ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцать четвертый

N 4 (96)

сентябрь - декабрь 2020 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 4 (96), 2020 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2020 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 22.01.2021 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (96), октябрь – декабрь 2020 г.

Содержание

Юлий Витальевич Покорный как мыслитель-педагог[1]

И. П. Костенко

Ю.В. Покорный

В 2020 г. мы отмечаем 80-летие со дня рождения замечательного Воронежского математика Юлия Витальевича Покорного (1940–2010), автора нашего журнала (МО № 3(47), 2008). Как математик он является основоположником теории дифференциальных уравнений на графах и создателем Воронежской научной школы этого направления. Неоценима его заслуга в поддержке активной научной математической работы в России в трудные 90-е и далее годы, когда он создал и придал жизнь ежегодной конференции "Понтрягинские чтения", на которую съезжались многие молодые математики страны и крупные математики из Москвы, Питера, Саратова и других городов, включая учёных МГУ во главе с академиком В.А. Ильиным. В статье раскрывается менее известная, но не менее важная сторона творчества Ю.В. Покорного в области педагогики математики.

[1]Текст пленарного доклада (с небольшими добавлениями), прочитанного автором online 7 мая 2020 г. на Воронежской весенней математической школе "Понтрягинские чтения – XXXI", посвящённой 80-летию основателя и руководителя Школы профессора Ю.М. Покорного.

Все 10 лет с момента ухода Юлия Витальевича я ждал этого дня, когда смогу публично воздать ему дань уважения, почитания и благодарности за то, что он извлёк меня из провинциального Краснодара, расширил горизонт, одарил своим вниманием и дружбой, как соратника (его слова), — за всё, чем он обогатил мою жизнь, что я слышал от него и, главное, — за труд его мысли и души на стезе математического образования, — труд, который ещё ждёт должного понимания, оценки и продолжения.

Начать хочу с некоторых личных воспоминаний, чтобы оживить в нашей общей памяти его колоритный образ, его слова, мысли, переживания.

Моё общение с Юлием Витальевичем началось 22 июля 2003 г., когда в Краснодар пришло письмо, в котором он писал: "Ознакомившись с Вашими тамбовскими тезисами, я понял, что речь должна идти не об общих взглядах, а об общих убеждениях и переживаниях. Почему я и испытал потребность срочно установить с Вами контакт". Началась переписка, в которой Ю.В. поделился своими мыслями и переживаниями: "школьной математикой я болею более тридцати лет". Между прочим, это значит, что с 1970-х годов — годов школьной реформы.

Ю.В. пригласил меня на свои "Понтрягинские чтения". Встретились мы на весенней Воронежской Школе-2004. Последовали в разной обстановке непринуждённые беседы — они сопровождали наши встречи на всех последующих Школах, всегда освещая новые и новые грани волновавших нас проблем математического образования. И не только образования.

Много говорили мы о школьной реформе 1970-х годов (реформа-70). Ю.В. вспоминал: "В 1980 г. я был председателем предметной комиссии. Ощущение трагичное: уровень знаний абитуриентов упал примерно в 4 раза. Пришлось переделать билеты. На консультации обнаружилось, что те задачи, которые традиционно были выручающими, для новых абитуриентов оказались невероятно трудными. Пошёл к ректору и попросил разрешения хотя бы одну задачу упростить. Математическое образование рухнуло на корню, и до сих пор не поднялось. Учителя не смогли освоить новую программу, лучшие ушли из школы".

Всё, что говорил Юлий Витальевич, было мыслью — мыслью многознающей, своеобразной и существенной. Эта сила свободной мысли прежде всего впечатляла при общении с ним. И ещё — слово, сочно образное, эмоционально окрашенное, порой дерзкое и всегда математически точное. Запомнилось, как Ю.В. шутливо отреагировал на доклад академика В.А. Садовничего, посвящённый исследованию спектральной структуры операторов, — "спектровщина".

Центральное место в наших беседах занимали вопросы преподавания математики. Юлий Витальевич делился своими мыслями и размышлениями. Вот некоторые (привожу по своим записям).

"Есть две математики: интуитивная и формальная. Математика идей и математика строгая — не одно и то же".

"Методисты, работая учителями, забывают интуитивную сущность понятий, их глубину".

"В школе проблема — дробь и число".

"Анализ много потерял, когда изгнал актуально бесконечно малые. Это интуитивно-натуральная математика".

"Обучение математике заполняет головы бессмыслицей, несоединимой с опытом учащихся".

Каждая из этих (и других) его мыслей приглашает вдуматься, и влечёт в глубину реальных проблем математического образования. Давайте чуть приостановимся и попробуем хотя бы начать такое вдумывание.

"Есть две математики...". Так ли? А, может, одна, только в разных формах? Почему же Ю.В. так определённо говорит — две? Две разных сущности! В чём же разница?

"Интуитивная сущность понятий". Кто сможет ответить, — в чём, например, состоит интуитивная сущность понятия предельного перехода?

Почему "дробь и число" — проблемы в школе? Ну, с дробями, вроде, понятно, — школьники (да часто и студенты) складывают числители с числителями. А почему "число" — проблема?

Что такое "актуально бесконечно малое"? Кто-то может удивиться, — что это ещё за архаизм?

“Бессмыслицей”? Разве та математика, которой мы учим школьников и студентов, бессмысленна? Для нас — нет. А для учащихся? Кто из нас задумывается над этим вопросом? В то время, когда все мы ежедневно и ежечасно ощущаем безрезультатность нашей работы. И оправдываем себя — студенты плохие, не хотят учиться. А может, не только студенты, а и мы не очень хороши? Плохо учим. А как же тогда надо учить?

Вот этот главный вопрос и мучил Ю.В. долгие годы: почему “математика ... , превращаясь в учебный предмет, ... превращается в источник неприязни, раздражения и ненависти ... слишком для многих”? [1, с. 3]. Ответ на этот вопрос и на органически связанный с ним вопрос, — что же надо сделать, чтобы изменить ситуацию? — был для него важнее его работы как творческого математика. Он так и говорил мне: “ну, что из того, что я докажу ещё несколько теорем?”.

Свои мысли и поиски их убедительного раскрытия и обоснования Ю.В. оставил нам в книге [1], которую назвал “Унижение математикой?”. В этой книге — писал он мне — “я вынy (из себя! из души! каков образ! – И.К.) на свет Божий все плоды своих достаточно мучительных раздумий последних лет”. Книга не простая для чтения, богатая мыслями и фактами из различных областей знаний, а не только из математики. Коснусь нескольких тем и постараюсь на простых примерах проиллюстрировать основные мысли Ю.В.

Большое место и внимание в книге уделяется обыкновенным дробям. Потому что “именно в период изучения дробей у значительной части детей пропадает (мягко говоря) интерес к математике” [1, с. 99]. В чем причина? Почему при сложении дробей учащиеся складывают числители с числителями, а знаменатели со знаменателями?

Ответы Ю.В. искал в глубинной интуиции, в противоречиях между привычными детям смыслами слов и новыми смыслами тех же слов, навязываемыми обучением.

Ну, например: что происходит в голове ребёнка, когда после арифметики натуральных чисел, где 2 на 3 не делится, ему говорят, что теперь делится и в результате получится новое дробное число (запись!) — две третьих?

Но исконный смысл слова “делить” состоит в разделении, распределении некоторого множества предметов поровну (или примерно поровну) между группой лиц. Теперь же этот смысл в голове учащегося уничтожается и заменяется отсутствием какого-либо смысла, как в действии деления, так и в результате. А раз нет смысла в понятии дроби, то нет смысла и в правилах действий с дробями. Современные учебники заставляют детей тупо заучивать правила, смыслы которых для них скрыты.

Формальные правила, не наполненные смыслами, плохо запоминаются. В итоге, при сложении дробей дети делают простые действия, к которым привыкли и смысл которых они понимают, а именно: складывают (сложение, ведь!) два целых числа в числителе и, отдельно, — в знаменателе.

Ю.В. не довольствуется психологическим анализом восприятия учеников, он идёт вглубь истории математический мысли и открывает там подобные противоречия и подобные исконные смыслы понятий. История преодоления этих противоречий совокупной математической мыслью человечества подсказывает ему — что надо менять в школьной методике, в частности, в методике введения дробей: вернуть в школу величины, пропорции, отношения, именованные числа. Вернуть то, что выбросили реформаторы в 1970-х годах, повышая абстрактность преподавания, которую они выдавали за мнимую “научность”.

Дробь надо приложить к чему-то (к яблоку, кругу и др.), поименовать её, тогда она обретёт понятный для ребёнка наглядно-действенный смысл. И тогда абстрактная дробь (запись $\frac{2}{3}$), которая у реформаторов получается псевдоделением 2 на 3, приобретает для детей понятный им смысл: $\frac{2}{3}$ — третья часть яблока берётся два раза и получается две третьих части яблока.

Второй важный вопрос, который глубоко рассматривает Ю.В., — нужно ли изучать высшую математику в школе?

Начинает он с вопроса: в чём разница между высшей и элементарной математикой? Обращение к истории развития математических знаний позволяет определить эту разницу. До XVI в. математические понятия были абстракциями, возникающими непосредственно из опыта (натурально-интуитивная математика, или элементарная в нашем понимании). С XVI в. математики стали обращаться не к ощущениям, а к разуму и создавать понятия более высокой степени абстракции (например, понятие производной имеет совсем иную качественную природу, чем понятие алгебраического уравнения или понятие треугольника). Отличительная черта этих абстракций — они плохо согласуются с обиходной интуицией. Этого, по-видимому, и не понимали “авторы перестройки” школьных программ 1960–70-х гг.

Далее мысль Ю.В. обращается к психологической науке, в ней он находит подтверждение принципиальной порочности идей и деяний реформаторов 1960–70-х гг.

Он замечает сходство генетической теории эволюции интеллекта с Колмогоровской классификацией (Ю.В. называет её К-классификацией) различных областей математической деятельности: 1) изучение реального мира и практическое воздействие на него; 2) содержательная математика; 3) формализованная математика; 4) метаматематика [2, с. 232]. Эти четыре области соответствуют четырём уровням развития мышления человека (ребёнка): 1) сенсомоторный (практический) интеллект; 2) интуитивное дологическое мышление; 3) ассоциативное мышление; 4) понятийное мышление.

Содержание и внешние признаки мышления на каждом уровне детально описали Ж. Пиаже [3, 4] и Л. Выготский [5, 6]. Они установили, что на каждой ступени генетической “лестницы форм души” (Аристотель) — Ю.В. называет её Ψ-лестницей – “есть своя языковая среда, свои понятийные структуры”, и на каждой ступени формирование соответствующего уровня мышления требует около 5 лет.

Из того, что эти психологические структуры соответствуют ступеням математической К-классификации, Ю.В. заключает: “пока не освоен и не обжит очередной этаж Ψ-эволюции, ... ничего из более высокого уровня Ψ-лестницы не может быть даже воспринято, не то что освоено” [1, с. 266].

После такого глубокого погружения в историю и психологию, Ю.В. решает вопрос о разумном содержании школьной математики: “Ясно, что любому взрослому человеку, если он не собирается стать профессиональным математиком, следует в юности овладеть, прежде всего, материалом из первых двух областей и понятийной средой из формализованной математики, но только в той мере, в какой это будет помогать освоению первых двух областей. Реально же современная школьная математика направлена на изучение сразу третьего и четвёртого этажей ... , считая именно их сутью всей математики” [1, с. 30]. Тем самым, психология доказывает, что современные школьные программы противоречат законам развития молодого интеллекта.

Отсюда следует методический закон: две различные математики (интуитивно-натуральная и формализованная) “недопустимы для смешивания в процессе преподавания” [1, с. 19]. В частности, нельзя в начальную школу (2-й уровень) вносить элементы алгебры (3-й уровень), ни, тем более, элементы теории множеств (4-й уровень).

Этот закон нарушают современные школьные программы и учебники математики: А. Мордкович, Л. Петерсон, “МГУ — школе” и др. Их принципиальная порочность имеет идейным истоком реформу-70. О других множественных пороках современных российских учебных книг, мы здесь не говорим. Они имеют причиной педагогическое невежество их авторов, которая тоже, во многом, следствие реформы-70, уничтожившей вместе со старыми учебниками и классическую методическую культуру [9, 10].

Ю.В. отмечает, что “наиболее согласована с Ψ-лестницей методика учебников Киселёва. Там (в учебнике геометрии. – И.К.), если кто помнит, изначально изложение нацелено на сенсомоторное мышление (наложим, т. к. отрезки или углы равны, другой конец или другая сторона совпадают и т. д.). Затем отработанные схемы действий, обеспечивающие начальную (по Выготскому и Пиаже) геометрическую интуицию, комбинациями приводят к возможности догадок (инсайту, ага-переживанию). При этом наращивается аргументация в форме силлогизмов. Аксиомы появляются лишь в конце планиметрии, после чего возможны более строгие дедуктивные рассуждения. Не зря в когдатошние времена именно геометрия по Киселёву прививала школьникам навыки формально-логических рассуждений. И делала это достаточно успешно" [1, с. 81–82].

Вот где тайна чудесной педагогической силы Киселёва! Он строит свои учебники (от младших классов к старшим) и выбирает методы изложения, соответствующие возрастным формам мышления детей, тем самым неторопливо и основательно развивая их. Высший уровень педагогического мастерства!

Не следует ли, что для оздоровления математического образования в России надо возвратить детям понятные учебники А.П. Киселёва вместе с прежним (в основе) содержанием школьных программ? Ю.М. требует "возвысить методику Киселёва, напрочь отвергнув формалистские традиции" [1, с. 18], заложенные реформой-70.

А вот что говорит Ю.В. об интуитивном, глубинном смысле производной и об изучении её в школе: "понятие производной — объект формализованной математики. Это понятие — продукт формализации отношения $dy : dx$ из двух дифференциалов, которые — бесконечно малые величины и которые родились именно в содержательной математике, как средство локального анализа зависимостей-функций. ... заучивание производной (в школе, – И.К.) — не просто бесполезное, но и вредное занятие. Почему вредное? Потому что определение производной даётся не конструктивно, но предельным переходом. Само понятие предела требует наличия у человека специальных психологических структур ... на их развитие требуется несколько лет. Созревание таких структур возможно лишь в процессе постоянной психологической практики. Таким образом, если человек не работает постоянно с понятием производной (и предела) хотя бы в рамках учёбы в вузе, полноценно овладеть понятием производной он просто не в состоянии. ... Однако производная уже много лет внедрена в школьную программу. Вместе с интегралом. Без которого ну *никак нельзя ни площади, ни объёмы считать*" (курсив Ю.В.) [1, с. 30–31].

Думал Ю.В. и над проблемами преподавания математики в вузе. Они имеют ту же природу, что и в школе — "формалистскую методологию". Этот "способ изложения зачастую производит на студентов впечатление полной бессмыслицы... Этот дедуктивный стиль объявляется сущностью математики" [1, с. 176–177]. "Дремучее заблуждение"!

Одна из его ценных идей — возвращение актуально бесконечно малых в преподавание анализа, что восстановит разрушенную формализацией связь понятий с интуицией, с Истиной[2], а значит, повысит качество преподавания и усвоения учебного предмета. Но кто сегодня может эту мысль понять, оценить и реализовать? Как, впрочем, и остальные мысли Юлия Витальевича.

Ю.В. говорил: "Эйфель не знал пределов, и решал дифференциальные уравнения 4-го порядка. Лопиталь изложил весь анализ на 23 страницах. Без пределов. Производная — это отношение дифференциалов — тангенс угла наклона малой дуги, которая превращается в прямую. Вывод формулы:

$$(x^2)' = \frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2}{dx} = 2x + dx = 2x.$$

Здесь работает не формальная, а содержательная, диалектическая логика: dx — это и нуль, и не нуль, значит, на dx можно делить, и его можно отбрасывать.

Уместно заметить, что проблема актуально малых всю жизнь волновала величайшего нашего математика и педагога, акад. Н.Н. Лузина — он называл её "самой болезненной точкой Анализа

[2]На эту необходимую для познания Истины связь научных понятий с Сущим обращали внимание глубокие философы. Вот что писал А.И. Герцен в 1842 г.: "Что такое дифференциал? — Бесконечно малая величина; стало быть, или он имеет величину, и в таком случае эта величина конечная, или не имеет никакой величины, в таком случае он нуль. (Или-или, — так рассуждает формальная логика. — И.К.). Но Лейбниц и Ньютон постигли шире (! — И.К.) и приняли сосуществование бытия и небытия (не нуля и нуля, — И.К.), *начальное движение возникновения* (когда дифференциал уже не нуль, но ещё меньше любой малой величины, — И.К, курсив мой), перелив от ничего к чему-нибудь. Результаты теории бесконечно малых известны". "В этих вечных переливах, в этом вечном движении, в которое увлечено всё сущее, живёт истина" [Герцен А.И. Дилетантизм в науке // Сочинения в девяти томах, том второй. – М.: ГИХЛ, 1955. – С.18-19].

вообще, современного в особенности" и считал, что "идея актуально бесконечно малого имеет какие-то бесконечно глубокие корни в уме" [8, с. 16–17]. Кто из математиков сегодня может сказать, что понимает глубину мысли Лузина и Покорного?

Книга Ю.В. содержит такое богатство тем и мыслей, которое не охватить в докладе. Её надо медленно читать и много думать. Нельзя считать, что всё там истина. Ю.В. и сам понимал, что многое ещё надо додумать, прояснить, подвергнуть тщательной критической проверке. Искал помощников, и не находил. Говорил мне: "один я не потяну, а мои лучшие ученики, читая книгу, скользят по ней, как на соплях" (какой выразительный и точный образ! — таков стиль Ю.В.).

Надо прояснить и конкретизировать связи между Колмогоровской классификацией и Ψ-лестницей становления молодого интеллекта. И, может быть, придётся внести какие-то поправки в ту или другую схему, с учётом специфики математической науки и математического мышления. Заметим, что сам Ю.В. признавал "возможность и других классификаций" [1, с. 28]. Тому, кто возьмётся за эту работу, придётся глубже погрузиться в психологию, в частности, в конструкции Ж. Пиаже и Л. Выготского и их обоснование. При этом надо знать, что практическое приложение этих теорий к образованию проявило их неадекватность[3].

В предисловии книги Ю.В. ставит пронзительный вопрос: почему наша прекрасная Математика, "превращаясь в учебный предмет, ... превращается в источник неприязни ... и даже ненависти ... слишком для многих"? По сути, этот же вопрос стоит и в названии книги.

Ответ Ю.В. можно сжато сформулировать так: потому что абстракции и формализмы, которыми наполнены пореформанные программы и учебники, разрушают связи содержания учебного предмета с интуицией учащихся, с их опытом и, тем самым, обессмысливают обучение, делая его непонимаемым.

Главная ценность книги, её нерв — **идея восстановления связи математических понятий с их интуитивными корнями**. Ю.В. учит нас тому, чего мы не умеем, — отысканию этих корней. Его метод: чуткое внимание к исконным, заложенным в глубинах подсознания смыслам слов и погружение в историю, отыскание там этих корней.

Реконструкция истории математики, независимая от бытующих штампов, выявление причин и движущих сил эволюции её идей и методов — ещё одна интересная и важная тема книги, которой мы чуть коснулись.

Он надеялся, что "книга должна стать основой для достаточно впечатляющих и действенных выводов с чёткими формулировками, доступными для массовой аудитории". И его тревожил вопрос — как дойти до "такого понимания проблемы, которое понуждает к действиям"? И где тот круг людей, к которому надо обратиться, чтобы "хоть как-нибудь подтолкнуть жизнь в нужном направлении"?

Прошло-промелькнуло 10 лет с его ухода. И всё это время мы остро чувствовали, как нам его не хватает. И вообще, — как не хватает сегодняшней России учёных и граждан такого уровня, честно и глубоко мыслящих, страстно стремящихся воспрепятствовать её разрушению.

Поклонимся же его памяти!

[3]Пиаже сыграл роль научного идеолога разрушительных международных реформ 1960–70-х гг. [9, с. 186–189]. Теория развития ребёнка, построенная Л. Выготским, используется современными психологами (А. Асмолов и др.) для выведения из обучения знаний и замены их "развитием". Сам Л. Выготский, его идеи и работы, их возвеличивание ("пузырь Выготского") подвергаются в XXI веке очень серьёзной критике психологов всего мира [10, с. 153–155].

Последняя Школа, которой руководил Юлий Витальевич[4]. На фото он сидит в центре вместе с акад. В.А. Ильиным. Этой фотографией он прощается со всеми участниками Школы (знал, что уходит)

Литература

1. Покорный Ю.В. Унижение математикой? - Воронеж: ОАО "Центрально-Чернозёмное книжное издательство", 2006. - 336 с.

2. Колмогоров А.Н. Математика — наука и профессия. - М.: Наука, 1988. - 288 с.

3. Пиаже Ж. Речь и мышление ребёнка. - Госиздат, 1932.

4. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. - М., 1969.

5. Выготский Л.С. Мышление и речь. 5-е изд. - М.: Лабиринт, 1999.

6. Выготский Л.С. Психология развития человека. Библиотека всемирной психологии. - М.: "Смысл". ЭКСМО, 2003.

7. Де Л'опиталь Г.Ф. Анализ бесконечно малых. - ГТТИ: М.-Л., 1935. - 432 с.

8. Лузин Н.Н. О бесконечно малых величинах в преподавании и в науке // Математическое образование. - № 4(27). - 2003.

9. Костенко И.П. Проблема качества математического образования в свете исторической ретроспективы. Монография. - М.: РГУПС, 2013. - 502 с.

10. Костенко И.П. "Реформы" образования в России 1918–2018 (идеи, методология, результаты). Монография. Изд. 3-е, испр. и доп. - М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2020. - 194 с.

Костенко Игорь Петрович, доцент, кандидат физ.-мат. наук, Краснодар. E-mail: kost@kubannet.ru

[4] При сканировании фотография оказалась немного урезанной справа, правильный полный номер Школы — XXVI.

Николай Христович Розов

От редакции

2 ноября 2020 года скоропостижно скончался доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАО, декан факультета педагогического образования МГУ им. М.В. Ломоносова, член редколлегии журнала “Дифференциальные уравнения” Николай Христович Розов (родился 20 февраля 1938 г. в Москве).

Н.Х. Розов окончил механико-математический факультет МГУ в 1958 году, на кафедре дифференциальных уравнений прошел путь от аспиранта до профессора. В аспирантские годы был секретарем комсомольской организации МГУ, молодым преподавателем был заместителем декана мехмата, участвовал в организации Колмогоровского интерната и Всесоюзной заочной математической школы, был членом редколлегии журнала “Квант” со дня основания этого журнала, 25 лет руководил отделом в РЖ “Математика”, руководил секцией преподавания математики ММО. Был членом редколлегии целого ряда научных журналов. В 1997 году был назначен деканом-организатором нового для МГУ факультета — факультета педагогического образования, который возглавлял до последнего дня своей жизни.

Область деятельности Николая Христовича была практически необъятна.

С одной стороны — это математические научные исследования в теории дифференциальных уравнений: релаксационные колебания (его совместная с Е.Ф. Мищенко монография “Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания” была одной из пионерских в этом направлении), буферность (новое, открытое им совместно с А.Ю. Колесовым явление, состоящее в одновременном наличии в системе сколь угодно большого количество циклов), хаос (где механизмы формирования хаотических режимов в сложных системах, которые Л.Д. Ландау обсуждал только “на пальцах”, обрели вполне четкую математическую форму), проблемы математического моделирования поведения сложных систем и сред (которым посвящены четыре монографии последних лет и более 200 статей). Вроде бы особняком (но на самом деле — в русле профессиональных математических интересов Николая Христовича) стоит издание в 1994 году фундаментального французско-русского математического словаря.

С другой стороны — это преподавание математики. Студентам и школьникам, математикам и гуманитариям, в России и за рубежом. Он читал лекции на кафедре дифференциальных уравнений мехмата, и на кафедре оптимального управления образованного в 1970 году факультета вычислительной математики и кибернетики. Работал в Алжире и на Мадагаскаре (впоследствии при его поддержке была издана целая серия книг под общим заголовком “В таинственной стране Мадагаскар”). Выступал перед учеными и педагогами. Пособие “Дорофеев-Потапов-Розов”, как его обычно называли, было настольной книгой, наверное, всех, кто за последние 50 лет (первое издание вышло в 1964 году) поступал не только в МГУ, но и в другие университеты нашей страны. Менее известное пособие “Узлы в школе”, изданное в 2007 году, тем не менее, переведено на болгарский язык и получило одну из премий на конкурсе лучших работ по методике преподавания математики.

Нельзя обойти стороной и проблемы педагогического образования, где он внёс решающий вклад в дело становления педагогической подготовки не только в Московском университете, но и во всей стране: разработанные им совместно с Л.В. Поповым программы профессиональной переподготовки “Преподаватель” и “Преподаватель высшей школы” стали прототипом для всего педагогического направления в дополнительном образовании. Сотни его статей посвящены проблемам организации школьного образования, его содержания и целей, подготовки учителей, включения в него новых идей, технологий, методов с одной стороны и восстановления утраченных — с другой.

Академик-секретарь секции высшего образования и проблем подготовки и аттестации научно-педагогических кадров Международной Академии наук высшей школы (2005), член-корреспондент Российской академии естественных наук, иностранный член Национальной академии искусств, языка и наук Мадагаскара (1992), почетный профессор Юго-западного университета имени Неофита Рильского (Благоевград, Болгария, 2008).

Награждён Национальным орденом Мадагаскара (1998), медалью “Ветеран труда”, медалью “За заслуги перед высшей школой” Академии наук высшей школы РФ, Бронзовой медалью ВДНХ и другими наградами. Лауреат премии Правительства РФ в области образования (2009). Заслуженный профессор Московского университета (2004), заслуженный работник высшей школы РФ (2003).

До последнего дня он сохранял активность по всем направлениям — вел исследования, писал научные и методические работы[1], руководил факультетом, выступал экспертом высшего уровня в вопросах образования и образовательной политики, читал лекции, работал со студентами и аспирантами.

Более 300 работ в ведущих отечественных и зарубежных журналах, почти 30 монографий и учебников, десятки учеников и последователей, сотни выпускников ФПО и память об этом замечательном человеке — вот итог всегда умной, плодотворной, благотворной деятельности Николая Христовича Розова[2].

[1]Н.Х. Розов был автором нашего журнала, публикации в № 2(54), 2010 г. и в № 1(77), 2016 г. — *Прим. ред.*

[2]Изложенный выше биографический материал предоставлен редакции А.Б. Боровских, заместителем декана ФПО МГУ. Фотография с сайта ФПО МГУ

http://www.fpo.msu.ru/index.php/9-static-information/183-rozov-nikolaj-khristovich

От простого к сложному в задаче о наполнении бака

К. П. Горшенин

Рассматривается задача, приводящая к уравнениям, которые содержат целую часть переменной или линейную комбинацию целой и дробной частей переменной. Для таких уравнений исследуются условия существования и количество решений.

1. Исходная задача

В одном из сборников тренировочных заданий для подготовки к ЕГЭ по математике **базового уровня** была предложена такая задача (№ 20).

В бак объёмом 38 л каждый час, начиная с 12 часов, наливают полное ведро воды объёмом 8 л. Но в днище бака есть небольшая щель, и из неё за час вытекает 3 литра. В какой момент времени (в часах) бак будет заполнен полностью?[1]

Примером неверного рассуждения при решении этой задачи является следующее. За час объём воды в баке увеличивается на $8-3=5$ л. Поэтому объём 38 л будет достигнут за $38:5=7{,}6$ ч. Причина, скорее всего, кроется в автоматическом применении освоенного ещё в начальной школе шаблона ("автомобиль проехал за час 60 км" и т.п.). Однако, по сути, ошибка заключается в использовании математической модели, не соответствующей условию задачи, а именно модели заполнения бака с постоянной скоростью. В действительности же ситуация совершенно иная: изменение объёма воды в баке происходит циклически, причём в начале каждого цикла объём мгновенно увеличивается, а затем постепенно уменьшается.

Осознание этого факта приведёт к необходимости нахождения значений объёма воды в начале и в конце каждого цикла: только эти значения и возможно вычислить, исходя из условия задачи. Таким образом, легко выяснить, что объём 38 л достигается в начале седьмого часа от момента первого вливания в бак, что соответствует 18 ч.

Согласно спецификации КИМ ЕГЭ, задача № 20 предназначена для проверки умений "моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры". Предложенное решение не содержит этих действий. Попробуем всё же сформулировать математическую модель ситуации, описанной в задаче.

Пусть t — время, отсчитываемое от момента первого вливания в бак и измеряемое в часах, а τ — время суток, также измеряемое в часах ($0\leqslant\tau<24$). Тогда

$$\tau = 24\left\{\frac{t+12}{24}\right\}. \tag{1}$$

[1]Опыт подсказывает, что вливание ведра воды в бак занимает значительно меньше времени, чем один час. Более того, авторам заданий хотелось бы, чтобы учащиеся считали вливание мгновенным. Однако подчеркнём, что характер вливания никак не оговорен в задаче. Отметим, что не оговорено и прекращение вливаний.

Фигурные скобки в (1) означают дробную часть.

В каждый момент времени t в баке находится $V(t)$ литров воды. Если считать, что вливание ведра воды требует конечного времени, то о функции $V(t)$ известно следующее:

$$V(0)=0;$$
$$V(i)=5i, \quad \max_{i-1<t<i} V(t)<3+5i, \quad 1 \leqslant i \leqslant 7;$$
$$V(i)=35, \quad \max_{i-1<t<i} V(t)=38, \quad i>7; \quad i \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что ответить на вопрос исходной задачи невозможно.

Будем считать время вливания пренебрежимо малым[2], т.е. что вливания происходят мгновенно, в моменты времени $t=i-1$ $(i \in \mathbb{N})$; назовём i-м циклом промежуток времени $i-1 \leqslant t<i$. Тогда

$$V(i-1)=\min\{3+5i;38\}, \tag{2}$$
$$\lim_{t \to i-0} V(t)=\min\{5i;35\}. \tag{3}$$

Условия (1)–(3) выглядят достаточно сложно. В условии (3) вообще используется понятие одностороннего предела функции в точке, выходящее за рамки школьного курса математики, в том числе и углублённого. Формула (1) основана на программном материале, однако задача построения такой формулы относится к повышенному уровню сложности. Нельзя требовать от учащихся, особенно на экзамене, формулирования подобных условий. Судя по всему, замысел авторов тренировочных заданий состоял в том, что учащиеся, не формулируя модель в целом, увидят одно из её свойств: первые члены последовательности значений объёма воды в граничные моменты циклов $v_i=V(i-1)$ (они же наибольшие значения объёма в каждом цикле) образуют арифметическую прогрессию. Тогда вопрос задачи подразумевает поиск номера члена прогрессии с заданным значением. Однако, в любом случае, учащимся проще рассуждать, не используя определённые строго понятия цикла, его начала и конца, не рассматривать функцию $V(t)$ вообще, тем более разрывную, и вычислять значения v_i без привлечения представлений о последовательностях и формул арифметической прогрессии. Ведь на экзамене не нужно записывать решение, а рассуждения эти пригодны и в том случае, когда v_i не образуют арифметическую прогрессию. Да и вычисление времени суток можно произвести более простым способом, чем написание формулы (1). Вывод: для получения правильного ответа на вопрос исходной задачи не стоит тратить силы на формулирование условий вида (1)-(3). Таким образом, соответствие рассматриваемой задачи диагностическим целям, заявленным в спецификации КИМ, вызывает некоторые сомнения.

Запись условий (2), (3) в полной мере выявляет особенность исходной задачи, которая ощущается интуитивно даже на уровне простых рассуждений. В каждый момент времени в баке находится какой-то объём воды, т.е. функция $V(t)$ определена при всех $t \geqslant 0$. Но мы не можем ответить на вопрос, в какой момент в баке находится, например, 37 л воды[3].

Обсуждая с учащимися эту задачу, стоит поставить перед ними вопрос: что нужно изменить в условии, чтобы оказалось возожным найти время достижения значения объёма воды, не привязанного к граничным моментам циклов, например, 37 л? Учащиеся должны прийти к выводу о

[2] Это предположение, как уже замечено выше, не противоречит опыту. Но, во-первых, опыт у каждого индивидуален, а во-вторых, тот же опыт подсказывает, что выливать воду из ведра можно по-разному. Настораживает следующее обстоятельство: мы вынуждены строить модель, исходя не из чёткого описания моделируемой ситуации, а из потребности решить поставленную задачу! Автору настоящей статьи не раз приходилось удерживать учащихся от домысливания того, чего нет в условии задачи (если речь не идёт о, возможно, полезном предварительном рассмотрении частных случаев). А здесь учащиеся должны сами дополнить исходную задачу условием мгновенного вливания, и это не кажется автору оправданным.

[3] Плохо, что сама возможность решения задачи (т.е. построения алгоритма) существенно зависит от её числовых данных. Это создаёт впечатление искусственности рассматриваемой задачи. А ведь она — типичная практико-ориентированная задача, впрочем, не слишком удачная.

необходимости задать определённую зависимость объёма от времени в течение цикла. При этом по-прежнему нужно вычислять значения объёма воды в баке в начале и конце каждого цикла, и смысл этих действий в том, чтобы сначала выяснить, в каком именно цикле достигается требуемое значение объёма, а затем составить и решить уравнение с учетом принятой зависимости объёма от времени. В частности, значение 37 л достигается в седьмом цикле, в котором объём воды уменьшается с 38 л до 35 л.

Сама формулировка исходной задачи подталкивает к переходу от условия равенства объёмов воды, вытекающих за час, к условию равномерного по времени уменьшения объёма воды в баке, т.е. постоянного расхода. Тогда в течение седьмого часа объём воды изменяется по закону $V(t) = 38 - 3(t-6)$, и, решив уравнение $38 - 3(t-6) = 37$, мы получим, что нужный объём достигается в тот момент, когда часы показывают 18 ч 20 мин.

Подобное решение в значительно большей степени демонстрирует умения, предусмотренные спецификацией КИМ ЕГЭ. Здесь используется язык алгебры, составляется и решается уравнение, фактически осуществляется работа с математической моделью, пусть и не сформулированной в общем виде. Этого вполне достаточно на базовом экзамене.

Даже в процессе решения исходной задачи выясняется целесообразность детального рассмотрения ситуации, на которой она основана. После вычисления значений объёма в начале и конце каждого цикла становится очевидным, что значение 34 л не может быть достигнуто. Если слегка изменить условие задачи, положив, что вытекает 5 литров в час, то мы увидим: значение 37 л достигается и в одиннадцатом, и в двенадцатом циклах. Таким образом, задача может иметь и несколько решений, а может не иметь вовсе, что, безусловно, является поводом для исследования.

“Глубину погружения” в задачу определяет учитель, руководствуясь различными соображениями, в число которых входят и личные вкусы, и наличие учебного или внеучебного времени, и уровни подготовки и мотивации учащихся. Конечно, речь идёт уже не о подготовке к экзамену, а о работе творческого, исследовательского характера. Цель настоящей статьи — показать, к каким открытиям можно привести учащихся в процессе такого “погружения”. Однако начнём мы с обсуждения возможности уже упомянутого и как будто вполне очевидного изменения текста исходной задачи: выясним условия, при которых расход воды можно считать постоянным.

Упражнение 1. *В пустой бак объёмом* $1\,м^3$ *в момент времени* $t = 0$ *начинает поступать вода из крана со скоростью 3 л/мин. Через каждые полчаса в бак дополнительно вливают ведро воды объёмом 10 л. Пренебрегая временем вливания, определите, в какой момент времени в баке будет находиться 675 л воды.*

Упражнение 2. *В пустой бак объёмом* $1\,м^3$ *в момент времени* $t = 0$ *начинает поступать вода из крана со скоростью 3 л/мин. Через полчаса в бак дополнительно вливают ведро воды объёмом 10 л, ещё через полчаса — два ведра воды, ещё через полчаса — три ведра воды и т.д. Пренебрегая временем вливания, определите, в какой момент времени в баке будет находиться 675 л воды.*

2. Условия постоянства расхода

Аналогом рассмотренной задачи является гидравлическая задача о свободном истечении жидкости сквозь малое отверстие в тонкой стенке сосуда. Зависимость высоты уровня воды в сосуде (рис. 1) от времени определяется формулой $h(t) = h_0(1-t/t_0)^2$, $h_0 = h(0)$, $t_0 = \sqrt{2h_0/g}S/(\mu s)$, где g — ускорение свободного падения, S — площадь сечения сосуда, s — площадь отверстия, μ — коэффициент расхода, связанный с неидеальностью жидкости и особенностями формирования струи вблизи отверстия (в расчетах обычно принимается $\mu \approx 0{,}6$). t_0 — это время опорожнения сосуда до уровня, на котором находится отверстие.

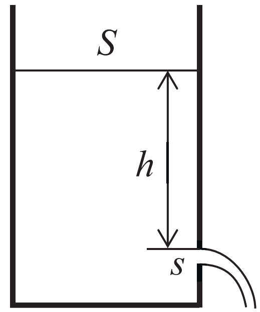


Рис. 1

С учётом этого гидравлического решения, можно считать, что в исходной задаче при мгновенном вливании равных объёмов воды ΔV через равные промежутки времени Δt зависимость объёма воды в баке от времени $V_i(t)$ в течение i-го цикла, определяемого условиями

$$(i-1)\Delta t \leqslant t < i\Delta t, \quad i \geqslant 1, \tag{4}$$

выражается формулой

$$V_i(t) = (\tilde{V}_{i-1} + \Delta V)(1 - (t - (i-1)\Delta t)/t_i)^2, \quad t_i = t_0\sqrt{1 + \tilde{V}_{i-1}/\Delta V}, \tag{5}$$

а величины $\tilde{V}_i$ — значения объёма в конце цикла — определяются рекуррентными формулами

$$\tilde{V}_0 = 0, \quad \tilde{V}_i = (\tilde{V}_{i-1} + \Delta V)(1 - \Delta t/t_i)^2, \quad i \geqslant 1 \tag{6}$$

(условие $\tilde{V}_0 = 0$ означает, что первое вливание производится в пустой бак). Для их использования необходимо задать величину t_0 — время полного опорожнения бака после первого вливания объёма ΔV воды.

Характерными значениями объёма и времени в нашей задаче являются ΔV и Δt. Выберем их в качестве единиц измерения и перейдём в (4)-(6) к безразмерным величинам V_i, $\tilde{V}_i$ и t:

$$V_i(t) = \left(\sqrt{1 + \tilde{V}_{i-1}} - \alpha(t - i + 1)\right)^2, \quad \tilde{V}_i = \left(\sqrt{1 + \tilde{V}_{i-1}} - \alpha\right)^2, \quad i - 1 \leqslant t < i. \tag{7}$$

Оценим появившийся в формулах (7) безразмерный параметр $\alpha = \Delta t/t_0$. Полагая $h_0 \sim \sqrt[3]{\Delta V}$, получим, что при $\Delta V = 8$ л выполнено: $t_0 \approx 0{,}3S/s$ ч. Описанная модель основана на условии малости отверстия, т.е. $s/S \ll 1$. Поэтому и $\alpha \ll 1$, что с учётом $0 \leqslant t - i + 1 < 1$ позволяет пренебречь в (7) членами $\sim \alpha^2$:

$$V_i(t) = 1 + \tilde{V}_{i-1} - 2\alpha\sqrt{1 + \tilde{V}_{i-1}}\Big(t - i + 1\Big), \quad \tilde{V}_i = 1 + \tilde{V}_{i-1} - 2\alpha\sqrt{1 + \tilde{V}_{i-1}}.$$

Эти уравнения определяют линейные функции с различными угловыми коэффициентами $k_i = -2\alpha\sqrt{1 + \tilde{V}_{i-1}}$, поэтому в разных циклах из бака вытекает различное количество воды, увеличивающееся с номером цикла.

Допустим теперь, что перед первым вливанием в баке уже содержится V_0 л воды. Более того, будем считать этот объём достаточно большим: $\Delta V/V_0 \ll 1$. В этом случае V_0 — характерное значение объёма. Считая его единицей измерения, получим безразмерные формулы

$$V_i(t) = \left(\sqrt{\tilde{V}_{i-1} + \beta} - \alpha(t - i + 1)\right)^2, \quad \tilde{V}_0 = 1, \quad \tilde{V}_i = \left(\sqrt{\tilde{V}_{i-1} + \beta} - \alpha\right)^2, \tag{8}$$

в которых появляется ещё один малый безразмерный параметр $\beta = \Delta V/V_0$. Параметр α теперь является отношением Δt и $t_0 = \sqrt{2V_0 S/g}(\mu s)^{-1}$ — времени полного вытекания первоначального объёма воды.

Пренебрежение в (8) слагаемыми $\sim \alpha^2$ приводит к формулам линейных функций с угловыми коэффициентами $k_i = -2\alpha\sqrt{\tilde{V}_{i-1} + \beta}$. Поскольку в конце $(i-1)$-го цикла в баке содержится воды меньше, чем $V_0 + (i-1)\Delta V$, то $\tilde{V}_{i-1} + \beta < 1 + i\beta$. Поэтому справедливы неравенства:

$$1 < \sqrt{\tilde{V}_{i-1} + \beta} < \sqrt{1 + i\beta} \approx 1 + i\beta/2. \tag{9}$$

Неравенства (9) означают, что $\sqrt{\tilde{V}_{i-1} + \beta} - 1 \sim \beta$. Полагая α и β величинами одного порядка малости и пренебрегая в выражении для k_i слагаемым $\sim \alpha\beta$ ($k_i = -2\alpha$), окончательно получаем:

$$V_i(t) = \tilde{V}_{i-1} + \beta - 2\alpha(t - i + 1), \quad \tilde{V}_0 = 1, \quad \tilde{V}_i = \tilde{V}_{i-1} + \beta - 2\alpha.$$

Это линейные функции с общим угловым коэффициентом, определяющим постоянную скорость изменения объёма воды (т.е. расход) в каждом цикле. Отметим, что вместо рекуррентных формул для $\tilde{V}_i$ можно написать: $\tilde{V}_i = 1 + i(\beta - 2\alpha)$.

Введём обозначение $\dot{V} = 2\alpha$ для модуля безразмерного расхода (единица измерения — $V_0/\Delta t$). Этот параметр тоже является малым: $\dot{V} \ll 1$. Если считать, что параметром задачи является не α, а $\dot{V}$, то формулу для $V_i(t)$ можно записать в виде:

$$V_i(t) = 1 + i\beta - \dot{V}t, \quad i - 1 \leqslant t < i, \quad i \geqslant 1. \tag{10}$$

Выражения (10) определяют кусочно-линейную функцию. Её можно задать и одной формулой. Заметим, что из двойного неравенства (10) следует: $[t] = i - 1$. Поэтому вместо формул (10), справедливых на полуинтервалах, можно написать единую формулу для всей области определения:

$$V(t) = 1 + \beta(1 + [t]) - \dot{V}t, \quad t \geqslant 0. \tag{11}$$

Реальная картина вытекания из щели может быть значительно более сложной, нежели рассмотренная в модельной гидравлической задаче. Но приведённые выше рассуждения показывают, что существуют допущения, при которых расход воды можно полагать постоянной величиной.

Таким образом, в тексте исходной задачи три изменения должны появиться одновременно. Во-первых, указание на то, что вливания осуществляются быстро. Во-вторых, указание на то, что уменьшение объёма происходит с постоянной скоростью. В-третьих, указание на то, что первое вливание производится в бак, уже содержащий достаточно большое количество воды. Разумеется, можно считать, что в баке имеется не щель, а специальное выпускное устройство, обеспечивающее постоянство расхода воды на протяжении всех циклов. Однако путём таких предположений можно уйти слишком далеко от реальности.

3. Модифицированная задача

Приведём возможный текст исходной задачи с внесёнными изменениями.

В баке объёмом 1038 л находится вода. В днище бака есть небольшая щель, вследствие чего объём воды уменьшается с постоянной скоростью 3 л/ч. В 12 часов бак содержит 1000 л воды. Каждый час, начиная с 12 часов, в бак наливают полное ведро воды объёмом 8 л. В какой момент времени в баке будет находиться 1037 л воды? Временем вливания можно пренебречь.

Содержание предыдущего раздела не предназначено для учащихся, поскольку достаточно далеко выходит за рамки школьных курсов физики и математики. Тем не менее, можно подвести учащихся к формуле вида (11), исходя из условия изменённой задачи, с помощью следующего рассуждения. В каждый момент времени объём воды в баке определяется тремя величинами: начальный объём — до момента первого вливания — 1000 л, объём поступившей воды $V_+(t)$ и объём вытекшей воды $V_-(t)$. Пусть отсчёт времени t начинается в момент, соответствующий 12 ч местного времени (по показаниям часов). Тогда $V(t) = 1000 + V_+(t) - V_-(t)$. Считая, что t измеряется в часах, можем написать: $V_-(t) = 3t$. Объём поступающей воды меняется ступенчато, оставаясь постоянным в течение каждого часа, причём приращение объёма — фиксированная величина (8 л). Учащимся известна кусочно-постоянная функция, постоянная на промежутках области определения равной длины, такая, что её значения образуют последовательность с постоянной разностью соседних членов. Это $y = [x]$. Поэтому поступление воды описывается формулой $V_+(t) = 8 + 8[t]$. Окончательно: $V(t) = 1008 + 8[t] - 3t$. Для ответа на вопрос задачи необходимо решить уравнение $V(t) = 1037$, т.е.

$$8[t] - 3t = 29. \qquad (12)$$

Полученное уравнение[4] можно решить, например, функционально-графическим методом. Перепишем уравнение (12) в виде: $8[t] = 29 + 3t$. График функции $y = 8[t]$ находится в полосе между прямыми $y = 8t$ и $y = 8(t-1)$ (рис. 2). Пересечением этой полосы и графика функции $y = 29 + 3t$ является отрезок с концами в точках $A(5{,}8; 46{,}4)$ и $B(7{,}4; 51{,}2)$, с выколотой точкой B. Множеством значений функции $y = 8[t]$ является множество целых чисел, кратных 8. Одно из таких чисел — 48 — находится на полуинтервале $[46{,}4; 51{,}2)$. Поэтому существует только одна точка пересечения графиков $y = 8[t]$ и $y = 29 + 3t$; её абсцисса определяется из уравнения $29 + 3t = 48$ и равна $6\frac{1}{3}$. Это означает, что часы в момент достижения требуемого объёма показывают 18 ч 20 мин.

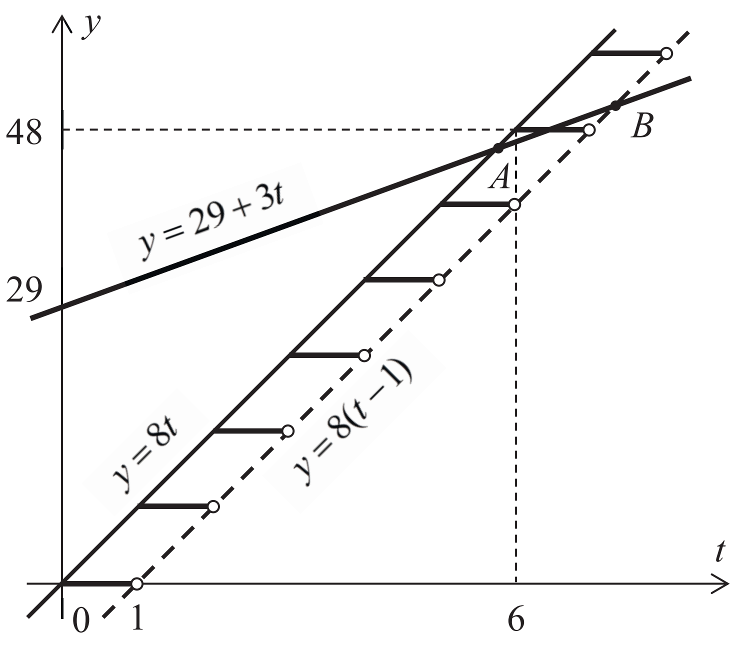


Рис. 2

Приведём и чисто аналитическое решение. Из (12) следует, что $\{t\} = (5[t]-29)/3$. Т.к. $0 \leqslant \{t\} < 1$, то $5{,}8 \leqslant [t] < 6{,}4$, т.е. $[t] = 6$. Подставляя это значение в (12), получаем: $t = 6\frac{1}{3}$.

[4]Точно такое же уравнение получится, если считать, что объём бака — 38 л и требуется найти время достижения объёма воды 37 л. Казалось бы, зачем упоминать большой первоначальный объём воды: не стоит перегружать условие данными, непонятными для учащихся. Вот пешеход, движущийся со скоростью 60 км/ч — это очевидная нелепость. Однако в обоих случаях постановка задачи опирается не на жизненный опыт или здравый смысл, а на природу рассматриваемых объектов. Непонятное условие вполне можно пояснить, сославшись на физические результаты, выходящие за рамки школьной программы.

Упражнение 3. *Задайте формулами зависимость объёма воды в баке от времени для ситуаций, описанных в упражнениях 1 и 2.*

4. Уравнение $a[x] + bx = c$

Уравнение (12) не относится к стандартным типам уравнений, изучаемым в школе, для которых известны алгоритмы и приёмы решения. Поэтому имеет смысл изучить уравнение общего вида

$$a[x] + bx = c, \tag{13}$$

выяснив условия существования решений этого уравнения и их количество в зависимости от параметров a, b и c.

A1. $a = 0$.

A1.1. $b = 0$. При $c = 0$ решением является любое действительное число, при $c \neq 0$ решений нет.

A1.2. $b \neq 0$. В этом случае всегда существует единственное решение $x = c/b$.

A2. $a \neq 0$. Уравнение (13) принимает вид: $[x] = c/a - (b/a)x$. По аналогии с решением уравнения (12) выясним условия существования и количество точек пересечения графиков функций $y = [x]$ и $y = c/a - (b/a)x$.

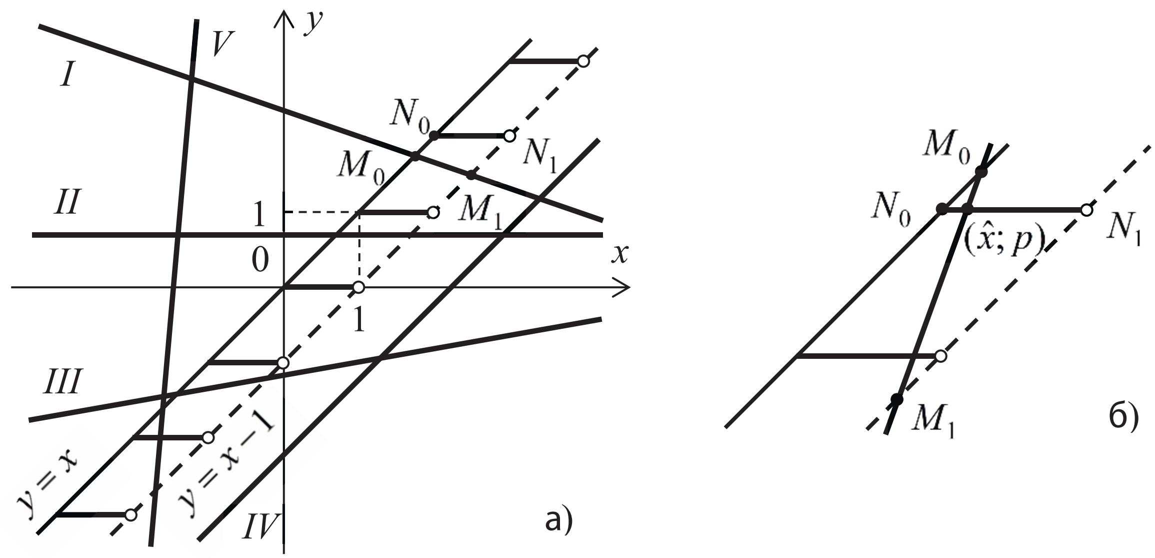


Рис. 3

На рис. 3а изображены график функции $y = [x]$, который находится в полосе, задаваемой условиями

$$x - 1 < y \leqslant x, \tag{14}$$

и несколько вариантов графика функции $y = c/a - (b/a)x$, обозначенных с помощью римских цифр. При этом варианту I соответствует: $b/a > 0$, варианту II: $b/a = 0$, варианту III: $-1 < b/a < 0$, варианту IV: $b/a = -1$, варианту V: $b/a < -1$. На одной из этих прямых обозначены точки M_0 и M_1 пересечения с прямыми $y = x$ и $y = x - 1$ соответственно. Один из отрезков графика $y = [x]$ обозначен как N_0N_1 (отрезок не включает точку N_1).

Общие точки графиков функций $y = [x]$ и $y = c/a - (b/a)x$ — это общие точки отрезка M_0M_1, не включающего точку M_1, и отрезка (или отрезков) N_0N_1. Для совпадения отрезков M_0M_1 и N_0N_1 необходимо и достаточно выполнения условий: $M_0 = N_0$, $M_1 = N_1$. Для существования единственной общей точки этих отрезков необходимо и достаточно, чтобы либо 1) $M_0 = N_0$, $M_1 \neq N_1$, либо 2) точки M_0 и M_1 принадлежат разным полуплоскостям, на которые разбивает плоскость прямая, содержащая отрезок N_0N_1. Других вариантов существования общих точек отрезков M_0M_1 и N_0N_1 нет.

На координатной плоскости перечисленные геометрические ситуации однозначно описываются в терминах сравнения ординат y_0 и y_1 точек M_0 и M_1 и ординаты p точек отрезка N_0N_1. Отметим, что $p \in \mathbb{Z}$, а значения y_0 и y_1 находятся из выражений

$$y_0 = \frac{c}{a+b}, \quad y_1 = \frac{c-b}{a+b}. \tag{15}$$

А2.1. $y_1 < y_0$, что выполнено при $b/a > 0$ (I) или $b/a < -1$ (V). Числа в скобках напоминают, как выглядит соответствующий график функции $y = c/a-(b/a)x$ на рис. 3а. Общие точки графиков этой функции и $y = [x]$ существуют, если существуют такие целые числа p, что $y_1 < p \leqslant y_0$. Выясним, когда это возможно, и сколько таких чисел. Число $[y_0]$ — наибольшее, а $[y_1]+1$ — наименьшее из целых чисел, которые могут находиться на промежутке $(y_1; y_0]$. Поэтому $[y_1]+1 \leqslant p \leqslant [y_0]$, условие совместности двойного неравенства, а значит, и условие существования целых чисел: $[y_0]-[y_1] \geqslant 1$. Соответственно,

$$m = [y_0]-[y_1] \tag{16}$$

— количество целых чисел на данном полуинтервале.

Рассматривая подобные треугольники, образующиеся при пересечении отрезков M_0M_1 и N_0N_1 (рис. 3б), найдём абсциссу точки пересечения:

$$\hat{x} = p + \frac{y_0 - p}{y_0 - y_1} = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}p, \tag{17}$$

которая и является решением уравнения (13). Формулы (17) пригодны и для случая $y_0 = p$ (т.е. совпадения точек M_0 и N_0).

А2.2. $y_0 < y_1$, что выполнено при $-1 < b/a < 0$ (III). Общие точки графиков существуют, если существуют такие целые числа p, что $y_0 \leqslant p < y_1$. Этот случай несколько сложнее, чем предыдущий. Действительно, наибольшее из целых чисел, которые могут находиться на промежутке $[y_0; y_1)$, — это $[y_1]-1$ при $y_1 \in \mathbb{Z}$ и $[y_1]$ при $y_1 \notin \mathbb{Z}$. Наименьшее — $[y_0]$ при $y_0 \in \mathbb{Z}$ и $[y_0]+1$ при $y_0 \notin \mathbb{Z}$. Все возможные сочетания условий на границы промежутка приведены в таблице:

Границы полуинтервала	Допустимые целые числа	Условия существования	Количество целых чисел
$y_0 \in \mathbb{Z}$, $y_1 \in \mathbb{Z}$	$[y_0] \leqslant p \leqslant [y_1]-1$	$[y_1]-[y_0] \geqslant 1$	$[y_1]-[y_0]$
$y_0 \notin \mathbb{Z}$, $y_1 \notin \mathbb{Z}$	$[y_0]+1 \leqslant p \leqslant [y_1]$	$[y_1]-[y_0] \geqslant 1$	$[y_1]-[y_0]$
$y_0 \notin \mathbb{Z}$, $y_1 \in \mathbb{Z}$	$[y_0]+1 \leqslant p \leqslant [y_1]-1$	$[y_1]-[y_0] \geqslant 2$	$[y_1]-[y_0]-1$
$y_0 \in \mathbb{Z}$, $y_1 \notin \mathbb{Z}$	$[y_0] \leqslant p \leqslant [y_1]$	$[y_1]-[y_0] \geqslant 0$	$[y_1]-[y_0]+1$

Здесь содержатся три формулы для количества целых чисел. Но можно написать и единую формулу. Для этого вначале условиям $x \in \mathbb{Z}$, $x \notin \mathbb{Z}$ сопоставим числа 1 и 0, построив функцию, значение которой равно 1 при целых значениях действительной переменной x и 0 при всех других значениях x. Воспользуемся тем, что $0 \leqslant \{x\} < 1$, откуда $0 < 1-\{x\} \leqslant 1$. Тогда искомой функцией является $f(x) = [1-\{x\}]$. С её помощью общая формула для m может быть записана в виде: $m = [y_1]-[y_0]+[1-\{y_0\}]-[1-\{y_1\}]$. Учитывая, что целочисленные слагаемые можно вносить в квадратные скобки и выносить за них, преобразуем формулу:

$$m = [-y_0]-[-y_1]. \tag{18}$$

Рассматривая подобные треугольники, образующиеся при пересечении отрезков M_0M_1 и N_0N_1, мы придём к той же формуле (17) для решения уравнения (13).

A2.3. $y_0 = y_1$, что выполнено при $b = 0$ (II). Если $c/a \in \mathbb{Z}$, решением является любое действительное число из промежутка $[c/a; c/a + 1)$. Это соответствует тому, что один из отрезков графика функций $y = [x]$ целиком содержится в прямой $y = c/a$. Если $c/a \notin \mathbb{Z}$, решений нет.

A2.4. Значения y_0 и y_1 не существуют, поскольку у прямой $y = c/a-(b/a)x$ нет точек пересечения с прямыми $y = x$ и $y = x-1$. Это выполнено при $b/a = -1$ (IV). Решения существуют при $-1 < c/a \leqslant 0$ (прямая $y = x + c/a$ принадлежит полосе (14)). Множество решений представляет собой счётное множество: $\{\hat{x} \mid \hat{x} = p - c/a, p \in \mathbb{Z}\}$. При других значениях c/a решений нет.

Исследование завершено.

Коэффициенты полученного ранее уравнения (12) отвечают случаю A2.2. Подставляя их в формулы (15), найдём: $y_0 = 5{,}8$, $y_1 = 6{,}4$. На полуинтервале $[5{,}8; 6{,}4)$ находится единственное целое число — 6. Подставляя его в формулы (17), получим, что решением уравнения (12) является число $\hat{t} = 6\frac{1}{3}$.

Упражнение 4. *Приведите примеры и постройте графики функций $y = a[x] + bx$ при различных сочетаниях знаков параметров a и b.*

Упражнение 5. *Выясните условия существования и количество решений уравнения*

$$a\{x\} + bx = c. \tag{19}$$

5. Уравнение $a[x] + b\{x\} = c$

Уравнения (13) и (19) можно привести к общему виду. Выполнив подстановку $x = [x] + \{x\}$, мы в каждом случае получим уравнение вида

$$a[x] + b\{x\} = c. \tag{20}$$

В частности, из уравнения (12) следует: $5[t] - 3\{t\} = 29$.

В левой части уравнения (20) находится линейная комбинация функций $[x]$ и $\{x\}$. Важно подчеркнуть, что это не просто новая функция, полученная на основе уже известных. Формула

$$y = a[x] + b\{x\} \tag{21}$$

задаёт семейство функций, представителями которого являются функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$. Следует также отметить, что формулы (21), $y = a[x] + bx$ и $y = a\{x\} + bx$ эквивалентны в том смысле, что описывают одно и то же семейство функций. Но именно в форме записи (21) параметры a и b имеют наиболее ясный смысл.

На промежутках $[n; n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ выполнено: $[x] = n$ и $\{x\} = x-n$. Поэтому на этих промежутках функция (21) имеет вид $y = (a - b)n + bx$. Следовательно, (21) — это кусочно-линейная разрывная функция, испытывающая скачки в точках $x = n$. Её график состоит из параллельных отрезков с одной выколотой граничной точкой. Включённые граничные точки лежат на прямой $y = ax$, невключённые — на прямой $y = a(x - 1) + b$, т.е. весь график находится в полосе, ограниченной этими прямыми, причём граница $y = a(x - 1) + b$ не принадлежит полосе. Таким образом, a — это угловой коэффициент прямых — границ полосы, а b — угловой коэффициент прямых, на которых лежат отрезки графика. Разность $a - b$ определяет взаимное расположение границ полосы и её ширину.

Можно обратить внимание учащихся на следующее обстоятельство. Каждой функции семейства (21) взаимно однозначно соответствует упорядоченная пара чисел $(a; b)$, в частности, функции $y = [x]$

соответствует $(1; 0)$ и $y = \{x\}$ — пара $(0; 1)$. Здесь уместна аналогия с ситуацией на координатной плоскости, когда радиус-вектор описывается координатами его конца: $\{a; b\}$, и может быть разложен по базисным векторам $\{1; 0\}$ и $\{0; 1\}$ (т.е. представлен в виде линейной комбинации этих векторов), причём a и b — коэффициенты разложения. Поэтому $y = [x]$ и $y = \{x\}$ можно назвать базисными функциями семейства (21). По-видимому, неожиданностью для учащихся станет тот факт, что с такой же точки зрения можно рассматривать и хорошо знакомое им семейство линейных функций $y = kx + l$, выделив в нём базисные функции $y = x$ и $y = 1$.

Далее мы рассмотрим вопрос о существовании и количестве решений уравнения (20) при различных значениях параметров a, b и c. В отличие от предыдущего раздела, будем использовать только аналитический подход.

B1. $a = b = 0$. При $c = 0$ решением является любое действительное число, при $c \neq 0$ решений нет.

B2. $a = 0$, $b \neq 0$. Уравнение (20) принимает вид: $\{x\} = c/b$. Если $0 \leqslant c/b < 1$, то решениями являются числа $p + c/b$, где $p \in \mathbb{Z}$. Если $c/b \notin [0; 1)$, решений нет.

B3. $a \neq 0$, $b = 0$. Уравнение (20) принимает вид: $[x] = c/a$. Если $\{c/a\} = 0$ (т.е. $c/a \in \mathbb{Z}$), решением является любое действительное число из промежутка $[c/a; c/a{+}1)$. Если $\{c/a\} \neq 0$ ($c/a \notin \mathbb{Z}$), решений нет.

B4. $a \neq 0$, $b \neq 0$. Если решение существует, то оно имеет вид: $\hat{x} = p + q$, где $p \in \mathbb{Z}$ и $0 \leqslant q < 1$. Значение q определяется из (20): $q = (c - ap)/b$. Таким образом,

$$\hat{x} = c/b + (1 - a/b)p \tag{22}$$

при условии

$$0 \leqslant \frac{c - ap}{b} < 1. \tag{23}$$

Заметим, что формула (22) пригодна и для случая B2.

B4.1. $a = b$, т.е. $b/a = 1$. В (22) исчезает зависимость от p. В этом случае всегда существует единственное решение $\hat{x} = c/a$, а само уравнение (20) имеет вид: $ax = c$.

B4.2. $a \neq b$, т.е. $b/a \neq 1$.

B4.2.1. Если $b/a > 0$, то двойное неравенство (23) принимает вид $(c - b)/a < p \leqslant c/a$. Поэтому количество решений определяется количеством целых чисел, принадлежащих промежутку $((c - b)/a; c/a]$, и выражается формулой

$$m = \left[\frac{c}{a}\right] - \left[\frac{c-b}{a}\right] = \left[\frac{b}{a}\right] - \left[\left\{\frac{c}{a}\right\} - \left\{\frac{b}{a}\right\}\right]. \tag{24}$$

Решений нет, если $\{c/a\} \geqslant b/a$. Это условие означает, что полуинтервал $((c - b)/a; c/a]$ целиком содержится в интервале $([c/a]; [c/a]{+}1)$, на котором нет целых чисел. Решения есть, если $0 \leqslant \{c/a\} < b/a$. Последнее неравенство всегда выполнено при $b/a > 1$.

B4.2.2. Если $b/a < 0$, то двойное неравенство (23) принимает вид $c/a \leqslant p < (c - b)/a$. Поэтому количество решений определяется количеством целых чисел, принадлежащих промежутку $[c/a; (c - b)/a)$. По аналогии с предыдущим разделом (формула (18)), количество решений выражается формулой

$$m = \left[-\frac{c}{a}\right] - \left[-\frac{c-b}{a}\right] = \left[-\frac{b}{a}\right] - \left[\left\{-\frac{c}{a}\right\} - \left\{-\frac{b}{a}\right\}\right]. \tag{25}$$

Решений нет, если $0 < \{c/a\} \leqslant 1 + b/a$. Это условие означает, что полуинтервал $[c/a; (c - b)/a)$ целиком содержится в интервале $([c/a]; [c/a] + 1)$, на котором нет целых чисел. Решения есть, если $\{c/a\} = 0$ или $\{c/a\} > 1 + b/a$. Последнее неравенство всегда выполнено при $b/a < -1$.

Исследование завершено.

Если считать, что хотя бы один из параметров a, b и c заведомо не равен 0, то можно разделить обе части уравнения (20) на этот параметр. При этом уравнение становится двухпараметрическим.

Так, при $a \neq 0$ новыми параметрами, определяющими свойства решений, являются b/a и c/a. Выше, при рассмотрении условий существования решений в случаях В3 и В4, мы уже убедились в этом. Эти условия допускают графическую интерпретацию в виде множества точек на координатной плоскости, по осям которой отложены значения параметров b/a и c/a (рис. 4). Решения уравнения (20) существуют при тех значениях параметров a, b и c, которым соответствуют точки плоскости в заштрихованных областях и на отрезках, построенных сплошными линиями.

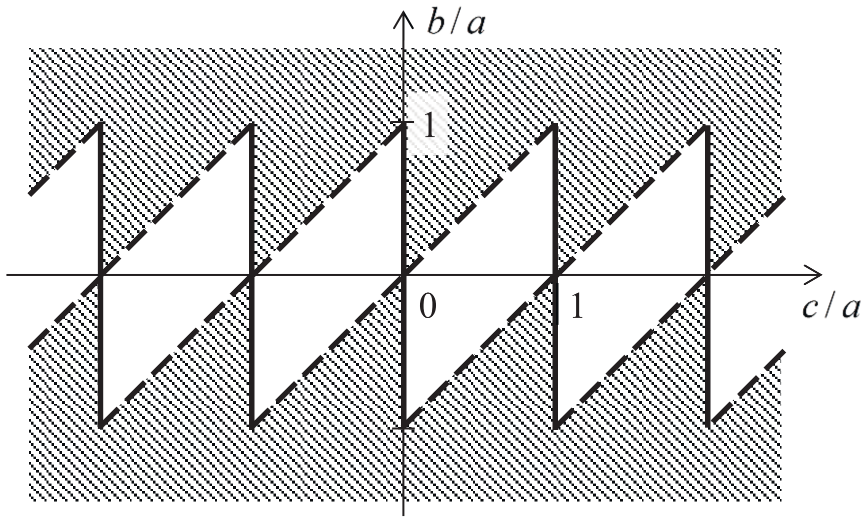


Рис. 4

Упражнение 6. *Вычислите ширину полосы, ограниченной прямыми $y = ax$ и $y = a(x-1) + b$.*

Упражнение 7. *Установите соответствие между условиями группы А и группы В.*

Упражнение 8. *Дополните рис. 4 необходимыми графическими элементами и пояснениями, отражающими тип множества решений — конечное или несчётное.*

6. Заключительные замечания

Мы рассмотрели путь от построения и обоснования математической модели для конкретной задачи до построения семейства функций, не рассматриваемого в школьном курсе математики. На этом пути можно уделить внимание и различным приёмам исследования уравнений с параметрами, и графической интерпретации результатов, да и просто преобразованию выражений, содержащих дробную и целую части переменной, в том числе с целью добиться наибольшего изящества и прозрачности формул. Этапы пути соответствуют разделам статьи. Но материалы разделов можно рассматривать и независимо друг от друга.

Отдельные элементы изложенного выше можно использовать при подготовке и проведении факультативных занятий по теме “Целая и дробная части числа”, реализующих в рамках данной темы функциональную линию и линию уравнений и неравенств школьного курса алгебры. Например, на занятии, посвящённом уравнениям вида (13), можно, не проводя полный анализ, разобрать с учащимися задачу из раздела 3, приводящую к уравнению (12), и предложить им набор уравнений, удовлетворяющих различным условиям из группы А2.

Упражнение 9. *Решите уравнения:*

а) $[x] = 7$;	*в)* $2[x] - 3x = 5$;	*д)* $7[x] - 3x = 25$;
б) $3[x] + 4x = 15$;	*г)* $3[x] - 2x = 6$;	*е)* $2[x] - 2x = -1$.

В целом материал настоящей статьи можно рекомендовать в качестве основы для выполнения учащимися проектно-исследовательской работы. Такая работа, по мнению автора, могла бы получиться интересной и нестандартной. При этом следует учесть, что разделы 4 и 5 подразумевают хорошее владение понятиями целой и дробной части числа, навыками работы с ними, представлениями о функциях $y = [x]$ и $y = \{x\}$, навыками геометрических рассуждений.

Два дополнения к предыдущим разделам, которые не являются обязательными, но тем не менее могут рассматриваться. Если познакомить учащихся с функцией $\operatorname{sgn}(x)$ — "знак числа x", можно объединить формулы (16) и (18):

$$m = [ry_0] - [ry_1], \quad r = \operatorname{sgn}(y_0 - y_1).$$

а также формулы (24) и (25):

$$m = \left[\left|\frac{b}{a}\right|\right] - \left[\left\{\frac{c}{a}\operatorname{sgn}\left(\frac{b}{a}\right)\right\} - \left\{\left|\frac{b}{a}\right|\right\}\right].$$

Ознакомив учащихся с функциями "пол" и "потолок" (ближайшие целые снизу и сверху для данного действительного числа), можно использовать эти понятия в рассуждениях о количестве целых чисел на промежутке. В частности, применяя принятые для упомянутых функций обозначения, формулы (16) и (18) можно записать как $m = \lfloor y_0 \rfloor - \lfloor y_1 \rfloor$ и $m = \lceil y_1 \rceil - \lceil y_0 \rceil$ соответственно[5].

Последнее замечание относится к разделу 2, ещё раз подчеркнём, не предназначенному для учащихся. Однако идея упрощения выражений, основанного на пренебрежении малыми слагаемыми, может обсуждаться с учащимися в различном контексте, поскольку эффективно работает, например, при необходимости оценить значение выражения или исследовать асимптотику функции. В частности, можно пояснить преобразование типа последнего перехода в (9), не привлекая сведения о разложении функций в степенные ряды. Действительно, пусть ε — малая величина, так что можно пренебречь величинами $\sim \varepsilon^2$ по сравнению с 1. Тогда $\sqrt{1+\varepsilon} \approx \sqrt{1+\varepsilon+\varepsilon^2/4} = \sqrt{(1+\varepsilon/2)^2} = 1+\varepsilon/2$. Применить подобное преобразование учащиеся могут при выполнении следующего упражнения.

Упражнение 10. *Планета имеет форму шара радиусом R. Тело взвешивается на пружинных весах на поверхности планеты, при этом показания весов равны P_0. Определите показания весов P при взвешивании того же тела на высоте H, считая, что отношение H/R мало по сравнению с 1.*

Ответы к упражнениям

Упражнение 1. $t = 3$ ч 25 мин.

Упражнение 2. $t = 2$ ч 55 мин.

Упражнение 3. $V(t) = 180t + 10[2t]$ и $V(t) = 180t + 5[2t]([2t] + 1)$, объём измеряется в литрах, время — в часах.

Упражнение 6. $|a - b|/\sqrt{1 + a^2}$.

[5] Функции "пол" от x и "потолок" от x обозначаются соответственно $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$

Упражнение 7.

A1.1	B1
A1.2	B4.1
A2.1	B4.2.1
A2.2	B4.2.2
A2.3	B3
A2.4	B2

Упражнение 9.

а) $[7; 8)$;
б) $2\frac{1}{4}$;
в) $\{6\frac{1}{3}; -5\frac{2}{3}; -5\}$;
г) $\{6; 7{,}5\}$;
д) решений нет;
е) $0,5 + z,\ z \in \mathbb{Z}$.

Упражнение 10. $P = P_0(1 - 2H/R)$.

Горшенин Константин Петрович,
учитель математики, г. Москва,
кандидат физико-математических наук.

E-mail: kpgorshenin@gmail.com

Две математические заметки

С. В. Дворянинов

Две заметки, посвященные различным вопросам математического образования.

1. Уроки академика Арнольда

Памяти В.И. Арнольда.

Десять лет назад, 3 июня 2010 года, ушел из жизни Владимир Игоревич Арнольд. В том же году в Москве, в издательстве МЦНМО, вторым изданием вышла в свет его книга «Математическое понимание природы: Очерки удивительных физических явлений и их понимание математиками (с рисунками автора)». Название это весьма примечательно по нескольким основаниям.

Во-первых, название книги довольно длинное по нынешним меркам. Сравните: «Обрыв», «Рудин», «Обломов», «Мать», «Поднятая целина», «Герой нашего времени» — здесь три слова. А вот в 1719 году Даниэль Дефо опубликовал первый и лучший свой роман, хорошо нам известный, с таким названием: «Жизнь и удивительные приключения Робинзона Крузо, моряка из Йорка, прожившего двадцать восемь лет в полном одиночестве на необитаемом острове у берегов Америки близ устьев реки Ориноко, куда он был выброшен кораблекрушением, во время которого весь экипаж корабля кроме него погиб; с изложением его неожиданного освобождения пиратами, написанные им самим». Так что длинное название — это явный признак классической литературы.

В 1687 году — 333 года назад — вышли все три тома главного труда великого Исаака Ньютона, его «Математические начала натуральной философии». Возможно, что название было дано автором по аналогии с «Началами философии» Рене Декарта. Математики же скорее всего вспомнят «Начала Евклида». А натурфилософия — это природа. Название Ньютоновых «Начал» на современном языке — «Математические основы физики». Итак, одна особенность названия книги Арнольда нам очевидна.

Вторая уникальная черта — упоминание в названии... рисунков, да еще авторских! Это совершенно неожиданно, аналогичные примеры сразу и не вспомнить. Попытаемся понять, что же завещал автор самим названием своей книги. Найти отгадку нам поможет другая книга Владимира Игоревича — «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Это учебник для студентов второго курса математических факультетов. В учебнике 1984 года издания 272 страницы. Попробуйте угадать, а сколько в этом учебнике рисунков?

Рисунков — 272!

А теперь подумайте: случайно ли число страниц в книге равно количеству рисунков? Нет, не случайно. Тем самым В.И. зашифровал свой наказ авторам всех учебных книг — «ни страницы без рисунка!»

Вспоминается лекция В.И. Арнольда, на которой он об этом сказал явным образом, попросив слушателей сделать выбор из двух учебников математического анализа — с рисунками и без них. Так вот, к учебнику без рисунков, он настоятельно советовал даже не притрагиваться. С той поры автор еще более укрепился в заповеди — «я без графической картинки решать задачу не люблю» (вариант: «ты без графической картинки решать задачу не берись»).

А сам способ скрытой передачи видения Арнольдом того, каким должен быть учебник, опять же отсылает к Ньютону, к его «секрету». В другой своей книге В.И. пишет:

Основное открытие Ньютона, то, которое он счел нужным засекретить и опубликовал лишь в виде анаграммы, состоит в следующем: «Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa». В переводе на современный математический язык это означает: «Полезно решать дифференциальные уравнения».

Рис. 1

«В истории естествознания не было события более крупного, чем появление «Начал» Ньютона» (С.В. Вавилов).

Рисунок на обложке «Математического понимания...» относится к очерку «Какая сила гонит велосипед вперёд?» Ясно, что изображение велосипеда — схематичное. Главное в том, что эта модель достаточна для решения поставленной задачи. Однако сразу бросается в глаза изображение вилки переднего колеса. У большинства велосипедов она такая, какая показана на рис.2а.

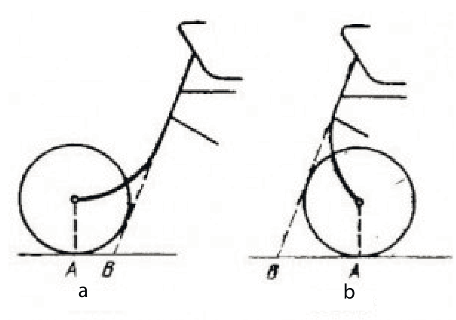


Рис. 2

На рис.2а ось руля наклонена назад, а конец передней вилки выгнут вперед. Если мысленно продлить ось руля до пересечения с землей, то мы увидим, что точка касания земли передним колесом находится впереди этого пересечения (см. рис.2а). Попробуем понять, почему используется такая конструкция (рис. 3). При этом сразу скажем, что степень понимания может быть разной.

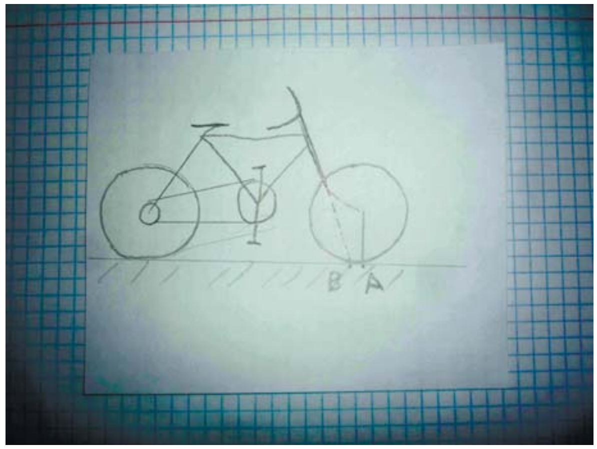


Рис. 3

Рассмотрим сначала частный случай. Пусть велосипед не опирается на землю, а закреплен в станке, или же мы его удерживаем руками в воздухе. Пусть вначале руль находится в нейтральном положении, то есть плоскость переднего колеса лежит в плоскости рамы велосипеда. Вообразим, что мы можем повернуть руль на 360°, то есть сделать полный оборот. Вопрос: какой при этом будет траектория конца вилки, то есть траектория центра колеса?

Ясно, что центр колеса (или конец вилки) будет двигаться по окружности. Эта окружность лежит в плоскости, которая перпендикулярна оси руля. Очевидно, что вначале и на первой половине оборота центр колеса по отношению к его неподвижной раме будет опускаться вниз. На второй половине оборота центр колеса будет подниматься (на деле полный оборот руля не требуется, угол поворота руля влево вправо не превосходит девяноста градусов).

Из сказанного следует, что если руль подвешенного в воздухе велосипеда из нейтрального положения повернуть влево или вправо на небольшой угол, то центр колеса от уровня рамы опустится вниз.

А теперь — самое главное в нашем элементарном анализе. Пусть руль велосипеда, *стоящего* в вертикальной плоскости на земле, из нейтрального положения чуть повернули влево или вправо. Расстояние (измеряемое вдоль вертикали от оси колеса до рамы) должно увеличиться. Но ось колеса находится на неизменном расстоянии от земли (это расстояние равно радиусу колеса). Отсюда с необходимостью следует, что рама велосипеда чуть поднялась вверх! Это означает, что потенциальная энергия велосипеда как материального тела увеличивается при повороте руля. Отсюда в свою очередь вытекает, что нейтральное положение руля в вертикальной плоскости рамы велосипеда является устойчивым.

Это обстоятельство позволяет ехать на велосипеде «без рук», по крайней мере, по прямой. При этом малые внешние возмущения, действующие на велосипед (камушки на дороге, порывы ветра), не приводят к потере устойчивости велосипеда.

А что происходит при повороте? Проведите простой эксперимент. Удерживая за седло стоящий велосипед, наклоните его в сторону. Вы увидите, что в некоторый момент руль повернется в ту же сторону. Опять же, система стремится в состояние, соответствующее минимуму потенциальной энергии, то есть в положение устойчивого равновесия. Это в свою очередь обеспечивает устойчивое движение велосипеда по окружности и при повороте. Иногда говорят, что переднее колесо велосипеда может «самоустанавливаться». Продолжать далее не будем, ибо математическая теория велосипеда сложна.

В заключение — несколько строк со страницы 28 книги Арнольда: «**От издательства**. После выхода в свет первого издания книги некоторые читатели справедливо заметили: рассмотренная модель неточна. Уточнения предварительно обсуждались с автором, ... оставляем читателю самому подумать над правильной моделью».

И в этом еще один урок академика Арнольда. Степень адекватности модели и степень понимания могут (и должны быть!) разными. Так и мы в своем простом рассказе ограничились лишь наблюдением за центром тяжести велосипеда (центром масс).

О главном же Владимир Игоревич в аннотации к книге сказал так:

«... естествознание заслуживает ... активного, творческого к себе отношения. Теперь я отвечаю на эти пожелания — следуя скорее Яну Амосу Каменскому, чем современным педагогам, то есть всегда стремясь быть понятным читателю...»

А велосипед Владимир Игоревич очень любил.

Математика и физика

Именно так называется первый параграф еще одной замечательной книги В.И. Арнольда (рис. 4).

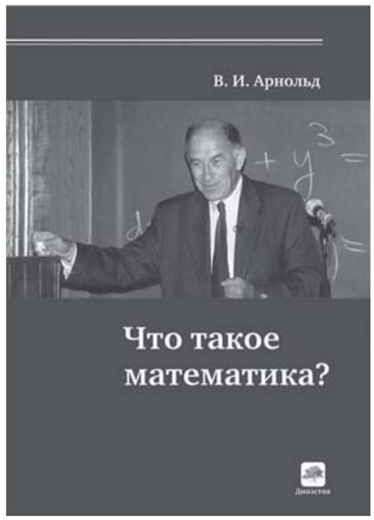


Рис. 4

На с. 12 читаем: «Заведовавший Отделением Российской академии наук (АН СССР) Николай Николаевич Боголюбов всегда убеждал меня, чтобы я печатал свои статьи не в математических, а в физических журналах. Среди моих читателей все равно больше физиков, механиков, астрономов и т. п.»

Выше мы говорили, пожалуй, о физике. Для соблюдения баланса с математикой предлагаем две геометрические задачи.

Задача 1. Внутри равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD выбрана точка P такая, что $\angle DAP : \angle PAB : \angle ABP : \angle CBP = 1 : 3 : 2 : 4$. Найдите CD, если $AP = 12$ и $BP = 16$.

Задача 2. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E такая, что $\angle BEA : \angle AED : \angle DEC = 3 : 7 : 4$ (рис.5). Найдите BC, если $AE = 9$ и $ED = 12$.

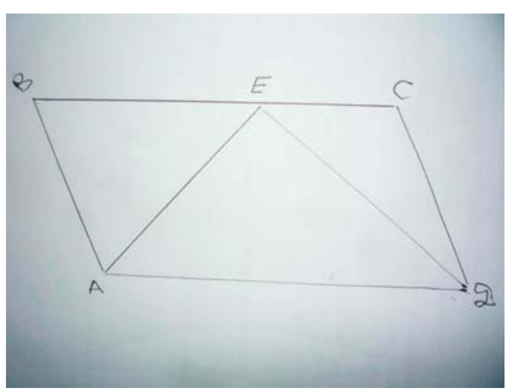


Рис. 5

Их решение вашими учениками (если вы учитель) или вашими друзьями (если вы ученик) позволит нам вспомнить другой урок академика Арнольда.

Владимир Игоревич всегда был защитником отечественного математического образования, прямо называя некоторые мероприятия по его изменению мракобесными. Он много раз говорил о нелепости тестовых испытаний и приводил в качестве примера задачу о нахождении площади прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 дюймов и опущенной на нее высотой в 6 дюймов. «Окончившие российские школы испытуемые не могли дать искомое «решение» ($S = ah/2{=}30$ кв. дюймов), так как понимали, что *таких треугольников нет*» (с.11).

Точно так же *нет и четырехугольников*, о которых говорится в задачах 1 и 2. А процент указавших в качестве ответов числа 20 и 15 будет свидетельствовать, насколько хорошо мы усвоили уроки Академика Арнольда.

2. Об одной задаче ЕГЭ на логику

Журнал «Математика в школе» в недавней публикации призывает обсудить одну школьную задачу. Ниже содержится отклик на этот призыв.

В журнале «Математика в школе» в статье [1] на с. 44 обсуждается одна старая задача для подготовки к ЕГЭ. Сказано, что и задача, и решение имеются в пособии 2015 года и в интернете. Далее авторы статьи предлагают «вдумчивому читателю оценить степень корректности формулировки... задачи, и правильность ее цитируемого решения». Предложение авторов вполне определенно говорит о том, что авторы считают задачу некорректной, а ее решение — ошибочным. Однако, соглашаться с таким мнением авторов [1] нельзя, как нельзя принимать и их критический настрой. Рассмотрим все по порядку.

О какой задаче идет речь

Задача [2, задание 3678]. Известно, что если функция выпукла на некотором промежутке, то она непрерывна на этом промежутке. Выберите утверждения, которые отсюда следуют:

1. Если функция не выпукла на некотором промежутке, то она имеет на этом промежутке точку разрыва;
2. Если функция на некотором промежутке имеет точку разрыва, то функция не выпукла на этом промежутке;
3. Если функция на промежутке выпукла, дифференцируема и чётна, то она непрерывна на этом промежутке;
4. Если функция непрерывна на промежутке, то она выпукла на этом промежутке.

Итак, сначала осознаем условие. Среди множества всех функций, определенных на некотором промежутке, выделено некоторое подмножество K. Каждая функция из K называется выпуклой. Здесь слово выпуклая — это просто-напросто только название, кличка и не более того. В условии о свойствах выпуклых функций сказано лишь, что каждая выпуклая функция (это A) непрерывна (это B). И все. Условие задачи содержит простую логическую импликацию $A \Rightarrow B$. С таким же успехом условие задачи можно было бы передать так:

...если функция интересна на некотором промежутке, то она непрерывна ...
...если функция добра не некотором промежутке, то она непрерывна ...
...если функция замечательна на некотором промежутке, то она непрерывна ...и т. п.

Не надо в этой школьной задаче искать глубокого математического смысла в слове *выпукла*. Эта задача по логике, а не по теории функций. Для ее решения удобно воспользоваться диаграммой Эйлера.

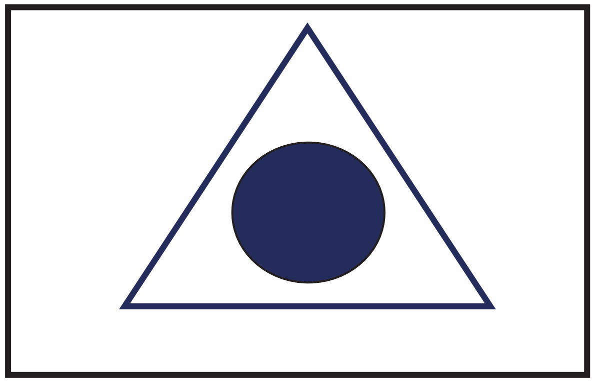


Рис. 5

Прямоугольник соответствует всем функциям, треугольник соответствует непрерывным функциям, круг — выпуклым. Ясно, что внешности треугольника соответствуют разрывные функции.

1. Анализируем первое из предложенных к исследованию утверждений. Пусть функция f не является выпуклой. Это означает, что соответствующая ей точка лежит вне круга. И тут может быть два варианта: эта точка лежит в треугольнике (то есть f непрерывна) **или** вне треугольника (то есть является разрывной).

   Утверждение 1) категорически означает, что точка лежит вне треугольника. Но это совсем не обязательно!

   Вывод. Утверждение 1) не верно, оно не следует из условия задачи.

2. Анализируем утверждение 2). Пусть функция имеет точку разрыва. Это означает, что соответствующая ей точка (или ради краткости речи, она сама) лежит ВНЕ треугольника. Совершенно очевидно, что тогда она тем более не попадает в круг, то есть **не** является выпуклой. Именно об этом сказано в утверждении.

   Вывод. Утверждение 2) верно.

3. В третьем утверждение прямым текстом сказано, что *если* некоторая функция g *выпукла* (то есть попадает в круг) и обладает еще какими-то двумя свойствами, то *то* тогда она *непрерывна* (то есть попадает в треугольник. Смотрим на рисунок, и воочию убеждаемся в истинности утверждения 3).

   Вывод. Утверждение 3) верное.

4. В условии утверждения 4) речь о функции, которая непрерывна (то есть попадает в треугольник. Но при этом она не обязательно оказывается и в круге!

   Вывод. Утверждение 4) не верно.

Объяснение беспокойства авторов статьи [1].

На с. 44 авторы [1] отсылают читателя к замечанию 4. Оно таково: «Если функция является выпуклой на отрезке, то на концах этого отрезка она может иметь разрыв». Следовательно, в рамках теоретических построений авторов [1] выпуклая функция не обязана быть непрерывной. Как следствие статья [1] запрещает авторам [2] постулировать, «что если функция выпукла на некотором промежутке, то она непрерывна на этом промежутке». Но позвольте! Задача по элементарной теории множеств (или по элементарной логике) из [2] не есть задача по теории функций.

Дополнение

Статья [1] возвращает нас к задаче пятилетней давности. Вернемся и мы к старой публикации [3]. На с. 4–5 читаем:

«Пусть расстояние между пристанями A и B равно 4 км, пристань A находится выше по течению реки, чем пристань B, скорость течения реки 2 км/ч, собственная скорость катера 10 км/ч ... можно предложить выбрать верное утверждение: ...

4. Если катер отчалит от пристани A в 10 часов утра, то он подойдет к пристани B в 10 часов 20 минут.

5. Катер отчалил от пристани A в 10 часов утра, дошел до пристани B, сделал десятиминутную и в 11 часов вернулся обратно.

(Правильные ответы — 2, 4, 5).»

Причисление высказывания 5 к «правильным ответам» — ошибка. Высказывание 5 никак не следует из условия задачи. Оно есть конъюнкция нескольких высказываний и ни одно из них из того, что сказано в условии, не вытекает. Говоря о потерях в современном школьном образовании, автор статьи [3] вспоминает «совершенную логику». Именно такое словосочетание находим в статье [3] дважды — в аннотации и первом абзаце. Оказывается, есть и «несовершенная» логика. Для доказательства факта существования, как известно, достаточно примера. Статья [3] такой пример являет.

Да и условие задачи нуждается в правке. Следовало бы сказать, что «расстояние между пристанями по реке равно 4 км». Это расстояние не обязательно равно «расстоянию между пристанями». Одно меряется вдоль прямой линии, прямой, другое – не обязательно вдоль прямой. Да и фразу «выше по течению реки» лучше заменить на «выше по реке», как обычно говорят и поют:

Вниз по Волге-реке,
С Нижня-Новгорода,
Снаряжен стружок,
Как стрела, летит.

Литература

1. Калинин С.И., Панкратова Л.В. Об интегрируемости выпуклой на отрезке функции // Математика в школе. - 2020. - № 4. - С. 36-45

2. Ященко И.В. ЕГЭ: 400 задач с ответами по математике. Все задания. Базовый и профильный уровни / И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий и др.; под ред. И.В. Ященко. - М.: Изд-во «Экзамен», 2015. - 687 с. (Серия «Банк заданий ЕГЭ»).

3. Седова Е.А. Задачи с множественным выбором решения // Математика в школе. - 2016. - № 9-10. - С. 4-9.

Дворянинов Сергей Владимирович,
доцент, к.ф.-м.н.

E-mail: dvoryan@yandex.ru

Точка пересечения медианы, биссектрисы и высоты треугольника как основа дидактического материала для повторения тем планиметрии

П. С. Караваев, Н. В. Мастинен

В статье представлен дидактический материал для организации повторения тем планиметрии в 9 – 10 классах физико-математических школ. Материал представляет собой список геометрических задач, составленных с использованием одного и того же геометрического объекта — точки пересечения медианы, биссектрисы и высоты треугольника. Предложенные рекомендации позволяют составить подобный дидактический материал для организации, помимо повторения, исследовательской деятельности учащихся.

В рамках современной школьной программы школьникам предоставляется малое количество времени на самостоятельную работу, что приводит к преобладанию репродуктивного вида деятельности [8, с. 76]. Одним из методов оптимального формирования у обучающихся исследовательских навыков является использование задач, объединённых общей конфигурацией, требующих проведения полноценного анализа, связанных с рядом тем из школьного курса планиметрии.

Этот метод мы собираемся описать на основе школьного курса геометрии 7 – 9 классов. В средней школе в программе по геометрии делается упор на изучение планиметрии. Мы представляем пример разработки исследовательских задач на общую конфигурацию и даем рекомендации по использованию подобных разработок на уроках.

В статье "Формирование исследовательских качеств у школьников в процессе решения математических задач при использовании задач исследовательского характера" В.И. Седакова советует "искать и использовать разнообразные основания для обсуждения и объединения разнородных направлений в одну укрупненную дидактическую единицу" [8, с. 80]. В качестве подобного "основания" для курса планиметрии может служить определённый *геометрический объект*, например, одна из замечательных точек треугольника. Известная Энциклопедия центров треугольника (The Encyclopedia of Triangle Centers) [9] содержит тысячи замечательных точек треугольника, что даёт возможность составить огромное количество подобных дидактических единиц. При этом геометрическим объектом может служить не только замечательная точка треугольника, но и другие геометрические конфигурации.

В качестве примера геометрического объекта мы выбрали общую точку пересечения высоты, медианы и биссектрисы, выходящих из разных вершин треугольника. Учащимся может быть предложено подобрать и решить задачи на эту тему самостоятельно или выбрать задачи из выданного списка. Основной целью такой работы будет использование как можно большего количества тем для повторения: этот параметр может послужить одним из критериев оценки работы.

Для составления списка задач мы пользовались следующими способами:

- просматривали сборники олимпиадных заданий;
- просматривали интернет-порталы, представляющие базу данных с задачами;
- самостоятельно составляли задачи.

Все задачи непосредственно связаны общей темой: исследование общей точки пересечения высоты, медианы и биссектрисы, выходящих из разных вершин треугольника.

Данный список может служить дидактическим материалом для проведения серии уроков в 9 – 10 классах в физико-математических школах с целью повторения и закрепления знаний по планиметрии. Помимо этого, подобная разработка — список задач, объединённых общей темой, — может использоваться как материал для развития исследовательских навыков у обучающихся. В некоторых случаях по итогам таких уроков учащиеся смогут использовать полученные решения задач для создания и представления работ по исследованию геометрических объектов на научно-исследовательских конференциях.

Кроме того, предложенный список задач может использоваться в организациях дополнительного образования по олимпиадной математике. Некоторые из задач имеют статус повышенной сложности, что позволяет использовать их для подготовки к выступлению на олимпиадах.

Приложение 1. Метод координат

Задача 1 ([11]). Биссектриса AD, медиана BM и высота CH остроугольного треугольника ABC пересекаются в одной точке. Докажите, что величина угла BAC больше $45°$.

Решение задачи представлено на сайте [11] math.stackexchange.com

Приложение 2. Тригонометрия

Задача 1 ([1, с. 259]). В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD, медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке. В каких пределах может изменяться величина угла A?

Решение задачи представлено в книге “Задачи по планиметрии” В.В. Прасолова [1, с. 271].

Задача 2 ([3]). В треугольнике отношение синуса одного угла к косинусу другого равно тангенсу третьего. Докажите, что высота, проведенная из вершины первого угла, медиана, проведенная из вершины второго, и биссектриса третьего угла пересекаются в одной точке.

Решение задачи представлено в “Задачнике Кванта” [4].

Задача 3 ([6, стр. 37]). В неравнобедренном треугольнике ABC высота из вершины A, биссектриса из вершины B и медиана из вершины C пересекаются в одной точке K. Какой из отрезков AK, BK, CK средний по величине?

Решение задачи представлено в книге А.А. Заславского “Олимпиады имени И.Ф. Шарыгина (2010—2014)” [6, стр. 148].

Задача 4[1] ([2]). Биссектриса AD, медиана BM и высота CH остроугольного треугольника ABC пересекаются в одной точке. Докажите, что величина угла BAC больше $45°$.

Решение задачи представлено в журнале “Квант” [12].

Приложение 3. Дополнительные построения

Задача 1 ([5, стр. 63]). В треугольнике ABC: $\angle B = 22,5°$, $\angle C = 45°$. Докажите, что высота AH, медиана BM и биссектриса CL пересекаются в одной точке.

Решение задачи представлено в книге “Московские регаты. Часть 2. 2006-2013” [5, с. 302-303].

Задача 2[2] ([13, с. 42]). Биссектриса AD, медиана BM и высота CH остроугольного треугольника ABC пересекаются в одной точке. Докажите, что величина угла BAC больше $45°$.

Решение задачи представлено в книге “Задачи Всесоюзных математических олимпиад” [13, с. 155].

Задача 3 ([6, стр. 37]). В неравнобедренном треугольнике ABC высота из вершины A, биссектриса из вершины B и медиана из вершины C пересекаются в одной точке K. Какая из сторон треугольника средняя по величине?

Решение задачи представлено в книге А.А. Заславского “Олимпиады имени И.Ф. Шарыгина (2010—2014)” [6, стр. 147-148].

Приложение 4. Признаки и свойства равнобедренного треугольника

Задача 1 ([10]). В треугольнике ABC угол A равен $60°$, а биссектриса AM, медиана BN и высота CL пересекаются в одной точке. Найдите остальные углы треугольника.

Решение задачи представлено на сайте [10] problems.ru

[1]Задача совпадает с задачей Приложения 1, однако предполагается ее решение другим методом.

[2]Задача встречается в третий раз, предполагается ее решение еще одним новым методом.

Приложение 5. Другие темы

Задача 1 ([6, стр. 32]). Высота AA', медиана BB' и биссектриса CC' треугольника ABC пересекаются в точке K. Известно, что $A'K = B'K$. Докажите, что и отрезок $C'K$ имеет ту же длину.

Решение задачи представлено в книге А.А. Заславского "Олимпиады имени И.Ф. Шарыгина (2010—2014)" [6, стр. 127].

Задача 2 ([5, стр. 21]). Высота AK, биссектриса BL и медиана CM треугольника ABC пересекаются в точке O, причём $AO = BO$. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

Решение задачи представлено в книге "Московские регаты. Часть 2. 2006-2013" [5, стр. 95—96].

Задача 3 ([7]). Биссектриса, медиана и высота некоторого треугольника, проведённые из трёх разных вершин, пересекаются в одной точке и делят этот треугольник на шесть треугольников. Сумма площадей каждого из двух наборов трёх треугольников, не имеющих общих сторон, одинакова. Верно ли, что исходный треугольник — равносторонний?

Решение задачи представлено на сайте [7] Московской математической олимпиады.

Задача 4 ([14]). В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD, медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке. Докажите, что

$$(BC + CA)(BC^2 + CA^2 - AB^2) = 2 \cdot BC \cdot CA^2.$$

Решение задачи представлено на сайте [14] www.mathisfunforum.com

Заключение

Таким образом, приведённые задачи позволяют повторить темы планиметрии: "Тригонометрия", "Метод координат", "Дополнительные построения" и др., систематизировать знания по ним и достичь заявленных целей. Тактика проведения урока — количество задач по каждой из тем, последовательность их предъявления, методическая организация урока — зависит от конкретных методических условий: типа образования (основного или дополнительного), уровня подготовки обучающихся и целей учителя.

Благодарности

Авторы выражают благодарность кандидату педагогических наук доценту Татьяне Вячеславовне Рыжковой за консультации.

Литература

1. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: учебное пособие. — 5-е издание., испр. и доп. — Москва: МЦНМО, ОАО "Московские учебники", 2006. — 640 с.

2. Задачи по математике и физике // Квант. - 1970. — № 10. - С. 37.

3. Задачи по математике и физике // Квант. - 1997. — № 1. - С. 24.

4. Задачи по математике и физике // Квант. - 1997. - № 4. - С. 20-21.

5. Московские регаты. Часть 2. 2006–2013 / Сост. А.Д. Блинков. — Москва: МЦНМО, 2014. — 320 с.

6. Заславский А.А. Олимпиады имени И.Ф. Шарыгина (2010—2014). — Москва: МЦНМО, 2015. - 168 с. (Библиотечка "Квант". Вып. 134. Приложение к журналу "Квант". - № 2. - 2015.)

7. Информационное сообщение о проведении окружного этапа Московской региональной олимпиады по математике в 2007/2008 учебном году // Олимпиады для школьников.
URL: http://olympiads.mccme.ru/mmo/okrug/okr08.htm

8. Седакова В.И. Формирование исследовательских качеств у школьников в процессе решения математических задач // Вестник Сургутского государственного педагогического университета. - 2010. - № 1(8). - С. 74-81.

9. Encyclopedia of Triangle Centers. URL: https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

10. Задачи. URL: http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=53456

11. Stack Exchange Network. URL: https://math.stackexchange.com/questions/914662/the-concurrence-of-angle-bisector-median-and-altitude-in-an-acute-triangle

12. Задачи по математике и физике // Квант. - 1971. - № 7. - С. 31-32.

13. Васильев Н.Б. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. — Москва: Наука, 1988. - 288 с.

14. Math is fun forum. URL: http://www.mathisfunforum.com/viewtopic.php?pid=414769#p414769

Караваев Пётр Сергеевич,
студент 1 курса бакалавриата
Физтех-школы Прикладной Математики и Информатики
Московского физико-технического института,
г. Долгопрудный.

E-mail: pskaravaev@gmail.com

Мастинен Никита Владимирович,
студент 1 курса бакалавриата
Физтех-школы Прикладной Математики и Информатики
Московского физико-технического института,
г. Долгопрудный.

E-mail: nikmastinen@gmail.com

Интерполяционный многочлен Эрмита для функций, голоморфных в односвязной области

Н. В. Илюшечкин

Найдены простые формулы для коэффициентов интерполяционного многочлена Эрмита в случае, если приближаемая функция голоморфна в односвязной области. Упомянутые коэффициенты могут быть представлены симметрическими выражениями от узлов интерполяции.

Введение

Напомним определение интерполяционного многочлена Эрмита для голоморфной функции. Пусть C — комплексная плоскость и $g(z)$ — функция, голоморфная в некоторой области $U \subseteq C$. Предположим, что в области U выбраны m различных точек (*узлов интерполяции*) $z_1, \ldots, z_m$, а также их *кратности* — натуральные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Обозначим

$$n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m. \tag{1}$$

Интерполяционным многочленом Эрмита для функции g с заданными узлами и кратностями называется многочлен $H_g(z)$ степени не более $n-1$, значения производных которого, включая и значение самой функции, в каждом узле z_l всех порядков $j = 0, 1, \ldots, \alpha_l - 1$ совпадают с соответствующими значениями функции g:

$$H_g^{(j)}(z_l) = g^{(j)}(z_l).$$

Как известно, существует единственный многочлен степени не более $n-1$, удовлетворяющий этим n условиям. Выражение для многочлена Эрмита [1, с. 172] громоздко и трудно для запоминания. Статья посвящена установлению простых и легко запоминающихся формул для коэффициентов многочлена H_g в случае, когда область U односвязна.

Обозначим

$$H_g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1},$$

а число n, определённое формулой (1), назовём *общей кратностью интерполяции.* Все коэффициенты $a_0, \ldots, a_{n-1}$ зависят только от функции g, узлов z_l и кратностей α_l. Фиксируем поэтому общую кратность n и будем рассматривать только такие наборы узлов и кратностей, что выполняется соотношение (1). С набором переменных $z_1, \ldots, z_m$ и кратностей $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ мы свяжем ещё один набор переменных $x_1, \ldots, x_n$, первые α_1 из которых равны z_1, следующие α_2 равны $z_2, \ldots$, последние α_m равны z_m. По переменным $x_1, \ldots, x_n$ также можно однозначно восстановить узлы интерполяции и их кратности. Дальнейшие рассуждения будут вестись в основном в переменных $X = (x_1, \ldots, x_n)$.

Случай простых узлов

Сначала рассмотрим наиболее простой случай, когда все кратности $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 1$. Тогда $n = m, x_l = z_l$ при $l = 1, \ldots, n$, а интерполяционный многочлен называется *многочленом Лагранжа*, коэффициенты которого могут быть выражены несложными явными формулами. Для простоты записи этих формул условимся о следующем обозначении. Пусть $g_1(x), \dots, g_n(x)$ — функции комплексного аргумента x, определённые во всех точках $x_1, \dots, x_n$. Тогда определитель порядка n, p-й столбец которого состоит из чисел $g_p(x_1), \dots, g_p(x_n)$, будет обозначаться символом $[g_1, \dots, g_n]$. Так как при всех $l = 1, \dots, n$ имеем

$$a_0 + a_1 x_l + \dots + a_{n-1} x_l^{n-1} = g(x_l),$$

то формула для коэффициентов a_q такова:

$$a_q = \frac{[1, x, \dots, x^{q-1}, g, x^{q+1}, \dots, x^{n-1}]}{[1, x, \dots, x^{n-1}]}. \tag{2}$$

При любом q знаменателем этой формулы является *определитель Вандермонда*, который мы будем обозначать символом $W = W(x_1, \dots, x_n)$. Если рассматривать узлы $x_1, \dots, x_n$ как переменные, то и числитель и знаменатель формулы (2) кососимметричны по этим переменным. Поэтому все коэффициенты $a_0, \dots, a_{n-1}$ симметричны по ним.

Ниже мы так преобразуем формулу (2), что её правая часть будет явно представлена через некоторые симметрические выражения от переменных $x_1, \dots, x_n$. Обозначим n-мерное пространство точек $X = (x_1, \dots, x_n)$ с комплексными координатами через C^n, а через U^n — n-кратное декартово произведение области U на себя. Пусть также Ω — подмножество области U^n, состоящее из точек X с попарно различными координатами. Если $X \in \Omega$, то $W(X) \neq 0$ и формула (2) однозначно определяет коэффициенты a_q. Как мы увидим, эти коэффициенты могут быть по непрерывности продолжены с множества Ω на всю область U^n. При этом все коэффициенты a_q окажутся симметрическими функциями переменных $x_1, \dots, x_n$, и, более того, голоморфными функциями от степенных сумм (*сумм Ньютона*) $s_k = x_1^k + \dots + x_n^k$ при $k = 1, \dots, n$.

Кроме сумм Ньютона нам понадобятся *элементарные симметрические многочлены* $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ от тех же переменных $x_1, \dots, x_n$, связанные с суммами $s_1, \dots, s_n$ формулами Ньютона [2, с. 29], которые позволяют выразить $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ как многочлены от сумм $s_1, \dots, s_n$ и наоборот. Вообще любой симметрический многочлен от переменных X является также многочленом от $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ или же от $s_1, \dots, s_n$. Таким образом, многочлены каждого из упомянутых семейств можно рассматривать как *образующие кольца симметрических многочленов* от переменных $x_1, \dots, x_n$.

Для обоснования возможности дифференцирований симметрических выражений по многочленам σ_r или же s_r, рассматриваемым как независимые переменные, нам нужно установить, что образы V_σ и V_s отображений

$$\sigma : U^n \longrightarrow C^n, \quad s : U^n \longrightarrow C^n,$$

заданных соответствиями

$$\sigma(X) = (\sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad s(X) = (s_1, \dots, s_n),$$

являются областями в пространстве C^n.

Начнём с первого из этих отображений. Пусть $\bar{\Sigma} = (\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n) \in V_\sigma$ — точка, являющаяся образом точки $\bar{X} \in U^n$ при отображении σ. Так как числа $x_1, \dots, x_n$ являются корнями многочлена

$$x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n,$$

а корни многочлена непрерывно зависят от его коэффициентов [3, с. 222], то для любой точки $\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ из достаточно малой окрестности образа $\bar{\Sigma}$ найдётся прообраз X, близкий к точке $\bar{X}$.

Далее, формулы Ньютона осуществляют диффеоморфизм области V_σ и множества V_s, вследствие чего V_s также является областью в C^n.

Для простоты формул мы вместо сумм s_k будем использовать выражения $\tilde{s}_k = s_k/k$, которые назовём *модифицированными суммами Ньютона.* Разумеется, образ V отображения $\tilde{s} : U^n \longrightarrow C^n$, заданного соответствием

$$\tilde{s}(X) = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n),$$

является областью в C^n.

Основная теорема

По предположению область U односвязна. Поэтому для функции $g(x)$ в этой области существует [4, с. 85] первообразная $G(x)$.

Лемма. *Пусть функция $g(x)$ голоморфна в односвязной области U, $G(x)$ — её первообразная в этой области, и пусть*

$$\Gamma(X) = G(x_1) + \cdots + G(x_n).$$

Тогда функция Γ является голоморфной функцией от модифицированных сумм $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n$, принадлежащих области V.

Доказательство. Пусть $X \in U^n$, причём среди точек $x_1, \ldots, x_n$ могут быть совпадающие. Возьмём гладкий контур λ, охватывающий все эти точки и принадлежащий области U. Вследствие интегральной формулы Коши имеем

$$\Gamma(X) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\lambda} \left(\frac{1}{\zeta - x_1} + \cdots + \frac{1}{\zeta - x_n} \right) G(\zeta) d\zeta.$$

Если выражение в скобках привести к общему знаменателю, то его числитель и знаменатель окажутся многочленами от $\zeta, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Благодаря формулам Ньютона их можно представить как многочлены от $\zeta, \tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n$. Интегрирование по параметру ζ преобразует рассматриваемую дробь в функцию, голоморфную по переменным $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n$, что и доказывает лемму.

Перейдём к доказательству продолжаемости коэффициентов a_q с множества Ω на область U^n и их голоморфности по переменным $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n$ в области V. Мы докажем даже более общее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ — функции комплексного переменного x, голоморфные в односвязной области U. Тогда частное от деления определителя $[g_1, \ldots, g_n]$ на определитель Вандермонда $W(X)$ может быть по непрерывности продолжено с множества Ω на область U^n и представлено как голоморфная функция переменных $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n$ в области V.*

Доказательство. Пусть $G_p(x)$ — первообразная функция по отношению к $g_p(x)$ в области U при $p = 1, \ldots, n$, и пусть

$$\Gamma_p(X) = G_p(x_1) + \cdots + G_p(x_n).$$

По доказанной лемме все Γ_p являются голоморфными функциями от модифицированных сумм $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n$ в области V. Поэтому при любом $p = 1, \ldots, n$ и любом $l = 1, \ldots, n$ имеем

$$g_p(x_l) = \frac{dG_p}{dx_l} = \frac{\partial \Gamma_p}{\partial x_l} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \Gamma_p}{\partial \tilde{s}_r} \frac{\partial \tilde{s}_r}{\partial x_l} = \sum_{r=1}^{n} x_l^{r-1} \frac{\partial \Gamma_p}{\partial \tilde{s}_r},$$

то есть элементы определителя $[g_1, \ldots, g_n]$ являются суммами произведений элементов определителя W на частные производные $\partial \Gamma_p / \partial \tilde{s}_r$. Отсюда следует разложение определителя $[g_1, \ldots, g_n]$ в произведение

$$[g_1, \ldots, g_n] = W \begin{vmatrix} \partial \Gamma_1/\partial \tilde{s}_1 & \cdots & \partial \Gamma_n/\partial \tilde{s}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial \Gamma_1/\partial \tilde{s}_n & \cdots & \partial \Gamma_n/\partial \tilde{s}_n \end{vmatrix}.$$

Это доказывает теорему — ведь второй множитель в правой части полученного равенства является голоморфной функцией от $\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n$.

Из формулы (2) следует, что применительно к вычислению коэффициентов a_q мы должны взять

$$g_p(x) = x^{p-1} \text{ при } p \neq q+1, \quad g_{q+1}(x) = g(x),$$

и несложное вычисление показывает, что

$$a_q = \frac{\partial \Gamma}{\partial \tilde{s}_{q+1}} \tag{3}$$

для всех $q = 0, 1, \ldots, n-1$.

Общий случай

Формула (3) установлена для коэффициентов многочлена Лагранжа. Оказывается, она справедлива и в более общей ситуации.

Теорема 2. *Если $g(z)$ — функция, голоморфная в односвязной области U, $z_1, \ldots, z_m$ — различные точки этой области, взятые с кратностями $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, то коэффициенты интерполяционного многочлена Эрмита для функции g, построенного по этим точкам, выражаются формулой* (3).

Доказательство. Нам понадобится понятие функции от матрицы, определённой на спектре этой матрицы. Соответствующее определение приводится в [5, с. 96]. Для нас имеет значение следующее. Во-первых, если B — матрица порядка n, то элементы матрицы $g(B)$ непрерывно зависят от элементов матрицы B, что следует из формулы Пуанкаре

$$g(B) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\lambda} g(\zeta)\, (\zeta E - B)^{-1}\, d\zeta.$$

Здесь λ — любой замкнутый контур, охватывающий все собственные числа матрицы B, а E — единичная матрица.

Во-вторых, если степень *минимального многочлена матрицы* B совпадает с её порядком n, то

$$g(B) = H_g(B) = a_0 E + a_1 B + \cdots + a_{n-1} B^{n-1}, \tag{4}$$

где интерполяционный многочлен H_g построен по собственным числам матрицы B вместе с их кратностями.

В частности, если B — *жорданова матрица*, имеющая ровно m клеток размеров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, причём в клетке с номером $l = 1, \ldots, m$ на диагонали стоят числа z_l, а на первой наддиагонали — единицы, то для этой матрицы справедлива формула (4).

Пусть также B' — матрица порядка n, полученная из матрицы B следующей заменой диагональных элементов. Прежде всего, по числам z_l и кратностям α_l определяются числа $x_1, \ldots, x_n$. Далее каждый диагональный элемент x_p заменяется близким к нему элементом x'_p так, что все числа $x'_1, \ldots, x'_n$ попарно различны. На первой наддиагонали каждой клетки матрицы B' также стоят единицы. Тогда минимальный многочлен этой матрицы имеет степень n.

Обозначим через H'_g многочлен Лагранжа, построенный по n точкам x'_p и значениям функции g в этих точках. Пусть

$$H'_g(x) = a'_0 + a'_1 x + \cdots + a'_{n-1} x^{n-1},$$

причём по доказанному ранее

$$a'_q = \frac{\partial \Gamma}{\partial \tilde{s}_{q+1}}, \tag{5}$$

где все симметрические выражения построены по числам $x'_1, \ldots, x'_n$.

Кроме того,

$$g(B') = a'_0 E + a'_1 B' + \cdots + a'_{n-1}(B')^{n-1}. \tag{6}$$

Устремим теперь матрицу B' к B, то есть числа x'_p к числам x_p для всех $p = 1, \ldots, n$. Из непрерывности функции от матрицы следует, что $g(B') \longrightarrow g(B)$. При этом многочлен (6) стремится к выражению

$$g(B) = \hat{a}_0 E + \hat{a}_1 B + \cdots + \hat{a}_{n-1} B^{n-1},$$

где коэффициенты $\hat{a}_q$ имеют вид(5), а все симметрические выражения построены по n числам, из которых α_1 равны $z_1, \ldots, \alpha_m$ равны z_m.

В силу единственности многочлена Эрмита должно быть $\hat{a}_q = a_q$ для всех $q = 0, 1, \ldots, n-1$, что и доказывает теорему.

Изменение базиса в пространстве многочленов

Нашим следующим шагом будет установление формул для практического вычисления коэффициентов многочлена Эрмита в случае, когда приближаемая функция — целая. Формула (3) даёт коэффициенты разложения многочлена $H_g(x)$ по базису $1, x, \ldots, x^{n-1}$ в пространстве многочленов степени не более $n-1$. Как мы увидим ниже, более простые формулы получаются при разложении многочлена Эрмита по некоторому другому базису этого же пространства.

Сначала введём некоторые обозначения. Кроме элементарных симметрических многочленов и сумм Ньютона нам понадобятся *полные симметрические многочлены* $h_1, h_2, \ldots$ (бесконечное семейство). Многочлен h_r — это сумма всех возможных мономов степени r от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами, равными единице. Мы будем также считать, что $h_0 = 1$ и $h_r = 0$ при $r < 0$. Кроме того, для элементарных симметрических многочленов мы будем использовать ещё одно обозначение $\sigma_r = (-1)^r p_r$, а также соглашение $\sigma_0 = p_0 = 1$ и $p_r = 0$ при $r < 0$. Многочлены двух упомянутых только что семейств связаны соотношениями [2, с. 27]

$$p_0 h_t + p_1 h_{t-1} + \cdots + p_n h_{t-n} = 0, \tag{7}$$

справедливыми при любом натуральном t.

В качестве базисных мы возьмём многочлены $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)$, используемые в методе Д.К. Фаддеева [6, с. 295] для вычисления коэффициентов характеристического многочлена матрицы. Эти многочлены определяются формулами

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x + p_1, \quad f_2(x) = x^2 + p_1 x + p_2, \ \ldots,$$
$$f_{n-1}(x) = x^{n-1} + p_1 x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}.$$

По этому базису может быть разложен интерполяционный многочлен Эрмита

$$H_g(x) = b_0 f_0(x) + b_1 f_1(x) + \cdots + b_{n-1} f_{n-1}(x). \tag{8}$$

Для того, чтобы найти коэффициенты этого разложения, нам понадобятся некоторые формулы, к выводу которых мы и переходим.

Если в качестве образующих кольца симметрических многочленов взять многочлены $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, то справедлива формула [7, с. 20]

$$\frac{\partial \tilde{s}_k}{\partial \sigma_r} = (-1)^{r-1} h_{k-r} \tag{9}$$

при любом $k \geqslant 1$. Следовательно, матрица Якоби отображения

$$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \longrightarrow (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$$

такова:

$$J = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_1 h_1 & \varepsilon_2 h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_1 h_2 & \varepsilon_2 h_1 & \varepsilon_3 h_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1 h_{n-1} & \varepsilon_2 h_{n-2} & \varepsilon_3 h_{n-3} & \cdots & \varepsilon_n h_0 \end{pmatrix},$$

где знак $\varepsilon_r = (-1)^{r-1}$. Из формулы (7) следует, что обратная матрица J^{-1} имеет вид

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_2 p_1 & \varepsilon_2 p_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_3 p_2 & \varepsilon_3 p_1 & \varepsilon_3 p_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_n p_{n-1} & \varepsilon_n p_{n-2} & \varepsilon_n p_{n-3} & \cdots & \varepsilon_n p_0 \end{pmatrix}.$$

Но эта обратная матрица является матрицей Якоби обратного отображения

$$(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n) \longrightarrow (\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \tilde{s}_q} = (-1)^{r-1} p_{r-q}, \tag{10}$$

Переходим к выводу формул для коэффициентов b_q. Прежде всего, в силу формул Ньютона функция $\Gamma(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$ может быть представлена также как голоморфная функция $\Gamma(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ переменных $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Далее, из формул (3) и (10) следует, что

$$H_g(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r x^r = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial \Gamma}{\partial \tilde{s}_{r+1}} x^r = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_{q+1}} \frac{\partial \sigma_{q+1}}{\partial \tilde{s}_{r+1}} x^r =$$

$$\sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_{q+1}} \sum_{r=0}^{n-1} p_{q-r} x^r = \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_{q+1}} f_q(x),$$

так что формула для коэффициентов разложения (8) такова:

$$b_q = (-1)^q \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_{q+1}}. \tag{11}$$

Приложение к целым функциям

В заключение приведём некоторые формулы для практического применения полученных результатов в случае, если область $U = C$, то есть функция $g(x)$ — целая. Тогда её можно разложить в ряд Тейлора с центром в начале координат:

$$g(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots .$$

Тогда

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = \gamma_0 \tilde{s}_1 + \gamma_1 \tilde{s}_2 + \cdots + \gamma_{n-1} \tilde{s}_n + \cdots ,$$

и из (9) и (11) следует, что коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ могут быть найдены как суммы рядов

$$b_q = \gamma_q h_0 + \gamma_{q+1} h_1 + \gamma_{q+2} h_2 + \cdots .$$

Коэффициенты a_q разложения многочлена $H_g(x)$ по базису $1, x, \ldots, x^{n-1}$ в случае целой функции $g(x)$ выражаются более сложными рядами. В самом деле, из (9) и (10) при $1 \leqslant q \leqslant n$ и $k > n$ следует

$$\frac{\partial \tilde{s}_k}{\partial \tilde{s}_q} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \tilde{s}_k}{\partial \sigma_r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \tilde{s}_q} = \sum_{r=1}^{n} h_{k-r} p_{r-q}.$$

Отсюда приходим к формуле для коэффициентов a_q:

$$a_q = \gamma_q + \sum_{k=n}^{\infty} \gamma_k (p_0 h_{k-q} + p_1 h_{k-q-1} + \cdots + p_{n-q-1} h_{k-n+1}).$$

Литература

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, том 1. - М.: Физматгиз, 1962.
2. Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. - М.: Мир, 1985.
3. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. - М.: Наука, 1984.
4. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, часть 1. - М.: Наука, 1985.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988.
6. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. - М.: Физматгиз, 1963.
7. Илюшечкин Н.В. О частных производных симметрических многочленов по элементарным многочленам // Математическое образование. - 2019. - № 3(91). - с. 18-21.

Илюшечкин Никита Васильевич
АО Концерн Моринформсистема – Агат, г. Москва,
Ведущий инженер.

E-mail: ilyush55@mail.ru

Колмогоров и современная информатика

С. П. Левашкин

Великий советский ученый Андрей Николаевич Колмогоров оставил богатейшее наследие в информатике. Ему принадлежат такие фундаментальные понятия, как алгоритм Колмогорова, машина Колмогорова, сложность Колмогорова, которые в конечном итоге привели его к переосмыслению математической науки и основам новой математики компьютеров.

В компьютере нет координат, нет расстояний и нет размерностей; большинство традиционных математических моделей некорректны. Компьютер обрабатывает конечные двоичные последовательности, то есть последовательности нулей и единиц. Возникает естественный вопрос: стоит ли сегодня продолжать, как мы это делали на протяжении многих лет, решать проблемы информатики, используя классический математический аппарат, такой как «математическое моделирование»? Первым, кто привлек внимание к этому вопросу, и наметил пути его решения, был Андрей Николаевич Колмогоров. Но исторически сложилось так, что вместо поиска практического приложения его теорий, осуществлялось лишь количественное накопление новых теорем учеными-теоретиками, а практикующие специалисты были далеки от них.

Данная статья является попыткой ввести в контекст современных информационных технологий теории Колмогорова и избавить практиков от необходимости действовать «вслепую», методом проб и ошибок, представив практическую ценность этих теорий. Мы также покажем, что Колмогоров гениально предсказал зарождение современной информационной эры и подготовил для будущего поколения необходимый инструментарий осуществления цифровой трансформации и перехода к цифровому обществу, к новому экономическому базису НТР 4.0, нереализуемому, по нашему мнению, без необходимой разработки и применения фундаментальной области знаний: К-математики, то есть математики компьютеров.

Введение

Сформулировав в 1960-ых годах постулат о существовании программы взаимно однозначного соответствия «запись в двоичную форму — уникального идентификатора и обратно идентификатор в запись»[1], величайший советский математик Андрей Николаевич Колмогоров привлек внимание научного сообщества к собственному подходу решения математических проблем информатики.

Эта статья призвана ввести в актуальную повестку научного дискурса и контекст современных информационных технологий вклад Колмогорова, обосновать актуальность практического применения его научного наследия:

- алгоритмической теории информатики[2];
- теории алгоритмов и машин;
- программируемой технологии;
- компьютерной математики.

[1]Это не что иное как универсальная характеристика Лейбница, «запись в число», сформулированная им в 1658 году.

[2]В статье мы используем понятия «информатика» и «компьютерные науки» в зависимости от текущего контекста. Однако, понимаем их, и с точки зрения здравого смысла, и с позиций определений, данных им в широко признанных энциклопедиях компьютерных наук. Все более выраженная взаимообусловленность информатики и компьютерной науки заставляет нас задуматься о более подходящем понятии для описания их особого рода взаимодействия, для которого, с нашей точки зрения, обосновано введение термина «InfomatiCS» (Informatics and Computer Science). Применяя понятие «К-математика» вместо «компьютерная математика», мы подчеркиваем уникальность Колмогоровского подхода к решению математических проблем информатики (см. раздел 2).

Как в России, так и во всем мире Колмогоров более известен своими работами по сложности. Однако, с нашей точки зрения, она является не более чем вспомогательной концепцией, которую следует рассматривать как теоретическую основу оценки сложности программного обеспечения. Что, тем не менее, ставит ее в один ряд с базовыми понятиями информатики, поскольку сложность Колмогорова связывает программы, алгоритмы и их представление (кодирование) в виде двоичных строк. Однако наследие Колмогорова в информатике намного шире.

В этой статье мы предпринимаем попытку научного обоснования этого тезиса, чтобы привлечь внимание научной общественности (прежде всего, практикующих специалистов) к достижениям Колмогорова в математической информатике. Важно отметить, что широко известная не вычислимость[3] сложности Колмогорова значительно снижает интерес к его теориям среди практиков, оставляя их математикам-теоретикам. Заполнение этого значительного пробела тоже является целью данной публикации.

Основываясь на идеях Колмогорова, мы интерпретируем алгоритм Колмогорова (К-алгоритм), машину Колмогорова (К-машину) и сложность Колмогорова (К-сложность) в контексте современных информационных технологий. Мы показываем, что они представляют собой элементы алгоритмической теории информатики и программируемой технологии Колмогорова (К-технологии), а также новую компьютерную математику, то есть математику компьютеров (К-математику)[4].

По ходу изложения этой статьи мы будем последовательно обращаться к важнейшим работам Колмогорова [Колмогоров и др., 1958] [Колмогоров, 1965] [Колмогоров, 1983], придерживаясь хронологического порядка их публикации самим ученым, что позволит наиболее точно проиллюстрировать логику эволюции его идей и методы, которые привели Колмогорова к формулированию новой концепции К-математики. Для Колмогорова было типичным начать со сложной, но конкретной задачи, и закончить более общими выводами. Например, методы, примененные Владимиром Арнольдом (учеником Колмогорова) для решения 13-ой проблемы Гильберта, были обобщены Колмогоровым для решения в значительной степени более широкого круга задач [Колмогоров, 1957].

Примечательно, что работы [Колмогоров и др., 1958] [Колмогоров, 1965] [Колмогоров, 1983] стали последними «серьезными» научными публикациями Колмогорова. Затем начался период уточнения ранних работ и написания учебников по математике для средней и старшей школы. К слову говоря, Колмогоров не брался за простые задачи. То же написание учебников — это титанический труд, иллюстрирующий масштаб его личности, а величина решенных им задач наиболее ярко продемонстрирована в алгоритмической теории информатики и основанной на ней программируемой технологии (см. раздел 2).

1. Предыдущие исследования и актуальное состояние

В этом разделе мы рассмотрим некоторые из основных подходов, предшествовавших появлению теорий Колмогорова, а также — современные направления, связанные с рассматриваемой областью.

Существует множество определений понятия «информация». Начиная с наиболее общих и возвышенно философских («информация — это отражение реального мира» или «информация — это основное свойство материи и мера организации систем») и продолжая более конкретными и сугубо практическими («информация — это данные, подлежащие сбору, преобразованию, хранению и передаче»). Теория информации имеет дело с нахождением соответствия между объектами, явлениями, символами или образами. Символы могут быть весьма разнообразными: последовательность электромагнитных импульсов, идущих от телекоммуникационных спутников; устный и письменный язык; телевизионная картинка; генетический код, содержащий наследуемые свойства в биологических клетках и проч. Поиск оптимальной системы символов и получение данных о них, то есть

[3]Фактически, вычислимость К-сложности не настолько принципиальна в применении К-технологии (см. разд. 2).

[4]В статье мы используем следующие сокращения: АТИ — алгоритмическая теория информатики, ПТК или К-технология — программируемая технология Колмогорова, К-постулат — постулат Колмогорова, К-машина — машина Колмогорова; К-сложность — сложность Колмогорова; К-алгоритм — алгоритм Колмогорова (см. разд. 2).

описания свойств объектов (кодирование), основанного на свойствах символов (декодирование), является основной проблемой информатики.

В предисловии к первому изданию «Кибернетики», появившемуся в 1948 году, Норберт Винер писал: «...нам пришлось разработать статистическую теорию количества информации. В этой теории за единицу количества информации принимается количество информации, передаваемое при одном выборе между равновероятными альтернативами». Винер отмечает, что аналогичная идея практически одновременно появилась в публикациях ряда других ученых, в том числе у статистика Р.А. Фишера и у доктора К. Шеннона из Белловских телефонных лабораторий. Винер поясняет, что он исходил из проблемы сообщения и шумов в электрических фильтрах, Фишер — из классической статистической теории, а Шеннон — из проблемы кодирования информации. Далее по тексту Винер обращает внимание на важное для нас замечание: «...примечательно, что некоторые мои изыскания в этом направлении связаны с более ранней работой А.Н. Колмогорова в России, хотя значительная часть моей работы была сделана до того, как я обратился к трудам русской школы» [Wiener, 1948].

Работа Шеннона была опубликована в 1948 году [Shannon, 1948]. Используя методы теории вероятности, Шеннон искал наилучший подход к кодированию и декодированию информации для ее передачи и хранения. Первая публикация Шеннона, написанная на уровне «физической строгости», привлекла внимание Колмогорова. В предисловии к русскому переводу этих работ Колмогоров написал: «Значение работ Шеннона для чистой математики не сразу было достаточно оценено. Мне вспоминается, что еще на международном съезде математиков в Амстердаме (1954) мои американские коллеги, специалисты по теории вероятностей, считали мой интерес к работам Шеннона несколько преувеличенным, так как это более техника, чем математика. Сейчас такие мнения вряд ли нуждаются в опровержении. Правда, строгое математическое «обоснование» своих идей Шеннон в скольких-нибудь трудных случаях предоставил своим продолжателям. Однако, его математическая интуиция изумительно точна...»[5];

Иллюстрацией центральной идеи алгоритмической теории информатики Колмогорова «натуральное число в его двоичную запись, а запись в число» (см. подраздел 2.1) служит код Морзе (1836) [Gleick, 2011]. Этот оптимальный неравновесный код принимает в расчет вероятности появления в текстах наиболее часто использующихся букв. Метод Морзе (для передачи текстов) основан на сериях, управляемых ключом электронных импульсов, обычно представленных коротким («точка») и длинным («тире») импульсами. Одна из разновидностей кода Морзе — штрих-код, разработанный Норманом Вудландом и др. в 1949 году [Burke, 1984]. В штрих коде «точка» — это «тонкая линия», а «тире» — «жирная линия». Оба кода следуют одной и той же идее оценки количества информации; оба кода имеют дело с информационными объектами и их идентификацией. Формально Колмогоров развил именно эту идею: сначала на эмпирическом уровне (постулат) [Колмогоров и др., 1958], затем формально (алгоритмическая теория информатики и программируемая технология) [Колмогоров, 1965], что в конечном итоге привело его к основам компьютерной математики [Колмогоров, 1983];

Арнольд, ученик Колмогорова, используя разности Ньютона и монады Лейбница, предложил интерпретацию структурной сложности конечных двоичных последовательностей [Arnold, 2006]. Его подход основан на построении графа, соответствующего заданной двоичной последовательности, и исследовании его геометрических свойств, служащих мерой (структурной) сложности битовой строки. При этом последовательность считается бо́лее сложной, если она принадлежит к циклу графа, имеющему бо́льшую длину. При наличии одинаковой длины циклов у двух последовательностей, более сложной считается та, которая имеет большее расстояние до цикла.

Манин и Марколли [Manin et al., 2012] интерпретировали K-сложность как вид энергии, сходной с

[5]С одной стороны, «физический уровень строгости» и с другой — «его математическая интуиция изумительно точна». Именно Колмогоров и его ученики дали результатам Шеннона строгое математическое обоснование для любых сложных случаев. Шеннон получил в их лице достойных продолжателей.

энергией термодинамических (хаотических) систем. В основе их подхода лежит принцип Ландауэра.

Наиболее полную интерпретацию подходов Колмогорова к алгоритмической теории информатики можно найти в публикациях [Александров и др., 2008] и [Левашкин и др., 2012].

Например, в [Александров и др., 2008], авторы предлагают уравнение состояния (1.1), связывающее информацию и энергию в мобильных телефонах в терминах К-сложности. GSM телефоны передают информацию в цифровом формате, следовательно время разрядки батареи зависит от количества переданных бит:

$$P = klS(I)/t, \tag{1.1}$$

где: P — потребляемая мощность (Вт); l — длина информационного сообщения (бит); t — время передачи (с); $S(I)$ – функция сложности информационного сообщения, показывающая, во сколько раз это сообщение можно сжать; k — постоянная размерности (Вт·с/бит).

Возможно, на текущий момент, это уравнение является первым и единственным в своем роде «уравнением состояния» в компьютерных науках, что хотелось бы выделить особо.

Затем, применив формулу Эйнштейна $E = mc^2$, авторы получили, что $I \leq KE = Kmc^2$, где E – энергия, необходимая для передачи сообщения с помощью I бит; K – коэффициент Колмогорова, показывающий эффективность наилучшей программы: форматы и протоколы хранения и передачи данных, а также уровень технологии и эффективности оборудования.

Чем меньше (ближе к единице) коэффициент К, тем ближе к оптимальной технология передачи информации. Авторы интерпретируют эту формулу как минимальную массу информационного носителя, содержащего заданное количество данных, что эквивалентно необходимому минимуму энергии для передачи равного количества информации. Тогда мощность, затрачиваемая на передачу сообщения, будет равна PS ватт на скорости S бит/с, при условии, что на передачу одного бита затрачивается P джоулей. Использование алгоритмов компрессии позволяет уменьшить длину сообщения, что снижает мощность, требуемую для его передачи[6].

Первой и основной задачей новой теории явилось нахождение количественной меры информации, то есть численной оценки «информативности» сообщений. Развивая эту идею (оценка неопределенности источников сообщений), Шеннон использовал понятие «энтропия» [Shannon, 1948]. Энтропия позволила решить много важных задач, относящихся к передаче и хранению дискретных сообщений. Однако все последующие попытки перенести его на случай непрерывных сигналов оказались безуспешными. До того момента, как в 1956 году в докладе «Теория передачи информации» на заседании АН СССР Колмогоров заключил: «Далее я настаиваю на той идее, что основным понятием, допускающим обобщение на совершенно произвольные непрерывные сообщения и сигналы, является не непосредственно понятие энтропии, а понятие количества информации I $(x,\ h)$ в случайном объекте x относительно объекта h», а его последующие формальные математические построения определили новый подход к алгоритмической теории информатики [Левашкин и др., 2012].

2. Алгоритмическая теория и технология Колмогорова

С конца 1950-х и до начала 1970-х годов Колмогоров реконструировал фундамент теории информации. Об этом периоде своей работы он писал: «...занятия совсем общими полу-философскими размышлениями у меня самого заняли больше времени и энергии, чем, может быть, кажется издали. В такой выработке совсем общих взглядов итог усилий заключается не в формулировке точно фиксированных «результатов», а в общей перестройке собственного сознания и размещения всего в надлежащей перспективе. Поэтому потом оказывается, что как бы и ничего не открыл «нового», а потратил много сил и времени». Академик лукавит. Он открыл, всего-навсего, новое направление

[6] В предварительной версии этой статьи [Левашкин и др., 2012], ее авторы интерпретируют теории Колмогорова сходным образом.

в теории информации. С появлением статей [Колмогоров и др., 1958] [Колмогоров, 1965] [Колмогоров, 1983] родилась алгоритмическая теория информатики, программируемая технология и новая К-математика.

В оставшейся части статьи мы рассмотрим достижения Колмогорова, начиная с работы [Колмогоров и др., 1958], выполненной совместно со своим студентом Владимиром Успенским (см. подразделы 2.1 и 2.2), где были представлены концепции К-алгоритма и К-машины; в подразделе 2.3 мы дадим нетривиальную трактовку К-сложности [Колмогоров, 1965]; в подразделе 2.4 мы рассмотрим работу Колмогорова [Колмогоров, 1983], в которой он сделал набросок К-математики; заключительный же подраздел посвящен краткому обзору ряда современных применений теорий Колмогорова (см. 2.5).

2.1. Алгоритмическая теория информатики и программируемая технология Колмогорова

В 1950–1960-х годах Колмогоров и другие математики искали строгое определение алгоритма, наиболее точно соответствующее функционированию компьютеров. Вскоре стало очевидно, что концепция алгоритма, уходящая корнями в «арифметику» Аль-Хорезми, не имеет ничего общего с концепцией алгоритма как «вычислимой функции», воплощенной в машине Тьюринга.

В работе [Колмогоров и др., 1958] Колмогоров и Успенский представили наиболее общее на сегодняшний день определение алгоритма (К-алгоритм). Наша точка зрения состоит в том, что концепции К-алгоритма, К-машины и К-сложности, будучи интерпретированными в терминологии современной информационной технологии (ИТ), представляют собой наиболее глубокую и продвинутую теорию — алгоритмическую теорию информатики.

2.1.1. К-постулат. Связь между концепциями «процесс» и «вычислимая функция», вытекающая из структурной и конструктивной организации вычислительного процесса, сформулированной Тьюрингом в 1936 году и получившей название «машина Тьюринга», была полностью переосмыслена Колмогоровым и оформлена в сноске к статье [Колмогоров и др., 1958] в виде эмпирического постулата (К-постулат), содержащего идею программируемой технологии: «…способ, позволяющий по виду записи[7] находить ее номер[8], а также по номеру восстанавливать саму запись, является обычно весьма простым так что существование алгоритма[9], «перерабатывающего» запись в номер, и алгоритма, «перерабатывающего» номер в запись, не вызывает сомнений».

Важными для программируемой технологии и весьма нетривиальными в 1960-х годах стали рассуждения Колмогорова о представлении данных: «…стандартным способом задания информации считаем двоичные последовательности, начинающиеся с единицы 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, ...; **являющиеся двоичными записями натуральных чисел**. Будем обозначать через $l(n)$ длину последовательности n.

Пусть мы имеем дело с какой-либо областью объектов D, в которой уже имеется некоторая стандартная нумерация объектов номерами $n(x)$. Однако, указание номера $n(x)$ далеко не всегда будет наиболее экономным способом выделения объекта x. Например, двоичная запись числа (2.1) необозримо длинна, но мы его определили достаточно просто».

$$9^{9^{9^9}} \tag{2.1}$$

2.1.2. От К-алгоритма к К-сложности. Переход к определению К-сложности происходит, когда Колмогоров делает вывод, что «надо подвергнуть сравнительному изучению различные способы задания объектов из D. Достаточно ограничиться способами задания, которые каждому двоично записанному числу p ставят в соответствие некоторый номер $n = S(p)$. Таким образом, способ задания объекта из D становится не чем иным, как функцией S от натурального аргумента с натуральными значениями. Немного далее мы обратимся к случаю, когда эта функция вычислима.

[7] Двоичная запись.

[8] Натуральное число.

[9] К-алгоритм.

Такие методы задания можно назвать «эффективными». Но пока сохраним полную общность. Для каждого объекта из D естественно рассмотреть приводящие к нему p наименьшей длины $l(p)$. Эта наименьшая длина и будет «сложностью» объекта x при «способе задания S»: $K_s(x) = min\ l(p)$, $S(p) = n(x)$.

На языке информатики[10] можно назвать p «программой», а S — «методом программирования»[11]. Тогда можно будет сказать, что p есть минимальная длина программы, по которой можно получить объект x при методе программирования S».

2.1.3. От К-сложности к К-технологии. Важно отметить, что Колмогоров заменил понятие «алгоритма» понятием «программа» в своем определении К-сложности[12] и сожалел, о том, что этот фундаментальный результат не был замечен и в достаточной степени осмыслен ни теоретиками, ни практиками. Фактически, эти концепции — основные в современной **информационной технологии** — инвариантное представление двоичных последовательностей данных несущих любой тип информационного контента и **программируемая технология** — программные инструкции для восстановления этих данных.

На формальном языке это означает, что среди вычислимых функций $S(p)$ существуют оптимальные, то есть такие, что для любой другой вычислимой функции $S'(p)$ имеем: $K_s(x) \leq K_s(x)+l(S, S')$.

В частности, $K_s(x)$ — это критерий оценки оптимальности компьютерных программ, который определяет его эффективность в терминах либо объема данных для передачи, либо скорости процедуры развертывания терминальной программы, формата и нарративного кода в данные [Александров и др., 2008], или места, необходимого для их хранения.

Колмогоров был первым, кто привлек внимание к специфике К-математики, формально определив основы **программируемой технологии, алгоритмической теории информатики,** а не только **алгоритмическую теорию информации**.

Колмогоров подчеркивал, что его подход к информации основан на идентификации объектов, когда количество информации в объекте свойственно самому объекту, а не является свойством группы объектов, которые обычно передаются в дополнение к заданному объекту, как у Шеннона. Этот подход гораздо ближе к современному пониманию в компьютерных науках и информатике.

Мы подчеркиваем, что концепция, предложенная Колмогоровым (естественные методы программирования, сложность, качество программного обеспечения в терминах сложности) универсальна и не зависит от конкретного языка программирования.

2.2. К-машина

Работая над задачами алгоритмической теории информации и общей теорией алгоритмов, Колмогоров ввел понятие машины, получившей название Колмогоровской или К-машины. В некотором смысле это была вспомогательная теоретическая концепция для новой К-математики, а также альтернатива машине Тьюринга (Т-машине). Основное различие между К и Т машинами заключается в том, что лента К-машины может изменять свою топологию, в то время как в Т-машине — не может.

В сущности, лента К-машины — это конечный связный граф с выделенной (активной) вершиной. Граф направленный, но симметричный: если существует дуга из u в v, то также существует и дуга из v в u. Дуги раскрашены таким образом, что все выходящие дуги из одной вершины имеют одинаковый цвет, но каждая вершина окрашивает исходящие из нее дуги в свой цвет. Количество цветов ограничено для каждой машины. Из определения ясно, что Колмогоров думал о структурном представлении состояний машины. Детали и формальные определения можно найти в [Колмогоров и др., 1958].

Примечательно, что К-машины мощнее, чем Т-машины. А именно, справедлива теорема: «Существуют функции, которые могут быть вычислены в реальном времени на К-машине и не могут быть вычислены в реальном времени ни на какой из Т-машин» [Григорьев, 1976].

[10] В источнике: вычислительной математики

[11] «Метод программирования» реализуется на одном из языков программирования.

[12] Очевидно, что каждой программе соответствует определенный алгоритм.

2.3. К-сложность: три подхода

Последним в ряду Колмогоровских понятий, относящихся к теории информатики и компьютерным наукам, является К-сложность. Проблема определения сложности некоего объекта относится к фундаментальным и древнейшим научным проблемам. Кроме того, следует отметить, что эта проблема является одной из труднейших для формализации. Ведь решая её необходимо ответить на вопрос: «При заданном объекте, что является мерой его сложности?» Другими словами: «Какие объекты являются «сложными», какие «простыми», а какие «средними»?»

На вопрос о том, какие объекты можно считать сложными, Колмогоров даёт, на наш взгляд, удивительный ответ, вводя понятие К-сложности. В [Колмогоров, 1965], он буквально на десяти страницах текста в абсолютно ясной форме подводит итог десятилетиям многочисленных исследований понятия «количество информации».

Колмогоров выделяет и описывает три основных подхода к решению проблемы: комбинаторный, вероятностный и алгоритмический. В последнем случае он даёт упомянутое ранее знаменитое определение К-сложности и глубоко исследует ее основные свойства. Кроме того, им дается также определение относительной $K(X,Y)$ сложности одного объекта X относительно другого Y.

Основной вывод Колмогорова совершенно парадоксален: «Теория информации должна предшествовать теории вероятностей, а не опираться на нее». И это говорит человек, который является тем, кто превратил теорию вероятностей, бывшую на протяжении веков игрой в кости и карты, в строгую математическую науку. Тем не менее, строгое построение теории вероятностей на базе теории информации остаётся по-прежнему делом будущего и представляется нам очень интересной проблемой.

Наука имеет внутреннюю логику развития и маловероятно, что данное определение стало бы возможным без появления первых компьютеров. Проиллюстрируем этот тезис:

• Благодаря работам Шеннона, к моменту появления Колмогоровского определения, стало ясно, что бинарный способ[13] описания любых объектов является наиболее удобным, компактным и пригодным для практического применения;

• На практике подтверждено, что двоичные объекты эффективно «путешествуют» по каналам связи, подчиняясь законам, открытым Шенноном;

• Появление компьютеров привело к бурному развитию программирования в начале-середине 60-х годов XX века. А изобретение универсальной машины Тьюринга и машины Колмогорова заложили теоретическую основу дальнейшим крупномасштабным разработкам инструментария для развития программирования и компьютерных наук в целом.

При должном рассмотрении, очевидно, что в своих определениях Колмогорову удалось удивительно компактно, элегантно и естественно соединить воедино описанные выше обстоятельства.

В своих работах, Колмогоров, как никто другой, умел отразить внутреннюю логику развития науки. В нашем понимании, алгоритмическая теория информатики и программируемая технология, идеи которых наиболее ярко проявились в докладе Колмогорова на международном конгрессе математиков в Ницце 1970 года [Колмогоров, 1983], стали достойным завершением блестящей научной карьеры ученого.

2.4. К-математика

Концепция алгоритма, восходящая к «арифметике» Аль-Хорезми, не имеет ничего общего с концепцией алгоритма как «вычислимой функции», воплощенной в машине Тьюринга.

Например, «7 + 5 = 12» является тривиальной задачей для арифметики Аль-Хорезми и в то же время весьма нетривиальной для компьютерной обработки. Для компьютера «семь» «плюс» «пять» является «равным» «двенадцати», если определены числа «5, 7, 12», операция сложения «+», равенство «=» и достоверность этого выражения может быть «доказана» только путем запуска программы, основанной на алгоритме, то есть используя программируемую или К-технологию.

[13] В виде конечных последовательностей нулей и единиц.

Как мы отмечали выше, подход Колмогорова не зависит от конкретного языка программирования. Тем не менее, «искусство программирования» все еще фокусируется только на трансляции из формализма языка постановки задачи в ограниченный базис машинных инструкций, которые реализуют заданную аксиоматику (арифметику) обработки данных, основанную на принципах моделирования и функционального анализа.

2.4.1. Объектная идентификация. Исторически, одними из первых инструментов информативной коммуникации между людьми были: естественный язык, искусство и музыка. Гораздо позже математики открыли числовые и алгебраические структуры. Аристотель открыл логику. Но логика привнесла проблему непротиворечивости утверждений и вместе с ней неоднозначность идентификации объектов. После этого среди математиков возникла идея информационного обмена. Таким образом, родилась «вторая математика» — обмен объектов, восходящий к теории множеств Кантора и принципу идентификации неразличимости Лейбница [Levashkin et al., 2012].

Колмогоров соединил эти процессы идентификации и обмена объектами в концепцию алгоритмической теории. Именно интерпретация алгоритмической теории привела Колмогорова к концепции алгоритма, объединяющего входные данные и процесс (инструкции) для получения результата. Это сводится к проблеме идентификации, то есть операции трансляции идентификатора результата по идентификатору входных данных. Это в явном виде реализуется в программируемых матрицах FPGA и в IP-адресации [Levashkin et al., 2012].

По нашему мнению, в ближайшем будущем, с развитием информационных технологий, нам предстоит иметь дело только с информационными объектами, т.е. Программируемой Технологией Колмогорова (ПТК), поэтому ее фундаментальное исследование особенно актуально.

2.4.2. K-технология и гаджеты. Компоненты цифровых коммуникационных систем, используя Аристотелеву логику в качестве формализма, унаследовали проблему идентификации, которая для человеческого мозга не так актуальна. Кроме того, в цифровых процессорах понятие замкнутости, привносимое алгебраическими структурами, не вносит ничего, кроме противоречий. Так, например, деление целого (integer) числа на целое, дает число с плавающей точкой (float), то есть процессорные операции не являются замкнутыми.

Некоторые математические аксиомы оказываются невыполнимыми в цифровых процессорах и, следовательно, в компьютерах и контроллерах, построенных на их основе. Цифровая реализация большинства подобных методов проходит через серию бесполезных операций по преобразованию задачи в термины математического описания и программной реализации этого описания. В свою очередь, компьютер всего лишь эмулирует работу с «математическими» числами, а не выполняет ее аппаратно. Это означает, что физические процессы, происходящие на аппаратном уровне компьютера, и даже их логическое описание, не соответствуют математической работе с числами. Процессор оперирует с битами и наборами битов. Эти наборы битов являются идентификаторами (символами, указателями) или собственно числами. Например, это означает, что указатель необязательно должен интерпретироваться как число, ему достаточно иметь свойство уникальности, обеспечивающее идентификацию.

Эти и многие другие сходные и широко известные проблемы применения классического математического моделирования в компьютерных науках привели к появлению K-математики. Колмогоров ясно это понимал: «…реальный процесс теплопроводности не более похож на свою непрерывную модель, …чем на дискретную модель», — писал он в работе [Колмогоров, 1983]. В своих публикациях с конца 1950-х до конца 1960-х годов, завершившихся их кульминацией — докладом в Ницце на Международном конгрессе математиков (1970) [Колмогоров, 1983], Колмогоров переосмыслил и перестроил здание классической математики, в частности утверждая, что будущее за дискретной K-математикой.

2.5. Практическое применение Программируемой Технологии Колмогорова

Программируемая технология открыла путь разработке различного рода программ: архиваторов, компрессаторов, кодеков для скоростной свертки и развертки битовой последовательности информационного содержания.

Жесткие ограничения по полосе пропускания, спектральным и энергетическим характеристикам при ПТК и цифровой связи заменяются на постоянно увеличивающиеся объемно-скоростные характеристики (кило-, мега-, гига-, тера-, пета-…бит/с) обработки и передачи данных.

До сих пор для разработки программных продуктов ПТК воспроизводится лишь на эмпирическом уровне: операционные системы (Windows, Linux, Macintosh и пр.), архиваторы (RAR, ZIP, 7-ZIP и пр.), инструментальные средства (Photoshop, Flash, MP3-плейеры и пр.).

2.5.1. Мобильные телефоны. Основываясь на К-математике очевидна возможность разработки нового стандарта передачи информации по каналам связи (приемника GSM), позволяющего передавать данные в «совсем» сжатой форме, что приведет к существенному снижению себестоимости услуг сотовых операторов и потребления заряда аккумуляторных батарей мобильных устройств. В дополнение к новому стандарту возможно осуществление персональной настройки под речевые и культурные особенности участников коммуникации, что позволит повысить качество передаваемой информации за счет исправления искажений источника (дефектов речи, особенностей диалекта, сильного акцента и пр.) на основе технологий искусственного интеллекта.

На практике это будет реализовано следующим образом: два человека разговаривают по мобильным телефонам (A и B). Телефон A передает на телефон B программу сжатого аудиопотока вместо передачи самого аудиопотока. При этом на телефоне B установлен декодер (программа высокого быстродействия и малого размера). Этот подход позволит использовать полосу значительно меньшей ширины для передачи информации без снижения ее качества и информативности. Наоборот, оно будет повышено за счет обработки данных, переданных источником.

2.5.2. Алгоритмический компрессор. Может показаться, что, с добавлением новых символов в файл, размер его архива будет только увеличиваться. Тем не менее из свойства не монотонности К-сложности следует, что асимптотическое понимание изменений в объеме информации (ее уменьшение или увеличение) приводит к неожиданным результатам. Если большой файл сжимается до меньшего размера чем маленький файл, то маленький, в свою очередь, можно закодировать на основе кода большого файла с добавлением к нему кода постоянного размера, то есть «отрезанием» лишних символов.

2.5.3. Информационная безопасность. Случайная последовательность по Колмогорову должна иметь К-сложность, превышающую ее длину. Большинство же генераторов «случайных» чисел наподобие «белого шума» имеют очень низкую К-сложность, поскольку длина их программы, порождающая «случайную» последовательность, весьма мала.

В свою очередь, программа малой длины может имитировать данную последовательность, поэтому «случайный» белый шум, в действительности, является детерминированным. Что приводит к возможности воспроизведения результатов алгоритма кодирования и снижает его безопасность. В этой связи, обычный линейный конгруэнтный метод уязвим, поскольку хакер, зная ряд стандартных алгоритмов, может задать им начальные условия с ненулевым шансом найти правильную комбинацию, воспроизводящую поведение системы.

Лучшей идеей станет замена псевдослучайного генератора наподобие «белого шума» на действительно случайный генератор, например, «случайное перемещение компьютерной мыши по столу в течение нескольких секунд», что на эмпирическом уровне реализовано в программах TrueCrypt и DiskCryptor, чья разработка была свернута в 2014 г.

Высокая К-сложность обязательна в задачах криптографии, где необходимо обеспечить непредсказуемость генератора и последующих результатов (случайные выборки, лотереи, викторины, азартные игры и пр.) и может служить грубой оценкой усилий хакера, потенциально необходимых на изучение и предсказание поведения системы.

2.5.4. Приложения машинного обучения для решения дифференциальных уравнений. ПТК может применяться для решения начальных и краевых задач для многомерных нелинейных дифференциальных уравнений. Такие проблемы представляют серьезные аналитические и вычислительные трудности при использовании классических подходов. Используя алгоритмический подход, эти проблемы могут быть решены следующим образом. Сначала решение дифференциального уравнения записывается в виде суммы двух частей. Первая часть удовлетворяет начальным / граничным условиям и не содержит настраиваемых параметров. Вторая часть построена так, чтобы не влиять на начальные / граничные условия. Эта часть включает в себя искусственную нейронную сеть с прямой связью, содержащую настраиваемые параметры (веса). Таким образом, по построению начальные / граничные условия удовлетворяются, и сеть обучается (используя алгоритмы машинного обучения), чтобы удовлетворять только дифференциальному уравнению. С развитием нейропроцессоров и процессоров цифровых сигналов метод становится все более мощным благодаря существенному увеличению скорости получения решения в сравнении с традиционными сеточными методами [W. E. et al, 2017].

2.5.5. Цифровизация. Основным видом деятельности человечества за последние полвека является «цифровизация». Абсолютно все, что может быть лишено физического тела или физического воплощения — цифровизируется, то есть преобразуется в компьютерную программу, превращаясь в «цифрового двойника».

Кратчайший жизненный цикл от физического объекта до виртуальной иконки был пройден пейджером — устройство превратилось в SMS на мобильном устройстве всего за 2 года.

Для «цифровизации» MP3-плейера iPod от Apple потребовалось чуть более пяти лет: в октябре 2001 года было представлено устройство с вращающимся механизмом управления и кнопками — (A); в апреле 2003 вращающийся механизм и кнопки были заменены на сенсорные (B); в июле 2004 они стали «метафорой» (C); и наконец, в январе 2007 воплотилось в иконке программы «Музыка» на смартфоне (см. рис. 1).

Рис. 1. Иллюстрация перехода физического объекта к его «цифровому двойнику»

Примечателен тот факт, что все эти преобразования инженерами выполнялись без должного методологического обоснования, грубо говоря, с позиции науки они шли методом проб и ошибок, за счет чего технологии значительно обогнали теорию. Хотя уже в середине 1960-ых годов Колмогоров, стоявший у истоков эпохи цифровизации, интуитивно предвидел возникновение этого процесса и его возможное развитие. По нашему мнению, разрабатывая свои концепции, Колмогоров интуитивно представлял цифровизацию как краеугольный камень грядущего технологического уклада. Поэтому, суть К-технологии заключается в том, что цифровизовано будет все, что поддается цифровизации (и мы это здесь особо подчеркиваем).

К-технология также применима в решении актуальных проблем современного общества: в биоинформатике; интеллектуальном анализе текстов [Левашкин и др., 2012] [Александров и др., 2008]; в подавляющем большинстве альтернативных теорий и подходов, возникающих в компьютерных науках для решения проблемы корректировки фундаментальных ограничений функционального анализа в компьютерной симуляции.

Упомянутые подходы все еще разрабатывают различные форматы, протоколы и программы для использования битовых потоков. В то же время, по Колмогорову, количество информации — это длина «программы», репродуцирующей на машине двоичные данные информационного сообщения.

Таким образом, адаптация подхода Колмогорова к современным реалиям, приближает нас к теоретическому обоснованию практических приложений, того, в чем сейчас остро нуждаются информационные технологии.

3. Заключение

К-алгоритм, К-сложность и К-машина являются «тремя китами, на чьих спинах» покоится алгоритмическая теория информатики. Колмогоров тщательно пересмотрел теорию информатики, расширив ее до наиболее общих понятий, что, по нашему мнению, представляет собой математические основы современных цифровых технологий. Более того, в своем докладе на Конгрессе в Ницце в 1970 году, Колмогоров сформулировал свое понимание математических принципов, которым должны следовать компьютерные науки. По существу, они стали основой новой математики, которую в данной статье мы называем «К-математикой».

Общеизвестно, что некоторые математические аксиомы оказываются не выполняющимися в компьютере, например, результаты вычисления (3.1) и (3.2) для компьютера, в общем случае, не эквивалентны.

$$z \cdot \left(\frac{x}{y}\right) \tag{3.1}$$

$$\left(\frac{z}{y}\right) \cdot x \tag{3.2}$$

В компьютере нет больших различий между счетными и несчетными множествами, то есть представление вещественных чисел дискретно; некорректны теоремы о пределах, интегральное и дифференциальное исчисление. Их «использование» — следствие искусственного переноса арифметики как «математического базиса» на процессоры, работающие на «логическом базисе» [Simon, 1984]. Вот почему были попытки замены «арифметических» вычислений математической модели ее непосредственной трансляцией в команды процессора [Александров и др., 1984]. Иначе говоря, не математическую модель вкладывать в «прокрустово ложе» компьютера, а наоборот, формализовать ее компьютерное представление (память, процессор) и его аксиоматический базис (команды управления).

Колмогоровым были сформулированы принципы программируемой технологии (ПТК) посредством введения понятия сложности как критерия оценки эффективности программы через ее длину. В науку же эта вспомогательная концепция вошла как «теория сложности конструктивных объектов», вместо мирового приоритета в создании алгоритмической теории информатики и основы программируемой технологии[14]. Это очевидный и досадный пример того, что случается, когда научная интеллектуальная собственность никак не защищена и присваивается на этапе технологического воплощения.

Подводя итог статьи, приведем ее основные выводы:

• Колмогоров теоретически предсказал цифровизацию как технологию будущего; к нашему сожалению, этот факт до сих пор остается мало отмечен научным сообществом и не находит должного обсуждения в научных кругах; теоретическая база информатики до сих пор не разработана, мировое научное сообщество еще не предложило теоретического обоснования цифровизации, по масштабу сравнимого с Колмогоровским;

• Для осуществления цифровизации необходимо использование К-математики, поскольку традиционное математическое моделирование не подходит для этой цели;

[14]Это существенное отличие от ранее принятых толкований сложности.

• Богатейшее наследие Колмогорова срочно требует внимательного изучения и практического развития в передовых информационных технологиях, а не только в качестве «спортивных соревнований» математиков [Верещагин и др., 2013].

Реализация полномасштабной цифровизации на современном этапе ограничивается отсутствием теоретического обоснования и осуществляется в основном эмпирическим путем без понимания, что конечные продукты (результаты) цифровизации выражаются в терминах программируемой технологии Колмогорова. Подход Колмогорова может помочь восстановить баланс между теорией и практикой.

В трудах Колмогорова заложен теоретический базис современной цифровизации, являющейся основным процессом цифровой трансформации общества. Тщательное изучение трудов Колмогорова позволит обеспечить более эффективное осуществление этой трансформации и, в силу своей универсальности, сделать это в любом виде экономической деятельности и любой сфере практического применения.

Литература

[Александров и др., 1984] Александров В.В., Арсентьева А.В. Информация и развивающиеся структуры. - Л.: Ленинградский Институт Информатики и Автоматизации АН СССР, 1984.

[Александров и др., 2008] Александров В.В., Кулешов С.В., Цветков О.В. Цифровая технология инфокоммуникации: Передача, хранение и семантический анализ текста, звука, видео. - СПб.: Наука, 2008.

[Верещагин и др., 2013] Верещагин Н.К., Успенский В.А., Шень А.Х. Колмогоровская сложность и алгоритмическая случайность. - МЦНМО, 2013.

[Григорьев, 1976] Григорьев Д.Ю. Алгорифмы Колмогорова сильнее машин Тьюринга // Зап. научн. сем. ЛОМИ. - 1976. - № 60.

[Колмогоров и др., 1958] Колмогоров А.Н., Успенский В.А. К определению алгоритма // УМН. - 1958. - том 13. - выпуск 4(82).

[Колмогоров, 1957] Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // Докл. АН СССР. - 1957. - 114:5.

[Колмогоров, 1965] Колмогоров А.Н. Три подхода к определению понятия «количество информации» // Пробл. передачи информ. - 1965. - № 1(1).

[Колмогоров, 1983] Колмогоров А.Н. Комбинаторные основания теории информации и исчисления вероятностей // УМН. - 1983. - том 38. - выпуск 4(232).

[Левашкин и др., 2012] Левашкин С.П., Александров В.В. К-сложность в контексте новейших информационных технологий. // Информационно-измерительные и управляющие системы. - 2012. - № 10(5).

[Arnold, 2006] Arnold V.I. Complexity of finite sequences of zeros and ones and geometry of finite spaces of functions // Functional Analysis and Other Mathematics. - 2006. - № 1(1).

[Burke, 1984] Burke H.E. Handbook of Bar Coding Systems. - Van Nostrand Reinhold Company, 1984.

[Gleick, 2011] Gleick J. The information: a history, a theory, a flood. - London: Fourth Estate, 2011.

[Levashkin et al., 2012] Levashkin S., Alexandrov V. Data semantic associative analysis and synthesis // Preprint. - 2012. - 20 p. URL: http://levashkin.com//files/Levashkin-Alexandrov.pdf

[Manin et al., 2012] Manin Y.I., Marcolli M. Kolmogorov complexity and the asymptotic bound for error-correcting codes. URL: http://arxiv.org/abs/1203.0653.

[Shannon, 1948] Shannon C.E. A mathematical theory of communication. // Bell System Technical Journal. - 1948. - Vol. 27.

[Simon, 1984] Simon J.-C. Patterns and operators. The foundations of data representation. - McGraw-Hill, 1984.

[W. E. et al, 2017] W.E., Han J., Jentzen A. Deep learning-based numerical methods for high-dimensional parabolic partial differential equations and backward stochastic differential equations // Comm. Math. Stats. - 2017. - № 5(4).

[Wiener, 1948] Wiener N. Cybernetics: Or Control and Communication in the Animal and the Machine. - Paris: Hermann & Cie & Camb. Mass.: MIT Press, 1948.

Левашкин Сергей Павлович,
заведующий Научно-исследовательской
лабораторией Искусственного интеллекта
Поволжского государственного университета
телекоммуникаций и информатики, Самара, Россия,
профессор, кандидат физ.-мат. наук,
Действительный Член Мексиканской Академии
Наук (Sistema Nacional de Investigadores).

E-mail: serguei.levachkine@gmail.com

Натуральный логарифм как отправной пункт определения элементарных функций

С. В. Шведенко

... e обозначает число,
гиперболический логарифм которого есть 1.
Л. Эйлер (Механика, 1736).

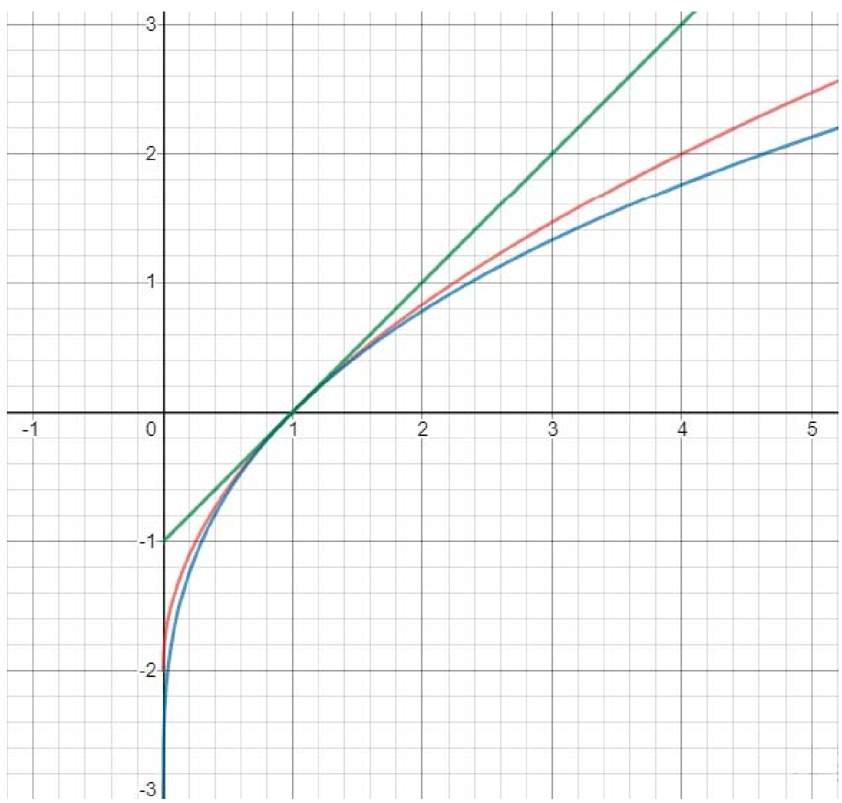
Предлагается способ аккуратного определения и выведения свойств основных элементарных функций анализа, связанных с понятием *степени*, при котором исходным служит определение *натурального логарифма*[1]

$$\boxed{\ln x \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} n\big(\sqrt[n]{x}-1\big),\ x>0}.$$

Среди прочих логически корректных путей решения этой задачи данный способ представляется наиболее простым в техническом отношении и легко встраиваемым в вузовский курс анализа.

1. Корректность данного определения натурального логарифма

‖ *Для любого положительного числа* x *последовательность* $\big\{n\big(\sqrt[n]{x}-1\big)\big\}$ *является сходящейся*[2].



[1] Реже называемого *не́перовым* и *гиперболическим*.
[2] Графики первых трех ее элементов как функций переменной $x > 0$ представлены на рисунке.

Доказательство. Случай $x = 1$ доказательства не требует.

Пусть $x > 1$ и пусть n — любое натуральное число. Введение обозначения $\alpha = x^{\frac{1}{n(n+1)}}$ с применением формулы $\alpha^n - 1 = (\alpha-1)(\alpha^{n-1} + \dots + \alpha + 1)$ и с учетом того, что $\alpha > 1$, приводит к соотношениям

$$n\bigl(\sqrt[n]{x}-1\bigr) - (n+1)\bigl(\sqrt[n+1]{x}-1\bigr) = n(\alpha^{n+1}-1) - (n+1)(\alpha^n - 1) = n\alpha^n(\alpha-1) - (\alpha^n - 1) =$$

$$= (\alpha-1)\bigl(n\alpha^n - (\underbrace{\alpha^{n-1} + \dots - \alpha + 1}_{n})\bigr) > 0,$$

в силу которых последовательность *положительных* чисел $\bigl\{n\bigl(\sqrt[n]{x}-1\bigr)\bigr\}$ *убывает*, а поэтому *сходится*.

При $0 < x < 1$ сходимость последовательности $\bigl\{n\bigl(\sqrt[n]{x}-1\bigr)\bigr\}$ является следствием представления $n\bigl(\sqrt[n]{x}-1\bigr) = -\sqrt[n]{x}\, n\bigl(\sqrt[n]{1/x}-1\bigr)$ и сходимости последовательностей $\bigl\{\sqrt[n]{x}\bigr\}$ и $\bigl\{n\bigl(\sqrt[n]{1/x}-1\bigr)\bigr\}$ (поскольку $1/x > 1$).

Вот первое следствие данного определения натурального логарифма.

> *Определение* $\ln x \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} n\bigl(\sqrt[n]{x}-1\bigr)$ *обеспечивает выполнение логарифмических тождеств:*
> $\ln(uv) = \ln u + \ln v,\quad \ln(1/v) = -\ln v,\quad \ln(u/v) = \ln u - \ln v \quad (u, v > 0).$

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{v} = 1$ при любом $v > 0$, то

$$\ln(uv) = \lim_{n\to+\infty} n\bigl(\sqrt[n]{uv}-1\bigr) = \lim_{n\to+\infty} n\bigl(\sqrt[n]{uv} \mp \sqrt[n]{v} - 1\bigr) = \lim_{n\to+\infty}\bigl(\sqrt[n]{v}\, n\bigl(\sqrt[n]{u}-1\bigr) + n\bigl(\sqrt[n]{v}-1\bigr)\bigr) = \ln u + \ln v;$$

$$\ln(1/v) = \ln(1/v) + \ln v - \ln v = \ln\bigl((1/v)\,v\bigr) - \ln v = \ln 1 - \ln v = -\ln v;$$

$$\ln(u/v) = \ln\bigl(u\,(1/v)\bigr) = \ln u + \ln(1/v) = \ln u - \ln v.$$

2. Число e и его натуральный логарифм

> *Последовательность* $\{x_n\} = \bigl\{(1+\frac{1}{n})^n\bigr\}$, *возрастая, а последовательность* $\{y_n\} = \bigl\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\bigr\}$, *убывая, сходятся к общему пределу — числу Эйлера* e, *для которого* $\boxed{\ln e = 1}$.

Доказательство. Установить *монотонность* (и *ограниченность*) последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ можно с помощью *неравенства Бернулли* $\boxed{(1+x)^n > 1 + nx,\ \ x > -1,\ x \neq 0,\ \ n = 2, 3, \dots}$ [3].

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^n\Bigl(1+\frac{1}{n-1}\Bigr)^{-(n-1)} = \Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^n\Bigl(\frac{n-1}{n}\Bigr)^{n-1} = \Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^n\Bigl(1-\frac{1}{n}\Bigr)^{n-1} =$$

$$= \Bigl(1-\frac{1}{n^2}\Bigr)^n\Bigl(1-\frac{1}{n}\Bigr)^{-1} > \Bigl(1-\frac{1}{n}\Bigr)\Bigl(1-\frac{1}{n}\Bigr)^{-1} = 1;$$

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \Bigl(1+\frac{1}{n-1}\Bigr)^n\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^{-(n+1)} = \Bigl(\frac{n}{n-1}\Bigr)^n\Bigl(\frac{n}{n+1}\Bigr)^{n+1} = \Bigl(\frac{n^2}{n^2-1}\Bigr)^{n+1}\Bigl(\frac{n}{n-1}\Bigr)^{-1} =$$

$$= \Bigl(1+\frac{1}{n^2-1}\Bigr)^{n+1}\frac{n-1}{n} > \Bigl(1+\frac{1}{n-1}\Bigr)\frac{n-1}{n} = 1,$$

так что

$$2 = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} < \dots < y_{n+1} < y_n < y_{n-1} \dots < y_2 < y_1 = 4.$$

[3] Вот его доказательство (индукцией по n):
а) $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$;
б) если $(1+x)^n > 1 + nx$ при каком-то $n \geqslant 2$, то $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x) > 1 + (n+1)x$.

Как следствие, существуют $\lim x_n$ (обозначаемый e) и $\lim y_n = \lim x_n\big(1+\frac{1}{n}\big) = \lim x_n$ с выполнением неравенств $x_n < e < y_{n-1}$, т. е. $\big(1+\frac{1}{n}\big)^n < e < \big(1+\frac{1}{n-1}\big)^n$. Остается преобразовать эти неравенства в $1 < n\big(\sqrt[n]{e}-1\big) < n/(n-1)$ и перейти к пределу: $\ln e = \lim\limits_{n\to+\infty} n\big(\sqrt[n]{e}-1\big) = 1$.

Замечание. Ввиду *логарифмических тождеств* (п. **1**) $\ln e^n = \ln(\underbrace{e\cdots e}_{n}) = \underbrace{\ln e+\cdots+\ln e}_{n} = n$, $\ln e^{-n} = \ln(1/e^n) = -\ln e^n = -n$, а $\ln\sqrt[n]{e} = 1/n$ $\big($поскольку $1 = \ln e = \ln\big(\underbrace{\sqrt[n]{e}\cdots\sqrt[n]{e}}_{n}\big) = n\ln\sqrt[n]{e}\,\big)$.

3. Свойства натурального логарифма как функции положительной переменной

Поскольку ввиду *неравенства Бернулли* (п. **2**) при любом $x > 0$

$$x = \big(1+\big(\sqrt[n]{x}-1\big)\big)^n \geq 1 + n\big(\sqrt[n]{x}-1\big),$$

переход к пределу при $n\to+\infty$ позволяет заключить: $x \geqslant 1+\ln x$; с другой стороны, замена в последнем неравенстве x на $1/x$ дает: $1/x \geqslant 1+\ln(1/x)$, т. е. $\ln x \geqslant 1-1/x$. Следует вывод: при любом $x > 0$ выполняются неравенства $\boxed{(x-1)/x \leqslant \ln x \leqslant x-1}$. Вот важные следствия из них:

а) справедливо отношение эквивалентности (асимптотическое равенство) $\ln x \underset{x\to1}{\sim} x-1$, *чаще записываемое в виде* $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1}$ *как основное предельное соотношение для натурального логарифма;*

б) $\lim\limits_{x\to1}\ln x = 0$ *и б') функция* $y = \ln x$ *является непрерывной в любой точке* $x_0\in(0,+\infty)$*:*

$$\lim_{x\to x_0}\ln x = \lim_{x\to x_0}\ln(x_0\cdot x/x_0) = \lim_{x\to x_0}\big(\ln x_0+\ln(x/x_0)\big) = \ln x_0 + \lim_{x/x_0\to1}\ln(x/x_0) = \ln x_0;$$

в) функция $y = \ln x$ *строго возрастает на положительной полуоси: если* $0 < x_1 < x_2$*, то*

$$\ln x_2 - \ln x_1 = \ln(x_2/x_1) \geqslant 1 - x_1/x_2 > 0.$$

4. Определение и свойства экспоненты

В силу *непрерывности* функции $y = \ln x$ на полуоси $(0,+\infty)$ множество ее значений является промежутком, а поскольку $\ln e^n = n$ и $\ln e^{-n} = -n$, этим промежутком является вся числовая ось, при этом $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0+0}\ln x = -\infty$.

Применяя к *непрерывной* и *строго возрастающей* функции $y = \ln x$, $x > 0$, *теорему об обратной функции* (см., например, [**1**, п. **83**]), можно заключить: на промежутке $(-\infty,+\infty)$ определена *непрерывная* и *строго возрастающая* функция $x = \ln^{-1} y$, обратная к $y = \ln x$, имеющая множеством значений промежуток $(0,+\infty)$. Это и есть *экспоненциальная* функция (*экспонента*), записываемая (после переобозначения переменных) как $y = \exp x$. Соответственно, выполняются тождества $\boxed{\exp(\ln x) = x,\ 0 < x < +\infty}$ и $\boxed{\ln(\exp y) = y,\ -\infty < y < +\infty}$,

Ввиду этих тождеств из установленных в пп. **1**, **2** свойств натурального логарифма вытекают как *основное тождество для экспоненты* $\boxed{\exp(u+v) = \exp u\cdot\exp v}$[4], так и тот факт, что экспонента *рационального* числа $r = m/n$ равна числу e в степени r: $\boxed{\exp\big(m/n\big) = e^{m/n}}$[5].

[4] Доказательство: $\exp(u+v) = \exp(\ln(\exp u)+\ln(\exp v)) = \exp(\ln(\exp u\cdot\exp v)) = \exp u\cdot\exp v$.

[5] В частности: $\exp 1 = \exp(\ln e) = e$, $\exp(-1) = \exp(-\ln e) = \exp(\ln(1/e)) = 1/e$, $\exp 0 = \exp(\ln 1) = 1$, $\exp(m/n) = \exp(\underbrace{1/n+\cdots+1/n}_{m}) = (\exp(1/n))^m = (\exp(\ln\sqrt[n]{e}))^m = e^{m/n}$.

Остается и для *иррациональных* значений x принять *по определению* $\boxed{e^x \overset{\mathrm{def}}{=} \exp x \overset{\mathrm{def}}{=} \ln^{-1} x}$ (а не считать, например, что $e^{\sqrt{2}}$ есть число e, умноженное на себя $\sqrt{2}$ раз).

Основное предельное соотношение для натурального логарифма (п. **3**) имеет следствием *основное предельное соотношение для экспоненты* $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1}$; достаточно ввести переменную $t = e^x - 1$ и воспользоваться тем, что $x \to 0 \implies t \to 0$ (в силу непрерывности экспоненты):

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{-1} = 1.$$

5. Определение и свойства степени с любым действительным показателем

Для любого положительного числа a (основания степени) и любого действительного числа b (показателя степени) $\boxed{a^b \overset{\mathrm{def}}{=} \exp(b \ln a)}$. Следствиями являются "известные со школы" (но в данном случае получающие обоснование) *свойства степени*:

$a^{b+c} = \exp\big((b+c)\ln a\big) = \exp\big(b\ln a + c\ln a\big) = \exp(b\ln a)\exp(c\ln a) = a^b a^c,$

$(a^b)^c = \exp\big(c\ln(a^b)\big) = \exp\big(c\ln(\exp(b\ln a))\big) = \exp(bc\ln a) = a^{bc},$

$a^1 = \exp(\ln a) = a, \quad a^{-1} = \exp(-\ln a) = \exp(\ln(1/a)) = 1/a, \quad a^0 = \exp(0\ln a) = \exp 0 = 1,$

$a^m = \exp(m\ln a) = \exp\big(\underbrace{\ln a + \cdots + \ln a}_{m}\big) = \underbrace{(\exp\ln a)\cdots(\exp\ln a)}_{m} = \underbrace{a\cdots a}_{m},$

Следует вывод: в случае *рационального* показателя b определение $a^b \overset{\mathrm{def}}{=} \exp(b\ln a)$, согласуясь со "школьным" $a^{m/n} \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}$ $\big($или $\big(\sqrt[n]{a}\big)^m\big)$, дает корректное распространение понятия степени a^b положительного числа a на случай *любого действительного* показателя b.

Замечание. При отыскании пределов весьма эффективным оказывается сочетание определения $a^b \overset{\mathrm{def}}{=} \exp(b\ln a)$ с вытекающей из непрерывности экспоненты *перестановочностью* рядом стоящих символов *предела* и *экспоненты*; например:

$$\lim_{x\to\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x \underset{\frac{1}{x}=t}{=} \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0}\Big(\exp\frac{\ln(1+t)}{t}\Big) = \exp\Big(\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}\Big) = \exp 1 = e$$

6. Степенная, показательная и логарифмическая функции

Степенная функция с действительным показателем $\alpha \neq 0$ и *показательная* функция с положительным основанием $a \neq 1$) определяются соответственно как $y = x^\alpha \overset{\mathrm{def}}{=} \exp(\alpha\ln x)$, $x > 0$, и $y = a^x \overset{\mathrm{def}}{=} \exp(x\ln a)$.

Прямо из этих определений следует, что *степенная* функция $y = x^\alpha$ имеет в качестве *обратной* функцию $x = \exp\big(\ln y/\alpha\big) = y^{1/\alpha}$ (также являющуюся *степенной*), а для *показательной* функции $y = a^x$ *обратной* служит функция $x = \ln y/\ln a$, обозначаемая $x = \log_a y$ и называемая *логарифмом по основанию* a (в частности, $\log_e x = \ln x$, т. е. натуральный логарифм — это логарифм по основанию e).

Предельные соотношения $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a}$ и $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha}$ для степенной и показательной функций являются прямыми следствиями основных предельных соотношений для натурального логарифма (п. **3**) и экспоненты (п. **4**):

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x\ln a) - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x\ln a) - 1}{x\ln a}\ln a = \ln a;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\exp(\alpha\ln(1+x))-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\exp(\alpha\ln(1+x))-1}{\alpha\ln(1+x)}\,\frac{\ln(1+x)}{x}\,\alpha=\alpha.$$

Сравнительный рост степенной, показательной и логарифмической функций (с показателем степени $\alpha>0$ и основанием $a>1$)[6] характеризует следующее утверждение.

‖ 1°. $\log_a x=o\big(x^\alpha\big)$ при $x\to+\infty$, 2°. $x^\alpha=o\big(a^x\big)$ при $x\to+\infty$, 3°. $x^\alpha\log_a x=o(1)$ при $x\to 0{+}0$.

Доказательство. Одним из следствий определения $\ln x\stackrel{\text{def}}{=}\lim\limits_{n\to+\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)$ является выполнение для $x>0$ неравенства $\ln x\leqslant x-1$ (п. **3**). Замена в нем x на $\sqrt[m]{x}$ позволяет утверждать, что для любого $x>0$ и любого натурального m выполняется неравенство $\ln x<m\sqrt[m]{x}$.

1°. Применение последнего неравенства в случае $m>1/\alpha$ дает:

$$0<\frac{\log_a x}{x^\alpha}=\frac{\ln x}{\ln a\,x^\alpha}<\frac{m\sqrt[m]{x}}{\ln a\,x^\alpha}=\frac{m}{\ln a}x^{\frac{1}{m}-\alpha}=\frac{m}{\ln a}\exp\big((1/m-\alpha)\ln x\big)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

2°. Выбор в том же неравенстве $m=2$ приводит к соотношениям

$$0<\frac{x^\alpha}{a^x}=\frac{\exp(\alpha\ln x)}{\exp(x\ln a)}<\frac{\exp\big(\alpha\,2\sqrt{x}\big)}{\exp(x\ln a)}=\exp\big(2\alpha\sqrt{x}-x\ln a\big)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

3°. $\lim\limits_{x\to 0+0}x^\alpha\log_a x\underset{x=\frac{1}{t}}{=}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{-\log_a t}{t^\alpha}\stackrel{1^\circ}{=}0.$

Добавление: логарифм комплексного числа[7] и формула Эйлера

Одним из достоинств определения *натурального логарифма* $\ln x\stackrel{\text{def}}{=}\lim\limits_{n\to+\infty}n\big(\sqrt[n]{x}-1\big)$, $x>0$, является возможность его распространения на *отрицательные* и *мнимые* значения x. Основой для этого служит следующее утверждение.

‖ *Пусть z — ненулевое комплексное число и $\varphi=\arg z$ — выбранное значение его аргумента*[8]. *Если при $n=2,3,\dots$ под $\sqrt[n]{z}$ понимать то значение корня, аргумент которого равен φ/n (условно называя это значение корня “основным”), то последовательность $\big\{n\big(\sqrt[n]{z}-1\big)\big\}$ оказывается сходящейся к комплексному числу $\ln|z|+i\arg z$, где $\ln|z|$ — натуральный логарифм положительного* числа *$|z|$.*

Вот простое доказательство:

$$n\big(\sqrt[n]{z}-1\big)=n\big(\sqrt[n]{|z|}\big(\cos(\varphi/n)+i\sin(\varphi/n)\big)-1\big)\mp n\cos(\varphi/n)=$$

$$=n\big(\sqrt[n]{|z|}-1\big)\cos(\varphi/n)+n\big(\cos\varphi/n)-1\big)+\sqrt[n]{|z|}\,in\sin(\varphi/n);$$

первое из последних трех слагаемых при $n\to+\infty$ сходится к $\ln|z|$, второе — к нулю, третье — к $i\varphi$.

Вывод: определение *логарифма комплексного числа z*

$$\boxed{\operatorname{Ln}z\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{n\to+\infty}n\big(\sqrt[n]{z}-1\big),\ z\neq 0}$$ [9]

[6] Их строгое возрастание на полуоси $(0,+\infty)$ вытекает из строгого возрастания натурального логарифма и экспоненты (пп. **3, 4**).

[7] Или *комплексный логарифм*.

[8] Любое из бесконечного набора $\operatorname{Arg}z$ *всех* его значений (различающихся слагаемыми, кратными 2π).

[9] Подразумевается, что предел вычисляется *отдельно* для *каждого* значения $\varphi=\arg z\in\operatorname{Arg}z$, при этом в качестве корней степеней n из z берутся их “основные” значения: $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\big(\cos(\varphi/n)+i\sin(\varphi/n)\big)$, $n=2,3,\dots$

приводит к тому же представлению $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ *логарифма комплексного числа* z, что и традиционное определение $\operatorname{Ln} z$ как *совокупость всех решений* (для заданного $z \neq 0$) уравнения $\exp w = z$.

Различие состоит в том, что при традиционном подходе к введению комплексного логарифма отправным пунктом служит *формула Эйлера* $\exp(u+iv) = e^u(\cos v+i\sin v)$, в силу которой равенство $\exp w \overset{w=u+iv}{=} z$ означает, что $e^u = |z|$, а $v \in \operatorname{Arg} z$, откуда $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$. При излагаемом же альтернативном подходе *формула Эйлера* сама оказывается *следствием* определения *логарифма комплексного числа* ввиду вытекающего из него представления $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$.

А именно, поскольку *любое* комплексное число $w = u + iv$ является значением (точнее, одним из значений) логарифма вполне определенного комплексного числа z (с модулем e^u и аргументом v), определена *однозначная* операция *обращения* комплексного логарифма $z = (\operatorname{Ln})^{-1}w$, обозначаемая $z = \exp w$ и называемая (*комплексной*) *экспонентой*, при этом $|\exp w| = |z| = e^u$, а $\arg(\exp w) = \arg z = v$, так что $\boxed{\exp w \overset{w=u+iv}{=} e^u(\cos v + i\sin v)}$.

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. - М.: Наука, 1966.

2. Шведенко С.В. Об альтернативном определении логарифма // Математическое образование. - 2016. - № 4 (80). - С. 52-53.

Шведенко Сергей Владимирович,
доцент кафедры высшей математики
Национального исследовательского ядерного
университета (МИФИ), кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: sershvedenko@mail.ru

Как решить уравнение третьей степени

Б. Л. Дружинин

В статье кратко изложен метод решения уравнений третьей степени в сочетании с методическим приемом, стимулирующим студентов на поиск решения. Решение сопровождается экскурсами в соответствующий раздел истории математики.

Академики — все

Один из столичных технических вузов, какой именно, называть не буду, чтобы случайно никого не обидеть. Обычный семинар по математике у ребят 3-го курса. Студент у доски ошибается в простом сложении.

– Тебя к Пифагору в ученики, – комментирует ошибку Петя. – Он бы тебя ещё и умножать научил.

В любой группе обязательно найдётся такой балагур, из всего извлекающий повод пошутить. Возникает небольшой стихийный студенческий митинг, на котором единогласно принимается резолюция, что раньше учиться было намного легче, а наукой заниматься совсем просто.

– Лет триста назад мы бы все в академиках ходили, — подводит итог всё тот же Петя.

Что ж, надо научить "академиков" уважать старших. Всегда стараюсь воспользоваться такой ситуацией. Однажды на уроке в школе попросил не в меру разговорившегося с соседом ученика пересесть на свободную парту. Он пересел, но при этом добавил:

– От перемены мест слагаемых сумма не меняется.

Пришлось привести простой пример, не укладывающийся в такое утверждение. Учеников это взбодрило, и до окончания учебного года они придумывали всё новые ситуации, где результат зависел от порядка действий. Думаю, что такой способ увлечь ученика намного полезней, чем простая зубрёжка законов, теорем и формул.

Но вернёмся на семинар. Интересуюсь, кто умеет решать алгебраические уравнения третьей степени. И это при том, что студенты легко справляются с дифференциальными, интегральными и прочими уравнениями высшей математики.

– А чего тут уметь? — удивляется Олег. – Ввёл коэффициенты в комп, и сразу все корни на дисплее.

– А без компьютера? Триста лет назад их ещё не изобрели.

Оказывается, что ребята решают кубические уравнения, и то с трудом, подбором одного из корней и последующим превращением уравнения в квадратное. Предлагаю игру: я выписываю на доске шаг за шагом весь ход решения кубического уравнения в общем виде, и как только кто-то поймёт, что делать дальше, останавливает меня и сам доводит решение до конца. Приз — автоматический зачет, очередная пятёрка или четвёрка, в зависимости от места остановки. От двоек обещаю воздержаться.

Но сначала немного истории.

Немного истории

Мрачное средневековье погрузило европейскую математику, как и другие науки, в спячку, страшно представить, на тысячу лет. Труды греческих математиков оказались без надобности, и про них попросту забыли. Конечно, купцы привозили отрывочные сведения о достижениях арабских математиков, но это купцы, их интересовала арифметика.

Однако жизнь продолжалась, экономика возрождалась, и ей потребовались научные и технические достижения, в том числе и математика.

Стали проводиться математические состязания, некое подобие дуэлей. Два математика посылали друг другу определённое число задач, кто больше решит, тот и победитель. И этот победитель получал не только звание великого математика, но и вполне мог занять весьма привлекательное в материальном отношении место математика при дворе герцога, короля, а то и самого Папы Римского. Так что сражаться было за что.

Если квадратные уравнения умели решать ещё в Древней Греции, то кубические уравнения в общем виде никому не поддавались. Сложности добавляло отсутствие той алгебраической формы записи уравнений, к которой мы привыкли. Всё описывалось словами, а иногда слова сокращались до отдельных букв. В “Энциклопедии для детей” Аванта+ приводятся образцы таких уравнений:

или

A cubus + B plano 3 in A aequari D solido.

Попробуйте разобраться в них без подсказок, да и с подсказками это сделать нелегко. А люди не только разбирались, но и работали с такими выражениями, и весьма успешно. А ещё надо учесть, что отрицательные числа не применялись, и, например, уравнения в современной записи $ax^2+bx=c$ и $ax^2=bx+c$ решались разными способами.

Дель Ферро

Первым справился с решением кубического уравнения вида $x^3+ax=b$ профессор математики из Болонского университета Сципион дель Ферро. Перед смертью в 1526 году он поделился своей находкой с учениками. Один из них, некий Антонио Марио Фиоре, попытался при помощи этого подарка стать непобедимым в поединках математиком, и тем самым занять какое-нибудь хлебное место. И в конце 1534 года он послал вызов Никколо Тарталье.

Тарталья

Никколо родился в 1500 году. Ещё в детстве он получил ранение горла, говорил с трудом, за что и получил прозвище Тарталья, что значит “заика”. Бедная семья не могла оплатить учебу сына в школе, но мальчик упорно постигал сам все науки, в том числе и математику. К моменту описываемых событий он уже известен и за пределами родной Брешии.

Фиоре предложил Тарталье тридцать задач, и каждая связана с необходимостью решения уравнения третьей степени. Все попытки Тартальи добиться результата заканчивались неудачей, и над ним нависла угроза позорного поражения. Но он с детства привык упорно трудиться, и когда до контрольного срока оставалась всего неделя, нашел верное решение. После этого Тарталья быстро расправился со всеми тридцатью задачами и отправил свои записи нотариусу, исполнявшему роль судьи.

Что же касается Марио Фиоре, то он не смог решить ни одной задачи, предложенной ему Тартальей. Более того, он не смог решить и ни одной своей задачи, хотя владел методом дель Ферро. И это ещё раз доказывает необходимость регулярных занятий и тренировок. Любой человек знает, что забить гвоздь можно, если приставить его к доске и ударить молотком. Знать-то он знает, но научится грамотно забивать только после того, как погнёт тысячу гвоздей и сотню раз стукнет по пальцам, естественно, по своим.

К математике подобное утверждение относится в гораздо большей степени. Нахождение корней уравнения — последнее звено в решении задачи. Любую задачу надо осмыслить, понять, что в ней требуется определить, грамотно составить уравнение, определить начальные и граничные условия переменных, и только потом искать ответ.

Фиоре, получив от дель Ферро готовый рецепт нахождения корней кубического уравнения, не сомневался, что теперь-то он справится с любой задачей, и поэтому не утруждал себя подготовкой к состязанию. А вот Тарталья сам решил кубическое уравнение в общем виде, получил прекрасную практику обращения с такими уравнениями, поэтому и одолел все задачи за несколько дней.

И вот ирония судьбы. Формула корня кубического уравнения, открытая дель Ферро и независимо от него Тартальей, носит имя Кардано.

Кардано

Часто Кардано представляют не вполне порядочным человеком, хитростью овладевшим открытиями дель Ферро и Тартальи, и приписавшим первенство себе. Сейчас судить об этом весьма затруднительно.

Джероламо Кардано родился в 1501 году. Получив прекрасное образование, он проявил себя во многих областях деятельности. Действительно, знаменитый врач, успешно лечивший важных особ. Талантливый инженер, смонтировавший для кареты испанского короля Карла V подвеску, чтобы Его Величество не подвергалось тряске на неровностях дороги. Теперь эта подвеска применяется в автомобилях и называется “кардан”. За пять веков конструкция подвески практически не изменилась. Физик, экспериментально измеривший отношение плотности воздуха к плотности воды. Правда, немного ошибся, но кто и сейчас сможет померить точнее теми же приборами? Азартный игрок, заложивший основы теории вероятностей. Астролог, по легенде предсказавший собственную смерть 21 сентября 1576 года, и покончивший в этот день с собой, чтобы оправдать свой гороскоп.

А еще Кардано занимался математикой. Он долго уговаривал Тарталью открыть ему секрет решения кубических уравнений, чтобы украсить им свою книгу “Ars magna”, что означает “Великое искусство”. Своё желание он аргументировал так: никто больше не станет состязаться с Тартальей в решении задач, так как знает, что тот умеет решать кубические уравнения, а другие не умеют. Возможно, под влиянием этого, вполне убедительного аргумента, а может по какой-то другой причине, но Тарталья, в конце концов, уступил. Но при этом поставил условие, что Кардано не будет публиковать его открытие без разрешения самого Тартальи.

Кардано согласился. Но когда один из учеников дель Ферро поделился с ним рецептом своего учителя, он счел себя свободным от обязательств, выданным им Тарталье, и опубликовал способ решения кубического уравнения. Так появилась “формула Кардано”, хотя сам Кардано не скрывал приоритета дель Ферро и Тартальи.

Решение

Напоминаю условия игры: я выписываю на доске шаг за шагом весь ход решения кубического уравнения в общем виде, и как только кто-то поймёт, что делать дальше, останавливает меня и сам доводит решение до конца. Приз — автоматический зачет, очередная пятёрка или четвёрка, в зависимости от места остановки. От двоек обещаю воздержаться.

$$y^3 + py + q = 0.$$

– Но это какое-то куцее уравнение, — сразу возражает Миша. – Где игрек в квадрате?

Предлагаю ему самому написать уравнение, которое мы будем решать. Миша пишет:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Бедные жертвы ЕГЭ, они могут только выбирать среди нескольких ответов один правильный. Приходится подсказывать.

– Разделите всё на a, так как коэффициент при x^3 не может равняться нулю, иначе это не будет уравнением третьей степени. После деления получается уравнение:

$$x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, \text{ где } B = b/a, C = c/a, D = d/a.$$

Теперь предлагаю исключить Bx^2 при помощи подстановки $x = y - t$. Головы у ребят заняты более высокими материями, но простую алгебру они ещё помнят. После несложных преобразований получается, что при $t = B/3$ коэффициент при y^2 равен нулю, и мы получаем уравнение

$$y^3 + py + q = 0, \text{ где } p = -B^2/3 + C, \;\; q = 2B^3/27 + BC/3 + D. \tag{1}$$

Теперь наступает моя очередь показывать, как решается кубическое уравнение. Предлагаю искать решение уравнения в виде $y = u + v$.

– Почему так? — уже серьёзно спрашивает Петя, и его поддерживают почти все.

– В этом и была изумительная по красоте догадка Тартальи. А вот почему — об этом разговор дальше. Итак,

$$y = u + v \text{ и } y^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Подставляю в уравнение (1) вместо y^3 это выражение, а y оставляю, как есть.

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + py + q = 0. \tag{2}$$

Тому, кто сейчас огласит идею Тартальи, автоматический зачёт обеспечен. Но все молчат. Обращаю внимание, что $(u+v)$ есть ни что иное, как y. Интересно было бы узнать, когда, в какой момент Тарталья разглядел такую возможность? Не это ли признак таланта, гениальности? Переписываю уравнение (2) так:

$$3uvy + py + u^3 + v^3 + q = 0 \text{ или } (3uv + p)y + (u^3 + v^3) + q = 0.$$

Делаю паузу, вопросительно смотрю на ребят. Они внимательно слушают, записывают, но никаких предположений пока не высказывают. Напоминаю, что нам достаточно найти всего один корень уравнения, остальные два они умеют получать. Всё равно никакой реакции.

Обращаю внимание, что выражение слева от знака равенства обратится в ноль, если одновременно: $3uv + p = 0$ и $(u^3 + v^3) + q = 0$ или $3uv = -p$ и $u^3 + v^3 = -q$ Никакой реакции. Делаю ещё одно преобразование: $u^3v^3 = -(p/3)^3$ и $u^3 + v^3 = -q$. Пока тишина. Предлагаю вспомнить теорему Виета для квадратного уравнения.

– Кажется, понял! — первым откликается весельчак Петя. — u и v являются корнями квадратного уравнения. Точнее, не сами u и v, а их кубы. Петя выходит к доске и не очень уверенно, как бы проверяя себя, медленно записывает:

$$z^2 + qz - (p/3)^3 = 0. \tag{3}$$

– Можно, теперь я? — спрашивает молчащая до этого Света и, не дожидаясь разрешения, выходит к доске:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Теперь желающих продолжить намного больше, но Света своего места не уступает:

$$y_1 = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Петя и Света заслужили пятёрки за внимание, сообразительность и, в основном, за смелость. Понятно, что Света записала один корень исходного уравнения. Интересуюсь остальными двумя.

– Разделим уравнение на $(y - y_1)$, – предлагает Олег: - Получится квадратное уравнение с корнями y_2 и y_3.

– А ещё можно воспользоваться свойствами коэффициентов уравнения, — замечает Миша. — В кубическом уравнении сумма корней равна коэффициенту при y^2 с обратным знаком, а свободный член равен произведению корней тоже с обратным знаком. Получится система уравнений, при решении которой возникнет то же самое квадратное уравнение:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0, \\ y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = -q. \end{cases}$$

Остаётся довести начатое до конца. Относительно корня y_3 получается квадратное уравнение:

$$y_3^2 + y_1 y_3 - q/y_1 = 0.$$

Решая его, получаем выражения для y_2 и y_3:

$$y_3 = -\frac{y_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + \frac{q}{y_1}}$$

$$y_2 = -\frac{y_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + \frac{q}{y_1}}$$

Но получить выражения мало, надо ещё суметь посчитать числовые значения корней, когда заданы конкретные коэффициенты[1]. Придётся извлекать квадратные и кубические корни. В 16 веке это делали вручную. Интересно, как быстро и с какой точностью современные студенты и школьники смогут сделать то же самое, не прибегая к услугам электроники?

Эпилог

Без упоминания Феррари, Абеля и Галуа рассказ об истории решения кубических уравнений был бы неполным.

Полторы тысячи лет математики не могли подступиться к кубическому уравнению, но стоило его решить, как буквально тут же было решено в общем виде и уравнение четвёртой степени. Сделал это ученик Кардано Луиджи Феррари. Любопытно, что для решения этого уравнения потребовалось "по пути" находить один из корней уравнения третьей степени.

Все попытки решить в общем виде уравнение пятой степени в следующие три века успехом не увенчались. И вот в 1826 году норвежский математик Нильс Хенрик Абель доказал, что общей формулы для решения уравнений пятой степени (с использованием только арифметических действий и операции извлечения корня) не существует, и для уравнений более высоких степеней — тоже. Своё открытие Абель сделал в 24 года, но прожил огорчительно мало, всего 27 лет.

Ещё меньше, всего неполный 21 год, прожил гениальный французский математик Эварист Галуа. Он продолжил исследования Абеля, определил, как по виду алгебраического уравнения узнать, решается ли оно. Метод, предложенный Галуа, положил начало фундаментальному разделу математики — теории групп. Название "группа" предложил сам Галуа. Погиб он на дуэли, защищая честь женщины. Прекрасно понимая, что у него нет шансов выжить — противником был офицер — Галуа в ночь перед дуэлью изложил на бумаге свои мысли о математике. Разобраться в этих записках и понять идеи Галуа математики смогли только через много десятилетий.

И ещё важная деталь. Решение уравнения третьей степени привело математиков к необходимости заняться комплексными числами. Функции комплексных переменных играют немалую роль в современной теоретической физике.

Литература

1. Боголюбов А.Н. Математики. Механики. Биографический справочник. - Киев, 1983.

2. Самин Д. 100 великих учёных. - М., 2004.

3. Энциклопедия для детей. Математика. - М.: Аванта+, 2000.

4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. Для инженеров и учащихся втузов. - М.: "Наука" 1980.

5. Григорьян А.Т., Зубов В.П. Очерки развития основных понятий механики. - М.: Изд-во АН СССР, 1962.

Дружинин Борис Львович,
Научный сотрудник Института теоретической
и экспериментальной Физики, г. Москва.

E-mail: bdruzhinin@mail.ru

[1]Систематическое изложение методов нахождения корней кубического уравнения можно посмотреть, например, в пособии [4] — *Прим. ред.*

О деятельности ФМОП в 2020 г.

От редакции

В 2020 г. Фонд математического образования и просвещения (ФМОП) осуществлял следующие виды деятельности по разделам: поддержка образовательных инициатив, издательская деятельность, благотворительная деятельность:

- Методическая поддержка и обеспечение экспериментальными учебными материалами учащихся старших классов ГОУ СОШ № 179 г. Москвы.
- Поддержка мероприятий по работе со школьниками: Турнир Городов, Турнир Ломоносова, Летняя конференция Турнира Городов, Летние математические лагеря.
- Выпуск журнала "Математическое образование", учредителем которого ФМОП является; в 2020 г. вышли номера 1(93), 2(94), 3(95), 4(96).
- Выпуск приложения к журналу "Математическое образование" (вышли в печатном варианте четвертый и пятый выпуски, шестой готовится к печати).
- Начата онлайн-публикация издания "О некоторых педагогах ярославских средних учебных заведений второй половины XIX – начала XX века" о жизни и деятельности ряда ярославских педагогов. Опубликованы три главы издания.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей математической Олимпиады школьников САММАТ, г. Самара.
- Предоставление изданий Фонда для участников летнего математического лагеря "Алый Парус".
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей и участников Космической Олимпиады школьников, г. Королев, октябрь.
- Предоставление изданий Фонда для участников Всероссийского научно-методического семинара "Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом", декабрь.
- Предоставление безвозмездных транспортных услуг организациям и физическим лицам, работающим в области математического образования.
- Организация бесплатной подписки на журнал "Математическое образование" ряду организаций и физических лиц, работающих в области математического образования.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2020 год (включая стоимость пересылки) – 150 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2020 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 100 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >