ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцать четвертый

№ 3 (95)

июль - сентябрь 2020 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

*Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования*

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 3 (95), 2020 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2020 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 23.10.2020 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 3,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (95), июль – сентябрь 2020 г.

Содержание

Учащимся и учителям средней школы

В. Е. Волков, В. Б. Шерстюков. Об арифметических свойствах числа $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ 2

С. В. Дворянинов. «А ИЛИ В» и «ИЛИ А, ИЛИ В» 8

Б. Ж. Сагиндыков. Комплексные числа в задачах планиметрии 14

В. М. Федосеев. Способ вычисления логарифмической функции как тема проектного исследования 21

Студентам и преподавателям математических специальностей

Н. С. Калинин. Как учить университетской математике онлайн? 25

А. В. Неклюдов. К свойствам определителя Вронского 33

С. С. Пухов. Упрощенное обоснование наиболее важных замен переменных в кратном интеграле 38

Из истории математики

К. В. Козеренко. Запрет Аристотеля 49

Из истории математического образования

Т. И. Кузнецова. Через всю свою жизнь он пронёс две любви — с именами «Математика» и «Шахматы». Памяти Дубова Эдуарда Львовича 51

Об арифметических свойствах числа $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$

В. Е. Волков, В. Б. Шерстюков

В заметке элементарными методами, доступными старшеклассникам, исследуется арифметическая природа числа $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$. Показано, что это число является иррациональным и целым алгебраическим степени, равной шести. Именно, найден многочлен шестой степени с целыми коэффициентами (старший из которых равен единице), имеющий означенное иррациональное число своим корнем, и выписаны явно остальные корни. Доказано, что степень шесть здесь не может быть уменьшена, т. е. указанный многочлен является минимальным.

Как обычно, множество всех рациональных чисел обозначаем символом $\mathbb{Q}$. Хорошо известно (и несложно проверяется рассуждением от противного), что каждое из чисел

$$\alpha=\sqrt[3]{2}\,, \qquad \beta=\sqrt{3} \tag{1}$$

является иррациональным. Поскольку в общем случае сумма двух иррациональных чисел может быть как иррациональным, так и рациональным числом, возникает вопрос о справедливости утверждения $\alpha+\beta\notin\mathbb{Q}$ применительно к числам (1). Кстати, задача предлагалась в 1977 году на одной из студенческих олимпиад (см. [1, с. 51]). Полезно, на наш взгляд, привести подробное решение.

Задача 1. Доказать, что число $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ является иррациональным.

Решение. Обозначим $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ и допустим, что $x\in\mathbb{Q}$. Запишем равенство $x-\sqrt{3}=\sqrt[3]{2}$ и возведём его в куб. Получим, что $x^3-3\sqrt{3}x^2+9x-3\sqrt{3}=2$, или $x^3+9x-2=3\sqrt{3}(x^2+1)$. Отсюда

$$\sqrt{3}\;=\;\frac{x^3+9x-2}{3(x^2+1)}\,.$$

Правая часть равенства для $x\in\mathbb{Q}$ является рациональным числом, а это противоречит иррациональности числа $\sqrt{3}$. Следовательно, $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ есть иррациональное число.

Схожим образом доказывается, что число $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ является алгебраическим. Напомним, что *алгебраические* числа суть корни отличных от тождественного нуля многочленов с целыми коэффициентами. Начальное представление об алгебраических числах можно составить по заметке [2]. Широкий круг вопросов, связанных с алгебраическими и неалгебраическими (*трансцендентными*) числами, образует глубокий и трудный раздел теории чисел (см., например, [3], [4]). Не апеллируя к мощным утверждениям и методам этой теории, будем использовать самые простые средства. Так, легко сообразить, что оба числа (1) — алгебраические: первое есть корень многочлена x^3-2, второе — многочлена x^2-3. Известна общая теорема, утверждающая, что сумма двух алгебраических чисел снова даёт алгебраическое число. Для конкретной ситуации (1) проверим этот результат непосредственно, точнее, предъявим многочлен с целыми коэффициентами, одним из корней которого является число $\alpha+\beta=\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$.

Задача 2. Составить многочлен с целыми коэффициентами, для которого число $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ является корнем.

Решение. Действуя так же, как при решении задачи 1, получим, что $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ удовлетворяет уравнению

$$x^3+9x-2=3\sqrt{3}(x^2+1).$$

Возводя обе его части в квадрат и приводя подобные члены, запишем уравнение шестой степени с целыми коэффициентами

$$x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23=0\,, \tag{2}$$

одним из корней которого является заданное число $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$.

Ниже (см. задачу 4) мы убедимся в отсутствии многочлена с целыми коэффициентами степени меньшей шести, имеющего своим корнем число $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$. Тем самым, левая часть уравнения (2) — *минимальный* многочлен для алгебраического числа $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$. Степень такого многочлена называют *степенью* алгебраического числа. То дополнительное обстоятельство, что старший коэффициент минимального многочлена равен единице, терминологически подчёркивается так: $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ — *целое* алгебраическое число шестой степени. Отдельный интерес представляет вопрос о нахождении всех комплексных корней уравнения (2).

Задача 3. Решить уравнение (2) в комплексных числах.

Решение. Пусть i — *мнимая единица*: $i^2=-1$. Переменное в уравнении (2) считаем комплексным, т. е. $x\in\mathbb{C}$. Сначала заметим, что аналог задачи 2 для числа $\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}$ приводит к тому же уравнению (2), если мы проделаем уже известные шаги. Итак, найдены два действительных корня уравнения (2): $x_1=\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ и $x_2=\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}$. Но тогда многочлен

$$P(x)=x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23$$

делится без остатка на многочлен

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-2\sqrt[3]{2}\,x+\sqrt[3]{4}-3\,.$$

Аккуратное деление «уголком» даёт следующий результат:

$$x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23=(x^2-2\sqrt[3]{2}\,x+\sqrt[3]{4}-3)\,Q(x)\,,$$

где $Q(x)=x^4+2\sqrt[3]{2}\,x^3-(6-3\sqrt[3]{4})x^2-(6\sqrt[3]{2}-4)x+9+2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}$. Многочлен $Q(x)$ не имеет действительных корней. В этом можно убедиться, преобразовав $Q(x)$ к виду

$$Q(x)=(x^2+\sqrt[3]{2}\,x-(3-\sqrt[3]{4}))^2+9\sqrt[3]{4}\,.$$

Теперь ясно, что для отыскания комплексных корней многочлена $Q(x)$ нужно решить два квадратных уравнения

$$x^2+\sqrt[3]{2}x-(3-\sqrt[3]{4})=-3\sqrt[3]{2}\,i\,, \tag{3}$$

$$x^2+\sqrt[3]{2}x-(3-\sqrt[3]{4})=3\sqrt[3]{2}\,i\,. \tag{4}$$

После выделения полных квадратов уравнение (3) перепишем так:

$$\left(x+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\left(2-\sqrt[3]{2}\,i\right)^2.$$

Его корни

$$x_{3,\,4}=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\sqrt[3]{2}\,i\right),$$

т. е.

$$x_3=-\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{2}\,i\,,\qquad x_4=\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{2}\,i\,.$$

Точно так же, переходя от (4) к равносильному уравнению

$$\left(x+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\left(2+\sqrt[3]{2}\,i\right)^2,$$

выпишем его корни

$$x_{5,\,6}=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2+\sqrt[3]{2}\,i\right),$$

т. е.

$$x_5=-\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{2}\,i\,,\qquad x_6=\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{2}\,i\,.$$

Подведём итог. Уравнение (2) имеет шесть корней

$$x_1=\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}\,,\qquad x_2=-(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}),$$

$$x_3=-\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{2}\,i\,,\qquad x_4=\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{2}\,i\,,$$

$$x_5=-\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{2}\,i\,,\qquad x_6=\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{2}\,i\,,$$

ровно два из которых являются действительными. Числа x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 называются *сопряжёнными* к алгебраическому числу $x_1=\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ и также будут целыми алгебраическими числами.

Покажем, наконец, что многочлен $P(x)$, возникший при решении задачи 2, обладает в известном смысле свойством минимальности.

Задача 4. Доказать, что не существует (отличного от тождественного нуля) многочлена степени меньшей шести с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$.

Решение. Предположим, что такой многочлен существует. В обозначениях (1) это означает, что для числа $\gamma=\alpha+\beta=\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ найдутся такие целые числа n_0, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, что выполнено соотношение

$$n_5\gamma^5+n_4\gamma^4+n_3\gamma^3+n_2\gamma^2+n_1\gamma+n_0=0\,. \tag{5}$$

Возводя γ последовательно в квадрат, куб, четвёртую и пятую степени, имеем

$$\gamma^2=(\alpha+\beta)^2=(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})^2=\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}\sqrt{3}+3\,,$$

$$\gamma^3=(\alpha+\beta)^3=(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})^3=2+3\sqrt[3]{4}\sqrt{3}+9\sqrt[3]{2}+3\sqrt{3}\,,$$

$$\gamma^4=(\alpha+\beta)^4=(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})^4=2\sqrt[3]{2}+8\sqrt{3}+18\sqrt[3]{4}+12\sqrt[3]{2}\sqrt{3}+9\,,$$

$$\gamma^5=(\alpha+\beta)^5=(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})^5=2\sqrt[3]{4}+10\sqrt[3]{2}\sqrt{3}+60+30\sqrt[3]{4}\sqrt{3}+45\sqrt[3]{2}+9\sqrt{3}\,.$$

Для сокращения записи введём дополнительные к (1) обозначения

$$\delta=\sqrt[3]{2}\sqrt{3}\,,\qquad \varepsilon=\sqrt[3]{4}\,,\qquad \xi=\sqrt[3]{4}\sqrt{3}\,.$$

Подставим выражения

$$\gamma=\alpha+\beta\,,\qquad \gamma^2=2\delta+\varepsilon+3\,,\qquad \gamma^3=9\alpha+3\beta+3\xi+2\,,$$

$$\gamma^4=2\alpha+8\beta+12\delta+18\varepsilon+9\,,\qquad \gamma^5=45\alpha+9\beta+10\delta+2\varepsilon+30\xi+60$$

в (5) и после подходящей группировки слагаемых получим

$$m_5\,\alpha+m_4\,\beta+m_3\,\delta+m_2\,\varepsilon+m_1\,\xi+m_0=0\,, \tag{6}$$

где

$$\begin{cases} m_0 = n_0 + 3n_2 + 2n_3 + 9n_4 + 60n_5\,, \\ m_1 = 3n_3 + 30n_5\,, \\ m_2 = n_2 + 18n_4 + 2n_5\,, \\ m_3 = 2n_2 + 12n_4 + 10n_5\,, \\ m_4 = n_1 + 3n_3 + 8n_4 + 9n_5\,, \\ m_5 = n_1 + 9n_3 + 2n_4 + 45n_5\,. \end{cases} \tag{7}$$

Учитывая связь

$$\delta = \alpha\,\beta\,, \qquad \varepsilon = \alpha^2\,, \qquad \xi = \alpha^2\beta\,,$$

представим (6) в виде

$$\beta\,(m_1\,\alpha^2 + m_3\,\alpha + m_4) \;=\; -\,(m_2\,\alpha^2 + m_5\,\alpha + m_0)\,.$$

Следовательно,

$$3\,(m_1\,\alpha^2 + m_3\,\alpha + m_4)^2 \;=\; (m_2\,\alpha^2 + m_5\,\alpha + m_0)^2\,. \tag{8}$$

Напомним, что $\alpha = \sqrt[3]{2}$ и все коэффициенты в (8) — это целые числа из формулы (7). Далее, поскольку $\alpha^4 = 2\alpha$, $\alpha^3 = 2$, то после раскрытия скобок соотношение (8) запишется как квадратичная (возможно, вырожденная) относительно α зависимость

$$k_2\,\alpha^2 + 2\,k_1\alpha + k_0 = 0 \tag{9}$$

с целыми коэффициентами k_0, k_1, k_2. При этом

$$\begin{cases} k_0 = 3m_4^2 + 12m_1m_3 - m_0^2 - 4m_2m_5\,, \\ k_1 = 3m_1^2 + 3m_3m_4 - m_2^2 - m_0m_5\,, \\ k_2 = 3m_3^2 + 6m_1m_4 - m_5^2 - 2m_0m_2\,. \end{cases} \tag{10}$$

Убедимся в том, что (9) может выполняться в единственном случае — когда $k_0 = k_1 = k_2 = 0$. Для этого рассмотрим две логически возможные ситуации.

1. Пусть $k_2 = 0$. Тогда (9) вырождается:

   $$2k_1\,\alpha + k_0 = 0\,.$$

   Отсюда $k_1 = 0$ (а значит, и $k_0 = 0$), ибо в противном случае $\alpha = \sqrt[3]{2} = -k_0/(2k_1) \in \mathbb{Q}$, что невозможно.

2. Пусть $k_2 \neq 0$. Тогда (9) противоречиво. Действительно, выполнение (9) в таком случае означает, что

   $$\sqrt[3]{2} = r_1 \pm \sqrt{r_2}$$

   с некоторыми r_1, $r_2 \in \mathbb{Q}$, причём $\sqrt{r_2} \notin \mathbb{Q}$. После возведения в куб получим

   $$2 - r_1^3 - 3r_1r_2 = \pm\sqrt{r_2}\,(3r_1^2 + r_2)\,.$$

   Ввиду условия $\sqrt{r_2} \notin \mathbb{Q}$ последнее соотношение сводится к системе уравнений

   $$\begin{cases} 3r_1^2 + r_2 = 0\,, \\ 2 - r_1^3 - 3r_1r_2 = 0\,. \end{cases}$$

   Отсюда $r_1 = -1/\sqrt[3]{4}$, что противоречит рациональности числа r_1.

Таким образом, все коэффициенты в (9) обращаются в нуль, а система (10) принимает вид

$$\begin{cases} 3m_4^2 + 12m_1m_3 - m_0^2 - 4m_2m_5 = 0\,, \\ 3m_1^2 + 3m_3m_4 - m_2^2 - m_0m_5 = 0\,, \\ 3m_3^2 + 6m_1m_4 - m_5^2 - 2m_0m_2 = 0\,. \end{cases} \tag{11}$$

Мы должны решить в целых числах систему (11), точнее, доказать, что эта система диофантовых уравнений имеет только *тривиальное* решение $m_0 = m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 0$. Первое уравнение системы показывает, что сумма квадратов $m_0^2+m_4^2=4m_4^2+12m_1m_3-4m_2m_5$ делится на четыре. Поэтому оба числа m_0, m_4 являются чётными. Используя эту информацию при анализе третьего уравнения системы (11), видим, что сумма квадратов $m_3^2+m_5^2=4m_3^2+6m_1m_4-2m_0m_2$ делится на четыре. Поэтому оба числа m_3, m_5 являются чётными. Наконец, учитывая чётность каждого числа четвёрки m_0, m_3, m_4, m_5, из второго уравнения в (11) находим, что сумма квадратов $m_1^2+m_2^2=4m_1^2+3m_3m_4-m_0m_5$ делится на четыре. Поэтому m_1, m_2 — чётные числа. Таким образом,

$$m_0=2m_0'\,,\quad m_1=2m_1'\,,\quad m_2=2m_2'\,,\quad m_3=2m_3'\,,\quad m_4=2m_4'\,,\quad m_5=2m_5' \tag{12}$$

с некоторыми целыми значениями m_0', m_1', m_2', m_3', m_4', m_5'. Подставляя (12) в (11) и сокращая каждое уравнение на четыре, замечаем, что новый набор $(m_0', m_1', m_2', m_3', m_4', m_5')$ также удовлетворяет системе (11). Продолжаем этот процесс. На втором шаге получим, что

$$m_0'=2m_0''\,,\quad m_1'=2m_1''\,,\quad m_2'=2m_2''\,,\quad m_3'=2m_3''\,,\quad m_4'=2m_4''\,,\quad m_5'=2m_5''$$

с целыми значениями m_0'', m_1'', m_2'', m_3'', m_4'', m_5'', и т. д. В результате приходим к следующему заключению: если набор целых чисел $(m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$ является решением системы (11), то каждое число этого набора делится на 2^s для любого натурального показателя s. Таким свойством обладает только тривиальное решение. Нужный факт установлен.

Заключительный этап решения задачи 4 состоит в обработке системы (7), которая, согласно предыдущему этапу, записывается так:

$$\begin{cases} n_0+3n_2+2n_3+9n_4+60n_5=0\,,\\ n_3+10n_5=0\,,\\ n_2+18n_4+2n_5=0\,,\\ n_2+6n_4+5n_5=0\,,\\ n_1+3n_3+8n_4+9n_5=0\,,\\ n_1+9n_3+2n_4+45n_5=0\,. \end{cases} \tag{13}$$

Выражая $n_3=-10n_5$ из второго уравнения системы (13) и подставляя в первое, пятое и шестое уравнения, переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} n_0+3n_2+9n_4+40n_5=0\,,\\ n_3+10n_5=0\,,\\ n_2+18n_4+2n_5=0\,,\\ n_2+6n_4+5n_5=0\,,\\ n_1+8n_4-21n_5=0\,,\\ n_1+2n_4-45n_5=0\,. \end{cases} \tag{14}$$

Вместо третьего и четвёртого уравнений в (14) запишем уравнения $4n_4-n_5=0$ и $n_2+26n_4=0$, а вместо пятого и шестого — уравнения $n_4+4n_5=0$ и $n_1-53n_5=0$. Получим равносильную (14) систему

$$\begin{cases} n_0+3n_2+9n_4+40n_5=0\,,\\ n_3+10n_5=0\,,\\ 4n_4-n_5=0\,,\\ n_2+26n_4=0\,,\\ n_4+4n_5=0\,,\\ n_1-53n_5=0\,. \end{cases} \tag{15}$$

Третье и пятое уравнения системы (15) дают $n_4=n_5=0$. Но тогда из четвёртого и шестого уравнений имеем $n_1=n_2=0$, а затем из первого и второго уравнений заключаем, что $n_0=n_3=0$.

Вывод: среди коэффициентов n_0, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 представления (5) нет отличных от нуля. Полученное противоречие завершает решение задачи 4.

Результат этой задачи показывает, что единственным приведённым (старший коэффициент равен единице) многочленом шестой степени с целыми коэффициентами, имеющим корень $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$, является многочлен

$P(x)$ из формулы (2). В самом деле, нужно лишь предположить противное и рассмотреть разность двух возникших многочленов шестой степени.

Как видим, естественные вопросы о свойствах конкретных иррациональных чисел простой структуры могут оказаться весьма любопытными. В этой связи отметим статью [5], в которой для алгебраических чисел вида $\operatorname{tg}(\pi/n)$, где n — натуральное число, $n \neq 2$, предложен алгоритм построения минимальных многочленов.

Литература

[1] Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. - М.: Наука, 1978. - 208 с.

[2] Жуков А. Алгебраические и трансцендентные числа // Квант, № 4, Калейдоскоп «Кванта», 1998.

[3] Гельфонд А.О. Трансцендентные и алгебраические числа. - М.: ГИТТЛ, 1952. - 224 с.

[4] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. - 147 с.

[5] Галиева Л.И., Галяутдинов И.Г. Об одном классе уравнений, разрешимых в радикалах // Изв. вузов. Матем. - 2011. - № 2. - с. 22-30.

Волков Владимир Евгеньевич,
доцент кафедры высшей математики
Национального исследовательского
ядерного университета «МИФИ»,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: vv1720@mail.ru

Шерстюков Владимир Борисович,
профессор кафедры высшей математики
Национального исследовательского
ядерного университета «МИФИ»,
доктор физ.-мат. наук.

E-mail: shervb73@gmail.com

«A ИЛИ B» и «ИЛИ A, ИЛИ B»

С. В. Дворянинов

Статья напоминает о смысле дизъюнкции, конъюнкции, исключающем “или-или”. Показано соответствие теоретико-множественных операций логическим связкам и уравнениям.

Быть иль не быть, вот в чем вопрос.
В. Шекспир

Ребром вопрос поставил: или-или!
В. Высоцкий

Введение

Излагая математику нашим ученикам, мы используем литературный русский язык и язык математический. Точность и краткость в математике доставляют термины и символы. В свою очередь, математический язык имеет свои части: это язык теории множеств, язык математической логики, язык теории функций, язык теории уравнений и др. Обратим внимание на то, как эти языки переплетаются в школьной математике.

Уравнение, система, пересечение, конъюнкция!

Пусть $f(x) = x^2 + x - 2$ и $g(x) = 3x^2 + x - 4$. Эти две функции будут участвовать во всех дальнейших примерах.

