ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцать четвертый

№ 2 (94)

апрель - июнь 2020 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 2 (94), 2020 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2020 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 20.07.2020 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (94), апрель – июнь 2020 г.

Содержание

Простые геометрические факты, помогающие решить задачу по геометрии

А. Н. Афанасьев

В годы работы в школе, особенно в 80-х, 90-х годах журнал «Математика в школе» был основным помощником, источником интересных материалов для учителей математики. Сейчас, с развитием интернета ситуация немножко другая. В указанных годах автор статьи, работая в школе, активно участвовал в конкурсе по решению задач на страницах этого журнала. Участие в конкурсе помогало обучению одаренных детей, подготовке олимпиадников, подготовке выпускников к поступлению в престижные высшие учебные заведения страны. Все приведенные ниже решения — это незначительно отредактированные решения, в свое время отправленные автором в редакцию журнала.

Одним из важных моментов при решении олимпиадной задачи по геометрии является момент осознания идеи задачи, геометрического факта, вокруг которой, как на каркасе, построена эта задача. Если решатель увидел эту идею, можно считать, что половина дела сделана. Эта идея может быть и отличной от первоначальной идеи автора задачи. Главное то, что она приведет вас к успеху. Поэтому в начале решения каждой задачи указан простой и вполне очевидный геометрический факт или прием, который помогает решить эту задачу. Если требуется, приведенное утверждение легко доказать. Но мы будем опираться на эти утверждения без доказательств.

Так как все примеры взяты из раздела «Задачи» журнала «Математика в школе», в начале каждого примера мы указываем номер задачи, номер и год выпуска журнала и автора задачи (если таковой указан). Примеры разбиты по тематике.

Площади и объемы

(3987, 1995-2) Дан параллелограмм $ABCD$. На сторонах BC и CD и диагонали BD взяты соответственно точки N, K и M так, что $MN||AB$, $MK||AD$. Отрезки AN и AK пересекают диагональ BD в точках E и F соответственно. Доказать, что площадь треугольника AEF равна сумме площадей треугольников BEN и FKD.

Решение. *Треугольники с общим основанием, вершины которых лежат на прямой, параллельной их основанию, равновелики.*

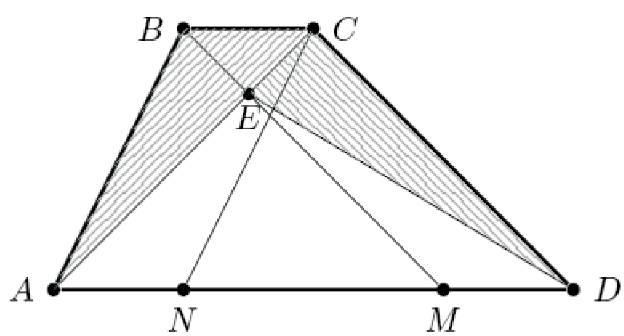


Рис. 1

Так как $MN||AB$, то $S_{ABN} = S_{ABM}$, а треугольник ABE — общая часть этих двух треугольников. Поэтому

$$S_{BEN} = S_{AEM}.$$

Аналогично доказывается, что
$$S_{AMF} = S_{FKD}.$$
Поэтому
$$S_{AEF} = S_{AEM} + S_{AMF} = S_{BEN} + S_{FKD},$$
что и требовалось доказать.

(4225, 1997-2) В трапеции $ABCD$, $(AD||BC,\ AD > BC)$ на диагонали AC взята точка E такая, что $BE||CD$. Доказать, что площади треугольников ABC и DEC равны.

Решение. *Если два параллелограмма имеют общую сторону, а их стороны, противоположные этой стороне лежат на одной прямой, то эти параллелограммы равновелики.*

Пусть точки M и N на AD таковы, что $BM||CD$ и $CN||BA$. Тогда параллелограммы $ABCN$ и $BCDM$ равновелики.

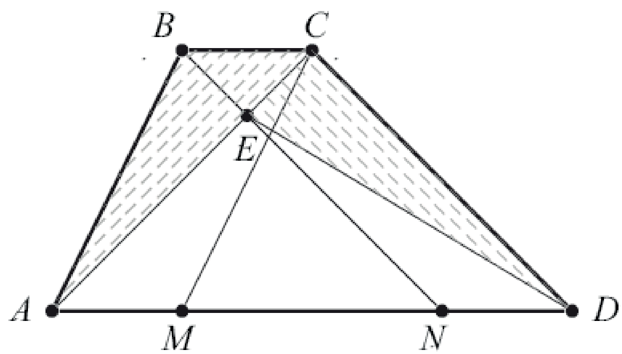


Рис. 2

А так как площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABCN$, а площадь треугольника DEC — половине площади параллелограмма $BCDM$, то площади этих треугольников равны.

(4188, 1987-6) Доказать, что на плоскости данного треугольника ABC существует прямая l такая, что пересечение треугольника ABC и треугольника $A'B'C'$, симметричного ему относительно прямой l, имеет площадь более $2/3$ площади треугольника ABC.

Решение. *Пусть a, b, c – длины сторон треугольника, причем $a \geq b \geq c$. Тогда верно хотя бы одно из двух неравенств:*
$$a - b < b \quad \text{\textit{или}} \quad b - c < c.$$
(В противном случае получим противоречие с неравенством треугольника.)

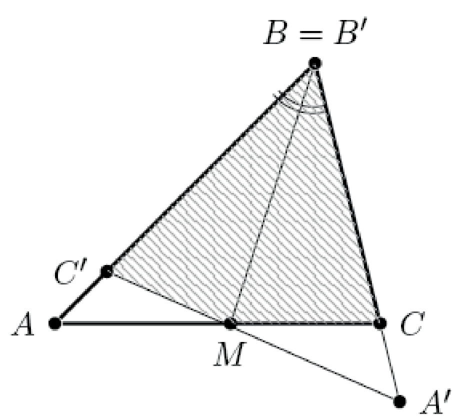


Рис. 3

Пусть для определенности $AB \geq BC \geq AC$ (смотри рисунок 3). Верно хотя бы одно из двух неравенств:

$$AB - BC < BC \quad \text{или} \quad BC - AC < AC.$$

Тогда: а) если $AB - BC \leq BC$, то биссектриса угла ABC является искомой прямой; б) если $BC - AC \leq AC$, то биссектриса угла ACB является искомой прямой. Докажем утверждение а) (утверждение б) доказывается аналогично).

Пусть BM – биссектриса и C' – точка на стороне AB, симметричная точке C относительно этой биссектрисы. Так как $AC' < C'B$, то $S_{AC'M} < S_{MCB}$.

$$S_{ABC} = S_{AC'M} + 2S_{MCB} < 3S_{MCB} \Rightarrow S_{MCB} > \frac{S_{ABC}}{3}.$$

$$S_{MC'BC} = 2S_{MCB} > \frac{2}{3}S_{ABC}.$$

(4133, 1996-2, Н.Х. Агаханов, Москва) Площадь ортогональной проекции грани ABB_1A_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на плоскость, перпендикулярную диагонали A_1C, равна S. Чему равна площадь ортогональной проекции параллелепипеда на эту плоскость?

Решение. *При ортогональной проекции образами параллельных равных отрезков являются параллельные равные отрезки. Точки, лежащие на перпендикуляре к плоскости проекции, переходят в одну точку.*

Рассмотрим ортогональную проекциию параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на плоскость, перпендикулярную диагонали A_1C. Через A', B', D', B_1', C_1' и D_1' обозначим образы точек A, B, D, B_1, C_1 и D_1 соответственно, а так как образы точек C и A_1 при этом совпадут, то обозначим его через O. Тогда получим, что проекция параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — шестиугольник $A'B'B_1'C_1'D_1'D'$.

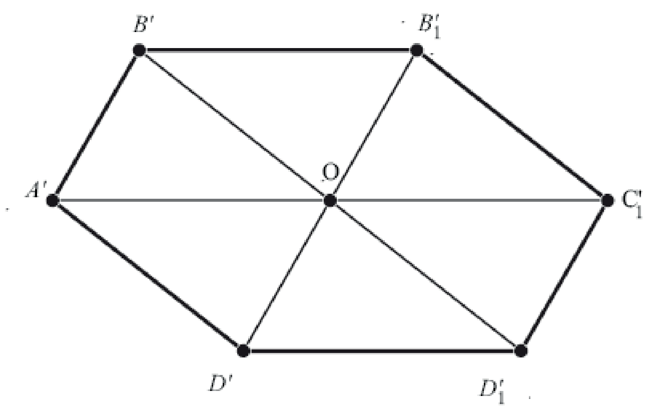


Рис. 4

Из параллельности и равенства соответствующих сторон параллелепипеда следует, что шестиугольник $A'B'B_1'C_1'D_1'D'$ разбивается на 6 равных треугольников а проекция грани ABB_1A_1 — на два таких треугольника. Следовательно искомая площадь равна $3S$.

(4213, 1997-1, Чехия и Словакия) Дана правильная четырехугольная пирамида со стороной основания $2a$ и боковым ребром $a\sqrt{17}$. Пусть M — произвольная точка внутри этой пирамиды. Рассмотрим пять пирамид с одной вершиной M, основания которых на плоскостях граней данной пирамиды и таких, что каждая из них подобна исходной пирамиде. Доказать, что сумма полных поверхностей этих пяти пирамид не меньше одной пятой от полной поверхности данной пирамиды. Найти все точки, для которых выполняется равенство.

Решение. *Если грани пирамиды равновелики, то сумма расстояний от внутренней точки пирамиды до ее граней равна высоте этой пирамиды.*

Апофема боковой грани данной пирамиды равна $2a$, а высота пирамиды $h = a\sqrt{15}$. Поэтому площади всех боковых граней данной пирамиды равны $S_1 = \dfrac{4a \cdot 2a}{2} = 4a^2$, а площадь основания также равна $S_0 = 4a^2$. Следовательно, если h_1, h_2, h_3 и h_4 — расстояния от точки M до боковых граней данной пирамиды, а h_5 — расстояние от этой точки до основания данной пирамиды, то $h_0 + \dots h_5 = h$.

Полные поверхности $S_1, \dots S_5$ и S подобных пирамид относятся как квадраты их высот, поэтому

$$S_1 = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2 S, \ \dots, \ S_5 = \left(\frac{h_5}{h}\right)^2 S,$$

где S — площадь полной поверхности данной пирамиды. Следовательно

$$S_1 + \dots, + S_5 = \frac{h_1^2 + \dots h_5^2}{h^2} \cdot S.$$

Так как

$$(h_1 - h_2)^2 + (h_1 - h_3)^2 + \dots + (h_4 - h_5)^2 \geq 0, \tag{1}$$

то

$$4\left(h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_5^2\right) \geq 2\left(h_1h_2 + h_1h_3 + \dots + h_4h_5\right).$$

Поэтому, так как

$$h^2 = h_1^2 + \dots + h_5^2 + 2\left(h_1h_2 + \dots + h_4h_5\right) \leq 5\left(h_1^2 + \dots + h_5^2\right),$$

то

$$S_1 + \dots + S_5 = \frac{h_1^2 + \dots + h_5^2}{h^2} \cdot S \geq \frac{h_1^2 + \dots + h_5^2}{5\left(h_2^2 + \dots + h_5^2\right)} \cdot S = \frac{S}{5}.$$

Равенство в последнем неравенстве выполняется, так же как и в неравенстве (1), только при условии $h_1 = h_2 = \dots = h_5$.

Равносторонний треугольник

(3994, 1995-2) На стороне AB равностороннего треугольника ABC взята точка A_1. Точка A_2 — проекция точки A_1 на сторону BC, точка A_3 — проекция A_2 на сторону CA, точка A_4 — проекция A_3 на сторону AB и.т.д.. Найти все положения точки A_1, при которых $A_{94} = A_1$.

Решение. *Решение этой задачи основано на периодичности последовательности длин отрезков* AA_{3i+1}, $i = 0, 1, 2, \dots$.

Легко проверить, что если $AA_1 = \frac{1}{3}AB$, то $A_4 = A_1$, и следовательно $A_{94} = A_{3\cdot 31+1} = A_1$. Докажем, что если $AA_1 \neq \frac{1}{3}AB$, то $A_{94} \neq A_1$.

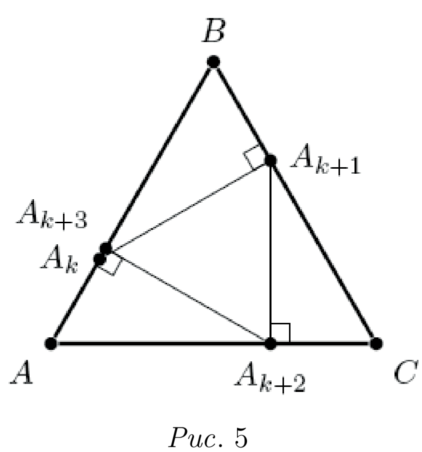


Рис. 5

Возьмем длину стороны треугольника за 1 и пусть $k = 3i + 1, A_kA = x, i = 0, 1, 2, \ldots$. Так углы A_k, A_{k+1} и A_{k+2} соответственно прямоугольных треугольников $A_kA_{k+1}B$, $A_{k+1}A_{k+2}C$ и $A_{k+2}A_{k+3}A$ равны 30°, то

$$A_kB = 1 - x, \qquad BA_{k+1} = \frac{1-x}{2}, \qquad A_{k+1}C = 1 - \frac{1-x}{2} = \frac{1+x}{2},$$
$$CA_{k+2} = \frac{1+x}{4}, \quad A_{k+2}A = 1 - \frac{1+x}{2} = \frac{3-x}{4}, \quad AA_{k+3} = \frac{3-x}{8}.$$

Следовательно, если $AA_{3(i-1)+1} < \frac{1}{3}$, то $A_{3i+1} > \frac{3-\frac{1}{3}}{8} = \frac{1}{3}$ и $A_{3(i+1)+1} < \frac{3-\frac{1}{3}}{8} = \frac{1}{3}$.

То есть если $AA_1 \neq \frac{1}{3}$, то $AA_{3i+1} \neq \frac{1}{3}$ для любого натурального числа i.

(4128,1996-2, Л.П. Купцов, Москва) Дан правильный треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка D, а на продолжении стороны BC за точку C — точка E так, что $BD = DE$. Доказать, что $AD = CE$.

Решение. *Решению этой задачи помогает построение дополнительного равностороннего треугольника.*

Пусть DF — высота равнобедренного треугольника BDE, опущенная на основание BE, а L — точка, симметричная точке C относительно точки F (см. рис. 6).

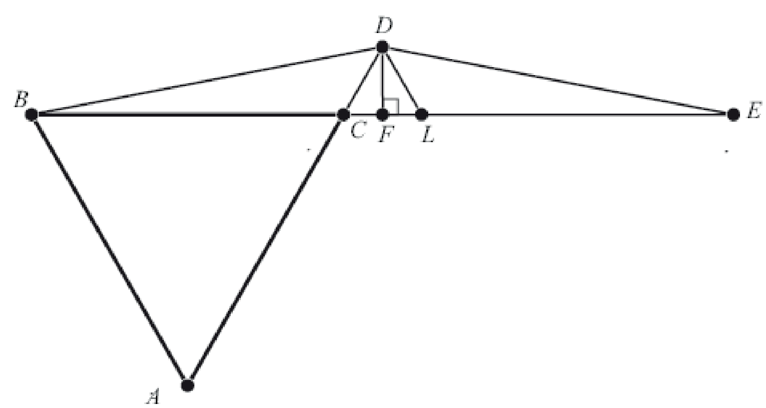


Рис. 6

Тогда треугольник CDL — равносторонний и $LE = BC = AC$. Следовательно,

$$AD = AC + CD = LE + CL = CE.$$

(4210, 1997-1, Белоруссия) Даны два равносторонних треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, причем C_1 лежит внутри отрезка A_2B_2, C_2 — внутри отрезка A_1B_1, A_1 и A_2 лежат по одну сторону от прямой C_1C_2. Пусть X_2 и X_1 — точки на лучах A_1C_1 и A_2C_2 соответственно такие, что $A_1X_2 = A_1C_2$ и $A_2X_1 = A_2C_1$. Найти угол между прямыми B_1X_1 и B_2X_2.

Решение. *При поворотах и параллельных переносах величины углов не меняются.*

Пусть M — точка пересечения отрезков B_1C_1 и C_2B_2. Тогда треугольники C_2B_1M и C_1B_2M подобны, так как $\angle B_1 = \angle B_2$ и $\angle B_1MC_2 = \angle B_2MC_1$. Следовательно, $\angle B_1C_2B_2 = \angle B_2C_1B_1$, и потому

$$\angle B_1C_2A_2 = \angle B_1C_2B_2 + \angle B_2C_2A_2 = \angle B_2C_1B_1 + \angle B_1C_1A_1 = \angle B_2C_1A_1.$$

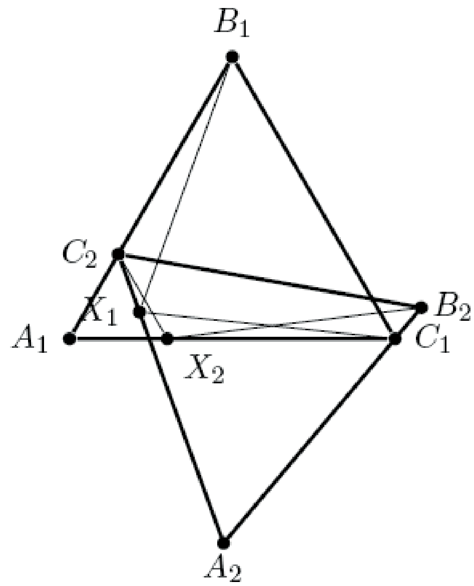


Рис. 7

Кроме того, $B_2C_1 = X_1C_2$ и $C_1X_2 = C_2B_1$, поэтому треугольники $X_1C_2B_1$ и $B_2C_1X_2$ равны. Следовательно, $\angle A_1B_1X_1 = \angle B_2X_2C_1$. Но тогда угол между прямыми B_1X_1 и B_2X_2 равен углу A_1, так как получается из него при помощи параллельного переноса и поворота на угол $\angle A_1B_1X_1$. То есть угол между прямыми B_1X_1 и B_2X_2 равен $60°$.

(4087, 1996-1) На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что

$$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 2 : 1.$$

Доказать, что если треугольник $A_1B_1C_1$ — равносторонний, то и треугольник ABC — равносторонний.

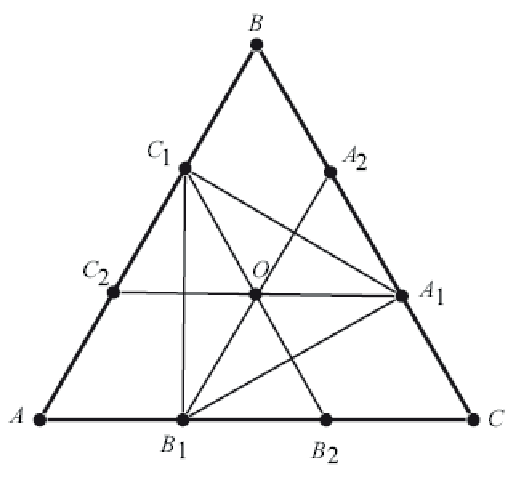


Рис. 8

Решение. *Две медианы равностороннего треугольника пересекаются под углом* $\angle BCA = 60°$.

Пусть точки C_2, A_2 и B_2 — середины отрезков AC_1, BA_1 и CB_1 соответственно. Тогда $B_1A_2 || AB$ и $C_1B_2 || BC$, а на отрезках C_1B_2, B_1A_2 и A_1C_2 лежат медианы треугольника $A_1B_1C_1$. Поэтому, если треугольник $A_1B_1C_1$ — правильный, то

$$\angle B_1OB_2 = \angle C_1OC_2 = \angle A_1OA_2 = 60°,$$

где O — точка пересечения прямых C_1B_2, B_1A_2 и A_1C_2. Следовательно,

$$\angle ABC = \angle BAC = \angle BCA = 60^\circ,$$

что и требовалось доказать.

Наибольшее и наименьшее значения, крайние положения

(3996, 1995-2, С.Л. Берлов, С-Петербург) Длины ребер тетраэдра равны 5, 5, 8, 9, 13, 13. Какой наименьший периметр может иметь грань такого тетраэдра?

Решение. *Воспользуемся приемом "Оценка и пример" и тем фактом, что если длины трех отрезков удовлетворяют неравенству треугольника, то существует треугольник с такими сторонами.*

Наименьший возможный периметр треугольника составленного при помощи данных отрезков — $5 + 5 + 8 = 18$. Примером тетраэдра с такой гранью служит тетраэдр $ABCD$, в котором

$$AB = BC = 5,\ AC = 8,\ DB = 9,\ AD = DC = 13.$$

Существование такого тетраэдра следует из существования четырех треугольников (выполнения неравенств треугольника):

$$ABC,\ ABD,\ ACD,\ BCD.$$

(4007, 1995-3) На основании AC равнобедренного треугольника ABC выбрали точку D, а на его продолжении за вершину C — точку E так, что $CE = AD$. Доказать, что $BD + BE > AB + BC$.

Решение.*Дополнительное построение, неравенство треугольника.*

Возьмем на AC точку D_1 — такую, что $CD_1 = AD = CE$. Тогда ясно, что $BD_1 = BD$.

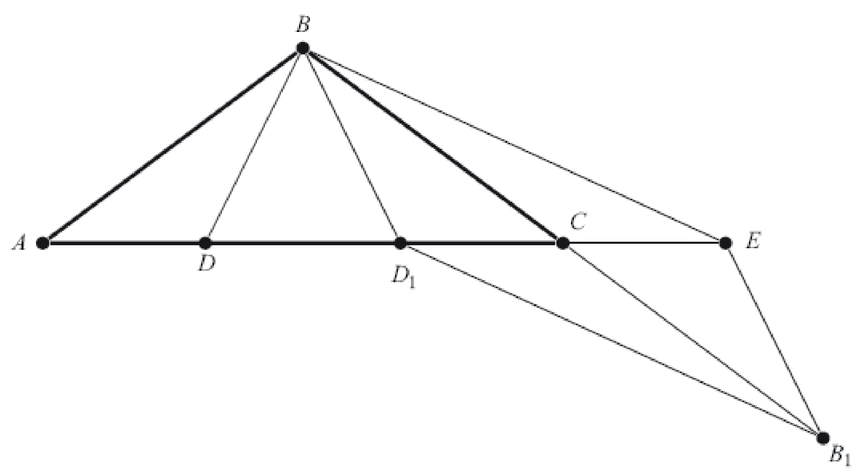


Рис. 9

Рассмотрим параллелограмм BEB_1D_1, где B_1 — точка, симметричная точке B относительно точки C. Так как $BB_1 = 2BC = AB + BC$, то

$$BD + BE = BD_1 + BE = B_1E + BE > BB_1 = AB + BC,$$

что и требовалось доказать.

(4226, 1997-2) Доказать, что для любого выпуклого многоугольника существуют два параллелограмма, гомотетичных с коэффициентом 2, и таких, что один из них содержит данный многоугольник, а другой содержится в нем.

Решение. *Рассмотрим диагональ многоугольника и из его вершин, лежащих по одну из сторон этой диагонали, выберем наиболее удаленную от этой диагонали. Если мы проведем через эту вершину прямую, параллельную данной диагонали, то по одну из сторон от этой прямой не окажется ни одной точки многоугольника.*

Пусть A_iA_j — одна из наибольших диагоналей выпуклого многоугольника $A_1A_2\dots A_n$, а A_s — наиболее удаленная от прямой A_iA_j вершина по одну сторону от этой прямой, и A_t — такая же вершина по другую сторону от этой же прямой.

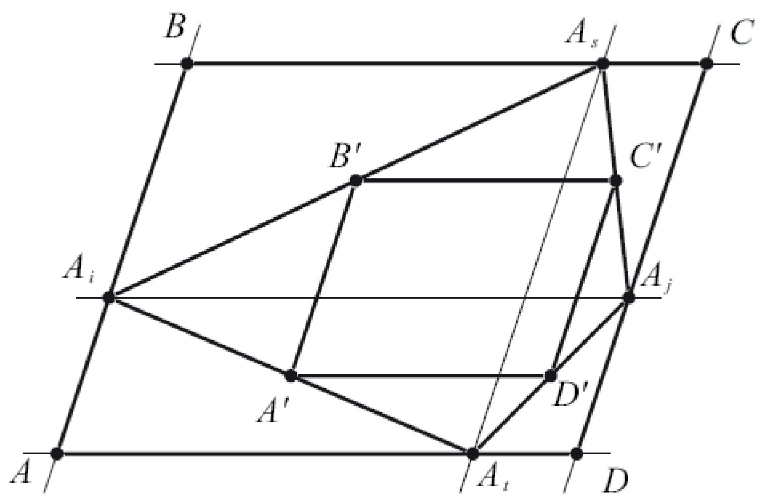


Рис. 10

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ такой, что прямые AD и BC параллельны прямой A_iA_j и проходят соответственно через точки A_t и A_s, а прямые AB и CD параллельны прямой A_sA_t и проходят соответственно через точки A_i и A_j. При нашем выборе точек A_i, A_j, A_s и A_s, данный многоугольник содержится в параллелограмме $ABCD$. Пусть A', B', C' и D' — соответственно середины отрезков A_tA_i, A_iA_s, A_sA_j и A_jA_t. Очевидно параллелограммы $ABCD$ и $A'B'C'D'$ гомотетичны с коэффициентом гомотетии 2, а так как данный многоугольник выпуклый, то внутри четырехугольника $A_iA_sA_jA_t$, и тем более внутри параллелограмма $A'B'C'D'$ нет граничных точек этого многоугольника.

(4230, 1997-2) На плоскости даны 6 точек таких, что расстояние между любыми двумя из них не меньше 1. Доказать, что среди них найдутся две точки, расстояние между которыми не меньше $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

Решение. *Длина хорды прямо пропорциональна синусу опирающегося на нее центрального угла (рассматриваются углы, не превосходящие* 180°*.). Другими словами, хорда тем больше, чем больше опирающийся на нее центральный угол.*

Пусть A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 — шесть точек на плоскости, и расстояние между любыми двумя из них не меньше 1. Пусть $A_0' = A_0$, а A_1', A_2', A_3', A_4', A_5' — точки окружности с центром A_0 и радиусом 1, лежащие на отрезках A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, A_0A_4, A_0A_5 соответственно. Очевидно, расстояния между любыми двумя точками множества

$$\{A_0', A_1', A_2', A_3', A_4', A_5'\}$$

не больше соответствующих расстояний между точками множества

$$\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}.$$

Поэтому достаточно рассматривать только такие множества точек

$$\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\},$$

что точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 лежат на окружности ω с центром в точке A_0 и радиусом 1. Тогда задача сводится к тому, как расположить точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 на окружности ω так, что наибольшее расстояние между двумя из них (диаметр этого множества) было наименьшим. Пусть точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 расположены последовательно на окружности ω (смотри рисунок 11),

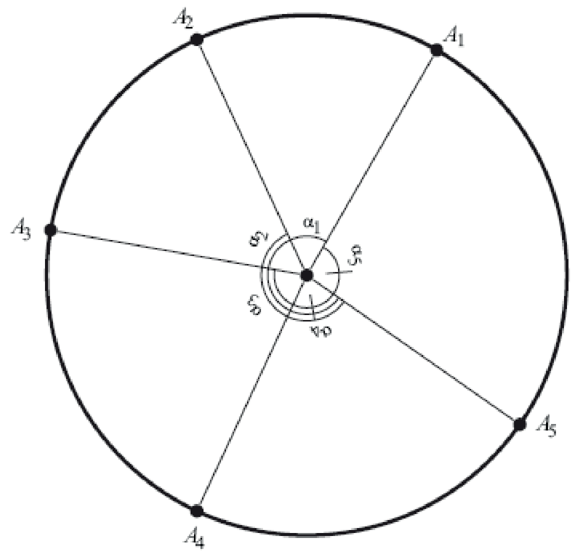


Рис. 11

а α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 — величины углов $\angle A_1A_0A_2$, $\angle A_2A_0A_3$, $\angle A_3A_0A_4$, $\angle A_4A_0A_5$, $\angle A_5A_0A_1$, соответственно. Если $\alpha_1 + \alpha_2 = 144°$, то A_1A_3 равен диагонали правильного пятиугольника, вписанного в окружность ω и равен $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Предположим, что все попарные расстояния между точками меньше, чем $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Тогда сумма любых двух смежных центральных углов должно быть либо меньше, чем 144°, либо больше чем 216°. Во втором случае сумма оставшихся трех углов оказывается менее, чем 144°, и следовательно, хотя бы один из этих трех углов меньше 60°, что противоречит условию, что расстояние между любыми двумя точками больше 1. Поэтому

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 < 144° \\ \alpha_2 + \alpha_3 < 144° \\ \alpha_3 + \alpha_4 < 144° \\ \alpha_4 + \alpha_5 < 144° \\ \alpha_5 + \alpha_1 < 144° \end{cases}$$

Складывая эти неравенства, получим неравенство

$$2\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) < 720°,$$

что противоречит равенству

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 360°.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Углы

(4168, 1996-4, А.Н. Дахин, Новосибирск) Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$, $\angle ABC = 100°$) взята точка M так, что $\angle ABM = 20°$, $\angle BAM = 10°$. Найти угол BMC.

Решение. *Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, является также биссектрисой угла, из которого она опущена.*

Заметим, что если M' — точка, симметричная точке M относительно оси симметрии треугольника ABC, то треугольник MBM' — равносторонний.

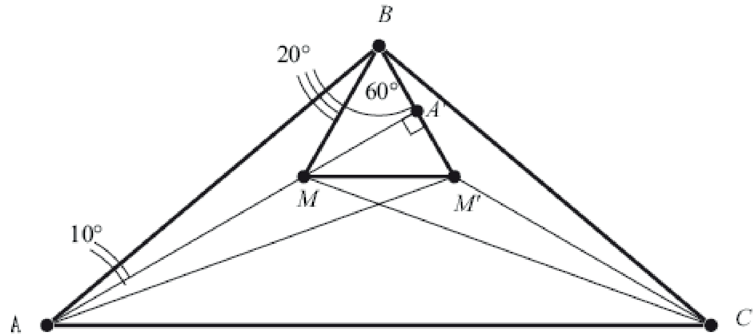


Рис. 12

Пусть A' — точка пересечения прямых AM и BM'. Тогда, так как $\angle BAA' = \angle BAM = 10°$ и $\angle ABA' = 100° - 20° = 80°$, то $AA'B = 90°$. А так как треугольник MBM' — равносторонний, то AA' является одновременно и высотой, и медианой треугольника BAM'. Поэтому $\angle AM'B = 80°$. Следовательно,

$$\angle BMC = \angle AM'B = 80°.$$

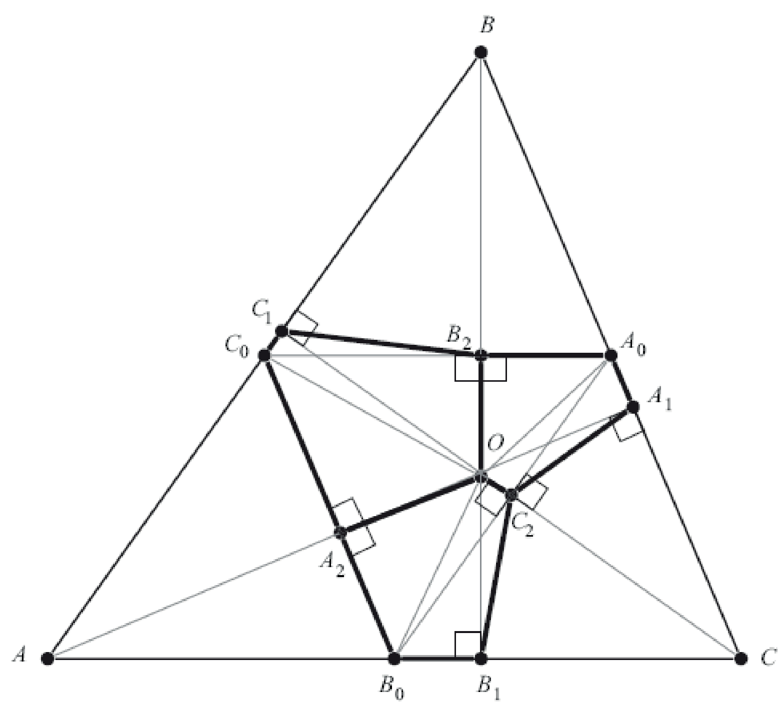


Рис. 13

(4057, 1995-5, Д.А. Терешин, Москва) Точки A_2, B_2 и C_2 — середины высот AA_1, BB_1 и CC_1 соответственно треугольника ABC. Найдите сумму углов $B_2A_1C_2$, $C_2B_1A_2$ и $A_2C_1B_2$ (рис. 13).

Решение. *Для того, чтобы пятиугольник $ABCDE$ был вписанн в окружность с диаметром AD, достаточно, чтобы углы $\angle ABD$, $\angle ACD$ и $\angle AED$ были прямыми.*

Пусть O — точка пересечения высот, а A_0, B_0 и C_0 — середины сторон BC, AC и AB соответственно треугольника ABC. Тогда C_0B_0, C_0A_0 и A_0B_0 — средние линии треугольника ABC, причем $C_0B_0 \perp AA_1$, $C_0A_0 \perp BB_1$ и $A_0B_0 \perp CC_1$, а A_2, B_2 и C_2 — соответственно точки пересечения этих взаимно перпендикулярных прямых. Поэтому

$$\angle OA_2B_0 = \angle OB_1B_0 = \angle OC_2B_0 = 90^\circ.$$

А это означает, что пятиугольник $A_2OC_2B_1B_0$ вписан в окружность с диаметром OB_0. Тогда $\angle A_2B_1C_2 = \angle A_2B_0C_2 = \angle A_0B_0C_0$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу.

Аналогично, пятиугольники $A_2OB_2C_1C_0$ и $A_1A_0B_2OC_2$ вписанны в окружности с диаметрами C_0O и A_0O соответственно. На рисунке 3 эти пятиугольники изображены жирными линиями.

Следовательно, $\angle A_2C_1B_2 = \angle A_0C_0B_0$ и $\angle B_2A_1C_2 = \angle B_0A_0C_0$. Теперь находим искомую сумму:

$$\angle B_2A_1C_2 + \angle C_2B_1A_2 + \angle A_2C_1B_2 = \angle B_0A_0C_0 + \angle C_0B_0A_0 + \angle A_0C_0B_0 = 180^\circ.$$

(4194, 1996-6, Олимпиада США, 1996) Точка P лежит внутри треугольника ABC, причем $\angle PAB = 10^\circ$, $\angle PBA = 20^\circ$, $\angle PCA = 30^\circ$, $\angle PAC = 40^\circ$. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

Решение. *Если основание высоты треугольника делит сторону треугольника пополам, то треугольник — равнобедренный.*

Пусть H — основание высоты, проведенной из вершины B, тогда $\angle BAC = 10^\circ + 40^\circ = 50^\circ$. Пусть O — точка на BH такая, что $\angle PAO = 10^\circ$. Тогда, так как AP — биссектриса угла BAO и BP — биссектриса угла ABO, то OP является биссектрисой угла BOA. Поэтому $\angle BOP = \dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$. А это означает, что точки P, O и C лежат на одной прямой.

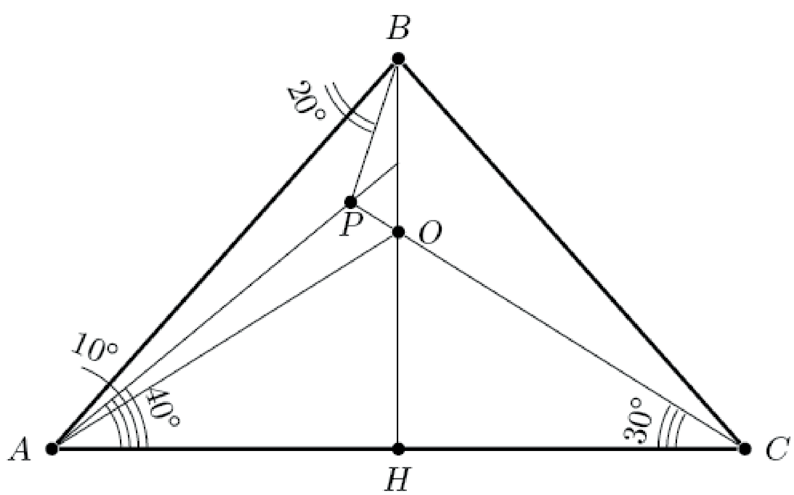


Рис. 14

Так как $\angle OAH = 30^\circ$, то треугольник AOC равнобедренный и, значит, основание высоты делит основание пополам. Следовательно, треугольник ABC также равнобедренный.

Взаимное расположение точек, линий и поверхностей

(4048, 1995-4, А.Б. Скопенков, Москва) В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность ω пересекающая стороны AB и BC в точках E и F

соответственно. К окружности ω в точках E и F проведены касательные. Доказать, что точка их пересечения лежит на медиане треугольника, проведенного из вершины B.

Решение. *Медианы, проведенные из общей вершины треугольников, гомотетичных с центром в этой вершине, лежат на одной прямой.*

Пусть O — центр окружности ω, G — точка пересечения данных касательных. Через точку G проведем параллельно стороне AC прямую и продолжим стороны AB и BC до пересечения с этой

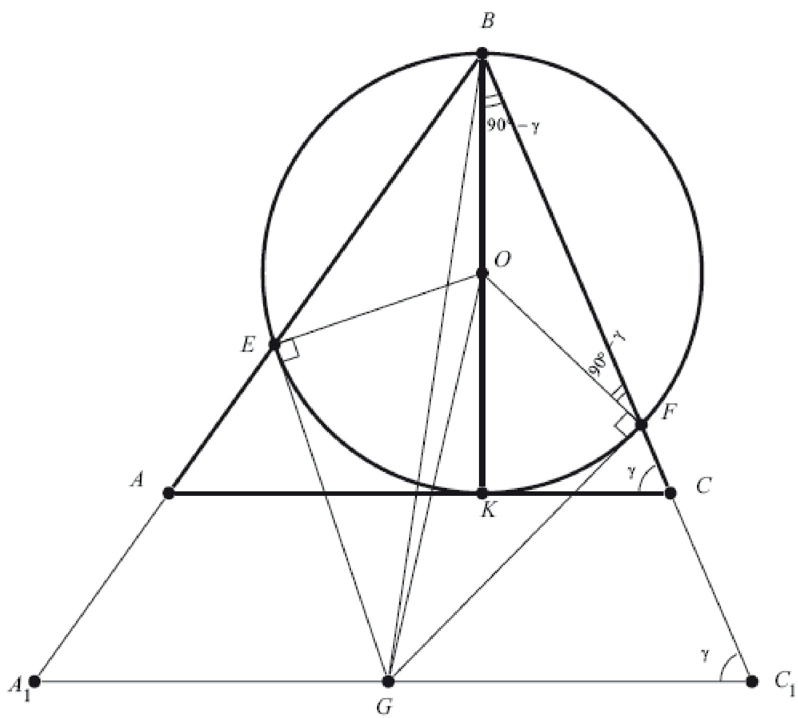


Рис. 15

прямой в точках A_1 и C_1 соответственно. Так как треугольники ABC и A_1BC_1 гомотетичны, достаточно доказать, что $A_1G = GC_1$. Пусть $\angle C = \gamma$. Тогда, так как $\angle OFG = \angle OEG = 90°$, то $\angle BFO = \angle KBC = 90° - \gamma$.

$$\angle GFC_1 = 180° - \angle BFO - \angle OFG = 180° - (90° - \gamma) - 90° = \gamma.$$

Так как $\angle BCA = \angle BC_1A_1 = \gamma$, то $\angle BC_1A_1 = \angle GFC$ и следовательно, $FG = GC_1$. Аналогично доказывается, что $EG = A_1G$, а так как $EG = FG$, то

$$A_1G = GC_1.$$

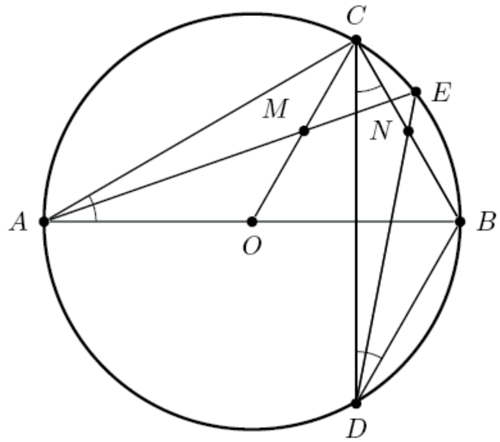


Рис. 16

(4055, 1995-4, В.О. Гордон, Чита) Хорда CD окружности с центром O перпендикулярна ее диаметру AB, а хорда AE делит пополам радиус OC. Доказать, что хорда DE делит пополам хорду BC, рис. 16.

Решение. *Пусть точки M и M' на сторонах BC и $B'C'$ соответственно подобных треугольников ABC и $A'B'C'$ таковы, что $\angle MAB = \angle M'A'B'$. Тогда если AM — медиана треугольника ABC, то $A'M'$ — медиана треугольника $A'B'C'$.*

Пусть M – точка пересечения отрезков OC и AE, а N – точка пересечения отрезков CD и AE. Так как $CD \perp AB$, то треугольник CBD равнобедренный. Так как $\angle CAB = \angle CDB$, то равнобедренные треугольники AOC и CBD подобны, причем $\angle CAM = \angle CDN$.

Следовательно, так как AM является медианой треугольника COA, то DN является медианой треугольника CBD, что и требовалось доказать.

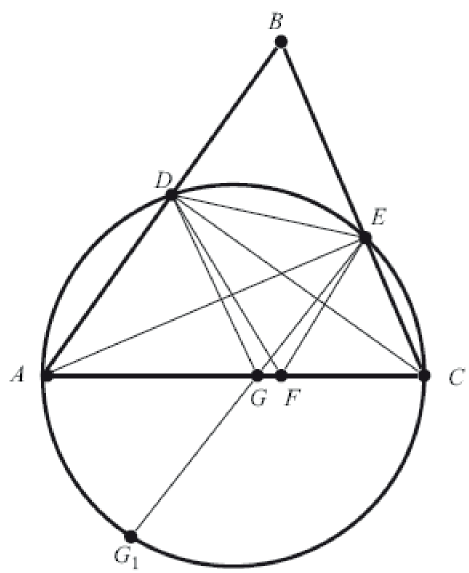


Рис. 17

(4013, 1995-3, С.Л. Берлов) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE и CD. Различные точки F и G на стороне AC таковы, что $DF||BC$ и $EG||AB$. Доказать, что четырехугольник $DEFG$ — вписанный (рис. 17).

Решение. *Если $\angle ABD = \angle ACD$, то четырехугольник $ABCD$ — вписанный.*

Проведем на AC как на диаметре окружность. Так как $DC \perp AB$ и $AE \perp BC$ то точки D и E окажутся на проведенной окружности.
Продолжим EG до пересечения с окружностью в точке G_1. Так как $AD || EG_1$ то $DG_1 = AE$ и следовательно,

$$\angle DEG = \angle BCA. \tag{2}$$

С другой стороны, так как $DF || BC$, то

$$\angle DFA = \angle BCA. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\angle DEG = \angle DFA = \angle DFG.$$

Последнее означает, что четырехугольник $DEFG$ — вписанный.

(4167, 1996-4, Е.М. Гольберг) Трапеция $ABCD$ ($AB || CD$) такова, что окружность, описанная около треугольника ABD, касается прямой BC. Доказать, что окружность, описанная около треугольника BCD, касается прямой AD.

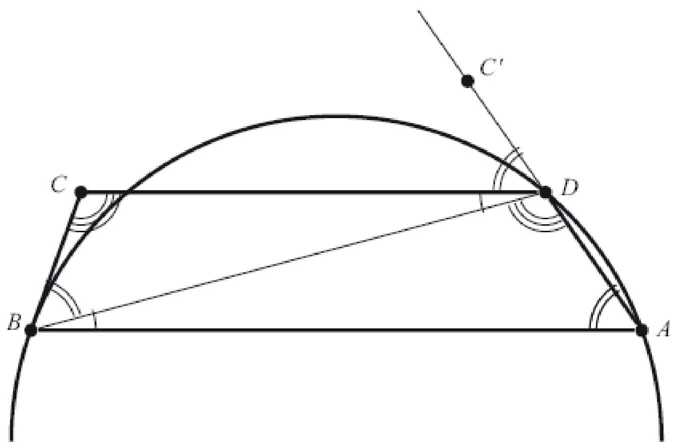


Рис. 18

Решение. *У подобных треугольников, касательные к описанным окружностям этих треугольников, проведенные через их соответствующие вершины образуют равные углы с соответствующими сторонами, выходящими из этих вершин.*

Из параллельности прямых CD и BA следует равенство углов $\angle DBA$ и $\angle CDB$, а так как на дугу между касательной BC и секущей BD опирается вписанный угол DAB, то $\angle CBD = \angle DAB$.

Следовательно, треугольник BCD подобен треугольнику ADB. Поэтому нам достаточно доказать, что прямая AD образует такой же угол с основанием BD треугольника BCD, что и прямая BC с основанием AB треугольника ADB.

Пусть C' — точка на луче AD, за точку D. Тогда

$$\angle C'DB = \angle C'DC + \angle CDB = \angle CBD + \angle DBA = \angle CBA.$$

(4196, 1996-6, Китайская М.О., 1996) Каждая из данных четырех сфер с радиусами 2, 2, 3, 3 касается внешним образом трех остальных. Еще одна, меньшая, сфера касается внешним образом каждой из четырех данных. Найти радиус этой сферы.

Решение. *Центр сферы, касающейся двух одинаковых сфер лежит на серединном перпендикуляре отрезка, соединяющего центры этих сфер.*

Пусть A и B – центры данных сфер w_1 и w_2 радиуса 3, а C и D – сфер w_3 и w_4 радиуса 2, M и N – соответственно середины отрезков AB и CD. Чтобы сфера касалась сфер w_1 и w_2 ее центр должен лежать на плоскости проходящей через точку M перпендикулярно прямой AB, а чтобы касалась сфер w_3 и w_4, ее центр должен лежать на плоскости, проходящей через точку N перпендикулярно прямой CD и поэтому на отрезке MN. Пусть O – центр этой сферы, а x – ее радиус.

Тогда из равнобедренного треугольника ABC ($AB = 6$, $BC = AC = 5$) находим, что $MC = 4$.

Из равностороннего треугольника CMD ($CD = CM = MD = 4$) находим, что $MN = \sqrt{12}$.

Из равнобедренного треугольника OCD ($CO = OD = 2 + x$) выразим ON через $x : ON = \sqrt{x^2 + 4x}$. Из равнобедренного треугольника AOB выразим OM через $x : OM = \sqrt{x^2 + 6x}$. Искомый радиус находим из уравнения

$$\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 + 6x} = \sqrt{12} \Rightarrow x = \frac{12}{22}.$$

(4148, 1996-3, В.И. Чиник, Молдова) Дана окружность с хордой AB. Окружность с центром в точке A пересекает эту окружность в точках M и N, отрезок AB — в точке C. Доказать, что серединный перпендикуляр к отрезку CB делит дугу MB, не содержащую точку A, пополам.

Решение. *Если прямая l является биссектрисой для углов ABC и ABD, то точки B, C и D лежат на одной прямой.*

Через ω_1 и ω_2 соответственно, обозначим первую и вторую окружности из условия задачи. Пусть K и L — точки пересечения окружности ω_1 с серединным перпендикуляром к отрезку CB.

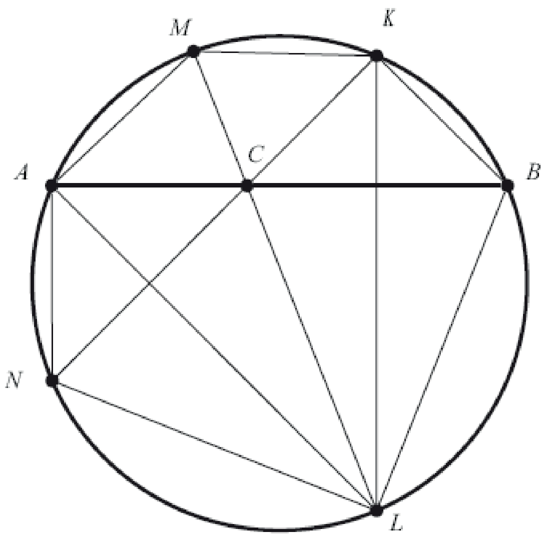


Рис. 19

Докажем, что точки N, C и K лежат на одной прямой. Действительно, если N_1 – точка пересечения прямой KC с окружностью w_1, то треугольники N_1AC и BKC подобны. А так как треугольник BKC –равнобедренный, то $AC = AN_1$, то есть точки N и N_1 совпадают.

Так как KL серединный перпендикуляр к CB, $BL = CL$ и $\angle NKL = \angle LKB$. Следовательно $NL = BL = CL$ и биссектриса угла NLC. А так как $NA = AM$, то отсюда следует, что LA – биссектриса угла NLM, и поэтому точки M, C и L лежат на одной прямой.

Последнее, с учетом того, что KL — является биссектрисой угла CLB означает, что

$$\smile MK = \smile KB.$$

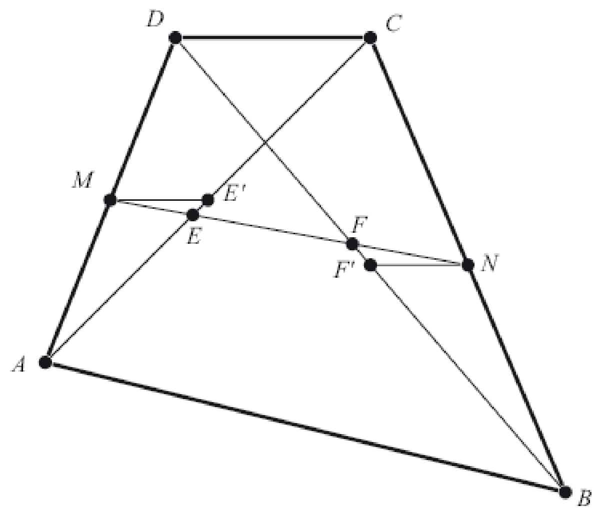


Рис. 20

(4147, 1996-3, Э.Г. Готман, Арзамас) Отрезок MN, соединяющий середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, пересекает ее диагонали AC и BD соответственно в точках E и F. Доказать, что если $ME = NF$, то $ABCD$ — трапеция, рис. 20.

Решение. *Доказательство от противного.*

Если $ME = NF$ и $MN \parallel DC$, то $ABCD$ — трапеция. Действительно, ME является средней линией треугольника ADC, а NF — средней линией треугольника BCD, следовательно EN — средняя линия треугольника ACB. Но тогда $DC||MN||AB$.

А теперь предположим, что $ME = NF$ и $MN \nparallel DC$. Пусть точки E' и F' соответственно на AC и DB таковы, что ME' и NF' параллельны DC (см. рис. 20). Тогда, так как

$$ME = FN,\ ME' = \frac{1}{2}DC = NF',\ \angle EME' = \angle F'NF,$$

то треугольники MEE' и NFF' равны. Следовательно $\angle ME'E = \angle NF'F$. Но так как $NF'||ME'$, то это возможно тогда и только тогда, когда $AC||BD$. Это противоречие доказывает утверждение задачи.

Афанасьев Александр Николаевич,
доцент кафедры методики преподавания математики
Института математики и информатики
Северо-Восточного Федерального Университета
им. М.К. Аммосова, г. Якутск,
кандидат педагогических наук.

E-mail: an.afanasev@s-vfu.ru, afalnik@mail.ru

Современные обобщения теоремы Птолемея

Н. С. Астапов, И. С. Астапов

В статье затрагивается вопрос об устойчивости некоторых ошибок в математических публикациях. Исследуются метрические свойства общего четырехвершинника (тетрона), частными случаями которого являются треугольник, плоский и пространственный четырехугольники, а также тетраэдр. Доказана основная теорема о связи длин сторон, величин плоских углов и величины двугранного угла тетрона. Следствиями этой теоремы являются многие замечательные теоремы о треугольниках, четырехугольниках и тетраэдрах. Получены новые неравенства. Отдельное внимание уделено равногранным тетраэдрам. Сформулированы новые задачи.

Введение

Математика — самая точная из всех наук. Однако и в математических публикациях встречаются опечатки и даже ошибки. В подтверждение этого тезиса приведем цитату из книги [1, с. 340]: "В математической литературе ошибки встречаются в изобилии. Один из выдающихся современных математиков выразил мнение о том, что половина утверждений, публикуемых в многочисленных специальных математических журналах, ошибочна. Быть может, его оценка пессимистична. Однако неоспоримо установлено, что существуют докторские диссертации, ошибочные от первого до последнего утверждения". Там же, на с. 289 отмечено, что лишь у Евклида и Гаусса нет ошибочных теорем. Кроме того, исследованию причин возникновения ошибок в [1] отведены отдельные параграфы: "Ошибки в математике", "Математика и жизнь", "О математической строгости". Книги [2, 3], полностью посвящены анализу ошибок. Но и в очень интересной, информативной и полезной книге [3] есть опечатки, например, определение предела функции нескольких переменных дано неправильно [3, с. 83]: сама точка, при стремлении к которой ищется предел, должна быть исключена из рассмотрения, то есть функция в этой точке может и не быть определена. Отметим, что определение предела функции одной переменной в [3, с. 16] дано правильно. Часто ошибки имеют локальный характер, и долгое время остаются незамеченными. Бывает и наоборот. Общераспространенные и широко используемые сборники задач [4, 5] полны опечаток, иногда по две-три на одну страницу. Опечатки в бракованных изданиях [4, 5] встречаются в формулах, в определениях, в формулировках теорем, в ответах и в условиях задач. Хотя ранние издания этих замечательных сборников таких опечаток не имеют.

Иногда ошибки удивительно устойчиво кочуют из одной книги в другую. Так, например, на протяжении многих десятилетий является устойчивой ошибка в ответе к задаче 455 [6] и в её решении [7, с. 131, №293]. В задаче 455 предлагается решить уравнение $yy''' + 3y'y'' = 0$, преобразовав его к такому виду, чтобы обе части уравнения являлись полными производными. В [7] ошибочное решение возникло при вычислении интеграла $\int \frac{dy^2}{\sqrt{C_2y^2 - C_1}}$. Был рассмотрен лишь случай $C_2 \neq 0$ и получено решение $C_2y^2 = C_2^2(x + C_3)^2 + C_1$, $y = C$. Однако, если $C_2 = 0$, то находим ещё одно решение $y^2 = C_4x + C_5$. Именно это решение потеряно в [6, 7]. Предложим наиболее короткое и простое решение этой задачи.

$$yy''' + 3y'y'' = yy''' + y'y'' + 2y'y'' = (yy'')' + (y'^2)' =$$

$$= (yy'' + y'^2)' = ((yy')')' = (yy')'' = \left(\frac{y^2}{2}\right)''' = 0.$$

Следовательно, решением исходного уравнения является $y^2 = C_1x^2 + C_2x + C_3$. Легко убедиться, что это решение эквивалентно решению, полученному первым способом и представленному в виде

$C_2y^2 = C_2^2(x+C_3)^2+C_1$, $y = C$, $y^2 = C_4x+C_5$. Ещё чаще встречаются ошибки при формулировании обобщенной обратной теоремы Птолемея.

Теорема Птолемея

Теорема Птолемея. *В выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон*

$$mn = ac + bd, \tag{1}$$

где $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ и $d = DA$ — последовательные стороны, $m = AC$ и $n = BD$ — диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ (рис. 1).

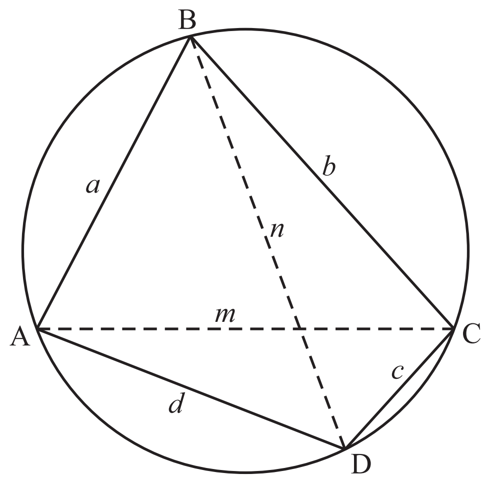


Рис. 1. Теорема Птолемея: $mn = ac + bd$.

Доказательства этой теоремы в литературе чаще всего повторяют доказательство самого Птолемея (ок. 100 — ок. 178), приведенное учёным в книге "Альмагест". Существуют и другие доказательства, например, непосредственно с помощью выражения диагоналей через стороны четырехугольника, с помощью инверсии, с помощью прямой Симсона ([8], с. 55), с применением теоремы косинусов, с помощью комплексных чисел и, наконец, как следствие теоремы Бретшнейдера.

Известно, что для теоремы Птолемея выполняется обратная теорема. Поэтому справедливо утверждение: для того чтобы около выпуклого четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы произведение диагоналей было равно сумме произведений противоположных сторон.

Отметим, что для выпуклого четырехугольника, вписанного в окружность, кроме равенства (1) выполняются также равенства

$$m^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}, \tag{2}$$

$$n^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}, \tag{3}$$

$$m(ab+cd) = n(ad+bc). \tag{4}$$

Оказывается, что и здесь справедливы обратные утверждения: выполнения всего лишь одного из равенств (2), (3) или (4) для плоского выпуклого четырехугольника достаточно, чтобы около него можно было описать окружность. Так как около равнобочной трапеции можно описать окружность, то из равенств (2), (3) получим простое выражение для длин диагоналей такой трапеции $m^2 = n^2 = ac + bd$.

В ([9], с. 278) с помощью комплексных чисел для произвольных четырех точек плоскости доказаны теорема Бретшнейдера, неравенство Птолемея

$$mn \leq ac + bd \tag{5}$$

и обобщение этого неравенства для произвольных шести точек плоскости. В ([10], с. 283) с помощью кватернионов доказано неравенство (5) для любых четырех точек пространства и методами линейной алгебры дано обобщение теоремы Птолемея для k точек, расположенных на одной окружности ([10], с. 77). Подробное доказательство и обсуждение неравенства (5) для плоскости приведены в ([8], с. 127-131). В [11] неравенство Птолемея для любых четырех точек пространства доказано методом координат, причем полностью дан ответ на вопрос о взаимном расположении точек в случае выполнения равенства. Так, если в (5) выполняется равенство, то все точки лежат на одной прямой или на одной окружности, причем в последнем случае точки A, B, C и D расположены на окружности именно в этом порядке, то есть, если все они различны, то $ABCD$ является выпуклым четырехугольником. Интересно отметить, что выполнение любых двух из трех равенств (2)-(4) для четырех точек пространства также влечет за собой либо принадлежность всех точек одной прямой, либо выпуклость и вписанность в окружность пространственного четырехугольника $ABCD$.

Заметим, что в формулировках обобщенной обратной теоремы Птолемея для плоскости иногда встречаются ошибки, особенно при доказательствах с использованием инверсии. Например, в [9, с. 234, №28.24], [Квант, 1972, № 4, с. 45, решение задачи М99], [12, с. 44], [13, с. 54], [14, с. 284], утверждается, что для произвольных четырех точек плоскости равенство $mn = ac + bd$ выполняется только в том случае, если все точки лежат на одной окружности. То есть не учитывается случай, когда все четыре точки расположены на одной прямой. Заметим, что в более поздних изданиях энциклопедической книги [9] это ошибочное утверждение изъято. Этой ошибки легко избежать, если пользоваться теоремой Бретшнейдера (второй теоремой косинусов для четырехугольника): произведение квадратов диагоналей четырехугольника равно сумме произведений квадратов противоположных сторон без удвоенного произведения всех четырех сторон на косинус суммы противоположных углов.

Теоремы о тетроне

Дальнейшее обобщение теоремы Птолемея было сделано в [15, 16]. Приведем здесь улучшенное доказательство основной теоремы. Сначала напомним определение тетрона (четырехвершинника).

Определение. Назовем *тетроном* $ABCD$ произвольные четыре точки A, B, C и D пространства, последовательно соединенные отрезками AB, BC, CD и DA.

Тетрон может быть пространственным четырехугольником (частью "каркаса" тетраэдра), четырехугольником с самопересечением сторон и вырожденным, часть или все вершины которого совпадают друг с другом или лежат на одной прямой (рис. 2).

Тетрон — естественное обобщение понятия четырехугольника: произвольный выпуклый и вогнутый четырехугольники являются плоскими тетронами. Поэтому утверждения, верные для любых тетронов, справедливы также для любых четырехугольников и треугольников (вырожденных тетронов). Отрезки, соединяющие соседние вершины тетрона, назовем *сторонами*, а соединяющие не соседние — *диагоналями*. Далее будем считать, что тетрон $ABCD$ задан порядком обхода вершин A, B, C и D, причем $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = m$, $BD = n$, $\angle BAD = \angle A$, $\angle BCD = \angle C$, $\angle ADB = \angle \delta_1$, $\angle BDC = \angle \delta_2$, $\angle ADC = \angle \delta$ и $\widehat{n}$ — величина двугранного угла при ребре n (рис. 3).

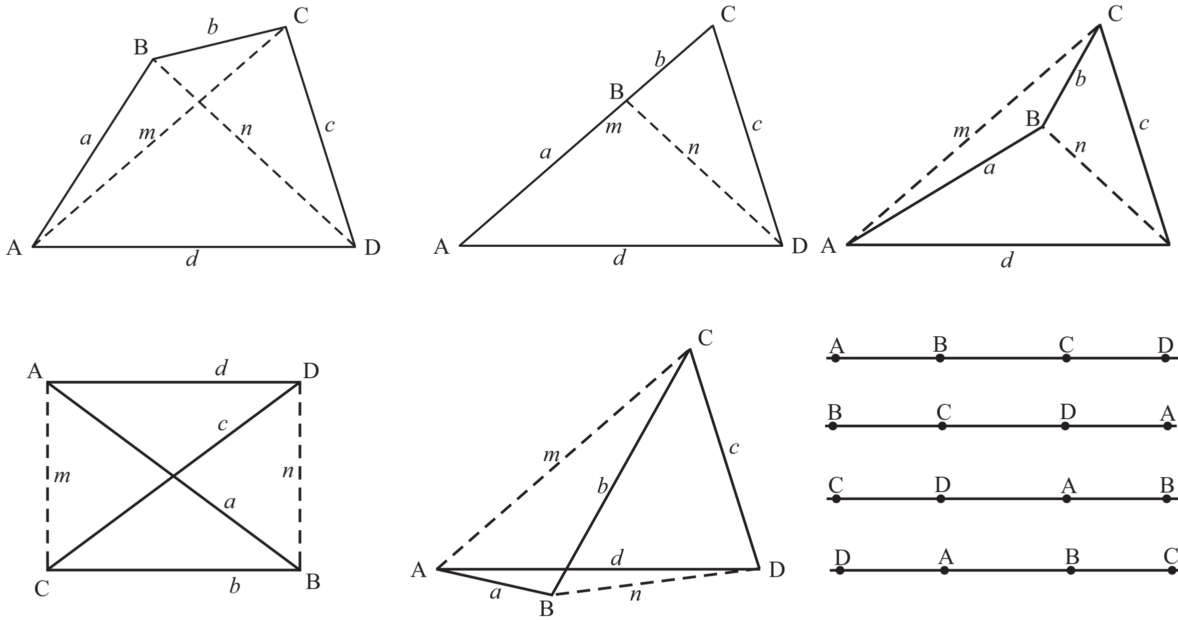


Рис. 2. Различные виды тетронов.

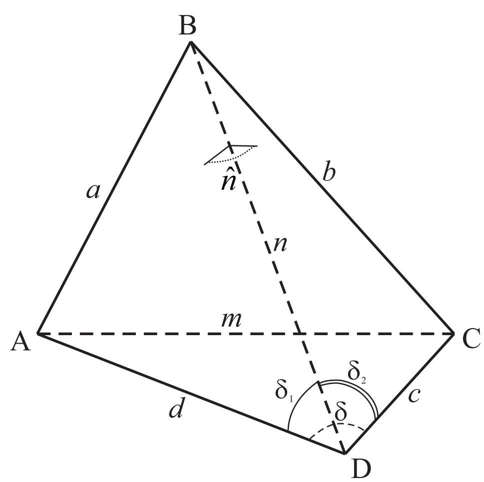


Рис. 3. К теореме о тетроне.

Теперь сформулируем и докажем теорему, следствиями которой являются теорема Бретшнейдера, теорема и неравенство Птолемея, неравенство Брахмагупты, формула Герона, формула для площади произвольного четырехугольника и много других полезных утверждений.

Теорема о тетроне. *Для любого тетрона справедливо равенство*

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd(\cos\angle A\cos\angle C + \sin\angle A\sin\angle C\cos\widehat{n}). \tag{6}$$

Доказательство. Возможны следующие случаи взаимного расположения вершин тетрона в пространстве.

1) Часть вершин совпадает. В этом случае справедливость равенства (6) проверяется подстановкой длин сторон и величин углов непосредственно в равенство. Например, рассмотрим тетрон, у которого совпадают ровно две вершины A и C. Подставляя $b = a$, $d = c$, $m = 0$, $\angle A = \angle C$ и $\widehat{n} = 0$ в равенство (6), убеждаемся в его справедливости. Если величины углов не определены, то их можно выбрать (доопределить) соответствующим образом, например, если $a = b = c = d = 0$, то можно считать $\angle A = \angle C = \widehat{n} = 0$ или $\angle A = \angle C = \pi/2$, $\widehat{n} = \pi$.

2) Все вершины различны. Запишем аналог теоремы косинусов для трехгранного угла при вершине D:

$$\cos\delta - \cos\delta_1\cos\delta_2 = \sin\delta_1\sin\delta_2\cos\widehat{n}. \tag{7}$$

Заметим, что формула (7) справедлива для любого расположения лучей DA, DB и DC в пространстве. Например, если все три луча лежат в одной плоскости, то есть $\cos\widehat{n} = \pm 1$, то формула (7) превращается в формулу сложения для косинусов. Пользуясь теоремой косинусов в левой части и теоремой синусов для треугольников ABD и BCD в правой части равенства (7), получим равенство

$$\frac{c^2+d^2-m^2}{2cd} - \frac{n^2+d^2-a^2}{2nd}\cdot\frac{n^2+c^2-b^2}{2nc} = \frac{ab}{n^2}\sin\angle A\sin\angle C\cos\widehat{n},$$

которое после упрощений можно записать в виде

$$a^2c^2+b^2d^2-2m^2n^2+n^2(a^2+b^2+c^2+d^2-n^2)-a^2b^2-c^2d^2 = 4abcd\sin\angle A\sin\angle C\cos\widehat{n}. \tag{8}$$

Так как $n^2 = a^2+d^2-2ad\cos\angle A = b^2+c^2-2bc\cos\angle C$, то

$$n^2(a^2+b^2+c^2+d^2-n^2) = n^2(a^2+d^2-n^2+b^2+c^2-n^2+n^2) =$$
$$= n^2(2ad\cos\angle A+2bc\cos\angle C+n^2) = (n^2+2ad\cos\angle A)(n^2+2bc\cos\angle C)-$$
$$-4abcd\cos\angle A\cos\angle C = (b^2+c^2)(a^2+d^2)-4abcd\cos\angle A\cos\angle C.$$

Подставив последнее выражение в (8), после сокращений получим требуемое равенство (6). Теорема доказана.

Для любого тетрона справедливо неравенство [16]

$$a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(\angle A-\angle C) \le m^2n^2 \le a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(\angle A+\angle C), \tag{9}$$

где хотя бы одно из двух равенств выполняется тогда и только тогда, когда тетрон является плоским. Правое равенство в (9) выполняется для плоского выпуклого или невыпуклого четырехугольника, но без самопересечения сторон, а левое — для плоского четырехугольника с самопересечением сторон. Из неравенства (9) следует неравенство Птолемея

$$|ac-bd| \le mn \le ac+bd, \tag{10}$$

причем ровно одно равенство в этой цепочке достигается в том и только в том случае, если все вершины тетрона лежат на одной прямой или на одной окружности, а двойное равенство — когда совпадают по крайней мере две вершины тетрона. Неравенство Птолемея (10) можно записать в виде трех неравенств: $mn \le ac+bd$, $ac \le mn+bd$, $bd \le mn+ac$. Поэтому из отрезков, длины которых численно равны ac, bd и mn всегда можно построить треугольник (возможно, вырожденный), в котором угол α, противолежащий стороне mn, вычисляется по формуле $\cos\alpha = \cos\angle A\cos\angle C+\sin\angle A\sin\angle C\cos\widehat{n}$, что следует из равенства (6). Сравните полученное решение с чисто геометрическим решением задачи 159 в [17, с. 286]. Отметим, что из неравенства Птолемея следует неравенство треугольника. Например, неравенство $m \le a+b$ следует из неравенства $mn \le ac+bd$ при $n = c = d$. Для доказательства достроим треугольник ABC со сторонами a, b, m до тетрона $ABCD$, где вершина D — центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис 4).

Векторным методом можно доказать следующую теорему [11, 18].

Векторная теорема Птолемея. *Для любого тетрона выполняются равенства*

$$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}, \tag{11}$$

$$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n} = (b^2+d^2-a^2-c^2)/2, \tag{12}$$

где $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}$ *— скалярное произведение векторов* $\overrightarrow{m}$ *и* $\overrightarrow{n}$ (рис. 5).

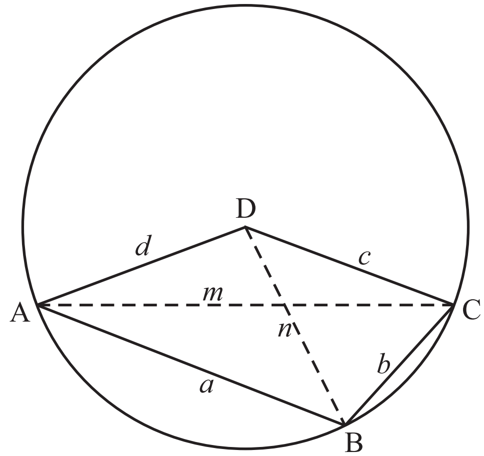


Рис. 4. Неравенство треугольника.

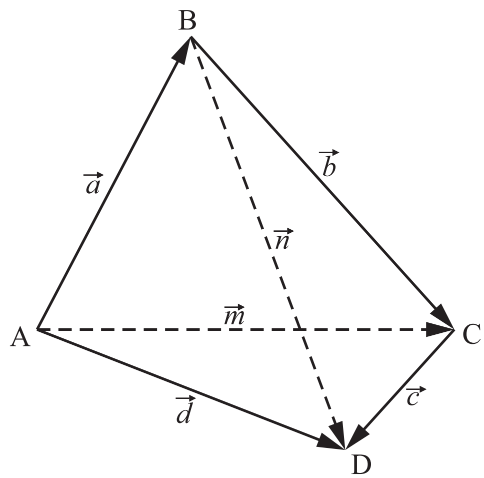


Рис. 5. Векторная теорема Птолемея: $\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d}$.

Так как $|\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n}| \le mn$, то из равенства (12) с учетом правого неравенства (10) получим цепочку неравенств

$$|a^2 + c^2 - b^2 - d^2|/2 \le mn \le ac + bd, \tag{13}$$

причем двойное равенство выполняется в том и только в том случае, если все вершины лежат на одной прямой и длина какой-то одной стороны тетрона равна сумме длин остальных трех сторон тетрона. Заметим, что геометрически неравенство $|a^2 + c^2 - b^2 - d^2|/2 \le ac + bd$ означает следующее: длина ломаной, соединяющей концы отрезка, не больше длины этого отрезка. Если представить тетрон с фиксированными длинами сторон в виде шарнирной стержневой модели, то равенство (12) можно интерпретировать так: как бы мы ни двигали вершины модели, величина $I = \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n} = mn\cos\varphi$ будет оставаться постоянной (несмотря на то, что длины диагоналей и угол между ними по отдельности будут изменяться). Это свойство тетрона может быть полезным при проектировании шарнирно-стержневых механизмов. Угол ψ между диагоналями m и n тетрона (и, следовательно, произвольного четырехугольника) находится из равенства (12) по формуле

$$\cos\psi = |a^2 + c^2 - b^2 - d^2|/(2mn).$$

Отсюда следует, что угол между противоположными ребрами тетраэдра не меняется, если поменять местами два противоположных ребра тетраэдра. Так как для произвольного тетрона $4mn \le 4(ac + bd) \le (a + c)^2 + (b + d)^2$, то $\cos\psi \ge 2|a^2 + c^2 - b^2 - d^2|/((a + c)^2 + (b + d)^2)$, причем равенство для невырожденного тетрона достигается только для тетрона с перпендикулярными диагоналями (в этом случае $a^2+c^2=b^2+d^2$) и для прямоугольника.

Площадь S плоского (выпуклого и невыпуклого) четырехугольника $ABCD$ удовлетворяет неравенству $2S=mn\sin\psi\le mn\le ac+bd$ [19, с. 59]. Равенство $S=(ac+bd)/2$ достигается только для вписанного в окружность четырехугольника с перпендикулярными диагоналями, длины диагоналей в этом случае выражаются [11] формулами $m=(ad+bc)/\sqrt{a^2+c^2}$, $n=(ab+cd)/\sqrt{a^2+c^2}$, а радиус описанной окружности дается формулой $R=\sqrt{a^2+c^2}/2$. Оказывается [11], что площадь S произвольного, в том числе и невыпуклого, четырехугольника выражается через длины его сторон и диагоналей формулой $S=\sqrt{m^2n^2/4-(a^2+c^2-b^2-d^2)^2/16}$ и тем самым характеризует разницу левого неравенства в (13). С помощью этой формулы легко доказать, что из всех четырехугольников с заданными сторонами наибольшую площадь имеет четырехугольник, вписанный в окружность. Из формулы для площади произвольного четырехугольника (в том числе и невыпуклого, но без пересечения сторон) получим, пользуясь теоремой Бретшнейдера $m^2n^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(\angle A+\angle C)$, другое выражение площади $S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2((\angle A+\angle C)/2)$, где $p=(a+b+c+d)/2$ — полупериметр четырехугольника [9, 15]. Следствиями этого равенства являются формула Герона и неравенство Брахмагупты.

Неравенство Брахмагупты. *Площадь любого четырехугольника удовлетворяет неравенству $S\le\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, причем если достигается равенство, то все вершины лежат на одной окружности или на одной прямой (в этом случае четырехугольник является вырожденным).*

Если четырехугольник является и вписанным и описанным, то формула для площади принимает простой вид $S^2=abcd$, а радиус вписанной окружности — $r=\sqrt{abcd}/(a+c)$. Радиус описанной около четырехугольника окружности выражается симметричной относительно длин сторон формулой

$$R^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}{16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Если четырехугольник является и вписанным и описанным, то радиус описанной окружности дается формулой $R^2=(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)/(16abcd)$, а радиус вписанной окружности можно вычислить по формуле $r=\sqrt{abcd}/(a+c)$. Если, кроме того, у вписанного и описанного четырехугольника диагонали перпендикулярны (а это возможно только для дельтоида с прямыми противоположными углами и для квадрата), то $S=ac$, $r=ac/(a+c)$, $R=\sqrt{a^2+c^2}/2$.

Теорема о неравенствах в тетроне. *Для любого тетрона выполняются неравенства:*

$$m+n\le a+b+c+d, \tag{14}$$

$$m^2+n^2\le a^2+b^2+c^2+d^2, \tag{15}$$

$$(m+n)^2\le(a+c)^2+(b+d)^2, \tag{16}$$

$$4mn\le4(ac+bd)\le(a+c)^2+(b+d)^2\le2(a^2+b^2+c^2+d^2), \tag{17}$$

$$(a+b+c+d)^2\le4(a^2+b^2+c^2+d^2), \tag{18}$$

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2)\le2(m^2+n^2)+(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(d+a)^2\le2(a+b+c+d)^2. \tag{19}$$

Доказательство. Неравенство (14) следует из неравенства треугольника, причем равенство достигается только для вырожденных тетронов. Для доказательства неравенства (15) сложим четыре равенства $m^2=(\vec a+\vec b)^2$, $m^2=(\vec d-\vec c)^2$, $n^2=(\vec b+\vec c)^2$ и $n^2=(\vec d-\vec a)^2$ (см. рис. 5):

$$2(m^2+n^2)=2(a^2+b^2+c^2+d^2)+2(\vec a+\vec c)(\vec b-\vec d)=$$

$$=2(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(\vec a+\vec c)^2\le2(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

Равенство в (15) достигается только для параллелограммов и для вырожденных тетронов. Заметим, что в [19, с. 56] неравенство (15) и неравенство Птолемея сформулированы лишь для плоских четырехугольников. Неравенство (16) следует из неравенства (15) и неравенства Птолемея. Равенство в (16) достигается только для прямоугольников и для вырожденных тетронов. Неравенства (17) и (18) следуют из неравенств $2xy \leq x^2 + y^2$. Равенства во всей цепочке неравенств (17) достигается только для прямоугольников и для вырожденных тетронов, а в (18) равенство достигается только для квадратов и для вырожденных тетронов. Для доказательства неравенство (19) применим неравенство Птолемея и неравенства треугольника: имеем $(a-b)^2 \leq m^2$ и $(c-d)^2 \leq m^2$, следовательно, $(a-b)^2 + (c-d)^2 \leq 2m^2 \leq 2(a+b)(c+d)$. Прибавляя ко всем частям последнего неравенства выражение $(a+b)^2 + (c+d)^2$, получим $2(a^2+b^2+c^2+d^2) \leq 2m^2 + (a+b)^2 + (c+d)^2 \leq (a+b+c+d)^2$. Аналогично имеем $2(a^2+b^2+c^2+d^2) \leq 2n^2 + (b+c)^2 + (a+d)^2 \leq (a+b+c+d)^2$ для другой диагонали тетрона. Складывая эти два неравенства, получим неравенство (19), которое превращается в равенство только для вырожденных тетронов, например в случае $a = c = m$, $b = d = n = 0$.

С помощью теоремы о тетроне удалось провести классификацию различных четырехугольников, в том числе невыпуклых и с самопересечением сторон. Так, в [15] доказано следующее утверждение.

Теорема о плоских тетронах. *Для любого плоского тетрона $ABCD$, ни одна из сторон которого не равна нулю, выполняется равенство* $\cos(\angle A \pm \angle C) = \cos(\angle B \pm \angle D)$, *где надо выбрать один из двух знаков. Если, кроме того, ни один из углов тетрона не равен нулю или π (тетрон невырожденный), то знаки выбираются по одному из правил:*

разные знаки $\Longleftrightarrow$ $ABCD$ — невыпуклый четырехугольник без самопересечения сторон.

При условии, что $\angle A \neq \angle B$ и $\angle A \neq \angle D$:

оба знака "+" $\Longleftrightarrow$ $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.

При условии, что $\angle A \neq \angle B$ и $\angle A \neq \angle C$:

оба знака "$-$" $\Longleftrightarrow$ тетрон $ABCD$ является плоским невыпуклым с пересечением сторон, причем если $\angle A - \angle C = \angle B - \angle D$, то пересекаются стороны AB и CD и $ACBD$ — выпуклый четырехугольник, а если $\angle A - \angle C = \angle D - \angle B$, то пересекаются стороны AD и BC и $ABDC$ — выпуклый четырехугольник (рис. 2).

Формула (6) оказалась богатой следствиями, поэтому естественно появляется желание воспользоваться другими формулами сферической тригонометрии для вывода метрических соотношений в тетроне. Или, например, для произвольного треугольника ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, лежащего в плоскости Лобачевского с радиусом кривизны r, применить теорему косинусов и теорему синусов

$$\operatorname{ch}\frac{c}{r} = \operatorname{ch}\frac{a}{r}\operatorname{ch}\frac{b}{r} - \operatorname{sh}\frac{a}{r}\operatorname{sh}\frac{b}{r}\cos\angle C,$$

$$\operatorname{sh}\frac{a}{r}/\sin\angle A = \operatorname{sh}\frac{b}{r}/\sin\angle B = \operatorname{sh}\frac{c}{r}/\sin\angle C$$

для доказательства аналога теоремы Бретшнейдера в гиперболической геометрии.

Другое обобщение теоремы Птолемея — теорема Кэзи (Cascy) — подробно рассмотрено в ([14], с. 285; [20], с. 243; [21], с. 101): *если окружности S_1, S_2, S_3 и S_4 касаются в том же порядке одной и той же пятой окружности (или прямой) S или все проходят через одну точку, то имеет место соотношение*

$$t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23} = t_{13}t_{24}, \tag{20}$$

где t_{12} есть отрезок общей касательной окружностей S_1 и S_2 и аналогичный смысл имеют величины t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24} и t_{34}. Если все окружности S_i заменить точками, то мы придем к теореме Птолемея. В [20] (с. 267) для этой теоремы приведена обратная: если касательные расстояния четырех окружностей связаны соотношением (21), то эти окружности или все касаются одной и той же пятой окружности, или касаются одной прямой, или проходят через одну точку. Приложение обобщенной таким образом теоремы Птолемея для решения остававшейся на протяжении 45 лет нерешенной проблемы бельгийского математика В. Тебольта (1882—1960) дано в [22]. Отметим, что такое обобщение теоремы Птолемея сделано только для плоскости, поэтому возникает вопрос: а нельзя ли обобщить ее на пространство? Более того, нельзя ли объединить оба эти обобщения в одной теореме?

И, наконец, приведем некоторое обобщение теоремы о тетроне. Так как расстояние между центрами двух сфер с равными радиусами равно расстоянию между точками касания общей внешней касательной плоскости (в этом случае обе сферы лежат по одну сторону от плоскости), то справедливо следующее утверждение.

Обобщенная теорема о тетроне. *Для произвольно расположенных в пространстве четырех равных сфер S_1, S_2, S_3 и S_4 с центрами в точках A, B, C и D справедливо равенство (6), где $\angle BAD = \angle A$, $\angle BCD = \angle C$, $\widehat{n}$ — величина двугранного угла между плоскостями BAD и BCD, a — расстояние между точками касания общей внешней касательной плоскости к сферам S_1 и S_2; такой же смысл имеют величины b, c, d, m и n.*

Двугранные углы и равногранные тетраэдры

Формулы (6)-(8) можно применять для вычисления двугранных углов в тетраэдре. Представим формулу (8) еще в двух различных видах

$$(a^2-d^2)(c^2-b^2)-2m^2n^2+n^2(a^2+b^2+c^2+d^2-n^2)=16S_{adn}S_{bcn}\cos\widehat{n}, \tag{21}$$

$$2S_{adn}S_{bcn}\cos\widehat{n}=S^2_{adn}+S^2_{bcn}-(m^2n^2/4-(a^2+c^2-b^2-d^2)^2/16).$$

Отсюда находим, что косинус двугранного угла $\cos\widehat{n}$ тетраэдра при ребре n полностью определяется, если задать длины шести ребер тетраэдра и порядок взаимного расположения ребер (в рассматриваемом случае ребра a и c, b и d, m и n — противоположные ребра тетраэдра, причем a, b, c и d — последовательные стороны соответствующего тетрона). Так, например, выражение $\cos\widehat{n}$ для косинуса двугранного угла при ребре n равногранного тетраэдра, все грани которого являются равными остроугольными треугольниками со сторонами n, k, l, можно получить из симметричного относительно k и l соотношения

$$\sin^2\widehat{n}=\frac{8n^2(n^2-k^2+l^2)(n^2+k^2-l^2)(-n^2+k^2+l^2)}{(n+k+l)^2(n-k+l)^2(n+k-l)^2(-n+k+l)^2}.$$

Из формулы (20) получим необходимое и достаточное условие для того, чтобы двугранный угол при ребре n произвольного тетраэдра был острым

$$(a^2-d^2)(c^2-b^2)-2m^2n^2+n^2(a^2+b^2+c^2+d^2-n^2)>0.$$

Если отождествлять зеркальные отражения, то из трех отрезков различной длины можно построить единственный треугольник. Однако из шести отрезков различной длины можно построить до 30 различных тетраэдров и различить их можно с помощью порядка обхода вершин, который определяет пары противоположных ребер [1, с. 153]. Выполнение неравенства (13) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы из шести отрезков можно было построить тетраэдр (возможно, вырожденный). Объем рассматриваемого тетраэдра равен $V=S_{adn}S_{bcn}\sin\widehat{n}/(3n)$, и он также может быть выражен только через длины ребер. Так, из шести отрезков, длины которых равны 11, 12, 13, 14, 15 и 16, можно построить 30 (максимально возможное число) различных неравновеликих тетраэдров. Среди них максимальный объем $V\approx 288$ имеет тетраэдр, которому соответствует тетрон $a=16$, $b=13$, $c=12$, $d=14$, $m=11$, $n=15$, а минимальный объем $V\approx 213$ — у тетраэдра с ребрами $a=11$, $b=16$, $c=14$, $d=13$, $m=12$, $n=15$. Интересно отметить, что объем правильного тетраэдра с ребрами $a=b=c=d=m=n=13,5$ равен $V\approx 290$. Для равногранного тетраэдра имеем выражение для объема $V^2 = (n^2+k^2-l^2)(n^2-k^2+l^2)(-n^2+k^2+l^2)/72$, симметричное относительно длин ребер n, k, l [18, с. 121]. Так, для равногранного тетраэдра, все грани которого являются равнобедренными треугольниками со сторонами $n=k=13$, $l=26/\sqrt{3}$, получим $V\approx 282$. Отметим, что у этого тетраэдра два двугранных угла при противоположных ребрах l прямые. Однако неравногранный тетраэдр с такими же ребрами $a=b=c=m=13$, $d=n=26/\sqrt{3}$ (средняя длина ребра равна $\approx 13,7$) имеет объем $V\approx 296$.

Интересно, какой из возможных тридцати различных тетраэдров, ребрами которого являются шесть заданных отрезков, обладает наибольшим объемом? Авторам не известно простое решение этой задачи, её можно назвать задачей о вигваме. Однако в частном случае определение наибольшего объема тетраэдра, у которого заданы длины a, b, c трех ребер, выходящих из одной вершины, очевидно. Плоские углы этого трехгранного угла должны быть прямыми и объем такого тетраэдра равен $V=abc/6$. Расстояние ρ между противоположными ребрами m и n произвольного тетраэдра (длину общего перпендикуляра) можно вычислить, пользуясь формулой для объема произвольного тетраэдра $V=\rho mn\sin\psi/6$, где ψ — угол между ребрами m и n. Так, для расстояния между противоположными и равными l ребрами равногранного тетраэдра получим простое выражение $\rho^2=(n^2+k^2-l^2)/2$.

Радиусы вписанной в тетраэдр и описанной около тетраэдра сфер выражаются формулами $r=3V/S$ и $R=S_{mn}/(6V)$, где S — площадь поверхности тетраэдра, а S_{mn} — площадь треугольника со сторонами ac, bd и mn (формула Крелле [18, с. 101]). Например, для равногранного тетраэдра с ребрами n, k, l получим

$$r^2=\frac{(n^2+k^2-l^2)(n^2-k^2+l^2)(-n^2+k^2+l^2)}{8(n+k+l)(n+k-l)(n-k+l)(-n+k+l)},\qquad R^2=\frac{n^2+k^2+l^2}{8}.$$

Сравнивая выражения $\sin^2\widehat{n}$ и r^2, находим, что для равногранного тетраэдра с ребрами n, k, l справедливо равенство $r=S_{nkl}\sin\widehat{n}/(2n)$, из которого следует равенство $n/\sin\widehat{n}=k/\sin\widehat{k}=l/\sin\widehat{l}$ — частный случай теоремы синусов для тетраэдра [18, с. 100]. Кроме того, из формулы $r=S_{nkl}\sin\widehat{n}/(2n)$ следует равенство $r=h\sin\widehat{n}/4=H/4$, где h — высота грани, проведенная к ребру n, а H — высота равногранного тетраэдра. То есть радиус сферы, вписанной в равногранный тетраэдр, равен одной четвертой высоты тетраэдра. Заметим, что этот вывод можно получить из формулы $r=3V/S$ для произвольного тетраэдра или из следующего свойства: в равногранном тетраэдре центр масс, центр вписанной и центр описанной сфер совпадают.

Заключение

Таким образом, с помощью теоремы о тетроне однотипно доказываются разнородные, казалось бы, утверждения: теорема Бретшнейдера, обратная теорема Птолемея, формула для площади произвольного четырехугольника, неравенство Брахмагупты. Тетрон оказывается полезным инструментом для составления и решения различных геометрических задач. Теорема о тетроне позволяет единообразно отвечать на некоторые вопросы относительно треугольников, четырехугольников и тетраэдров и поэтому является еще одним связующим звеном между задачами планиметрии и стереометрии. Данная работа является отчасти обзорной. Однако она содержит новые задачи и новые результаты, полученные авторами.

Литература

1. Штейнгауз Г. Задачи и размышления. - М.: Мир, 1972.
2. Литцман В. Где ошибка? - М.: Физматгиз, 1962.
3. Шибинский В.М. Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа. - М.: Высш. шк., 2007.

4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов /Под ред. Б.П. Демидовича. - М.: Астрель, АСТ, 2001.

5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М.: Астрель, АСТ, 2002.

6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1973.

7. Боярчук А.К. Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Том 5. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. - М.: УРСС, 1999.

8. Кокстер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. - М.: Наука, 1978.

9. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Часть II. (Библиотека математического кружка, выпуск 16). - М.: Наука, 1986.

10. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. - М.: Наука, Физматлит, 1996.

11. Астапов Н.С., Жуков А.В. Замечательный четырехвершинник // Квант. - № 1. - 1996. - С. 45-47.

12. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы планиметрии. Изд. второе, переработанное и дополненное. (Библиотека математического кружка, выпуск 2). - М.: Наука, 1967.

13. Бакельман И.Я. Инверсия. (Популярные лекции по математике, выпуск 44). - М.: Наука, 1966.

14. Элементы математики в задачах. Через олимпиады и кружки - к профессии / Под ред. А.А. Заславского, А. Б. Скопенкова и М. Б. Скопенкова. - М.: МЦНМО, 2018.

15. Астапов Н.С. Теорема о четырехвершиннике // Математическое образование. - № 2(13). - 2000. - С. 22-28.

16. Astapov N.S., Noland N.C. The Remarkable Tetron // American Mathematical Monthly. - v. 108. - № 4. - 2001. - P. 368-370.

17. Страшевич С., Бровкин Е. Польские математические олимпиады. - М.: Мир, 1978.

18. Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. (Библиотека математического кружка, выпуск 19). - М.: Наука, Физматлит, 1989.

19. Гашков С.Б. Геометрические неравенства. Путеводитель в задачах и теоремах. - М.: Либроком, 2014.

20. Яглом И.М. Геометрические преобразования, Т. II. - М.: Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1956.

21. Ефремов Д. Новая геометрия треугольника. - Одесса: Типография М. Шпенцера, 1902.

22. Shay Gueron. Two Applications of the Generalized Ptolemy Theorem // American Mathematical Monthly. - v. 109. - № 4. - 2002. - P. 362-370.

Астапов Николай Степанович,
кандидат физ.-мат. наук, доцент,
старший научный сотрудник Института
гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
доцент кафедры высшей математики ММФ
Новосибирского государственного университета.
E-mail: nika@hydro.nsc.ru

Астапов Иван Степанович,
кандидат физ.-мат. наук, снс,
старший научный сотрудник
НИИ механики МГУ.
E-mail: velais@imec.msu.ru

Теория вероятностей и ЕГЭ

О. П. Виноградов

В статье критикуется современный подход к преподаванию теории вероятностей в средней школе и оценка знаний по этому предмету с помощью ЕГЭ.

В течение многих лет автор читает лекции и ведет семинарские занятия по теории вероятностей и математической статистике на различных факультетах МГУ. Последние несколько лет он читает спецкурс «Теория вероятностей» для школьников СУНЦ МГУ им А.Н. Колмогорова. Опыт преподавания этих дисциплин показывает, что для освоения даже самых простых понятий теории вероятностей необходимо: во-первых, достаточное количество времени и, во-вторых, решение слушателями большого числа задач. На наш взгляд, это невозможно в современной средней школе. Школьникам не хватает времени даже для прочного овладения основами алгебры, геометрии и тригонометрии.

По инициативе основателя современной теории вероятностей академика А.Н. Колмогорова в 60-х годах прошлого века была произведена реформа школьного математического образования. В частности, были включены элементы теории множеств, дифференциального и интегрального исчисления. Однако элементы теории вероятностей он не включил в новую программу, хотя и опубликовал вместе со своими учениками в «Библиотечке Кванта» небольшую книжку по теории вероятностей. Видимо, А.Н. Колмогоров считал, что ввиду специфичности теории вероятностей, освоение даже основ этой науки будет сложно для учащихся обычных школ.

В настоящее время в программу средней школы современные реформаторы школьного образования включили элементы теории вероятностей и математической статистики.

Как известно, в 10-х и 11-х классах фактически все усилия преподавателей и учеников направлены на «натаскивание» на успешное решение задач, которые предлагаются на Едином Государственном Экзамене (ЕГЭ) — еще одном изобретении современных реформаторов.

Одна из задач ЕГЭ — задача по теории вероятностей. Как же подготовиться школьникам, чтобы успешно решить эту задачу?

В предисловии книги [1], которая, судя по всему, написана лицами, составляющими задания для ЕГЭ, дается следующая рекомендация: «Задача номер 4 требует умения вычислять вероятности простейших событий и также в основном опирается на общие естественные представления». Далее там приводится 30 тренировочных вариантов для подготовки к экзамену 2019 года. После анализа этих 30 вариантов обнаруживается, что для их успешного решения необходимо ознакомиться с приблизительно половиной семестрового курса теории вероятностей, который читается на естественных факультетах МГУ.

Если составить примерную программу, которую нужно освоить школьнику, чтобы решить эти 30 тренировочных вариантов, то она будет состоять из следующих пунктов:

1) понятие частоты;
2) формула классической вероятности;
3) теорема сложения вероятностей;
4) формула условной вероятности;
5) понятие независимости событий;
6) формула полной вероятности;
7) испытания Бернулли;
8) понятие случайной величины;
9) операции над случайными величинами;
10) математическое ожидание и его свойства;

11) понятие о законе больших чисел.

Вряд ли, «общие естественные представления» (?) позволят школьникам и их учителям освоить эту программу.

Если же обратиться к недавно изданной рабочей тетради, предназначенной для подготовки к сдаче ЕГЭ в 2020 году [2], то на странице 10 можно найти указание, что при решении простейших задач на формулу классической вероятности, сначала нужно: « определить, в чем состоит случайный эксперимент и какие у него элементарные события (исходы). Убедиться, что они равновозможны».

Авторы этой рабочей тетради не объясняют, а, возможно, и не представляют, что для этого должен сделать школьник. Ведь «равновозможность» или «равновероятность» - это всего лишь предположение при построении модели данного эксперимента, а единственный способ убедиться в правильности этого предположения — это проведение большого числа экспериментов, вычисление соответствующих частот и применение закона больших чисел. Колмогоров указывает [3]: «Само понятие математической вероятности было бы бесплодно, если не находило бы своего осуществления в виде частоты появления какого-либо результата при многократном повторении однородных условий».

В своем классическом учебнике в «Очерке по истории теории вероятностей» [4] известный математик и историк математики Б.В. Гнеденко пишет, что знаменитый французский математик и философ Д'Аламбер при решении задачи о вероятности выпадения при бросании двух монет — «орла» на одной из монет и «решки» на другой, определил ее равной $\frac{1}{3}$. Это он мотивировал тем, что имеются лишь три возможности: 1) на обеих монетах выпадает «орел»; 2) на обеих монетах выпадает «решка»; 3) на одной монете выпадает «орел», а на другой — «решка»». Однако это рассуждение противоречило уже сложившемуся представлению о том, что каждый из четырех исходов «орел и орел», «орел и решка», «решка и орел», «решка и решка» имеет вероятность $\frac{1}{4}$. Неправоту Д'Аламбера подтвердили многочисленные проводившиеся в XIX-XX веках опыты с подбрасыванием монет: исход «орел» и «решка» встречался приблизительно в половине всех случаев, а не в трети.

Там же в 1-й главе Б.В. Гнеденко пишет: «Проверка статистической устойчивости представляет собой довольно сложную задачу... Теперь подчеркнем ту мысль, что теория вероятностей не занимается изучением уникальных событий, которые не допускают повторений. Так, не имеет смысла говорить о том, какова вероятность, что данный студент сдаст экзамен по теории вероятностей на ближайшей экзаменационной сессии, поскольку здесь речь идет о единичном событии, повторить которое в тех же самых условиях нет возможности».

Составители заданий для ЕГЭ, кажется, не разделяют эти авторитетные мнения и предлагают школьникам решить задачи типа: «Предположим, что вероятность встретить по дороге из школы черную кошку равна 0,1, а вероятность встретить злую собаку равна 0,3. Считая, что собака и кошка гуляют независимо друг от друга, найдите вероятность того, что по дороге из школы повстречаются и черная кошка, и злая собака» [5] или «Вероятность того, что учащийся Б. верно решит не менее 10 заданий ЕГЭ по математике равна 0,73. Вероятность того, что он верно выполнит не менее 12 заданий по математике, равна 0,54. Найдите вероятность того, что учащийся Б. на ЕГЭ по математике верно выполнит 10 или 11 заданий» [2].

Отметим в связи с первым из этих примеров, что понятие независимости является весьма непростым понятием.

А именно, существуют пространства элементарных событий, в которых нет независимых событий. Например, если число элементарных событий равно трем, то в этом пространстве не существует независимых событий.

Справедлива также (см., например, [6])

Теорема. В равновозможном пространстве элементарных событий не существует независимых событий тогда и только тогда, когда число элементарных событий является простым.

Кроме того, необходимо различать теоретико-вероятностную независимость и причинную независимость (подробнее об этом см., например, [7]).

На одном из огромного количества сайтов в Интернете, на которых даются указания для решения задач ЕГЭ, а именно, на сайте

https://shkolkovo.net/theory/proizvedenie_veroyatnostej_sovmestnyh_nezavisimyh_sobytij утверждается, что вероятность произведения двух событий всегда равна произведению вероятностей этих событий. Это утверждение чудовищно по своей нелепости, но, увы, оно типично для подобных руководств.

В то же время, если реалии современной жизни вызывают необходимость ознакомить школьников с простейшими задачами теории вероятностей, то по нашему мнению, можно ограничиться задачами на вычисление вероятностей по формуле классической вероятности, используя простейшие понятия комбинаторики.

Автор считает, что задача по теории вероятностей должна быть удалена из списка задач ЕГЭ. Но если на это не пойдут современные реформаторы школьного образования, то составление задач по вероятности для этого экзамена должно быть поручено преподавателям теории вероятностей Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова, либо следует представлять типовые задачи ЕГЭ по вероятности на рецензирование в МГУ. где накоплен огромный педагогический опыт и работают ведущие ученые страны, тем более что МГУ занимает первые позиции среди отечественных учреждений высшего образования во всех международных и отечественных рейтингах.

Литература

1. ЕГЭ-2019: Математика: 30 тренировочных вариантов экзаменационных работ для подготовки к единому государственному экзамену: профильный уровень / под. ред. И.В. Ященко. - М.: АСТ, 2018.

2. Высоцкий И.Р., Ященко И.В. ЕГЭ 2020. Математика. Теория вероятностей. Рабочая тетрадь. - М.: МЦНМО, 2020.

3. Бернулли Я. О законе больших чисел. - М.: Наука, 1986.

4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - М.: Едиториал УРСС, 2005.

5. Тюрин Ю.Н. и др. Теория вероятностей и статистика. - МЦНМО: АО «Московские учебники», 2004.

6. Виноградов О.П. О независимых событиях в семействах дискретных распределений // Дискретная математика. - 2013. - том 25. - выпуск 4. - с. 116-124.

7. Севастьянов Б.А. Вероятностные модели. - М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1992.

Виноградов Олег Павлович,
профессор механико-математического
факультета МГУ,
доктор физ.-мат. наук.

E-mail: ovinogradov@mail.ru

Интересное уравнение

В. Б. Дроздов

В статье рассказывается о математически трудном и интересном иррациональном уравнении и выявляется геометрический источник его возникновения. Статья адресуется всем любителям математики.

1. Листая старую книгу...

В «Пособии по математике, физике и химии для поступающих в вузы (9-й класс)» (автор В.П. Моденов, издательство Московского университета, 1969) на с. 104–105 рассмотрен пример 4: Найти действительные корни уравнения

$$x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{35}{12}. \tag{1}$$

Уравнение решается автором пособия так:

«Область определения уравнения находится из условия: $|x|>1$ и при $x>0$ представляет множество $x>1$.

Применим вторую рационализирующую подстановку Эйлера $t=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$, так что $x=\frac{t^2+1}{t^2-1}$, $\sqrt{x^2-1}=\dfrac{2t}{t^2-1}$.

Следовательно, неравенство $x>1$ выполняется при $t>1$.

Исходное уравнение эквивалентно смешанной системе

$$\begin{cases} 6t^4-23t^3+47t-6=0,\\ t>1; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (t-2)(t-3)(6t^2+7t-1)=0,\\ t>1. \end{cases}$$

Её решениями являются значения $t_1=2$ и $t_2=3$. Им соответствуют $x_1=\frac{5}{3}$ и $x_2=\frac{5}{4}$».

P.S. На с. 103–104 рассматривается вторая подстановка Эйлера, рационализирующая квадратичную иррациональность $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx}+c\right)$ в случае $b^2-4ac>0$:

$$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1},\quad (x\neq x_1).$$

Уравнение (1) решено, но, как увидим ниже, оно заслуживает более подробного рассмотрения.

2. Решим уравнение с параметром

Обобщим уравнение (1):

$$x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=p, \tag{2}$$

где p — произвольный положительный параметр.

Чтобы избежать уравнения четвертой степени, сведем уравнение (2) к симметрической системе двух уравнений с двумя переменными.

Так как $x > 1$, то правомерно положить $x = \frac{1}{\sin\phi}$, где $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$. Тогда уравнение (2) сводится к системе:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin\phi} + \frac{1}{\cos\phi} = p, \\ \sin^2\phi + \cos^2\phi = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Традиционно обозначив элементарные симметрические многочлены $\sin\phi + \cos\phi = \tau_1$; $\sin\phi\cos\phi = \tau_2$, получим из системы (3):

$$\begin{cases} \tau_1 = p\tau_2, \\ \tau_1^2 - 2\tau_2 = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Система (4) ведет к квадратному уравнению $\tau_1^2 - \frac{2}{p}\tau_1 - 1 = 0$ с решением $\tau_1 = \frac{1}{p} + \sqrt{\frac{1}{p^2} + 1}$ (учитываем, что $\tau_1 > 0$). Тогда $\tau_2 = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}\sqrt{\frac{1}{p^2} + 1}$.

Из двух уравнений, вводящих τ_1 и τ_2, вытекает квадратное уравнение относительно $\frac{1}{\sin\phi} = x$:

$$\tau_2 \cdot x^2 - \tau_1 \cdot x + 1 = 0,$$

дискриминант которого $D = \tau_1^2 - 4\tau_2 = 1 - \frac{2}{p}\sqrt{\frac{1}{p^2} + 1} - \frac{2}{p^2}$.

Легко видеть, что
$D < 0$ при $0 < p < 2\sqrt{2}$, тогда корней нет;
$D = 0$ при $p = 2\sqrt{2}$; имеем один корень $x = \sqrt{2}$;
$D > 0$ при $2\sqrt{2} < p < +\infty$; два корня:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{p^2 + 4\left(1 - \sqrt{1 + p^2}\right)}\right). \tag{5}$$

Итак, уравнение (2) решено в общем виде в квадратных радикалах.

3. Уравнение и... пифагоровы треугольники

Зададимся вопросом: почему правая часть уравнения (1) равна $\frac{35}{12}$ и при этом уравнение (1) имеет два рациональных корня: $x_1 = \frac{5}{3}$ и $x_2 = \frac{5}{4}$? Видим, что (3, 4, 5) — стороны “египетского” прямоугольного треугольника. Случайно ли это?

Возьмем $p = 3$ — ближайшее натуральное число к $\frac{35}{12}$. Тогда по формуле (5)

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{13 - 4\sqrt{10}}\right),$$

это две двойных иррациональности. Правда, в этом конкретном (но не общем!) случае применение формулы “сложного” радикала дает: $x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(3 \pm 2\sqrt{2} \mp \sqrt{5}\right)$.

Обратим внимание, что вместо произведенной замены переменной $x = \frac{1}{\sin\phi}$ можно было бы сделать эквивалентную замену $x = \frac{1}{\cos\phi}$ в силу симметрии системы уравнений (3). Следовательно, уравнение (2) имеет два корня: $x_1 = \frac{1}{\sin\phi}$ и $x_2 = \frac{1}{\cos\phi}$. Поэтому, вследствие первого уравнения системы (3) из рациональности $\sin\phi$ и $\cos\phi$ следует рациональность параметра p.

Очевидно, что в целочисленном (пифагоровом) прямоугольном треугольнике все тригонометрические функции его острых углов — рациональные числа. Тождество

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

дает бесконечное множество пифагоровых треугольников. Здесь m и n – натуральные числа.

Значит, $x_1 = \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ и $x_2 = \frac{m^2+n^2}{2mn}$ $(m > n)$ — корни уравнения (2) при $p = x_1 + x_2 = (m^2 + n^2)\left(\frac{1}{m^2-n^2} + \frac{1}{2mn}\right)$.

Ясно, что корни уравнения (1) $x_1 = \frac{5}{3}$ и $x_2 = \frac{5}{4}$, как и его правая часть, неслучайны. См. рис. 1.

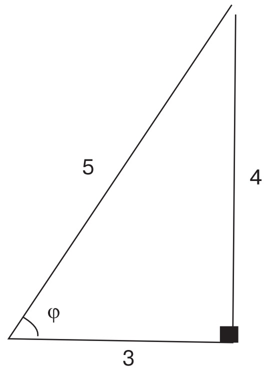


Рис. 1

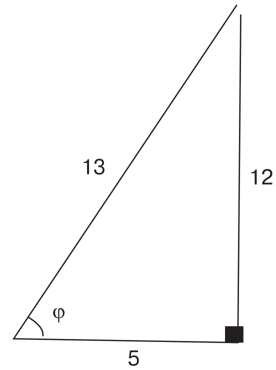


Рис. 2

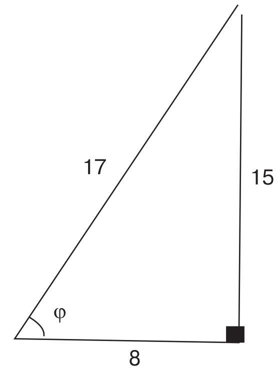


Рис. 3

Из треугольника (5, 12, 13) вытекает уравнение

$$x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{13}{5}+\frac{13}{12}=\frac{221}{60}$$

с корнями $x_1=\frac{13}{5}$ и $x_2=\frac{13}{12}$. См. рис. 2.

Аналогично, из треугольника (8, 15, 17) вытекает уравнение

$$x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\frac{17}{8}+\frac{17}{15}=\frac{391}{120}$$

с корнями $x_1=\frac{17}{8}$ и $x_2=\frac{17}{15}$. См. рис. 3.

Таким образом, существует бесконечное множество уравнений (3) с рациональной правой частью и двумя рациональными корнями.

Дроздов Виктор Борисович
г. Рязань.

О некоторых свойствах и признаках параллелограмма. Окончание

А. А. Привалов

В статье частично представлены материалы работы математического кружка в ГБОУ г. Москвы «Школа на Юго-Востоке имени Маршала В.И. Чуйкова». Рассматриваются некоторые свойства параллелограмма и устанавливаются условия, при которых эти свойства являются признаками параллелограмма. Окончание статьи, начало в предыдущем номере журнала.

3. Средние линии и равные части

В этом параграфе рассматривается свойство 4, сформулированное в начале работы. Показывается, как из этого свойства получить признак параллелограмма (теорема 9) и устанавливаются полезные свойств некоторых четырехугольников.

Теорема 9. *Пусть точки M и N, лежат на прямых (AB) и (CD) и делят стороны AB и CD простого четырехугольника $ABCD$ в* ***неравных*** *отношениях ($AM{:}AB \neq CN{:}CD$); ST и UV — средние линии этого четырехугольника ($AS=SD$, $BT=TC$, $AV=VB$ и $CU=UD$); P и Q — точки пересечения прямой (MN) с прямыми (BC) и (AD) соответственно. Тогда, если (ST) делит пополам отрезок MN, а (UV) — отрезок PQ, то $ABCD$ — параллелограмм.*

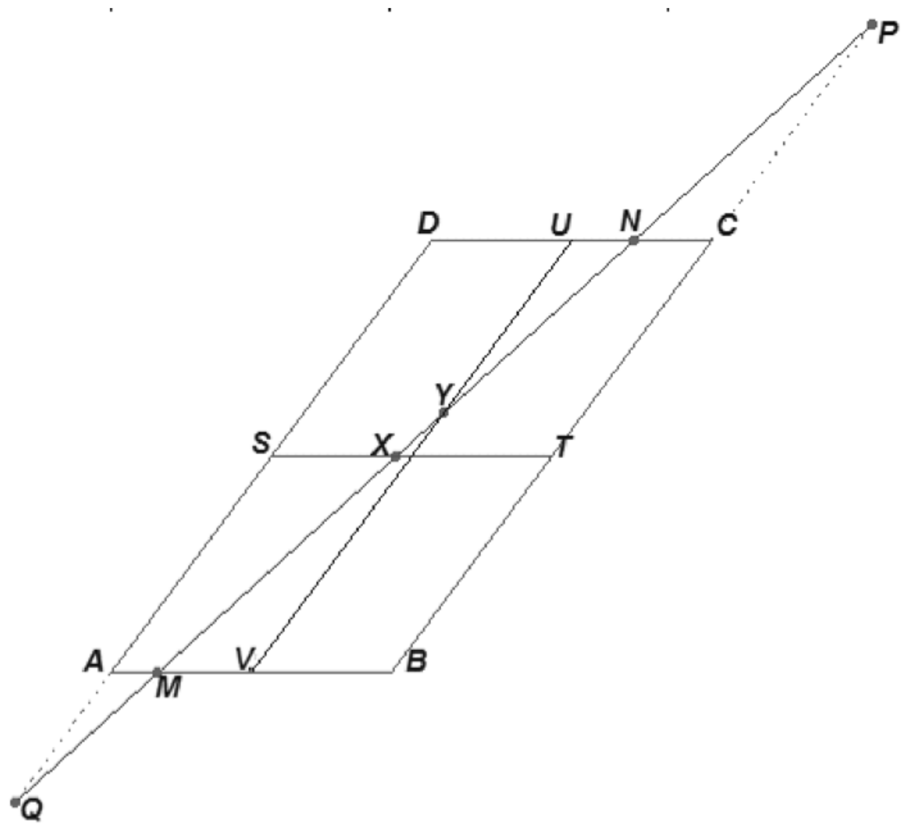


Рис. 10

Для доказательства теоремы воспользуемся следующей леммой.

Лемма 4. *Пусть A, B, C и D — точки не лежащие на одной прямой, причем $A \neq B$ и $C \neq D$; S и T — середины отрезков AD и BC соответственно, причем $S \neq T$; точки M и N, лежат на прямых (AB) и (CD): $\overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CN} = t_1 \cdot \overrightarrow{CD}$, где t_1 и t — некоторые числа. Тогда, если $t + t_1 \neq 1$, а прямая (ST) делит отрезок MN пополам, то прямые (AB) и (DC) параллельны.*

Доказательство. Так как точки A, B, C и D неколлинеарны, то будем считать, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ линейно независимы. Тогда найдутся числа α и β такие, что

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{BC} \\ &\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (1+\alpha)\overrightarrow{AB} + (1+\beta)\overrightarrow{BC} \end{aligned} \tag{16}$$

Заметим, что если $\beta = 0$, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и лемма доказана. Предположим, что $\beta \neq 0$. Тогда из (16) и условий леммы найдем вектор $\overrightarrow{ST}$:

$$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{2} + \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} = \frac{1-\alpha}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{\beta}{2}\overrightarrow{BC} \tag{17}$$

По условию леммы существует X — точка пересечения MN и (ST) и $\overrightarrow{XN} = \overrightarrow{MX} = \frac{\overrightarrow{MN}}{2}$. Отсюда найдем вектор $\overrightarrow{XT}$ двумя способами:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{XT} = \overrightarrow{XN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CT} = \tfrac{\overrightarrow{MN}}{2} - t_1\overrightarrow{CD} - \tfrac{\overrightarrow{BC}}{2} = \tfrac{\overrightarrow{MN}}{2} - t_1(\alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{BC}) - \tfrac{\overrightarrow{BC}}{2} \\ &\overrightarrow{XT} = \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BT} = \tfrac{\overrightarrow{NM}}{2} + (1-t)\overrightarrow{AB} + \tfrac{\overrightarrow{BC}}{2} \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получим

$$2\overrightarrow{XT} = -t_1(\alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{BC}) + (1-t)\overrightarrow{AB} = (1 - t - t_1\alpha)\overrightarrow{AB} - t_1\beta \cdot \overrightarrow{BC} \tag{18}$$

Точка X лежит на (TS), поэтому сравнивая равенства (17) и (18), сразу заметим, что $\alpha \neq 1$. В самом деле, если $\alpha = 1$, то компонента вектора $\overrightarrow{ST}$ при $\overrightarrow{AB}$ равна нулю, поэтому и компонента $(1 - t - \alpha t_1)$ вектора $2\overrightarrow{XT}$ тоже равна нулю, т.е. $1 - t - t_1 = 0$, а это нарушает условие леммы $(t + t_1 \neq 1)$.

Далее, так как $\beta \neq 0$, то отсюда и коллинеарности векторов $\overrightarrow{XT}$и $\overrightarrow{TS}$ имеем

$$\frac{1 - t - \alpha t_1}{\alpha - 1} = \frac{-\beta \cdot t_1}{\beta} = -t_1 \Leftrightarrow (1-\alpha)t_1 = 1 - t - \alpha t_1 \Leftrightarrow t_1 = 1 - t$$

а это опять нарушает условие леммы $(t + t_1 \neq 1)$. Значит $\beta = 0$ и лемма доказана.

Доказательство теоремы 9. Введем обозначения: X — точка пересечения отрезка MN и средней линией ST или ее продолжением, Y — пересечение PQ со средней линией (UV); t_1 и t — числа, такие, что

$$\overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AB} \text{ и } \overrightarrow{CN} = t_1 \cdot \overrightarrow{CD}. \tag{19}$$

По условию теоремы X, Y, t_1 и t существуют и так как $AM : MB \neq DN : NC$, то $AM : AB = t \neq DN : DC = ND : CD = (1 - t_1)$, т.е. $t + t_1 \neq 1$. Поэтому в силу леммы 4 стороны AB и CD параллельны и $ST\overrightarrow{A}B\overrightarrow{C}D$. Кроме того, условие $t + t_1 \neq 1$ исключает случаи $A = D$ и $B = C$.

Далее заметим, что если прямая (MN) не пересекает (AD) и (BC), то $BC\overrightarrow{A}D$ и тогда $ABCD$ — параллелограмм.

Пусть (MN) пересекает одну из прямых (AD) или (BC), тогда по условию теоремы (MN) должна пересекать и другую. Значит, точки M и N существуют, т.е. найдутся числа t_2 и t_3 такие, что

$$\overrightarrow{DQ} = t_3 \cdot \overrightarrow{DA}, \quad \overrightarrow{BP} = t_2 \cdot \overrightarrow{BC} \tag{20}$$

и если при этом $t_2 + t_3 \neq 1$, то в силу леммы 4 стороны BC и AD параллельны и тогда $ABCD$ — параллелограмм.

Предположим, что в (20) $t_2 + t_3 = 1$. Тогда

$$DQ : QA = t_3 : (1 - t_3) = (1 - t_2) : t_2 = CP : PB$$

и в силу леммы 2 $QP\overrightarrow{A}B\overrightarrow{D}C$. Но тогда $QP\overrightarrow{S}T$ и так как четырехугольник $ABCD$ невырожденный, то (ST) и (QP) не пересекаются — что противоречит условию теоремы. Значит $t_2 + t_3 \neq 1$. Теорема 9 доказана.

Следствие 1. *Пусть ST и UV — средние линии четырехугольника $ABCD$: $AS = SD$, $BT = TC$, $AV = VB$ и $CU = UD$, а прямая (AP) пересекает прямую (CD) в точке M, а прямую (BC) — в точке P. Тогда, если (ST) и (UV) делят пополам отрезки AN и AP соответственно, то $ABCD$ — параллелограмм.*

Для установления необходимости условий теоремы 9, а именно условия: $t + t_1 \neq 1$, приведем полезную лемму.

Лемма 5. *Пусть точки M и N делят противоположные стороны некоторого четырехугольника в равных отношениях, при этом выполняются следующие условия:*

1. $\overrightarrow{CN} = t \cdot \overrightarrow{CD}$, где $t \neq 0$ и $t \neq 1$;

2. $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{CB}$, где $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$ — линейно независимы и $\alpha \neq -1$;

3. прямая (MN) пересекает прямые (AD) и (BC) в точках Q и P соответственно, т.е. $\overrightarrow{BP} = t_2 \cdot \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DQ} = t_3 \cdot \overrightarrow{DA}$.

Тогда $t_2 = \frac{1+\beta(1-t)}{1+\alpha}$, $t_3 = \frac{\alpha+\beta(1-t)}{1+\alpha}$, а средние линии (ST) и (UV) делят отрезки MN и PQ пополам.

Доказательство. Из условий леммы получим три коллинеарных вектора:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= (1-t)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NC} = (1-t)(1+\alpha)\overrightarrow{AB} + (1+\beta(1-t))\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{NQ} &= t\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DQ} = (t\alpha - t_3(1+\alpha))\overrightarrow{AB} + (t\beta - t_3(1+\beta))\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{MP} &= (1-t)\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{BC} \end{aligned} \tag{21}$$

Сравнивая первое и третье из равенств (21), найдем t_2:

$$(1+\alpha)(1-t)t_2 = (1+\beta(1-t))(1-t) \Leftrightarrow t_2 = \frac{1+\beta(1-t)}{1+\alpha},$$

т.к. $\alpha + 1 \neq 0$ и $1 - t \neq 0$.

Теперь, сравнивая первое и второе из равенств (21), найдем t_3:

$$\begin{aligned} &(t\alpha - t_3(1+\alpha))(1+\beta(1-t)) = (1-t)(1+\alpha)(t\beta - t_3(1+\beta)), \\ &t_3(1+\alpha)((1-t)(1+\beta) - 1 - \beta(1-t)) = t(1-t)(1+\alpha)\beta - \alpha(1+\beta(1-t))), \\ &t_3(1+\alpha) = \alpha - (1-t)\beta, \quad t_3 = \frac{\alpha - (1-t)\beta}{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Для окончательного доказательства леммы осталось показать, что средние линии (ST) и (UV) делят отрезки MN и PQ пополам. Для этого рассмотрим две системы материальных точек [1, стр. 10]

$$M = \big\{(1-t)A, tB, tC, (1-t)D\big\} \text{ и } M_1 = \big\{t_3A, t_2B, (1-t_2)C, (1-t_3)D\big\}.$$

Точки M и N являются барицентрами систем $\big\{(1-t)A, tB\big\}$ и $\big\{tC, (1-t)D\big\}$, поэтому центр масс системы M находится на середине отрезка MN, т.е. в точке X. С другой стороны X лежит на прямой соединяющей барицентры систем материальных точек $\big\{(1-t)A, tC\big\}$ и $\big\{tB, (1-t)D\big\}$, т.е. точки T и S. Значит, средняя линия (ST) делит отрезок MN пополам.

Аналогично, рассматривая систему M_1 и, учитывая, что $t_3 + t_2 = 1$, убедимся в том, что средняя линия (UV) делит отрезок PQ пополам. Лемма доказана.

4. Высоты и биссектрисы

В этом параграфе рассматривается свойства 1 и 2 параллелограмма, сформулированные выше. Учащиеся «упорно» предлагали некорректные доказательства того, что если высоты, опущенные из противоположных вершин четырехугольника $ABCD$ на противоположные стороны, равны, то $ABCD$ — параллелограмм. Однако, как показывает пример ниже, это не так.

Пример 1. Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABCD$ на рис. 11:

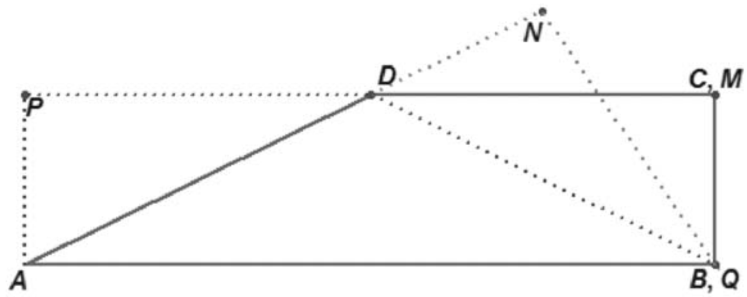


Рис. 11

Здесь угол A равен 30°, AD=DB. Очевидно, что высоты AP и CQ равны. Высота DM, опущенная из вершины D на сторону BC, совпадает со стороной DC и равна высоте BN, опущенной из B на (AD), т.к. прямоугольные треугольники DBN и DBM равны, как имеющие общую гипотенузы и равные углы ($\angle BDN = \angle DBM = 60^0$).

На протяжении всего семестра учащиеся безуспешно пытались доказать, что если биссектрисы противоположных углов четырехугольника $ABCD$, проведенные к противоположным сторонам, равны, то $ABCD$ — параллелограмм. Примеры 2 и 3 (см. ниже) показывают, что это не так. Однако отметим, что изучив свойства четырехугольника и познакомившись с параллелограммом Вариньона, учащиеся пришли с следующему признаку параллелограмма.

Через вершины простого четырехугольника $ABCD$ проведем прямые, перпендикулярные биссектрисам углов A, B, Cи D, как показано на рис. 12.

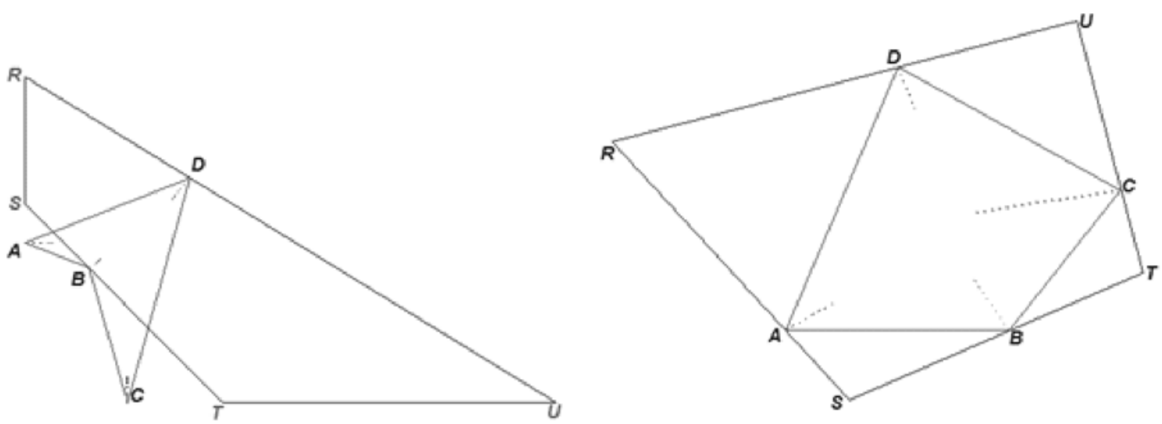


Рис. 12

Эти прямые образуют четырехугольник $RSTU$, для которого и был получен следующий результат.

Теорема 10. *Пусть $ABCD$ — простой четырехугольник. Тогда*

1. построенный выше четырехугольник $RSTU$ можно вписать в окружность;

2. $ABCD$ является параллелограммом в том и только в том случае, если $RSTU$ – прямоугольник.

Доказательство. Так как стороны четырехугольник $RSTU$ перпендикулярны биссектрисам, то несложно заметить, что

$$\angle URS = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\angle ADB}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\angle DAB}{2}\right) = \frac{1}{2}(\angle ADB + \angle DAB). \tag{22}$$

Аналогично,

$$\angle TUR = \frac{1}{2}(\angle ADC + \angle BCD), \ \angle UTS = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle DCB), \ \angle TSR = \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ABC). \tag{23}$$

Так как сумма углов простого четырехугольника равна 2π, то из равенств (22) и (23) следует, что около четырехугольника $RSTU$ можно описать окружность. Также из (22) и (23) легко видеть, что если $RSTU$ – прямоугольник, то суммы соседних углов четырехугольника $ABCD$ будут равны π и значит $ABCD$ — параллелограмм. Теорема 10 доказана.

Заметим, что второе утверждение этой теоремы следует из упражнения 1 в [2, стр. 56].

Попытки найти центр четырехугольника $RSTU$ и установить его интересные свойства пока не увенчались успехом.

В следующих двух примерах построены выпуклые четырехугольники, не являющиеся параллелограммами и имеющие попарно равные биссектрисы.

Пример 2. Равнобочная трапеция $ABCD$ с углами при основании $\angle C = \angle D = 80^0$ и основаниями AB =1 и $CD = \sqrt{3}$ имеет равные биссектрисы $AP = CQ = BQ_1 = DP_1 = 2\sin 80^0$ углов A, B, C и D соответственно. Что следует из теоремы синусов для треугольников CQD и ABP и того, что $\sin 80^0 = \sin 100^0$.

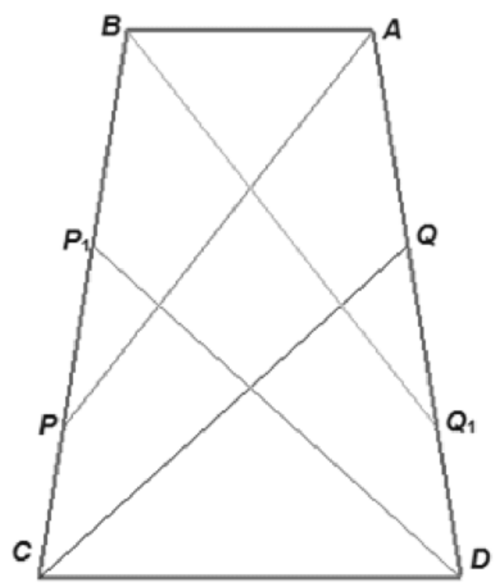


Рис. 13

Пример 3. Здесь нашей целью является построение четырехугольника $ABCD$ с попарно равными биссектрисами $CQ = AP$ и $BN = DM$ Для того сначала построим прямоугольный треугольник RDC (рис. 14): $\angle D = \frac{\pi}{2}$, $DC = 1$ и $\angle C = \frac{\pi}{3}$. Докажем, что на стороне DR найдутся точка A и точка B — на стороне RC такие, что четырехугольник $ABCD$ будет иметь попарно равные биссектрисы ($CQ = AP$ и $DM = BN$).

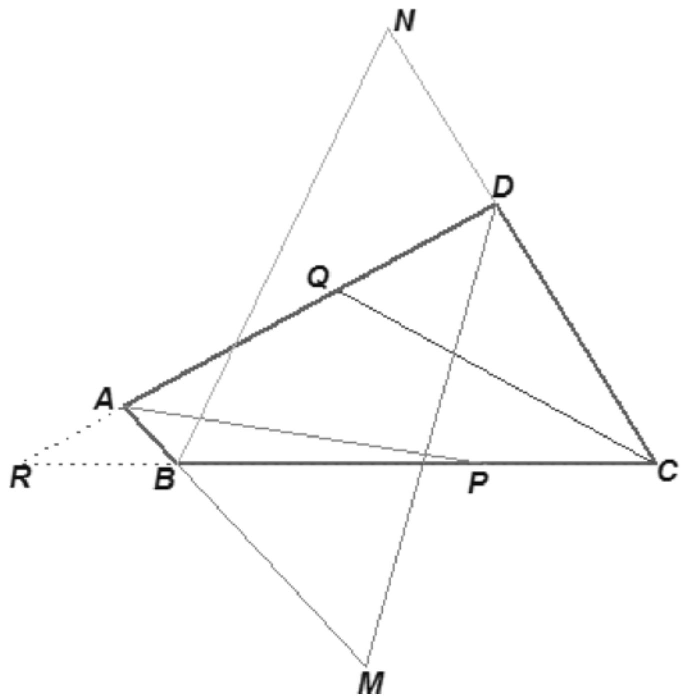


Рис. 14

Сначала заметим, что $CQ = \frac{2}{\sqrt{3}}$ и для любой точки A на отрезке QR найдется точка P на RC такая, что $AP = CQ$. Точку B на CR строим из условия $\angle DAP = \angle BAP$.

Положим $\angle DAB = \angle A = 2\alpha$ и найдем биссектрисы $DM = dm(\alpha)$ и $BN = bn(\alpha)$, как функции от α.

По теореме синусов для треугольников ARPи ARB имеем

$$\frac{AR}{\sin(\angle R + \pi - \alpha)} = \frac{AP}{\sin\angle R} \Rightarrow AR = \frac{4\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{RB}{\sin\angle A} = \frac{AR}{\sin(\angle A - \angle R)} \Rightarrow RB = \frac{4\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\sin 2\alpha}{\sqrt{3}\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)},$$

т.к. $\angle R = \frac{\pi}{6}$. Отсюда

$$BC = RC - RB = 2 - \frac{4\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\sin 2\alpha}{\sqrt{3}\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}$$

и

$$AD = DR - AR = \sqrt{3} - \frac{4\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}} = \frac{3 - 4\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}}.$$

А теперь, зная BC и AD, применяя теорему синусов к треугольникам ADM и BNC, найдем биссектрисы DM и BN, как функции от α:

$$\frac{DM}{\sin 2\alpha} = \frac{AD}{\sin\left(2\alpha + \frac{\angle D}{2}\right)} \Rightarrow DM = \frac{AD\cdot\sin 2\alpha}{\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin 2\alpha\left(3 - 4\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\right)}{\sqrt{3}\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}$$

и

$$\frac{BN}{\sin\angle C} = \frac{BC}{\sin\left(\angle C + \frac{\angle B}{2}\right)} \Rightarrow BN = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right)}\cdot\left(2 - \frac{4\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\sin 2\alpha}{\sqrt{3}\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}\right),$$

т.к. $\angle C = \frac{\pi}{3}$ и $\angle B = 2\pi - \angle A - \angle D - \angle C$. Значит,

$$dm(\alpha) = DM = \frac{\sin 2\alpha \left(3 - 4\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\right)}{\sqrt{3}\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}$$

и

$$bn(\alpha) = BN = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right)} \cdot \left(2 - \frac{4\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\sin 2\alpha}{\sqrt{3}\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}\right).$$

Далее, так как

$$dm\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2\sin\frac{5\pi}{12}} = 6\sin\frac{\pi}{12} < bn\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6}$$

и

$$dm\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{6 - 8\sin\frac{\pi}{12}}{\sqrt{6}} > bn\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{6 - 8\sin\frac{\pi}{12}}{3},$$

то найдется $\alpha_0 \approx 39{,}5^\circ$ такое, что $dm(\alpha_0) = bn(\alpha_0)$. При этом $\alpha\angle A \approx 79^\circ$, $AD \approx 1{,}351 < DR = \sqrt{3}$, $BC \approx 1{,}504 < CR = 2$, т.е. четырехугольник $ABCD$ существует и выпуклый.

Литература

1. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. – М.: Наука, 1987. – 158 с.
2. Болтянский В.Г. Четырёхугольники. // Квант. - № 9. - 1974. – С. 53-56.

Привалов Александр Андреевич,
доцент кафедры “Прикладная математика”
Московского автомобильно-дорожного государственного
технического университета (МАДИ),
педагог дополнительного образования
ГБОУ г. Москвы “Школа на Юго-Востоке
имени Маршала В.И. Чуйкова”,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: a_privalov@bk.ru

Символьные вычисления в математических доказательствах (computer assisted proofs)

Н. Н. Осипов

В статье приводятся примеры применения систем компьютерной алгебры к доказательству теорем в элементарной геометрии, алгебре и теории чисел.

Как научная дисциплина компьютерная алгебра ориентируется на создание алгоритмов, предназначенных для точного решения математических и прикладных задач с помощью компьютера. В частности, имеющиеся в настоящее время системы компьютерной алгебры (их довольно много, несколько десятков) можно использовать как средство для доказательства различных математических теорем. Такой подход особенно актуален там, где (логически) простому методу доказательства препятствуют слишком громоздкие преобразования. В данной статье приводятся примеры таких ситуаций и показывается, как символьные вычисления позволяют преодолеть трудности технического характера.

Хорошо известно, как с помощью методов компьютерной алгебры можно доказывать (и даже получать новые) теоремы элементарной геометрии (см., например, [10]). Это стало возможным благодаря появлению и совершенствованию алгоритмов решения полиномиальных систем уравнений (алгоритм Бухбергера). Существует довольно широкий класс теорем планиметрии [7], для доказательства которых можно обойтись более элементарными средствами и тем самым избежать применения «тяжелой артиллерии коммутативной алгебры». Следующая теорема является типичным примером.

Теорема 1. *Пусть ABC — произвольный треугольник, AA_1, BB_1, CC_1 — его биссектрисы, I — инцентр треугольника ABC P_1, P_2, P_3, P_4 P_5, P_6 — инцентры треугольников AB_1I, A_1BI, BC_1I, B_1CI, CA_1I, C_1AI соответственно. Тогда шесть точек P_j лежат на одной кривой 2-го порядка.*

Первоначально эта «теорема об инцентрах» возникла в виде гипотезы и впервые была доказана именно средствами компьютерной алгебры (подробности см. в статьях [7, 8]). Попутно выяснилось, что справедлив еще целый ряд подобных теорем, в которых вместо некоторых инцентров указанных треугольников фигурируют их эксцентры. Такая роскошь стала возможной благодаря вычислительному методу доказательства, основанному на символьных преобразованиях. Позднее было найдено геометрическое доказательство [6], которое, впрочем, тоже не обходится без громоздких вычислений. Другие примеры обоснования (и опровержения) подобных элементарно-геометрических гипотез с помощью различных систем компьютерной алгебры можно найти в статьях [4, 5].

Следующий пример связан с диофантовыми уравнениями. Как известно (10-я проблема Гильберта), задача решения произвольных диофантовых уравнений алгоритмически неразрешима, поэтому создание алгоритмов решения для каких-либо классов диофантовых уравнений является содержательной проблемой как теории чисел, так и компьютерной алгебры.

Рассмотрим, например, семейство диофантовых уравнений вида

$$xy^2 + (ax^2 + bx + c)y + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0. \tag{1}$$

В статье [12] предлагается алгоритм решения в целых числах уравнений этого семейства, основанный на следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *— решение уравнения* (1), $x \neq 0$. *Тогда число*

$$k = \frac{c^3 y + \left(c^2 D + E^2 - bcE\right) x + c^2 E}{x^2} \tag{2}$$

является целым.

Самый простой способ доказать теорему 2 состоит в следующем. Выразим из уравнения (1) коэффициент E:

$$E = -xy^2 - (ax^2 + bx + c)y - Ax^4 - Bx^3 - Cx^2 - Dx.$$

Далее подставим это выражение в правую часть (2). После сокращения на x^2 мы получим явное, но довольно громоздкое выражение для k в виде многочлена из $\mathbb{Z}[x, y]$ (по этой причине оно здесь не приводится). Теперь очевидно, что при целых значениях x, y значения k также должно быть целыми. Теоремы типа теоремы 2 (еще один пример см. в статье [11]) служат основой для элементарной версии метода Рунге для решения диофантовых уравнений малой степени.

Следующие два примера относятся к алгебре (точнее, к теории конечных полей). Мы будем использовать некоторые базовые факты о конечных полях $\mathbb{F}_q$ где q есть степень простого числа p (см., например, [3], а также общий учебник алгебры [1]).

Рассмотрим сравнение

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 \equiv (\operatorname{mod} p),$$

где p — простое число. Экспериментируя с разными p, можно обнаружить такую закономерность: сравнение разрешимо для $p = 7$, а также для $p \equiv \pm 1 \pmod 7$; для остальных p оно неразрешимо. Оказывается, это связано с тем, что многочлен в левой части сравнения имеет специальные «тригонометрические» корни:

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = \prod_{j=1}^{3} \Big(x - 2\cos(2\pi j/7)\Big) \tag{3}$$

Более того, (почти) такая же закономерность наблюдается и для других кубических многочленов, имеющих корни в поле $\mathbb{Q}(2\cos\left(2\pi/7)\right)$.

Предложение 1. *Пусть* $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *— кубический многочлен со старшим коэффициентом* 1. *Предположим, что* $f(x)$ *неприводим над полем рациональных чисел* $\mathbb{Q}$, *но имеет корень в поле* $\mathbb{Q}\big(2\cos(2\pi/7)\big)$. *Тогда сравнение*

$$f(x) \equiv (\operatorname{mod} p)$$

разрешимо для тех и только тех простых p *для которых* $D_f \equiv 0 \pmod p$ *или же* $p \equiv \pm 1 \pmod 7$. *Здесь* D_f *— дискриминант многочлена* $f(x)$.

Доказательство. Удобно рассуждать в терминах уравнения

$$f(x) = 0 \tag{4}$$

над конечным полем $\mathbb{F}_p$ из p элементов. Пусть $\xi_j = 2\cos(2\pi j/7)$ — корни многочлена (3) и $\xi = \xi_1$ Ясно, что

$$\mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbb{Q}(\xi) \qquad [\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = 3.$$

Пусть $\alpha = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2$ — корень $f(x)$ в поле $\mathbb{Q}(\xi)$. Тогда другие корни $f(x)$ суть

$$\alpha_j = a_0 + a_1\xi_j + a_2\xi^2, \qquad j = 2,\, 3,$$

поскольку расширение $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$ является нормальным, а многочлен $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$. Прямым вычислением (например, в СКА Maple) находим

$$\begin{aligned} f(x) = (x-\alpha)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) = \\ = x^3 + (-3a_0 + a_1 - 5a_2)x^2 + (3a_0^2 - 2a_1^2 + 6a_2^2 - 2a_0a_1 + 10a_0a_2 - a_1a_2)x - \\ - a_0^3 - a_1^3 - a_2^3 + a_0^2a_1 - 5a_0^2a_2 + 2a_0a_1^2 - 6a_0a_2^2 + a_0a_1a_2 + 2a_1a_2^2 + a_1^2a_2. \end{aligned}$$

Дискриминант такого многочлена $f(x)$ равен

$$D_f = 7^2(a^3 - a_1a^2 - 2a^2a_2 + a^3)^2$$

Более того, все коэффициенты a_k должны быть целыми числами. Действительно, так как $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ нормирован, число α должно быть целым алгебраическим. Хорошо известно, что кольцо целых алгебраических чисел поля $\mathbb{Q}(\eta)$ есть $\mathbb{Z}[\eta]$, где

$$\eta = cos(2\pi/7) + i\sin(2\pi/7)$$

есть примитивный корень 7-й степени из единицы (см., например, [2, гл. IV]). Поскольку $\xi = \eta + \eta^{-1}$, отсюда легко получить, что кольцо целых алгебраических чисел поля $\mathbb{Q}(\xi)$ совпадает с $\mathbb{Z}[\xi]$.

I. Предположим, что $f(a) = 0$ для некоторого $a \in \mathbb{F}_p$, где p не делит D_f (т. е. $p \neq 7$ и p не делит $a_2^3 - a_1a_2^2 - 2a_1^2a_2 + a_1^3$). Пусть

$$b = \frac{b_0 + b_1a + b_2a^2}{a_2^3 - a_1a_2^2 - 2a_1^2a_2 + a_1^3},$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= -a_0a_1^2 - a_0^2a_2 - a_2^3 + 2a_1a_2^2 + 2a_0a_1a_2 - 3a_0a_2^2, \\ b_1 &= a_1^2 - 2a_1a_2 + 3a_2^2 + 2a_0a_2, \\ b_2 &= -a_2. \end{aligned}$$

С помощью Maple легко проверить, что $b \in \mathbb{F}_p$ удовлетворяет равенству

$$b^3 + b^2 - 2b - 1 = 0. \tag{5}$$

Пусть $\omega \in \mathbb{F}_{p^2}^*$ — корень многочлена $x^2 - bx + 1 \in \mathbb{F}_p[x]$ Имеем $b = \omega + \omega^{-1}$ Подставив это в (5) и упростив, мы получим

$$\omega^6 + \omega^5 + \cdots + 1 = 0.$$

Отсюда $\omega^7 = 1$, при этом $\omega \neq 1$ (так как $p \neq 7$). Значит, $\mathrm{ord}(\omega) = 7$ и по теореме Лагранжа $p^2 - 1 = |\mathbb{F}_{p^2}^*|$ делится на 7. Таким образом, $p \equiv \pm 1 \pmod 7$.

II. Если p делит D_f, то уравнение (4) разрешимо. Действительно, в противном случае многочлен $f(x)$ будет неприводимым над $\mathbb{F}_p$ и, следовательно, не сможет иметь кратных корней, что противоречит равенству $D_f = 0$ в $\mathbb{F}_p$.

III. Предположим, что $p \equiv \pm 1 \pmod 7$. Тогда уравнение (4) также разрешимо. Чтобы показать это, рассмотрим два случая.

(a) Пусть $p \equiv 1 \pmod 7$ Поскольку мультипликативная группа $\mathbb{F}_p^*$ является циклической, существует $\omega \in \mathbb{F}_p^*$ для которого $\omega^7 = 1$ и $\omega \neq 1$. Для $b = \omega + \omega^{-1} \in \mathbb{F}_p$ имеет место равенство (5). Тогда для

$$a = a_0 + a_1b + a_2b^2$$

мы получим $f(a) = 0$ в $\mathbb{F}_p$, что и требовалось.

(b) Пусть $p \equiv -1 \pmod 7$ По аналогии с (a) существует такой $\omega \in \mathbb{F}^*_{p^2}$, для которого $\omega^7 = 1$ и $\omega \neq 1$. Как следствие, $\omega^{p+1} = 1$, т. е. $\omega^p = \omega^{-1}$. Пусть $b = \omega + \omega^{-1}$. Тогда

$$\varphi(b) = (\omega + \omega^{-1})^p = \omega^p + \omega^{-p} = \omega^{-1} + \omega = b,$$

где $\varphi\colon \mathbb{F}_{p^2} \to \mathbb{F}_{p^2}$ — автоморфизм Фробениуса. Значит, $b \in \mathbb{F}_p$. Далее можно рассуждать так же, как и в (a). Предложение доказано.

Замечание. В случае $p \equiv \pm\, 1$ (mod 7) уравнение (4) имеет три корня.

Предложение 2. *Пусть $p \neq 7$ и $p \not\equiv \pm 1$ ((mod 7)). Тогда*

$$\sum_{a\in\mathbb{F}_p} \frac{1}{a^3 + a^2 - 2a - 1} = \begin{cases} \frac{2}{7} & \textit{при } p \equiv \pm 2 \ ((\mathrm{mod}\, 7)) \\ -\frac{1}{7} & \textit{при } p \equiv \pm 3 \ ((\mathrm{mod}\, 7)) \end{cases}$$

Доказательство. Для вычисления указанной суммы можно воспользоваться следующим общим утверждением.

Лемма. *Пусть $f(x), g(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ — два многочлена, при этом $g(x)$ неприводим над $\mathbb{F}_p$, $n = \deg g(x) > 1$ и $\deg f(x) < n$. Тогда*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{F}_p} \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{f(\alpha)}{g'(\alpha)(\alpha^p - \alpha)}\right)^{p^j},$$

где $\alpha \in \mathbb{F}[x]/g(x) \cong \mathbb{F}_{p^n}$ — корень $g(x)$.

В нашем случае

$$f(x) = 1; \quad g(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1. \tag{6}$$

Как следует из предложения 1, при $p \neq 7$ и $p \not\equiv \pm 1 \pmod 7$ многочлен $g(x)$ неприводим над $\mathbb{F}_p$. Для многочленов (6) имеем

$$\beta = \frac{f(\alpha)}{g'(\alpha)(\alpha^p - \alpha)} = \frac{1}{(3\alpha^2 + 2\alpha - 2)(\alpha^p - \alpha)}. \tag{7}$$

Пусть ω — корень многочлена $x^2 - \alpha x + 1$. Тогда

$$\alpha = \omega + \omega^{-1}, \qquad \omega^7 = 1, \quad \alpha^p = \omega^p + \omega^{-p}.$$

Далее рассмотрим два случая.

(a) $p \equiv \pm 2 \pmod 7$. Здесь $\alpha^p = \omega^2 + \omega^{-2}\alpha^2 - 2$, так что

$$\beta = \frac{1}{(3\alpha^2 + 2\alpha - 2)(\alpha^2 - \alpha - 2)} = \frac{2 - \alpha - \alpha^2}{7}.$$

Значит,

$$\beta^p = \frac{2 - \alpha^p - \alpha^{2p}}{7} = \frac{1 + \alpha}{7}, \qquad \beta^{p^2} = \frac{1 + \alpha^p}{7} = \frac{-1 + \alpha^2}{7}.$$

Следовательно, искомая сумма $\beta + \beta^p + \beta^{p^2} = 2/7$.

(b) $p \equiv \pm 3 \pmod 7$. Теперь имеем $\alpha^p = \omega^3 + \omega^{-3} = 1 - \alpha - \alpha^2$, так что

$$\beta = \frac{1}{(3\alpha^2 + 2\alpha - 2)(1 - 2\alpha - \alpha^2)} = \frac{\alpha^2 - 2}{7}.$$

В этом случае искомая сумма $\beta + \beta^p + \beta^{p^2} = -1/7$. Предложение доказано.

Можно предложить другой, в некотором смысле более элементарный способ вычисления суммы из предложения 2, не привлекающий конечные расширения поля $\mathbb{F}_p$.

Пусть $\zeta = \cos(2\pi/N) + i\sin(2\pi/N)$ — первообразный корень N-й степени из единицы в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

1. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\zeta^{3k} + \zeta^{2k} - 2\zeta^k - 1}. \tag{8}$$

Формально, S принадлежит круговому полю $\mathbb{Q}(\zeta)$, но фактически S является рациональным числом при любом N (легко следует из основной теоремы о симметрических многочленах). Более того, с помощью теории вычетов (комплексный анализ) можно показать, что

$$S = N \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{(3\xi_j^2 + 2\xi_j - 2)(\xi_j - \xi_j^{N+1})} - N, \tag{9}$$

где $\xi_j = 2\cos(2\pi j/7) = \eta^j + \eta^{-j}$ (подробности см. в статье [9]).

2. Пусть $I = (p)$ — простой идеал в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_I \subset \mathbb{Q}$ — соответствующее локальное кольцо (см., например, [2 гл. I]). Положим $N = p-1$ и рассмотрим подкольцо $\mathbb{Z}_I[\zeta] \subset \mathbb{Q}(\zeta)$. Покажем, что все слагаемые суммы (8) лежат в $\mathbb{Z}_I[\zeta]$ если $p \neq 7$ и $p \not\equiv \pm 1$ ((mod 7)). Действительно, можно доказать, что

$$\prod_{k=0}^{N-1} (\zeta^{3k} + \zeta^{2k} - 2\zeta^k - 1) = (-1)^N \prod_{j=1}^{3} (\xi_j^N - 1)$$

для любого N (см. [9]). Следовательно, нужно лишь убедиться в том, что

$$\prod_{j=1}^{3} \left(\xi^{p-1} - \xi_j\right) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Для этого заметим, что

$$\xi^p = (\eta^j + \eta^{-j})^p \equiv \eta^{pj} + \eta^{-pj} = \eta^{rj} + \eta^{-rj} = \xi_{rj} \pmod{p},$$

где $p \equiv r \pmod 7$ и $r \in \{\pm 2, \pm 3\}$, Если, например, $r = \pm 2$ то получим

$$\prod_{j=1}^{3} (\xi^p - \xi_j) = (\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3) \equiv 7 \pmod{p}$$

(и аналогично в случае $r = \pm 3$).

3. Теперь можно воспользоваться гомоморфизмом

$$\psi\colon \mathbb{Z}_I[\zeta] \to \mathbb{F}_p,$$

который определяется условием $\psi(\zeta) = c$, где c — фиксированный генератор мультипликативной группы $\mathbb{F}_p^*$. Другими словами, имеет место равенство

$$\psi(S) = \sum_{\alpha \in \mathbb{F}_p^*} \frac{1}{\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 1}.$$

Это позволяет найти искомую сумму, вычислив правую часть равенства (9) по модулю p. Но, фактически, этот другой путь очень близок к тому, что предложен выше (достаточно сравнить выражение (7) для β с выражением для слагаемых в правой части (9)).

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1).

Литература

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: Электронное издание. - М.: МЦНМО, 2014.

2. Ленг С. Алгебраические числа. - М.: Мир, 1966.

3. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля: В 2-х т. - М.: Мир, 1988.

4. Есаян А.Р., Добровольский Н.Н. Компьютерное доказательство гипотезы о центроидах // Чебышевский сборник. - 2017. - Т. 18. - № 1. - С. 73-91.

5. Есаян А.Р., Якушин А.В. Экспериментальное обоснование гипотез в GeoGebra // Чебышевский сборник. - 2017. - Т. 18. - № 1. - С. 92-108.

6. Каюмов О.Р., Каширина К.Е. Элементарное доказательство гипотезы Штейнгартца для биссектрис // Математическое образование. - 2015. № 3. - С. 3-13.

7. Осипов Н.Н. О механическом доказательстве планиметрических теорем рационального типа // Программирование. - 2014. - № 2. - С. 41-50.

8. Осипов Н.Н. Компьютерное доказательство теоремы об инцентрах // Математическое просвещение. Сер. 3. - Вып. 18. - М.: МЦНМО, 2014. - С. 205-216.

9. Осипов Н.Н. О вычислении конечных тригонометрических сумм // Математическое просвещение. Сер. 3. - Вып. 23. - М.: МЦНМО, 2019. - С. 174-208.

10. Chou S.-C. Mechanical Geometry Theorem Proving. - Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1988.

11. Osipov N.N., Kytmanov A.A. An algorithm for solving a family of diophantine equations of degree four which satisfy Runge's condition // Компьютерная алгебра: материалы Международной конференции. Москва, 17-21 июня 2019 г. / отв. ред. С.А. Абрамов, Л.А. Севастьянов. - Москва: РУДН, 2019. - С. 154-160.

12. Osipov N.N., Dalinkevich S.D. An algorithm for solving a quartic diophantine equation satisfying Runge's condition // Computer Algebra in Scientific Computing. CASC 2019. Lecture Notes in Computer Science. - Vol. 11661. - Springer, 2019. - P. 377-392.

Осипов Николай Николаевич,
профессор кафедры "Прикладная математика
и компьютерная безопасность" Института
космических и информационных технологий
Сибирского федерального университета (Красноярск),
доктор физико-математических наук.

E-mail: nnosipov@rambler.ru

Векторно-геометрическая интерпретация инварианта дробно-квадратичной функции

Е. Г. Смольянова

В статье построен инвариант дробно-квадратичной функции и дана его векторно-геометрическая интерпретация. Метод можно использовать как генератор задач разной сложности на решение уравнений.

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

с действительными коэффициентами и положительным дискриминантом. Обозначим через $f(x)$ соответствующий квадратный трёхчлен. Как известно, функция $h(x) = -\frac{b}{a} - x$ является инвариантом $f(x)$:

$$f(h(x)) = f(x),\ (x \in \mathbb{R})\,.$$

Поэтому если x_1 — один из корней квадратного уравнения, то $h(x_1)$ — второй его корень. Преобразуем равносильно уравнение (1) к виду:

$$g(x) = A, \tag{2}$$

где $g(x) = \dfrac{A_1x^2 + B_1x + C_1}{A_2x^2 + B_2x + C_2}$ — несократимая дробь, причём $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$, $A \neq 0$. Ясно, что функций в роли $g(x)$ можно предложить бесконечно много. Так, если

$$(a; b; c) = (2; -7; 3),$$

то каждое из следующих уравнений равносильно (1):

$$\frac{3x^2 - 5x + 7}{x^2 + 2x + 4} = 1; \quad \frac{x^2 + 10x + 6}{x^2 + x + 3} = 3; \quad \frac{5x^2 - 7x - 31}{x^2 - 2x - 4} = 7.$$

Для корректности дальнейшего не допускаем такого выбора коэффициентов дробно-квадратичной функции, при котором векторы $\vec{u} = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{v} = (A_2; B_2; C_2)$ пространства $\mathbb{R}^3$ окажутся коллинеарными. Кроме того, иногда функцию $g(x)$ будем записывать как частное скалярных произведений числового вектора и вектор-функции:

$$\frac{\vec{u} \cdot (x^2; x; 1)}{\vec{v} \cdot (x^2; x; 1)}.$$

Обозначим через L и Q — классы дробно-линейных и дробно-квадратичных функций соответственно.

Итак, пусть $g(x) \in Q$ — выбрана. Ставим задачу: найти $\varphi(x) \in L$ со свойством

$$g(\varphi(x)) = g(x)$$

при всех допустимых значениях x. Иначе говоря, мы приступаем к поиску инварианта функции $g(x)$. Не представляет труда (по причине равносильности уравнений (1) и (2)) объяснение того, что преобразование $x \to \varphi(x)$ является инволютивным, т. е. $\varphi(\varphi(x)) = x$ в области определения функции $\varphi(x)$. В таком случае

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(h(x)) = x \Leftrightarrow h(\varphi(x)) = x.$$

Поиск $\varphi(x)$ сведётся к поиску подходящей упорядоченной тройки действительных чисел $(\alpha;\beta;\gamma)$, так как общий вид инволютивного дробно-линейного преобразования такой:

$$x \to -\frac{\beta x+\alpha}{\gamma x+\beta},\ \left(x \neq -\frac{\beta}{\gamma}\right).$$

Пусть x_1 и x_2 — решения уравнения (1). Преобразуем равенство $\varphi\left(x_1\right)=x_2$:

$$-\frac{\beta x_1+\alpha}{\gamma x_1+\beta}=x_2 \Leftrightarrow \gamma x_1 x_2+\beta\left(x_1+x_2\right)+\alpha=0.$$

Тогда с учётом теоремы Виета, получим следующее уравнение связи упорядоченных наборов коэффициентов $(a;b;c)$ и $(\alpha;\beta;\gamma)$:

$$a\cdot\alpha-b\cdot\beta+c\cdot\gamma=0. \tag{3}$$

Итак, любая функция $\varphi(x)=-\frac{\beta x+\alpha}{\gamma x+\beta}$, коэффициенты которой удовлетворяют условию (3), по любому корню уравнения (1) «найдёт» и другой его корень. Но тогда по отношению к корням этого уравнения (т. е. локально) она «ведёт» себя как инвариант функции $f(x)$. По этой причине будем называть её далее локальным инвариантом квадратичной функции. Графики всех таких дробно-линейных функций (т. е. гиперболы) содержат точки $(x_1;x_2)$ и $(x_2;x_1)$. Так что с помощью (3) можно описать «пучок» гипербол с двумя общими точками, симметричными относительно биссектрисы 1-го и 3-его координатных углов. Задача, которую мы поставили выше, требует ответа на вопрос: какая именно из этих функций $\varphi(x)$ и есть инвариант функции $g(x)$?

Продолжаем исследование. Из равносильности (1) и (2) будем иметь:

$$\begin{cases} a=A_1+(-A)\cdot A_2,\\ b=B_1+(-A)\cdot B_2,\\ c=C_1+(-A)\cdot C_2.\end{cases}$$

Обозначая $\vec{r}=(a;b;c)$ и полагая $t=-A$, придадим предыдущим связям векторно-параметрический вид:

$$\vec{r}=\vec{u}+t\cdot\vec{v}. \tag{4}$$

Дадим геометрическую интерпретацию. Пусть $\vec{u}$, $(\vec{u}+\vec{v})$, $\vec{r}$ — радиус-векторы точек M_1, M_2 и N соответственно (рис. 1). Если равенство (4) понимать буквально, т. е. как уравнение прямой в пространстве $\mathbb{R}^3$, то изменение параметра t (при неизменных $\vec{u}$ и $\vec{v}$, т. е. при фиксированной функции $g(x)$) будет означать соответствующее изменение положения точки N прямой M_1M_2 и, следовательно, изменение коэффициентов уравнения (1). Если же зафиксировать вектор $\vec{r}$ и значение t, то меняя векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$, мы тем самым будем изменять и функцию $g(x)$.

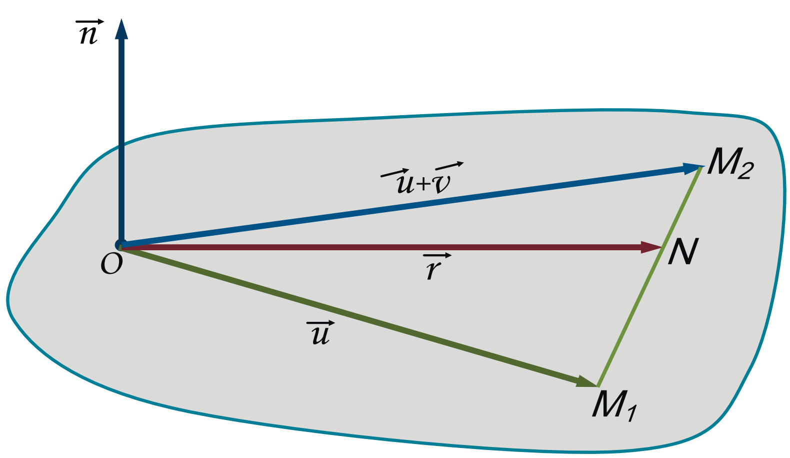


Рис. 1.

Замечание 1. Так как векторы $\vec{r}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ лежат в одной плоскости, то их смешанное произведение равно нулю:

$$(\vec{r},\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Вернёмся к уравнению (4). Умножим обе его части скалярно на вектор $\vec{n} = (\alpha; -\beta; \gamma)$ и учтём (3):

$$0 = \vec{r}\cdot\vec{n} = \vec{u}\cdot\vec{n} + t\cdot(\vec{v}\cdot\vec{n})\,.$$

Поскольку последнее равенство верно при любом $\vec{r}$, то оно верно и при любом t, т.к. векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ фиксированы. Следовательно,

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = \vec{v}\cdot\vec{n} = 0,$$

и, значит, $\vec{n} = \mu\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$ для некоторого $\mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ Равносильные условия:

$$(\alpha; -\beta; \gamma) = \mu\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \mu\cdot\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \mu\cdot(B_1\cdot C_2 - B_2\cdot C_1)\,; \\ \beta = \mu\cdot\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = \mu\cdot(A_1\cdot C_2 - A_2\cdot C_1)\,; \\ \gamma = \mu\cdot\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \mu\cdot(A_1\cdot B_2 - A_2\cdot B_1)\,. \end{cases} \tag{5}$$

Тогда независимо от μ

$$\varphi(x) = -\frac{\beta x+\alpha}{\gamma x+\beta} = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}\cdot x + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\cdot x + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}, \quad \left(x \neq -\frac{A_1\cdot C_2 - A_2\cdot C_1}{A_1\cdot B_2 - A_2\cdot B_1}\right)\,.$$

Поставленная задача решена. Мы получили формулы, по которым рассчитываются коэффициенты дробно-линейного инварианта функции $g(x)\in Q$. Как выяснилось выше, вектор $\vec{n} = (\alpha; -\beta; \gamma)$ есть нормаль к плоскости векторов, координатами которых являются коэффициенты $g(x)$. При этом смешанное произведение

$$(\vec{n},\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} \alpha & -\beta & \gamma \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \alpha\cdot\frac{\alpha}{\mu} + \beta\cdot\frac{\beta}{\mu} + \gamma\cdot\frac{\gamma}{\mu} = \frac{1}{\mu}\cdot\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right) = \frac{|\vec{n}|^2}{\mu}.$$

Замечание 2. Пусть $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$. Введём в рассмотрение дробно-линейную функцию

$$\overline{\varphi}(x) = -\frac{bx+a}{cx+b}, \qquad \left(x \neq -\frac{b}{c}\right),$$

коэффициенты которой связаны с коэффициентами функции $\varphi(x)$ условием (3). Тогда $\overline{\varphi}(x)$ есть локальный инвариант функции $\overline{f}(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. В таком случае квадратные уравнения $f(x) = 0$ и $\overline{f}(x) = 0$ можно считать сопряжёнными в том смысле, что корни каждого из них можно найти с помощью локальных инвариантов соответствующих квадратичных функций. А именно, пары корней этих уравнений выглядят так: $(x_1, \varphi(x_1))$ и $(\tilde{x_1}, \overline{\varphi}(\tilde{x_1}))$, причём четвёрка чисел $(x_1; \tilde{x_1}; \varphi(x_1); \overline{\varphi}(\tilde{x_1}))$ такова, что

$$(x_1 + \tilde{x_1})(\varphi(x_1) + \overline{\varphi}(\tilde{x_1})) = 1 + x_1\cdot\tilde{x_1}\cdot\varphi(x_1)\cdot\overline{\varphi}(\tilde{x_1})\,.$$

Поставим новую задачу: найти все такие функции $g^*(x) \in Q$, которые будут иметь тот же инвариант, что и функция $g(x)$. Обозначим векторы коэффициентов $g^*(x)$ через $\vec{u^*}$ и $\vec{v^*}$. Необходимое и достаточное условие общего инварианта у функций $g(x)$ и $g^*(x)$:

$$\left(\vec{u^*} \times \vec{v^*}\right) || \left(\vec{u} \times \vec{v}\right).$$

Но тогда $\vec{u^*}$ и $\vec{v^*}$ — линейные комбинации векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$, т. е.

$$\begin{cases} \vec{u^*} = \delta \cdot \vec{u} + \xi \cdot \vec{v}, \\ \vec{v^*} = \sigma \cdot \vec{u} + \omega \cdot \vec{v}, \end{cases}$$

где δ, ξ, σ, $\omega \in \mathbb{R}$, $D = \begin{pmatrix} \delta & \xi \\ \sigma & \omega \end{pmatrix} \neq E$ и $\det D \neq 0$.

С геометрической точки зрения это означает, что $\vec{u^*}$ и $\vec{v^*}$ следует выбирать «в пределах» плоскости векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

В частности, если $D = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq E$, то

$$\begin{cases} \vec{u^*} = \vec{u} + \xi \cdot \vec{v}, \\ \vec{v^*} = \vec{v} \end{cases}$$

и значит, соответствующие функции $g(x)$ и $g^*(x)$ отличаются на константу.

Приведём пример. Пусть

$$\vec{u} = (3; -5; 7)\,; \;\; \vec{v} = (1; 2; 4)\,; \;\; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \neq E.$$

(Проверка: $\det D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \neq 0\,.$) Рассчитаем коэффициенты функции $g^*(x)$:

$$\begin{pmatrix} \vec{u^*} \\ \vec{v^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & \xi \\ \sigma & \omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} \\ 2 \cdot \vec{u} - 5 \cdot \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5; -1; 15 \\ 1; -20; -6 \end{pmatrix}.$$

Поэтому функция

$$\varphi(x) = -\frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot x + \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot x + \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = -\frac{5x - 34}{11x + 5}$$

является общим инвариантом функций $g\,(x) = \dfrac{3x^2 - 5x + 7}{x^2 + 2x + 4}$ и $g^*\,(x) = \dfrac{5x^2 - x + 15}{x^2 - 20x - 6}$.

Замечание 3. Если $\varphi(x) = -\dfrac{\beta x + \alpha}{\gamma x + \beta}$ является инвариантом функции $g\,(x) = \dfrac{A_1 x^2 + B_1 x + C_1}{A_2 x^2 + B_2 x + C_2}$, то при условии непрерывности $g(x)$ в точке $\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)$ будем иметь:

$$g\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right) = \lim_{x \to -\beta/\gamma} g\left(\varphi(x)\right) = g(x) = \frac{A_1}{A_2}\,.$$

Покажем, как можно использовать это свойство функции $g(x)$.

Пусть $\vec{u_l} = \left(A_1^{(l)},\, B_1^{(l)},\, C_1^{(l)}\right)$ и $\vec{v_l} = \left(A_2^{(l)},\, B_2^{(l)},\, C_2^{(l)}\right)$ — векторы коэффициентов функций $g_l(x) \in Q$ $(l = 1, 2)$, причём

$$A_1^{(1)} \cdot A_2^{(2)} = A_2^{(1)} \cdot A_1^{(2)} \tag{6}$$

и

$$\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)_1 = -\frac{\begin{vmatrix} A_1^{(1)} & C_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} & C_2^{(1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1^{(1)} & B_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} & B_2^{(1)} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} A_1^{(2)} & C_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} & C_2^{(2)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1^{(2)} & B_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} & B_2^{(2)} \end{vmatrix}} = \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)_2. \tag{7}$$

(Условие (6) означает, что графики функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$ имеют одну и ту же горизонтальную асимптоту). Обозначим общее значение числовых дробей из (7) через U. Ясно, что если $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — одноинвариантные дробно-квадратичные функции, то (7) выполняется автоматически.

Рассмотрим уравнение вида

$$g_1(x) = g_2(x), \tag{8}$$

которое при условии (6) равносильно алгебраическому уравнению не выше третьей степени. Тогда (7) гарантирует (по Замечанию 3), что $x = U$ удовлетворяет уравнению (8). В таком случае найти все остальные его решения не составит труда.

Рассмотрим пример. Пусть требуется решить уравнение

$$\frac{15x^2 + 19x + 55}{5x^2 - x + 15} = \frac{6x^2 + x - 2}{2x^2 + 4x + 1}.$$

Полагаем

$$g_1(x) = \frac{15x^2 + 19x + 55}{5x^2 - x + 15}; \quad g_2\,(x) = \frac{6x^2 + x - 2}{2x^2 + 4x + 1}.$$

Имеем: $\frac{15}{5} = \frac{6}{2}$, т. е. условие (6) выполняется. Далее, находим дробно-линейные инварианты этих функций:

$$\varphi_1(x) = -\frac{5x - 34}{11x + 5}; \quad \varphi_2(x) = -\frac{10x + 9}{22x + 10}.$$

Поскольку

$$\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)_1 = -\frac{5}{11} = \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)_2 = -\frac{10}{22},$$

то и условие (7) выполняется. Следовательно, $x = -\frac{5}{11}$ является решением данного уравнения и, как несложно проверить, единственным.

«Усилим» условия (6) и (7):

$$\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}} = \frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}} = \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)_1 = \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)_2. \tag{9}$$

Тогда, очевидно, $x_0 = U$ — неподвижная точка каждого из отображений $g_1(x)$ и $g_2(x)$ и поэтому

$$g_1\left(g_2\left(x_0\right)\right) = g_2\left(g_1\left(x_0\right)\right).$$

Рассмотрим пример. Пусть требуется найти какое-либо решение уравнения

$$g_1\left(g_2(x)\right) = g_2\left(g_1\left(x\right)\right),$$

если

$$g_1(x) = \frac{-5x^2 + 12x + 5}{11x^2 + 1}; \quad g_2(x) = \frac{-385x^2 + 132x + 25}{847x^2 + 1452x + 737}.$$

Во-первых, функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ в этом примере — одноинвариантные:

$$\varphi(x) = -\frac{5x - 1}{11x + 5}.$$

Во-вторых,

$$-\frac{5}{11}=\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}}=\frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}}=-\frac{\beta}{\gamma},$$

т. е. условие (9) выполняется. Следовательно, $x=-\frac{5}{11}$ удовлетворяет данному уравнению.

Замечание 4. Если выбрать векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — ортогональными, то «последствия» будут такими: $\{\vec{n},\vec{u},\vec{v}\}$ окажется тройкой попарно ортогональных векторов. Тогда по координатам вектора $\vec{u}$ найдутся коэффициенты инварианта дробно-квадратичной функции

$$\frac{\vec{v}\cdot(x^2;x;1)}{\vec{n}\cdot(x^2;x;1)},$$

а по координатам вектора $\vec{v}$ — коэффициенты инварианта дробно-квадратичной функции

$$\frac{\vec{n}\cdot(x^2;x;1)}{\vec{u}\cdot(x^2;x;1)}.$$

Пусть, например, даны три функции из Q:

$$f_{12}(x)=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2},\quad f_{23}(x)=\frac{a_2x^2+b_2x+c_2}{a_3x^2+b_3x+c_3},\quad f_{31}(x)=\frac{a_3x^2+b_3x+c_3}{a_1x^2+b_1x+c_1},$$

причём

$$\vec{s_1}=(a_1;b_1;c_1)=(6;-7;-21);\ \ \vec{s_2}=(a_2;b_2;c_2)=\left(19;-\frac{23731}{770};\frac{36271}{2310}\right);$$

$$\vec{s_3}=(a_3;b_3;c_3)=\left(2;\frac{228}{175};\frac{24}{175}\right).$$

Требуется вычислить значение выражения

$$f_{12}\left(f_{23}\left(f_{31}\left(\frac{b_2}{c_2}\right)\right)\right).$$

(Решающий момент при решении этой задачи — заметить попарную ортогональность векторов $\vec{s_1}$, $\vec{s_2}$, $\vec{s_3}$). Представим последовательность рассуждений, основываясь на Замечании 3:

1) Имеем:

$$f_{31}\left(\frac{b_2}{c_2}\right)=\frac{a_3}{a_1}.$$

2) Но в данной задаче

$$\frac{a_3}{a_1}=\frac{1}{3}=\frac{b_1}{c_1}.$$

Следовательно,

$$f_{23}\left(f_{31}\left(\frac{b_2}{c_2}\right)\right)=f_{23}\left(\frac{b_1}{c_1}\right)=\frac{a_2}{a_3}.$$

3) Но в данной задаче

$$\frac{a_2}{a_3}=\frac{19}{2}=\frac{b_3}{c_3}.$$

4) Тогда

$$f_{12}\left(f_{23}\left(f_{31}\left(\frac{b_2}{c_2}\right)\right)\right)=f_{12}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)=f_{12}\left(\frac{b_3}{c_3}\right)=\frac{a_1}{a_2}=\frac{6}{19}\,.$$

Замечание 5. Пусть снова $g\,(x)=\dfrac{A_1x^2+B_1x+C_1}{A_2x^2+B_2x+C_2}\in Q$. Преобразуем её к виду:

$$g(x)=\frac{A_1}{A_2}+G(x), \tag{10}$$

где

$$G(x)=\frac{\dfrac{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}{-A_2}\cdot x+\dfrac{\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}{-A_2}}{A_2x^2+B_2x+C_2}\,.$$

Функция $G(x)$ — частное линейной и квадратичной функций. Но из (10), очевидно, следует, что инвариант дробно-квадратичной функции $g(x)$ является одновременно и инвариантом функции $G(x)$, и наоборот.

Вывод: формулы (5) можно применять для расчёта коэффициентов α, β, γ дробно-линейного инварианта и функций вида:

$$G_1(x)=\frac{B_1x+C_1}{A_2x^2+B_2x+C_2}\,,\ (A_2\neq 0)\,;\quad G_2(x)=\frac{A_1x^2+B_1x+C_1}{B_2x+C_2}\,,\ (A_1\neq 0)\,.$$

Заметим, что векторно-геометрическая интерпретация, которую мы выше применяли, никак не противоречит этому «разрешению».

Полагаю, что материалы данной статьи могут быть использованы, например, составителями задач для математических олимпиад, а так же руководителями элективных курсов и факультативов по математике.

Смольянова Елена Григорьевна,
старший преподаватель кафедры математического анализа
факультета математики и информационных технологий
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский
государственный университет им. Н.П. Огарёва».

E-mail: janovaeg@mail.ru

Задачи по математическому анализу на студенческих олимпиадах

А. Ю. Эвнин

В статье рассматриваются задачи по математическому анализу, предлагавшиеся в последние годы на различных студенческих олимпиадах, а также на вступительном экзамене в Школу анализа данных. Некоторые задачи — подготовительного характера.

Эта подборка задач продолжает серию аналогичных публикаций [3–5] в журнале «Математическое образование».

Условия задач

Последовательности. Пределы. Непрерывность

1. Последовательность (a_n) задаётся рекуррентным соотношением

$$a_{k+2} = \frac{a_{k+1}+1}{a_k}$$

с начальными условиями $a_1 = 2$, $a_2 = 2013$. Найдите a_{2013}.

2. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной соотношениями

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1+na_n} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

3. Постройте график функции

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+x^n+(x^2/2)^n}, \quad x \geqslant 0.$$

4. Решите уравнение $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(nx) = 1$.

5. Вычислите $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{50}}{2}\right)^n$.

6. Последовательность (a_n) задана так:

$$a_0 = 2011, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = a_{n-1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Сходится ли эта последовательность? Если сходится, то найдите её предел.

7. Пусть $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$ $(n \in \mathbb{N})$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

8. Пусть $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2(a_n-3)}{4}$ $(n \in \mathbb{N})$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

9. Пусть $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + na_{n-1}}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

10. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{C_n^k}\right)^n$.

11. Найдите предел последовательности (x_n), заданной рекуррентно:

$$x_0 = 10, \quad x_{n+1} = x_n + \sin x_n \;\; n \in \mathbb{N}.$$

12. Пусть a_n — произведение всех чисел в n-й строке треугольника Паскаля, т. е. $a_n = \prod\limits_{k=0}^{n} C_n^k$. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n^2}$.

13. Последовательность задана так: $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Исследуйте её на сходимость в зависимости от a.

14. Найдите предел последовательности (c_n), определяемой рекуррентным соотношением $c_{n+1} = (1 - \frac{1}{n})c_n + \beta_n$, где (β_n) — любая последовательность со свойством $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\beta_n = 0$.

15. Последовательность (a_n) такова, что все $a_n \in (0;1)$ и $a_{n+1} < \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$. Верно ли, что эта последовательность сходится? Найдите множество всех возможных пределов таких последовательностей.

16. Пусть функция f определена, непрерывна и ограничена на промежутке $(x_0; +\infty)$. Докажите, что для любого числа T существует последовательность (x_n) такая, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty; \quad \lim_{n\to\infty}(f(x_n + T) - f(x_n)) = 0.$$

17. Функция f непрерывна на положительной полуоси. Известно, что при любом $x > 0$ последовательность $f(x+n) \to 0$ при $n \to +\infty$. Следует ли отсюда, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$?

18. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;2]$ и $f(0) = f(2)$. Докажите, что для какого-то $x \in [1;2]$ выполняется равенство $f(x) = f(x-1)$.

19. Может ли непрерывная на всей числовой прямой функция принимать каждое своё значение 1) дважды; 2) трижды?

20. Существует ли непрерывная функция $y = f(x)$, для которой справедливо тождество $f(f(x)) = 1 - x^3$?

21. Существуют ли такие непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$, что

$$f(g(x)) = \operatorname{arctg} x, \quad g(f(x)) = \operatorname{arcctg} x?$$

Производная. Интегралы

22. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2 + 17}{x^4 - 5x^2 + 4}$. Вычислите $f^{(319)}(0)$.

23. Пусть $f(x)$ — гладкая вещественная функция, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Докажите, что найдутся различные $x_1, x_2 \in [0;1]$, для которых

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2.$$

24. Пусть $a < b$. Докажите, что

$$\int\limits_a^b (x^2+1)e^{-x^2}\,dx \geqslant e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

25. Определите знак числа $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{3^x - 1}{3^x + 1}\,dx$.

26. Вычислите $\int\limits_1^e \sqrt{\ln x}\,dx + \int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx$.

27. Вычислите сумму интегралов

$$\int\limits_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}} \sin(x^2)\,dx + \int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{\arcsin x}\,dx.$$

28. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + 2015x)\,dx$.

29. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} (\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x))dx$.

30. Вычислите интеграл $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \dfrac{\sin^{2014} x}{\sin^{2014} x + \cos^{2014} x}\,dx$.

31. Вычислите интеграл $I(a) = \int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{1+\operatorname{tg}^a x}$.

32. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \sin^8 x\,dx$.

33. Вычислите интеграл $\int\limits_{1/3}^{3} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x + 1}\,dx$.

34. Пусть $I_m = \int\limits_0^{2\pi} \cos(x)\cos(2x)\ldots\cos(mx)\,dx$. Для каких m интеграл I_m не равен нулю?

35. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 e^{\{nx\}} x^{2016}\,dx$, где $\{t\}$ — дробная часть числа t.

36. Известно, что $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$. Докажите, что многочлен $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ имеет хотя бы один действительный корень.

37. Коэффициенты многочлена $P(x) = a_0x^{2012} + a_1x^{2011} + \cdots + a_{2012}$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{a_0}{2013} + \frac{a_2}{2011} + \frac{a_4}{2009} + \cdots + \frac{a_{2010}}{3} + a_{2012} = 0.$$

Докажите, что многочлен $P(x)$ имеет хотя бы один действительный корень.

38. Пусть $f(x)$ — положительная непрерывная функция, определённая на $\mathbb{R}$, причём $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. Пусть $\alpha \in (0;1)$, а отрезок $[a;b]$ имеет минимальную длину из тех отрезков, по которым интеграл от функции f равен α. Покажите, что $f(a) = f(b)$.

39. Определите, сколько корней на отрезке $[0;3]$ имеет уравнение

$$\int\limits_{x}^{x+1/2} \cos\left(\frac{t^2}{3}\right)\,dt = 0.$$

40. Существует ли непрерывная на промежутке $(1;+\infty)$ функция $f(x)$ такая, что

$$\forall x > 1 \quad \int\limits_{x}^{x^3} f(t)\,dt = 1?$$

41. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция, причём $f(0) = 0$ и $0 < f'(x) \leqslant 1$ при всех x. Докажите, что при $x \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{0}^{x} f^3(t)\,dt \leqslant \left(\int\limits_{0}^{x} f(t)\,dt\right)^2.$$

42. Найдите все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции $f(x)$ такие, что для любых действительных чисел a и b выполняется равенство

$$(a+b)\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = 2\int\limits_{a}^{b} xf(x)\,dx.$$

43. Вычислите $\lim\limits_{x\to 1} \int\limits_{x}^{x^2} \dfrac{dt}{\ln t}$.

44. Пусть функции f и g определены и непрерывны на отрезке $[0;1]$. Докажите неравенство

$$\left(\int\limits_{0}^{1} f(x)dx\right)^2 + \left(\int\limits_{0}^{1} g(x)dx\right)^2 \leqslant \left(\int\limits_{0}^{1} \sqrt{f^2(x)+g^2(x)}dx\right)^2.$$

45. Докажите, что для произвольного $a_0 \in (0;2\pi)$ последовательность, заданная условием

$$a_{n+1} = \int\limits_{0}^{a_n} (1 + \frac{1}{4}\cos^{2n+1} t)\,dt,$$

сходится, и найдите её предел.

46. Вычислите интеграл $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2} \sin(x^2)\cos(y^2)\,dx\,dy$.

47. Пусть фигура G задаётся неравенствами $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Вычислите интеграл

$$\iiint\limits_G \frac{x+y}{x+y+z}\,dx\,dy\,dz.$$

48. 1) Для непрерывной функции $f(x)$ найдите

$$\frac{d}{da}\iint\limits_{-a\leqslant x,y\leqslant a} f\left(\frac{x+y}{2}\right)dx\,dy.$$

2) Опишите все непрерывные функции $f(x)$, для которых $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\iint\limits_{-a\leqslant x,y\leqslant a} f\left(\frac{x+y}{2}\right)dx\,dy = \int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx.$$

49. Пусть $\alpha > 0$. Вычислите $\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)}$, если

$$A(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x+1}\,dx, \quad B(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x-1}\,dx.$$

50. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^1 dx_2 \ldots \int\limits_0^1 \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_n$.

Ряды

51. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)^2}{n!}$.

52. Исследуйте на сходимость и абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

53. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(\ln\ln n)^{-\ln n}$?

54. Последовательность a_n задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sin(a_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

55. Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$.

56. Найдите сумму ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\frac{8}{2^6}+\frac{13}{2^7}+\frac{21}{2^8}+\frac{34}{2^9}+\ldots$$

(в числителях дробей — числа Фибоначчи, а в знаменателях — степени двойки).

57. Вычислите сумму ряда

$$\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7\cdot8}-\ldots$$

58. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n(n+1)}$, где $f(n)$ — количество единиц в двоичной записи числа n.

59. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Для каждого целого $n \geqslant 0$ обозначим через a_n расстояние от a до ближайшего числа вида $\frac{m}{2^n}$, где $m \in \mathbb{Z}$. Найдите наибольшую возможную сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

60. Существует ли последовательность (a_n) такая, что ряд с общим членом $(\sin(a_n))$ сходится, а ряд с общим членом $(\sin(2a_n))$ расходится?

61. Докажите, что из любого множества положительных чисел мощности континуума можно выбрать счётное подмножество с бесконечной суммой.

62. Для каждого натурального n у нас есть одна гиря массой $1/n^2$ г. Никаких других гирь у нас нет. Какие массы мы можем взвесить на чашечных весах с помощью этих гирь? Гири (их может быть и бесконечное число) помещаются на одну чашку, а груз — на другую.

63. Существует ли биекция $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которой сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2}?$$

64. Пусть $\sum a_n$ и $\sum b_n$ — расходящиеся положительные ряды. Известно, что

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_k \geqslant a_{k+1} \geqslant \ldots; \quad b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_k \geqslant b_{k+1} \geqslant \ldots.$$

Может ли сходиться ряд $\sum \min(a_n, b_n)$?

65. Можно ли расставить все рациональные числа в клетки бесконечной клетчатой плоскости так, чтобы каждое число появлялось только один раз и при этом суммы по всем строкам были равны минус бесконечности, а по всем столбцам плюс бесконечности?

Ответы, указания и решения

1. 1007.

Решение. Обозначим $x = a_1$, $y = a_2$. Вычисления по рекуррентной формуле дают следующие выражения членов последовательности через x и y (проверьте!):

$$a_3 = \frac{y+1}{x}; \quad a_4 = \frac{x+y+1}{xy}; \quad a_5 = \frac{x+1}{y}; \quad a_6 = x; \quad a_7 = y.$$

Отсюда понятно, что последовательность периодическая: $\forall n \quad a_{n+5} = a_n$. Поэтому $a_{2013} = a_3 = \frac{y+1}{x} = 1007$.

2. $a_n = \dfrac{2}{n^2 - n + 2}$.

Решение. Перепишем рекуррентное соотношение в виде

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1 + na_n}{a_n} = \frac{1}{a_n} + n.$$

Теперь видно, что удобно перейти к последовательности с общим членом $b_n = \dfrac{1}{a_n}$. Для неё рекуррентное соотношение принимает вид $b_{n+1} = b_n + n$. Имеем

$$b_0 = b_1 = 1, \quad b_2 = 1 + 1, \quad b_3 = 1 + 1 + 2, \ \ldots, \quad b_n = 1 + (1 + 2 + \cdots + (n-1)).$$

Значит, $b_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n+2}{2}$, а $a_n = \frac{2}{n^2-n+2}$.

3. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ \frac{x^2}{2}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

4. $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(nx) = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(nx) = 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} (\sin(n+2)x - \sin x) = 0.$$

Но при $n \to +\infty$

$$\sin(n+2)x - \sin x = 2\sin x \cos(n+1)x \to 2\sin x.$$

Значит, $\sin x = 0$ и $x = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Подстановка в исходное уравнение показывает, что число m должно быть чётным.

5. 10.

Решение. Используя второй замечательный предел, имеем

$$a_n = \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{50}}{2}\right)^n = 2\left(\frac{1 + \sqrt[n]{25}}{2}\right)^n = 2\left(1 + \frac{\sqrt[n]{25} - 1}{2}\right)^n =$$

$$= 2\left(1 + \frac{\sqrt[n]{25} - 1}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{25}-1} \cdot \frac{n(\sqrt[n]{25}-1)}{2}}.$$

Как известно, $a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a$ при $\alpha \to 0$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt[n]{25} - 1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \frac{1}{n} \ln 25}{2} = \frac{1}{2} \ln 25.$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2e^{\frac{1}{2}\ln 25} = 2 \cdot 5 = 10.$$

Замечание. Точно так же доказывается, что предел среднего степенного двух положительных чисел равен их среднему геометрическому:

$$\lim_{\alpha\to 0} \left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt{ab}.$$

6. Последовательность сходится к нулю.

Решение. Умножим обе части рекуррентного соотношения на $(n+1)^2$:

$$(n+1)^2 a_n = n^2 a_{n-1} + 1.$$

Пусть $b_n = (n+1)^2 a_n$. Тогда для любого n имеем $b_n = b_{n-1} + 1$, откуда

$$b_n = b_0 + n = a_0 + n, \quad a_n = \frac{b_n}{(n+1)^2} = \frac{a_0 + n}{(n+1)^2}.$$

7. $\dfrac{a + 2b}{3}$.

Решение. Для решения линейного рекуррентного соотношения $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 = \frac{1}{2}(\lambda + 1)$. Его корни 1 и $-\frac{1}{2}$. Общее решение рекуррентного соотношения $x_n = c_1 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Из начальных условий находим $c_1 = \frac{a+2b}{3}$, $c_2 = \frac{4(b-a)}{3}$.

8. 0.

Докажите, что последовательность возрастает и ограничена сверху нулём. По теореме Вейерштрасса, она имеет предел. Обозначим его через x. Теперь нужно перейти к пределу в рекуррентном соотношении, получив уравнение относительно x, и учесть, что $-\frac{1}{2} < x \leqslant 0$.

9. $\ln 2$.

По индукции можно доказать, что $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

10. e^2.

Решение. Докажем, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{C_n^k} = 1 + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Действительно,

$$\frac{1}{C_n^n} = 1; \quad \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^{n-1}} = \frac{2}{n}; \quad \frac{1}{C_n^2} + \frac{1}{C_n^{n-2}} = \frac{4}{n(n-1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

а каждое из остальных $n-5$ слагаемых не больше $\frac{1}{C_n^3}$, поэтому

$$\sum_{k=3}^{n-3} \frac{1}{C_n^k} \leqslant \frac{(n-5)\cdot 3!}{n(n-1)(n-2)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Далее, используя второй замечательный предел, получаем, что при $n \to \infty$

$$\left(1 + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n \to e^2.$$

11. 3π.

Решение. Пусть (для каждого n) $y_n = x_n - 3\pi$. Тогда $y_0 = 10 - 3\pi$ и

$$y_{n+1} = y_n - \sin y_n. \qquad (*)$$

По индукции легко доказывается, что для любого n выполнено двойное неравенство $0 < y_{n+1} < y_n$. Значит, последовательность (y_n) убывает и ограничена снизу нулём. По теореме Вейерштрасса, существует предел этой последовательности. Обозначим его a. Переход к пределу в рекуррентном соотношении $(*)$ даёт $a = a - \sin a$, откуда $\sin a = 0$ и $a = \pi k$ для некоторого целого k. В то же время для любого n имеем $0 < y_n < y_0 = 10 - 3\pi$, и $a \in [0; 10 - 3\pi]$. Стало быть, $a = 0$, а

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} (y_n + 3\pi) = 3\pi.$$

12. e.

Решение. Выразим a_n через a_{n-1}:

$$a_n = \prod_{k=0}^{n} C_n^k = \prod_{k=1}^{n} C_n^k = \prod_{k=1}^{n} \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} = \frac{n^n}{n!} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i = \frac{n^n}{n!} a_{n-1}.$$

Отсюда

$$a_{n-1} = \frac{n!}{n^n} a_n; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} a_n;$$

$$\frac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n^2} = \frac{n!\cdot(n+1)^{n+1}}{n^n\cdot(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e.$$

13. При $0 \leqslant a \leqslant 1$ последовательность сходится к 1; при остальных a последовательность расходится.

Решение. Поскольку $x_{n+1} - x_n = (x_n - 1)^2 \geqslant 0$, последовательность (x_n) неубывающая.

Если последовательность сходится, и её предел равен b, то, перейдя к пределу в рекуррентном соотношении, получим $b = b^2 - b + 1$, откуда $b = 1$. Если $x_1 = a > 1$, то предел неубывающей последовательности (x_n) не может быть равен единице. Значит, при $a > 1$ последовательность расходится. Если $a < 0$, то $x_2 > 1$, и делаем тот же вывод.

Пусть теперь $0 \leqslant a \leqslant 1$. Если $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, то

$$x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1 = \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leqslant 1.$$

Стало быть, последовательность ограниченная (снизу нулём, сверху единицей). Из монотонности и ограниченности вытекает существование предела последовательности.

14. 0.

Решение. Поскольку $nc_{n+1} = (n-1)c_n + n\beta_n$, уместно рассмотреть последовательность с общим членом $a_n = (n-1)c_n$. Для неё выполняется соотношение $a_{n+1} = a_n + n\beta_n$. Кроме того, $a_2 = c_2 = \beta_1$. Отсюда легко получить, что $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} k\beta_k$. Значит, $c_n = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1} k\beta_k$. Из определения последовательности (β_k) следует, что для некоторого положительного числа A и для любого k выполнено неравенство $|\beta_k| \leqslant \frac{A}{k^2}$. Тогда $|c_n| \leqslant \frac{A}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \sim A\cdot\frac{\ln(n-1)}{n-1}$ и $\lim c_n = 0$.

15. Верно. Множество всех возможных значений предела $[0; 1)$.

Решение. Элемент a_k назовём *красным*, если $a_k > a_{k-1}$. Остальные элементы последовательности назовём *синими*. Заметим, что за красным элементом всегда следует меньший элемент. Действительно, если $a_k > a_{k-1}$, то $a_{k+1} < \dfrac{a_{k-1} + a_k}{2} < a_k$. Если количество красных элементов конечно, то, начиная с какого-то места, последовательность невозрастающая, к тому же, по условию, она ограниченная, поэтому сходится.

Пусть теперь красных элементов бесконечно много. Докажем, что последовательность из красных элементов убывает. Действительно, если a_k и a_m — два соседних красных элемента, где $k < m$, то

$$a_k > a_{k+1} \geqslant \ldots \geqslant a_{m-1} < a_m \qquad (*)$$

и

$$a_m < \frac{a_{m-1} + a_{m-2}}{2} \leqslant \frac{a_k + a_{k+1}}{2} < a_k.$$

Следовательно, красная подпоследовательность сходится. Обозначим её предел через r. Покажем, что если два соседних красных элемента a_k и a_m попали в ε-окрестность точки r ($r < a_m < a_k < r+\varepsilon$), то синие элементы, расположенные между ними, также будут в этой окрестности (отсюда и будет вытекать сходимость исходной последовательности). Учитывая $(*)$, имеем

$$a_m < \frac{a_{m-1} + a_{m-2}}{2} \leqslant \frac{a_{m-1} + a_k}{2}, \quad a_{m-1} \geqslant 2a_m - a_k > 2a_m - (r+\varepsilon) > r - \varepsilon.$$

Итак, последовательность (a_n) сходится. Поскольку $0 < a_n < 1$ (для любого n), предел не может быть вне отрезка $[0; 1]$. Пусть $\alpha \in [0; 1)$. Выберем число q таким, что $\alpha + \frac{q}{2} < 1$. Тогда последовательность с общим членом $a_n = \alpha + \frac{q}{2^n}$ удовлетворяет условию задачи, и её предел равен α. Докажем, наконец, что 1 не может быть значением предела. В этом легко убедиться, исходя из того наблюдения, что (при $k > 2$) $a_k < \max(a_1, a_2)$. Последнее следует из неравенств

$$a_k < \frac{a_{k-1} + a_{k-2}}{2} \leqslant \max(a_{k-1}, a_{k-2}).$$

Если $a_k > 1 - \varepsilon$, то $\max(a_1, a_2) > 1 - \varepsilon$. В силу того, что положительное число ε может быть сколь угодно малым, $\max(a_1, a_2) = 1$, что противоречит условию задачи.

16. Без ограничения общности можно считать, что $T > 0$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x + T) - f(x)$. Она непрерывна и ограничена на $(x_0; +\infty)$. Если у данной функции бесконечное число нулей, то их можно взять в качестве искомой последовательности. В противном случае рассмотрим промежуток от последнего нуля до плюс бесконечности. На нём функция $g(x)$ знакопостоянная. Для определённости, пусть $g(x) > 0$ при $x > a$. Рассмотрим последовательность с общим членом $x_n = a + nT$. Последовательность $f(x_n)$ возрастающая и ограниченная. Поэтому у неё есть конечный предел. Но тогда

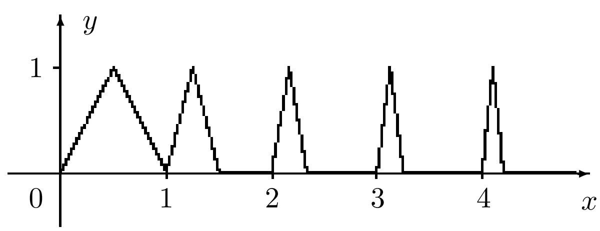
$$\lim_{n\to\infty}(f(x_{n+1}) - f(x_n)) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n + T) - f(x_n)) = 0.$$

17. Нет, не следует.

Решение. Определим функцию f на отрезках $[n; n+1]$, где $n \in \mathbb{N}_0$, так:

$$f(n) = f\left(n + \frac{1}{n+1}\right) = 0, \quad f\left(n + \frac{1}{2(n+1)}\right) = 1,$$

функция f линейна на отрезках $\left[n; n + \frac{1}{2(n+1)}\right]$ и $\left[n + \frac{1}{2(n+1)}; n + \frac{1}{n+1}\right]$ и равна нулю на отрезке $\left[n + \frac{1}{n+1}; n + 1\right]$. График функции f — на рисунке.



Требование, предъявляемое к функции f, выполняется, так как в целых точках функция равна нулю, а для каждого нецелого x существует такое $N = \frac{1}{\{x\}} + 1$, что при натуральном $n > N$ выполняется равенство $f(x + n) = 0$.

С другой стороны, функция f не стремится к 0, т. к. для любого числа $x_0 > 0$ существует такое число $x > x_0$, что $f(x) = 1$.

18. Положим $A = f(0) = f(2)$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - f(x-1)$. Заметим, что $g(1) = f(1) - A$, а $g(2) = A - f(1)$. Значит, на концах отрезка $[1; 2]$ непрерывная функция $g(x)$ принимает значения разных знаков. Следовательно, в некоторой точке этого отрезка функция $g(x)$ равна нулю. Это и требовалось доказать.

19. а) Нет; б) да.

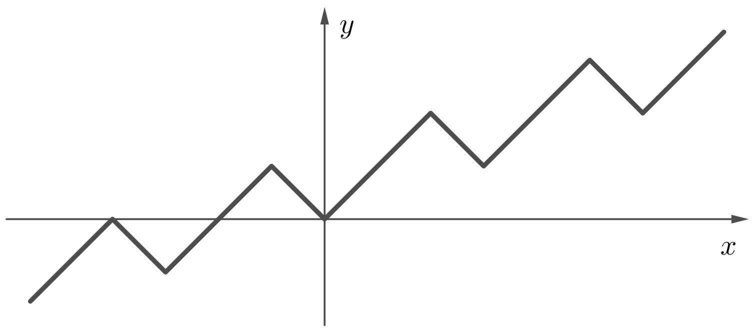
Решение. а) Пусть $f(x)$ — непрерывная функция и $f(a) = f(b) = q$, где $a < b$. Тогда на интервале $(a; b)$ значения $f(x)$ либо всюду больше q, либо всюду меньше q, иначе значение q принимается функцией $f(x)$ не менее чем в трёх точках. Рассмотрим первую альтернативу (для второй альтернативы рассуждения аналогичные).

Положим $Q = \max\limits_{[a;b]} f(x)$. Очевидно, $Q > q$.

Если значение Q достигается в двух точках, скажем, $f(c) = f(d) = Q$, где $a < c < d < b$, то значение $m = \min\limits_{[c;d]} f(x)$ достигается не менее чем в трёх точках.

Если же значение Q достигается только в одной точке интервала $(a; b)$, скажем, $f(c) = Q$, то все значения из промежутка $(q; Q)$ достигаются функцией $f(x)$ хотя бы дважды. Но тогда $f(x) < q < Q$ при $x \notin [a; b]$ и значение Q принимается функцией $f(x)$ только в одной точке.

б) См. рисунок.



20. Нет.

Решение. Функция, удовлетворяющая условию задачи, должна быть обратимой. Действительно,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow 1 - x_1^3 = 1 - x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Обратимая непрерывная функция должна быть строго монотонной. Но тогда $f(f(x))$ — возрастающая функция.

21. Нет.

22. 0.

Решение. Функция $\dfrac{\cos(\sin x)}{x^4 - 5x^2 + 4}$ — чётная и бесконечное число раз дифференцируемая в окрестности нуля. Как известно, производная чётной функции нечётна, а нечётной чётна. Отсюда следует, что производная нечётного порядка от чётной функции будет нечётной функцией. Поэтому $f^{(2019)}(0) = 0$.

23. Рассмотрим функцию $g(x) = f'(x)$. По условию, она непрерывная, а 1 — её среднее значение на отрезке $[0; 1]$, поскольку $\int_0^1 g(x)\,dx = f(1) - f(0) = 1$. Если $g(x) = 1$ всюду на отрезке $[0; 1]$, то доказывать нечего. Иначе множество значений этой функции на данном отрезке есть некоторый отрезок $[a; b]$, причём $a < 1 < b$. Если зафиксировать $\alpha \neq -1$, то из условия $\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\beta} = 1$ число β определится однозначно. Из соображений непрерывности получаем, что α можно выбрать столь близким к 1, что $a \leqslant \alpha < 1 < \beta \leqslant b$.

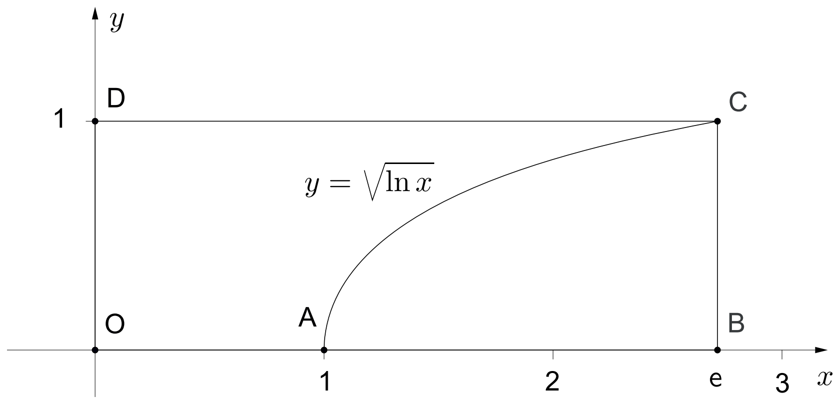
24. Поскольку $x^2 + 1 \geqslant 2x$, имеем

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}dx \geqslant \int_a^b 2xe^{-x^2}dx = -\int_a^b d\left(e^{-x^2}\right) = e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

25. Это число равно нулю. Подынтегральная функция является нечётной.

26. e.

Подынтегральные функции взаимно обратны. Поэтому два интеграла из условия выражают площади фигур ABC и $ODCA$ (см. рисунок), образующих разбиение прямоугольника $[0; 1] \times [0; e]$.



27. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

28. 0.

Решение. Подынтегральная функция нечётная и имеет период 2π. Как известно, интеграл от периодической функции по промежутку, чья длина равна периоду этой функции, не зависит от расположения этого промежутка на числовой прямой. Интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ равен нулю из-за нечётности функции $f(x)$.

29. $\frac{\pi}{2}$.

Если f — непрерывная функция, то $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$.

30. $\frac{\pi}{2}$.

31. $I(a)=\frac{\pi}{4}$.
Решение.

$$I(a)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\operatorname{tg}^a x}=\left[\begin{array}{cc} x=\frac{\pi}{2}-t; & \operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}t; \\ x=0; & t=\frac{\pi}{2}; \\ x=\frac{\pi}{2}; & t=0 \end{array}\right]=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+\operatorname{ctg}^a t}.$$

Отсюда

$$2I(a)=\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{1+\operatorname{tg}^a t}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^a t}\right)dt.$$

Поскольку

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^a t}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^a t}=\frac{2+\operatorname{tg}^a t+\operatorname{ctg}^a t}{1+1+\operatorname{tg}^a t+\operatorname{ctg}^a t}=1,$$

имеем $2I(a)=\int\limits_0^{\pi/2} dt=\frac{\pi}{2}$.

32. $\frac{7!!}{8!!}\cdot 2\pi$.

Решение. Обозначим $I_n=\int\limits_0^{2\pi}\sin^n x\,dx$. Несложно видеть, что при нечётном n интеграл I_n равен нулю. В дальнейшем считаем, что $n=2k$, где $k\in\mathbb{N}$.

1-й способ. (Рекуррентное соотношение для I_n.)

$$I_n = \int\limits_0^{2\pi} \sin^n x\,dx = -\int\limits_0^{2\pi} \sin^{n-1} x\,d\cos x = -\sin^{n-1} x\cos x\Big|_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi} \cos x\,d(\sin^{n-1} x) =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 x \sin^{n-2} x\,dx = (n-1)\int\limits_0^{2\pi} (\sin^{n-2} x - \sin^n x)\,dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Из равенства $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$ выражаем I_n через I_{n-2}: $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Отсюда $I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot 2\pi$.

2-й способ. (Формула Эйлера и бином Ньютона.) Поскольку $\sin x = -\frac{1}{2} i(e^{ix} - e^{-ix})$, имеем

$$\sin^{2k} x = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \sum_{j=0}^{2k} C_{2k}^j e^{ixj} e^{-ix(2k-j)} (-1)^j = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \sum_{j=0}^{2k} C_{2k}^j (-1)^j e^{2(j-k)ix}.$$

Если $j \neq k$, то $\int\limits_0^{2\pi} e^{2(j-k)ix}\,dx = 0$. Поэтому

$$I_{2k} = \int\limits_0^{2\pi} \sin^{2k} x\,dx = \frac{1}{2^{2k}} \int\limits_0^{2\pi} C_{2k}^k\,dx = \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} \cdot 2\pi.$$

33. $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} 4\sqrt{3}$.

Решение.

$$I = \int\limits_{1/3}^{3} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x + 1}\,dx = \left[x = \frac{1}{t}\right] = \int\limits_{3}^{1/3} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + 1} \frac{dt}{-t^2} =$$

$$= \int\limits_{1/3}^{3} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{t}}{t^2 - t + 1}\,dt = \int\limits_{1/3}^{3} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t}{t^2 - t + 1}\,dt = \frac{\pi}{2} \int\limits_{1/3}^{3} \frac{dt}{t^2 - t + 1}\,dt - I. \quad (1)$$

В этих выкладках использовалось тождество $\operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$, имеющее место при $t > 0$. Его легко получить, рассмотрев прямоугольный треугольник с катетами длиной 1 и t. Острые углы этого треугольника равны $\operatorname{arctg} t$ и $\operatorname{arctg} \frac{1}{t}$.

Из равенства (1) получаем

$$I = \frac{\pi}{4} \int\limits_{1/3}^{3} \frac{dt}{t^2 - t + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} 4\sqrt{3}.$$

34. Для m вида $m = 4k$ и $m = 4k + 3$.

Решение. Обозначим $q = e^{ix}$. Тогда $\cos x = \frac{q + q^{-1}}{2}$, $\cos kx = \frac{q^k + q^{-k}}{2}$,

$$f(x) = \prod_{k=1}^{m} \cos kx = \frac{1}{2^m}(q + q^{-1})(q^2 + q^{-2}) \ldots (q^m + q^{-m}).$$

После раскрытия скобок получаются слагаемые вида $q^{\pm 1\pm 2\pm\cdots\pm m}$. Заметим, что при целом k

$$\int_0^{2\pi} q^k\,dx = \int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq 0\ ; \\ 2\pi, & \text{если } k = 0. \end{cases}$$

Поэтому $I_m \neq 0$ тогда и только тогда, когда можно так расставить знаки плюс и минус в выражении $g(m) = \pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm m$, чтобы оно стало равным нулю. Заметим, что количество нечётных слагаемых в указанной сумме будет нечётным, если m имеет вид $m = 4k+1$ или $m = 4k+2$; при этом $g(m)$ нечётно и, значит, не равно нулю. Если же $m = 4k$ или $m = 4k+3$, то знаки можно расставить нужным образом. Например,

$$1-2-3+4+5-6-7+8+\cdots+(4k-3)-(4k-2)-(4k-1)+4k=0;$$
$$1+2-3+4-5-6+7+\cdots+4k-(4k+1)-(4k+2)+(4k-3)=0.$$

Замечание. Сам интеграл равен $\frac{2\pi}{2^m}\cdot a_m$, где a_m — количество способов расставить знаки в выражении $g(m)$, чтобы оно стало равным нулю. Последовательность (a_m) в энциклопедии OEIS имеет номер A063865. Вот её начало:

$$0, 0, 2, 2, 0, 0, 8, 14, 0, 0, 70, 124, 0, 0, 722, 1314, 0, 0, 8220, 15272, 0, 0, 99820, 187692, \ldots$$

35. $\frac{e-1}{2017}$. Подробное решение см. в [10, 4.06.2016].

36. Интеграл от многочлена по отрезку $[0;1]$ равен нулю.

37. Вычислите $\int\limits_{-1}^{1} P(x)\,dx$.

38. 1-й способ. Доказательство от противного. Пусть $f(b) > f(a)$ (случай $f(b) < f(a)$ вполне аналогичен данному). Сдвинем точки a и b вправо (т. е. заменим a на $a+\varepsilon_1$, а b на $b+\varepsilon_2$) так, чтобы интеграл от функции f по отрезку не изменился. Тогда $\int\limits_a^{a+\varepsilon_1} f(x)\,dx = \int\limits_b^{b+\varepsilon_2} f(x)\,dx$. Заметим, что ε_2 определяется по ε_1 однозначно. Выберем ε_1 столь малым, чтобы на отрезке $[b; b+\varepsilon_2]$ значения функции $f(x)$ были больше, чем на отрезке $[a; a+\varepsilon_1]$. Тогда $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, и длина нового отрезка меньше исходного: $a - b + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 < a - b$. Противоречие!

2-й способ. Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx > \alpha$. Тогда однозначно определено число b, для которого $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \alpha$. Тем самым задана функция $b = g(a)$. Продифференцируем по a тождество

$$\int_a^{g(a)} f(x)\,dx = \alpha.$$

Получим $f(g(a))\cdot g'(a) - f(a) = 0$. Если функция $g(a) - a$ принимает наименьшее значение в некоторой точке, то в этой точке $g'(a) = 1$. Поэтому $f(b) = f(g(a)) = f(a)$.

39. Один корень.

Решение. Рассмотрим функции $g(t) = \cos\left(\frac{t^2}{3}\right)$ и $I(x) = \int\limits_x^{x+1/2} g(t)\,dt$. Легко проверить, что на отрезке $[0;1/2]$ функция $g(t)$ положительна, а на отрезке $[3;3\frac{1}{2}]$ функция $g(t)$ отрицательна. Поэтому

$I(0) > 0$, $I(3) < 0$. Кроме того,

$$I'(x) = \cos\left(\frac{(x+1/2)^2}{3}\right) - \cos\left(\frac{x^2}{3}\right) = -2\sin\left(\frac{x+1/4}{6}\right)\sin\left(\frac{2x^2+x+1/4}{6}\right).$$

В полученном произведении синусов первый положителен на отрезке $[0;3]$, а второй меняет знак с плюса на минус. Поэтому функция $I(x)$ сначала убывает, а потом возрастает. Учитывая знаки $I(x)$ на концах данного промежутка, получаем ответ.

40. Да.

Решение. Продифференцировав по переменной x интеграл с переменными пределами интегрирования, получим функциональное уравнение

$$3x^2 f(x^3) - f(x) = 0,$$

откуда $3x^3 f(x^3) = xf(x)$. Относительно функции $g(x) = xf(x)$ возникает более простое уравнение

$$3g(x^3) = g(x),$$

к которому подбирается решение $g(x) = \frac{C}{\ln x}$. Найдём подходящее значение C:

$$\int\limits_x^{x^3} \frac{C dt}{t\ln t} = C\int\limits_x^{x^3} \frac{d\ln t}{\ln t} = C\ln(\ln t)\Big|_x^{x^3} = C\ln 3 = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\ln 3}.$$

Итак, нашлась функция, удовлетворяющая условию задачи: $f(x) = \dfrac{1}{\ln 3 \cdot x\ln x}$.

41. Подробное решение см. в [10, 7.06.2015].

42. $f = const$.

Решение. Продифференцировав тождество из условия задачи по переменной a, получим

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx - (a+b)f(a) = -2af(a),$$

откуда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(a).$$

Теперь дифференцируем по переменной b и получаем $f(b) = f(a)$. Поскольку a и b произвольны, отсюда и следует, что $f = const$. С другой стороны, функция $f(x) = c$, где $c = \mathrm{const}$, удовлетворяет условию задачи (это проверяется непосредственной подстановкой).

43. $\ln 2$.

Решение. Разобьём интеграл на два интеграла, а затем ко второму из них применим обобщённую теорему о среднем:

$$A(x) = \int\limits_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int\limits_x^{x^2} \frac{t\,d\ln t}{\ln t} = \int\limits_x^{x^2} \frac{d\ln t}{\ln t} + \int\limits_x^{x^2} \frac{(t-1)d\ln t}{\ln t} = \ln 2 + (\mu - 1)\int\limits_x^{x^2} \frac{d\ln t}{\ln t} = \mu\ln 2,$$

где число μ лежит между x и x^2. Отсюда $\lim_{x\to 1} A(x) = \ln 2$.

44. 1-й способ. Введём функции $x(t) = \int\limits_0^t f(u)\,du$ и $y(t) = \int\limits_0^t g(u)\,du$. Из непрерывности функций $f(u)$ и $g(u)$ следует, что функции $x(t)$ и $g(t)$ непрерывно дифференцируемы, причём $x'(t) = f(t)$, $y'(t) = g(t)$. Рассмотрим на плоскости Oxy кривую L, заданную параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Концы этой кривой — точки $A(0;0)$ и $B(x(1);y(1))$. Теперь в правой части неравенства можно увидеть квадрат длины кривой L, а в левой — квадрат длины отрезка, соединяющего её концы. Неравенство становится очевидным.

2-й способ. Пусть $a = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$, $b = \int\limits_0^1 g(x)\,dx$. По неравенству Коши–Буняковского,

$$af(x) + bg(x) \leqslant \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}.$$

Проинтегрировав это неравенство по отрезку $[0;1]$, получим

$$a^2 + b^2 \leqslant \sqrt{a^2+b^2}\cdot\int\limits_0^1 \sqrt{f^2(x)+g^2(x)}\,dx.$$

Отсюда

$$\sqrt{a^2+b^2} \leqslant \int\limits_0^1 \sqrt{f^2(x)+g^2(x)}\,dx.$$

Если возвести последнее неравенство в квадрат, получится то неравенство, которое требовалось доказать.

45. π. Решение см. в [6, с. 81–86].

46. $\frac{1}{2}\pi(1-\cos(R^2))$.
Решение. Пусть D — круг $x^2+y^2 \leqslant R^2$, $f(x,y) = \sin(x^2)\cos(y^2)$, а $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Заметим, что область интегрирования D не изменится, если поменять местами x и y. Поэтому

$$2I = \iint\limits_D (f(x,y)+f(y,x))dxdy = \iint\limits_D (\sin(x^2)\cos(y^2)+\sin(y^2)\cos(x^2))dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \sin(x^2+y^2)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r\sin(r^2)dr =$$

$$= \pi\int\limits_0^R \sin(r^2)d(r^2) = \pi(1-\cos(R^2)).$$

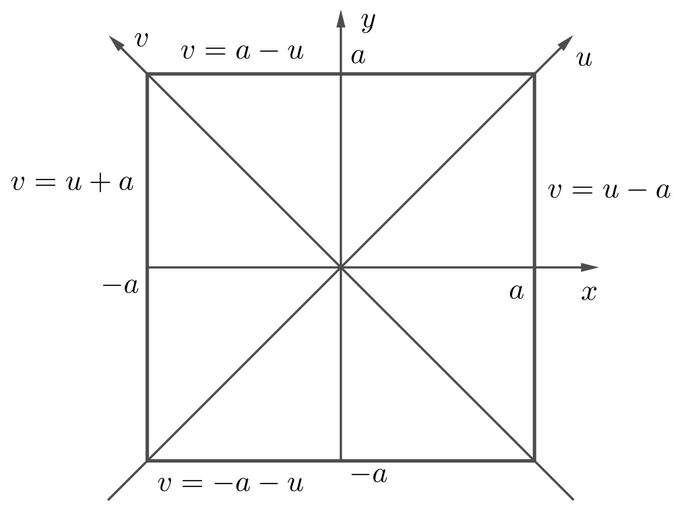
47. $\frac{\pi}{9}$.
Решение. В силу симметрии области интегрирования имеем

$$I = \iiint\limits_G \frac{x+y}{x+y+z}\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_G \frac{y+z}{x+y+z}\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_G \frac{z+x}{x+y+z}\,dx\,dy\,dz.$$

Отсюда $3I = \iiint\limits_G 2\,dx\,dy\,dz = 2\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{4\pi}{3}$.

48. 1) $4\int\limits_{-a}^{a} f(u)\,du$; 2) нечётные функции.

Решение. 1) Перейдём к новым переменным $u=\frac{x+y}{2}$, $v=\frac{y-x}{2}$. Тогда $x=u-v$, $y=u+v$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2.$



$$I(a)=\iint\limits_{-a\leqslant x,y\leqslant a} f\left(\frac{x+y}{2}\right)dx\,dy=2\iint\limits_{D_{uv}} f(u)\,du\,dv=$$

$$=2\int\limits_{-a}^{0}du\int\limits_{-u-a}^{u+a}f(u)\,dv+2\int\limits_{0}^{a}du\int\limits_{u-a}^{a-u}f(u)\,dv=4\int\limits_{-a}^{0}(u+a)f(u)\,du+4\int\limits_{0}^{a}(a-u)f(u)\,du.$$

Отсюда

$$\frac{dI}{da}=0+4\int\limits_{-a}^{0}f(u)\,du+0+4\int\limits_{0}^{a}f(u)\,du=4\int\limits_{-a}^{a}f(u)\,du.$$

2) Из 1) следует, что $I'(a)=4I(a)$. Отсюда $I(a)=ce^{4a}$. Поскольку $I(0)=0$, имеем $c=0$ и $I(a)=0$. Значит,

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)\,dx=0. \qquad (*)$$

Продифференцировав данное тождество по переменной a, получим, что для любого a верно равенство $f(a)+f(-a)=0$. Значит, функция f нечётная. С другой стороны, для любой нечётной непрерывной функции равенство $(*)$ имеет место.

49. $1-\dfrac{1}{2^\alpha}$.

Решение. В этой задаче отношение интегралов легко найти, если предварительно получить выражение для их разности. Имеем:

$$B(\alpha)-A(\alpha)=\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{x^\alpha}{e^x-1}-\frac{x^\alpha}{e^x+1}\right)dx=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{2x^\alpha}{e^{2x}-1}\,dx=[t=2x]=\frac{1}{2^\alpha}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{t^\alpha\,dt}{e^t-1}=\frac{1}{2^\alpha}B(\alpha).$$

Итак, $B(\alpha) - A(\alpha) = \frac{1}{2^\alpha} B(\alpha)$. Отсюда $\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)} = 1 - \frac{1}{2^\alpha}$.

50. $\frac{1}{n+1}$.

Решение. Пусть D_i — та область n-мерного куба $[0;1]^n$, в которой $x_i = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Пересечения этих областей имеют меру нуль, поэтому интеграл по всему кубу равен сумме интегралов по этим областям. Из соображений симметрии, интегралы по указанным n областям равны между собой. Интеграл по области D_1 равен

$$\int\limits_0^1 x_1 dx_1 \int\limits_{x_1}^1 dx_2 \ldots \int\limits_{x_1}^1 dx_n = \int\limits_0^1 x(1-x)^{n-1} dx = [t = 1-x] = \int\limits_0^1 (1-t)t^n\, dt = \frac{1}{n(n+1)}.$$

После умножения на n (количество областей) получится ответ.

51. $-\frac{1}{e}$.

52. Ряд сходится условно.

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n) = (-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

53. Сходится.

Решение. Запишем общий член ряда в более удобном виде:

$$a_n = e^{\ln a_n} = e^{-\ln n \cdot \ln\ln\ln n} = \frac{1}{n^{\ln\ln\ln n}}.$$

Показатель степени $\ln\ln\ln n$ с ростом n стремится (пусть и неторопливо!) к $+\infty$. Значит, для достаточно больших n этот показатель больше, например, числа 2. Из сравнения исходного ряда со сходящимся обобщённым гармоническим рядом $\sum \frac{1}{n^2}$ получаем сходимость нашего ряда.

54. Расходится. По индукции докажите, что $a_n \geqslant \frac{1}{n}$. Вам может пригодиться неравенство $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}$, справедливое для положительных x.

55. $\frac{1}{2}$.

Решение. Преобразуем общий член ряда:

$$\frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!} = \frac{n+2}{n!(1 + (n+1) + (n+1)(n+2))} =$$
$$= \frac{n+2}{n!(n+2)^2} = \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)-1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}.$$

Частичную сумму ряда теперь найдём с помощью телескопического суммирования:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \right) = \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \right) +$$
$$+ \cdots + \left(\frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!} \right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{(k+2)!}.$$

Сумма ряда равна

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \frac{1}{2}.$$

56. 2.

Решение. Пусть f_k — k-е число Фибоначчи:

$$f_1 = f_2 = 1; \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Имеем:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{f_{k-1} + f_{k-2}}{2^k} =$$

$$= \frac{3}{4} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{f_{k-1}}{2^k} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{f_{k-2}}{2^k} = \frac{3}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f_k}{2^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{2^{k+2}} =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{f_k}{2^k} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{2^k} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(S - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}S.$$

Итак, $S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}S$. Отсюда $S = 2$.

Замечание. Другие решения можно получить, используя производящую функцию чисел Фибоначчи

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2},$$

которую нужно вычислить при $x = \frac{1}{2}$, и формулу Бинэ

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

которая позволяет представить суммируемый ряд в виде суммы двух геометрических прогрессий.

57. $\dfrac{\pi - 3}{4}$.

Решение. Рассмотрим частичную сумму ряда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\left(\frac{1}{2k} - \frac{2}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}\right).$$

Её несложно привести к виду $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{4(n+1)}$. Как известно, при $|x| \leqslant 1$ имеет место разложение

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} = \dfrac{\pi}{4} - 1$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi-3}{4}$.

58. $2\ln 2$. Решение см. в [10, 2.06.2013].

59. $\frac{2}{3}$. Решение можно найти здесь: `https://habr.com/en/post/264941/`.

60. Существует. Пример такой последовательности: $a_n = \pi n + \frac{1}{n}$.

Действительно, здесь $\sin(a_n) = (-1)^n \sin(\frac{1}{n})$, и соответствующий ряд сходится по признаку Лейбница. При этом $\sin(2a_n) = \sin(\frac{2}{n})$. Соответствующий ряд расходится по предельному признаку сравнения (сравниваем ряд с гармоническим рядом).

61. Пусть A — исходное множество, а $A_n = A \cap \left[\frac{1}{n}; +\infty\right)$, где $n \in \mathbb{N}$. Хотя бы одно из множеств A_n континуально, иначе объединение этих множеств не будет иметь мощность континуума. Элементы этого множества ограничены снизу положительной константой. Поэтому подойдёт любое счётное подмножество указанного множества.

62. Можно взвесить m г, если $m \in \left(0; \frac{\pi^2}{6} - 1\right] \cup \left[1; \frac{\pi^2}{6}\right]$.

Решение. Ключевым соображением для решения задачи является следующее. Если гири упорядочить по убыванию веса, то каждая гиря, начиная со второй, весит меньше, чем все последующие, вместе взятые, т. е. при $n \geqslant 2$ выполняется неравенство $\frac{1}{n^2} < \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Действительно, $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} > \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1}$, а при $n \geqslant 2$ справедливо $n^2 > n+1$.

Отдельно рассмотрим случаи, когда на чашке весов отсутствует или присутствует гирька в 1 г.

Как известно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Убрав гирьку в 1 г, с помощью всех остальных мы взвесим груз в $\frac{\pi^2}{6} - 1$ г. Покажем, как взвесить любой меньший груз.

Пусть $m < \frac{\pi^2}{6} - 1$ и число m не представимо конечной суммой различных величин, обратных квадратам натуральных чисел. Будем на чашку весов последовательно ставить гирьки весом в $\frac{1}{2^2}$ г, $\frac{1}{3^2}$ г,… до тех пор, пока общий их вес не превзойдёт m, после чего последнюю гирьку уберём. Мы найдём такое l, что

$$\sum_{k=2}^{l} \frac{1}{k^2} < m < \sum_{k=2}^{l+1} \frac{1}{k^2}.$$

Поскольку $\sum\limits_{k=l+2}^{\infty} \frac{1}{k^2} > \frac{1}{(l+1)^2}$, без гирьки весом $\frac{1}{(l+1)^2}$ г можно обойтись, а задача свелась к аналогичной: с помощью гирек весом в $\frac{1}{(l+2)^2}$ г, $\frac{1}{(l+3)^2}$ г,… взвесить груз в $m - \sum\limits_{k=2}^{l} \frac{1}{k^2}$ г.

Фактически, для взвешивания груза (в m г) мы применяем *жадный алгоритм*: каждый раз на чашку весов ставим гирьку наибольшего веса такую, чтобы общий вес гирь не превзошёл m.

Если же гирька в 1 г используется при взвешивании, то, рассуждая точно так же, можно взвесить любой груз от 1 до $\pi^2/6$ г.

63. Не существует.

Решение. Рассмотрим n-ю частичную сумму ряда $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\pi(k)}{k^2}$. При замене $\pi(k)$ на k, $k = 1, 2, \ldots, n$, данная сумма не увеличивается (по транснеравенству). Значит, $S_n \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Получилось, что S_n не меньше частичной суммы гармонического ряда. Отсюда и вытекает расходимость рассматриваемого ряда.

64. Может.

Решение. Выберем какое-нибудь число q, $0 < q < 1$ и будем строить такие последовательности, что $\min(a_n, b_n) = q^n$. Этим будет обеспечена сходимость ряда $\sum \min(a_n, b_n)$.

Для обеспечения расходимости рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$, будем в каждом из них чередовать участки из возрастающих степеней q и стационарные участки:

n	1	2	…	m_1	m_1+1	…	m_1+m_2
a_n	q	q	…	q	q^{m_1+1}	…	$q^{m_1+m_2}$
b_n	q	q^2	…	q^{m_1}	q^{m_1}	…	q^{m_1}

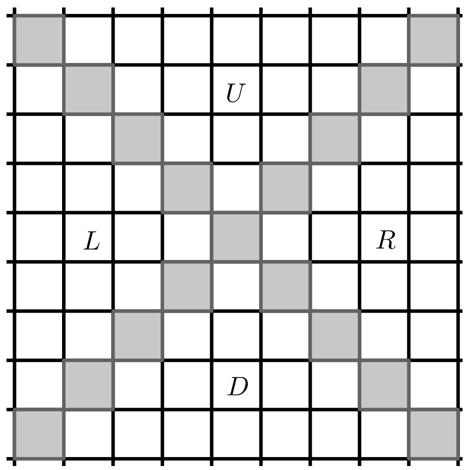
n	m_1+m_2+1	...	$m_1+m_2+m_3$	$m_1+m_2+m_3+1$	...
a_n	$q^{m_1+m_2}$	...	$q^{m_1+m_2}$	$q^{m_1+m_2+m_3+1}$	...
b_n	$q^{m_1+m_2+1}$	...	$q^{m_1+m_2+m_3}$	$q^{m_1+m_2+m_3}$	...

Длины стационарных участков m_1, m_2, ... можно брать сколь угодно большими, добиваясь этим расходимости рядов. Например, достаточно выполнения неравенств

$$m_1 q > 1; \quad m_2 q^{m_1} > 1; \quad m_3 q^{m_1+m_2} > 1; \quad \ldots .$$

65. Можно. Приведём пример требуемой расстановки чисел.

Две перпендикулярные друг другу клетчатые диагонали, выделенные цветом на рисунке, делят остальную клетчатую плоскость на 4 части: левую L, правую R, верхнюю U и нижнюю D.



Расставим в L и R все отрицательные целые числа, в U и D все положительные целые числа, а по диагоналям все остальные числа. Возможность такой расстановки обеспечивается счётностью соответствующих множеств.

Любая строка содержит бесконечное число отрицательных целых чисел и лишь конечное число других чисел (они расположены от одной диагонали до другой диагонали). Поэтому сумма по любой строке равна $-\infty$. В то же время любой столбец содержит бесконечное число натуральных чисел и лишь конечное число других чисел (они вновь расположены от одной диагонали до другой диагонали). Значит, сумма по любому столбцу равна $+\infty$.

Источники задач

Вступительные экзамены в Школу анализа данных Яндекса [10]: 2–4, 7–9, 14–16, 18–20, 22, 23, 27, 30, 33–36, 38, 39, 41, 45, 48, 51–54, 58, 61.

Олимпиады, проводящиеся в Южно-Уральском университете [6–9]: 1, 5, 6, 10–13, 24–26, 28, 29, 31, 37, 40, 42–44, 46, 47, 49, 50, 55–57, 60, 62–65.

Турнир математических боёв ФПМИ МФТИ: 10, 49, 60, 65.

Всероссийский студенческий турнир математических боёв (организатор Тульский педагогический университет им. Л. Н. Толстого [1, 2]: 21, 56.

Открытая международная студенческая Интернет-олимпиада (OIIO — Open International Internet-Olympiad) по математике (Поволжский технический университет, Йошкар-Ола, Ариэльский университет, Израиль): 26, 31.

Литература

[1] Игнатов Ю.А. *Всероссийские студенческие турниры математических боёв. Тула, 2002 – 2015* В 2-х ч. Часть I / Ю.А. Игнатов, В.А. Шулюпов, И.Ю. Реброва и др. — Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2016. – 148 с.

[2] Игнатов Ю.А. *Задачи студенческих математических боёв* / Ю.А. Игнатов, В.А. Шулюпов, А.Ю. Эвнин. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2005. – 43 с.

[3] Эвнин А.Ю. *Метод масс в задачах* // Математическое образование. – 2015. – № 1(73). – С. 27–47.

[4] Эвнин А.Ю. *Задачи по теории вероятностей на студенческих олимпиадах* / А.Ю. Эвнин, Э.Ю. Лернер, Ю.А. Игнатов, И.С. Григорьева // Математическое образование. – 2017. – № 4(84). – С. 45–62.

[5] Эвнин А.Ю. *Задачи по линейной алгебре на студенческих олимпиадах* / А.Ю. Эвнин, Ю.А. Игнатов // Математическое образование. – 2019. – № 3(91). – С. 26–48.

[6] Эвнин А.Ю. *Математический конкурс в ЮУрГУ 2017–2019 гг.* / А.Ю. Эвнин. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2019. – 108 с.

[7] Эвнин А.Ю. *Математические олимпиады в ЮУрГУ 2010–2015 гг.* / А.Ю. Эвнин. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016. – 63 с.

[8] Эвнин А.Ю. *Сто пятьдесят красивых задач для будущих математиков* / А.Ю. Эвнин. — М.: ЛЕНАНД, 2018. – 224 с.

[9] Эвнин А.Ю. *Ещё 150 красивых задач для будущих математиков* / А.Ю. Эвнин. — М.: ЛЕНАНД, 2018. – 216 с.

[10] *Решения вступительных испытаний в ШАД*
URL: `https://efiminem.github.io/supershad/`

Эвнин Александр Юрьевич,
доцент кафедры прикладной математики
и программирования Южно-Уральского
государственного университета,
кандидат педагогических наук.

E-mail: graph98@yandex.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2020 год (включая стоимость пересылки) – 150 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2020 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 100 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138
9 771992 613776