 4.** Найдите сумму всех целых значений параметра  $a$ , при каждом из которых на плоскости  $xOy$  существует круг, содержащий все точки, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} 2y - x \leq 1, \\ y + 2x \leq 2, \\ 7(y + 1) + ax \geq 0. \end{cases}$$

**Ответ: 85.**

**Задача 5.** Решить уравнение

$$\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) - \sqrt{3}(\cos x + \sin x)} = -\frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

В ответе укажите, сколько корней находятся в промежутке  $[1921\pi; 2021\pi]$ .

**Ответ: 150.**

**Задача 6.** Окружность радиуса 3 проходит через середины трёх сторон треугольника  $ABC$ , в котором величины углов  $A$  и  $B$  равны  $60^\circ$  и  $45^\circ$  соответственно. Найти площадь  $S$  треугольника. В ответе запишите  $(S - 27)^2$ .

**Ответ: 243.**

**Задача 7.** Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$ , все рёбра которой равны  $b$ . Через точку  $N$ , делящую отрезок  $AD$  в отношении  $2 : 1$ , считая от точки  $A$ , проведена плоскость, параллельная плоскости  $SCD$ . Вычислите площадь полученного сечения. В ответе запишите найденную площадь при  $b = \sqrt[4]{243}$ .

**Ответ: 6.**

**Задача 8.** Найдите сумму всех двузначных  $n$ , при каждом из которых  $3^n + 1$  делится на 5.

**Ответ: 1242.**

**Задача 9.** Расшифровать запись, в которой: 1) разные буквы обозначают разные цифры, 2) звёздочки обозначают любые цифры. В ответе запишите сумму цифр разности  $\overline{MTUSI} - N$ , где  $N$  — наибольшее возможное число из найденных  $****$ .

$$\begin{array}{rcccc}
 * & + & * & = & M \\
 - & & \times & & : \\
 * & + & * & = & T \\
 || & & || & & || \\
 И & : & С & = & У
 \end{array}$$

**Ответ: 29.**

**Задача 10.** Найти все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a, \\ x + y = 1, \end{cases}$$

не имеет решений. В ответе запишите утроенную сумму всех значений.

**Ответ: -2.**

### Задача отборочного тура олимпиады ТИИМ по информатике

**Задача 1. Буратино идет к успеху**

Буратино продал букварь и решил выгодно инвестировать вырученные средства. Он что-то слышал про поле чудес, но не знал, как туда попасть.

После долгих поисков в Интернете он нашел два объявления:

**Поле чудесных кубов**

*Закопайте свои денежки на нашем поле, и каждый день каждая цифра суммы на счете будет умножаться сама на себя дважды, после чего полученные числа будут сложены.*

*Например, если вы положите на счет всего 99 монет, уже на второй день сумма будет равна  $9 \cdot 9 \cdot 9 + 9 \cdot 9 \cdot 9 = 1458$  монетам!*

*Приходите к нам! С уважением, Алиса.*

### **Поле чудесных разностей**

*Передайте свои монеты к нам в доверительное управление, и каждый день мы будем формировать из цифр вашего счета два числа — максимальное и минимальное. И на следующий день Вы получите разность этих двух чисел.*

*Например, у Вас было 1279 монет — на следующий день Вы получаете  $9721 - 1279 = 8442$  монеты*

*Откройте вклад у нас! С уважением, Базилио.*

Подскажите Буратино, куда лучше инвестировать.

**Входные данные:** стоимость букваря, количество дней для инвестиций;

**выходные данные:** один из трех вариантов:

“Поле чудесных кубов выгоднее на (сумма)”

“Поле чудесных разностей выгоднее на (сумма)”

“Буратино, не делай этого”, если оба варианта не принесут прибыли

**Примечание:** Буратино планирует жить вечно, поэтому срок инвестиций в днях может быть большим, до  $10^7$ .

### **Например:**

Входные данные	Результат работы программы
1 1000000	Буратино, не делай этого
99 1	Поле чудесных кубов выгоднее на 1458
1000 2	Буратино, не делай этого
1921 999999	Поле чудесных разностей выгоднее на 4715
1921 1000000	Поле чудесных разностей выгоднее на 5255

### **Решение задачи на языке Python**

```
#Функция для вычисления суммы кубов цифр
def cube(n):
    num_list = map(int,list(str(n)))
    n = list(map(lambda a:a*a*a, num_list))
    return sum(n)

#Функция для вычисления разности чисел - наибольшего,
#составленного из цифр этого числа, и наименьшего,
#составленного из цифр этого числа
def diff(n):
    num_list = list(str(n))
    n = int(''.join(sorted(num_list,reverse = True)))
    - int(''.join(sorted(num_list)))
    return n

#Функция, вычисляющая результат поля чудесных кубов
#за days дней
```

```

def cubes(n,days):
    for i in range(0,days):
        n1 = cube(n)
#Если предыдущее число совпадает с вычисленным
#на этом этапе - дальше можно не вычислять
        if n1==n:
            return n
        else:
            n=n1
    return n

#Функция, вычисляющая результат поля чудесных
#разностей за days дней
def diffs(n,days):
    for i in range(0,days):
        n1 = diff(n)
#Если предыдущее число совпадает с вычисленным
#на этом этапе - дальше можно не вычислять
        if n1==n:
            return n
        else:
            n=n1
    return n

#Функция, проверяющая выгоду Буратино
def solve(money,days):

    money_cube = cubes(money,days)
    money_diff = diffs(money,days)

    if(money_cube>money_diff and money_cube>money):
        return 'Поле чудесных кубов выгоднее на '
        +str(money_cube-money_diff)

    if(money_diff>money_cube and money_diff>money):
        return 'Поле чудесных разностей выгоднее на '
        +str(money_diff-money_cube)

    return 'Буратино, не делай этого'

money = int(input())
days = int(input())

print(solve(money,days))

```

### Вариант заданий заключительного тура по математике для 11 класса

**Задача 1.** Найдите среднее арифметическое всех корней уравнения

$$2 \log_3 \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{3} = \log_2 \cos \frac{\pi x}{3},$$

принадлежащих отрезку [1921; 2021].

**Решение:** Перенесём всё в левую часть и рассмотрим функцию

$$f(t) = 2 \log_3 \operatorname{ctg} t - \log_2 \cos t,$$

где  $t = \frac{\pi x}{3}$ . С учётом ограничений, мы рассматриваем только значения  $t \in [2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$ . Найдём её производную и сравним с нулём:

$$f' = -\frac{2}{\ln 3 \operatorname{ctg} t} \cdot \frac{1}{\sin^2 t} + \frac{\sin t}{\ln 2 \cos t} = \frac{\ln 3 \sin^2 t - 2 \ln 2}{\ln 2 \ln 3 \sin t \cos t} < 0,$$

т.к. на области определения знаменатель положителен, а  $\ln 3 < 2 \ln 2 = \ln 4$ . Значит, функция  $f(t)$  убывает и уравнение  $f(t) = 0$  имеет не более одного решения.

Нетрудно убедиться, что искомое  $t = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ , и тогда

$$x = 1 + 6n, n \in \mathbb{Z}.$$

Найдём корни, которые попадают в указанный в условии промежуток:

$$1921 \leq 1 + 6n \leq 2021; \quad 320 \leq n \leq 336; \quad x = 1921, 1927, \dots, 2017.$$

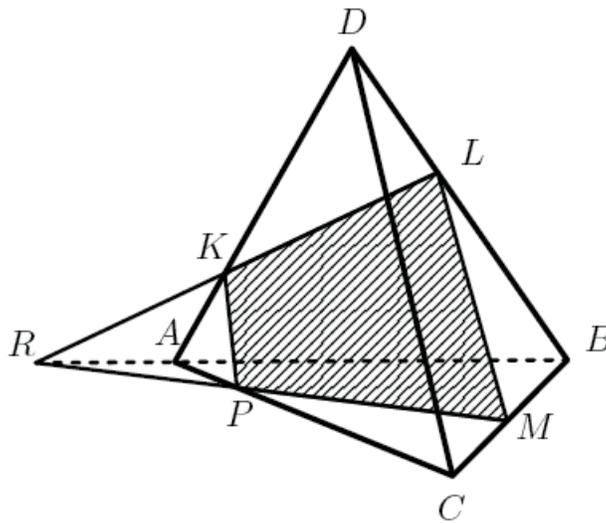
Т.к. решения образуют арифметическую прогрессию, а для нахождения среднего арифметического их сумму необходимо поделить на количество членов, нам достаточно найти среднее арифметическое первого и последнего:

$$S = \frac{1921 + 2017}{2} = 1969.$$

**Ответ: 1969.**

**Задача 2.** В тетраэдре  $ABCD$  точки  $K, L, M$  принадлежат рёбрам  $AD, DB$  и  $BC$  соответственно, причём  $|AK| : |KD| = 2 : 3$ ,  $|DL| : |LB| = 3 : 4$ ,  $|BM| : |MC| = 4 : 5$ . Через точки  $KLM$  проведена плоскость, которая делит тетраэдр на два многогранника. Найдите отношение их объёмов.

**Первое решение:**



Построим точку  $P$  пересечения плоскости  $\alpha = (KLM)$  с ребром  $AC$ . Для этого продолжим прямую  $KL$  до пересечения с прямой  $AB$  в точке  $R$ , после чего соединим точки  $R$  и  $M$ . Далее

воспользуемся теоремой Менелая, чтобы определить, в каком отношении точка  $P$  разбивает отрезок  $AC$ . Для треугольника  $ADB$  и секущей  $KL$  имеем:

$$1 = \frac{AK}{KD} \cdot \frac{DL}{LB} \cdot \frac{BR}{RA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{BR}{RA} \Rightarrow \frac{BR}{AR} = 2.$$

Для треугольника  $ACB$  и секущей  $PM$  имеем:

$$1 = \frac{AP}{PC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{BR}{RA} = \frac{AP}{PC} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{2}{5}.$$

Плоскость  $\alpha$  делит тетраэдр на многогранники  $ABKLM P$  и  $CDKLM P$ . Найдём отношение объёма первого многогранника к объёму тетраэдра, который для краткости обозначим за  $V$ .

Имеем:

$$V_{ABKLM P} = V_{LABMP} + V_{LAKP}.$$

Найдём сначала отношение объёма четырёхугольной пирамиды  $LABMP$  к объёму исходного тетраэдра. Их основания лежат в одной плоскости и относятся как  $\frac{38}{63}$ . На самом деле,

$$\frac{S_{\Delta CPM}}{S_{\Delta CAB}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{9} = \frac{25}{63},$$

и тогда

$$\frac{S_{ABMP}}{S_{\Delta CAB}} = 1 - \frac{S_{\Delta CPM}}{S_{\Delta CAB}} = \frac{38}{63}.$$

Высоты пирамиды  $LABMP$  и тетраэдра  $DABC$  относятся как  $\frac{LB}{DB} = \frac{4}{7}$ , а значит, отношение их объёмов равно:

$$\frac{V_{LABMP}}{V} = \frac{38}{63} \cdot \frac{4}{7} = \frac{152}{441}.$$

Аналогично для тетраэдра  $LAKP$ , рассматривая фигуры относительно основания  $ACD$ , находим, что

$$\frac{S_{\Delta AKP}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{35},$$

высоты тетраэдров относятся как  $\frac{3}{7}$ , и, значит,

$$\frac{V_{LAKP}}{V} = \frac{4}{35} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{245}.$$

Окончательно получаем

$$V_{KLABMP} = \left( \frac{152}{441} + \frac{12}{245} \right) V = \frac{124}{315} V.$$

Объём оставшейся части равен

$$V_{CDKLM P} = \left( 1 - \frac{124}{315} \right) V = \frac{191}{315} V$$

и

$$\frac{V_{KLABMP}}{V_{CDKLM P}} = \frac{124}{191}.$$

**Второе решение:** Для решения нам потребуется следующая формула:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}),$$

т.е. объем тетраэдра можно найти через смешанное произведение векторов, исходящих из общей вершины. Эта формула позволяет легко находить соотношение объемов тетраэдров, имеющих общий трехгранный угол, если известны отношения их сторон.

Воспользуемся ранее приведёнными рассуждениями относительно площадей оснований и отношения высот, чтобы определить объем тетраэдра  $RLMB$ :

$$\frac{V_{RLMB}}{V} = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{1} = \frac{32}{63}.$$

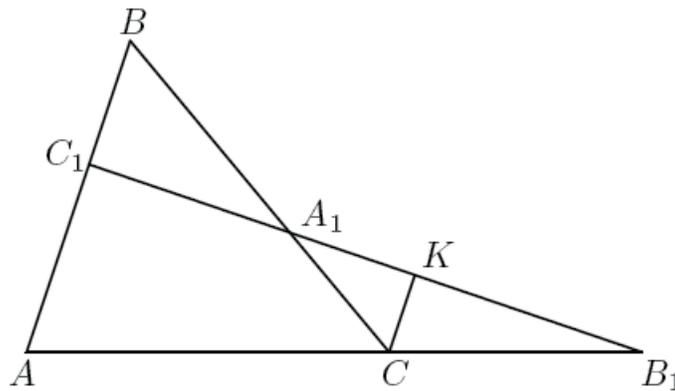
А теперь найдём отношение объёмов тетраэдров  $RKPA$  и  $RLMB$ :

$$\frac{V_{RKPA}}{V_{RLMB}} = \frac{RA}{RB} \cdot \frac{RK}{RL} \cdot \frac{RP}{RM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{9}{14} = \frac{9}{40}.$$

Здесь, как и раньше, все недостающие отношения отрезков определяются из теоремы Менелая. Тогда

$$V_{KLABMP} = V_{RLMB} - V_{RKPA} = \frac{31}{40}V_{RLMB} = \frac{124}{315}V.$$

**Справка:** Теорема Менелая



$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Проведем  $CK \parallel AB$ .

$$\text{Из } \triangle AC_1B_1 \sim \triangle CKB_1 \Rightarrow \frac{AC_1}{CK} = \frac{B_1A}{B_1C} \Rightarrow CK = \frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A}.$$

$$\triangle BC_1A_1 \sim \triangle CKA_1 \Rightarrow \frac{C_1B}{CK} = \frac{BA_1}{A_1C} \Rightarrow CK = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1} \Rightarrow \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

**Ответ:**  $\frac{124}{191}$

**Задача 3.** В последовательности цифр 19213... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырёх цифр. Встретится ли в этой последовательности: а) набор цифр 2021, б) вторично набор 1921, в) набор 6391?

**Решение:** В данной последовательности каждую чётную цифру заменим нулём, а нечётную — единицей:

$$19213510 \rightarrow \underbrace{11011} \underbrace{11011} \underbrace{11011} \dots$$

а) в последовательности набор первых пять цифр 11011 повторяется периодически. Набор 2021 соответствует набору 0001, но три нуля в данном наборе не встречается.

б) имеется лишь конечное число наборов четырёхзначных чисел, поэтому если разбить цифры нашей бесконечной последовательности на группы по четыре, обязательно встретятся два набора из одинаковых четырёх подряд идущих цифр:

$$1921 \dots \underbrace{\dots abcd}_{M} \dots \underbrace{\dots abcd}_{N} \dots$$

Но поскольку следующая цифра определяется по четырём предыдущим однозначно, правее набора  $N$  начнётся повторение значений, т.е. как минимум, начиная с набора  $M$ , последовательность цифр является периодической с периодом, равным длине промежутка от  $M$  до  $N$ .

С другой стороны, по условию задачи для каждого набора  $\overline{x_1x_2x_3x_4}$  следующая цифра определяется формулой  $x_5 + 10m = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ , а значит, по  $x_2, x_3, x_4, x_5$  однозначно восстанавливается  $x_1$ . Поэтому данную последовательность, пользуясь тем же правилом, можно неограниченно продлевать влево. Значит, слева от набора  $M$  записаны те же цифры, что и слева от набора  $N$ . Это означает, что наша последовательность целиком является периодической. Отсюда можно заключить, что если 1921 не встретится на  $[M, N]$ , то оно не встретилось бы вообще. Что противоречит условию.

в) Воспользуемся вышеописанным соображением о восстановлении предыдущих цифр, чтобы посмотреть, какие цифры предшествуют набору 921 (как было только что доказано, он встретится в нашей последовательности бесконечно много раз).

$$\underbrace{6391}_{\text{цифра}} 92135109$$

**Ответ:** а) нет, б) да, в) да.

**Задача 4.** Какие значения может принимать выражение  $\sin 1921\beta + \cos 2021\alpha$ , если известно, что

$$\cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \geq \frac{3}{2}?$$

**Решение:**

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos(\alpha + \beta) = 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - 1,$$

$$\cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 \geq \frac{3}{2},$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{1}{2} \leq 0,$$

$$4 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 0,$$

$$\left( 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 0.$$

Это возможно, только если оба квадрата равны нулю:

$$\begin{cases} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 0, \\ 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \beta = \alpha - 2\pi n, \\ 2 \cos(\alpha - \pi n) - \cos \pi n = 0. \end{cases}$$

Т.к.  $\cos \pi n = (-1)^n$ ,  $\cos(\alpha - \pi n) = (-1)^n \cos \alpha$ , получаем

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\beta = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi(k - n) = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Определим, чему равны  $1921\beta$  и  $1921\alpha$  (при этом все слагаемые, кратные  $2\pi$ , будем отбрасывать, поскольку они не влияют на значение тригонометрических функций).

$$1921\beta \rightarrow \pm 1921 \cdot \frac{\pi}{3} \rightarrow \pm \frac{\pi}{3} \pm 640\pi \rightarrow \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin 1921\beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$2021\alpha \rightarrow \pm 2021 \cdot \frac{\pi}{3} \rightarrow \pm \frac{5\pi}{3} \pm 672\pi \rightarrow \pm \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \cos 2021\alpha = \frac{1}{2}.$$

Окончательно получаем

$$\sin 1921\beta + \cos 2021\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

**Ответ:**  $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ .

**Задача 5.** Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} \overline{ab} + \overline{cd} = \overline{efg}, \\ \{a; b\} \cup \{c; d\} = \{e; f; g\}, \end{cases}$$

(здесь  $\overline{abc}$  означает позиционную запись числа, т.е.  $\overline{xy} = x \cdot 10 + y$ ,  $\overline{xyz} = x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + z$ )?

**Решение:** Очевидно,  $a, b, c, d, e, f, g$  — цифры. Чтобы не запутаться в решении, стоит чётко помнить, что означает данная система: в записи нашего равенства встретится не более трёх различных цифр, при этом любая цифра, написанная в правой части, должна встретиться и в левой, и наоборот.

Сумма двух двузначных чисел меньше 200, поэтому  $e = 1$ , а следовательно, и одна из цифр  $a, b, c, d$  тоже равна 1.

Пусть  $a = 1$ , тогда из равенства  $\overline{1b} + \overline{cd} = \overline{1fg}$  видно, что  $c = 8$  или  $c = 9$ .

Если  $c = 8$ , то  $\overline{1b} + \overline{8d} = \overline{18g}$  или  $\overline{1b} + \overline{8d} = \overline{1f8}$ , так как  $8 \in \{1, f, g\}$ ; но первое равенство невозможно, поскольку правая часть больше левой, а из второго равенства следует, что  $f = 0$ , и тогда либо  $b = 0$ , либо  $d = 0$ , так как  $0 \in \{1, b\} \cup \{1, d\}$ ; но тогда  $\overline{1b} + \overline{8d} = 90 + b + d \leq 99$ , т.е. равенство невозможно.

Если  $c = 9$ , аналогично предыдущему получаем  $\overline{1b} + \overline{9d} = \overline{19g}$  или  $\overline{1b} + \overline{9d} = \overline{1f9}$ . Первое равенство невозможно, так как правая часть снова больше левой. Из второго равенства следует, что  $f = 0$  (т.к.  $\overline{1b} + \overline{9d} = 100 + b + d \leq 118$ ), и мы получаем два решения  $10 + 99 = 109$  и  $19 + 90 = 109$ .

Пусть теперь  $a \neq 1, b = 1$ . Тогда из равенства  $\overline{a1} + \overline{cd} = \overline{1fg}$  видно, что  $d \neq 9$ , так как в противном случае  $g = 0$ , а следовательно,  $a = 0$  или  $c = 0$  в силу второго равенства данной системы.

Кроме того,  $d \neq 1$ ; в противном случае  $\overline{a1} + \overline{c1} = \overline{1f2}$ , значит  $a = 2$  или  $c = 2$ , но тогда  $21 + 10c + 1 = 100 + 10f + 2 \Rightarrow c = f + 8$  и наборы цифр в левой и правой части не совпадают.

Поскольку  $d < 9$ , то  $\overline{a1} + \overline{cd} = \overline{1d(d+1)}$ , так как  $d \in \{1, f, d+1\}$  и  $d \neq 1$ , но  $\{a; 1\} \cup \{c; d\} = \{1; d; d+1\}$  и  $a \neq 1$ , поэтому либо  $\overline{d1} + \overline{(d+1)d} = \overline{1d(d+1)}$ , либо  $\overline{(d+1)1} + \overline{dd} = \overline{1d(d+1)}$ , либо  $\overline{(d+1)1} + \overline{(d+1)d} = \overline{1d(d+1)}$ , причём первые два равенства выполняются при условии, что  $d + (d+1) = 10 + d$ , т.е. при  $d = 9$ ; но у нас  $d < 9$ , а третье равенство выполняется при  $d = 8$ , и мы получаем ещё одно решение:  $91 + 98 = 189$ .

В случае  $c = 1$  или  $d = 1$  мы получаем симметричные решения.

Итак, данная система имеет 6 решений:  $10 + 99 = 109$ ,  $99 + 10 = 109$ ,  $19 + 90 = 109$ ,  $90 + 19 = 109$ ,  $91 + 98 = 189$ ,  $98 + 91 = 189$ .

**Ответ:** 6.

**Задача 6.** Два игрока поочередно в произвольном порядке заменяют коэффициенты многочлена

$$a_1 x^{1920} + a_2 x^{1919} + \dots + a_k x^{1921-k} + \dots + a_{1920} x + a_{1921}$$

целыми числами (каждый коэффициент можно заменить ровно один раз). Начинаящий игрок побеждает, если все значения многочлена, полученного в конце игры, при целых значениях переменной дают одинаковые остатки при делении на 6; если же это условие не выполнено, побеждает второй игрок. Кто победит при правильной игре?

**Решение:** Заметим сначала, что для любого целого  $k$

$$k^3 - k = k(k^2 - 1) = (k - 1)k(k + 1)$$

представляет собой произведение трех последовательных чисел, а значит, делится на 6. То же верно и для  $k^4 - k^2$ . Поэтому для делимости многочлена

$$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 \quad (1)$$

на 6 при любом  $x \in \mathbb{Z}$  достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$a + c = 0, b + d = 0. \quad (2)$$

Объединяя в данном многочлене слагаемые с 1-го по 4-е, с 5-го по 8-е и т.д., мы представим его в виде суммы  $a_{1921}$  и слагаемых вида  $x^{4k} f_k(x)$  ( $k = 0, \dots, 249$ ), в которых  $f_k(x)$  имеет вид (1).

Поэтому начинающий игрок может придерживаться следующей стратегии: положить  $a_{1921}$  равным желаемому остатку, и затем на любом шагу, если его партнёр выбирает коэффициент, входящий в состав  $f_k(x)$ , то он выбирает свой коэффициент так, чтобы выполнялось соответствующее равенство (2). Тогда многочлен с числовыми коэффициентами, получающийся на каждом шагу, будет отличаться от  $a_{1921}$  на слагаемое, делящееся на 6, поэтому при любом  $x \in \mathbb{Z}$  результирующий многочлен при делении на 6 будет давать остаток  $a_{1921}$ .

**Ответ: победит начинающий игрок.**

**Задача 7.** Найти все функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , являющиеся решениями функционального уравнения

$$f(a + x) - f(a - x) = 4ax, \quad (1)$$

где  $a \in \mathbb{R}$  — фиксированное число.

**Решение:** Тождество

$$(a + x)^2 - (a - x)^2 = 4ax$$

показывает, что одним из решений уравнения (1) является функция  $f(x) = x^2$ .

Если теперь  $f$  — произвольное решение уравнения (1), то, обозначив через  $g(x)$  выражение  $f(x) - x^2$ , будем иметь равенство

$$g(a + x) - g(a - x) = f(a + x) - (a + x)^2 - f(a - x) + (a - x)^2 = 4ax - 4ax = 0,$$

т.е.  $g(a + x) = g(a - x)$ . Из этого равенства следует, что если ввести обозначение  $h(x) = g(x + a)$ , то  $h(x)$  окажется чётной функцией, и следовательно, всякое решение  $f$  уравнения (1) имеет вид:

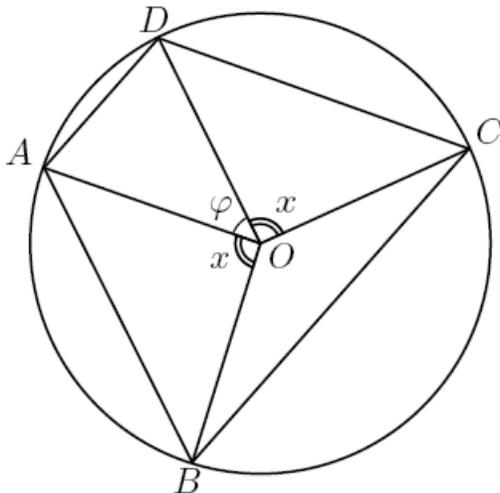
$$f(x) = x^2 + h(x - a), \quad (2)$$

где  $h$  — некоторая чётная функция.

Легко проверить, что и обратно, всякая функция, определённая формулой (2), при чётной функции  $h$  удовлетворяет уравнению (1), так что формула (2) и описывает общий вид решения уравнения (1). Пример:  $f(x) = x^2 + b(|x - a| + |x + a|)$ ,  $b$  — произвольная постоянная.

**Задача 8.** В круге радиуса  $R$  проведена хорда  $AD$  длиной, равной единице. С помощью циркуля и линейки постройте параллельную ей хорду  $BC$  так, чтобы трапеция  $ABCD$  имела наибольшую площадь. Рассмотреть случаи: а)  $R = 1$ ; б)  $R = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$ .

Решение:



Пусть  $ABCD$  – искомая трапеция, вписанная в данный круг с центром  $O$  и радиусом  $R$ . Концы искомой хорды  $BC$  принадлежат большей из дуг с концами  $A$  и  $D$ . В самом деле, если допустить противное, то можно построить на большей дуге точки  $B_1$  и  $C_1$  такие, что  $(BC) \parallel (B_1C_1)$ ,  $|BC| = |B_1C_1|$ . В этом случае высота трапеции  $AB_1C_1D$  больше высоты трапеции  $ABCD$ , что противоречит допущению.

Обозначим  $\widehat{AOD} = \varphi (\varphi \leq 180^\circ)$ ,  $\widehat{AOB} = \widehat{COD} = x$ . Тогда  $\widehat{BOC} = 360^\circ - (2x + \varphi)$ ;  $S_{ABCD} = S_{AOD} + 2S_{AOB} + S_{BOC} = \frac{1}{2}R^2 \sin \varphi + R^2 \sin x - \frac{1}{2}R^2 \sin(2x + \varphi)$ . Исследуем на экстремум функцию  $S(x) = \sin x - \frac{1}{2} \sin(2x + \varphi)$ . Из того, что  $S'(x) = \cos x - \cos(2x + \varphi) = 0$ , имеем  $2x + \varphi = \pm x + 360^\circ k$ , т.е. при  $x_1 = 360^\circ k - \varphi$  и  $x_2 = \frac{360^\circ k - \varphi}{3}$  функция  $S(x)$  имеет экстремум. Так как, согласно условию задачи,  $0^\circ < x < \frac{360^\circ - \varphi}{2}$ , то трапеция  $ABCD$  имеет наибольшую площадь при  $x = \frac{360^\circ - \varphi}{3}$ . Следовательно, точки  $B$  и  $C$  делят большую из дуг  $AD$  на три равные части.

Построение хорды  $BC$  в общем случае нельзя выполнить циркулем и линейкой, так как построение точки  $B$  сводится к трисекции дуги  $AD$ , а эта задача неразрешима циркулем и линейкой.

В частности, разделить угол  $\varphi = 60^\circ$ , который получается при  $R = 1$  на три части невозможно, что означает невозможность построения исходной трапеции.

Однако если рассмотреть  $R = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$  и найти из теоремы косинусов соответствующий ему угол  $\varphi$ , получим

$$1 = 2 \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2} (1 - \cos \varphi),$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = 1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда  $x = \frac{360^\circ - \varphi}{3} = 105^\circ$  и  $AB^2 = 2R^2 (1 - \cos 105^\circ) = 2R^2 (1 + \sin 15^\circ)$ .

Поскольку в задаче изначально дан единичный отрезок, а

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2},$$

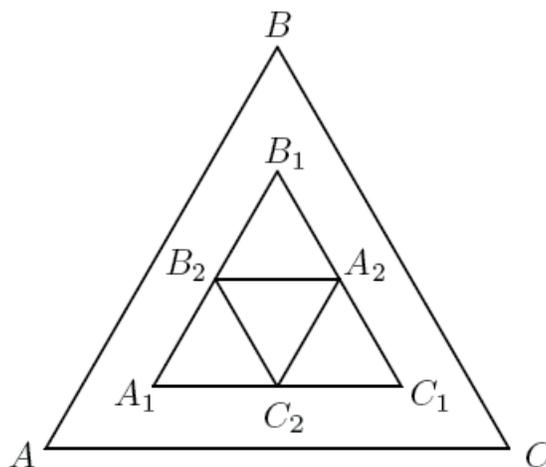
все необходимые построения можно совершить с помощью циркуля и линейки.

Н.В. Для построения квадратного отрезка длиной  $\sqrt{x}$  необходимо построить окружность диаметра  $x + 1$ , восстановить перпендикуляр из точки, находящейся на расстоянии 1 от конца диаметра, и продолжить его до пересечения с окружностью. Отрезок перпендикуляра и даст искомую длину.

**Ответ:** а) построение циркулем и линейкой невозможно; б) построение возможно.

**Задача 9.** Внутри правильного треугольника со стороной  $4 + 2\sqrt{3}$  находятся 5 непересекающихся окружностей радиуса 1 (допускаются касания окружностей между собой и со сторонами треугольника). Доказать, что, не меняя положение данных окружностей, в этот треугольник можно поместить ещё одну единичную окружность, не пересекающуюся с данными.

**Решение:**



На рисунке  $ABC$  — правильный треугольник со стороной  $4 + 2\sqrt{3}$ . Стороны треугольника  $A_1B_1C_1$  соответственно параллельны сторонам треугольника  $ABC$  и удалены от соответствующих сторон на расстояние, равное 1. Легко подсчитать, что сторона треугольника  $A_1B_1C_1$  равна 4.  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  — середины сторон треугольника  $A_1B_1C_1$ . Докажем, что центр каждой из пяти окружностей должен совпадать с одной из шести точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ . Рассмотрим четыре правильных треугольника  $A_1B_2C_2$ ,  $A_2B_1C_2$ ,  $A_2B_2C_2$ ,  $A_2B_2C_1$ . Сторона каждого треугольника равна 2 (каждый треугольник рассматривается вместе с его границей). Найдётся по крайней мере один треугольник, содержащий центры не менее чем двух окружностей, поскольку центры всех пяти окружностей принадлежат треугольнику  $A_1B_1C_1$ . Но расстояние между центрами любых двух окружностей не меньше 2. Если же в правильном треугольнике со стороной, равной 2, расположены две точки, расстояние между которыми не меньше 2, то они должны совпадать с двумя вершинами этого треугольника. Значит, хотя бы одна из точек  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  должна являться центром окружности. Пусть это будет точка  $A_2$ . Центр любой окружности, отличный от  $A_2$  и принадлежащий одному из трёх треугольников  $A_2B_1C_2$ ,  $A_2B_2C_1$ ,  $A_2B_2C_2$ , должен совпадать с какой-либо вершиной соответствующего треугольника, поскольку всем этим треугольникам принадлежит точка  $A_2$ . Если таких окружностей 4, то их центры будут находиться в точках  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ; если таких окружностей 3, то их центры окажутся в трёх из перечисленных четырёх точек, а центр пятой будет в точке  $A_1$ , так как хотя бы в одной из точек  $B_2$  или  $C_2$  должен быть центр окружности. Этим исчерпываются все возможные варианты.

Таким образом, мы доказали, что центры пяти данных окружностей должны совпадать с пятью из шести точек  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ . Значит, можно поместить в треугольник  $ABC$  ещё одну, шестую окружность, не пересекающуюся с пятью данными, взяв её центр в соответствующей свободной точке.

**Задача 10.** Робот случайно выбирает натуральное число из отрезка  $[1921; 2021]$ . Какова вероятность того, что выражение  $2^x - x^2$  делится на 7?

**Решение:** Чтобы число  $2^x - x^2$  делилось на 7, необходимо, чтобы числа  $2^x$  и  $x^2$  имели при делении на 7 равные остатки.

Нетрудно проверить, что остатки числа  $2^x$  при делении на 7 меняются циклично с периодом 3, в то время как остатки числа  $x^2$  так же цикличны, но с периодом 7. Значит, чтобы рассмотреть все возможные ситуации для разности этих чисел, нам достаточно проверить 21 последовательное число. Для наглядности внесём результаты в таблицу:

$x$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
остаток $2^x$	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2
остаток $x^2$	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	1
$\div 7$	√					√							

$x$	23	24	25	26	27	28	29	30
остаток $2^x$	4	1	2	4	1	2	4	1
остаток $x^2$	4	2	2	4	1	0	1	4
$\div 7$	√		√	√	√			

Здесь мы начали запись с 10, т.к.  $1921 = 21 \cdot 91 + 10$ . Как видно, на периоде встречается 6 совпадений остатков, а в интервал  $[1921; 2021]$  укладывается четыре полных периода и ещё 17 чисел. Значит, всего значений, при которых  $(2^x - x^2) \div 7$ , будет  $6 \cdot 4 + 5 = 29$ , и вероятность благоприятного исхода равна

$$P(A) = \frac{29}{101}.$$

Ответ:  $\frac{28}{101}$ .

### Задача заключительного тура олимпиады ТИИМ по информатике

#### Задача 6. Оборона территории

Горожане построили для обороны поселения башни. На каждой башне расположен наблюдатель с известным радиусом обзора.

Расположение башен задано их координатами на плоскости.

Найти площадь территории, обозреваемой наблюдателями.

#### Входные данные:

Список башен вида:

$x_1 y_1 r_1$

$x_2 y_2 r_2$

...

$x_n y_n r_n$

Здесь  $x_k$  — первая координата башни,  $y_k$  — вторая координата башни,  $r_k$  — радиус обзора башни.

Максимальное расстояние между башнями для любого из наборов тестовых данных  $\leq 1500$  м.

$10 \leq$  Радиус обзора каждой башни  $\leq 500$  м.

$1 \leq$  Количество башен  $\leq 20$ .

#### Выходные данные:

Площадь обозреваемой территории, округленная до тысяч.

#### Время работы программы:

Время выполнения программы на сервере ограничено 10 секундами.

#### Набор тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
0 0 50 -100 -100 50 0 -100 50 -100 0 50	31000
0 0 500 0 100 400 0 200 300 0 300 200	785000
0 100 200 100 100 200	165000
-500 -500 400 -500 500 400 500 -500 400 500 500 400	2011000
0 0 100 0 200 100 0 400 100 0 600 100 0 800 100 200 0 100 200 200 100 200 400 100 200 600 100 200 800 100 400 0 100 400 200 100 400 400 100 400 600 100 400 800 100	471000

**Решение задачи на языке Python с использованием метода Монте-Карло** (*автор решения — призер заключительного тура олимпиады по информатике Алексей Ингеройнен, 9 класс, г. Кострома*):

```
import sys
import random

def main():
    check = sys.stdin.read()
    0 = [list(map(int, i.strip().split())) for i in check.split('\n')]
    xmin = ymin = 10**9
    xmax = ymax = - 10**9
    z = []
    for _ in 0:
        if _ == []:
            continue
        z.append(_)
        if _[0]- _[2]<xmin: xmin = _[0]-_[2]
```

```
        if _[1]-_[2]<ymin: ymin = _[1]-_[2]
        if _[0]+_[2]>xmax: xmax = _[0]+_[2]
        if _[1]+_[2]>ymax: ymax = _[1]+_[2]
n = len(z)
dx = xmax - xmin
dy = ymax - ymin
insie_points = 0
d = 1180000
for i in range(d):
    x = xmin + int(dx * random.random())
    y = ymin + int(dy * random.random())
    inside = False
    for j in range(n):
        if (x-z[j][0])**2 + (y-z[j][1])**2 <= z[j][2]**2:
            inside = True
            break
    if inside:
        insie_points += 1

print(round(dx * dy / d * insie_points / 1000) * 1000)
return -1
```

main()

*Андреев Александр Анатольевич,  
руководитель сектора олимпиад школьников МГУСИ,  
кандидат физ.-мат. наук, доцент.*

*E-mail: andre01071948@yandex.ru*

*Скородумова Елена Александровна,  
доцент кафедры “Теория вероятностей и  
прикладная математика” МГУСИ,  
кандидат физ.-мат. наук, доцент.*

*E-mail: Eas@mtuci.ru*

*Максимова Екатерина Алексеевна,  
специалист сектора олимпиад школьников МГУСИ.*

*E-mail: ekamaks@bk.ru*

### Две заметки по истории математики

*Б. Л. Дружинин*

В первой заметке рассказано о научных достижениях Николая Оремы, предвосхитивших многие результаты его знаменитых последователей. Во второй — о жизненном пути, научных и педагогических заслугах Леонтия Филипповича Магницкого, автора знаменитой “Арифметики”.

#### 1. Предшественник

Наша жизнь устроена так, что если за кем-то закрепится слава “первого”, то обязательно найдётся ещё кто-то, сделавший то же самое намного раньше. Пожалуй, самый яркий тому пример — считается, что Америку открыл Христофор Колумб. Но за 500 лет до него там уже побывали викинги Эрик Рыжий и его сын Лейф Счастливый, и даже основали поселения. А за сотню лет до них к берегам Америки подходил норвежец Ульфсон Гуннбьерн. А дата, когда Американский континент посетили представители Евразии чукчи, теряется в тумане веков.

#### Две цитаты

Теперь сравните две цитаты:

“Запаситесь мухами, бабочками и другими подобными мелкими летающими насекомыми; пусть будет у вас там также большой сосуд с водой и плавающими в нём маленькими рыбками; подвесьте, далее, наверху ведёрко, из которого вода будет падать капля за каплей в другой сосуд с узким горлышком, подставленный внизу. Пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте прилежно, как мелкие летающие животные с одной и той же скоростью движутся во все стороны помещения; рыбы, как вы увидите, будут плавать безразлично во всех направлениях; все падающие капли попадут в подставленный сосуд... Заставьте теперь корабль двигаться с малой скоростью и тогда (если только движение будет равномерным и без качки в ту и другую сторону) во всех названных явлениях вы не обнаружите ни малейшего изменения и ни по одному из них не сможете установить, движется ли корабль или стоит неподвижно.”

“Подобным образом, если бы воздух был закрыт в движущемся судне, то человеку, окружённому этим воздухом, показалось бы, что воздух не движется... Внутри корабля, движущегося с большой скоростью на восток, могут иметь место все виды движения: продольное, поперечное, вниз, вверх, во всех направлениях — и они кажутся точно такими же, как тогда, когда корабль пребывает неподвижным.”

Кажется, что вторая цитата является просто коротким пересказом первой, хорошо известной и принадлежащей великому Галилео Галилею. Да, кажется. Но первая цитата появилась в 1638 году, а вторая на два с лишним века раньше — в 1377 году. Её автор — Николай Орем.

#### Первые годы

О дате рождения Николая Оремы достоверно неизвестно. Можно только предполагать, что это начало 14-го века, так как он учился в Парижском Университете, где ему преподавал основатель

французской школы естественной философии легендарный Жан Буридан. Именно Буридану приписывается ситуация с “Буридановым ослом”, который не смог сделать выбор между двумя одинаковыми охапками сена и помер с голоду.

Николай появился на свет в бедной крестьянской семье в небольшой деревушке Аллемань, входившей в состав королевства Наварра. Сейчас Аллемань принадлежит провинции Нормандия, что находится на северо-западе Франции и славится на весь мир сыром камамбер.

Начальное образование Николай Орем получил в колледже Наварры, бюджетном учебном заведении, содержащемся на средства королевской казны. По окончании колледжа поступил в Парижский Университет, где учился вместе с будущим ректором Сорбонны Альбертом Саксонским.

### **Карьера**

Учился Николай Орем неплохо. По окончании университета он более десяти лет преподавал в Наваррском колледже. На него обратил внимание сам король Франции Иоанн II Добрый и сделал воспитателем своего старшего сына Карла, будущего короля Франции Карла V Мудрого. Судя по всему, справлялся со своими обязанностями Николай успешно. Во время Эдвардианской войны (первого этапа Столетней войны между Англией и Францией) Иоанн II попал в плен к англичанам. Во главе Франции встал восемнадцатилетний Карл V. И он смог вернуть все территории, захваченные англичанами и восстановить власть над государством. Собственно, этим и закончился первый этап Столетней войны.

В Парижском университете, как и в других высших учебных заведениях того времени, обязательно преподавали богословие. Николай Орем относился к этому предмету с должным почтением, и в 1361 году его назначили архидиаконом (т.е. старшим диаконом) в городе Байе. Очень скоро Николая переводят в ранг каноников в город Руан. А каноники — это уже номенклатура католической церкви, так что более или менее безбедное существование ему обеспечено. Через пять лет он уже настоятель Руанского Собора. В 1377 году его избрали епископом города Лизье. Теперь выше него остался только Папа Римский.

### **Аристотель?**

Естественно, в университете Николай Орем познакомился с учением Аристотеля, единственно верным с точки зрения Церкви. Не случайно в 1369 году Карл V поручил ему перевести с латыни на французский язык труды Аристотеля. Именно во время этой работы у Орема появились некоторые сомнения в истинности ряда положений учения великого грека. Возможно, этому способствовал и его университетский профессор Жан Буридан, который писал: “На доводы от авторитета не знаю как отвечать, иначе как отрицая авторитеты”. Но чтобы отрицать, нужны веские аргументы.

Свои взгляды Николай Орем изложил в написанной на французском языке “Книге о небе и мире”. В ней он подвергает сомнению постулат Аристотеля о вращении небесной сферы вокруг неподвижной Земли. “Легче представить себе вращение самой Земли, чем вращение вокруг неё огромной звездной сферы. Если бы человек, оказавшийся на небе и увлекаемый его суточным движением, мог ясно видеть Землю и её горы, долины, реки, города и замки, то ему показалось бы, что Земля вращается суточным вращением, точно так же, как нам на Земле кажется, что небеса движутся.

Орем утверждает, что “никаким опытом нельзя доказать, что небо движется в своем дневном движении, а Земля остаётся неподвижной”. Именно здесь он приводит пример с движущимся кораблём, повторенный через четверть тысячелетия Галилео Галилеем.

### **Оксфордовские калькуляторы**

Большое влияние на мировоззрение Орема оказали работы Оксфордовских калькуляторов. Группа философов из Мертон-колледжа в Оксфорде изучала всевозможные движения и изменения в природе, выделенные ими в особую дисциплину “учение об интенсии и ремиссии качеств”. Они рассматривали процессы в динамике, когда какие-либо величины непрерывно увеличиваются (интенсия) или уменьшаются (ремиссия).

Оксфордовские калькуляторы ввели в механику понятия мгновенной и средней скорости. Они утверждали, что средняя скорость равнопеременного движения равна среднему значению начальной и конечной скорости, и что если равноускоренное движение начинается из состояния покоя, то за первую половину времени движения проходит путь, равный четверти полного пути.

Эти утверждения Николай Орем доказал. Также он разрабатывал теорию импетуса, согласно которой причиной движения брошенных тел является некоторая сила (импетус), вложенная в них внешним источником. По мнению Орема, рука сообщает брошенному камню импетус не просто благодаря своему движению вместе с камнем, а благодаря ускорению этого движения: сначала рука с камнем неподвижна, затем она ускоряется до некоторой скорости, когда ладонь разжимается и камень отрывается от руки. Соответственно, импетус вызывает не только скорость, но и ускорение тел.

### А все-таки она вертится?

И Орем делает вывод, что движение планет определено не Богом, сотворившим Землю, а равновесием природных сил. Самое удивительное — окончательный вердикт Орема о возможности вращения Земли был отрицательным. Почему? Возможно, он не хотел повторить судьбу своего учителя Бурридана, которого, по легенде, зашили в мешок и бросили в Сену. Николай Орем переключается на математику.

Церковь ещё долго боролась самыми жестокими методами с сомневающимися в учении Аристотеля. Вспомните судьбу Джордано Бруно, заживо сожженного 17 февраля 1600 года в Риме на площади Цветов. А Николая Коперника от казни спасла только естественная смерть.

В 1634 году Рене Декарт закончил книгу под названием “Мир”, но не решился её издавать, мотивируя это следующим образом: “Это меня так поразило, что я решил сжечь все мои бумаги, по крайней мере никому их не показывать; ибо я не в состоянии был вообразить себе, что он, итальянец (Галилей), пользовавшийся расположением даже Папы, мог быть осуждён за то, без сомнения, что хотел доказать движение Земли... Признаюсь, если движение Земли есть ложь, то ложь и все основания моей философии, так как они явно ведут к этому же заключению.” И Декарт также переключился на математику.

### Декарт?

Попробуйте разобраться в таких выражениях:

$$\kappa^{\nu}\alpha\iota\sigma\mu\beta\iota\eta\zeta\alpha \quad \text{или} \quad A \text{ cubus} + B \text{ plano } 3 \text{ in } A \text{ aequari } D \text{ solido.}$$

Так ещё в начале 17-го века записывались уравнения.

В 1637 году в Лейдене вышла книга Декарта “Рассуждение о методе, позволяющем направлять свой разум и отыскивать истину в науках”. И уже почти четыре столетия в алгебре используется предложенная Декартом символика, ставшая привычной современному школьнику. Коэффициенты он обозначал  $a, b, c, \dots$ , а неизвестные —  $x, y, z$ . Степень числа изображалась, как и сейчас:  $a^n$ . Уравнения записывались в канонической форме, а именно: выражение слева приравнивалось к нулю справа. Появилась горизонтальная черта над знаком извлечения корня.

А ещё в книге излагалась аналитическая геометрия. Именно там Декарт вводит понятие системы координат и наглядно демонстрирует все преимущества, связанные с этим понятием. Уже потом математики научились работать в криволинейных, полярных и других системах координат, но прямоугольную систему координат мы традиционно называем декартовой.

За два с половиной века до Декарта Николай Орема написал “Трактат о конфигурации качеств”. Именно в этой работе была предложена идея наглядного изображения на плоскости переменных процессов с помощью графика в прямоугольной системе координат. Но “оремова система координат” звучит уж больно непривычно для наших ушей.

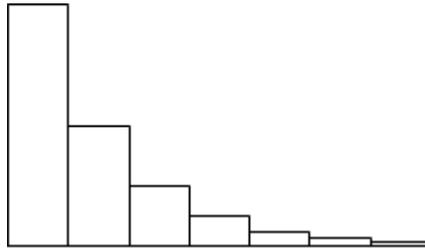
## Непер?

В середине прошлого века каждый старшеклассник нёс в школу помимо учебников и тетрадей легендарные “таблицы Брадиса” с десятичными логарифмами. Студенты технических ВУЗ’ов в обязательном порядке имели при себе логарифмическую линейку. Первым дал определение логарифмов и опубликовал их таблицы в 1614 году Джон Непер. Великий математик Лаплас утверждал, что изобретение логарифмов, “сократив труд астронома, удвоило его жизнь”.

Надо думать, что идею логарифмов Неперу подсказал Николай Орем. Он первым начал работать с дробными показателями степени точно так, как работали с ними школьники 20-го века. Конечно, можно упрекнуть Орема, что он не догадался назвать логарифмы “логарифмами” и не стал утруждать себя составлением их таблиц. Всему своё время.

### Конечная бесконечность

В “Трактате о конфигурации качеств” Орем первым привёл примеры геометрических фигур, имеющих бесконечную протяжённость, но, тем не менее, конечную площадь. Вот один из них. Фигура составлена из прямоугольников с одинаковой шириной 0,25 см. Высота первого прямоугольника  $h_1 = 4$  см, высота второго  $h_2 = 2$  см, высота третьего  $h_3 = 1$  см и далее высота следующего прямоугольника в 2 раза меньше высоты предыдущего.



Понятно, что чисто математически высоту прямоугольников можно уменьшать сколько угодно раз, поэтому конструкция из таких прямоугольников протянется до бесконечности. Площадь первого прямоугольника  $S_1 = 1$  см<sup>2</sup>, площадь второго  $S_2 = 0,5$  см<sup>2</sup>, площадь третьего  $S_3 = 0,25$  см<sup>2</sup>, и так далее. Площадь всей фигуры  $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots$  является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Формула суммы  $S = b_1/(1 - q)$ . У нас  $b_1 = 1$ ,  $q = 0,5$ . Получается  $S = 2$ . Это означает, что бесконечно протяженная фигура имеет конечную площадь.

### Бесконечная бесконечность

А ещё Николай Орем разобрался с гармоническим рядом. *Гармоническим* называется ряд:  $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$ . Число  $c$  есть *среднее гармоническое* чисел  $a$  и  $b$ , если

$$c = \frac{2}{1/a + 1/b}.$$

Легко убедиться, что в нашем ряду из любых трёх взятых подряд чисел центральное число является средним гармоническим крайних чисел. Математики давно подозревали, что сумма членов гармонического ряда стремится к бесконечности, но доказал это Николай Орем. Вот его доказательство.

Надо оценить сумму членов ряда

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Первые два числа трогать не будем, а третий член нашего ряда сложим с четвёртым, пятый с шестым, седьмым и восьмым, потом сложим члены с 9-го по 16-ый, с 17-го по 32-ой, с 33-го по 64-ый и т.д. Схема понятна:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right] + \left[ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right] + \left[ \frac{1}{9} + \dots \right] + \dots$$

Заменим в знаменателях 3 на 4; 5, 6 и 7 на 8; 9, 10, 11, 12, 13, 14 и 15 на 16. И так в каждой скобке заменим числа в знаменателях на последнее. От этого все дроби и их суммы только уменьшатся. Получается, что новая сумма  $S_n$  будет меньше  $S$ .

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] + \left[ \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right] + \left[ \frac{1}{16} + \dots \right] + \dots$$

Сумма в каждой скобке равна  $1/2$ , а таких скобок бесконечно много. Получается, что сумма  $S_n$  стремится к бесконечности. Если мы зададим любое, пусть и очень большое число, то когда-нибудь  $S_n$  его превзойдет. Но  $S > S_n$ , значит и  $S$  стремится к бесконечности.

### Память

Умер Николай Орем 11 июля 1382 года. Часто законам и изобретениям присваивают имена их “родителей”. От постоянного употребления эти имена превращаются в названия, обретают независимость. Произносятся “ватт”, “рентген”, “дизель”, “джоуль”, “ньютон”, “герц”, “ом”, “кардан”, мы попросту забываем, что это фамилии великих людей. Увы, “орем” в этом ряду отсутствует. А ведь Николай Орем был среди тех, кто в эпоху возрождения закладывал фундамент современной науки. Он больше, чем на два века опередил Декарта, Коперника, Непера, Галилея и многих других выдающихся ученых. А может, он просто убежал вперед слишком далеко, так что современники его не могли разглядеть и про него попросту забыли, и уже другим ученым пришлось открывать всё заново?

## 2. Птенец гнезда Петрова

“... Юноша очень хотел учиться и воспользовался рыбным обозом, чтобы из российской глубинки отправиться получать образование...” О ком это написано? Любой россиянин уверенно ответит: “О Ломоносове” и будет прав. Любопытно, но ещё один великий русский ученый также шел с рыбным обозом за знаниями, по его книгам учился Ломоносов и даже назвал их “вратами знаний”. Это Леонтий Филиппович Магницкий.

### Детство

Леонтий появился на свет 9 июня 1669 года в Осташковской слободе на берегу славного озера Селигер в семье простого крестьянина. Отца его звали Филиппом по прозвищу Теляшин, фамилии же в то время крестьянам не полагались. Леонтий рос мальчиком любознательным и еще в детстве самостоятельно научился читать и считать, особенно его привлекала арифметика. Пономарь местной церкви успешно совмещал службу с чрезмерным увлечением алкоголем и часто доверял Леонтию читать вместо себя псалмы, что тот успешно и исполнял.

В 1684 году Леонтий отправился с рыбным обозом в Иосифо-Волоколамский монастырь. Игумен быстро оценил его грамотность и смекалку и оставил при монастыре чтецом. Ещё через пару лет, понимая, что толковому юноше надо учиться, игумен отправил его в Москву в недавно учреждённую Славяно-греко-латинскую Академию, единственное на то время высшее учебное заведение России. Так закончилось детство Леонтия.

### Академия

Целью создания Академии была подготовка образованных людей для нужд России. Академия давала образование не только детям аристократов, государственных и церковных чиновников, но и детям торговцев, и даже холопов.

Поначалу студентов обучали греческому и латинскому языкам, поскольку на них велись занятия по другим предметам. Потом уже изучали грамматику, пиитику, риторику, логику и элементарную физику. Впрочем, о какой физике, пусть даже самой примитивной, может идти речь, если в Академии не преподавали математику.

Пришлось Леонтию вновь заняться самообразованием. Поскольку в России приемлемых учебников по математике не было, он самостоятельно выучил немецкий, итальянский и голландский языки, чтобы изучать математику по иностранным книгам.

По завершении в 1694 году учебы в Академии Леонтий остался в Москве, зарабатывая на жизнь частными уроками в богатых семьях. Постепенно его слава выдающегося математика росла.

### **Навигацкая школа**

Стране потребовались образованные люди в значительно большем количестве, чем в предшествующие десятилетия. Был создан ряд технических учебных заведений, первым из которых была школа навигацких и математических наук, открытая в Москве, в Сухаревой башне, в 1701 году. Главным предметом обучения были математические и навигацкие науки — артиллерийские, инженерные и морские.

И совсем не удивительно, что Леонтий по личному распоряжению Петра I был назначен в эту школу преподавателем. Царь умел находить людей, полезных для России, из каких бы слоев общества они ни происходили. Петру нравился Леонтий за живой ум и большие познания и, в знак глубокого уважения к математическому таланту и просветительской деятельности Леонтия Филипповича, он придумал ему фамилию “Магницкий”. Петр сказал: “Да ты, братец, силен в науках, притягиваешь знания как магнит. Быть тебе по сему Магницким”. Так сын простого крестьянина получил фамилию от самого царя, а ведь в то время фамилии имели только представители привилегированных слоев общества.

### **Дворянин**

В конторской книге Оружейной палаты есть такая запись: “В 1701 году Февраля в 1 день взят в ведомость Оружейной палаты ошашковец Леонтий Магницкий, которому велено ради народной пользы издать через труд свой словенским диалектом книгу арифметики”.

И Леонтий, теперь уже Магницкий, принялся за дело. Через два года книга “Арифметика, сиречь наука числительная с разных диалектов на славенский язык переведенная и во едино собрана, и на две книги разделена” была готова. Её напечатали тиражом 2400 экземпляров за казённый счет. Книга разошлась очень быстро и ею пользовались ещё многие годы.

А вот главный труд Ньютона “Математические начала натуральной философии” был напечатан тиражом 300 экземпляров. Публикацию предполагалось осуществить на средства Лондонского Королевского общества (главного научного общества Великобритании), но в начале 1686 года Общество издало не нашедший спроса трактат по истории рыб, и тем самым истощило свой бюджет. Расходы по изданию “Начал” взял на себя товарищ Ньютона астроном Эдмунд Галлей. Общество с признательностью приняло этот великодушный поступок и в качестве частичной компенсации бесплатно предоставило Галлею 50 экземпляров трактата по истории рыб. Точно по русской поговорке “На тебе, Боже, что нам негоже”.

Так что сравните просвещённую Англию с отсталой Россией.

В 1704 году Магницкому царским указом было пожаловано дворянство. Пётр наградил его деревнями во Владимирской и Тамбовской губерниях, приказал выстроить ему дом на Лубянке.

### **Цифирные школы**

Первой цифирной школой назывался открытый в 1701 году подготовительный класс при Школе математических и навигацких наук в Москве, в котором учили счёту и началам арифметики. А в 1714 году царским указом предписывалось при архиерейских домах и знатнейших монастырях завести цифирные школы, где дети обучались бы арифметике и началам геометрии.

Для детей духовенства обучение в этих школах было обязательно: не желающим учиться грозила военная служба (ничего не напоминает?). Более того, юношам, не окончившим курса цифирной школы, даже не разрешалось жениться. Теперь понятно желание Митрофанушки из “Недоросля” Фонвизина: “Не хочу учиться, хочу жениться!”.

Не случайно именно Магницкому поручили подбирать учителей для цифирных школ. Естественно, в первую очередь Леонтий Филиппович стремился выбрать учителей из своих бывших учеников, окончивших Навигацкую школу.

В 1715 году в Петербурге открыли Морскую академию, куда было перенесено обучение военным наукам, а в московской Навигацкой школе стали учить только арифметике, геометрии и тригонометрии. С этого момента Магницкий стал старшим учителем школы и руководил её учебной частью. А с 1732 года и до последних дней своей жизни Магницкий руководил Навигацкой школой.

### Вечная память

Похоронили Леонтия Филипповича в храме Гребенёвской Иконы Божией Матери, находившемся в Москве, в Белом городе, на Лубянской площади. Простоял храм до 1927 года, когда начался разбор колокольни и трапезной.

Когда в старинном городе в историческом центре намечается строительство, первыми на строительную площадку приходят археологи. Москва — не исключение. 27 мая 1932 года при постройке первой линии московского метрополитена, как раз на месте храма Гребенёвской Иконы Божией Матери, на глубине одного метра археологи обнаружили плиту из известняка, на обратной стороне которой оказалась тонко выбита “эпитафия” надгробия Л.Ф. Магницкого, написанная его сыном Иваном:

*“В вечную память... добродетельно пожившему Леонтию Филипповичу Магницкому, первому в России математики учителю, zde погребенному, мужу..., который путь сего временного и прискорбного жития начал 1669 года июня 9-го дня, наукам изучился дивным и неудобовероятным способом, его величеству Петру первому для остроумия в науках учинился знаем в 1700 году и от его величества, по усмотрении нрава ко всем приятнейшего и к себе влекущего, пожалован, именован прозванием Магницкий и учинен российскому благородному юношеству учителем математики, в котором звании ревностно, верно, честно, всеприлежно и беспорочно служба и пожив в мире 70 лет, 4 месяца и 10 дней, 1739 года, октября 19-го дня, о полуночи в 1 часу, оставя добродетельным своим житием пример оставшим по нем, благочестно скончался...*

*Преставльшемуся же исполняя взаимную христианскую любовь помолимся прилежно...*

*Не по должности написал горькослезный Иван, низайший раб, сын ему любезный.”*

В Осташкове чтут Леонтия Филипповича Магницкого. Его именем названы Верхневолжский духовно-просветительский центр “Наследие Селигера” и одна из центральных улиц города.

Магницкий внес огромный вклад в развитие астрономии, его по праву называют первым астрономом России. В 2005 году Крымской астрофизической обсерваторией его именем названа только что открытая малая планета.

Есть улица Магницкого в Чебоксарах.

### Арифметика

Теперь об учебнике Л.Ф. Магницкого “Арифметика, сиречь наука числительная...”, сделавшем его знаменитым.

Учебник разделен не две книги. Первая книга содержит пять частей. Первая часть посвящена целым числам и действиям над ними, а также прогрессиям. Во второй части рассматриваются дроби и действия над ними. Далее идут две части с различными правилами решения задач, и часть пятая “О прогрессии и радикасе (так Магницкий называл корни) квадратных и кубических”.

Книга вторая подразделяется на три следующие части: “Арифметика алгебраика”; “О геометрических алгебраику действующих”; “Общие о земном размерении и яже к мореплаванию принадлежа”. Заканчивается книга дополнением “О толковании проблемат навигацких различных через вышеположенные таблицы локсодромические”.

Любопытно, как Магницкий определяет натуральные числа в разделе “нумерация”. В нем говорится: “нумерация есть счисление словами всех чисел, которые изображаемы быть могут десятью такими знаками: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Из них девять значащих; последняя же 0, если стоит одна, то сама по себе значения не имеет. Когда же она присоединяется к какой-нибудь значащей то увеличивает в десять раз, как будет показано в дальнейшем”.

Значащие цифры Магницкий именует “знаменованьями”, все однозначные числа — “перстами”.

Числа, составленные из однозначных чисел и нулей (например, 10, 20, 900, 5000 и т.п.), — “суставами”. Все остальные числа (например, 12, 55, 378 и т.д.) — “сочинениями”. Цифру 0 здесь он называет “низачто”.

Также Магницкий впервые использовал такие термины, как множитель, делитель, знаменатель, произведение, дробь, корень, миллион, миллиард.

Целая страница занята числами вида  $10^N$  ( $N$  — целое положительное) и приводятся их наименования. Таблица таких чисел доведена до  $10^{24}$ , после чего следует стихотворение, указывающее на неограниченность числового ряда:

Число есть бесконечно,  
Умом нам недотечно.  
И ни кто знает конца,  
Кроме всех Бога творца....

### Переправа

Магницкий создавал “Арифметику” для Навигацкой школы, выпускники которой могли работать и работали капитанами и штурманами на судах дальнего плавания. Задачи он подбирал соответствующие. Интересно, смогут ли сегодняшние старшеклассники справиться с задачами из “Арифметики”?

Мне не раз доводилось проводить развивающие занятия со школьниками и могу заверить, что такие задачи уверенно решают около 40–50% , так что за нынешних штурманов я спокоен.

Встречаются задачи счетные, логические и даже занимательные. Естественно, не все задачи Магницкий придумывал сам, некоторые он находил в иноземных книжках, переводил их и адаптировал под нашу российскую действительность того времени.

Вот одна из них. Её придумал монах из Ирландии Алкуин в конце 8-го века. Крестьянину нужно перевезти через реку волка, козу и капусту. Но лодка такова, что в ней может поместиться только крестьянин, а с ним или один волк, или одна коза, или одна капуста. Но если оставить волка с козой, то волк съест козу, а если оставить козу с капустой, то коза съест капусту. Как перевез свой груз крестьянин?

Надеюсь, вы знаете решение. А если не знаете, попробуйте решить сами или посмотрите в книжках Е.И. Игнатьева, Я.И. Перельмана или Б.А. Кордемского.

### Без перевода

Немного истории. Жил в 19-ом веке в Англии шахматист Стаунтон. И профессия у него была необычная — он переводил с английского языка на английский. Да, он переводил произведения Шекспира на современный ему язык. Так поменялся английский язык за два века. Русский язык тоже.

Купил некто трёх сукон 106 аршин; единого взял 12-ю больше перед другим, а другого 9-ю больше перед третьим, и ведательно есть, колико коего сукна взято было?

Это далеко не самая сложная для перевода задача, но кое-кто всё равно плохо понимает. Вот одно из предлагаемых решений

Чтобы решить задачу, нужно найти то сукно, которого взято меньше. Это второе сукно. Возьмем его размер за  $x$ . Тогда первое —  $x + 12$ , а третье —  $x + 21$ . Составим уравнение  $3x + 33 = 108$ , откуда  $x = 25$  аршин. Значит, первого сукна было 37 аршин, а третьего — 46.

Прочитайте внимательно условие задачи. Всё-таки меньше взято третьего сукна. Тогда его размер надо взять за  $x$ , второго — за  $x + 9$ , а первого — за  $x + 9 + 12$ .

Поэтому приведу задачи Магницкого, уже переведённые на современный язык.

### Шахматная задача

Знаменитая “шахматная” задача. Она встречается почти во всех занимательных книжках. У Магницкого она оформлена так:

Один человек продал коня за 156 рублей; покупатель стал отдавать коня продавцу, говоря: “Не хорошо мне покупать этого коня, так как он недостоин столь высокой цены”. Тогда продавец предложил иные условия, сказав: “Если тебе эта цена кажется слишком большой, заплати только за гвозди в подковах, а коня возьми себе в дар. Гвоздей в каждой подкове по шесть, и за первый гвоздь дай мне полушку, за второй — две полушки, за третий — копейку (то есть четыре полушки) и т.д.”

Покупатель, видя столь малую цену и желая получить коня в дар, согласился на эту цену, думая, что за гвозди придется заплатить не более 10 рублей. Требуется узнать, на сколько покупатель проторговался?

1 полушка =  $1/4$  копейки.

Задача на геометрическую прогрессию. Можно решать “в лоб” — посчитать стоимость каждого гвоздя и потом всё сложить. А можно грамотно воспользоваться готовой формулой суммы  $n$  первых членов геометрической прогрессии. Решите сами и сравните с ответом 41943 руб 3 коп 3 полушки.

Увы, задача не шуточная. В 1914 году в Новочеркасске разбиралось дело о продаже стада в 20 овец по условию: уплатить за первую овцу 1 копейку, за вторую — 2 копейки, за третью — 4 копейки и т.д. Наверное, покупатель соблазнился надеждой дешево купить. А заплатить он должен по договору 1048575 копеек.

### Кому фрак с жилетом?

Попробуйте решить, не прибегая к составлению уравнения.

У приезжего молодца оценили “богатство”: модный жилет с поношенным фраком в три алтына без полушки, но фрак вполтремя дороже жилета, спрашивается каждой вещи цена.

1 полушка =  $1/4$  копейки, 1 алтын = 3 копейки. Дороже “вполтремя” — дороже в 2,5 раза.

Вот решение самого Магницкого: три алтына без полушки составляет 35 полушек и такова стоимость фрака вместе с жилетом, фрак по условию дороже жилета в 2,5 раза, поэтому жилет в 3,5 раза дешевле, чем фрак и жилет вместе, так что жилет стоит  $35 : 3,5 = 10$  полушек, а фрак стоит  $10 \cdot 2,5 = 25$  полушек или  $6\frac{1}{4}$  копейки.

Уверен, что составить уравнение и решить его для старшеклассников не проблема.

Обратите внимание на копеечную стоимость одежды. В те далёкие времена копейка ценилась высоко. На 1 копейку можно было пообедать в каком-нибудь придорожном трактире.

### Сколько стоит кафтан?

Эту задачу попробуйте решить, не составляя уравнение, так, как предлагает сам Магницкий.

Некий человек нанял работника на год, обещав ему дать 12 рублей и кафтан, но тот проработал 7 месяцев, захотел уйти и попросил достойной платы с кафтаном, а хозяин дал расчет 5 рублей и кафтан. Сколько стоит кафтан?

Вот решение Магницкого.

По условию задачи годовая оплата труда работника составляет 12 рублей и кафтан, тогда за один месяц он зарабатывает в 12 раз меньше, а именно 1 рубль и  $1/12$  стоимости кафтана. Работник не получил  $12 - 5 = 7$  (руб.) за  $12 - 7 = 5$  (месяцев), поэтому за один месяц ему платили  $7 : 5 = 1,4$  (руб.), а за 7 месяцев он получил  $7 \cdot 1,4 = 9,8$  (руб.), тогда кафтан стоил  $9,8 - 5 = 4,8$  (руб.).

Всё понятно?

### Репетитор

Помните замечательный рассказ Чехова “Репетитор”? Впрочем, у Чехова все рассказы замечательные. У Магницкого есть такая же задача, только вместо черного и синего сукна у него старые и молодые бараны.

Некий торговец купил 112 баранов старых и молодых, дав 49 рублей 20 алтын, за старого платил по 15 алтын и по 2 деньги, а за молодого по 10 алтын. Сколько старых и молодых баранов купил он?

Здесь предлагается составить уравнение и решить его. Нынешние старшекласники с этим справляются легко.

Деньга =  $1/2$  копейки.

Решение:  $x$  — количество молодых баранов,  $(112 - x)$  — количество старых баранов, 15 алтын 2 деньги = 46 копеек, 10 алтын = 30 копеек, 49 рублей 20 алтын = 4960 копеек. Получили уравнение:  $46 \cdot (112 - x) + 30 \cdot x = 4960$ ;  $5152 - 46x + 30x = 4960$ ;  $16x = 192$ ;  $x = 12$ .

Ответ: 12 молодых баранов и 100 старых.

Перельман предлагает при арифметическом решении такой задачи сначала предположить, что все бараны были старыми и т.д. А второкласники на развивающих занятиях решили наглядно без уравнений и предположений. Они дали каждому барану по 10 алтын, а остаток разделили по 5 алтын и 2 деньги между старыми баранами.

### Диофантово уравнение

Для следующей задачи можно составить уравнение с тремя неизвестными и решить его в целых числах. Такое уравнение называется “диофантово” в честь древнегреческого математика Диофанта. Постарайтесь понять ход решения, предложенного самим Магницким, не прибегая к уравнению.

Хозяин послал работника на базар купить 20 птиц: гусей, уток и малых чирков. Он дал работнику 16 алтын. Гусей велел покупать по 3 копейки за штуку, уток по копейке, а малых чирков по два за копейку. Сколько гусей, сколько уток и сколько чирков купил работник?

Решение: Работник отправившись на базар, имел 16 алтын, что составляет 48 копеек, так как за гуся велено платить по 3 копейки, то взятых денег хватило на 16 гусей, но тогда нельзя будет купить ни уток, ни чирков, итак, работник купил не более 15 гусей. Допустим, что работник уже купил чирков и уток, если бы гуси стоили по 1 копейке, то за все покупки работник заплатил бы менее 20 копеек и у него осталось бы более 28 копеек, эти оставшиеся копейки работник должен фактически потратить на гусей, доплатив за каждого гуся по 2 копейки; по условию, работник израсходовал все деньги, значит, он купил более 14 гусей, потратив на них 45 копеек.

Итак, работник потратил 3 копейки на покупку 5 птиц — уток и чирков; если бы чирки стоили по 1 копейке за штуку, то покупка обошлась бы в 5 копеек, лишние 2 копейки возникли потому, что пришлось бы переплатить за каждого чирка по половине копейки, поэтому было куплено 4 чирка и, значит, 1 утка.

Значит, работник купил 15 гусей, 1 утку и 4 чирка.

Признаюсь, я разобрался не сразу.

### Литература

1. История математики под редакцией А.П. Юшкевича. - М.: Наука, 1970.
2. Никифоровский В.А. Из истории алгебры XVI-XVII вв. - М.: Наука, 1979 г.
3. Самин Д. 100 великих ученых. - М., 2004.
4. Боголюбов А.П. Математики. Механики. Биографический справочник. - Киев, 1983 г.

**Дружинин Борис Львович**

*Научный сотрудник Института теоретической  
и экспериментальной Физики, г. Москва.*

*E-mail: bdruzhinin@mail.ru*

**От редакции.** Во время верстки данного номера пришло прискорбное сообщение о кончине автора 28 мая этого года. Приносим соболезнования родным и близким.

## **О Фонде математического образования и просвещения**

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

### **Условия подписки и приема материалов**

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: [matob@yandex.ru](mailto:matob@yandex.ru)

Интернет: [www.matob.ru](http://www.matob.ru)

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2021 год (включая стоимость пересылки) – 150 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2021 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

**Получатель:** ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

**Расчетный счет и банк получателя:**

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,

к/с 3010181000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 100 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

### **Внимание!**

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

## Contents

**Collective obituary. Sergey A. Kuleshov (24.12.1962 – 15.05.2021) 2**

On May 15, 2021, after a serious long illness, the mathematician-algebraist, doctor of physical and mathematical sciences, permanent employee of our journal Sergey Alekseevich Kuleshov died. Here is a collective obituary including a description of his scientific results.

**G. Klekovkin. Modeling the Contours of Plant Leaves in the GeoGebra Environment 5**

The article discusses the use of the capabilities of the interactive mathematical system GeoGebra for modeling the contours of plant leaves by equations given in a polar coordinate system. To be continued.

**V. Novikov. On Inequalities in a Tetrahedron 18**

The exact boundaries of variation of the surface area, volume, and other quantities of tetrahedrons are found for a given ratio of the radii of the inscribed and circumscribed spheres. The relationship between the method of conditional extremum and envelopes is considered on rather bright and meaningful examples. To be continued.

**S. Osinkin. Triangles with Specified Values of the Incircle and Circumcircle Radii 28**

The analysis of triangles given by the radii of the inscribed and circumscribed circles presented in this article can be considered as an example of the successful application of a specially developed universal method for determining a triangle by its elements.

**NIU “MEP” Team. Mathematics and New Information Technologies, finished 34**

The article provides examples of using the numerical methods of the Mathcad and Python packages for innovative solution of some mathematical problems. New schemes for constructing Malfatti circles and drawing graphs are proposed. A new definition of a circle is given in terms of the remainder operator. The problems of STEM education in the form of engineering calculations on a computer are discussed.

**L. Rodina. Profit Maximization Problems in Various Economic Models 44**

The publication touches upon the issues of studying the demand for goods and the formation of prices, which achieve the maximum profit from the sale of products. Both deterministic models and models that depend on random parameters are considered.

**V. Fedoseev. Methods of Calculating the Number  $e$  as a Topic of Educational Research 50**

The well-known formula of calculus  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$  was taken as the starting point of the study and the task of increasing the rate of convergence of the basic sequence was set. On this basis, a new method of calculating is built.

**A. Andreev, E. Skorodumova, E. Maximova. School Olympiad “Technologies. Intelligence. Computer Science. Mathematics” 54**

The article tells about the new Olympiad for schoolchildren in mathematics and computer science. The problems of the qualifying round in mathematics for grades 10-11 with answers, the problems of the final round in mathematics for 11 grades with solutions, as well as examples of problems of the qualifying and final rounds in computer science with solutions are given.

**B. Druzhinin. Two Notes on the History of Mathematics 71**

The first article tells about the scientific achievements of Nikolai Orem, which anticipated a lot of results of his famous followers. The second tells about the life path, scientific and pedagogical merits of Leonty Filippovich Magnitsky, the author of the famous “Arithmetics”.

ISSN 1992-6138



9 771992 613776 &gt;