Решая уравнение

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 0, \tag{1}$$

мы переходим к равносильной системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Уравнение (1) и система (1.1) означают, что

$$f = 0 \text{ и } g = 0.$$

Грамматическому союзу ***и*** в теории множеств соответствует *пересечение двух множеств*, в данном случае пересечение множества корней первого уравнения системы K_1 и множества корней второго уравнения K_2: $K_1 \cap K_2$ В логике этому союзу ***и*** системе (1.1) соответствует логическая связка, называемая *конъюнкцией двух высказываний.*

A	B	$A \wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

Итак, союз ***и***, система уравнений, пересечение множеств, конъюнкция существуют в единстве и согласии.

Заметим, что традиционное словесное выражение системы (1.1) можно заменить другим: «и $f = 0$, и $g = 0$». Последнее интонационное усиление, двукратное *и*, конъюнкцией не является, но является логически верным.

Уравнение, совокупность, объединение, дизъюнкция?..

Решая уравнение

$$f(x) \cdot g(x) = 0, \tag{2}$$

мы переходим к равносильной совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Уравнение (2) и совокупность (2.1) означают, что

$$f = 0 \text{ или } g = 0.$$

В теории множеств совокупности уравнений (2.1) соответствует *объединение двух множеств* $K_1 \cup K_2$.

Легко и приятно было бы сейчас все, сказанное выше о союзе ***и*** и о конъюнкции, повторить, как припев в песне, применительно к союзу ***или*** и *дизъюнкции*. Однако тут все не так хорошо, как бы нам хотелось.

В учебнике [1] на с. 109 читаем:

«...дизъюнкция соответствует грамматическому союзу ***или***, однако эта связь на деле оказывается не столь близкой, как в случае с конъюнкцией и союзом ***и***.

Русское *или* чаще всего имеет *разделительный* смысл, такой же, хоть и менее явно выраженный, как ... *или*, ... *или*: подразумевается, что верно одно из высказываний, но не оба вместе. ...Однако практика математики показала, что дизъюнкцию удобнее понимать именно в *неразделительном* смысле».

Изложим содержание этого фрагмента простыми предложениями. Итак, союз ***или*** не допускает однозначного толкования. Его смысл может быть разным. Этот союз может быть *разделительным*. Этот союз может быть *неразделительным*. При этом ему соответствует дизъюнкция. В математике дизъюнкция имеет неразделительной смысл.

A	B	$A \vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

Отсюда делаем вывод: в математике союз ***или*** имеет неразделительный смысл. В теории множеств ему соответствует операция объединения множеств.

Замечание. В противовес к приведенной выше цитате из [1] в книге [2] на с. 65 находим такое утверждение: “Операция дизъюнкции довольно хорошо соответствует обыденному значению союза «или»”. Другими словами, в [2] утверждается, что обыденное значение союза – неразделительное.

Каждый легко может провести эксперимент по выяснению, какой смысл союза ***или*** ближе большинству людей. Предположим, что некоему человеку поручено купить в магазине яблоки или груши. Вопрос: может ли он купить яблоки вместе с грушами?

Ответивший *нет* понимает союз ***или*** в разделительном смысле; сказавший *да* понимает этот союз в неразделительном смысле.

***Или* исключающее и *или* неисключающее**

Говоря о двух возможных смыслах союза ***или***, уместно использовать два других прилагательных, кроме "разделительный" и "неразделительный". Они имеются в книге [2] на с. 65:

«...в отличие от случая конъюнкции, соответствие между операцией дизъюнкции и употреблением союза «или» в обыденной речи требует более детального рассмотрения. Детальный анализ показывает, что в русском языке слово «или» употребляется в двух различных значениях: существует исключающее «или» и неисключающее «или». Различие состоит в следующем: пусть A и B — два истинных высказывания, например, A — «число три делит число шесть», B — «число шесть больше, чем число три». Следует ли рассматривать сложное высказывание $A \vee B$ ... как истинное или ложное?

В обыденной жизни встречаются оба понимания:

утверждения «A или B» может означать, что одно и только одно из предложений A и B истинно — тогда говорят, что слово «или» употребляется в исключающем смысле,

или же «A или B» означает, что истинно, по меньшей мере, одно из предложений (но могут быть и оба) — в этом случае говорят, что «или» употребляется в неисключающем смысле. Именно неисключающему «или» и соответствует дизъюнкция».

Или-или

Помня, что в математике союзу ***или*** предписано неисключающее, неразделительное, можно сказать, объединяющее значение, промежуточные итоги отразим в таблице:

союз	логика	теория множеств	пример уравнения
и	конъюнкция $A \wedge B$	пересечение $K_1 \cap K_2$	$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 0$
или	дизъюнкция $A \vee B$	объединение $K_1 \cup K_2$	$f(x) \cdot g(x) = 0$

При этом для союза ***или*** выбран один из возможных смыслов, неразделительный. А каким же образом нам выразить другой, разделительный смысл союза ***или***? Легко вспомнить жизненные ситуации, когда нам надо выбрать именно один из двух вариантов. Такой выбор есть и в элементарной математике. Рассмотрим уравнение

$$\frac{f(x) \cdot g(x)}{f(x) + g(x)} = 0, \tag{3}$$

которое равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0, \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \tag{3.1}$$

Множество корней уравнения (3) получается как *симметрическая разность* множеств K_1 и K_2:

$$K_1 \triangle K_2 = (K_1 \setminus K_2) \cup (K_2 \setminus K_1),$$

или

$$K_1 \triangle K_2 = (K_1 \cup K_2) \setminus (K_2 \cap K_1).$$

А какой должна быть наша речь, соответствующая, например, первой системе в (3.1)?

— f равно нулю или g равно нулю, при этом *или* понимается в разделительном смысле? — Так?

Но это же очень длинно!

Оказывается, что уже в 1971 году в статье [3] было указано удачное словесное описание уравнения (3) и системы (3.1):

«или $f = 0$, или $g = 0$»

Очевидно, что фраза «уравнение (3) равносильно тому, что или $f = 0$, или $g = 0$» намного короче традиционного словесного описания системы (3.1).

Разумеется, нашим ученикам непременно нужно объяснить, что теоретико-множественной разности $K_1 \setminus K_2$ соответствует первая алгебраическая система в (3.1), разности $K_2 \setminus K_2$ — вторая система в (3.1), в целом сама совокупность (3.1) выражает, что или $f = 0$, или $g = 0$.

В статье [3] на с. 19 читаем: «Тогда переформулировка высказываний к виду, удобному для записи в алгебре высказываний, станет несложной и довольно естественной.»

Примеры

$$\textit{(либо A, либо B)} \equiv \textit{[A и (не B)] или [(не A) и B)].} \tag{4}$$

Слова “или” и “либо” — синонимы. Высказыванию в правой части (4) в теории множеств соответствует симметрическая разность. Отсюда следует, что союз *или-или* имеет разделительный смысл.

В результате терминология приобретает стройность: за союзом ***или*** закреплен один единственный, традиционный для математики смысл — неразделительный. Разделительным смыслом наделяется двойное ***или-или***.

Тираж [3] — 285 750 экземпляров. Так что с тех пор такое количество читателей, а еще ученики ставших преподавателями читателей уже полвека используют эти два союза каждый в своем единственном смысле.

Теперь таблицу можно дополнить следующей строкой:

союз	логика	теория множеств	пример уравнения
или A, или B	$(A \wedge \overline{B}) \vee (B \wedge \overline{A})$	симметрическая разность $K_1 \Delta K_2$	$\frac{f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)} = 0$

Замечание. Логика высказываний аналогична буквенной элементарной алгебре. Эта логика называется *булевой алгеброй.* Она появилась в середине 19 века в работах Дж. Буля и называется его именем. В книге [4], с. 34 читаем:

> Буль употреблял не дизъюнкцию, а логическую операцию, соответствующую исключающему «или». На с. 14. приведена таблица истинности для логической операции, соответствующей исключающему «или»:

A	B	исключающее или
и	и	л
и	л	и
л	и	и
л	л	л

Нищета терминологии

Есть коробки с шестью цветными карандашами. Но шести цветов не хватит даже для того, чтобы назвать все цвета радуги. При этом, разумеется, вообще могут остаться за границами знания аквамарин и беж, охра и умбра, сепия и бирюза.

В математике числовые множества [2;5], (2;5), [2;5) и (2;5] можно обозначать безликим термином промежуток. Обычно хватает сил и энтузиазма первые два различать, называя их отрезок и интервал. В свое время предлагалось два других промежутка называть *оттервал* и *интрезок*. Это, например, [2;5) и (2;5]. Очень удобно: на слух сразу ясно, принадлежат ли концевые точки множеству. Никакие дополнительные пояснения от учителя не требуются, если он, например, сказал, что множество решений неравенства — это интрезок (3;7]. Не прижились эти термины. Может быть, из-за того, что мы ленивы, а может быть, из-за синдрома Эллочки-людоедки. Или из-за отсутствия музыкального слуха?

В классической гармонии октава разделена на 12 нот. В четвертитоновой — на 24, то есть каждый полутон разделен еще на две части, и есть приверженцы этого, более богатого строя. Прислушайтесь, как красиво звучит следующая формула из [3]:

(ни A, ни B) $\equiv$ *[(не A) и (не B)].*

Слово — не воробей, вылетит — не поймаешь

Говорят, что истину можно повторять, не боясь показаться надоедливым. Помня об этом, еще раз обратим внимание читателя на то, что в математике утверждения «А или Б» и «или А, или Б» — не равносильны, одно и то же они не обозначают. И если в пылу полемики, для эмоционального усиления вместо «А или Б» мы напишем «или А, или Б», то это будет ошибкой.

В одной книге важные и неожиданные моменты были отмечены знаком крутая дорога, крутой поворот.

О «крутом повороте» следует помнить при употреблении *или* и *или-или*.

Логика и задача с параметром

Надо сказать, что *или-или* в математической литературе встречается не часто. Непосредственным поводом для нашего внимания к нему явилось наличие *или-или* в обширной статье [7], в которой на десяти страницах (с. 42–52) обсуждается такая задача:

«Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - 2ax + 7| = |6a - x^2 - 2x - 1| \tag{1}$$

имеет более двух корней».

Используя цепочку равносильных уравнений

$$|f| = |g| \Leftrightarrow f^2 = g^2 \Leftrightarrow (f-g)(f+g) = 0$$

авторы приводят уравнение (1) к виду

$$(x^2 + (1-a)x + 4 - 3a)(a+1)(x-3) = 0. \tag{2}$$

Далее читаем утверждение, которое содержит ответ на вопрос задачи и которое обозначим (Л):

(Л) «Последнее уравнение имеет более двух корней или если $a = -1$, или если уравнение $x^2 + (1-a)x + 4 - 3a$ имеет два различных корня, отличных от 3».

Попробуем применить утверждение (Л) к аналогичному (2) уравнению

$$(x^2 - x + a + 1)(a+1)(x-3) = 0. \tag{3}$$

Согласно (Л) имеем два утверждения:

A: $a = -1$;

B: уравнение $x^2 - x + a + 1$ имеет два различных корня, отличных от 3.

Согласно исключающему *или-или* истина A означает ложь B. Для (3) это не так: если $a = -1$ (то есть A — истина), то и B оказывается истиной: квадратное уравнение $x^2 - x + a + 1$ имеет корни 0 и 1, отличные от 3. Согласно смыслу союза *или − или* в утверждении (Л) заключаем, что значение $a = -1$ *не входит* в ответ.

В действительности же значение $a = -1$ в ответ входит.

Впрочем, Авторы [7], представившие в статье ложное утверждение (Л), относящееся к уравнениям вида (2) и (3), возможно, в ошибке и не виноваты. Они переписали, как сами говорят на с. 45, решение, "разобранное на сайте «Решу ЕГЭ»".

Литература

1. Дорофеев Г.В. и др. Алгебра и начала анализа. 10 кл. - М.: Дрофа, 2003.
2. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру. - М., 1973.
3. Цинман Л.Л. Логические задачи и алгебра высказываний // Квант. - № 4. - 1971. - С. 14-20.
4. Калужнин Л.А. Что такое математическая логика. - М., «Наука», 1964.
5. Розов Н.Х. Логика и школа // Математическое образование. - № 1(77) - 2016. - С. 2-5.
6. Розов Н.Х. Логика и школа // Математика. - № 4(774) - 2016. - С. 4-6.
7. Малова И.Е., Сенчурова Г.П. Обогащающий анализ текстов решения заданий с параметрами // Математика в школе. - № 2. = 2018. - С. 43-52.

Дворянинов Сергей Владимирович,
доцент, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: dvoryan@yandex.ru

Комплексные числа в задачах планиметрии

Б. Ж. Сагиндыков

При решении геометрических задач применяются различные методы: векторные, координатные, методы геометрических преобразований, а также метод комплексных чисел. Основная цель данной работы — продемонстрировать решение задач планиметрии методом комплексных чисел в совокупности с вышеуказанными методами так, чтобы этот подход стал понятен учащимся.

1. Комплексные координаты замечательных точек треугольника

1. Центр тяжести треугольника. Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка пересечения называется *центроидом* или *центром тяжести* треугольника.

Задача 1. Относительно некоторой декартовой системы координат xOy даны комплексные координаты вершин треугольника ABC (рис. 1). Найдите комплексную координату центра тяжести треугольника.

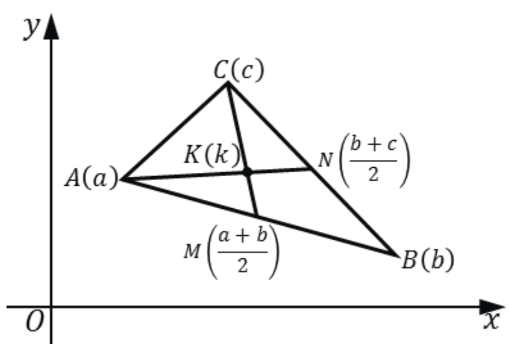


Рис. 1.

Решение. Обозначим через a, b, c комплексные координаты вершин A, B и C треугольника. Проведем медианы AN и CM. Тогда точка K будет центроидом. По формуле деления отрезка в данном отношении находим комплексные координаты m и n точек $M(m)$, $N(n)$, где $m = \frac{a+b}{2}, n = \frac{b+c}{2}$. Теперь комплексную координату центроиды найдем по формуле $k = \frac{a+\lambda n}{1+\lambda}$, где $\lambda = \frac{AK}{KN}$.

Вспомним свойство центроида. Центроид делит каждую медиану в отношении $1:2$, считая от основания медианы. Тогда $\lambda = 2$ и

$$k = \frac{a+2n}{3} = \frac{1}{3}(a+b+c). \tag{1}$$

Таким образом,

$$K(k) = K\left(\frac{a+b+c}{3}\right).$$

Замечание 1. Формулу (1) с помощью векторной алгебры можно было найти сразу, так как $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

Длину медианы AN, опущенной на сторону BC, можно найти по формулам:

$$AN^2 = |n-a| = (a-n)(\bar{a}-\bar{n}) = \left(a - \frac{b+c}{2}\right)\left(\bar{a} - \frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}\right) = \frac{2a-b-c}{2}\cdot\frac{2\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}}{2} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(4a^2+b^2+c^2-2\left(a\bar{b}+\bar{a}b\right)-2\left(a\bar{c}+\bar{a}c\right)+\left(b\bar{c}+\bar{b}c\right)\right) = \frac{1}{4}\left[2\left(AB^2+AC^2\right)-BC^2\right],$$

т. к. $AB^2 = a^2+b^2+c^2-2\left(a\bar{b}+\bar{a}b\right)$, $AC^2 = a^2+c^2-\left(a\bar{c}+\bar{a}c\right)$, $BC^2 = b^2+c^2-\left(b\bar{c}+\bar{b}c\right)$.

2. Инцентр треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка совпадает с *центром вписанной окружности* (*инцентром*). Обозначение: $I(g)$, где g — комплексная координата инцентра (рис. 2).

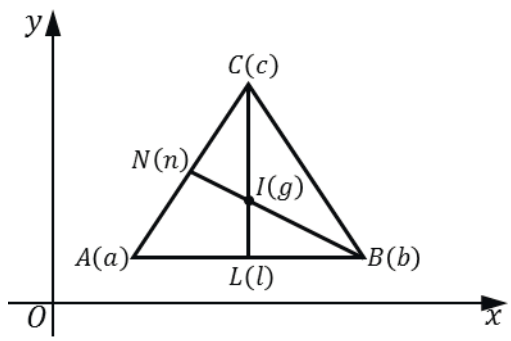


Рис. 2

Задача 2. Докажите, что в любом треугольнике для комплексной координаты инцентра справедлива следующая формула

$$g = \frac{BC\cdot a + AC\cdot b + AB\cdot c}{AB+BC+AC}, \tag{2}$$

где a, b, c комплексные координаты вершин A, B и C треугольника.

Решение. Проведем биссектрисы CL и BN треугольника. Тогда точка I — инцентр. Для нахождения комплексной координаты инцентра используем важное свойство биссектрисы: она делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилегающим к ней сторонам $\mu = \frac{AL}{LB} = \frac{AC}{BC}$.

Далее воспользуемся свойством пропорции

$$\frac{AL+LB}{LB} = \frac{AC+BC}{BC} \Rightarrow LB = \frac{AB\cdot BC}{AB+BC}$$

(BN) является биссектрисой треугольника $\triangle BCL$. Поэтому $\lambda = \frac{CI}{LI} = \frac{BC}{LB}$.

Следовательно, $g = \dfrac{c+\lambda l}{1+\lambda}$, где

$$l = \frac{a+\mu b}{1+\mu} = \frac{a+\frac{AC}{BC}b}{1+\frac{AC}{BC}} = \frac{BC\cdot a + AC\cdot b}{AC+BC}, \text{ а } \lambda = \frac{BC}{LB} = \frac{AC+BC}{AB}.$$

Тогда

$$g = \frac{c+\lambda l}{1+\lambda} = \frac{c + \frac{AC+BC}{AB}\cdot\frac{BC\cdot a+AC\cdot b}{AC+BC}}{1+\frac{AC+BC}{AB}} = \frac{BC\cdot a + AC\cdot b + AB\cdot c}{AB+BC+AC}.$$

3. Ортоцентр треугольника. Три высоты треугольника пересекаются в данной точке, называемой *ортоцентром* треугольника (рис. 3).

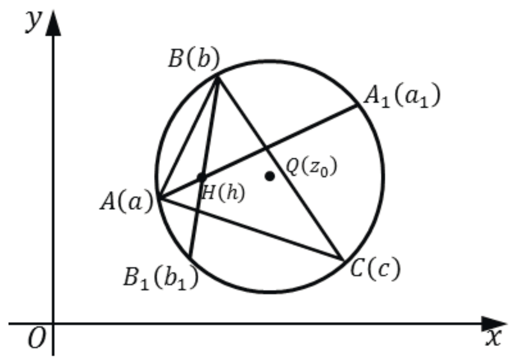


Рис. 3

Задача 3. Докажите, что в любом треугольнике для комплексной координаты ортоцентра справедлива следующая формула

$$h = a + b + c - 2z_0, \tag{3}$$

где z_0 — комплексная координата центра описанной окружности треугольника ABC; a, b, c — комплексные координаты вершин A, B и C треугольника.

Решение. Проведем высоты треугольника. Тогда $H(h)$ — ортоцентр, где h — комплексная координата ортоцентра. Пусть $|z - z_0| = R$ есть уравнение описанной окружности треугольника $\triangle ABC$. Тогда из условия перпендикулярности прямых $AA_1 \perp BC$ и $BB_1 \perp AC$ следуют следующие равенства:

$$(a - z_0)(a_1 - z_0) = -(b - z_0)(c - z_0),$$
$$(b - z_0)(b_1 - z_0) = -(a - z_0)(c - z_0).$$

В свою очередь, $H = (AA_1) \times (BB_1)$ определяется как точка пересечения прямых AA_1 и BB_1. Следовательно,

$$\bar{h} = \bar{z}_0 + \frac{a + a_1 - b - b_1}{(a - z_0)(a_1 - z_0) - (b - z_0)(b_1 - z_0)} = \bar{z}_0 + \left(\frac{a - b}{(a - b)(c - z_0)} + \frac{a_1 - b_1}{(a - b)(c - z_0)}\right) R^2 =$$
$$= \bar{z}_0 + \left(\frac{1}{c - z_0} + \frac{a + b - 2z_0}{a - z_0 + b - z_0}\right) R^2 = \bar{z}_0 + \frac{R^2}{c - z_0} + \frac{R^2}{a - z_0} + \frac{R^2}{b - z_0}.$$

В последнем равенстве переходим к комплексному сопряжению и находим

$$h = z_0 + \frac{R^2}{\bar{c} - \bar{z}_0} + \frac{R^2}{\bar{a} - \bar{z}_0} + \frac{R^2}{\bar{b} - \bar{z}_0} = z_0 + c - z_0 + b - z_0 = a + b + c - 2z_0.$$

Таким образом, $H(h)$ — ортоцентр и $h = a + b + c - 2z_0$.

Следствие 1. Если начало координат O находится в центре Q описанной окружности треугольника ABC, то $h = a + b + c$. Это означает, что в любом треугольнике $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Следствие 2.

$$\overrightarrow{IH} = \{h - g\} = \left(1 - \frac{BC}{2p}\right)\overrightarrow{OA} + \left(1 - \frac{AC}{2p}\right)\overrightarrow{OB} + \left(1 - \frac{AB}{2p}\right)\overrightarrow{OC},$$

где $2p = AB + BC + AC$.

2. Соотношения для расстояний между замечательными точками треугольника

Задача 4. **Важная лемма.** Пусть $Q(z_0)$ центр описанной окружности треугольника ABC, $H(h)$ его ортоцентр, N середина стороны AC (рис. 4). Тогда $BH = 2QN$.

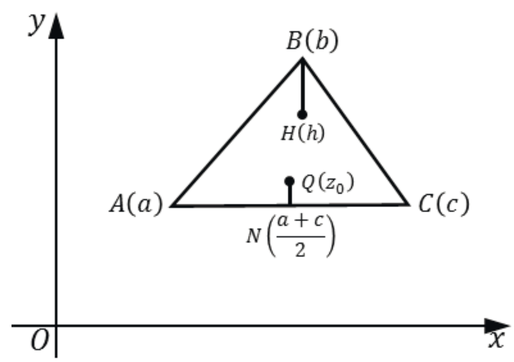


Рис. 4

Находим комплексные координаты векторов $\overrightarrow{BH}$ и $\overrightarrow{QN}$.

$$\overrightarrow{BH} = \{h - b\} = \{a + b + c - 2z_0 - b\} = \{a + c - 2z_0\},$$
$$\overrightarrow{QN} = \{n - z_0\} = \left\{\frac{a+c}{2} - z_0\right\} = \left\{\frac{a+c-2z_0}{2}\right\}.$$

Векторы $\overrightarrow{BH}$ и $\overrightarrow{QN}$ коллинеарны и $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{QN}$. Следовательно $BH = 2QN$.

Задача 5. **Теорема.** Ортоцентр $H(h)$, центр описанной окружности $Q(z_0)$ и точка пересечения медиан $K(k)$ лежат на одной прямой (прямая Эйлера).

Доказательство. Напишем уравнение прямой, проходящей через центроид $K(k)$ и ортоцентр $H(h)$ [1]:

$$(KH)\colon \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \frac{a+b+c}{3} & \frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{3} & 1 \\ a+b+c-2z_0 & \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}-2\bar{z}_0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Если центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой (KH), то его комплексная координата z_0 удовлетворяет уравнению (4). Проверим:

$$\begin{vmatrix} z_0 & \bar{z}_0 & 1 \\ \frac{a+b+c}{3} & \frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{3} & 1 \\ a+b+c-2z_0 & \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}-2\bar{z}_0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_0 & \bar{z}_0 & 1 \\ \frac{a+b+c}{3} & \frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{3} & 1 \\ a+b+c & \bar{a}+\bar{b}+\bar{c} & 3 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Следовательно, все три замечательные точки лежат на одной прямой, т. е. на прямой Эйлера. Теперь докажем векторное равенство $\overrightarrow{QK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KH}$. Находим комплексные координаты векторов $\overrightarrow{QK}$ и $\overrightarrow{KH}$:

$$\overrightarrow{QK} = \{k - z_0\} = \left\{\frac{a+b+c}{3} - z_0\right\} = \left\{\frac{a+b+c-3z_0}{3}\right\}.$$
$$\overrightarrow{KH} = \{h - k\} = \left\{a + b + c - 2z_0 - \frac{a+b+c}{3}\right\} = \left\{\frac{2a+2b+2c-6z_0}{3}\right\}.$$

Откуда следует, что $\overrightarrow{QK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KH}$.

Задача 6. Докажите, что в любом треугольнике (рис. 5)

$$AH^2 + BC^2 = 4R^2,\ BH^2 + AC^2 = 4R^2,\ CH^2 + AB^2 = 4R^2. \tag{5}$$

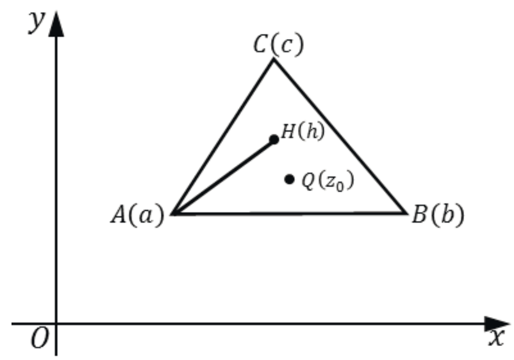


Рис. 5

Решение. $\overrightarrow{AH} = \{h - a\} = \{b + c - 2z_0\}$.

$AH^2 = (b + c - 2z_0)\left(\bar b + \bar c - 2\bar z_0\right) = b^2 + c^2 + \left(b\bar c + \bar b c\right) - 2\left(z_0\bar b + \bar z_0 b\right) - 2\left(z_0\bar c + \bar z_0 c\right) + 4z_0^2 = 4R^2 - BC^2,$

так как $b\bar c + \bar b c = b^2 + c^2 - BC^2$, $b\bar z_0 + \bar b z_0 = b^2 + z_0^2 - R^2$, $z_0\bar c + \bar z_0 c = c^2 + z_0^2 - R^2$.

Таким же образом, аналогично равенству $AH^2 + BC^2 = 4R^2$, доказываются остальные равенства (5).

Задача 7. Докажите, что в любом треугольнике (рис. 6) комплексную координату z_0 центра описанной окружности треугольника ABC можно найти по формуле:

$$z_0 = i\,\frac{OA^2(b - c) + OB^2(c - a) + OC^2(a - b)}{4S_{ABC}} \tag{6}$$

где $i^2 = -1$.

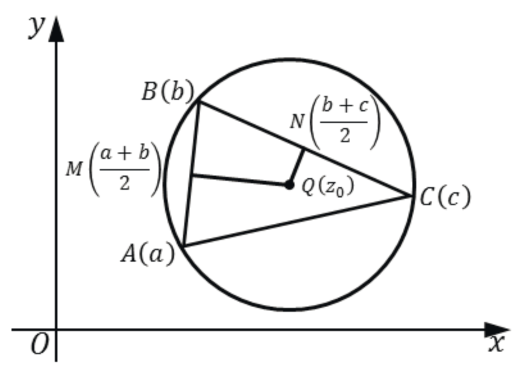


Рис. 6

Решение. Центр описанной окружности z_0 треугольника $\triangle ABC$ находится на пересечении серединных перпендикуляров. Найдем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(a)$ и $B(b)$.

$$(AB)\colon \begin{vmatrix} z & \bar z & 1 \\ a & \bar a & 1 \\ b & \bar b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z(\bar a - \bar b) - \bar z(a - b) + a\bar b - \bar a b = 0.$$

Пусть $M(m)$ и $N(n)$ — середины отрезков $[AB]$ и $[BC]$ соответственно. Тогда

$$m = \frac{a + b}{2} \text{ и } n = \frac{b + c}{2}.$$

Теперь напишем уравнение прямой (MQ), проходящей через точку $M(m)$, перпендикулярно к прямой (AB):

$$(\bar{a}-\bar{b})\left(z-\frac{a+b}{2}\right)+(a-b)\left(\bar{z}-\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\right)=0.$$

Аналогично находим уравнение прямой (BC) и уравнение прямой (NQ), перпендикулярной к (BC):

$$(BC):\ \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow z(\bar{b}-\bar{c})-\bar{z}(b-c)+b\bar{c}-\bar{b}c=0.$$

$$(NQ):\ (\bar{b}-\bar{c})\left(z-\frac{b+c}{2}\right)+(b-c)\left(\bar{z}-\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}\right)=0.$$

Точка пересечения прямых (MQ) и (NQ) определяет центр описанной окружности $Q(z_0)$ треугольника ABC:

$$Q=(MQ)\times(NQ).$$

Комплексную координату z_0 центра описанной окружности находим из решения системы (7):

$$\begin{cases} (\bar{a}-\bar{b})\left(z_0-\frac{a+b}{2}\right)+(a-b)\left(\bar{z}_0-\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\right)=0, \\ (\bar{b}-\bar{c})\left(z_0-\frac{b+c}{2}\right)+(b-c)\left(\bar{z}_0-\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}\right)=0. \end{cases} \tag{7}$$

Систему (7) решим методом Крамера. Для этого из коэффициентов при неизвестных z_0 и $\bar{z}_0$ составим главный определитель системы [2]:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \bar{a}-\bar{b} & a-b \\ \bar{b}-\bar{c} & b-c \end{vmatrix}=\frac{(b-a)(b-c)(c-a)}{(a-z_0)(b-z_0)(c-z_0)}R^2=i4S_{ABC},$$

где

$$i^2=-1 \text{ и } S_{ABC}=\frac{iR^2}{4}\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-z_0)(b-z_0)(c-z_0)}.$$

Составим определитель Δ_z путем замены коэффициентов при z_0 свободными членами

$$\Delta_{z_0}=\begin{vmatrix} \frac{a+b}{2}(\bar{a}-\bar{b})+\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}(a-b) & a-b \\ \frac{b+c}{2}(\bar{b}-\bar{c})+\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}(b-c) & b-c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} |a|^2-|b|^2 & a-b \\ |b|^2-|c|^2 & b-c \end{vmatrix}=|a|^2(b-c)+|b|^2(c-a)+|c|^2(a-b).$$

Откуда

$$z_0=\frac{\Delta_{z_0}}{\Delta}=\frac{|a|^2(b-c)+|b|^2(c-a)+|c|^2(a-b)}{-i4S_{ABC}}.$$

Таким образом,

$$z_0=i\,\frac{OA^2(b-c)+OB^2(c-a)+OC^2(a-b)}{4S_{ABC}}.$$

Задача 8. **(формула Эйлера).** Докажите, что расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника (рис. 7) вычисляется по формуле

$$d^2=R^2-2Rr. \tag{8}$$

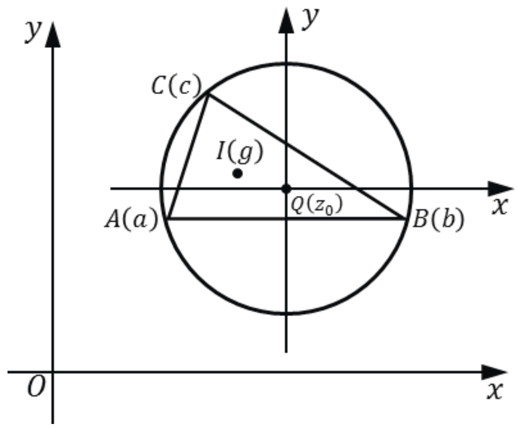


Рис. 7

Доказательство. Декартову систему координат xOy перенесем параллельно в центр описанной окружности треугольника. Оси новой системы координат вновь обозначим через x, y. Тогда $z_0 = 0$.

Замечание. Расстояние между двумя точками инвариантно относительно переноса, т. е. расстояние $|IQ|$ не зависит от выбора системы координат.

Поэтому $|IQ| = |QI| = |g|$, где g вычисляется по (2):

$$|g|^2 = g \cdot \bar{g} = \left(\frac{BC}{2p}a + \frac{AC}{2p}b + \frac{AB}{2p}c\right)\left(\frac{BC}{2p}\bar{a} + \frac{AC}{2p}\bar{b} + \frac{AB}{2p}\bar{c}\right) =$$
$$= \frac{1}{4p^2}\left(BC \cdot 2p|a|^2 + AC \cdot 2p|b|^2 + AB \cdot 2p|c|^2 - 2p \cdot AB \cdot BC \cdot AC\right) =$$
$$= \frac{1}{2p}\left((AB + BC + AC)R^2 - AB \cdot BC \cdot AC\right) = R^2 - 2Rr.$$

Таким образом $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Литература

1. Скопец З.А. Геометрические миниатюры / сост. Г.Д. Грейзер. - М.: Просвещение, 1990. - 224 с.

2. Сагиндыков Б.Ж., Бимурат А. Вписанные и описанные четырехугольники в комплексных числах / Сборник статей международной научно-практической конференции, 12 января 2020, г. Пенза, МЦНС «Наука и просвещение». - С. 11-22.

Сагиндыков Бимурат Жумабекович,
ассоциированный профессор
Satbayev University, Казахстан,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: bimurat55@gmail.com

Способ вычисления логарифмической функции как тема проектного исследования

В. М. Федосеев

В статье показывается, как на основе материала курса математического анализа может быть сконструирован эффективный способ вычисления логарифмической функции, сочетающий дискретный и континуальный подходы к решению задач вычислительной математики. Результаты статьи могут быть рекомендованы в качестве темы проектного исследования по математическому анализу или вычислительной математике.

Обоснование и постановка задачи

Тема «Вычисление значений элементарных функций» в связи с распространённостью калькуляторов в настоящее время в учебных курсах получила некоторое пренебрежение. Однако данная тема, в особенности в случае трансцендентных функций, в силу своей наглядности может послужить источником новых задач, требующих творческого подхода и полезных для овладения методами математического анализа. В качестве примера открывающихся здесь конструктивных возможностей рассмотрим задачу вычисления логарифмической функции и по этому поводу выведем эффективный способ вычислений, совмещающий достоинства континуального и дискретного подходов.

Недостатки методов вычисления значений логарифмической функции, основанных на степенных разложениях, и другие известны [1, 2]. Вместе с тем в математическом анализе есть включающее логарифмы натуральных чисел и потому полезное для целей исследования предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C,$$

в котором число C представляет собой математическую постоянную Эйлера $C = 0{,}57721566490...$ Отсюда для логарифмов натуральных чисел следует содержащее арифметические операции преимущественно с целыми числами достаточно простое асимптотическое выражение

$$\ln n \sim 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-C. \tag{1}$$

В лице правой части формулы (1) получается способ вычисления логарифмов, удобный для практического применения в силу дискретности входящего в его состав выражения. Существенным недостатком данного способа является его пригодность только для натуральных чисел. Тем самым возникает задача построения способа вычисления логарифмов путём распространения уже имеющегося способа в виде формулы (1) на множество действительных чисел.

Подобная постановка задачи, находящейся в общем контексте учебного курса, понятна студенту, указывает направление исследований, оставляя открытыми пути её решения, и потому может быть использована при разработке заданий для проектно ориентированного обучения в духе «конкретной математики» [3].

Улучшение точности исходных формул

Предварительно повысим точность вычисления значений рассматриваемой функции. С этой целью воспользуемся следующим вариантом формулы суммирования Эйлера - Маклорена, записанной для функции $y = \ln x$ [4]

$$\ln n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - C - \frac{1}{2n} + \frac{\theta}{12n^2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

В результате приходим к улучшенному варианту формулы типа (1)

$$\ln n \sim 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - C - \frac{1}{2n} \quad , \tag{2}$$

с оценкой вычислительной погрешности $\Delta < 1/12n^2$.

К тому же, если воспользуемся рядом Тейлора логарифмической функции и следующим разложением

$$\ln(n + 0,5) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \dots,$$

то из него и из формулы (2) найдём следующее промежуточное значение логарифма

$$\ln(n + 0,5) \sim 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - C. \tag{3}$$

Оно в дальнейшем понадобится для построения искомого способа вычисления логарифмической функции.

Анализ остаточного члена упомянутого разложения показывает, что погрешность формулы (3) не превышает величины $1/24n^2$. При этом расчёты по формуле (2) дают заниженное, а по формуле (3) - завышенное значение функции.

Таким образом, в виде формул (2) и (3) найдены исправленные выражения для вычисления значений логарифмической функции на множествах точек: n и $n + 0{,}5$, $n \in \mathbb{N}$. И, если погрешность исходной формулы (1) имеет величину порядка $\frac{1}{2n}$, то при тех же значениях параметров погрешности новых расчётных формул не превышают числа $\frac{1}{12n^2}$.

Способ вычисления логарифмической функции, основанный на дискретно-континуальной аппроксимации

Поставим задачу аппроксимации функции $y = \ln x$ на отрезке $x \in [n; n + 1]$. Для этого построим дробно-линейную интерполяцию на узлах: $n;\ n + 0,5;\ n + 1$, при условии вычисления значений функции по формуле (2) в точках $x = n; n + 1$и по формуле (3) в точке $x = n + 0,5$. После переобозначения параметра $n = [x]$ в результате для $x \geq 1$ получим аппроксимацию логарифмической функции следующего вида

$$\ln x \sim q(x) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{[x]} + (1 - C) - \frac{[x] + 0,5}{x}, \tag{4}$$

где $[x]$ означает целую часть числа x.

Общая оценка точности аппроксимации логарифмической функции (4) следует из теоремы:

Теорема. *Максимальное отклонение аппроксимации $q(x)$ от функцииу $= \ln x$при$x \geq 1$ не превышает величины* $\frac{1}{12[x]^2}$.

Для доказательства определим наибольшее и наименьшее значения функции $\delta(x) = \ln x - q(x)$на отрезке $x \in [[x]; [x] + 1]$. Зная производную данной функции

$$\delta'(x) = \frac{x - [x] - 0,5}{x^2},$$

определяем, что отклонение $\delta(x)$ имеет минимальное значение в середине рассматриваемого интервала. С учётом оценок значений функции $\delta(x)$в точке минимума и на границах интервала заключаем справедливость теоремы.

Убедимся в вычислительной эффективности формулы (4) на примере вычисления логарифмов: $\ln(x_1) = \ln e$ и $\ln(x_2) = e^2$. В этих случаях имеем: $[x_1] = 2, [x_2] = 7$ и после подстановки в формулу (4) найдём:

$$\ln(e) = q(e) = 1 + \frac{1}{2} + (1 - C) - \frac{2 + 0{,}5}{e} = 1{,}0031;$$
$$\ln(e^2) = q(e^2) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + (1 - C) - \frac{7 + 0{,}5}{e^2} = 2{,}00063.$$

Величина погрешности вычислений и динамика её уменьшения с увеличением значения аргумента очевидны.

Найденная аппроксимация $q(x)$ логарифмической функции обладает следующими свойствами:

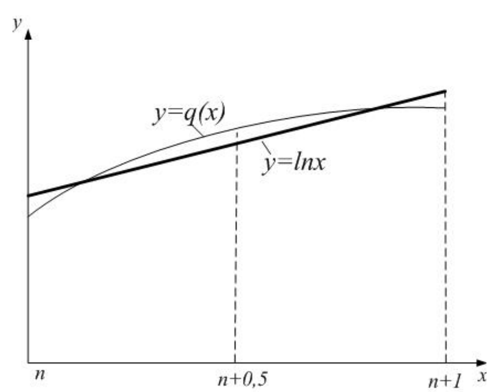
1. $q(x)$ представляет собой конструкцию сплайнового типа из ветвей по отрезкам единичной длины с целочисленными границами; в отличие от других видов сплайнов в данном случае мы имеем общее аналитическое выражение для всех ветвей сплайна на интервале бесконечной длины $[1; \infty]$;

2. в точках стыка значения ветвей сплайна совпадают, поэтому при $x \geq 1$ функция $y = q(x)$ непрерывна;

3. отклонение аппроксимации оценивается неравенством
$$|\ln x - q(x)| \leq \frac{1}{12[x]^2}, \; x \geq 1;$$

4. производная функции $y' = q'(x)$ является кусочно-непрерывной функцией, имеющей конечный разрыв в целочисленных точках, совпадающей с производной логарифма при $x = [x] + 0{,}5$.

Относительное расположение графиков аппроксимации $y = q(x)$ и логарифмической функции на отрезке $x \in [n; , n + 1]$ показано на рис. 1.



Пусть требуется вычислить значение $\ln x$ с точностью ε. Решение задачи способом, основанным на формуле (4), рекомендуется производить следующим образом. Первоначально определяем значение показателя m,удовлетворяющее неравенству $\frac{1}{12m \cdot x^{2m}} < \varepsilon$. Далее по формуле (4) вычисляем значение $q(x^m)$. Теперь с гарантированной точностью ε находим: $\ln x = \frac{1}{m} q(x^m)$.

Литература

1. Люстерник Л.А., Червоненкис О.А., Янпольский А.Р. Математический анализ. Вычисление элементарных функций / Справочная математическая библиотека. - М.: Физматлит, 1963. - 248 с.

2. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. - М.: Мир, 1980. - 608 с.

3. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основания информатики. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. - 703 с.

4. Математический анализ: Функции, пределы, ряды, цепные дроби. Под ред. Люстерника Л.А., Янпольского А.Р. / Справочная математическая библиотека. - М.: Физматлит, 1961. - 440 с.

Федосеев Виктор Михайлович,
преподаватель математики Технологического
Колледжа Пензенского государственного
технологического университета, доцент,
кандидат технических наук,
почётный работник Высшей школы.

E-mail: fedosseev_vik@mail.ru

Как учить университетской математике онлайн?

Никита Калинин

В 2020 году случилась эпидемия коронавируса и многие университеты перешли на онлайн-обучение — чтобы уменьшить число социальных контактов между людьми и тем самым снизить нагрузку на систему здравоохранения. В заметке приведены соображения о том, как учить математиков в таких условиях.

Введение

Переход математического образования в онлайн поневоле

16 марта 2020 года факультет математики и компьютерных наук СПбГУ перешёл на онлайн-обучение по решению руководства факультета: студентам запретили приходить на факультет, иногородним студентам настоятельно рекомендовали уехать к родителям.

Так или иначе, если раньше плюсы и минусы онлайн-образования обсуждали несколько абстрактно, то сейчас вопрос был совершенно другой: нельзя контактировать со студентами, нельзя посещать университет — как тогда учить студентов математике, какие технические средства и методы использовать?

Несмотря на то, что многие зарубежные университеты уже перешли на онлайн-образование, никаких Wunderwaffe в сети найти не удалось. Никто толком не знает, как качественно учить математике онлайн (если это вообще возможно), имеется много текстов с довольно общими советами («будьте в контакте со студентами», «давайте ясно понять, чего вы хотите, какие задания и когда дедлайн»). Редким приятным исключением является живо написанный текст, где собраны все советы, известные человечеству
https://innovate.suny.edu/community/wp-content/uploads/2020/03/Chronicle-Article_CoronaVirus.pdf.

Дальнейший текст является дополнением к нему.

Варианты того, зачем студенты и преподаватель собираются в одном месте (физическом или онлайн)

Чего добивается студент, который подключился к онлайн-лекции и слушает её (или не слушает), чего хочет преподаватель, который подготовил слайды и по ним что-то монотонно рассказывает? Ответы на эти вопросы неочевидны и вряд ли зависят от того, как именно технически организовано обучение. Варианты ответов разнообразны:

- на спецкурсе преподаватель может рассказывать о новейших достижениях человеческой мысли,
- систематизировать свои знания (наличие слушателей мотивирует разбираться лучше),
- искать с помощью спецкурса будущих студентов.

Студент может быть привлечён

- предметом,
- харизмой преподавателя,
- задачами, которые будут сформулированы и которые можно решать,
- необходимостью сдать какое-то количество курсов и студент выбрал самый простой (с его точки зрения).

На обязательном курсе преподаватель может систематически рассказывать общеобразовательные вещи, а студент — смутно верить, что всё рассказываемое когда-то пригодится.

На 3–4 курсе студенты учатся более осознанно — потому что уже лучше представляют, чего хотят от них, и чего хотят они сами. В онлайн-обучении **цель выходит на первое место: если первокурсник не очень понимает, зачем ему читают матанализ или геометрию**, что из рассказываемого нужно знать, как будет проходить экзамен и так далее — ему сложнее сконцентрироваться на лекции, сложнее задать вопрос, если что-то непонятно.

Я попробую сформулировать то, как я понимаю цели лекций, практических занятий и семинаров (многие могут с ними не согласиться). Нелишним будет сказать, что при написании этого текста я впервые задумался о таких вещах, поэтому студентам они тоже могут быть неочевидны.

> Если к вам на онлайн-лекцию приходят вялые студенты, которые ничего не понимают и не задают никаких вопросов, то, наверное, что-то не так с целями — может быть, студенты вообще не понимают, зачем они смотрят лекцию и для чего это им нужно? Может быть они не знают, как будет проходить экзамен и что там будут спрашивать?

Общеобразовательные лекции

На лекциях студенты должны

- следить за ходом мысли преподавателя,
- решать упражнения и задачи, выданные на лекции (только так они могут проверить, что их понимание настоящее, а не кажущееся),
- регулярно (до и после лекции) повторять дома материал, чтобы он запомнился надолго и хорошо уложился в голове. Полезно вести конспект.

Цель: по окончании курса студент должен помнить наизусть все основные теоремы и определения (с мотивацией), сходу уметь доказывать несложные факты, решать упражнения, представлять логическую структуру курса (что из чего следует и какие методы где применяются), и за час-два решать достаточно сложные задачи или восстанавливать по памяти доказательства сложных теорем.

Практические занятия

На практических занятиях студенты должны

- решать задачи,
- тренироваться в рассказе решений, поиске ошибок в них.

Возможные цели: детально разобрать основные примеры, научиться применять общие важные теоремы (выводить из них следствия, возможно, даже не понимая доказательств этих теорем), самостоятельно изучить ответвления от общей темы, которые неуместно рассказывать на лекциях.

Семинары

Студенты должны

- делать доклады и
- участвовать в обсуждении.

Возможные цели: привлечь студентов к обсуждению открытых вопросов, того что важно и неважно в данной области, тренировать студентов делать доклады и воспринимать доклады, совместно разбираться в одной теме в течение довольно продолжительного времени (полгода).

Если студенты и преподаватели осознанно преследуют именно эти (или похожие) цели, то нет никакой разницы, как именно технически проходит обучение. Как только студенты что-то перестают понимать, они задают вопрос, по необходимости просят преподавателя замедлиться или ускориться, делают домашние задания и так далее. Студенты прикладывают усилия в правильном направлении, всё получается (пусть и не сразу). Если целей нет — студенту нечем заняться, он откроет лекцию на youtube о истории династии Цин (курс по Цин сдать надо, но это не профильный курс и вообще всем поставят зачет автоматом) — то велика вероятность, что ничего не запомнится, и что студент переключится на более развлекательный канал, начнёт проверять сообщения в соцсетях, читать новости про коронавирус и пр.

Проблемы оценивания студентов, мотивировки немотивированных, что делать со слабыми студентами, которые ничего не понимают, — я намеренно выношу за скобки (в условиях обычной жизни их надо системно решать, в условиях аврала и карантина заведомо нет ресурсов для их решения).

Чем онлайн-обучение хуже, чем вживую?

Общеизвестно, почему преподавание содержательных курсов по математике сложно делать без физического присутствия студентов. Вы не видите студентов, поэтому не знаете, понимают ли слушатели что-то или нет (и есть ли они вообще), некоторые смотрят вас в записи. Вы не можете писать на доске, вам нужно иметь компьютер и быстрый интернет, на подготовку качественного онлайн-занятия может уходить намного больше времени, чем на обычное занятие. Непонятно, как проводить контрольные и экзамены, как вообще организовать общение со студентами.

Лекции можно записать на видео, но не так интересно (и легко!) читать лекцию в пустой аудитории, где в дальнем конце стоит оператор с камерой и более никого. Если лекции записываются, то слушатели не могут задать вопрос, и при просмотре видео дома многие из них **легко отвлекаются на посторонние дела**, не ведут конспект, материал усваивается хуже.

Поскольку студенты не приходят физически в одно место, пропадает важный элемент образования: общение с сокурсниками, которых раньше можно было спросить как решается та или иная задача, попросить объяснить непонятное место в лекции. Пропадает элемент соревновательности (решить больше задачек на занятии, задать каверзный вопрос преподавателю).

Какие предметы можно выучить онлайн, а какие нельзя?

Мне знакомы (из личного опыта и рассказа коллег) хорошие курсы онлайн: анализ данных, написание технических текстов, машинное обучение, вышивание.

Все эти курсы учат некоторому ремеслу:

- слушатели хотят приобрести вполне конкретные навыки (нужные им уже сейчас),
- имеются внятные домашние задания или проекты (зачастую сложные, но состоящие из большого числа простых шагов),
- обычно легко проверить, насколько хорошо и правильно выполнены домашние задания.

Все эти условия нарушаются при преподавании математики: сложно очертить приобретаемые навыки, задачи имеют огромный разброс по сложности, проверить, правильно ли решение сложной задачи, может быть тяжело даже преподавателю. Получаем следующие выводы:

> Студенты должны понимать, какие именно навыки они вырабатывают и почему это нужно делать самостоятельно (варианты ответа: на экзамене будут спрашивать как связаны между собой разные части курса, а задачи нужно научиться решать самому, потому что для зачёта нужно будет написать контрольные), качество онлайн обучения математики напрямую зависит от того, насколько много личного общения между преподавателем и студентом (например, устный коллоквиум по скайпу, устное общение по поводу задач, ответы на вопросы) — иными словами, устная обратная связь (не все студенты могут отличить правильно решение от неправильного).

Сценарии как можно преподавать онлайн: лекции, семинары и т. п.

В течение недели 16–22 марта 2020 г. занятий не было, тестировались и обсуждались разные способы их проведения. В итоге основной системой был выбран zoom, были куплены 8 платных аккаунтов, и были созданы 8 каналов, которые работали круглосуточно и играли роль виртуальных «аудиторий». В расписании вместо аудиторий указывали id каналов, студенты 1-2 курсов занимались каждый день в одной аудитории (101 для 101 группы, 102 для 102 группы и т. д., лекции первого курса в аудитории 101), чтобы минимизировать путаницу (id 101 комнаты не менялся на протяжении всего семестра). Студенты 3-4 курсов и магистры занимались в разных аудиториях, поскольку большинство предметов по выбору. Расписание онлайн-занятий осталось идентичным расписанию, которое было запланировано на семестр. Всё происходящее в каналах автоматически записывалось в облако, затем секретари нарезали файлы в полуавтоматическом режиме и выкладывали их в закрытые каналы на youtube, где студенты могли их пересматривать.

Лекции

- Имелись лекции 1–2 курсов прошлых лет, записанные Лекториумом (https://www.lektorium. tv), поэтому некоторые лекторы спешно записали (с операторами Лекториума) те лекции, которые логически подводили рассказанный на 15 марта материал к уже записанным прошлогодним курсам, предоставили студентам ссылки на видео прошлых лет и электронные конспекты. Многие спецкурсы записываются Лекториумом, поэтому преподаватели по возможности записывали несколько следующих лекций сразу. Затем, в режиме онлайн, на паре по расписанию — лекторы отвечали на вопросы, которые задавали им слушатели (просмотревшие видео лекций или прочитавшие электронный конспект).
- Лектор пишет конспект (или слайды) к лекции (в TEXe), и заранее высылает его студентам, а потом, во время пары, показывает его на экране и комментирует, студенты могут заранее ознакомиться с конспектом, и могут задать более осмысленные вопросы во время обсуждения сложных мест.
- Лектор заранее пишет стилосом на планшете конспект лекции (или крупным почерком на листах А4, затем сканирует), затем во время онлайн-лекции делает пометки (мышкой или стилосом).

  За исключением случая, когда есть видео-запись лекций прошлого года и электронный конспект к ним, преподавателю приходится тратить существенно больше времени на подготовку онлайн-занятий.

Семинары

Семинары довольно удобно проводить в Skype или zoom — докладчик демонстрирует экран, на котором показывает слайды или пишет стилосом по планшету. Возможны и менее технологичные решения: закрепляется смартфон, ставится правильное освещение, и докладчик пишет на маркерной доске или даже просто ручкой на большом бумажном листе, камера телефона транслирует изображение слушателям. Слушателям рекомендуется иногда делать printscreen, чтобы иметь возможность пересмотреть слайды или записи, которые были на видео несколько минут назад. Семинары легче всего переносятся онлайн.

Практические занятия

Можно

- заранее записывать разбор задач (стилосом на планшете, или камерой телефона снять преподавателя, пишущего на доске или ручкой на бумаге), студентам заранее сообщаются задачи, они их дома самостоятельно решают, потом получают видео с решениями, и их смотрят.
- Иметь конспект всего того, что происходит на практике (2 страницы в TEXe) с основными идеями и примерами (выдавать студентам за несколько дней до пары).
- В zoom имеется техническая возможность разбивать пришедших студентов на маленькие группы по 3–4 человека, и дальше каждая группа общается в своём канале, устно обсуждая, как решать задачи, преподаватель может перемещаться между группами и давать подсказки. Если принять за аксиому, что студенты должны решать задачи во время занятия, то видео с разбором задач и ответами на вопросы студентов надо записывать после занятия, а не до.
- Не проводить практических занятий, а выдать студентам задачи, и потом проверять решения, написанные в TEXe и присланные по почте.

- В начале занятия показать пару слайдов, напоминая теоретический материал, потом сказать студентам решать задачи, фотографировать и посылать их на почту. Когда надо студента «вызвать к доске», на экран выводится его присланное решение и студент по аудиоканалу в zoom комментирует это решение.

  Полезно устраивать опросы-контрольные (или домашние задания) с простыми вопросами на понимание. Чтобы демотивировать списывание, такой опрос засчитывается, если сдан, вне зависимости от количества правильных ответов.

Экзамены

В онлайн-преподавании довольно сложно удостовериться, что письменную работу выполнил конкретный студент, а не кто-то другой. Существуют различные системы прокторинга, когда специально обученные люди наблюдают через вебкамеру за тем, что студент делает, студенты до экзамены должны показать, что на столе ничего нет, в комнате никого нет, необходимо установить специальные программы, которые запрещают выводить на экран что-то, кроме окна с экзаменационными вопросами, и так далее. Прокторинг не всем подходит: студенты, которые у нас учатся, ни в какой момент заранее не соглашались на подобного рода вторжение в личную жизнь. Более того, необходимо быть готовым поставить студенту плохую оценку, если у студента отключился звук или пропало видео (мы были не готовы). Ещё хуже, для студентов, которые обучаются на программистов, обмануть компьютерную прокторинговую систему (это возможно) может быть уже вопросом профпригодности.

Поэтому экзамены у нас были устные. Типичный экзамен выглядел так: студент получает билет, самостоятельно готовится в течение часа, потом в течение часа беседует с преподавателем, а если претендует на "5", то получает ещё час на решение задачи. Были случаи, когда у студентов "не работала камера" и можно было уловить голос "суфлёра", в этом случае преподаватель мог либо потребовать найти камеру, либо уйти с двойкой. Если есть подозрение, что присутствует суфлёр, можно быстро задавать простые вопросы. На коммуникацию с суфлёром уходит довольно много времени, студент не отвечает на простые вопросы, закономерно получает два и уходит. Были и честные студенты, которые за час не смогли разобраться в своём вопросе или не могли ответить на простые дополнительные вопросы. В целом, от обычного устного экзамена это отличалось мало, за исключением того, что преподаватели не могли слушать одновременно нескольких студентов, поэтому потраченное на приём экзаменов время увеличилось в 2-3 раза.

Как можно было бы сделать онлайн-курс по математике

Мне кажется, онлайн-курс по математике гораздо ближе к книге, чем к лекциям. Иначе говоря, онлайн-курс по математике должен состоять из коротких (10-15 минут, большинство не может в домашних условиях сконцентрироваться на более длинных видео) роликов, которые перемежаются вопросами на понимание и задачами. Та же книга, только с видео вместо текста. Правильность решения тривиальных упражнений никем не проверяется и остаётся на совести обучающегося (как и упражнения из книги). Более нетривиальные задачи проверяются посредством peer-review — другие студенты курса их читают (узнавая новые для себя решения). Не возбраняется решать задачи вместе, искать решения в интернете и так далее, потому что проконтролировать это невозможно. Вместе с тем, необходимо подчёркивать необходимость самостоятельного решения как можно бóльшего числа задач, и то, что нельзя сдавать решения задач, не разобравшись в них (если угодно, это профессиональная этика математиков). В конце курса должен быть устный экзамен (или письменный, но очный), на котором сходу нужно уметь решать задачи из курса и рассказывать доказательства из курса. Должны быть консультации, на которых преподаватель отвечает на вопросы по курсу и выдаёт подсказки к задачам, например, раз в две недели. Ровно так я собираюсь устроить спецкурс по теории гомологий в осеннем семестре 2020г.

https://stepik.org/course/75311/promo

Полезные приёмы при преподавании онлайн

Голь на выдумки хитра.
Нужда ум острит.

Здесь мы приводим различные технически несложные действия, которые могут существенно улучшить онлайн-преподавание-и-обучение (будучи уместно и своевременно применёнными).

Лекции и семинары, слушатели и рассказчики

- Параллельно занятию открыть google-документ, где все слушатели могут писать вопросы и отвечать на них, докладчик семинара (или лектор) тоже может туда периодически заглядывать. Таким образом, в дополнение к визуальному каналу появляется ещё быстро меняющийся документ, где участник, который что-то пропустил или недопонял, может это спросить у остальных.
- Объяснить студентам, как будет проходить экзамен, что они должны понимать, зачем всё это надо, и что делать, если не понимаешь. Спросить, что изменить в организации занятий, чтобы это им позволило легче достичь поставленных целей (менять при этом не обязательно, если студенты хотят какую-нибудь дичь). Хорошо бы со студентами обсудить их образовательные цели и как их достичь (например, напомнить, что надо делать дз, желательно вести конспект даже к лекциям, где есть слайды, и конспект иногда пересматривать).
- Сфокусируйтесь на том, что студенты должны изучить, а не на том, что вы хотите или можете преподать.
- Чтобы мотивировать студентов понять, что они понимают или не понимают в курсе, можно давать домашние контрольные, состоящие из простых вопросов на понимание, устраивать опрос студентов на тему «укажите самый простой факт из курса, который вы не понимаете».
- Готовьте электронные конспекты лекций и заранее высылайте их студентам. Включайте камеру — студентам может быть важно видеть ваше лицо, а не только слышать голос.
- Слушайте студентов. Задавайте вопросы и терпеливо ждите ответов.

Административная активность

- Необходимо мониторить, не перегружены ли студенты (и какие методы преподавателей им подходят лучше всего). Преподаватели ставят дедлайны на одну неделю, считают, что у студентов больше времени (раз всё онлайн), студентам в новых условиях сложнее концентрироваться, поэтому они вообще ничего не делают, отчаиваются и уходят в депрессию.
- Скажите студентам, что нельзя заниматься другими делами во время лекции. Надо сидеть и не отвлекаться. Либо поставить на паузу (если смотрят видео). Либо размышлять о связях с другими частями курса. Скажите студентам, что́ самое главное они должны извлечь из курса (например, решать много задач в первую очередь).
- Все материалы, расписание, ссылки должны храниться в одном месте, чтобы студентам не приходилось полчаса искать какой-то материал.

Практические занятия, домашние работы, экзамены

- Проверку домашнего задания можно осуществить силами самих студентов — нужно указать, кто что проверяет, и предоставить пример правильно решённых заданий. Для студентов старше первого курса уже не должно быть проблемой отличить правильное решение от неправильного (для несложных задач). Сложные задачи должен проверять преподаватель.
- По окончании практического занятия каждый студент должен скинуть на почту (или туда, где централизованно происходит общение студентов и преподавателей — у нас был slack, но это может быть и Microsoft Teams) преподавателю решения задач, которые прошли на практике.
- На первой неделе онлайн-обучения должно быть простое обязательное домашнее задание, чтобы оттестировать связь.

- Текст с формулами в TEXе можно писать в форме для вопроса тут:

  https://mathoverflow. net/questions/ask

  (и раздавать этот экран студентам). Всё мгновенно компилируется ниже в окне просмотра.
- Контрольные, кажется, провести невозможно (студенты будут списывать). Либо индивидуальные дз, либо на маленькие группы. Вариант на время карантина: зачёт ставится по итогам устной беседы, студенты должны сходу уметь решать всё, что было пройдено на практике, и отвечать на похожие несложные вопросы.
- Если экзамен устный — можно провести его по скайпу, скажем, час беседуя с каждым студентом и в непринуждённой беседе выясняя, что тот знает. Студент может закрепить телефон и транслировать то, как он пишет ручкой на большом листе.

Полезные приёмы при обучении онлайн

- Во время занятия слушателям стоит иногда делать printscreen, чтобы можно было пересмотреть предыдущие слайды, страницы доклада или доску, исписанную формулами.
- Несмотря на наличие электронного конспекта и видео лекций, ведите свой конспект (ручкой по бумаге), возможно, в другом формате (после просмотра лекции, например) — план-схема курса, основные определения и следствия из них, или список основных идей доказательств, или список того, что не поняли, с последующим выяснением.
- Разделите время на учебное и неучебное. В учебное время не позволяйте себе отвлекаться (помогает переодеться в другую одежду и заниматься подальше от кровати, за одним и тем же столом), попросите близких не отвлекать вас. В неучебное время — отдыхайте, не учитесь, общайтесь с друзьями и родственниками. Разграничьте пространства — на зоны для учёбы и зоны для отдыха.
- Занимайтесь спортом, дышите свежим воздухом, ограничьте просмотр новостей и социальных сетей. Хорошо питайтесь. Ведите дневник (электронный или бумажный, только для себя), пишите туда, что тревожит.
- Когда хотите что-то нарисовать — рисуйте на бумаге, потом фотографируйте на телефон (на многих телефонах есть режим сканирования, который автоматически сделает фотографию чёрно-белой и чёткой), и показывайте фотографию преподавателю или сокурсникам.
- Простые лекции можно слушать на убыстренной скорости или в наушниках во время приготовления еды. На двух мониторах можно смотреть параллельно лекцию и конспект к ней.
- Trello помогает в ведении заметок и списков дел. Mind mapping работает хорошо для лучшего усвоения материала. Организуйте себе расписание (в Trello, любой другой программе, или просто на бумаге, что обычно эффективнее всего).
- Печатайте материалы на принтере. Во время занятий может быть полезно что-то делать руками (тренькать на гитаре, мять эспандер, рисовать).
- Лекции, которые надо прослушать или записать в режиме оффлайн, надо смотреть в тот же день и не откладывать, потому что иначе они могут начать накапливаться. Надо посещать все пары и делать всё домашнее, которое успеваешь сделать, не расстраиваться, если что-то не удалось успеть, но стараться спланировать, чтобы успеть как можно больше. Если непонятно, то задавать вопросы. Если задать достаточно вопросов, то всё можно очень хорошо понять. Реально обычно требуется не так уж и много вопросов.
- Использовать карточки для заучивания теории при помощи Anki. Разбивать теорию на мелкие карточки с одним утверждением или теоремой и повторять их с увеличивающимися интервалами, обнуляя текущий интервал, если не помнишь карточку. Это очень медленно и трудозатратно, но те материалы, которые есть на карточках, запоминаются.

Взгляд со стороны студентов: онлайн — сложнее

Большой проблемой является то, что обучение онлайн очень похоже на самообучение, значит, требует большой самодисциплины. Прямые методы внедрения дисциплины: небольшие еженедельные задания с жёстким дедлайном. Рефлексивные домашние задания («укажите на самую простую теорему из курса, которую вы не поняли»), советы («нарисуйте mindmap курса»). Всё это уже обсуждалось выше.

Типичные проблемы, с которыми столкнулись наши студенты (из результатов опроса). Часть проблем связана с обучением онлайн, часть — с введённым карантином и общей тревожностью.

- Очень мало практики, очень много уходит на разбор самим, большинство практических занятий превратились в лекции по задачам (разбор решений).
- Не хватает живого общения (очень многим). Скучно, чувство одиночества, тоски.
- Вечером сильно устают глаза от сидения перед экраном.
- Сильно выросла нагрузка (дедлайны по листочкам в одно время, нужно просмотреть видео лекции, потом на пару прийти вопросы задавать, на практиках надо сначала самому решать задачи, потом на паре смотреть их разбор).
- Преподаватели заранее готовят конспект лекций и по нему рассказывают, в итоге рассказывают в два раза больше, чем раньше (и темп практик тоже существенно растёт, потому что преподавателю не надо на доске писать).
- Студенты опаздывают на пары, поэтому они начинаются позже и меньше проходят (если это те же пары, что и пунктом выше — то, может и ладно)
- Некоторым (совсем немногим) студентам совершенно нормально учиться онлайн. Некоторые (каждый пятый) говорят, что стало намного хуже и сложнее.
- Студентов очень расстраивает, когда у преподавателей плохо работает интернет или камера, спрашивают, почему МКН не обеспечил всех преподавателей качественными планшетами, стилосами и быстрым интернетом.
- Студенты просят больше ссылок на литературу (чтобы её можно было читать с электронных книжек — от них меньше глаза устают).
- У некоторых студентов плохой интернет, поэтому хорошо, что есть видео-записи занятий.

Калинин Никита Сергеевич,
доцент СПбГУ, с.н.с. НИУ ВШЭ СПб,
Ph.D. in Mathematics в университете Женевы.

E-mail: nikaanspb@gmail.com

К свойствам определителя Вронского

А. В. Неклюдов

Рассматривается вопрос о достаточных условиях линейной зависимости системы функций в терминах определителя Вронского этой системы. Указываются дополнительные условия, при которых система скалярных функций, обладающая тождественно нулевым на интервале вронскианом, является линейно зависимой на нем. Получены простые условия, обеспечивающее линейную зависимость в терминах вронскиана меньшего порядка или постоянства ранга матрицы Вронского. Рассмотрен также случай вещественно-аналитических функций.

1. Введение

При изложении раздела «Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка» курса обыкновенных дифференциальных уравнений фундаментальную роль играют две теоремы о вронскианах: теорема о тождественном равенстве нулю вронскиана системы линейно зависимых (на некотором интервале) функций и теорема о необращении в ноль ни в одной точке данного интервала вронскиана системы линейно независимых частных решений однородного линейного дифференциального уравнения. В связи с первой из теорем обращается внимание на тот факт, что обратное утверждение неверно, что подтверждается примером линейно независимых функций, вронскиан которых равен нулю на всем заданном интервале. Например, рассматриваются функции $y_1(x) = x^3,\ y_2(x) = |x|^3$ и т. п. Подобные контрпримеры оставляют впечатление некоторой искусственности из-за «склееннoсти» одной из функций. Эта искусственность является тем не менее типичной и даже в некотором смысле неизбежной для таких примеров.

В связи с этим возникает вопрос — какие дополнительные условия нужно наложить на систему скалярных функций с нулевым на интервале вронскианом, чтобы они заведомо были линейно зависимы? В популярных учебниках, например [1–8], этот вопрос или не затрагивается вообще или лишь какие-то отдельные его аспекты выносятся как задачи для самостоятельного решения [9].

Легко видеть, что система двух функций, вронскиан которой на некотором интервале тождественно равен нулю, и одна из которых не обращается в ноль ни в одной точке интервала, является линейно зависимой. Действительно, для такой пары функций y_1, y_2, где $y_1 \neq 0$, имеем $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0$ на данном интервале, откуда немедленно следует их линейная зависимость на этом интервале. Отметим, что уже для системы трех функций $y_1,\ y_2,\ y_3$ с нулевым вронскианом условие $y_1 \neq 0$ не влечет линейную линейную зависимость. Приведем пример, идея которого принадлежит А. Ю. Аникину. Функции $y_1 = x^4 + 1,\ y_2 = 2x^4 + 1,\ \ y_3 = \begin{cases} x^4 + 1,\ x < 0 \\ 2x^4 + 1,\ x \geqslant 0 \end{cases}$ имеют вронскиан, тождественно равный нулю на всей вещественной прямой, не обращаются в ноль ни в одной точке, но при этом линейно независимы на прямой. Далее будет показано, что условие линейной зависимости системы функций с нулевым вронскианом может формулироваться в терминах вронскиана меньшего порядка или, в более общем варианте, в терминах ранга матрицы Вронского

Вронскиан системы скалярных функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ будем традиционно обозначать через $W[y_1,\, y_2, \ldots, y_n] = W(x)$, соответствующую матрицу будем называть матрицей Вронского и обозначать через $\mathbf{W}[y_1,\, y_2, \ldots, y_n]$:

$$W[y_1,\, y_2, \ldots, y_n] \equiv W(x) \equiv \det \mathbf{W}[y_1,\, y_2, \ldots, y_n] \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Будем предполагать,что функции $y_1(x),\, y_2(x), \ldots, y_n(x)$ $\ n-1$ раз непрерывно дифференцируемы на рассматриваемом интервале.

2. Линейная зависимость в случае ненулевого вронскиана порядка $n-1$

Теорема 1. *Пусть функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$1. W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = 0 \text{ для всех } x \in (a,b); \; 2. W[y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}] \neq 0 \text{ для всех } x \in (a,b).$$

Тогда функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на (a,b), причем функция y_n является линейной комбинацией функций $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.

Доказательство 1. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение порядка $n-1$:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_{n-1} & y \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_{n-1}' & y' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_{n-1}^{(n-1)} & y^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0,$$

относительно $y(x)$, старший коэффициент которого $W[y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}] \neq 0$ на (a,b).

Очевидно, что функции $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ образуют его фундаментальную систему решений, y_n — также его решение, поэтому $y_n = c_1y_1 + \ldots + c_{n-1}y_{n-1}, \; c_1, \ldots, \; c_n = const$, что и доказывает теорему.

Покажем, что теорема 1 может быть доказана и без использования теории линейных дифференциальных уравнений.

Доказательство 2. Минор $W[y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}]$ является базисным для матрицы Вронского $\mathbf{W}[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ для каждого фиксированного $x \in (a,b)$, поэтому существуют такие (очевидно дифференцируемые, поскольку могут быть выражены по правилу Крамера из набора первых $(n-1)$-го уравнений нижеприведенной системы) функции $c_1(x), \; c_2(x), \; \ldots, \; c_{n-1}(x)$, что на (a,b) справедливы равенства

$$\begin{cases} y_n = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \ldots + c_{n-1}(x)y_{n-1}(x) \\ y_n' = c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2' + \ldots + c_{n-1}(x)y_{n-1}'(x) \\ y_n'' = c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2'' + \ldots + c_{n-1}(x)y_{n-1}''(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(n-2)} = c_1(x)y_1^{(n-2)} + c_2(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + c_{n-1}(x)y_{n-1}^{(n-2)}(x) \\ y_n^{(n-1)} = c_1(x)y_1^{(n-1)} + c_2(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + c_{n-1}(x)y_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{cases}.$$

Дифференцируя каждое уравнение, кроме последнего, и вычитая следующее за ним, получаем, что

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + \ldots + c_{n-1}'(x)y_{n-1}(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + \ldots + c_{n-1}'(x)y_{n-1}'(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'' + c_2'(x)y_2'' + \ldots + c_{n-1}'(x)y_{n-1}''(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)} + c_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + c_{n-1}'(x)y_{n-1}^{(n-2)}(x) = 0 \end{cases}.$$

Так как $W[y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}] \neq 0$ на (a,b), то $c_1'(x) = c_2'(x) = \ldots = c_{n-1}'(x) = 0$, откуда немедленно вытекает линейная зависимость функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Доказательство завершено.

Очевидно, что при выполнении условий теоремы 1 ранг матрицы Вронского постоянен. В приведенном выше примере двух линейно независимых функций $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = |x|^3$ с тождественно нулевым вронскианом матрица Вронского, напротив, меняет ранг. Ранг равен единице во всех точках кроме нуля и равен нулю в точке ноль. В приведенном также во введении примере трех линейно независимых функций с нулевым вронскианом также в точке ноль меняется ранг матрицы Вронского: в нуле он равен единице, в остальных точках ранг равен двум. Далее будет показано, что именно постоянство ранга вырожденной матрицы Вронского является достаточным условием линейной зависимости функций.

3. Некоторые вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть* $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \equiv 0$ *на* (a, b). *Тогда функции* $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *линейно зависимы на некотором интервале, содержащемся в* (a, b).

Доказательство. Докажем лемму индукцией по n. При $n = 1$ утверждение верно. Пусть оно верно для числа функций меньше n. Если $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \equiv 0$ и $W[y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}]$ не равен тождественно нулю на (a, b), то по теореме 1 функции $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$линейно зависимы на любом интервале знакопостоянства $W[y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}]$. Если $W[y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}] \equiv 0$ на (a, b), то функции $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_{n-1}(x)$ линейно зависимы по предположению индукции. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть для всех* $x \in (a, b)$ *выполняется условие*

$$0 < \operatorname{rang} \mathbf{W}[y_1, y_2, ..., y_n] = k < n.$$

Тогда для некоторого набора k *функций из* $y_1, y_2, ..., y_n$ *их вронскиан не равен тождественно нулю на* (a, b).

Доказательство. Если $k = 1$, то очевидно, что утверждение леммы верно, в противном случае все функции $y_1, y_2, ..., y_n$ были бы тождественно равны нулю, что имеет место только при $k = 0$. Пусть $k > 1$. Предположим, что все вронскианы вида $W[y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_k}]$ тождественно равны нулю. Очевидно, что должен быть отличен от тождественного нуля хотя бы один из вронскианов порядка j для некоторого $j = 1, ..., k-1$, в противном случае все функции $y_1, y_2, ..., y_n$ были бы тождественно равны нулю. Пусть, например, не равен тождественно нулю вронскиан $W[y_1, y_2, ..., y_j]$, при этом вронскианы $W[y_1, y_2, ..., y_j, y_i]$ для всех $i = j+1, ..., n$ тождественно равны нулю. Тогда в силу теоремы 1 каждая из функций $y_{j+1}, y_{j+2}, ..., y_n$ линейно выражается через $y_1, y_2, ..., y_j$ на любом интервале знакопостоянства $W[y_1, y_2, ..., y_j]$. Тогда очевидно, что $\operatorname{rang}\mathbf{W}[y_1, y_2, ..., y_n] = j < k$ на этом интервале, что противоречит условию теоремы. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $0 < \operatorname{rang} \mathbf{W}[y_1, y_2, ..., y_n] = k < n$ *на* (α, β), $\alpha < \gamma < \beta$. *Пусть для всех* $j = k+1, ..., n$ *справедливы равенства*

$$y_j = \sum_{i=1}^{k} c_{ij} y_i \text{ на } (\alpha, \gamma), \ \ c_{ij} = \text{const}, \ \ (1) \ \ y_j = \sum_{i=1}^{k} \tilde{c}_{ij} y_i \text{ на } (\gamma, \beta), \ \ \tilde{c}_{ij} = \text{const}. \ \ (2)$$

Тогда функции $y_1, y_2, ..., y_n$ *линейно зависимы на интервале* (α, β).

Доказательство. По непрерывности получаем, что оба равенства (1), (2) выполнены и в точке γ. Дифференцируя их, получаем, что все столбцы, начиная с $(k+1)$-го, матрицы Вронского в точке γ линейно выражаются через первые k столбцов. Таким образом, первые k столбцов линейно независимы, в противном случае ранг матрицы Вронского был бы меньше k. Тогда представление любого столбца, начиная с $(k+1)$-го через первые k столбцов в точке γ единственно, т.е. $c_{ij} = \tilde{c}_{ij}$. Таким образом функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно зависимы на (α, β). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $0 < \operatorname{rang} \mathbf{W}[y_1, y_2, ..., y_n] = k < n$ *на* (α, β), $\alpha < \gamma < \beta$. *Пусть для всех* $j = \kappa + 1, \ldots, n$ *справедливы равенства*

$y_j = \sum\limits_{i=1}^{k} c_{ij} y_i$ *на* (α, γ), $c_{ij} = const.$

Тогда существует $\tilde{\gamma} \in (\gamma, \beta)$, *такое что определитель Вронского* k*-го порядка* $W[y_1, \ldots y_k]$ *не может тождественно обращаться в ноль ни на одном интервале, содержащемся в* $(\gamma, \tilde{\gamma})$.

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 3 получаем, что первые k столбцов определителя Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ в точке γ линейно независимы. Тогда некоторый минор k-го порядка M_k матрицы V_k, образованной этими k столбцами, отличен от нуля в точке γ и, следовательно, в некоторой ее правой окрестности $(\gamma, \tilde{\gamma})$. Предположим, что $W[y_1, \ldots y_k] \equiv 0$ на некотором интервале $(p, q) \subset (\gamma, \tilde{\gamma})$. Согласно лемме 1 $y_1, \ldots,$ y_k линейно зависимы на некотором интервале $(p_1, q_1) \subset (p, q)$.

Тогда очевидно, что любой минор порядка k матрицы V_k тождественно равен нулю на (p_1, q_1), т.е. $M_k \equiv 0$ на (p_1, q_1). Получено противоречие. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $0 < \operatorname{rang} \mathbf{W}[y_1, y_2, ..., y_n] = k < n$ *на* (α, β), $\alpha < \gamma < \beta$. *Пусть для всех* $j = \kappa + 1, \ldots, n$ *справедливы равенства*

$y_j = \sum\limits_{i=1}^{k} c_{ij} y_i$ *на* (α, γ), $c_{ij} = const.$

Тогда функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *линейно зависимы на некотором интервале вида* $(\alpha, \tilde{\gamma})$, *где* $\tilde{\gamma} > \gamma$, *причем на этом интервале также выполнены равенства* $y_j = \sum\limits_{i=1}^{k} c_{ij} y_i$ *для всех* $j = \kappa + 1, \ldots, n$.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Пусть справа от точки γ находится интервал знакопостоянства $(\gamma, \tilde{\gamma})$ вронскиана k-го порядка $W[y_1, ..., y_k]$. Тогда по теореме 1 функции y_j, $j = k+1, \ldots, n$, являются линейными комбинациями функций $y_1, ..., y_k$ на $(\gamma, \tilde{\gamma})$. Про лемме 3 функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на $(\alpha, \tilde{\gamma})$, причем $y_j = \sum\limits_{i=1}^{k} c_{ij} y_i$ на $(\alpha, \tilde{\gamma})$. В этом случае утверждение леммы доказано.

2. Пусть в любой правой окрестности точки γ вронскиан k-го порядка $W[y_1, ..., y_k]$ меняет знак бесконечное число раз. Тогда в этой окрестности существует бесконечная последовательность интервалов знакопостоянства для $W[y_1, ..., y_k]$. Для любых двух смежных интервалов знакопостоянства выполнены условия леммы 3, следовательно функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на объединении этих двух интервалов. Аналогично рассматривая соседние интервалы, получим линейную зависимость на всем объединении счетного числа таких интервалов, то есть в некоторой правой окрестности точки γ. Снова применив лемму 3, получим, линейную зависимость функций на интервале $(\alpha, \tilde{\gamma})$ для некоторого $\tilde{\gamma} > \gamma$.

Поскольку по лемме 4 интервалов тождественного обращения $W[y_1, ..., y_k]$ в ноль не может существовать в некоторой правой окрестности точки γ, то случаи 1) и 2) исчерпывает все возможные варианты поведения $W[y_1, ..., y_k]$ в такой окрестности точки γ. Таким образом, лемма полностью доказана.

Замечание. Аналогично доказывается возможность продолжения интервала линейной зависимости слева от точки α.

4. Линейная зависимость при постоянном ранге матрицы Вронского

Теорема 2. *Пусть для функций* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *для всех* $x \in (a, b)$ *выполняется условие* $\operatorname{rang} \mathbf{W}[y_1, y_2, \ldots, y_n] \equiv k < n$. *Тогда функции* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *линейно зависимы на* (a, b).

Доказательство. Если $k = 0$, то очевидно, что утверждение теоремы справедливо. Пусть $k > 0$. Тогда по лемме 2 один из вронскианов порядка k не равен тождествено нулю, например $W[y_1, y_2, \ldots, y_k]$, причем все вронскианы порядка больше k тождественно равны нулю на (a, b). Тогда в силу теоремы 1 на любом интервале (a_1, b_1) знакопостоянства $W[y_1, y_2, \ldots, y_k]$ функции $y_1, \ldots, y_n$ линейно зависимы, причем $y_{k+1}, \ldots, y_n$ линейно выражаются через $y_1, \ldots, y_k$. Тогда по лемме 5 и замечанию к ней интервал линейной зависимости (a_1, b_1) можно продолжить вправо и влево на некоторый интервал (a_2, b_2), причем все функции линейно выражаются через $y_1, \ldots, y_k$. Продолжая далее этот процесс, получим последовательность интервалов (a_m, b_m). Если на некотором шаге $b_m = b$, то процесс продолжения интервала линейной зависимости вправо завершен. Если $b_m \to \tilde{b} < b$, $m \to \infty$, то по лемме 5 интервал линейной зависимости можно продолжить в некоторую правую окрестность точки $\tilde{b}$. Продолжая далее этот процесс, получим некоторую точку $\tilde{\tilde{b}} = \sup \tilde{b}$, где верхняя грань берется по всем правым концам интервалов линейной зависимости. Функции линейно зависимы на интервале $(a_1, \tilde{\tilde{b}})$. Если $\tilde{\tilde{b}} < b$, то продолжая интервал линейной зависимости вправо от $\tilde{\tilde{b}}$, получим противоречие с определением $\tilde{\tilde{b}}$. Аналогично доказывается, что интервал линейной зависимости можно продолжить влево от точки a_1 вплоть до точки a. Таким образом, теорема доказана.

5. Случай аналитических функций

Несколько другой подход к получению достаточных условий линейной зависимости функций основан на том, что вещественно-аналитическая на интервале функция (т.е. разлагающаяся в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$ в окрестности любой точки x_0 этого интервала), равная нулю на некотором его внутреннем интервале, равна нулю и на всем интервале своей аналитичности. В качестве задачи для самостоятельного решения нижеприведенный результат приводится в классическом учебнике [9].

Теорема 3. *Пусть вещественно-аналитические на (a, b) функции $y_1,\, y_2,\, \dots, y_n$ удовлетворяют условию $W[y_1,\, y_2,\, \dots, y_n] = 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда функции $y_1,\, y_2,\, \dots, y_n$ линейно зависимы на (a, b).*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n. При $n = 1$ утверждение, очевидно, справедливо. Предположим, что оно верно для числа функций, равного $n-1$. Пусть $W[y_1,\, y_2,\, \dots, y_n] = 0$ тождественно на (a, b). Если при этом вронскиан $(n - 1)$-го порядка $W[y_1, ,\, \dots, y_{n-1}]$ не равен тождественно нулю на (a, b), то в силу теоремы 1 функции $y_1,\, y_2,\, \dots, y_n$ линейно зависимы на интервале знакопостоянства этого вронскиана. Тогда из аналитичности функций $y_1,\, y_2,\, \dots, y_n$ следует их линейная зависимость на всем интервале (a, b). Если же $W[y_1,\, y_2,\, \dots, y_{n-1}] \equiv 0$ на (a, b), то функции $y_1,\, y_2,\, \dots, y_{n-1}$ линейно зависимы на (a, b) по индуктивному предположению. Тогда и функции $y_1,\, y_2,\, \dots, y_n$ линейно зависимы на(a, b). Теорема доказана.

Для вронскиана системы вектор-функций приведенные выше утверждения не выполняются. Действительно, вронскиан пары вектор-функций $\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$равен тождественно нулю, причем функции линейно независимы на любом интервале. Таким образом, линейная зависимость системы вектор-функций с нулевым вронскианом не следует ни из необращения в ноль вронскиана меньшего порядка, ни из постоянства ранга матрицы Вронского, ни из аналитичности.

Литература

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - Ижевск, 2000.

2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М., Наука, 1982.

3. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. - М., УРСС, 2004.

4 Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - Харьков, ОНТИ, 1939.

5. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. - М., БИНОМ. Лаборатория знаний. - 2005.

6. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. 2. -т М., Наука, 1974.

7. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. - М., издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.

8. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М., УРСС, 2013.

9. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М., ЛИБРОКОМ, 2009.

Неклюдов Алексей Владимирович,
доцент кафедры «Высшая математика»
Московского государственного технического университета
им. Н.Э. Баумана, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: nekl5@yandex.ru

Упрощенное обоснование наиболее важных замен переменных в кратном интеграле

С. С. Пухов

В работе даются строгие доказательства перехода в интеграле к полярным и сферическим (в т. ч. обобщённым) координатам, значительно упрощённые по сравнению с имеющимися в литературе. Также для общей линейной замены в $\mathbb{R}^m$ предложен вариант обоснования формул преобразования меры Жордана и кратного интеграла, основанный на методе элементарных преобразований Гаусса.

Введение

Замена переменных в двойном или тройном интеграле — один из наиболее распространённых и зачастую незаменимый инструмент нахождения площадей, объёмов, моментов инерции, центров тяжести и других важных геометрических и физических характеристик двумерных и трёхмерных тел. Чаще всего при этом применяются линейные замены (сдвиги, сжатия/растяжения, повороты) и переход к полярным, цилиндрическим или сферическим координатам. Однако, в изложениях анализа, рассчитанных не на математиков (см. например, одни из самых популярных [1] или [2]), а тем более в реально читаемых лекционных курсах, строгое доказательство таких переходов отсутствует. Это, очевидно, связано с тем, что конкретные замены рассматриваются как частные случаи общей замены переменных в кратном интеграле, строгое обоснование которой чрезвычайно сложно (в [3] оно занимает 10 страниц текста, рассчитанного на студента высокого уровня, а в [4] — более 20 страниц). В настоящей работе мы предлагаем гораздо более простой, но в то же время совершенно строгий способ обоснования интегрального перехода для перечисленных выше наиболее распространённых замен исходя из их специфики, в то время как в имеющейся учебной литературе эта специфика используется только для рассуждений пояснительного характера.

При проведении этого обоснования для полярной и сферической замен мы не используем ничего сложнее аддитивности, теоремы о среднем и т. п. Рискнём утверждать: наше доказательство будет легко понятно всякому, кто овладел самыми основными понятиями и теоремами темы “кратный интеграл”. Оно настолько просто, что читателю может по прочтении показаться, будто автор не открывает ничего нового. Действительно, дело лишь в удачном сочетании давно и хорошо известных идей, но в ценности и новизне этого сочетания легко убедится. Пусть читатель прежде прочтения задаст себе вопросы: может ли он минут за 10-15 абсолютно строго и удобно для понимания студентами среднего уровня изложить доказательство формулы интегрального перехода к полярным координатам для произвольной функции и произвольной области интегрирования? А после этого минут за 15-20 сделать то же для координат сферических? Если хотя бы один ответ отрицательный, то параграфы 3 и 4 (доказательства теорем 2 и 3) сообщат читателю нечто новое.

Хотя основное значение данной работы состоит именно в облегчённом обосновании полярной и сферической замен координат, мы начинаем с рассмотрения произвольной линейной замены в пространстве $\mathbb{R}^m$. Для этой замены сам переход к новым координатам в интеграле (теорема 1) легко доказывается при наличии уже установленной формулы преобразования многомерного объёма (меры Жордана). Однако строгое получение этой формулы и даже обоснование инвариантности меры Жордана при поворотах представляет собой определённую проблему, поскольку изначальное определение этой меры привязано к координатной сетке. Скажем, в [3] эта инвариантность обосновывается через уже доказанную общую формулу замены переменных в интеграле (стр. 136), а в [4] для этой цели привлекается объём многомерного шара. В обоих случаях существенно используется кратный интеграл, и такой подход (одновременная работа с мерой и интегралом) типичен для учебной литературы при рассмотрении линейных преобразований, особенно ярко это проявляется в учебниках [5] и [6].

Мы в данной работе, напротив, максимально разделяем подготовительную, хотя и наиболее содержательную, работу с мерой и последующее обоснование перехода в интеграле . С методической точки зрения такое разделение представляется удобным, поскольку сосредоточивает внимание на каком-то одном понятии (мере или интеграле) в каждый момент изложения. Наше доказательство основано на разложении произвольной линейной замены в композицию элементарных. Эта идея взята нами из [5] и [6], но реализована по-другому; в частности, для обоснования такого разложения мы ссылаемся на широко известный метод Гаусса вместо более глубоко экскурса в алгебру в [5] и [6] (или, скажем, в [4], где используется разложение матрицы в произведение неотрицательной самосопряжённой и ортогональной).

Стоит особо сказать про случаи плоскости и трёхмерного пространства: формулы выражения площади и объёма через определитель доказываются в курсе аналитической геометрии, но эти доказательства основываются на элементарном понимании площади и объёма, при котором без обоснования принимается их инвариантность при движениях плоскости или пространства. То есть, в школьной математике в качестве площади или объёма рассматривается функция фигуры с определёнными свойствами (аддитивность, инвариантность при движениях, единичность на единичном квадрате или кубе), но существование такой функции не доказывается. В анализе такая функция в виде меры Жордана предъявляется, но именно её инвариантность при движениях доказывается далеко не всегда. Мы считаем уместным проведение такого доказательства только для студентов-математиков, поскольку речь здесь идёт, по существу, о типичной в математике ситуации: проверке аксиом для предлагаемой модели. Такая проверка, конечно, должна осуществляться строго, без ссылки на "очевидность" аксиом. В то же время при обучении студентов-нематематиков апелляция к естественно-наглядному смыслу площади и объёма вполне нормальна, поэтому можно использовать формулы площади параллелограмма и объёма параллелепипеда из аналитической геометрии, что радикально упрощает дело (см. конец параграфа 2).

1. Общая линейная замена в кратном интеграле

Пусть $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — невырожденное ($\det C = \det(c_{ij}) \neq 0$) линейное отображение общего вида

$$\begin{cases} x_1 = L_1(u_1, \ldots, u_m) = c_{11}u_1 + \ldots + c_{1m}u_m + d_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = L_m(u_1, \ldots, u_m) = c_{m1}u_1 + \ldots + c_{mm}u_m + d_m, \end{cases} \tag{1}$$

или, в векторном виде, $x = L(u) = Cu + d$.

Напомним, что *стандартным параллелепипедом*, или *брусом*, в пространстве векторов $u = (u_1 \ldots, u_m)$ называется множество векторов, координаты которых удовлетворяют ограничениям $a_1 \leqslant u_1 \leqslant b_1, \ldots, a_m \leqslant u_m \leqslant b_m$ (здесь $a_i < b_i$), а *m–мерным объёмом*, или *мерой Жордана* такого бруса — произведение всех его измерений $(b_1 - a_1) \ldots (b_m - a_m)$. По аддитивности понятие объёма переносится на так называемые *простейшие фигуры* — конечные объединения брусов. *Верхней мерой Жордана* множества $A \subset \mathbb{R}^m$ называется инфимум объёмов содержащих его простейших фигур ($+\infty$ для неограниченного множества), а *нижней* — супремум объёмов содержащихся в нём простейших фигур (0, если таких нет). Множество *измеримо по Жордану*, если эти две характеристики конечны и равны друг другу, их общее значение называется просто *мерой Жордана* и обозначается $\mu(A)$. Хорошо известны: 1) свойство аддитивности меры Жордана — мера объединения равна сумме мер компонент, если компоненты могут пересекаться только по границам, 2) монотонность верхней, нижней и просто меры по включению множеств, 3) критерий измеримости ограниченного множества, заключающийся в равенстве меры его границы нулю, 4) равенство нулю меры гладкой кривой или поверхности.

Технической основой для исследования общей линейной замены нам послужит следующая лемма о поведении меры при так называемых *элементарных преобразованиях.*

Лемма 1. *Пусть $x = L(u)$ — одно из отображений следующего вида:*

L_a прибавляет к k-й координате j-ю, умноженную на $\lambda \in \mathbb{R}$ ($x_k = u_k + \lambda u_j$);

L_b меняет местами k-ю и j-ю координаты ($x_k = u_j,\ x_j = u_k$);

L_c умножает k-ю координату на ненулевое число $\lambda \in \mathbb{R}$ ($x_k = \lambda u_k$);

L_d прибавляет к вектору u вектор d ($x = u + d$).

Тогда для любого измеримого $A \subset \mathbb{R}^m$: 1) $L(A)$ измеримо, 2) $\mu(L_c(A)) = |\lambda|\mu(A)$ и $\mu(L(A)) = \mu(A)$ для отображений трёх других типов.

Доказательство. При отображениях $L = L_b$, L_c или L_d брусы, а значит, и простейшие фигуры сохраняют свой вид и из определения их объёма очевидна справедливость формул из пункта 2) для простейших фигур. Поэтому и в силу биективности отображения для всех простейших B, B' имеем $B \subset A \Leftrightarrow B' = L(B) \subset L(A)$ и для нижней меры μ_*

$$\mu_*(L(A)) = \inf_{B' \subset L(A)} \mu(B') = \inf_{B \subset A} \mu(L(B)) = \inf_{B \subset A} \mu(B) = \mu_*(A)$$

для $L = L_b$ или L_d, а для $L = L_c$ два последних члена этого равенства умножаются на $|\lambda|$. Меняя характер включений, доказываем и сохранение или умножение на $|\lambda|$ верхней меры μ^*. Значит, для отображений данных трёх типов $\mu_*(A) = \mu^*(A) \Leftrightarrow \mu_*(L(A)) = \mu^*(L(A))$, что означает сохранение измеримости, а формула преобразования меры следует из соответствующей формулы для верхней или нижней меры.

Вся сложность леммы заключена в случае L_a, когда брусы переходят в параллелепипеды, не являющиеся брусами. Для удобства будем излагать доказательство для случая $m = 2$, делая затем обобщения на случай произвольной размерности. Вначале отметим, что из перечисленных в начале параграфа известных свойств меры Жордана сразу следует формула площади для прямоугольного треугольника с катетами, параллельными осям координат. Действительно, измеримость такой фигуры следует из её ограниченности гладкими кривыми, а отражение относительно центра гипотенузы, будучи композицией отображений вида L_c и L_d и по доказанному выше не меняя площади, переведёт данный треугольник в другой, дополняющий исходный до стандартного прямоугольника. По аддитивности площадь каждого треугольника равна половине площади прямоугольника. А из формул площади таких треугольников и аддитивности площади сразу следует формула для площади параллелограмма “основание на высоту”, если это основание параллельно одной из осей координат. Если же рассматриваемые треугольники и параллелограммы декартово домножить на $m-2$ отрезка, получатся формулы m-мерного объёма для соответствующих прямоугольных призм (измеримость вновь имеет место в силу ограниченности объектов конечным числом гладких поверхностей).

Пусть преобразование L_a действует по формулам $x_2 = u_2 + \lambda u_1$, $x_1 = u_1$. В многомерном случае мы также можем считать, что речь идёт о таком преобразовании (при сохранении остальных координат $x_i = u_i$, $3 \leqslant i \leqslant m$) хотя бы потому, что к нему сводится всякое L_a с помощью уже рассмотренных преобразований типа L_b. Образ прямоугольника $B = \{(u_1\, u_2) \mid a_1 \leqslant u_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant u_2 \leqslant b_2\}$ представляет собой параллелограмм $S = L_a(B)$, задаваемый соотношениями $x_1 = u_1 \in [a_1, b_1]$, $x_2 = u_2 + \lambda u_1 \in [a_2 + \lambda u_1, b_2 + \lambda u_1]$ (см. рис. 1).

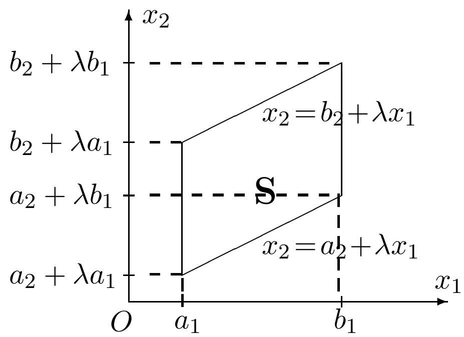


Рис. 1

Его площадь по доказанному выше равна $(b_1-a_1)(b_2-a_2)$, то есть совпадает с площадью B. Для многомерного случая, когда $B=\{(u_1\ \ldots,u_m)\mid a_i\leqslant u_i\leqslant b_i, 1\leqslant i\leqslant m\}$, рассмотренные выше площади просто домножаются на $(b_3-a_3)\ldots(b_m-a_m)$, давая m-мерные объёмы. Итак, при преобразовании типа L_a, применённому к брусу, мера Жордана сохраняется. Благодаря аддитивности меры это сохранение сразу распространяется на простейшие фигуры.

Пусть, наконец, A — произвольное измеримое подмножество $\mathbb{R}^m$. Тогда для всякого $\varepsilon>0$ найдутся простейшие $T\subset A$ и $U\supset A$ такие, что

$$\mu(A)-\varepsilon<\mu(T)\leqslant\mu(U)<\mu(A)+\varepsilon.$$

Тогда $L_a(T)\subset L_a(A)\subset L_a(U)$. По монотонности верхней и нижней мер

$$\mu(A)-\varepsilon<\mu(T)=\mu(L_a(T))\leqslant\mu_*(L_a(A))\leqslant\mu^*(L_a(A))\leqslant\mu(L_a(U))=\mu(U)<\mu(A)+\varepsilon,$$

откуда после устремления $\varepsilon\to 0+$ сразу следуют оба пункта леммы.

Лемма 2. *Для любого отображения $x=L(u)$ вида (1) и любого измеримого $A\subset\mathbb{R}^m$:*
1) $L(A)$ измеримо, 2) $\mu(L(A))=|\det C|\mu(A)$.

Доказательство основано на хорошо известном из алгебры методе Гаусса приведения матрицы C к сильно ступенчатому виду, который для квадратной невырожденной матрицы есть вид диагональный с ненулевыми элементами на диагонали. Основным действием в методе Гаусса является вычитание из k-й строки матрицы j-й, умноженной на λ, это действие эквивалентно умножению преобразуемой матрицы слева на элементарную матрицу первого типа с единицами по главной диагонали и числом $-\lambda$ на позиции (k,j) (остальные элементы нулевые). Также используется перестановка строк матрицы, эквивалентная умножению на элементарную матрицу второго типа — с единицами на позициях (k,j) и (j,k) и на главной диагонали, кроме позиций (k,k) и (j,j). Таким образом, согласно методу Гаусса, найдутся такие элементарные матрицы $Q_1,\ldots,Q_n$, что

$$Q_n\cdot\ldots\cdot Q_1\cdot C=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots\ldots\\ 0 & \lambda_2 & \ldots\ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ \ldots\ldots & 0 & \lambda_m\end{pmatrix}\implies C=Q_1^{-1}\cdot\ldots\cdot Q_n^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots\ldots\\ 0 & \lambda_2 & \ldots\ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ \ldots\ldots & 0 & \lambda_m\end{pmatrix},$$

где матрицы, обратные матрицам первого типа, отличаются от них заменой $-\lambda$ на λ и задают преобразование типа L_a из леммы 1, а матрицы второго типа при обращении сохраняются и задают преобразование типа L_b. Диагональную матрицу можно разложить в произведение элементарных диагональных (с λ_i на i-й позиции на диагонали и единицами на остальных позициях), задающих преобразования типа L_c. Таким образом, матрица C раскладывается в произведение $C=C_1\cdot\ldots\cdot C_N$ матриц, задающих преобразования $L_1,\ldots,L_N$ типов L_a, L_b и L_c, рассмотренных в лемме 1. Заметим, что модули определителей таких матриц суть коэффициенты преобразования меры из этой леммы. Отображение $L(u) = Cu + d$ раскладывается в композицию $L_0 \circ L_1 \circ \ldots \circ L_N$, где L_0 имеет вид L_d из той же леммы 1, которая обеспечивает по цепочке измеримость последовательных образов A вплоть до $L(A)$ и равенства

$$\mu(L(A)) = \mu(L_1 \circ \ldots \circ L_N(A)) = |\det C_1|\mu(L_2 \circ \ldots \circ L_N(A)) = \ldots = \\ = |\det C_1| \cdot \ldots \cdot |\det C_N|\mu(A) = |\det C|\mu(A).$$

Замечание 1. *Лемма 2 обеспечивает, в частности, сохранение измеримости и меры при ортогональных преобразованиях, когда* $|\det C| = 1$. *Это означает, что определение меры Жордана инвариантно относительно выбора декартовой системы координат.*

Факт сохранения площади при движениях плоскости даёт строгое обоснование всех школьных формул площади многоугольных фигур, а также

Замечание 2. *Для площади кругового сектора* Ω *раствора* $\Delta\varphi$ *и радиуса* R *справедлива формула* $S(\Omega) = R^2\Delta\varphi/2$.

Действительно, все круги и сектора ограничиваются гладкими кривыми, т. е. множествами меры нуль, и потому измеримы. Круг радиуса R имеет площадь πR^2 и делится на n секторов раствора $\Delta\varphi = 2\pi/n$, получающихся друг из друга поворотами и потому имеющих одинаковую площадь $\pi R^2/n = R^2\Delta\varphi/2$. По аддитивности и площадь сектора раствора $\Delta\varphi = 2\pi m/n$ равна $m\pi R^2/n = R^2\Delta\varphi/2$. На прочие $\Delta\varphi$ эта формула распространяется через приближение сектора изнутри и снаружи секторами раствора $2\pi q$, $q \in \mathbb{Q}$.

Лемма 2 позволяет легко доказать теорему о линейной замене переменных под знаком кратного интеграла.

Теорема 1. *Пусть* L *— невырожденное линейное отображение в* $\mathbb{R}^n$ *с матрицей* C, *переводящее измеримое множество* D *в* G, *а* $f\colon G \to \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\int\limits_G f(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m = |\det C| \int\limits_D f(L(u_1, \ldots, u_m))\, du_1 \ldots du_m, \tag{2}$$

причём существование обоих интегралов эквивалентно.

Доказательство. Для всякого разбиения множества D набором $(D_k)_1^n$ по лемме 2 $L(D_k)$ измеримы и $\mu(L(D_k) \cap L(D_j)) = \mu(L(D_k \cap D_j)) = |\det C|\mu(D_k \cap D_j) = 0$, то есть $L(D_k)_1^n$ есть разбиение $L(D) = G$. Более того, в таком виде представимо всякое разбиение $(G_k)_1^n$ множества G — достаточно рассмотреть $D_k = L^{-1}(G_k)$ и применить лемму 2 к L^{-1} для обоснования наличия разбиения $(D_k)_1^n$. Таким образом, для произвольного разбиения множества D набором $(D_k)_1^n$ по лемме 2 имеем

$$\sum_{k=1}^n f(L(u^k))\mu(L(D_k)) = |\det C| \sum_{k=1}^n f(L(u^k))\mu(D_k), \quad u^k \in D_k, \tag{3}$$

причём в левой части стоит произвольная интегральная сумма интеграла из левой части (2). Далее, из формул (1) видно, что если обозначить $M = \max\limits_{i,j} |c_{ij}|$, то для всяких точек u, u' и их образов x, x' верно $|x_k - x'_k| \leqslant mM \max\limits_i |u_i - u'_i| \leqslant mM\rho(u, u')$, откуда $\rho(x, x') \leqslant m^{3/2}M\rho(u, u') = M_1\rho(u, u')$ (здесь ρ — евклидова метрика в $\mathbb{R}^m$). Переходя к супремуму по $u, u' \in D_k$ и максимуму по k, получаем, что $\operatorname{diam}(L(D_k))_1^n \leqslant M_1 \operatorname{diam}(D_k)_1^n$. Применив те же соображения к L^{-1}, получим обратное (качественно) неравенство $\operatorname{diam}(D_k)_1^n \leqslant M_2 \operatorname{diam}(L(D_k))_1^n$, что в совокупности с предыдущим означает одновременное стремление к нулю диаметров разбиений прообраза и образа. Предельный переход при таком стремлении в (3) и доказывает теорему в полном объёме.

Конечно, если считать известными формулы выражения площади параллелограмма и объёма параллелепипеда через определитель, то можно сразу доказать формулу $\mu(L(A)) = |\det C|\mu(A)$ для случая, когда A — стандартный прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ или стандартный параллелепипед в $\mathbb{R}^3$. Для краткости рассмотрим двумерный случай. Пусть $L\colon u \mapsto x$ — невырожденное ($\det C = \det(c_{ij}) \neq 0$) линейное отображение плоскости в себя

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + d_1, \\ x_2 = c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + d_2. \end{cases}$$

Если рассмотреть образ стандартного прямоугольника $A : a_1 \leqslant u_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant u_2 \leqslant b_2$ по этому отображению, то из представления

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}(b_1 - a_1)\dfrac{u_1 - a_1}{b_1 - a_1} + c_{12}(b_2 - a_2)\dfrac{u_2 - a_2}{b_2 - a_2} + d_1 + c_{11}a_1 + c_{12}a_2, \\ x_2 = c_{21}(b_1 - a_1)\dfrac{u_1 - a_1}{b_1 - a_1} + c_{22}(b_2 - a_2)\dfrac{u_2 - a_2}{b_2 - a_2} + d_2 + c_{21}a_1 + c_{22}a_2, \end{cases}$$

где обе дроби пробегают значения из отрезка $[0,1]$, видно, что $L(A)$ есть параллелограмм, натянутый на вектора $(c_{11}(b_1 - a_1), c_{21}(b_1 - a_1))$ и $(c_{12}(b_2 - a_2), c_{22}(b_2 - a_2))$. Поэтому его площадь равна $S(L(A)) = |\det C|S(A)$. Далее формулу $\mu(L(A)) = |\det C|\mu(A)$ можно распространить на произвольные измеримые множества (так, как мы сделали это в конце доказательства леммы 1) и перейти к доказательству теоремы 1.

2. Переход к полярным координатам в двойном интеграле

Сопоставим всякому множеству $G \subset \mathbb{R}^2$ в координатах (x, y) множество D в координатах (r, φ), являющееся прообразом G по отображению $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ($r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$). Имеет место

Теорема 2. *Для всякой функции $f\colon G \to \mathbb{R}$ верно равенство*

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,drd\varphi, \tag{4}$$

если оба эти интеграла существуют (в собственном смысле).

Доказательство. Поскольку интегралы рассматриваются в собственном смысле, множество G ограничено, то есть лежит в круге $B :\ x^2 + y^2 \leqslant R^2$, а значит D — в прямоугольнике $P :\ 0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Продолжим f нулём на $B \setminus G$, тогда композиция будет продолжена нулём на $P \setminus D$:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y),\ (x,y) \in G, \\ 0,\ \ (x,y) \in B \setminus G \end{cases} \implies F(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \begin{cases} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi),\ (r,\varphi) \in D, \\ 0, \quad (r,\varphi) \in P \setminus D. \end{cases}$$

Ясно, что прибавив к обеим частям (4) нулевые интегралы по дополнениям, мы по аддитивности получим равносильную формулу

$$\iint\limits_B F(x,y)\,dxdy = \iint\limits_P F(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,drd\varphi. \tag{5}$$

Рассмотрим сеточное разбиение $(P_k)_1^n$ прямоугольника P, оно порождает по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ разбиение круга B на кольцевые сектора $(B_k)_1^n$ (рис. 2):

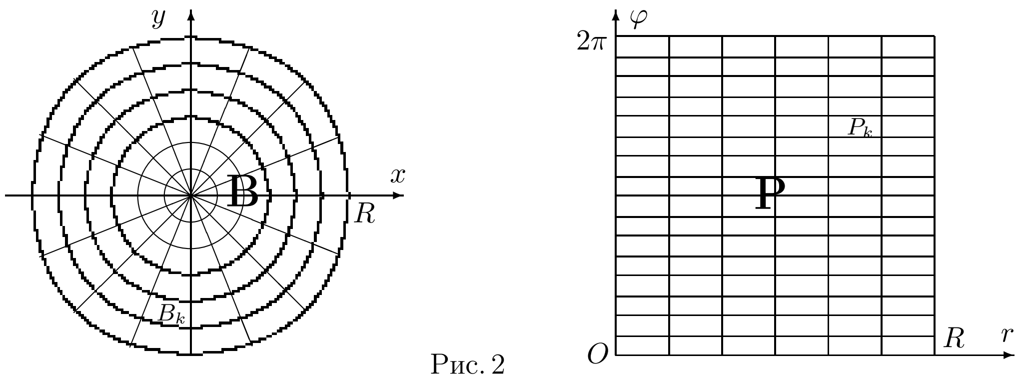


Рис. 2

Элементы B_k, конечно, измеримы (в силу ограниченности гладкими кривыми). По формуле площади сектора (см. замечание 6) и по теореме о среднем найдутся $(r_k, \varphi_k) \in P_k$:

$$S(B_k : R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ \Phi_1 \leqslant \varphi \leqslant \Phi_2) = \frac{(\Phi_2 - \Phi_1)(R_2^2 - R_1^2)}{2} = \iint\limits_{P_k} r\,drd\varphi = r_k S(P_k). \tag{6}$$

Исходя из этого, мы можем составить равные интегральные суммы интегралов в (5):

$$\sum_{k=1}^{n} F(r_k \cos\varphi_k, r_k \sin\varphi_k) S(B_k) = \sum_{k=1}^{n} F(r_k \cos\varphi_k, r_k \sin\varphi_k)\, r_k S(P_k). \tag{7}$$

Функции $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ — гладкие на прямоугольнике P, и по теореме о конечных приращениях найдётся константа C такая, что расстояние между парой точек (x, y) и (x', y') не превосходит умноженного на C расстояния между их прообразами (r, φ) и (r', φ') (можно легко это проверить и непосредственно, оценивая разности $r\cos\varphi - r'\cos\varphi'$ и $r\sin\varphi - r'\sin\varphi'$). Поэтому из $\operatorname{diam}(P_k)_0^n \to 0$ следует $\operatorname{diam}(B_k)_0^n \to 0$, и такой предельный переход в (7) даёт (5) и доказывает теорему.

Заметим, что для перехода к цилиндрическим координатам в тройном интеграле всегда можно перейти сначала к одному из повторных интегралов вида $\iint dxdy \int dz$ или $\int dz \iint dxdy$ и в интеграле $\iint dxdy$ осуществить полярную замену. Поэтому в отдельном обосновании интегральный переход к цилиндрическим координатам не нуждается.

Как правило, на практике существование обоих интегралов в (4) очевидно из-за выполнения каких-то простых достаточных условий. Тем не менее, для полноты картины отметим, что теорему 2 можно усилить следующим замечанием.

Замечание 3. *Пусть множества D и G из теоремы 2 измеримы. Тогда*

1) $f(x, y) \in R(G) \Rightarrow rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in R(D)$,

2) $rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in R(D) \Rightarrow f(x, y) \in R(G)$ при условии ограниченности функции f.

Доказательства двух импликаций похожи, мы докажем пункт 2) — именно он является практически наиболее значимым, поскольку при вычислениях обычно происходит переход от левого интеграла в равенстве (4) к правому, который затем досчитывается до ответа и тем самым его существование оказывается обоснованным. Вместо частей (4) мы можем работать с эквивалентными интегралами из (5). Пусть $|f| \leqslant M$ на множестве D, тогда и $|F| \leqslant M$ на круге B. Воспользуемся критерием интегрируемости в терминах колебаний: для разбиения $(P_k)_1^n$ прямоугольника P с $\operatorname{diam}(P_k)_1^n < \delta$ (в том числе сеточного, как на рис. 2) верно $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_{rF}(P_k) S(P_k) < \varepsilon$. Чтобы оценить аналогичную сумму для F и разбиения B (достаточно рассмотреть одно конкретное разбиение, например, на B_k, порождённые P_k), рассмотрим произвольные точки $(x_k, y_k), (x'_k, y'_k) \in B_k$ и их прообразы $(r_k, \varphi_k), (r'_k, \varphi'_k) \in P_k$.

Применяя формулу (6) и обозначив r_k^* максимальные значения r на P_k, запишем

$$\sum_{k=1}^{n}|F(x_k,y_k)-F(x'_k,y'_k)|S(B_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}|F(x_k,y_k)-F(x'_k,y'_k)|r_k^*S(P_k)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}|F(x_k,y_k)(r_k^*-r_k+r_k)-F(x'_k,y'_k)(r_k^*-r'_k+r'_k)|S(P_k)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}|F(x_k,y_k)r_k-F(x'_k,y'_k)r'_k|S(P_k)+\sum_{k=1}^{n}|F(x_k,y_k)|(r_k^*-r_k)S(P_k)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}|F(x'_k,y'_k)|(r_k^*-r'_k)S(P_k)<\varepsilon+2\delta MS(P),\quad(8)$$

что в силу произвольной малости ε и δ обеспечит (после перехода к супремуму по (x_k,y_k), $(x'_k,y'_k)\in B_k$) выполнение критерия интегрируемости F на B.

Разумеется, если понимать интегралы в несобственном смысле, вырезая из B точку O, а из P — переходящий в неё отрезок $\{0\}\times[0,2\pi]$, то условие ограниченности f станет ненужным. Отметим также, что измеримость множеств D и G на самом деле равносильна, но доказательство этого факта мы не приводим, т.к., во-первых, оно не использует специфику полярной замены и опирается на общую теорию гладких отображений, а во-вторых, все "разумные", возникающие на практике множества измеримыми являются.

3. Переход к сферическим координатам в тройном интеграле

Если при вычислении площади сектора мы воспользовались готовой школьной формулой, хотя и лишний раз обосновали её в параграфе 2, то объём сектора шарового слоя придётся вычислить специально.

Лемма 3. *Объём сектора шарового слоя, заданного неравенствами $r_1\leqslant r\leqslant r_2$, $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$, $\psi_1\leqslant\psi\leqslant\psi_2$ ($r\geqslant 0$ — сферический радиус, $\varphi\in[0,2\pi]$ — долгота, $\psi\in[-\pi/2,\pi/2]$ — широта), равен*

$$V=\frac{(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1)(r_2^3-r_1^3)}{3}=\iiint\limits_{[r_1,r_2]\times[\varphi_1,\varphi_2]\times[\psi_1,\psi_2]}r^2\cos\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi.$$

Второе равенство легко проверяется вычислением повторного интеграла, докажем первое. Фиксируем раз и навсегда $\varphi_1,\varphi_2:0\leqslant\varphi_2-\varphi_1\leqslant2\pi$ и обозначим искомый объём $V(r_1,r_2,\psi_1,\psi_2)$. Рассмотрим сначала $V(0,r_2,\psi_1,\pi/2)$, $\psi_1\geqslant0$. Тело Ω, объём которого мы ищем (изображено на рис. 3), расположено между конусом $(x^2+y^2)\operatorname{tg}^2\psi_1=z^2$ и сферой $x^2+y^2+z^2=r_2^2$, проектирование на Oxy даёт сектор круга радиуса $r_0=r_2\cos\psi_1$.

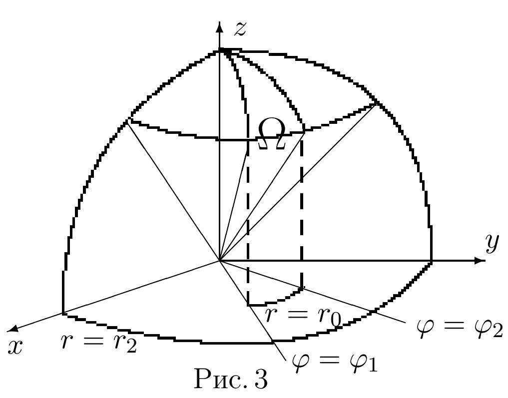


Рис. 3

Поскольку мы уже обосновали переход к полярным координатам в двойном интеграле, мы можем записать

$$V(0,r_2,\psi_1,\pi/2)=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{0}^{r_2\cos\psi_1}\left(\sqrt{r_2^2-r^2}-r\operatorname{tg}\psi_1\right)r\,dr=\frac{(\varphi_2-\varphi_1)(1-\sin\psi_1)\,r_2^3}{3}.$$

Здесь мы также использовали следующую теорему о геометрическом смысле двойного интеграла: интеграл неотрицательной непрерывной на компакте функции есть объём её подграфика. Отметим, что, несмотря на не самые тривиальные вычисления, сам способ подсчёта объёма привычен студентам по решению задач, и потому такой путь доказательства не требует искусственного запоминания — это очень важное преимущество рассматриваемого подхода.

Далее, для любых $\psi_2\geqslant\psi_1\geqslant 0$ по аддитивности объёма

$$V(0,r_2,\psi_1,\psi_2)=V(0,r_2,\psi_1,\pi/2)-V(0,r_2,\psi_2,\pi/2)=\frac{(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1)\,r_2^3}{3},$$

по симметрии эта формула распространяется на случай $\psi_1\leqslant\psi_2\leqslant 0$, и вновь по аддитивности — на оставшийся случай $\psi_1<0<\psi_2$. Наконец, из соотношения $V(r_1,r_2,\psi_1,\psi_2)=V(0,r_2,\psi_1,\psi_2)-V(0,r_1,\psi_1,\psi_2)$ получаем первое равенство леммы в общем виде.

Теорема 3. *Пусть множество $G\subset\mathbb{R}^3$ имеет прообраз D относительно отображения $x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\sin\varphi\cos\psi$, $z=r\sin\psi$ ($r\geqslant 0$, $\varphi\in[0,2\pi]$, $\psi\in[-\pi/2,\pi/2]$). Тогда для всякой функции $f\colon G\to\mathbb{R}$*

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_D f(r\cos\varphi\cos\psi,r\sin\varphi\cos\psi,r\sin\psi)\,r^2\cos\psi\,drd\varphi\,d\psi,\tag{9}$$

если оба эти интеграла существуют (как собственные).

Доказательство просто повторяет доказательство теоремы 2 с естественными изменениями. А именно: множество G погружается в шар B радиуса R — образ параллелепипеда $P=[0,R]\times[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]$, и функция f продолжается нулём на разность $B\setminus G$. Равенство (9) равносильно равенству для продолженной функции F

$$\iiint\limits_B F(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_P F(r\cos\varphi\cos\psi,r\sin\varphi\cos\psi,r\sin\psi)\,r^2\cos\psi\,drd\varphi\,d\psi.$$

Оно получается предельным переходом $\operatorname{diam}(P_k)_1^n\to 0$ (и одновременно $\operatorname{diam}(B_k)_1^n\to 0$ по теореме о конечных приращениях или непосредственной оценкой) из равенства для интегральных сумм

$$\sum_{k=1}^n F(r_k\cos\varphi_k\cos\psi_k,r_k\sin\varphi_k\cos\psi_k,r_k\sin\psi_k)V(B_k)=$$
$$=\sum_{k=1}^n F(r_k\cos\varphi_k\cos\psi_k,r_k\sin\varphi_k\cos\psi_k,r_k\sin\psi_k)\,r_k^2\cos\psi_kV(P_k).$$

Здесь $(P_k)_1^n$ — сеточное разбиение параллелепипеда P, $(B_k)_1^n$ — его образ, а $(r_k,\varphi_k,\psi_k)\in P_k$ подобраны на основании леммы 3 и теоремы о среднем:

$$V(B_k)=\iiint\limits_{P_k}r^2\cos\psi\,drd\varphi\,d\psi=r_k^2\cos\psi_kV(P_k).$$

Для случая сферической замены верен аналог замечания 3, доказательство отличается от случая полярной замены лишь чуть большей громоздкостью выкладки типа (8).

4. Заключительные замечания

Наши доказательства теорем 2 и 3 получились благодаря сочетанию двух элементарных идей: применения теоремы о среднем (она часто используется в рассуждениях, связанных с заменой переменной) и продолжения функции нулём на очень простую область, в данном случае круг или шар. Вторая идея в обязательном порядке встречается в анализе при обосновании перехода к повторному интегралу с переменными пределами. Но почему-то возможность такого сочетания долгое время, по-видимому, оставалась незамеченной. Так случилось потому, что математическое мышление настроено на поиск общих фактов и последующего, по мере необходимости, выведения из них конкретных следствий. А поскольку общая замена не всегда допускает даже продолжение на границу области (простейший пример — вихревое отображение единичного круга в себя $(r, \varphi) \mapsto (r, \varphi + r/(1-r))$), не говоря уже о расширении до областей более простого вида, то и идея такого расширения для конкретных замен выпадала из поля зрения. Потому формулы полярной и сферической замен в интеграле всегда выводились из общих теорем, получаемых или нестрого, или с огромным трудом, так или иначе на основе роли якобиана как коэффициента преобразования мер. Мы же, заметьте, нигде в доказательствах теорем 2 и 3 словом не обмолвились ни о каких определителях и частных производных, а только опирались на формулы площади сектора кольца и объёма сектора шарового слоя. Разумеется, в лекционном курсе упомянуть о смысле множителей r и $r^2 \cos\psi$ необходимо, но общую формулу замены переменой студентам-нематематикам можно обосновать лишь на идейном уровне, ибо для практических нужд им хватит и доказанных строго частных случаев.

Впрочем, на их основе можно обосновать и некоторые более сложные замены. Пусть некоторая замена сводится к композициям уже рассмотренных замен и ещё каких-то, преобразующих координаты по отдельности. Для последних формула замены переменных обосновывается посредством перехода к повторному интегралу. Последовательное выполнение замен позволит произвести нужную композиционную замену. В частности, так можно действовать для т. н. обобщённых полярных и сферических замен (см. например, [7], стр. 33 и 69). В качестве примера рассмотрим вычисление площади обобщённого круга $|x|^p + |y|^q \leqslant 1,\ p, q > 0$. Такие области "выпрямляются" обобщённой полярной заменой $x = r^{2/p} \cos^{2/p}\varphi,\ y = r^{2/q} \sin^{2/q}\varphi$. Мы же, чтобы оставаться в рамках обоснованного, представим эту замену как композицию двух: $x = \tilde{x}^{2/p},\ y = \tilde{y}^{2/q}$ и полярной замены для $\tilde{x}, \tilde{y}$. Поскольку в однократном интеграле можно делать любую замену переменной, мы можем записать

$$S = 4\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{(1-x^p)^{1/q}} dy = \frac{16}{pq}\int\limits_0^1 \tilde{x}^{2/p-1} d\tilde{x} \int\limits_0^{\sqrt{1-\tilde{x}^2}} \tilde{y}^{2/q-1} d\tilde{y} = \frac{16}{pq} \iint\limits_{\substack{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2 \leqslant 1 \\ \tilde{x}, \tilde{y} \geqslant 0}} \tilde{x}^{2/p-1} \tilde{y}^{2/q-1} d\tilde{x} d\tilde{y} =$$

$$= \frac{16}{pq} \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 r^{2/p+2/q-1} \cos^{2/p-1}\varphi \, \sin^{2/q-1}\varphi \, dr = \frac{4\Gamma(1/p)\Gamma(1/q)}{(p+q)\Gamma(1/p+1/q)}\,.$$

Такой путь и вычислительно удобнее, чем осуществление единой замены по сложным формулам, потому что мы избегаем подсчёта якобиана. Особенно ярко последнее преимущество проявляется в трёхмерном случае, при обобщённой сферической замене.

Литература

[1] В. А. Ильин, А. В. Куркина. — Высшая математика: учебник. — 3 изд. — М.: Проспект, 2018.

[2] В. С. Шипачев. — Высшая математика. Полный курс: учебник для академического бакалавриата. — 4 изд. — М.: Издательство Юрайт, 2016.

[3] В. А. Зорич. — Математический анализ. Часть II. — 7 изд. — М.: МЦНМО, 2015.

[4] Л. Д. Кудрявцев. — Курс математического анализа. В 3 томах. Т. 2. — М.: Дрофа, 2004.

[5] В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть II: учебник для вузов. — 7 изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014.

[6] В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. — Математический анализ. В 2-х ч. Часть 2: учебник для академического бакалавриата. — 3 изд. — М.: Издательство Юрайт, 2017.

[7] И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. — Математический анализ в задачах и упражнениях. Том 3: Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. — М.: МЦНМО, 2018.

Пухов Станислав Сергеевич,
доцент механико-математического
факультета МГУ им. М.В. Ломоносова,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: spukhov@mail.ru

Из истории математики

Запрет Аристотеля

К. В. Козеренко

В заметке изложена история запрета на использование в математике понятия актуальной бесконечности, введенного Аристотелем и преодоленного лишь в XIX веке в связи с развитием современной теории множеств.

В VI веке до н.э. в школе Пифагора в Древней Греции была доказана теорема, в которой утверждалось, что для произвольного натурального n на диагонали квадрата со стороной единица нельзя отложить целое число отрезков, длина которых равнялась бы $1/n$. Удивительная теорема! И самое удивительное не то, что грекам удалось её доказать, а то, что они её сформулировали. Ведь тогда греки знали только натуральные числа и дроби и при этом утверждали, что всё есть число. А тут, оказывается, что диагональ квадрата не есть число, то есть её нельзя измерить. Стоит ещё отметить, что никаким экспериментом утверждение теоремы не может быть проверено. Это чисто математическая теорема!

Теперь позволю себе пофантазировать, благо, "за руку поймать" меня никто не сможет, поскольку текстов тех времен почти не осталось. Предположим, что кто-то, пытаясь спасти положение, предложил считать длиной диагонали *бесконечную последовательность чисел* $1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...$, что означает, что на диагонали сторона квадрата укладывается один раз, потом одна десятая стороны — четыре раза и так далее. Заметим, что это предложение есть точь-в-точь современное определение длины диагонали. Вроде бы, ничего страшного и вполне естественно. Естественно потому, что это определение просто формализует процесс измерения длины со все большей точностью.

Теперь вопрос! Почему определение длины как бесконечной последовательности появилось спустя почти две с половиной тысячи лет? В чем тут дело? Ответ поразительный и является яркой иллюстрацией тезиса Гёте: "Математика есть история математики".

Спустя почти сто лет греческий философ Зенон предложил ряд софизмов[1], из которых вытекало, что пользоваться бесконечностью нельзя, так как бесконечность приводит к абсурдным (по его мнению) выводам. Я напомню только один из самых знаменитых софизмов Зенона про Ахиллеса и черепаху. Итак, пусть на некотором расстоянии от Ахиллеса находится черепаха, которую Ахиллес должен догнать. Через некоторое время, догоняя черепаху, Ахиллес окажется в той точке, в которой сначала была черепаха. За это же время черепаха немного отползет. Опять, чтобы догнать черепаху, Ахиллес через некоторое время (уже, конечно, меньшее, чем на первом шаге) должен оказаться в этой новой точке. И так далее. Процесс будет продолжаться бесконечно. А поскольку *бесконечное число интервалов*, по мнению Зенона, *нельзя преодолеть за конечное время*, стало быть, Ахиллес никогда не догонит черепаху. Согласитесь, казалось бы вполне разумное рассуждение[2], которое ещё согласуется и со "здравым смыслом".

Прошло ещё сто лет (это уже IV век до н.э.) и на исторической сцене появляется Аристотель. Именно благодаря ему мы знаем о работах Зенона, точку зрения которого Аристотель разделяет, но с некоторыми уточнениями. Он выделяет два вида бесконечности: *актуальную* и *потенциальную*. Примером актуальной бесконечности является наша последовательность $1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142;$ и так далее. Использовать такую бесконечность нельзя, поскольку это приводит к абсурду. Однако сказать, например, что для каждого натурального числа существует другое натуральное число, которое больше чем первое, можно. Это потенциальная бесконечность и она к противоречию не приводит. Сейчас эти уточнения представляют исключительно исторический интерес, но, согласитесь,

[1] Софизм — это ложь, похожая на правду. Не надо путать софизм с *парадоксом*. Парадокс — это правда, похожая на ложь.

[2] Мне кажется, что этот софизм надо обязательно вспоминать перед определением предела. Только тогда будет возможно оценить его глубину.

полезно знать то, какой путь прошло человечество в течение очень длительного времени до того, как бесконечность стала научным термином.

Итак, опираясь на софизмы Зенона, Аристотель вводит запрет на использование актуальной бесконечности.

Этот запрет в лапидарной форме появляется в “Началах” Евклида (III век до н.э.): **часть меньше целого**! Поразительно! Кажется, что древнегреческие мыслители знали о парадоксах Кантора (о которых речь впереди), согласно одному из которых четных чисел столько же, сколько всех натуральных чисел. Бред какой-то! Как можно с этим согласиться?!

В “Началах” содержится и разрешение использовать потенциальную бесконечность: каждый отрезок можно непрерывно продолжать, но при этом прямую как реально существующий объект рассматривать нельзя. Кстати говоря, после этого становится понятной странная формулировка в “Началах” пятого постулата: “если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых”.

Заметим, что и Архимед, оценивая длину окружности, не нарушал запрет Аристотеля.

Теперь перенесемся сразу почти на две тысячи лет. В “Беседах” Галилея (год 1638) мы находим такой диалог:

Сальвиати: “Множество квадратов натуральных чисел является частью всего множества натуральных чисел. Однако (!), между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, сопоставив каждому натуральному числу его квадрат. Таким образом, часть может быть равна целому!”

Сагредо (он отражает взгляды самого Галилея): “Свойства равенства, а также большей и меньшей величины не имеют места там, где дело идет о бесконечности”.

Итак, запрет Аристотеля пока действует.

Однако, почти в это же время Валлис даёт точное определение предела (1655), Ньютон, создавая дифференциальное и интегральное исчисление, разрабатывает, в частности, теорию бесконечных рядов (1666), Меркатор (Николаус Кауфман) разлагает в ряд натуральный логарифм (1668), а Грегори — тригонометрические функции (1671). Лейбниц, сводя частные и разрозненные приёмы в единую систему взаимно связанных понятий анализа, мыслил, например, бесконечно малые как актуальные объекты. Таким образом, впрочем, пока неявно, но уже во второй половине XVII века происходит фактический отказ от запрета Аристотеля.

Эта тенденция была продолжена в XVIII и XIX веках. Здесь, прежде всего, стоит упомянуть чешского математика Бернарда Больцано, который в работе “Парадоксы бесконечного” (1851), введя понятия множества и взаимно-однозначного соответствия, сформулировал идеи, близкие к будущей наивной теории множеств Георга Кантора. Наконец, в 1873 году наступает эра Кантора. Парадоксы Кантора сейчас общеизвестны. Напомним лишь теорему, в которой утверждается, что в квадрате, включая его внутренние точки и точки границы, столько же точек, сколько на одной его стороне, которая является только частью его границы. Каково! В голове не укладывается! Сам Кантор говорил по этому поводу: “Я вижу это, но не могу поверить”! Стоит ли после этого удивляться тому, что бесконечные множества находились под запретом в течение двух с лишним тысяч лет. Запрет Аристотеля отменён! Однако, какова цена!

Да, **парадоксы Кантора — это цена**, которую мы платим за, казалось бы, невинные фразы типа “рассмотрим множество натуральных чисел”. Воистину, “математика есть история математики”!

Козеренко Константин Владимирович,
Лицей “Вторая школа”, г. Москва,
методист, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: ckozerenko@mail.ru

Через всю свою жизнь он пронёс две любви — с именами «Математика» и «Шахматы». Памяти Дубова Эдуарда Львовича

Т. И. Кузнецова

Статья посвящена Дубову Эдуарду Львовичу — члену секции средней школы Московского математического общества, Генеральному секретарю Международного школьного шахматного союза, Почётному члену ФИДЕ — старейшему и активнейшему участнику семинара «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом», многократно выступавшему с докладами на актуальные для математического образования темы.

Наша задача — сохранить память о достойных
соотечественниках, донести рассказы об их
подвигах беззаветного служения Родине
до подрастающего поколения.
В.С. Секованов

14 февраля 2019 г. на базе Московского государственного областного университета состоялось очередное заседание Всероссийского научно-методического семинара «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом» (научный руководитель — доктор педагогических наук, профессор МГУ имени М.В. Ломоносова, академик МАНПО Кузнецова Т.И.), на котором участники семинара почтили память старейшего участника семинара Дубова Эдуарда Львовича — талантливого математика и выдающегося шахматного деятеля, скоропостижно скончавшегося 23 декабря 2018 г. на 81-м году жизни.

Фото 1. Дубов Эдуард Львович (27.04.1938–23.12.2018)
(*фото В.А. Попова*, 08.12.2016, МГОУ)

Путь в математику Э.Л. Дубов начал со школьной скамьи, будучи учеником знаменитой школы № 444, активным участником школьного математического кружка, руководимого С.И. Шварцбурдом. Талант и увлечение математикой привели его к победе на одной из первых «Колмогоровских» олимпиад для школьников (МГУ имени М.В. Ломоносова, 1956 г.).

На юбилейном заседании семинара 11 апреля 2013 года, посвященном 110-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова, Э.Л. вспоминал, что Андрей Николаевич после вручения грамот собрал всех победителей олимпиады и повел в свой кабинет, где провел с ними беседу, которая запомнилась им на всю жизнь. Впоследствии Э.Л. Дубов (в течение многих лет) принимал участие в работе межфакультетской лаборатории вероятностных и статистических методов при МГУ имени М.В. Ломоносова, которой руководил А.Н. Колмогоров.

Любовь к математике определила дальнейшую судьбу Дубова — он закончил физико-математический факультет МГПИ имени В.И. Ленина и долгие годы преподавал математику в Московском институте коммунального хозяйства и строительства (МИКХиС) (до 1991 г. — Всесоюзный заочный инженерно-строительный институт — ВЗИСИ). Любимые дисциплины — теория вероятностей и математический анализ.

Большую часть своей жизни Э.Л. отдал школьной математике. Долгое время он был редактором газеты «Математика», в течение не одного десятилетия — членом секции средней школы ММО (Московского математического общества). Всегда был заметен по его активному участию в обсуждениях различных вопросов образования.

Э.Л. Дубов — автор-составитель уникальной книги «Математика. Вступительные экзамены в вузы. Варианты билетов» (М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2006. — 192 с.). См. фото 2.

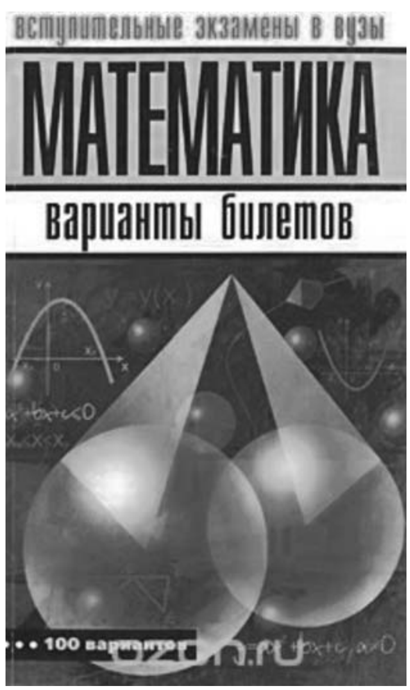


Фото 2.

Сборник содержит более 100 вариантов билетов, предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике в технические и педагогические вузы России в 2004 году. Ко всем вариантам даны ответы, а к некоторым — решения и пояснения. Особенностью данного пособия является то, что в его Содержании приведены фамилии многих авторов задач. Это свидетельствует о том, что Э.Л. Дубов привлекал их к работе над книгой, что объясняет необычность статуса пособия.

Назначение данного пособия автор видел в том, что оно позволит выпускникам средней колы и абитуриентам оценить уровень своих знаний по математике и поможет успешно сдать экзамены.

Дубов Э.Л., кроме математики, беззаветно любил шахматы, огромную роль сыграл в развитии шахматного спорта. Он занимался классификацией шахматных соревнований, что отражено в книге «Шахматы: организация и судейство», написанной им в содружестве с В.А. Артамоновым (Москва, 1998, 418 с.). См. фото 3.

Фото 3.

В практике шахматных соревнований известно несколько вариантов их проведения. Выбор варианта зависит от конкретных особенностей проводимого мероприятия. Если говорить об их классификации, то можно руководствоваться следующими основными признаками: по системе проведения, по цели проведения, по характеру организации и по игровой разновидности.

Будучи математиком, Эдуард Львович с математической скрупулёзностью также разработал собственную систему жеребьевки в опен-турнирах, с помощью которой вплоть до распада СССР следил за точностью и своевременностью обсчета рейтингов отечественных шахматистов. Вообще в шахматах он известен, прежде всего, благодаря вкладу в систему советских рейтингов. Более того, он является автором *советской системы рейтингов* для шахматистов на основе которых присваивались спортивные звания в СССР.

Директор представительства FIDE в России Берик Балгабаев в интервью Федеральному агентству новостей отметил огромную роль Эдуарда Дубова в развитии мирового шахматного спорта. В то время как FIDE публиковала рейтинги советских шахматистов всего раз в полгода, Эдуард Дубов в ручном режиме подсчитывал и обновлял их ежедневно. Именно при Дубове советская система коэффициентов приняла законченный, сформировавшийся порядок.

Эдуард Дубов — ученый, внесший весомый вклад в развитие советских шахмат, занимал пост президента Шахматной федерации Москвы, был вице-президентом Российской шахматной федерации (РШФ), Генеральным секретарем Международного школьного шахматного союза, международным арбитром. Эдуард Львович — один из двух почетных членов ФИДЕ в нашей стране (второй — Юрий Львович Авербах, которому в феврале сего года исполнилось 98 лет, — старейший гроссмейстер в мире).

Э.Л. Дубову сопутствовала слава интеллектуала. Это был человек, который обладал эрудицией, знаниями в различных областях. Весь дом у него обставлен книгами. Он на все имел свое собственное мнение. На заседании семинара 11 декабря 2014 года он сделал доклад «О школьной миссии, об учителе и ученике», который характеризует его отношение к математике и её преподаванию. Приведем главные выводы этого доклада:

«Изучение математики в средней школе преследует две цели:

1. воспитание у учащихся математической культуры как **части общей культуры**, создаваемой при изучении всех школьных предметов;
2. дать учащимся базис, который позволит им продолжить образование в высшей школе. При этом математика высшей школы является надстройкой над математикой средней школы, которая будет выстроена в зависимости от профиля и серьёзности математической подготовки. Поэтому **при поступлении в вузы не может быть единого экзамена по математике**.

При настоящем положении с организацией подготовки к ЕГЭ учащиеся перестают мыслить, рассуждать, строить модели процессов».

Через всю свою жизнь он пронёс две любви - с именами «Математика» и «Шахматы». Дело Э.Л. Дубова живо: сын Дмитрий — тоже шахматист. Шахматные традиции в семье Дубовых продолжает и 22-летний внук Эдуарда Львовича, Даниил Дубов, один из сильнейших гроссмейстеров в составе сборной России, ставший международным гроссмейстером в 14 лет (см. фото 9). В день прощания с Эдуардом Львовичем Даниил завоевал звание Чемпиона мира по быстрым шахматам.

Фотогалерея Э.Л. Дубова

Фото 4-6 сделаны на заседании семинара 11 апреля 2013 года, посвященного 110-летию со дня рождения акад. А.Н. Колмогорова.

Фото 4. Э.Л. Дубов вспоминает о математических отношениях с акад. А.Н. Колмогоровым и не только математических: «Андрей Николаевич ходил через нашу дачу на речку ... купаться» (*фото Д.А. Зверевой*)

Фото 5. Живое общение. Слева направо: на переднем плане: Д.А. Зверева, Э.Л. Дубов; на втором плане: Т.И. Кузнецова, В.С. Секованов, М.В. Морозова (*фото Д.В. Жаркова*)

Фото 6. После заседания фото на память. Слева направо: в первом ряду – Т.Н. Козлова, В.Н. Шапкина, Т.И. Кузнецова, В.С. Секованов, М.В. Морозова; во втором ряду – Д.В. Жарков, Э.Л. Дубов, В.В. Цукерман, А.Н. Павлов, Г.В. Кондратьева, Т.Н. Брянцева (*фото Д.А. Зверевой*)

Фото 7. В музее МГОУ на заседании семинара 8 декабря 2016 года. Слева направо: В.А. Попов, А.В. Нелаев, Т.И. Кузнецова, Э.Л. Дубов, С.Ф. Шилова (*фото В.А. Попова*)

Фото 8. В Российской государственной библиотеке на торжественном вечере «110 лет академику А.Н. Колмогорову» 24 апреля 2013 года (*фото С. Романчука*)

Фото 9. Даниил Дубов

Кузнецова Татьяна Ивановна, профессор кафедры естественнонаучных и гуманитарных дисциплин Института русского языка и культуры МГУ имени М.В. Ломоносова, доктор педагогических наук, доцент. Руководитель Всероссийского научно-методического семинара «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом».

E-mail: kuzti45@gmail.com

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2020 год (включая стоимость пересылки) – 150 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2020 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 100 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

V. Volkov, V. Sherstukov. On Arithmetic Properties of the Number $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ **2**

It is shown that this number is irrational and is an integer algebraic number of degree equal to six.

S. Dvoryaninov. "A or B" and "either A or B" **8**

The article recalls the meaning of disjunction, conjunction, excluding "either-or". Compliance of set-theoretic operations to logical connectives and equations is shown.

B. Sagindykov. Complex Numbers in Planimetry Problems **14**

The main purpose of this paper is to demonstrate solution of planimetry problems by the method of complex numbers.

V. Fedoseev. A Method of Calculating the Logarithmic Function as a Project Research Topic **21**

The article shows how, based on the material of the course of calculus, it can be constructed an efficient mqthod of calculating the logarithmic function.

N. Kalinin. How to Teach University Mathematics Online? **25**

In 2020, a coronavirus epidemic has happened and a lot of universities switched to online learning to reduce the number of social contacts between people and thereby reduce the burden on the health care system. The note provides considerations on how to teach mathematicians in such conditions.

A. Neklyudov. On the Properties of the Vronsky Determinant **33**

We consider the question of sufficient conditions for the linear dependence of a system of functions in terms of the Vronsky determinant of this system.

S. Pukhov. Simplified Justification of the Most Important Changes of Variable in Multiple Integral **38**

The paper gives rigorous proofs of the transition in the integral to polar and spherical (including generalized) coordinates, significantly simplified compared to those available in the literature.

K. Kozerenko. Aristotle's Prohibition **49**

The article describes the history of the ban on the use of the concept of actual infinity in mathematics, introduced by Aristotle and overcome only in the 19th century in connection with the development of modern set theory.

T. Kuznetsova. Throughout his Life, he Carried Two Loves — with the Names "Mathematics" and "Chess". In the memory of Eduard L. Dubov **51**

The article is dedicated to Eduard Lvovich Dubov, a member of the section of the Moscow Secondary School Mathematical Society, General Secretary of the International School Chess Union, Honorary FIDE Member, and the oldest and most active participant of the seminar "Advanced ideas in teaching mathematics in Russia and abroad".

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >