

Математическое Образование

Журнал Фонда математического
образования и просвещения

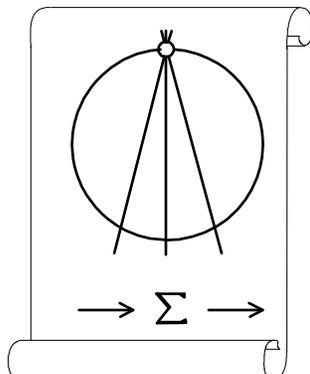
Год двадцать четвертый

№ 1 (93)

январь - март 2020 г.

Москва

*Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования*



Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.

Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)

Дубовицкий А.В.

Канель-Белов А.Я.

Комаров С.И.

Константинов Н.Н.

Костенко И.П.

Саблин А.И.

№ 1 (93), 2020 г.

© “Математическое образование”, составление, 2020 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2020 г.

“Математическое образование”, периодическое издание.

Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.

Подписано к печати 22.04.2020 г.

Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.

Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.

Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.

Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (93), январь – март 2020 г.

Содержание

Математическое моделирование

- Е. Ф. Мищенко, А. С. Мищенко, М. И. Зеликин.* Адекватность математических моделей в теории управления, физике и экологии. Окончание 2

Учащимся и учителям средней школы

- В. Ю. Бодряков, А. А. Быков.* Улучшаемые пиксельные оценки мер плоских множеств как методический подход к введению понятия «площадь фигуры» в курсе геометрии. Часть 2 15
- В. К. Гаврилов.* О задаче «Рыцари короля Артура» 24
- А. М. Иглицкий.* О нетривиальных случаях пересечения диагоналей правильного многоугольника на его оси симметрии 28
- А. А. Привалов.* О некоторых свойствах и признаках параллелограмма 36

Студентам и преподавателям математических специальностей

- Э. М. Джамбетов, А. Я. Канель-Белов, И. С. Шудуева.* Свойства степенных вычетов натуральных чисел в различных системах счисления 46
- С. В. Закурдаев.* Иерархический алгоритм построения минимального остовного дерева 51

Из истории математики

- В. И. Войтицкий.* Краткая энциклопедия современной математики (выдающиеся открытия и открытые вопросы с простой формулировкой) 54

Информация

- Н. Г. Павлова, А. О. Ремизов.* Поправка к статье «Гладкие функции, формальные ряды и теоремы Уитни» 69

Адекватность математических моделей в теории управления, физике и экологии. Окончание

Е. Ф. Мищенко, А. С. Мищенко, М. И. Зеликин

Авторы обсуждают роль математики и использование математических моделей в различных областях человеческой деятельности: теории управления, физике, моделировании физических, технологических и природных процессов. Рассматриваются, в частности, работы Л. С. Понтрягина и его учеников в области динамических систем, теории управления, теории дифференциальных игр. Моделирование технологических и природных процессов рассматривается на примерах проекта поворота северных и сибирских рек на юг, прогнозирования изменения уровня Каспийского моря, проекта строительства Ленинградской дамбы. Окончание статьи. Начало опубликовано в предыдущем номере.

4. Математическое моделирование в проекте строительства Ленинградской дамбы

Примером маскировки под «высокую науку» с помощью неадекватных моделей может служить проект построения Ленинградской дамбы. Этот проект дает нам повод обсудить заодно и ряд вопросов натурального, физико-технологического моделирования природных явлений.

По нашему мнению, есть существенное различие в моделировании процессов в технике и физике, отличающее его от моделирования широкомасштабных природных процессов. Первое явное различие заключается в том, что природные процессы невозможно повторять столько раз, сколько требуется для проверки модели или той или иной гипотезы. Если при построении модели в физике экспериментатор в принципе может осуществить опыт в тех предположениях, которые необходимы ему для проверки гипотезы, то в случае природных процессов исследователь вынужден иметь дело только с тем набором измерений, который предоставляет ему природа. Поэтому даже выявление причинных связей в природных процессах вызывает методологические затруднения.

Второе (не по важности, по счету) различие между моделированием природных и физических процессов, заключается в том, что природные процессы протекают очень медленно. В этом есть их сходство, пожалуй, с генетикой, где наблюдение генетических закономерностей также затруднено медленным темпом развития организмов. Мы можем привести пример, когда моделирование, основанное на краткосрочных наблюдениях, может привести к неадекватному описанию природы. В районе города Краснодар было спроектировано и построено (путем обваловки берегов) водохранилище, ложе которого находится выше профиля ландшафта. Таким образом, оказалось, что уровень воды в водохранилище находится выше уровня почвы в городе Краснодар. Стандартные расчеты, основанные на многолетней практике строительства речных плотин, говорили проектантам, что инфильтрация воды под дамбами, отгораживающими водохранилище, должна быть незначительной и распространяться на несколько километров от водохранилища. Прошли годы. Через 25 лет вода из водохранилища была обнаружена в подвалах домов Краснодара. Такого предсказания существующие модели дать не могли.

Неучет указанных различий в моделировании крупномасштабных природных процессов может привести к ошибкам, как это хорошо демонстрирует пример проектирования Ленинградской дамбы.

Строительство Ленинградской дамбы лоббировал и проводил в жизнь целый ряд влиятельных организаций и ведомств бывшего СССР. Нам пришлось участвовать в экологической экспертизе проекта. Председателем комиссии Академии наук СССР по экологической экспертизе проекта Ленинградской дамбы был Алексей Владимирович Яблоков. Александр Сергеевич Мищенко был заместителем председателя, Михаил Ильич Зеликин был членом этой комиссии. Поскольку мы сами всегда работали на общественных началах и тратили только свои личные деньги, организации, к

которым мы обращались, шли нам навстречу и бесплатно выполняли уникальные и чрезвычайно дорогостоящие исследования. Была проведена не только аэрофотосъемка залива, но и съемки из космоса с последующей их дешифровкой (съемка производилась одновременно в нескольких различных диапазонах длин волн). Неоценимую помощь в организации этих экспериментов оказал космонавт Георгий Михайлович Гречко.

Ленинградская дамба, как это было предусмотрено проектом, должна была представлять собой систему плотин, протянувшихся с севера на юг в районе острова Котлин (г. Кронштадт), отсекающих Невскую Губу от акватории Финского залива. В плотинах были запланированы водопропускные ворота для протока невской воды, которые предполагалось закрывать при приближении Большой волны. Проектировщики утверждали, что этих ворот будет вполне достаточно, чтобы в обычных условиях обеспечить нормальный сток Невы. Для доказательства был построен экспериментальный бассейн размерами с огромный зал, копирующий геометрические формы Невской Губы. На это сооружение было потрачено около 5 млн. рублей. В экспериментах все получалось благополучно.

4.1. Немного истории

Река Нева – единственный существенный водный источник в этом районе. Она впадает в Балтийское море в восточной части Невской Губы через разветвленную сеть рукавов своей дельты. Далее воды Невы протекают вдоль всей Невской Губы с востока на запад и через северные и южные ворота, на которые делится течение островом Котлин, попадают в Финский Залив, перемешиваясь с солоноватыми морскими водами.

Санкт-Петербург, как подковой, охватывает всю Невскую Губу и даже восточную часть Финского залива. Петербург – чудный город, но одна из его бед состоит в том, что испокон веков там не было ни одного сооружения для очистки воды, и сточные воды сбрасывались прямо в Неву. Надо добавить, что и сама Нева уже давно не чистая река; она несет в себе стоки загрязненной Ладоги, удобрения, смываемые с полей орошения и т.д., а Невская Губа около Петербурга – очень мелкий залив со слабым течением. Она давно превратилась бы в помойку, если бы не наводнения.

В осенне-зимний период побережье Невской Губы подвержено регулярным ежегодным наводнениям. Эти наводнения происходят вследствие возникновения в Балтийском море Большой уединенной волны, которая, достигая узкой Невской Губы, резко увеличивает свой уровень. Уровень наводнения в различные годы в городе колеблется от 1,6 до 4 метров. Уходя, Большая волна уносила в море все донные отложения, периодически очищая Невскую Губу и Финский залив от грязи. Город, конечно, страдал. В истории города известны очень сильные наводнения, оставшиеся в народной памяти как катастрофические. Одно из таких наводнений описано в знаменитой поэме А.С. Пушкина «Медный всадник», где между строк читаются размышления над проблемой о праве человека на вмешательство в естественные природные процессы.

Еще со времен Петра Великого разрабатывались различные проекты защиты города от наводнений. Наибольшей популярностью пользовались проекты по образцу стран Северной Европы – в виде заградительных плотин. Но до наших времен ни один проект так и не был воплощен в жизнь.

С благословения главы города, члена Политбюро ЦК КПСС Григория Васильевича Романова, началась интенсивная застройка пригородов Ленинграда, расположенных в местах, наиболее подверженных затоплению. Город продолжает расти в сторону моря. Многие микрорайоны строятся на площадках, отвоеванных у моря с помощью намыва грунта. Таким образом, в центре гигантского мегаполиса находится практически замкнутый водоем – Невская губа – площадью 329 квадратных километров, от экологического состояния которого всецело зависит благополучие жизни петербуржцев.

С 1966 года началась проектирование Ленинградской дамбы. В техническом задании на составление технико-экономического обоснования проекта указывалось, что назначение комплекса сооружений защиты состоит в следующем:

- 1) защита города Ленинграда со стороны Финского залива от наводнений, даже таких больших,

повторяемость которых не чаще одного раза в 1000 лет;

2) защита прибрежных районов реки Невы от зимних зажорных наводнений;

3) создание условий, обеспечивающих соответствующее нормам санитарное состояние акватории Невской губы и рукавов дельты в пределах города.

Предполагалось рассмотреть четыре варианта защитных сооружений: два западных и два восточных.

В 1968 году Госстрой СССР, вопреки планам, предложил рассматривать только один, западный вариант, с отчленением Невской губы от Финского залива и расположением защитных сооружений по линии Лисий Нос – Кронштадт – Ломоносов. Все остальные проекты и варианты были отброшены, и власти стали с упорством, достойным лучшего применения, проталкивать в жизнь только этот вариант, несмотря на то, что он содержал целый ряд негативных моментов, которые резко обострились в результате настойчивого стремления как можно скорее завершить строительство, встречавшее общественное противодействие.

В предварительной экспертизе проекта было записано следующее обязательное требование: «...при отчленении Невской губы от Финского залива защитными сооружениями их строительству должно предшествовать выполнение мероприятий по обезвреживанию, обеззараживанию и очистке сточных вод, сбрасываемых в ее водосборном бассейне». Но Госстрой СССР предложил проводить не предшествующее, а всего лишь опережающее строительство очистных сооружений.

Строительство дамбы началось в 1979 году, причем строительство очистных сооружений не только не предшествовало, но и отставало от строительства дамбы. Строительство велось с нарушениями технического проекта. Наиболее существенное нарушение заключалось в том, что в декабре 1984 г. было осуществлено перекрытие Северных ворот (Лисий Нос – Кронштадт) глухой технологической дамбой без ввода запланированных водопропускных отверстий, что привело к созданию критической экологической ситуации в Невской губе. Необходимо отметить, что к началу строительных работ научное обоснование выбранного варианта проекта попросту отсутствовало.

4.2. Ошибки в моделировании

В проекте отсутствовали комплексное экологическое обоснование и оценка последствий строительства защитных сооружений. Роль такого обоснования играли рассуждения, основанные на гидравлическом и математическом моделировании, призванные доказать, что защитные сооружения слабо изменяют поле течений в отгороженной части Невской губы. Для детального анализа влияния защитных сооружений на гидродинамическое поле течений в Невской губе и, следовательно, возможно более точной оценки влияния сооружений на изменение экологической обстановки была использована генеральная гидравлическая модель, специально созданная во Всесоюзном научно-исследовательском институте гидротехники (ВНИИГ) им. Веденеева.

Результаты исследований на этой модели широко использовались для обоснования утверждения о том, что защитные сооружения практически не окажут влияния на экологическую обстановку в регионе, так как слабо и в относительно малых областях изменяют среднее поле течений в Невской губе. В действительности экологическая обстановка определяется тонкими биологическими и биохимическими процессами, протекающими в воде, которые зависят не от средних расходных характеристик проточного водоема, а от деталей распределения скоростей, определяющих в рассматриваемом случае соленость воды, ее температуру, прозрачность, насыщенности кислородом и т.д., а также концентрацией химических примесей и загрязнений.

Проведенный нами в процессе экологической экспертизы анализ показал, в частности, что при проектировании во ВНИИГ им. Веденеева генеральной гидравлической модели, используемой для моделирования влияния защитных сооружений на гидродинамику Невской губы, были допущены существенные отступления от принципов гидравлического моделирования и не были проведены необходимые методические исследования.

В основе гидравлического моделирования устьев больших рек лежит переход от исследования

трехмерного течения к исследованию двумерного течения, описывающего средние по глубине характеристики исходного течения. С математической точки зрения этот переход связан с осреднением уравнений, описывающих турбулентное течение несжимаемой жидкости. Система уравнений, описывающая плановое поле средних по глубине скоростей руслового потока, зависит от четырех безразмерных параметров: чисел Струхала, Фруда, Рейнольдса и параметра трения. Возможность моделирования крупномасштабных потоков на моделях небольшого масштаба связана с тем, что течение, как в натуре, так и в модели, описывается одной и той же системой уравнений. Поэтому если безразмерные параметры, фигурирующие в системе уравнений и граничных условиях, совпадают по величине для модели и природы, то и безразмерные поля скоростей в безразмерных координатах будут совпадать.

Однако моделирование крупномасштабных потоков на геометрически подобной модели, то есть при пропорциональном изменении плановых (b) и вертикальных (h) размеров, может встретить технические трудности. Например, для рассматриваемой задачи о течении в устье Невы $h = 3$ м, $b = 30$ км. В этих условиях даже для модели с плановым масштабом 100 м глубина потока должна составлять величину 1 см. Ясно, что работать с потоком глубиной в 1 см очень сложно, да и создать такую модель практически невозможно.

Выходом из этих затруднений представляется моделирование на моделях с искажением вертикального и планового масштабов, так, чтобы изменение вертикального масштаба было меньше изменения планового. Известно, что в общем случае невозможно добиться совпадения всех безразмерных величин на модели и в натуре и, следовательно, строго говоря, невозможно точное техническое моделирование русловых течений.

Тем не менее, в отдельных случаях моделирование оказывается полезным. Это обстоятельство связано с тем, что для определенного класса течений в определенной области значений безразмерных параметров поле течений может не зависеть от конкретного значения одного или нескольких из них (в так называемой области автомодельности по соответствующему параметру). Тогда вместо требования совпадения безразмерных параметров для модели и природы достаточно потребовать, чтобы значения соответствующего безразмерного параметра принадлежали бы области автомодельности.

Богатая практика моделирования русловых течений на моделях с искажением масштабов показывает, что искажение масштабов не может быть большим (не более 5). При больших искажениях масштабов требуется проведение специальных методических исследований в широком диапазоне условий течений для выявления параметров, которые могут моделироваться на таких установках. Кроме того, для каждого конкретного класса течений необходимо на основе модельных экспериментов и натурных измерений проанализировать границы областей автомодельности и возможность реализации на модели условий течений, для которых характерные безразмерные параметры лежат в области автомодельности.

Эта необходимая при обосновании возможности моделирования работа не была проведена при проектировании генеральной гидравлической модели ВНИИГ им. Веденеева. Фактически, без всякого обоснования был принят коэффициент искажения масштабов k равным 10 (вместо рекомендованного в литературе $k < 5$), не было выполнено условие автомодельности по числу Рейнольдса, не были определены границы области автомодельности по параметру трения. Благодаря этим существенным недостаткам модель оказалась практически непригодной для моделирования течения в Невской губе, и полученные на ней экспериментальные данные не должны были использоваться для подтверждения или опровержения каких-либо выводов относительно влияния защитных сооружений на гидродинамику отгороженной части Невской губы.

Этот вывод станет еще более очевидным, если вспомнить, что гидравлические модели в принципе не могут моделировать ветровые течения, которые могут существенно влиять на течение в Невской губе (известно, например, что влияние ветра на течение в Невской губе существенно в 90 случаях из 100). Наименее надежно моделируются на гидравлических моделях течения на мелководье, то есть именно в тех областях, где протекают основные биологические и биохимические процессы,

определяющие качество воды.

Отдельного разговора заслуживают вопросы, касающиеся экологической обстановки. Процессы, определяющие экологическую обстановку в Невской губе, зависят не только от среднего поля скоростей, но и от ряда тонких гидродинамических эффектов, которые не воспроизводятся на гидравлических моделях. Сюда относятся стратификационные течения, определяющие уровень солености; волновые процессы, обеспечивающие перемешивание воды и вынос загрязнителей; процессы оседания частиц, выносимых рекой и т.д.

Результаты гидравлического моделирования на установке ВНИИГ им. Веденеева широко использовались проектировщиками и строителями для внедрения в общественное сознание представления о несущественном влиянии защитных сооружений на экологическую обстановку в регионе. Приведенные соображения показывают, что подобные выводы нельзя признать обоснованными. Ограниченность гидравлического моделирования при оценке экологических вопросов и недостатки конкретной модели были хорошо известны ее разработчикам. Создание этой самой крупной в мире модели (ее стоимость порядка 5 млн. руб.) может служить еще одной яркой иллюстрацией методов, применявшихся для воздействия на общественное сознание.

4.3. Сравнение с природой

Можно, разумеется, считать все эти аргументы несущественными. Но в настоящее время, когда строительство дамбы практически закончено, уже нет необходимости проверять теоретические аргументы проектантов. Достаточно сравнить экологическую обстановку в районе Невской губы до строительства дамбы и после ее строительства. Сейчас уже путем сравнения фактических данных имеется возможность оценить влияние защитных сооружений в комплексе природных и антропогенных процессов. Для этого нами были рассмотрены два временных этапа функционирования экосистем: первый этап – до начала перекрытия Северных ворот Невской губы дамбой, то есть до 1983 года включительно, и второй этап – после перекрытия.

Начиная с 1984 года, в связи со строительством дамбы произошли резкие изменения практически во всех элементах экосистемы Невской губы и восточной части Финского залива. Изменились колебания уровня в Невской губе (запаздывание колебаний по фазе, снижение коэффициента усиления, подавление колебаний высокочастотной части спектра).

4.3.1. Соленость

В результате строительства дамбы резко сократилось поступление в губу солоноватых вод Финского залива. В настоящее по всей акватории Невской губы (за исключением морского канала) максимальные значения солености воды не превышают солености Невской воды (0.08 г/л), в то время как до строительства дамбы максимальные значения солености превышали соленость невиской воды в несколько раз практически по всей акватории Невской губы, включая даже ее прибрежную часть.

Ясно, что это явление не могло быть предсказано по гидравлической модели в связи с тем, что эта модель была плановая: она описывала среднее по глубине течение. А проникновение солоноватых вод в Невскую губу происходило по придонному противотечению. Сток пресных вод Невы шел по поверхности, а более тяжелые солоноватые воды располагались снизу и образовывали компенсационное противотечение. Поскольку ширина водопропускных отверстий была намного меньше прежней ширины русла, противотечение почти полностью прекратилось, что и привело к падению солености. Именно поэтому соленость в районе морского канала даже после строительства дамбы оказалась чуть выше, чем в мелких частях Невской губы.

До 1985 года даже в прибрежной зоне максимальная соленость достигала значений 1 г/л, тогда как после 1985 года произошло снижение солености до 0.08 г/л, то есть более чем на порядок. Даже усредненные за год значения солености в первых трех створах, считая от устья Невы (устье, Лахта – Стрельня, Лисий Нос – Петродворец) достигали до 1985 г. величин 0.15–0.35 г/л. После 1985 г. эти концентрации стабилизировались на уровне солености вод Невы (0.08 г/л). Это значит, что ранее (до строительства дамбы) солоноватые воды Финского залива проникали во все части Невской губы.

В настоящее время такое проникновение солоноватых вод прекратилось. В западной, придамбовой зоне внутри Невской губы до 1984 года максимальные значения солености, изменяясь в пределах от 3 до 5 г/л, имели сравнимые значения с соленостью вод в створе, прилегающем к придамбовой зоне со стороны восточной части Финского залива. После 1985 г. в придамбовой зоне внутри Невской губы максимальная соленость неуклонно понижается до 1 г/л, в створе же, прилегающем к придамбовой зоне со стороны восточной части Финского залива, соленость осталась практически без изменения.

Следовательно, в результате строительства дамбы произошло распреснение вод западной части Невской губы и значительно сократилась соленость вод по всей акватории Невской губы. Изменение солености подтверждается также и исчезновением солоноватых видов планктона. Так как соленые воды попадают в восточную часть Невской губы только за счет гидродинамических течений, то факт изменения солености неопровержимо свидетельствует об изменении гидродинамики отгороженной части губы.

Об этом же свидетельствует тот факт, что с постройкой дамбы исчезла корреляция между изменением солености воды в восточной части Финского залива и в Невской губе. После 1985 г. практически по всем гидрохимическим показателям произошло увеличение концентрации компонентов (по кислороду – снижение) в южной прибрежной полосе по сравнению со средними концентрациями в Невской губе, то есть произошло перераспределение поля загрязнений. Этот факт может быть объяснен исключительно изменением гидрологического режима акватории Невской губы, связанным со строительством дамбы. К настоящему времени увеличилась устойчивость транзитных стоковых потоков в губе, образовались устойчивые малопроточные и застойные зоны около берегов и перед сплошными участками дамбы, в которых стали накапливаться загрязняющие вещества. По исследованиям ГГИ, в 5-километровой зоне по обе стороны от дамбы образовались новые, не характерные ранее районы с перемежающимися зонами замедленного водообмена и струйными течениями.

4.3.2. Загрязнения

Перед и за Южными воротами концентрация нитритного азота стала превышать ПДК в 2–3 раза. В этом ранее наиболее продуктивном районе резко ухудшилось качество донных грунтов, наблюдаются массовые заболевания зоопланктона, увеличилось загрязнение фекальными микроорганизмами. По данным начала 80-х годов, зона наибольшей прозрачности (1–2 м) охватывала центральную часть водоема и занимала около 60 % всей акватории. Вторая зона с минимальной прозрачностью (0.05–0.5 м) простиралась вдоль южного берега губы. Вдоль северного побережья прозрачность колебалась от 1 до 1.5 м. Сопоставление данных начала 80-х годов с таковыми начала XX века свидетельствуют, что выявленные тенденции в характере распределения прозрачности были характерны для начала века.

Анализ космических снимков за 1983–1989 гг. показывает изменение класса качества вод Невской губы с тенденцией к резкому увеличению площади, занимаемой водами сильной и очень сильной загрязненности (4 и 5 классы качества вод). Согласно этим данным, площадь, занятая водами первого класса загрязнения (условно чистыми), снизилась с 80 % в 1983 г. до 13 % в 1986 г. и до 10 % в 1989 г. Площадь, занятая водами четвертого и пятого классов загрязнения, увеличились с 0.2 % в 1983 г. до 14 % в 1986 г. и 28 % в 1989 г. По космическим снимкам, зоны сильного загрязнения сосредоточены вдоль южного и северного берега и перед дамбой. При этом следует отметить, что в 1983 году зоны загрязнений были локализованы и не угрожали качественным изменениям во всей акватории.

С началом строительства дамбы ситуация с загрязнениями воды резко изменилась: преобладающими стали воды 2, 3 и 4 классов качества (по площади 80 % с преобладанием 3 класса). Новым гидрологическим феноменом явилось появление крупных зон мутности в прибрежных частях акватории и, в особенности, к западу от дамбы, куда проникновение речных вод 1 класса (условно чистых) практически не заметно. С продолжением строительства дамбы произошло дальнейшее увеличение площади загрязнения акватории, оно достигло критических размеров 90 % площади восточной части Финского залива. Особенно заметным стало преобладание вод 4 и 5 классов качества (сильного и

очень сильного загрязнения).

Таким образом, анализ многолетней динамики показывает, что площадь вод первого (условного чистого) класса имеет неуклонную тенденцию к сокращению: за 6 лет она сократилась в 8 раз. Второй класс (слабо загрязненные воды) немного увеличил свою площадь (в полтора раза). Площадь вод третьего класса (среднезагрязненные воды) увеличилась более чем в 2 раза. Но особенно велики изменения в площади вод 4 и 5 классов (сильного и очень сильного загрязнения) – их площадь увеличилась почти в 100 раз (!) и составила больше половины площади акватории восточной части Финского залива.

Для определения зон различного волнения была проведена радиолокационная съемка с самолета ТУ-134 СХ. Наложение карт классов качества вод и уровня волнения показали, что зона пониженного волнения, как правило, совпадает с зоной повышенного загрязнения вод. Все эти изменения привели к резким изменениям гидробиологической системы Невской губы, обусловили катастрофическое экологическое и санитарно-гигиеническое состояние Невской губы и Восточной части Финского залива, приведя к формированию обширной зоны повышенного экологического риска в пределах городской агломерации Санкт-Петербурга.

4.3.3. Водоросли

Сначала была построена часть дамбы, перекрывающая створ, расположенный севернее острова Котлин. Из-за спешки строители сделали глухое перекрытие, не оставив даже запланированных пропускных ворот, которые собирались пробить позднее. Сразу же начались неприятности. Залив «зацвел», в нем размножились сине-зеленые водоросли. Эти водоросли очень коварны. Для защиты своей экологической ниши они выделяют вещества, схожие по своему действию с нервнопаралитическими ядами. В Петербурге вспыхнула эпидемия нервных заболеваний, которая тщательно замалчивалась властями. Купание в заливе было запрещено, но детей не остановишь. Даже после того, как водопропускные ворота были наконец пробиты, экологическая обстановка улучшилась несущественно.

Анализ состава фитопланктона и перофитона, а также их структурно-функциональные показатели показывают, что в 80-е годы фитопланктон Невской губы по-прежнему находился под влиянием биостока Ладожского озера и реки Невы, характеризуя состояние Невской губы как вполне удовлетворительное. Только в застойных участках прибрежной части южной зоны наблюдалось развитие собственного фитопланктона, характерного для эвтрофных водоемов.

На западе фитопланктон формировался за счет видов, характерных для планктона восточной части Финского залива. В формировании продукции и биомассы планктона до 1984 г. роль сине-зеленых водорослей была мала. Основную роль в образовании органического вещества весной играли диатомовые, летом – хлорококковые и желто-зеленые водоросли. Фактором, ограничивающим развитие фитопланктона до начала строительства защитных сооружений, была повышенная проточность Невской губы, препятствующая массовому развитию, а также низкая прозрачность. Обеспеченность фитопланктона биогенными элементами и, в том числе, минеральным фосфором (основным элементом минерального питания, определяющим развитие водорослей) значительно превышала потребности в нем фитопланктона, то есть не могла ограничивать его развитие.

Соотношение N:P также было оптимальным для неограниченного развития фитопланктонного комплекса, однако массового развития фитопланктона не отмечалось. Начиная же с 1984 г. появились структурные изменения в составе фитопланктона в сторону усиления значимости численности колониальных видов сине-зеленых водорослей (к 1986 г. охватившие всю акваторию Невской губы). При этом характер распределения и уровень развития водорослей в пределах акватории губы был крайне неравномерным. Максимальные значения численности были отмечены начиная с 1983 г. в юго-восточной части Невской губы с пиком развития в 1986 г., достигшего 27.3 млн. кл./л при фоновом значении 2–7 тыс. кл./л. В центральной транзитной части и баровой области проявились та же тенденции роста численности сине-зеленых водорослей с максимальным пиком развития в 1986 г.

Наиболее существенные изменения произошли в динамике фитопланктона в Невской губе. По данным Северо-западного управления Госкомгидромета, сразу после перекрытия Северных ворот резко сократилась разность между численностью фитопланктона в заливе и губе. В 1984–1988 гг. летом общая биомасса фитопланктона в открытой части Невской губы увеличилась, а в Финском заливе уменьшилась в 2,3 раза. Строительство дамбы резко изменило видовой состав фитопланктона. Так, до строительства дамбы в акватории Невской губы биомасса сине-зеленых водорослей колебалась в пределах 0–20 % от общей биомассы фитопланктона, а с 1984 г. – в пределах 60–97 %. Оценка факторов возможного воздействия, обусловивших столь значительные структурные нарушения микрофитоценозов Невской губы, позволяет сделать вывод о приоритетном факторе – изменении гидродинамической активности водных масс, скоростей течений вне центральной транзитной зоны, ибо до начала строительства дамбы именно повышенная гидродинамическая активность являлась основным фактором, препятствовавшим столь массовому развитию сине-зеленых водорослей в акватории Невской губы.

Анализ состояния прибрежно-водной растительности свидетельствует о том, что в начале 80-х годов северный берег Невской губы был почти лишен зарослей в его северо-восточной части, с постепенным нарастанием площади зарослей к Лисьему носу, где отмечалось значительное развитие прибрежно-водной растительности. На южном берегу заросли образовывали небольшие скопления, с максимальным распространением в районе Стрельни. К началу 80-х годов площадь зарослей в литорали Невской губы составляла 6,5–7,0 км², или 2 % от общей площади акватории. Площадь зарослей на южном побережье составляла порядка 3 км², на северном – 2,5 км². Доминирующими видами были камыш и тростник. Нитчатые зеленые водоросли (обрастание) встречались во всех небольших заливах и бухтах, с максимальным развитием в застойных мелководных зонах. Фактором, лимитирующим развитие растительного комплекса (обрастаний) на начало 80-х годов была активная гидродинамика водных масс. Во второй же половине 80-х гг. при условии мало меняющегося и высокого уровня обеспеченности растений элементами минерального питания произошла интенсификация процессов зарастания мелководий нитчатыми водорослями, что свидетельствует о том, что здесь, скорее всего, сработал фактор резкого изменения течений в Невской губе, приведший к формированию обширных зон замедленного водообмена, фиксируемый в течение 1984–1987 гг., а не возросший объем сброса плохо очищенных коммунально-бытовых сточных вод.

4.3.4. Фауна

Исследование состояния зоопланктона Невской губы показало, что в начале века его видовой состав в значительной степени формировался видами, характерными для Ладожского озера.

До начала 80-х годов число видов очень показательной таксономической группы зоопланктона коловраток было неизменным в Невской губе и Ладожском озере. Зоопланктон Невской губы представлял исходно Ладожский комплекс, трансформированный в процессе переноса рекой Невой, обогащенный фитофильными формами, развивающимися в пойменных водоемах южного берега Невской губы, а также приносом сюда из восточной части Финского залива ряда солоноватоводных и морских видов, способных к функционированию в условиях сильного распреснения. Половину от общей биомассы зоопланктона составляли коловратки (приблизительно 50 %), 30 % – инфузории, 20 % – кладоцеры, 3 % – копеподы. В планктоне центральной транзитной и северной зоны до 1984 г. включительно на долю коловраток приходилось порядка 75 % от общей биомассы, в южной зоне доля значимости коловраток снижалась до 25 %.

После перекрытия Северных ворот дамбы в северо-западном районе губы произошли структурно-функциональные изменения в сообществе зоопланктона за счет массового развития коловраточного комплекса, характерного для эвтрофных вод. При этом первая вспышка была зафиксирована в 1985 г. Следует отметить, что в 1987 г. после расчистки водопропускных сооружений и создания дополнительных проранов отмечалось кратковременное снижение численности коловраток, однако в 1988–1989 гг. пик массового развития коловраточного зоопланктона на ряде станций превышал

фоновый уровень (1984 г.) в 4–5 раз.

Начавшаяся в 1986 г. отсыпка южного участка Невской дамбы завершилась в 1988 г. созданием глухой преграды длиной 3 км. И именно в 1988 г. в юго-западном районе Невской акватории на станциях, примыкающих к дамбе, пик развития зоопланктона в 9–10 раз превысил фоновые величины 1986–1987 гг. Пик развития формировался главным образом коловраточным зоопланктоном.

Анализ состояния таксономического состава и структурно-функциональных показателей донных животных показал, что к началу 80-х годов характерной особенностью было массовое развитие моллюсков, в баровой зоне Невской губы достигшее максимального развития (с биомассой до 1 кг/м²), что является предельной максимальной величиной, известной для пресноводных водоемов. Именно комплекс донных животных в Невской губе играл ведущую роль в биологическом самоочищении воды, где не планктон, а бентос был важнейшим фактором этого процесса. Следует отметить, что именно в баровой зоне Невской губы утилизировалась большая часть осаждаемой взвеси, несомой рекой Невой. При этом скорость деструкции органического вещества восточной части губы и величина продукции достигала здесь огромных величин, значительно превышающих первичную продукцию, создаваемую в самой Невской губе, что свидетельствует о том, что решающую роль в функционировании экосистемы играло алохтонное органическое вещество, поступающее с Невскими водами, что является характерной особенностью функционирования донных зооценозов. Основным фактором, определяющим состав и продуктивность донных сообществ, являлась степень аэрированности придонных слоев воды, то есть насыщение придонных слоев кислородом, обеспечиваемая активной гидродинамикой водных масс и трофическим фактором.

Данные же за период после 1985 года выявили тенденции в изменении структуры донных зооценозов, а также сокращение их биомассы в баровой зоне более чем на порядок. Выявленные тенденции показывают, что в ближайшее время следует ожидать резкого ухудшения общего биологического состояния в связи с нарушением функционирования основного биотического компонента системы самоочищения Невской губы – донных зооценозов. По результатам исследований последних лет, общее состояние Невской губы характеризуется как неудовлетворительное, а по санитарно-гигиеническим показателям – как катастрофическое. По величине коли-индекса 88,6 % проб воды не соответствуют ГОСТу. В целом, по коли-индексу качество воды в губе оценивается в 86,3 % проб как плохое, в 7,6 % проб – как неудовлетворительное.

5. Математическое моделирование физических процессов

По мере углубления понимания сути явления модели обычно все дальше и дальше отходят от первоначальных примитивных конструкций. Планетарная модель атома Резерфорда сыграла выдающуюся роль в процессе развития физики. Но когда был до конца осознан принцип неопределенности Гейзенберга, принципиально запрещающий локализацию частиц, и когда было установлено, что переход электрона с орбиты на орбиту может происходить лишь квантовым образом, тогда представление о шариках-электронах, вращающихся вокруг ядра подобно планетам, стало анахронизмом. Модель Бора, сменившая модель Резерфорда, существенно потеряла в наглядности, но намного выиграла в смысле возможностей ее использования.

То же произошло со спином электрона. Первоначально его представляли как вращение (хотя и квантованное) шарика-электрона вокруг своей оси (откуда и само название – спин). Однако теперь электрон нередко представляют в виде материальной точки, и тогда вращение становится лишеным смысла. Поэтому все чаще используются слова «внутренняя степень свободы» – термин, свободный от аналогии с вращающимся шариком.

Вообще, современная физика все дальше и дальше отходит от механистической наглядности, все больше и больше математизируется. Правда, у физиков это иногда вызывает чувство протеста. В частности, по словам Я. Б. Зельдовича, лорд Томпсон предложил весьма экстравагантную единицу измерения степени достоверности физико-математических формул: предлагается измерять

степень достоверности в дюймах. А именно, короткие формулы имеют гораздо больше шансов быть справедливыми, а формула длиной больше двух дюймов заведомо неверна. Интересно, а как быть с длинными промежуточными формулами, которые возникают в процессе вывода коротких формул, ведь если счесть их неверными, то неверен будет и конечный результат? Или наоборот, если скомбинировать несколько коротких формул в одну длинную, то их справедливость нарушится?

В наше время Мигдал довел тезис Томпсона до... (чуть было не употребили слова «до абсурда», но во-время спохватились: ведь эта не совсем стандартная точка зрения разделяется значительным количеством ученых, которых не хотелось бы обижать. Поэтому попытаемся использовать выражение, лишенное эмоциональной окраски) ... до своего логического завершения. Мигдал предложил определение: «Физика – это искусство обходиться без математики». Прекрасно! Однако позволено спросить: как же вычислять результаты планируемых экспериментов (основное предназначение физиков, по мнению многих из них) без применения математики? Или это предполагает только использование элементарной арифметики, которая, по определению, изымается из области математики?

Есть еще одна трудность. Физика элементарных частиц часто имеет дело со значениями энергии, которые в настоящее время экспериментально недостижимы. В частности, такой значительный и бурно развивающийся раздел физики элементарных частиц, как хромодинамика, остается до настоящего времени почти не подтвержденным прямыми экспериментальными доказательствами. Для таких доказательств понадобились бы частицы, обладающие энергией, недостижимой на современных ускорителях. Другой пример – это астрофизика и космология, где вообще, даже и в очень отдаленном будущем, трудно представить себе какие бы то ни было физические эксперименты. Что же будет играть роль критерия истины в физике при полном отсутствии как математических, так и экспериментальных доказательств? Нам представляется, что роль математических моделей в такого рода областях уникальна.

Поразительный пример моделирования – твисторная теория Р. Пенроуза. Будучи платоником, Пенроуз верил в реальное существование вечного мира идей. Законы природы в этом мире идей совершенны, но они находят не вполне совершенное отражение в нашем реальном мире. В соответствии с теорией относительности, при движении со скоростью света время останавливается, и мы получаем в некотором смысле вечность. Поэтому надо описывать законы природы не в системах, движущихся с обычными скоростями, а в системе, движущейся со скоростью света. Для реализации этой программы Пенроузу пришлось комплексифицировать пространство-время Минковского и придумать отображение на световой конус, которое стало называться соответствием Пенроуза. В результате многие фундаментальные уравнения математической физики – уравнения Максвелла, безмассовое уравнение Дирака, линеаризованное уравнение Эйнштейна, и т.п., записанные в твисторном формализме, действительно стали совершенными: их решениями стали служить произвольные голоморфные сечения соответствующих расслоений.

Но твисторный формализм слабовато сочетается с квантовым подходом. А вопросы квантовой теории поля вышли в последнее время на ведущее место по тому интересу, который они вызывают как в физике, так и в математике. В квантовомеханических моделях основную роль играет принцип неопределенности Гейзенберга, трактуемый как коммутационные соотношения между основными операторами квантовой механики. В математических конструкциях стали даже понимать квантование как моделирование коммутационных соотношений. (Еще одна интерпретация термина «моделирование».) Причем происходит и смена декораций, в которых разыгрывается пьеса. Вместо классического пространства-времени, функции на котором описывали состояние квантовой системы, рассматриваются бесконечномерные многообразия: совокупность римановых поверхностей (в теории струн), алгебра Вирасоро и т.д.

Замечательный физик Ричард Фейнман делился своими воспоминаниями о том, как он стал физиком. В детстве его потряс всем известный простенький физический опыт: если потереть янтарь шерстью, то он электризуется и начинает притягивать к себе мелкие предметы. Фейнман решил

стать физиком, чтобы понять, почему это происходит. В своих воспоминаниях он пишет, что он окончил университет, изучил физику, сделал немало физических работ, стал лауреатом Нобелевской премии, но так да сих пор и не может объяснить, почему янтарь электризуется, если его потереть шерстью. И это далеко не единственный вопрос, для объяснения которого не существует адекватных математических моделей.

Как это ни парадоксально звучит, но физика твердых тел пока еще не способна объяснить, почему твердые тела являются твердыми. Ведь расстояния между атомами по сравнению с размерами самих атомов такое же, как расстояния между звездами в галактиках по сравнению с размерами самих звезд. Казалось бы, ничто не препятствует проникновению одного твердого тела в другое!

Один из наиболее трудных вопросов, остро интересующих математиков и физиков – это вопрос о фазовых переходах. Каким образом происходит переход из одного состояния вещества в другое, то есть как на квантовом языке описать процессы плавления, кристаллизации и т.д.

Для прояснения этих вопросов было создано немало различных моделей. Одна из наиболее красивых – модель Изинга. Чтобы явно просчитать квантовые эффекты, вызывающие фазовые переходы, рассматривается бесконечная целочисленная решетка на прямой или на поверхности. Если в качестве поверхности берется двумерный тор, то с физической точки зрения рассматривается периодическая решетка. Каждый из узлов решетки находится в том или ином квантовом состоянии. Предполагается, что любой узел влияет только на соседние с ним узлы. Это предположение порождает динамическую систему с бесконечным числом переменных. Вопрос состоит в описании асимптотики решений этой системы. В последнее время А.С. Мищенко и соавторам удалось выразить производящую функцию в модели Изинга в таких терминах, которые зависят не от конкретной решетки, а от топологических инвариантов поверхности. Топологические инварианты – это математические величины, которые не меняются при любых непрерывных деформациях как функций, определяющих модель, так и начальных условий. Если наши выводы опираются на знание топологических инвариантов, то это дает гарантию того, что неточности в исходных данных модели не влияют на результат. В случае модели Изинга использовался так называемый *Arf*-инвариант, особенностью которого является его нелинейность по отношению к исходным параметрам задачи.

Наиболее таинственными из фазовых переходов являются переходы к состоянию сверхтекучести и к состоянию сверхпроводимости. Еще на заре создания теории сверхпроводимости была выдвинута идея так называемой энергетической щели. Спектр энергии соответствующей квантовой системы разделен пустым интервалом – энергетической щелью. Собственные состояния, соответствующие сверхпроводимости, лежат выше этой щели; так называемое «основное состояние», соответствующее покою, – ниже. Для того, чтобы перейти из состояния сверхпроводимости в состояние покоя, необходим весьма существенный энергетический толчок. Поэтому относительно малые потери энергии при случайных столкновениях частиц, то есть те процессы, которые порождают сопротивление и приводят к ослаблению тока при обычных условиях, не влияют на ток в случае сверхпроводящего состояния. В недавних работах Виктора Павловича Маслова и Александра Сергеевича Мищенко была исследована асимптотика спектра энергии и найдена энергетическая щель не только для сверхнизких, но и для высоких температур. Для реализации высокотемпературной сверхпроводимости надо понять, как перевести вещество в состояние, лежащее выше этой энергетической щели. В настоящее время физики бьются над этой проблемой почти вслепую, наугад подбирая материалы, физические условия, энергетические поля... Ясно ощутим недостаток точной математической модели, которая могла бы облегчить эти поиски.

6. Фигуры равновесия вращающейся жидкости

Блестящие образцы математического моделирования дал Исаак Ньютон в «Началах», где, в частности, был вычислен коэффициент сжатия Земли у полюсов («Начала», книга III, предложения XVIII–XX). Для этого им была использована простейшая из всех возможных моделей, описывающих равновесную фигуру вращающейся однородной гравитирующей жидкости. Ньютон представил

себе две скважины с единичной площадью поперечного сечения: одну, пробуренную от точки на экваторе к центру Земли, и другую, пробуренную от полюса к центру. Приравнявая «веса» жидкости, находящейся в обеих скважинах с учетом центробежных сил, Ньютон показал, что сжатие Земли у полюсов, то есть отношение разности экваториального и полярного радиусов к среднему радиусу Земли, должно составлять $1/230$.

Этот вывод противоречил мнению большинства астрономов того времени, принадлежащих к школе Кассини, которые считали, что Земля не сплюснута, а вытянута у полюсов. Последовала долгая научная дискуссия, и лишь геодезические измерения, проведенные в Лапландии экспедицией Мопертюи и Клеро, полностью подтвердили вычисления Ньютона. Вольтер даже слегка поиздевался над своим другом Мопертюи, написав по этому поводу эпиграмму, которую можно рассматривать как юмористическую сравнительную оценку умозрительного и эмпирического путей познания:

*Vous avez confirmé dans les lieux pleins d'ennui
Ce que Newton connut sans sortir de chez lui.*¹

По этому поводу вспоминается изречение Конфуция, которое, правда, относится не к естественным наукам, а к более широкой проблеме – проблеме понимания сущности мира и человека. Конфуций писал: «К мудрости ведут три дороги: путь подражания – самый легкий, путь опыта – самый трудный и путь размышления – самый благородный».

Пользуясь идеей Ньютона, Маклорен уже существенно более сложным образом формально доказал, что фигурой равновесия может служить эллипсоид вращения, сжатие которого вычисляется методом Ньютона. Поразительно, что современные данные о сжатии Земли ($1/290$) не очень существенно отличаются от результата Ньютона: различие объясняется неоднородностью Земли.

Работы Якоби, который нашел фигуры равновесия, не являющиеся фигурами вращения и имеющие вид трехосного эллипсоида, явились подлинной научной сенсацией. Следующий шаг – работы Пуанкаре и Ляпунова, обнаруживших не эллипсоидальные (так называемые грушевидные) фигуры равновесия. Причем Пуанкаре считал, что эти фигуры устойчивы, а Ляпунов в конце концов доказал их неустойчивость. Впоследствии Джинс выдвинул гипотезу об образовании Луны путем отрыва от Земли, как результат эволюции неустойчивой грушевидной фигуры.

Все эти работы предполагали, что гравитирующая жидкость вращается как твердое тело. Рассмотрение фигур равновесия при наличии внутренних течений началось с работ Римана, Дирихле и Дедекинда. Вообще, надо сказать, что не было практически ни одного крупного математика XIX и самого начала XX века (помимо уже упомянутых можно назвать Гаусса, Даламбера, Лапласа, Лагранжа, Лежандра, Лиувилля, Чебышева, Картана, Шварцшильда, Вольтерра, Стеклова), который бы не внес своей лепты в проблему отыскания фигур равновесия вращающейся гравитирующей жидкости или в проблему устойчивости этих фигур, в силу безусловной важности соответствующих моделей в вопросах астрономии и космологии.

Вся эта история дает нам повод обсудить коренное различие во взглядах Пуанкаре и Ляпунова на вопросы математического моделирования. Пуанкаре, получивший свои результаты при помощи нестрогих рассуждений и часто простых аналогий, писал: «Можно сделать много возражений, но в механике нельзя требовать такой же строгости, как в чистом анализе». Совершенно другой точки зрения придерживался Ляпунов: «Непозволительно пользоваться сомнительными суждениями, коль скоро мы решаем определенную задачу, будь то задача механики или физики, – все равно, которая поставлена совершенно определенно с точки зрения математики. Она становится тогда задачей чистого анализа и должна трактоваться как таковая». При всем преклонении перед гением Пуанкаре мы в этом споре безоговорочно поддерживаем точку зрения Ляпунова.

Вспоминаются жаркие дискуссии по поводу математических моделей, в которых доказывалась неизбежность падения уровня Каспийского моря, и которые служили обоснованием проектов пере-

¹Ваша экспедиция в отдаленнейшие пустыни Севера лишь подтвердила то, что Ньютон знал, не выходя за двери своей комнаты.

броски стока северных и сибирских рек на юг.

В то время Сергей Петрович Новиков, с легким оттенком снисхождения к ученым, непричастным к математике, оправдывая соответствующие прогнозы, говорил: «Это инженеры, от них нельзя требовать строгости». В определенном смысле это верно. Совсем не обязательно, чтобы результат какой-либо конкретной науки был оформлен в виде точно доказанной математической теоремы. Но речь здесь вовсе не идет о математическом пуризме. Вопрос только в том, чтобы на результат исследования можно было положиться. Основное наше возражение против прогнозов падения уровня Каспийского моря было связано с неадекватностью модели. Причем мы вовсе не требовали учета всех факторов. Мы просто говорили, что основные причины изменения уровня Каспийского моря в модели отброшены. Мы, конечно, не претендовали на знание этих основных причин. Просто было ясно, что линейная модель и чисто статистические факторы явно недостаточны для объяснения реально наблюдаемого поведения. А тот факт, что модель, сформулированная как чисто математическая задача, исследована математически некорректно, был лишь добавочным соображением, демонстрирующим научную несостоятельность авторов: если они проявили безграмотность в математике, которой пожелали прикрыться для обоснования своих взглядов, то нет серьезных оснований доверять их чисто профессиональным соображениям. Тем более, что эти профессиональные соображения были не Бог весть какими сложными, и на них нетрудно было привести весомые контраргументы.

Заключение

Надо сказать, что обоснование инженерных, технологических и естественнонаучных положений с помощью математических моделей стало в последнее время модой, принимающей нередко почти болезненные формы. Дело в том, что математика обладает свойством облагораживать и даже освящать научные аргументы. Это свойство математики иногда, к сожалению, превращается в предмет спекуляций.

В нашей практике экспертизы экологически опасных хозяйственных мероприятий мы часто сталкивались с ситуациями, когда худосочные, псевдонаучные концепции маскировались под высокую науку с помощью математических моделей. При этом авторы старались, в соответствии с уровнем своей математической эрудиции, использовать как можно менее общепонятные математические конструкции. Их надежда состояла в том, что недостаточно компетентный в математике эксперт спасует перед «высокой наукой» и сочтет выдвигаемые положения обоснованными.

В связи с этим хотелось бы возразить против стремления выделить моделирование в самостоятельную научную дисциплину. Нам кажется, что это не привело бы к открытию каких-то новых научных положений, неизвестных ученым, реально работающим в той или иной области знаний, а имело бы своим следствием лишь процветание псевдоученых, слабо знакомых как с математикой, так и с конкретными объектами моделирования.

По-видимому, единственным действенным методом, который был изобретен человечеством для построения моделей, является следующий. Следует попросить аудиенцию у Ее Величества Королевы и Служанки Всех Наук, Математики, бить Ей челом от лица соответствующей конкретной Науки и смиренно просить Ее Величество о великодушной помощи: послужить делу создания новой важной и красивой Модели!

Мищенко Евгений Фролович (1922–2010), академик РАН, Математический институт им. В.А.Стеклова, лауреат Демидовской премии.

Мищенко Александр Сергеевич, профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А.Стеклова, д.ф.-м.н.

*Зеликин Михаил Ильич, член-корр. РАН, Математический институт им. В.А.Стеклова, заместитель заведующего кафедрой Общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.
E-mail: mzelikin@mtu-net.ru*

Улучшаемые пиксельные оценки мер плоских множеств как методический подход к введению понятия «площадь фигуры» в курсе геометрии. Часть 2

В. Ю. Бодряков, А. А. Быков

В первой части настоящей работы проведен анализ подходов учебников по геометрии различных авторских коллективов к реализации темы «Площадь фигуры» и сопряженных с ней, разработан подход к построению улучшаемых пиксельных оценок площадей плоских фигур. Показано, что статистическим методом может быть подтверждена справедливость ключевой для дальнейшего изложения формулы площади квадрата $S_{a \times a} = a^2, \forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0$.

Во второй части статьи, исходя единственно из установленной формулы площади квадрата с произвольной стороной, далее последовательно выводятся площади основных фигур школьной планиметрии с границей — ломаной (прямоугольник, треугольник, параллелограмм, трапеция). В качестве удобной в практической реализации лабораторной работы по математике, сопровождающей изучение геометрических свойств круга, предлагается измерение числа π путем улучшаемой оценки пиксельным методом площадей четвертей кругов различных радиусов.

Площади основных фигур школьной планиметрии с границей-ломаной (прямоугольник, треугольник, параллелограмм, трапеция)

На основании единственно установленной и статистически обоснованной в первой части работы [1] формулы площади квадрата

$$S_{a \times a} = a \times a, \tag{1}$$

$\forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0$, могут быть последовательно и без каких-либо дополнительных допущений выведены формулы площади основных фигур школьной планиметрии с границей — ломаной (прямоугольник, треугольник, параллелограмм, трапеция). Определения фигур даны во всех авторских курсах геометрии; можно принять любое из них, например, «по Атанасяну» [2].

Данные ниже выводы площадей фигур, в целом, известны и не претендуют на оригинальность; они приведены лишь для обеспечения единства и последовательности изложения.

Прямоугольник. Рассмотрим прямоугольник $S_{a \times b}$ со сторонами a и b ($\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$). Дополним прямоугольник $S_{a \times b}$ до квадрата $S_{(a+b) \times (a+b)}$ так, как показано на рис. 1.

Очевидно,

$$S_{(a+b) \times (a+b)} = (a + b)^2 = 2S_{a \times b} + a^2 + b^2, \tag{2}$$

откуда, после элементарных преобразований, для площади прямоугольника получаем соотношение

$$S_{a \times b} = a \cdot b. \tag{3}$$

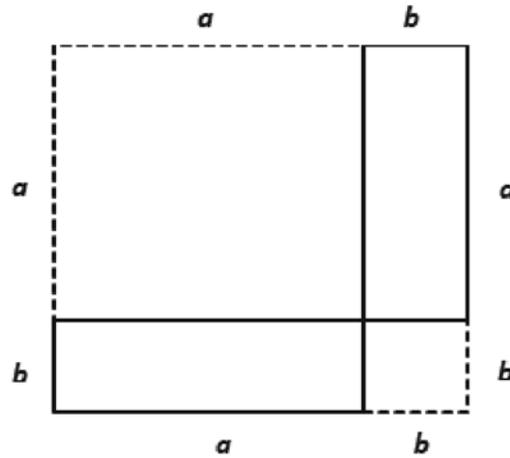


Рис. 1. Прямоугольник $S_{a \times b}$, дополненный до квадрата $S_{(a+b) \times (a+b)}$

Прямоугольный треугольник. Прямоугольный треугольник $S_{\Delta_{a \times b}}$ с катетами a и b очевидным образом может быть дополнен до прямоугольника $S_{a \times b}$ (рис. 2), поэтому

$$S_{\Delta_{a \times b}} = \frac{1}{2} a \cdot b. \quad (4)$$

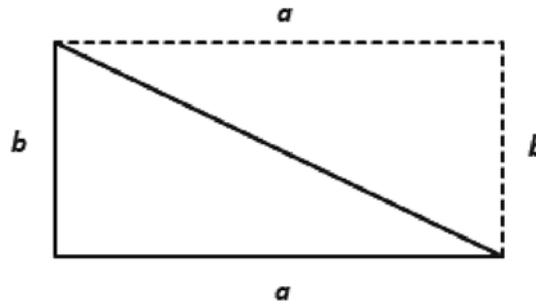


Рис. 2. Прямоугольный треугольник $S_{\Delta_{a \times b}}$, дополненный до прямоугольника $S_{a \times b}$.

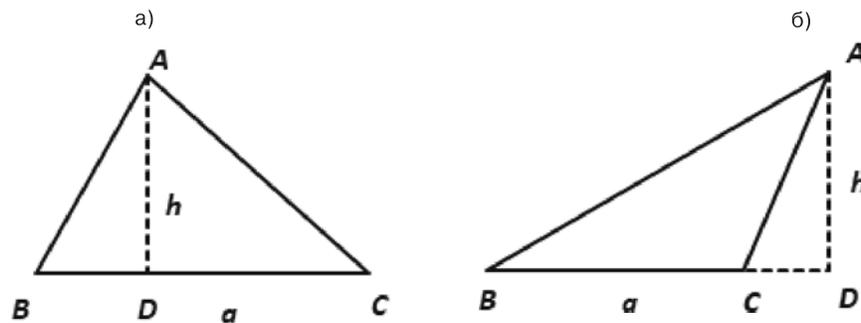


Рис. 3. Произвольный треугольник ABC , разбитый на два прямоугольных треугольника (3(а)) или дополненный до прямоугольного треугольника (3(б)).

Произвольный треугольник. Произвольный треугольник ABC может быть либо разбит на два прямоугольных треугольника (рис. 3(а)), либо дополнен до прямоугольного треугольника (рис. 3(б)) при опускании высоты h на основание a или его продолжение. В первом случае площадь ABC равна

$$S_{\Delta_{ABC}} = S_{\Delta_{ABD}} + S_{\Delta_{ADC}} = \frac{1}{2} BD \cdot AD + \frac{1}{2} CD \cdot AD = \frac{1}{2} (BD + CD) \cdot AD = \frac{1}{2} a \cdot h, \quad (5)$$

где $a = BC$, $h = AD$. Во втором случае

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}BD \cdot AD - \frac{1}{2}CD \cdot AD = \frac{1}{2}(BD - CD) \cdot AD = \frac{1}{2}a \cdot h. \quad (6)$$

Параллелограмм. Параллелограмм может быть разбит на два равновеликих прямоугольных треугольника и прямоугольник (рис. 4). Поэтому

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{AECF} + S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CDF} = CE \cdot AE + \frac{1}{2}BE \cdot AE + \frac{1}{2}DF \cdot AE = \\ &= (CE + \frac{1}{2}BE + \frac{1}{2}DF) \cdot AE = (CE + BE) \cdot AE = a \cdot h, \quad (7) \end{aligned}$$

где $a = BC = AD$, $h = AE$ и $BE = DF$.

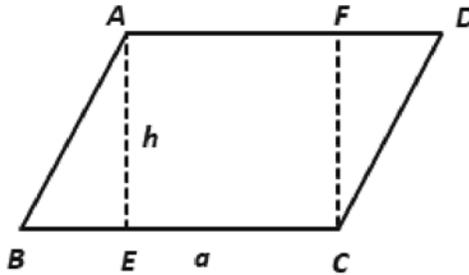


Рис. 4. Параллелограмм $ABCD$, разбитый на два равновеликих прямоугольных треугольника и прямоугольник.

Комментарий. Альтернативный вывод формулы для площади параллелограмма предоставляется читателю: дополнение параллелограмма двумя равновеликими прямоугольными треугольниками до прямоугольника.

Трапеция. Трапеция может быть разбита на два неравновеликих прямоугольных треугольника и прямоугольник (рис. 5):

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{AECF} + S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CDF} = CE \cdot AE + \frac{1}{2}BE \cdot AE + \frac{1}{2}DF \cdot AE = \\ &= \left[\frac{1}{2}(CE + AF) + \frac{1}{2}BE + \frac{1}{2}DF \right] \cdot AE = \left[\frac{1}{2}(BE + CE) + \frac{1}{2}(AF + FD) \right] \cdot AE = \frac{a+b}{2} \cdot h, \quad (8) \end{aligned}$$

где $a = BC = BE + CE$; $b = AD = AF + FD$, $h = AE$.

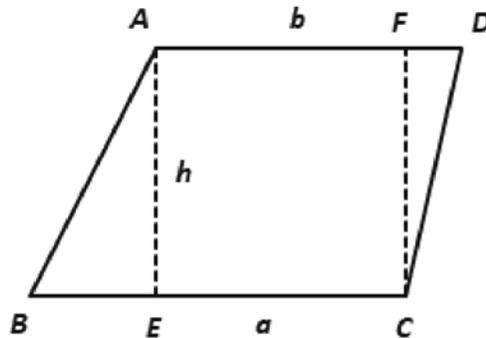


Рис. 5. Трапеция $ABCD$, разбитая на два неравновеликих прямоугольных треугольника и прямоугольник.

Комментарий. Альтернативный вывод формулы для площади трапеции предоставляется читателю: дополнение трапеции двумя неравновеликими прямоугольными треугольниками до прямоугольника.

Таким образом, установленной в первой части работы формулы площади квадрата оказалась достаточно для последовательного элементарного вывода формул площадей всех основных фигур школьной планиметрии с границей — ломаной (прямоугольник, треугольник с произвольными сторонами, параллелограмм, произвольная трапеция). Все рассмотренные фигуры являются выпуклыми, однако сам подход может быть легко распространен и на невыпуклые фигуры — после их разбиения на простые выпуклые фигуры (треугольники, прямоугольники и т.п.).

Площадь круга. Лабораторное измерение числа π пиксельным методом

Проиллюстрируем весьма многообещающие педагогические перспективы развитого подхода на примере пиксельной оценки площади круга [3]. Как показал наш опыт, такую оценку удобно проводить в форме лабораторной работы по математике (ЛРМ). Уровень сложности такой ЛРМ регулируется в соответствии с уровнем математической подготовленности обучающихся степенью самостоятельности выполнения ЛРМ и объемом и глубиной статистической обработки и интерпретации результатов. Уровень сложности ЛРМ может варьироваться от простого (пошаговое инструктивное выполнение ЛРМ) до исследовательского (работа с изменяющимся размером пиксельной сетки, с оценкой статистической погрешности результатов и др.).

Отметим, обобщая, что уровневые лабораторные работы по математике, включая обсуждаемую здесь, как вид учебных занятий, в течение ряда лет успешно используются авторами в педагогической практике и с энтузиазмом выполняются студентами [3–5]. Фактически, ЛРМ являются «натурным» воплощением идей когнитивно-деятельностного подхода [6] к обучению математике, ибо не только «включают» индивидуальную конкретно-практическую учебную деятельность обучающихся, но и, благодаря уровневому характеру и вариативности ЛРМ, естественно соотносятся с когнитивными предпочтениями и возможностями обучающихся. Так, обучающимся с ведущим вербально-лингвистическим интеллектом (по терминологии Говарда Гарднера, создателя теории множественного интеллекта, [7]) можно предложить подготовить небольшой рассказ (презентацию, видео-ролик) об истории числа π , но не настаивать на скрупулезной оценке ими погрешности его измерения. Тогда как обучающимся с ведущим логико-математическим интеллектом можно предложить выявить основные источники ошибок при определении числа π , предложить выдвинуть идеи по увеличению точности лабораторного определения числа π , и тут же коллективно протестировать эти предложения на практике. Возникающие при этом дискуссии в малых группах (ЛРМ, как правило, выполняются парными бригадами) и в классе в целом, способствуют активизации личностного и социального видов интеллекта обучающихся, и т.д. Организованно и динамично реализуемые в рамках одного учебного занятия различные виды учебных действий оставляют неизгладимые позитивные впечатления в памяти обучающихся.

Возвращаясь к обсуждаемой ЛРМ, заметим, что на практике бывает удобно оценивать пиксельную меру не целого круга, а его четвертой части (четверти) $\Phi_{1/4}$ с центром в начале координат, так, как показано на рис. 6. Четверть дуги окружности желаемого радиуса R (удобно выбрать $3 \leq R \leq 16$ см, с шагом 0,25 см (1/2 тетрадной клетки)) можно аккуратно построить и без циркуля, — с помощью только одной линейки. Здесь педагогу уместно предложить обучающимся самим придумать и реализовать алгоритм такого построения; пиксельный метод позволяет получать вполне надежные оценки площадей фигур и в отсутствие профессиональных чертежных инструментов. В качестве единичного пикселя примем одну тетрадную клетку, что удобно и всегда доступно в практике образовательного процесса.

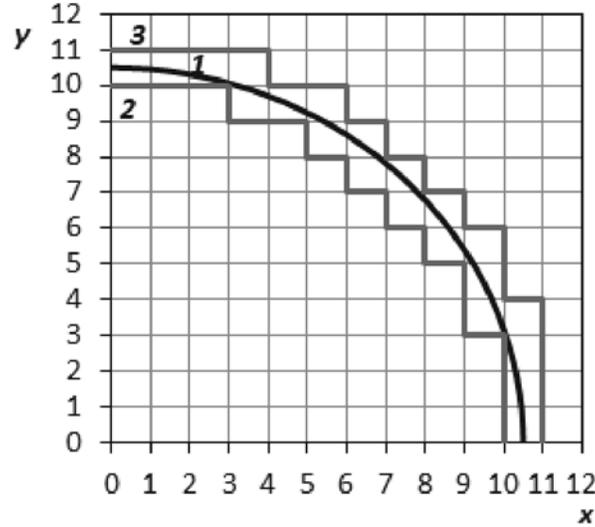


Рис. 6. К пиксельной оценке меры плоского множества. Кривая 1 — граница множества $\Phi_{1/4}$ (четверть круга радиусом $R = 10,5$ с центром в точке $O(0; 0)$); ломаная 2 — граница максимального вписанного целочисленного многоугольника для оценки внутренней меры множества $S_{1/4}$; ломаная 3 — граница минимального описанного целочисленного многоугольника для оценки внешней меры множества $S_{1/4}$.

С другой стороны, для учащихся, увлеченных программированием и ИТ-технологиями, задача осуществления пиксельной оценки мер плоских множеств представляет самостоятельный интерес с точки зрения алгоритмизации и автоматизации процесса измерения и подсчета. В частности, — алгоритмизация построения границы целочисленного максимального вписанного и минимального описанного многоугольников. Построение таких многоугольников является собой особый тип целочисленных оптимизационных задач. Так, вблизи круговой границы каждая целочисленная вершина A_i ломаной границы внутреннего максимального многоугольника $P_{1/4}^{\text{inn}}$ имеет (в пкс) координаты (x_i, y_i) такие, что для любого i : $\sqrt{x_i^2 + y_i^2} \leq R$, но уже $\sqrt{(x_i + 1)^2 + y_i^2} > R$ и/или $\sqrt{x_i^2 + (y_i + 1)^2} > R$. Наоборот, для минимального описанного многоугольника $P_{1/4}^{\text{out}}$ каждая целочисленная вершина B_j ломаной границы имеет (в пкс) координаты (x_j, y_j) такие, что $\forall j: \sqrt{x_j^2 + y_j^2} \geq R$, но уже $\sqrt{(x_j - 1)^2 + y_j^2} < R$ и/или $\sqrt{x_j^2 + (y_j - 1)^2} < R$. После того, как оптимальные целочисленные границы вписанного и описанного многоугольников установлены, легко послойно подсчитать количество ограниченных ими пикселей.

Так, для четверти круга радиусом $R = 10,5$ пкс на рис. 6, площадь внутреннего вписанного целочисленного многоугольника равна $S_{1/4}^{\text{inn}} = 77$ пкс². Площадь внешнего описанного многоугольника $S_{1/4}^{\text{out}} = 98$ пкс². Таким образом, для оценки площади $S_{1/4}$ фигуры $\Phi_{1/4}$ имеем двойное неравенство

$$77 < S_{1/4} < 98, \text{ пкс}^2, \quad (9)$$

или, в «физической» нотации, $S_{1/4}^{\text{exp}} = 87,5 \pm 10,5$ пкс².

С содержательной точки зрения, однако, предпочтительнее исследование представить не в виде оценки площади отдельного круга, а выполнить статистическое исследование зависимости площади круга от квадрата единственного размерного параметра — радиуса R . Гипотезу исследования при этом можно представить в виде формулы площади круга

$$S = \pi R^2, \quad (10)$$

так что для четверти круга имеем

$$S_{1/4} = \frac{1}{4}\pi R^2. \quad (11)$$

Получив пиксельные оценки мер $S_{1/4}$ для серии радиусов R_1, R_2, \dots, R_n (с определением погрешности оценки для каждого значения $S_{1/4}$) и построив корреляционную диаграмму зависимости $4S_{1/4}$ от R^2 , методом наименьших квадратов (МНК) проведем сквозь «облако» эмпирических точек прямую линейной регрессии, проходящую через начало координат. Линейная зависимость $4S_{1/4}$ от R^2 свидетельствует именно о квадратичной зависимости площади круга от радиуса. Кроме того, угловой коэффициент этой линейной зависимости теоретически должен быть равен числу $\pi = 3,1415926535\dots$, а отклонение наблюдаемого «экспериментального» значения π_{exp} от точного значения π можно, в простейшем случае, интерпретировать как погрешность метода. Более подготовленные обучающиеся могут оценить статистическую погрешность $\delta\pi$ углового коэффициента π_{exp} , без обращения к заранее известному точному значению π ; например, с помощью соответствующих инструментов статистической обработки данных в MS Excel.

Как показал обширный педагогический опыт авторов, описанный подход, реализуемый в форме лабораторных работ по математике или информатике, стимулируют познавательный интерес у обучающихся не только «естественнонаучного», но и «гуманитарного склада» [3–6, 8]. Отметим также тесную связь оценки мер множеств с геометрической вероятностью, — одним из наиболее увлекающих и, одновременно, трудноусваиваемых обучающимися разделов теории вероятностей [9]. Геометрическая вероятность — еще одна, пока недооцененная, тема с широким кругом педагогических возможностей по использованию внутри- и межпредметных связей различных разделов математики, направленных на повышение уровня мотивации обучающихся к усвоению фундаментальных основ классической геометрии.

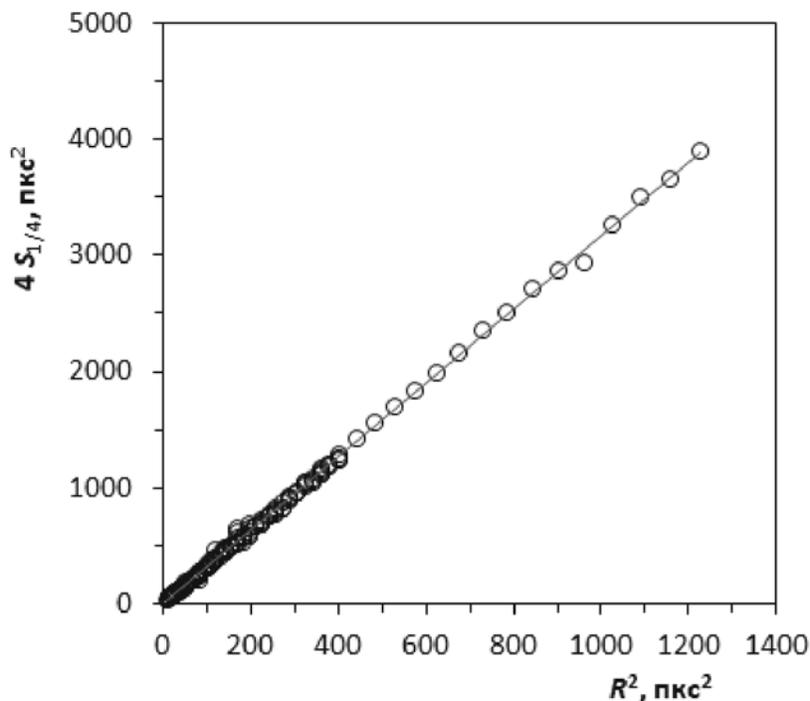


Рис. 7. Корреляционная зависимость площади круга $4S_{1/4}$ от квадрата радиуса R^2 .

В качестве примера на рис. 7 представлены обобщенные результаты проведенной нами в нескольких студенческих группах лабораторной работы по теме «Лабораторное измерение числа π пиксельным методом» (см. также Приложение). Статистическая обработка данных фактических измерений,

выполненных нашими студентами (156 наблюдений; 1 пкс = 1 тетрадная клетка; $3 \leq R \leq 35$ с шагом 0,5 пкс) дала $\pi_{\text{exp}} = 3,1457 \pm 0,0059$ с коэффициентом корреляции $r = 0,9995$. Таким образом, данные измерений убедительно подтверждают, во-первых, справедливость формулы площади круга; во-вторых, возможность получения с применением столь нехитрого «лабораторного оборудования» вполне адекватной оценки одной из фундаментальных мировых констант — числа π .

В заключение работы в целом отметим следующее:

- Как показал анализ подходов учебников по геометрии различных авторских коллективов к определению понятия «Площадь фигуры» и сопряженных с ним понятий, методика преподавания этого важного, если не сказать смыслообразующего, раздела регулярного курса геометрии нуждается в пересмотре и современном обновлении.

- Построен и статистически обоснован последовательный подход к построению улучшаемых пиксельных оценок мер плоских множеств (площадей фигур); подход призван служить методической основой к альтернативному введению понятия «площадь фигуры» в курсе геометрии.

- Развитый подход может быть реализован как в «ручном» режиме (на клетчатой бумаге), так и с помощью соответствующих цифровых компьютерных процедур (на экране монитора). Подход прост в объяснении и применении, и с успехом используется авторами при обучении современных «ИТ-ориентированных» школьников и студентов в рамках согласованных курсов математики и информатики.

- На основании установленной и статистически обоснованной формулы площади квадрата $S_{a \times a} = a^2$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, могут быть последовательно и без каких-либо дополнительных допущений дедуктивно получены формулы площадей основных фигур школьной планиметрии с границей — ломаной (прямоугольник, треугольник, параллелограмм, трапеция).

- На примере круга и фигуры с границей — эллипсом показано, что подход может быть с успехом, и без каких-либо дополнительных оговорок, применен к определению площадей фигур с криволинейной границей.

- Педагогический эксперимент, проведенный авторами, показал, что качество усвоения темы «Площадь фигуры» заметно улучшается при использовании в качестве элемента учебного процесса лабораторных работ по математике, например, по лабораторному измерению числа π пиксельным методом.

- Подход, основанный на пиксельном определении площадей фигур на плоскости может служить продуктивной основой для самостоятельных исследовательских проектов студентов и школьников, в частности, для определения одной из мировых фундаментальных постоянных — числа π .

- Развитый подход может быть применен в качестве элемента курса «Теоретические основы школьного курса математики», призванного познакомить будущих учителей математики с фундаментальными основаниями законов элементарной математики, которой выпускникам педвуза предстоит обучать своих школьников.

- Наконец, развитый подход, успешно апробированный авторами при обучении студентов-математиков педагогического университета, может быть использован ими в своей будущей профессиональной деятельности, по меньшей мере, в качестве современной цифровой альтернативы традиционным подходам к введению понятия «Площадь фигуры» в школьном курсе геометрии.

Приложение. Пример отчета по лабораторной работе по математике

Тема: «Лабораторное измерение числа π пиксельным методом».

Цель работы: Освоение методики измерения площадей плоских фигур пиксельным методом на примере площади круга (с вычислением числа π).

Оборудование: бумага в клетку; линейка; [факультативно] циркуль; [факультативно] персональный компьютер (мобильное или др. устройство) с программным обеспечением, позволяющим выполнять статистическую обработку данных, например, MS Excel.

Гипотеза: Площадь круга выражается формулой $S = \pi R^2$.

Теоретическое обоснование: Обучающиеся дают теоретическое обоснование лабораторной работы, приводят формулы для расчетов, описывают алгоритм пиксельной оценки четвертой части площади круга $S_{1/4}$, построения корреляционной зависимости $4 S_{1/4}$ от квадрата радиуса R^2 , статистической обработки результатов измерений с определением числа π и оценкой погрешности.

Результаты измерений и расчетов: экспериментальные результаты одной из ЛРМ в качестве примера представлены в таблице П.1 и на рис. П.1.

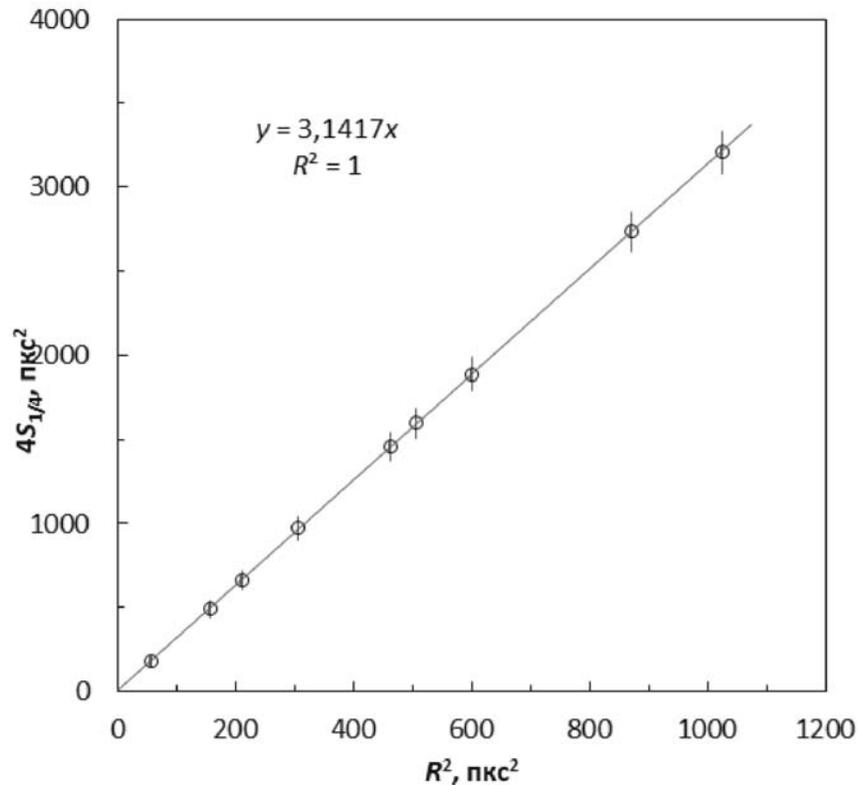


Рис. П.1

Таблица П.1 Пиксельные оценки площадей четвертей кругов различных радиусов R ; размер пикселя $a_1 = 1 \text{ пкс} = 0,5 \text{ см} = 1 \text{ клетка}$.

R , пкс	R^2 , пкс ²	$S_{1/4}^{\text{inn}}$, пкс ²	$S_{1/4}^{\text{out}}$, пкс ²	$\langle S_{1/4} \rangle$, пкс ²	$\delta \langle S_{1/4} \rangle$, пкс ²	$(\pi_{\text{exp}}/\pi - 1)$, %
7,5	56,25	37	52	44,5	7,5	0,727
12,5	156,25	110	135	122,5	12,5	-0,178
14,5	210,25	152	181	166,5	14,5	0,830
17,5	306,25	226	261	243,5	17,5	1,236
21,5	462,25	343	386	364,5	21,5	0,399
22,5	506,25	377	422	399,5	22,5	0,476
24,5	600,25	447	496	471,5	24,5	0,014
29,5	870,25	654	713	683,5	29,5	0,001
32	1024	770	833	801,5	31,5	-0,342

Статистическая обработка эмпирических данных табл. П.1 с помощью инструмента статистической обработки данных MS Excel (Данные — Анализ данных — Регрессия) дала $\pi_{\text{exp}} = 3,14165 \pm 0,00415$, или $\delta \pi_{\text{exp}}/\pi_{\text{exp}} = 0,132\%$. Ошибка же по отношению к точному значению числа π почти на два порядка меньше: $(\pi_{\text{exp}}/\pi - 1) \cdot 100\% = 0,00189\%$!

Выводы: В ходе выполнения лабораторной работы по математике освоена методика измерения площадей плоских фигур пиксельным методом на примере площади круга. Статистически подтверждена гипотеза о том, что площадь круга выражается формулой $S = \pi R^2$. Получено экспериментальное значение числа $\pi_{\text{exp}} = 3,14165 \pm 0,00415$; погрешность можно считать малой с учетом простоты используемого оборудования.

Литература

1. Бодряков В.Ю., Быков А.А. Улучшаемые пиксельные оценки мер плоских множеств как методический подход к введению понятия «Площадь фигуры» в курсе геометрии. Часть 1 // Математическое образование. № 4(92). - 2019. - С. 17-29.
2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г., Юдина И.И. Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений. 20-е изд. - М.: Просвещение, 2010. - 384 с.
3. Бодряков В.Ю., Быков А.А. Улучшаемые пиксельные ИТ-оценки мер плоских множеств. С. 158–167 / Состояние и перспективы развития ИТ-образования: сб. докл. и науч. ст. Всерос. науч.-практ. конф. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2019. - 468 с.
4. Аксенова О.В., Бодряков В.Ю. Лабораторные работы по математике с применением ИКТ как инструмент формирования исследовательских умений студентов педагогического вуза. С. 175–181 / В сб. докладов и научных статей Всероссийской научно-практической конференции «Состояние и перспективы развития ИТ-образования», посвященной 50-летию Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова (Чебоксары, 16–18 ноября 2017 г.). Чебоксары: Изд-во Чувашского гос. ун-та, 2018. - 520 с.
5. Аксенова О.В., Бодряков В.Ю. Натурный эксперимент с применением средств информационно-коммуникационных технологий и мобильных устройств как инструмент формирования исследовательских умений студентов // Вестник РУДН. Серия: Информатизация образования. - 2018. - Т. 15. - № 4. - С. 363–372.
6. Бодряков В.Ю. Когнитивно-деятельностный подход в обучении математике. С. 101–108 / Когнитивные исследования в образовании [Электронный ресурс]: сб. науч. ст. / Урал. гос. пед. ун-т; под науч. ред. С. Л. Фоменко; общ. ред. Н. Е. Поповой. - Электрон. дан. - Екатеринбург: [б. и.], 2019. - 435 с. - 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
7. Гарднер Г. Структура разума: теория множественного интеллекта: Пер. с англ. - М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2007. - 512 с.
8. Кузовкова А.А., Мамалыга Р.Ф., Бодряков В.Ю. Формирование познавательного интереса к математике у обучающихся в классах гуманитарно-эстетической направленности // Математика в школе. - 2018. - № 2. - С. 35–42.
9. Бодряков В.Ю., Фомина Н.Г. Геометрическая вероятность как эффективный менеджер межпредметных связей школьного курса математики // Математика в школе. - 2010. - № 8. - С. 42–51.

*Бодряков Владимир Юрьевич,
заведующий кафедрой высшей математики
и методики обучения математике
ФГБОУ ВО «Уральский государственный педагогический
университет», г. Екатеринбург,
доктор физ.-мат наук, доцент.
E-mail: Vodryakov_VYu@e1.ru*

*Быков Антон Александрович,
преподаватель математики, ГАПОУ СО
«Екатеринбургский автодорожный колледж»,
г. Екатеринбург.
E-mail: bykov_antony@mail.ru*

О задаче «Рыцари короля Артура»

В. К. Гаврилов

Приведены решения задачи о выборе в комбинаторике объектов-«не соседей». Рассмотрены случаи расстановки объектов на окружности и на прямой линии. Отмечена необратимость расстановки и выбора однородных объектов. Предложен способ выбора «не соседей», основанный на трактовке понятия «не соседи» — это объекты, разделённые общим «соседом». Предложены алгоритмы выбора «не соседей» при чётном и нечётном числах объектов и способ выбора «через одного».

«... и случай-Бог, ...».
(по А.С. Пушкин.)

Одной из задач комбинаторики с ограничением на выбор объектов является задача «Рыцари короля Артура», например в таком варианте.

«Вокруг костра сидят 12 разбойников. Каждый из них смертельно ненавидит двух ближайших соседей. С целью спрятать награбленное необходимо выделить 5 разбойников. Сколькими способами атаман может назначить пятерых так, чтобы между ними не было распрей?» [1, с. 32].

Другая задача с аналогичным ограничением на выбор объектов.

«На книжной полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом?» [2, с. 66].

Известное решение этих задач основано на решении задачи о расстановке m нулей и k единиц на прямой так, «чтобы никакие две единицы не стояли рядом», т.е. после расстановки нули — «соседи», единицы — «не соседи». Варианта V_n^k решения этой задачи для n объектов определена числом сочетаний [2, с. 66]:

$$n = m + k; \quad V_n^k = C_{m+1}^k. \quad (1)$$

Далее по умолчанию предполагается обратимость расстановки и выбора объектов, т.е. способов выбрать k «не соседей» из n объектов столько же, сколько и способов их расставить. На этом основании по (1) в задаче о книгах имеем [2, с. 66]:

$$n = 12; \quad k = 5; \quad m = 12 - 5 = 7; \quad V_{12}^5 = C_{7+1}^5 = C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Используя решение задачи о книгах в задаче о выборе разбойников, получим [2, с. 68]:

$$V_n^k = C_{n-k-1}^{k-1} + C_{n-k}^k = \frac{n}{n-k} \cdot C_{n-k}^k. \quad (2)$$

По (2) в задаче о разбойниках имеем:

$$n = 12; \quad k = 5; \quad V_{12}^5 = \frac{12}{12-5} \cdot C_{12-5}^5 = \frac{12}{7} \cdot \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 36.$$

В отличие от задачи о расстановке нулей и единиц, — неоднородных объектов, — в задаче о разбойниках и в задаче о книгах рассматривают выбор однородных объектов, для которых расстановка и выбор не обратимы. По этой причине применение (1) и (2) в задачах о выборе объектов представляется некорректным.

В качестве иллюстрации необратимости расстановки и выбора однородных объектов рассмотрим расширенный вариант задачи о разбойниках.

Вокруг костра сидят 8 разбойников, рядом расположились 4 разбойника из кадрового резерва. Каждый из разбойников смертельно ненавидит двух ближайших соседей. Для делёжки награбленного атаману необходимо создать комиссию из разбойников вокруг костра, но нет кворума 12 разбойников. 1) Сколько вариантов *расстановки* вокруг костра 4-х разбойников из кадрового резерва имеет атаман так, чтобы эти разбойники не оказались рядом. 2) Сколько вариантов *выбора* комиссии из 5-и разбойников вокруг костра имеет атаман так, чтобы эти разбойники не сидели рядом.

Очевидно, что задачи 1) и 2) независимы, т.е. необратимы.

Отметим, что аналогом необратимости расстановки и выбора объектов в комбинаторике является необратимость процессов, например тепловых, в статистической физике [3, с. 465].

Таким образом, необходим поиск независимого решения задачи о выборе объектов-«не соседей».

В задаче о разбойниках ограничением на выбор объектов является запрет выбора «двух ближайших соседей».

Возможна следующая трактовка понятий «соседи», «не соседи».

- 1) Объекты, имеющие общую границу раздела, — соседи.
- 2) Объекты, не имеющие общей границы раздела, — не соседи.
- 3) Объекты, разделённые общим соседом, — не соседи.

Очевидно, что «два ближайших соседа» — это не соседи по трактовке 3).

Получим решение задачи о разбойниках и задачи о книгах по трактовке 3) понятия «не соседи». Частично задача о разбойниках по трактовке 3) решена в работе [4].

Трактовка 3) обуславливает появление в задаче о разбойниках возможности разделить объекты на контуре размещения на два класса, условно, — «соседи» (нули), «несоседи» (единицы), — путём чередования класса объекта через один объект. В соответствии с 3) объектов в классах имеется поровну. В частности, при чётном числе разбойников, половина — «соседи», а половина — «несоседи»; при нечётном, — каждый является и «соседом» и «несоседом» одновременно.

Таким образом, при чётном числе объектов имеется возможность разделить объекты в задаче на два класса, при нечётном числе такой возможности нет.

Rem 1: По определению [5]: «Контур — это замкнутая в пространстве линия, при направленном обходе которой значения переменной величины на линии повторяются». Согласно такому определению в задаче о разбойниках класс объекта повторяется в случае чётного числа разбойников при обходе окружности один раз, в случае нечётного, — два раза.

В случае чётного числа разбойников объекты одного класса разделены общим соседом, поэтому выбор объектов в группу выполняют или из объектов «соседи», или из объектов «несоседи». По правилу суммы, в обозначениях числа «соседей», — a , «несоседей», — b , получим:

$$n = 2 \cdot m; \quad a = n/2; \quad b = n/2; \quad V_n^k = C_a^k + C_b^k = 2 \cdot C_a^k. \quad (3)$$

По (3) в задаче о разбойниках имеем:

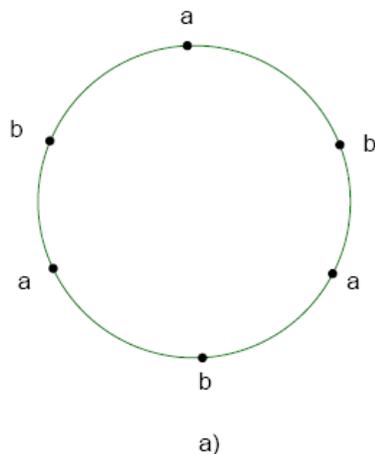
$$n = 12; \quad k = 5; \quad a = 6; \quad b = 6; \quad V_{12}^5 = C_6^5 + C_6^5 = 6 + 6 = 12.$$

Отличие полученного результата от известного решения ($V_{12}^5 = 36$) объясняется выбором «не соседей» по трактовке 3).

Геометрические модели задачи о разбойниках и задачи о книгах показаны на рис. 1.

Постановка задач: даны n точек, размещённых: на окружности, рис. 1 а), на прямой, рис. 1 б); на окружности: точки — разбойники, дуги между точками — границы раздела; на прямой: точки — границы раздела, отрезки прямой между точками — книги.

Определить число вариантов выбора: на окружности, — k точек, не имеющих ближайших соседей; на прямой, — k отрезков между соседними точками, не имеющих общих концов.



О задаче "Рышари короля Артура":

a —"соседи"; b —"несоседи";

$$n = 2 \cdot m; \quad a = n/2; \quad b = n/2; \quad V_n^k = C_a^k + C_b^k = 2 \cdot C_a^k;$$

$$n = 2 \cdot m + 1; \quad c = (n-1)/2; \quad d = (n-3)/2; \quad V_n^k = 2 \cdot (C_c^k + C_d^{k-1}).$$

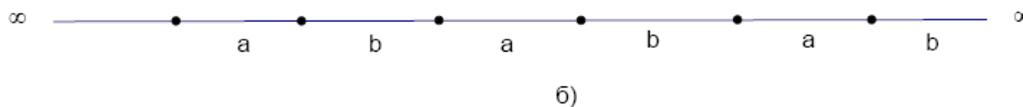


Рис. 1

Рассматривая прямую в качестве части окружности бесконечного радиуса, для обеих задач получим решение (3). При этом отрезки прямой из бесконечности к началу размещения точек и из конца размещения в бесконечность считаем одним отрезком, замыкающим окружность бесконечного радиуса. Тогда по (3) в задаче о книгах имеем:

$$n = 12; \quad k = 5; \quad a = 6; \quad b = 6; \quad V_{12}^5 = C_6^5 + C_6^5 = 6 + 6 = 12.$$

Отличие полученного результата от известного решения ($V_{12}^5 = 56$) объясняется объединением конечных участков прямой в один отрезок и выбором «не соседей» по трактовке 3).

Отметим, что рассмотренные задачи традиционно решают в последовательности от объектов на прямой к объектам на окружности. Последовательность предлагаемого решения, — от объектов на окружности к объектам на прямой. В частности, решение задачи о расстановке на окружности m нулей и k единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом, в отличие от (1), принимает вид:

$$n = m + k; \quad V_n^k = C_m^k. \quad (4)$$

В случае нечётного числа разбойников решение задачи сведём к (3) по алгоритму, приведённому в [2, с. 67] для случаев не участия c и участия d одного из разбойников в группе. Следуя этому алгоритму, для нечётного числа n разбойников при выборе k разбойников в группу получим:

$$n = 2 \cdot m + 1; \quad c = (n-1)/2; \quad d = (n-3)/2; \quad V_n^k = 2 \cdot (C_c^k + C_d^{k-1}). \quad (5)$$

Трактовка 3) допускает применение упрощённого алгоритма выбора k разбойников в группу «через одного»:

$$i = 1, 2, \dots, k-1; \quad a_{i+1} = a_i + 2. \quad (6)$$

Для выбора в группу первого участника a_1 имеем n объектов. Тогда для выбора группы из k участников при $k < n/2$ имеем n вариантов, при $k = n/2$ по (3) имеем два варианта.

Упрощённый алгоритм выбора имеет один способ реализации: атаман выбирает первого участника группы и через одного назначает остальных участников, однако сделанный выбор будет одним из вариантов выбора по (3), — в случае чётного числа объектов, или, — по (5), в случае нечётного числа объектов.

Литература

1. Лютикас В.С. Факультативный курс по математике: Теория вероятностей. - М.: Просвещение, 1990.
2. Виленкин Н.Я. и др. Комбинаторика. - М.: «ФИМА» МЦНМО, 2006.
3. БЭС Физика / Гл. ред. А.М. Прохоров. - М.: «Большая Российская энциклопедия», 1999.
4. Гаврилов В.К. О задаче «Рыцари короля Артура». Сборник трудов конференции «Математическое образование в цифровом обществе», изд-во: Московский городской педагогический университет (Самарское отделение). - 2019. - с. 98-99.
5. Гаврилов В.К. Подобие треугольников и секущих в теореме Менелая // Информационные технологии в математике и математическом образовании; Материалы VI Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. Электронное издание, г. Красноярск, 18–19 ноября 2017 г. [Электронный ресурс] URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=30715436>.

*Гаврилов Владимир Константинович,
кандидат физ.-мат. наук,
Нижний Новгород.*

E-mail: gavrilov1009@mail.ru

О нетривиальных случаях пересечения диагоналей правильного многоугольника на его оси симметрии

А. М. Иглицкий

В статье рассмотрены случаи нетривиальных пересечений нескольких диагоналей правильного многоугольника с четным числом сторон в точке, лежащей на оси симметрии многоугольника.

Введение. Данная работа является продолжением работы [2] или, если угодно, ее частным случаем. Однако настоящая работа не является теоретической, а описывает некоторый численный эксперимент. Здесь не сделан переход к точным вычислительным методам на основе комплексных полиномов с целыми коэффициентами, а все изложение основано на вычислениях с действительными числами с максимально возможной степенью точности (80-битный формат представления действительных чисел). На опыте предыдущей работы установлено, что полученные таким образом результаты вполне достоверны и неизменно могут быть строго доказаны (правда, совершенно другими методами и с бóльшим трудом). Строгие доказательства, по смыслу ничего не меняющие, настолько бы увеличили объем работы, что публикация ее стала бы делом неопределенного будущего.

Пересечения симметричных диагоналей. В любом правильном N -угольнике при четном N имеются очевидные случаи пересечения трех диагоналей:

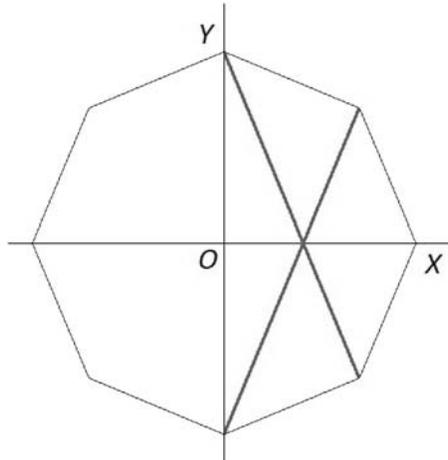


Рис. 1.

Одна из диагоналей является диаметром описанной окружности (радиуса 1), а две другие расположены симметрично относительно первой.

Пересечения несимметричных диагоналей. Однако возникает вопрос: могут ли «несимметричные» диагонали иметь точку пересечения, находящуюся на оси симметрии?

Задачи, связанные с 18-угольником, рассмотрены в статье В. Прасолова [1]. Кроме того, известны также различные задачи для 24- и 30-угольника. Фактически при этом рассматриваются и случаи «несимметричного пересечения», тем не менее этот любопытный феномен отдельно не исследуется. Если мы хотим, чтобы в точке пересечения диагоналей координата y была равна 0, то, согласно [2], для этого требуется, чтобы

$$\cos((n_1 - k_1)V) \cos((n_2 + k_2)V) - \cos((n_1 + k_1)V) \cos((n_2 - k_2)V) = 0,$$

где $V = \pi/N$, а n_1, k_1, n_2, k_2 — номера вершин многоугольника, в которых начинаются и кончаются диагонали.

Данная формула включает в себя 5 независимых параметров, поэтому непосредственный ее анализ затруднителен. Кроме того, «очевидные» симметричные случаи также удовлетворяют этой формуле.

Наиболее простым «экспериментальным» способом решения задачи является полный перебор с фильтрацией «очевидных» случаев. Численный эксперимент показывает, что решения задачи существуют для 18-угольника, а также для любого другого многоугольника с большим числом углов, если количество углов кратно 6.

Для численного решения данной задачи (что, разумеется, не заменяет строгого доказательства, но может служить некоторым наводящим соображением) была разработана специальная программа, которая последовательно производит анализ всех правильных многоугольников, начиная с 7-угольника, и выводит нетривиальные результаты. Оказывается, что такие результаты имеют место для 18-, 24-, 30-угольника и т. д. (с шагом 6). С ростом количества углов результаты становятся совершенно необозримыми, поэтому в данной статье рассмотрены только 3 случая. Но и этого достаточно, чтобы заметить некоторую общность всех решений, что может способствовать нахождению строгого доказательства. Все вычисления произведены с 80-битными данными, что позволяет не говорить о «случайных совпадениях». Кроме того, геометрическая интерпретация результатов также полностью согласуется с вычисленными результатами.

18-угольник. С отбрасыванием очевидных повторов результаты для 18-угольника отражены в следующей таблице. Координата y «тройного пересечения», согласно вышесказанному, всегда равна 0, координата же x может принимать разные значения. Для 18-угольника оказываются возможными 4 различных случая, которые обозначены буквами $A - D$:

Случай	Координата x	n_1	k_1	n_2	k_2
A	1,879385241571816770	1	6	2	4
B	0,652703644666139302	1	13	2	15
C	0,532088886237956071	1	12	2	14
D	0,347296355333860698	1	11	3	14

Можно отметить, что аналитическое описание в равной мере относится как к «внешнему» пересечению (продолжений диагоналей), так и к внутреннему (рис. 2–5).

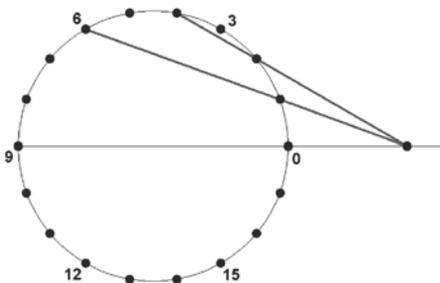


Рис. 2. Случай A

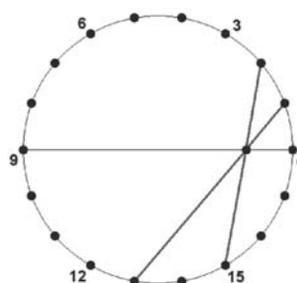


Рис. 3. Случай B

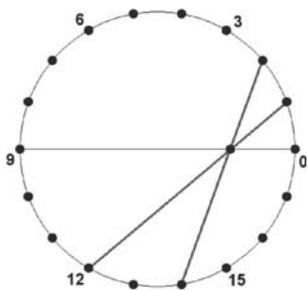


Рис. 4. Случай C

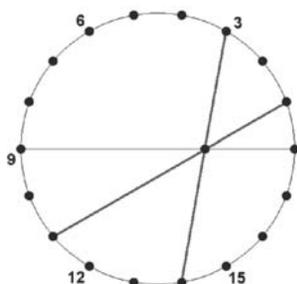
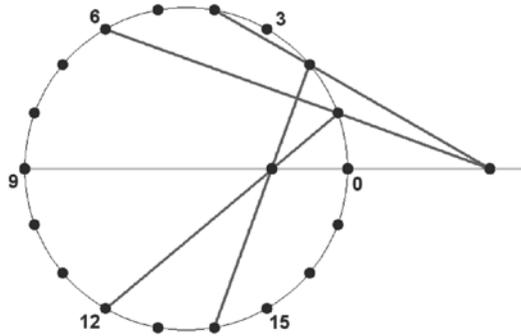


Рис. 5. Случай D

Кроме того, в данном случае наблюдается некоторая двойственность. Тот факт, что $0,34729635533860698 \approx 1/1,879385241571816770$, (о точных доказательствах снова см. [2]), находит себе геометрическую интерпретацию (точки пересечения случаев A и C оказываются инверсными относительно окружности), рис. 6.

Рис. 6. Случай $A + C$

Вершины 1 и 2 используются в обоих случаях, а вершины 4 и 6 симметричны вершинам 14 и 12.

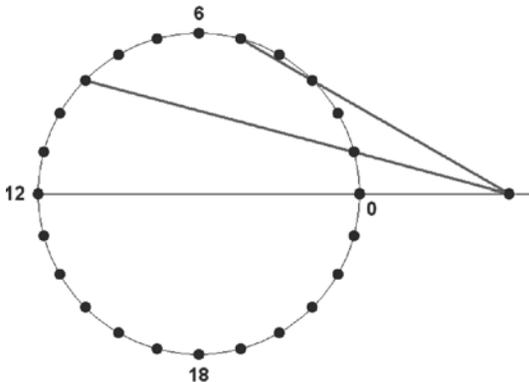
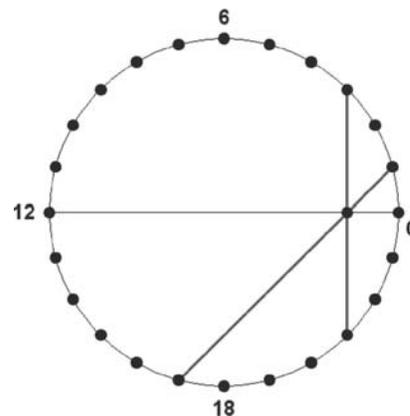
Численный эксперимент может также обнаружить явные выражения для координат четырех возможных точек пересечения. В пределах точности вычислений справедливы следующие утверждения:

$$A : x = 2 \cos(\pi/9), \quad B : x = 1/2 \cos(2\pi/9), \quad C : x = 2 \cos(2\pi/9) - 1, \quad D : x = 2 \cos(4\pi/9).$$

24-угольник. В случае 24-угольника картина получается аналогичная:

Случай	Координата x	n_1	k_1	n_2	k_2
A	1,931851652578136570	1	9	3	5
B	0,707106781186547524	1	17	3	21
C	0,517638090205041525	1	15	3	19

И здесь, ввиду приближенного равенства $0,517638090205041525 \approx 1/1,931851652578136570$ наблюдается двойственность. Вершины 1 и 3 общие, а вершины 5 и 9 симметричны вершинам 17 и 15.

Рис. 7. Случай A Рис. 8. Случай B

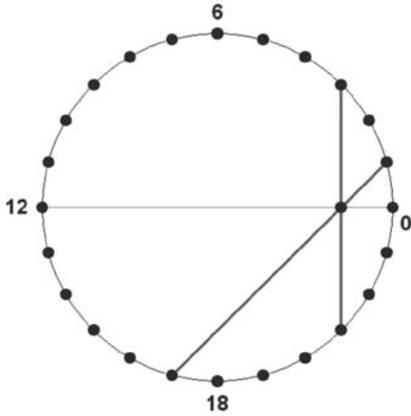


Рис. 9. Случай C

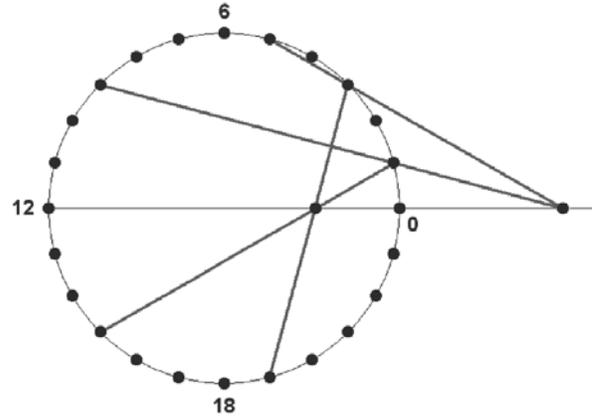


Рис. 10. Случаи A + C

Численный эксперимент обнаруживает такие выражения:

$$A: x = 2 \cos(\pi/12), \quad B: x = 1/(2 \cos(3\pi/12)), \quad C: x = 2 \cos(5\pi/12).$$

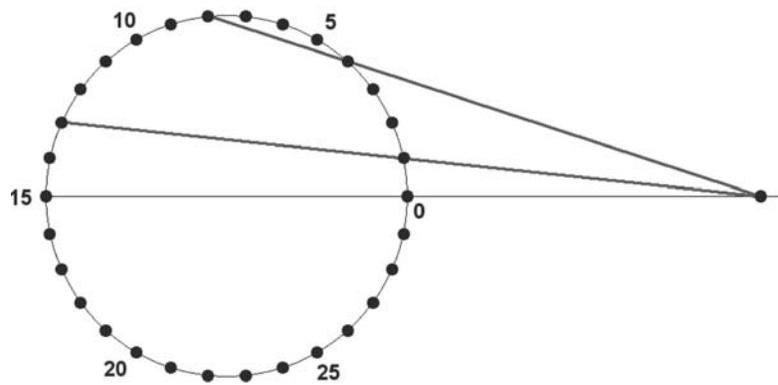
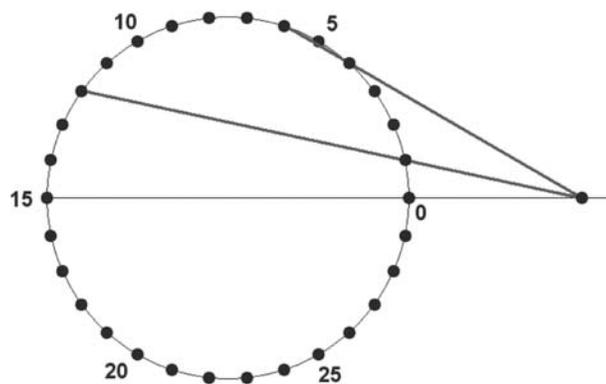
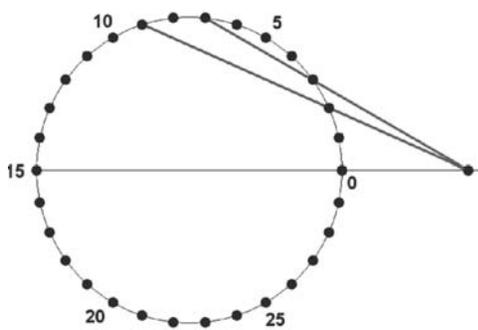
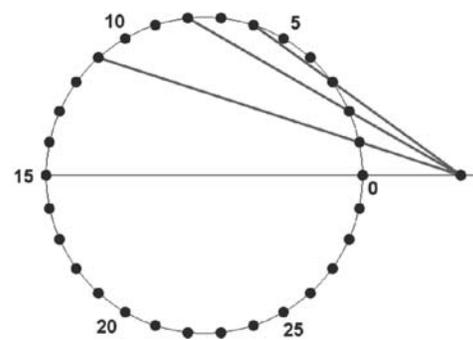
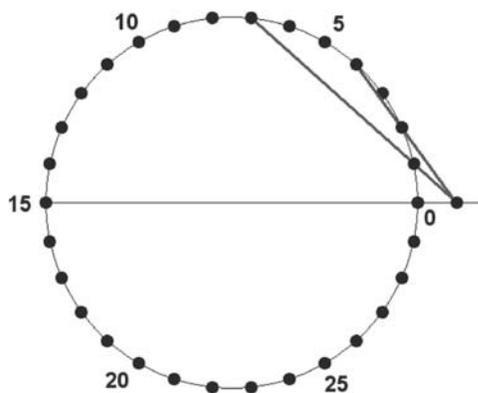
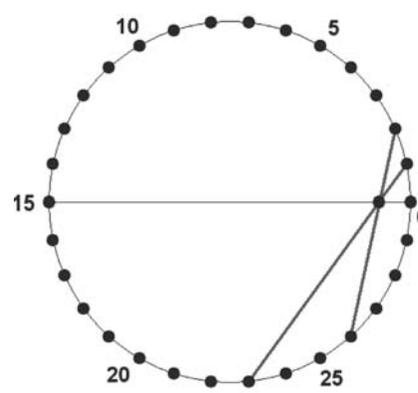
30-угольник. Случай 30-угольника рассматривается так же, но он значительно больше по объему, и «наглядность», которая была в случаях 18- и 24-угольника, совершенно утрачивается. Подходящих точек оказывается 12, притом 5 из них - вне 30-угольника:

Случай	Координата x	n_1	k_1	n_2	k_2
<i>A</i>	2,956295201467611280	1	13	4	8
<i>B</i>	1,956295201467611280	1	12	4	6
<i>C</i>	1,827090915285201790	2	9	3	7
<i>D1</i>	1,618033988749894850	1	11	2	8
<i>D2</i>	1,618033988749894850	1	11	3	6
<i>E</i>	1,209056926535306940	1	7	2	4
<i>F</i>	0,827090915285201791	1	23	2	26
<i>G</i>	0,747238274932304333	1	21	3	26
<i>H1</i>	0,618033988749894850	1	19	2	22
<i>H2</i>	0,618033988749894850	1	19	3	24
<i>J</i>	0,547318139253023370	2	21	3	23
<i>K</i>	0,511170297432514637	1	18	4	24
<i>L</i>	0,338261212717716428	1	17	4	22
<i>M</i>	0,209056926535306943	2	18	6	23

И здесь в пределах точности вычислений имеем:

$$\begin{aligned}
 A: x &= 2 \cos(\pi/15) + 1, & B: x &= 2 \cos(\pi/15), & C: x &= 2 \cos(2\pi/15), & D: x &= 2 \cos(3\pi/15), \\
 E: x &= 2 \cos(7\pi/15) + 1, & F: x &= 2 \cos(2\pi/15) - 1, & G: x &= 1/(2 \cos(4\pi/15)), & H: x &= 2 \cos(3\pi/15) - 1, \\
 J: x &= 1/(2 \cos(2\pi/15)), & K: x &= 1/(2 \cos(\pi/15)), & L: x &= 2 \cos(4\pi/15) - 1, & M: x &= 2 \cos(7\pi/15).
 \end{aligned}$$

Далее приведены 12 рисунков, соответствующих найденным точкам пересечения. Особенно следует отметить тройные пересечения как внутри, так и вне многоугольника в точках «золотого сечения».

Рис. 11. Случай *A*Рис. 12. Случай *B*Рис. 13. Случай *C*Рис. 14. Случай *D1 + D2*Рис. 15. Случай *E*Рис. 16. Случай *F*

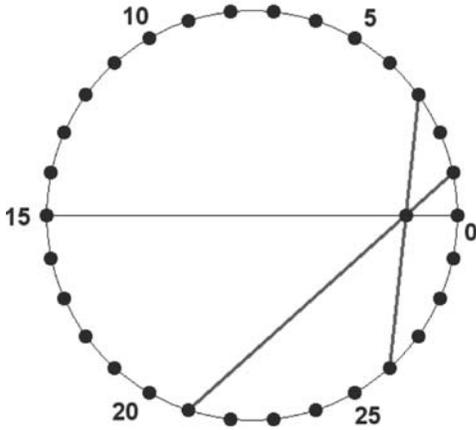


Рис. 17. Случай *G*

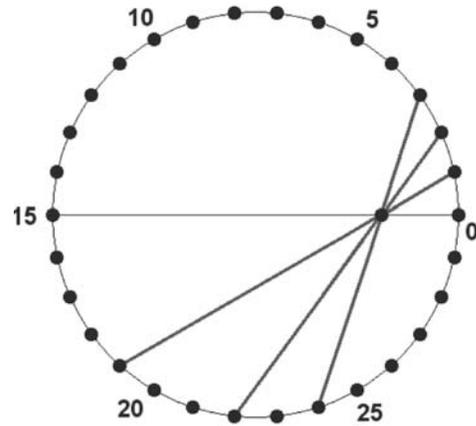


Рис. 18. Случай $H1 + H2$

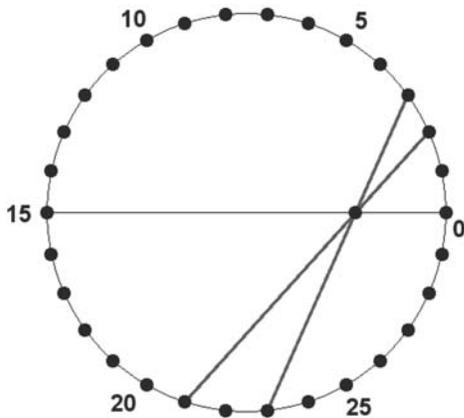


Рис. 19. Случай *J*

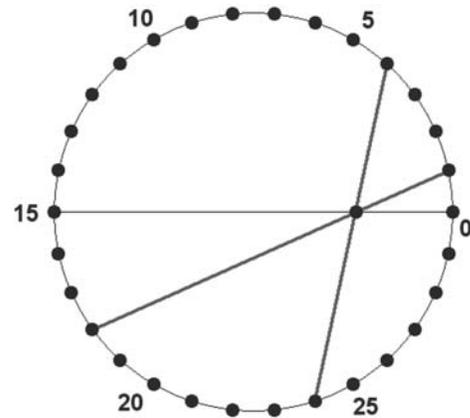


Рис. 20. Случай *K*

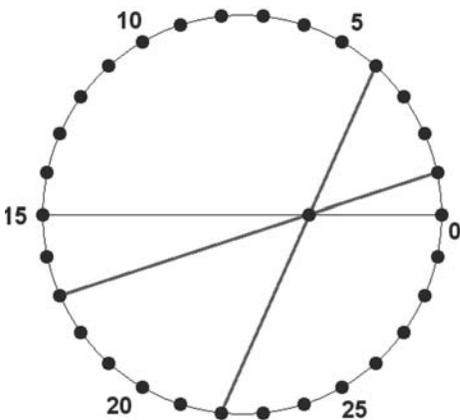


Рис. 21. Случай *L*

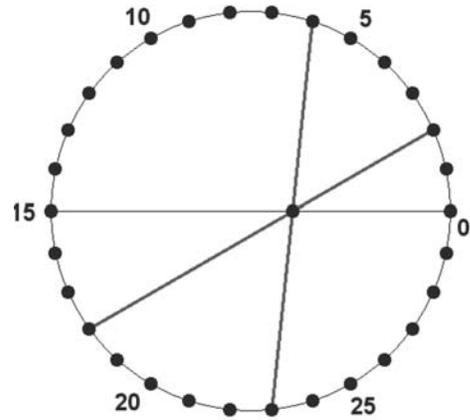


Рис. 22. Случай *M*

Как и ранее, алгебраические соотношения двойственности имеют геометрическую интерпретацию:

$$2.956295201467611280 \cdot 0.338261212717716428 \approx 1 \text{ (случаи } A \text{ и } L);$$

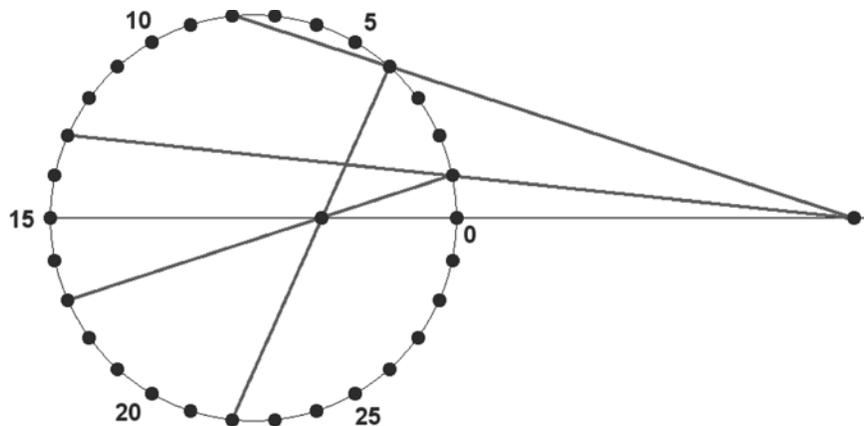
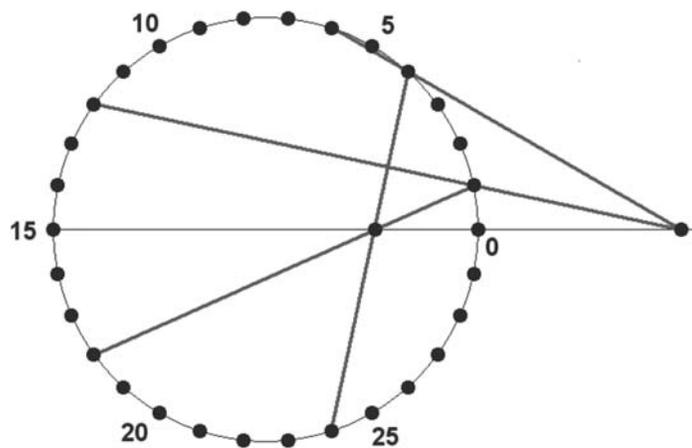
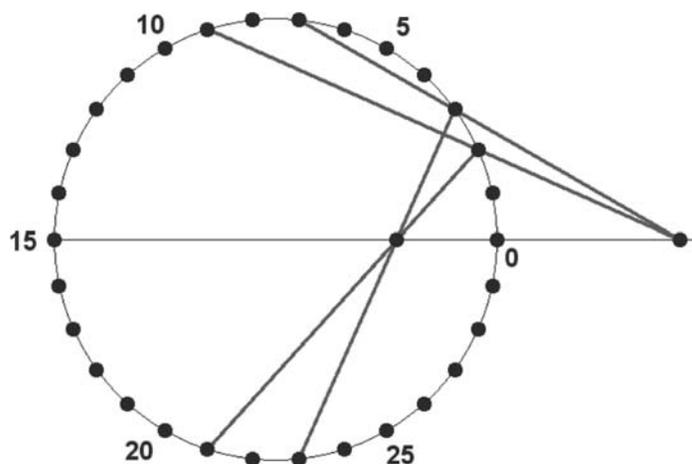
$$1.956295201467611280 \cdot 0.511170297432514637 \approx 1 \text{ (случаи } B \text{ и } K);$$

$$1.827090915285201790 \cdot 0.547318139253023370 \approx 1 \text{ (случаи } C \text{ и } J);$$

золотое сечение:

$$1.618033988749894850 \cdot 0.618033988749894850 \approx 1 \text{ (случаи } D \text{ и } H);$$

$$1.209056926535306940 \cdot 0.827090915285201791 \approx 1 \text{ (случаи } E \text{ и } F).$$

Рис. 23. Случай $A + L$ Рис. 24. Случай $B + K$ Рис. 25. Случай $C + J$

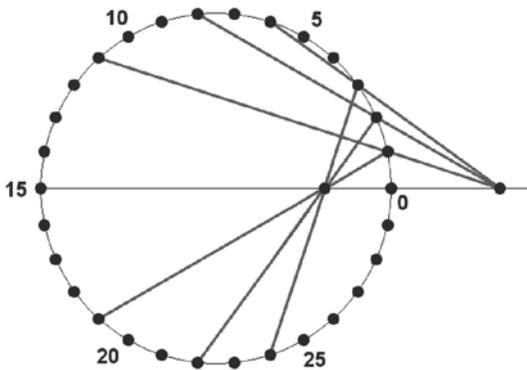


Рис. 26. Случай $D + H$

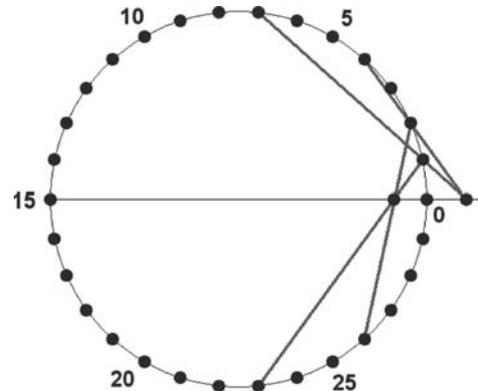


Рис. 27. Случай $E + F$

Ниже приведена таблица с некоторыми обобщенными итогами для ряда случаев от 18- до 60-угольника.

N	Точек пересечения			
	Всего	Внутри	Вне	Двойственных
18	4	3	1	1 пара
24	3	2	1	1 пара
30	12	7 (1 тройная)	5 (1 тройная)	5 пар
36	12	6	6	6 пар
42	16	9	7	7 пар
48	15	8	7	7 пар
54	22	10	12	10 пар
60	34	17 (5 тройных)	17 (5 тройных)	17 пар

Более детальный анализ, который мы здесь не проводим из-за его большого объема, показывает ряд красивых, но труднообъяснимых деталей. Например, если обозначить $Z = \sqrt[2N]{1}$ с аргументом π/N , то при $N < 60$ координаты точек пересечения имеют одну из четырех форм:

$$Z^\alpha + Z^{-\alpha}, Z^\alpha + Z^{-\alpha} + 1, Z^\alpha + Z^{-\alpha} - 1, 1/(Z^\alpha + Z^{-\alpha}),$$

но при $N = 60$ это уже становится неверным. По-видимому, для исследования данной задачи наиболее перспективным будет алгебраический подход, основанный на рассмотрении полиномов над полем комплексных чисел.

Литература

1. Прасолов В.В. Диагонали правильного 18-угольника // Квант. — 1995. — № 5. — с. 40–42.
2. Иглицкий А.М. Две заметки по геометрии // Математическое образование. — 2019. — № 1(89). — с. 13–20.

Иглицкий Александр Михайлович,
кандидат технических наук,
г. Москва.

E-mail: altetris@mail.ru

О некоторых свойствах и признаках параллелограмма

А. А. Привалов

В статье частично представлены материалы работы математического кружка в ГБОУ г. Москвы «Школа на Юго-Востоке имени Маршала В.И. Чуйкова». Рассматриваются некоторые свойства параллелограмма и устанавливаются условия, при которых эти свойства являются признаками параллелограмма. Статья печатается с продолжением.

1. Введение

При обсуждении темы «Четырёхугольники» в 9–10 классах на математическом кружке учащимся предлагалось получить как можно больше *признаков* параллелограмма. После знакомства с Википедией учащиеся приводят и доказывают первые 8 признаков параллелограмма. После чего им предлагается рассмотреть и доказать следующие *свойства* параллелограмма:

1. высоты, опущенные из противоположных вершин параллелограмма на противоположные стороны, равны и параллельны;
2. биссектрисы противоположных углов параллелограмма, проведенные к противоположным сторонам, равны и параллельны;
3. отрезки, проведенные из противоположных вершин параллелограмма к противоположным сторонам и делящие последние на пропорциональные части, равны и параллельны;
4. отрезки, соединяющие противоположные стороны или их продолжения, делятся средними линиями параллелограмма пополам;

и далее выяснить, как из этих свойств создать признаки параллелограмма по аналогии с его определением и первыми двумя его признаками [3, стр.170], [4, стр.139]:

а) простой четырёхугольник с двумя противоположными равными и параллельными сторонами является параллелограммом;

б) простой четырёхугольник с попарно равными противоположными сторонами является параллелограммом.

На первом же уроке учащиеся получают следующие признаки, которые сформулируем в виде теорем.

Но, сначала напомним, что четырёхугольник без самопересечений называется *простым* и, для удобства изложения, на протяжении всей работы будем применять следующие обозначения: $ABCD$ — четырёхугольник, Q и Q_1 — точки на прямой (AD) , P и P_1 — точки на прямой (BC) , M — точка на прямой (AB) и N — точка на (DC) .

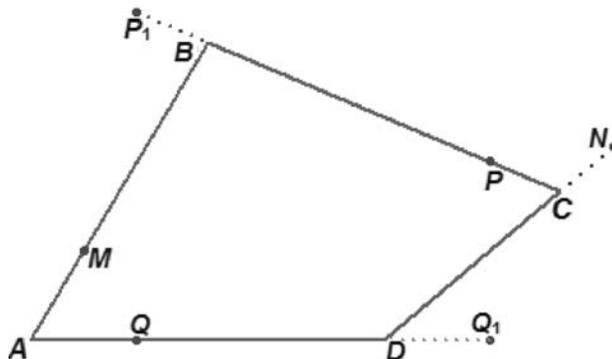


Рис. 1

Теорема 1. Пусть точки Q, P, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точек C, A, D и B на прямые $(AD), (BC), (AB)$ и (DC) соответственно. Тогда, если CQ параллелен AP и BN параллелен DM , то $ABCD$ — параллелограмм.

Теорема 2. Если биссектрисы углов C и A четырехугольника $ABCD$ параллельны и параллельны биссектрисы углов D и B , то $ABCD$ — параллелограмм.

Теоремы, обратные к 1 и 2, вытекают из определения параллелограмма и доказав их, обсуждаем первый признак параллелограмма. Сразу замечаем, что если $ABCD$ — трапеция $(CD \overrightarrow{AB})^1$ с высотами CQ и AP , то высоты CQ и AP равны и параллельны. Поэтому рассматриваем признаки 2 и 3.

Теорема 3. Пусть точки Q и P лежащие на сторонах AD и BC (или на их продолжениях) простого четырехугольника $ABCD$, таковы, что $\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CP} = t\overrightarrow{CB}$, где $t \neq 0$. Тогда, если $CQ = AP$ и $CQ \overrightarrow{AP}$, то $ABCD$ — параллелограмм.

Доказательство. По условию теоремы имеем равенства: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AP} + t \cdot \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QA} = \overrightarrow{CQ} + t \cdot \overrightarrow{DA}$, складывая которые, получим

$$\overrightarrow{AP} + t \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ} + t \cdot \overrightarrow{DA} = \vec{0} \Leftrightarrow t \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{AP}.$$

Так как $ABCD$ — простой четырехугольник, то из условий теоремы следует, что вектор \overrightarrow{CQ} равен вектору \overrightarrow{PA} . Учитывая это и то, что $t \neq 0$, получаем, что $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. То есть $ABCD$ — параллелограмм. Теорема доказана.

Следствие 1. Если два отрезка, соединяющие противоположные вершины простого четырехугольника $ABCD$ с серединами противоположных сторон, равны и параллельны, то $ABCD$ — параллелограмм.

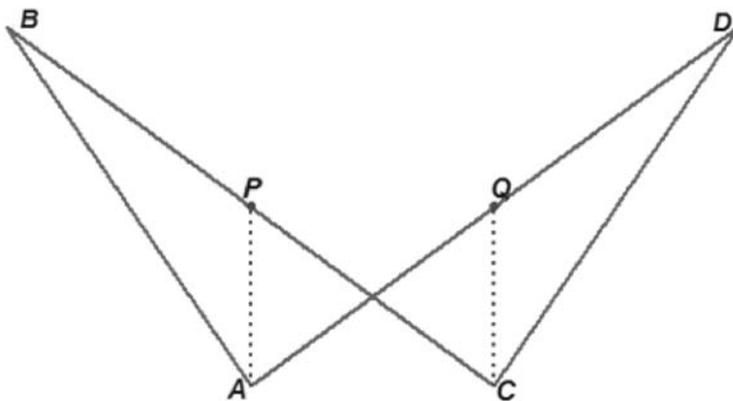


Рис. 2

На рис. 2 приведен пример самопересекающегося (непростого) четырехугольника: $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AP}$, $BP = PC$, $AQ = QC$.

Теорема 4. Если CQ и AP — биссектрисы некоторого невырожденного четырехугольника $ABCD$ — равны и параллельны, причем $P \neq C$, то $ABCD$ — параллелограмм.

Доказательство. По условию теоремы отрезки CQ и AP не пересекаются, равны и параллельны, поэтому возможны случаи: $\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AP}$.

В первом случае имеем $APCQ$ — параллелограмм. Отсюда следует, что $CB \overrightarrow{AD}$ и угол A равен углу C , т.к. CQ и AP — биссектрисы. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм.

¹Т.е. всюду ниже запись $CD \overrightarrow{AB}$ означает, что $ABCD$ — трапеция с основаниями AB и CD . — Прим. ред.

Предположим $\vec{CQ} = \vec{AP}$. Тогда точка D лежит на диагонали (AQ) параллелограмма $ACQP$, а точка B — на (CP) . Точка B также лежит на прямой (CB) , образующей с CQ угол $\gamma = \angle QCB$ (рис. 3).

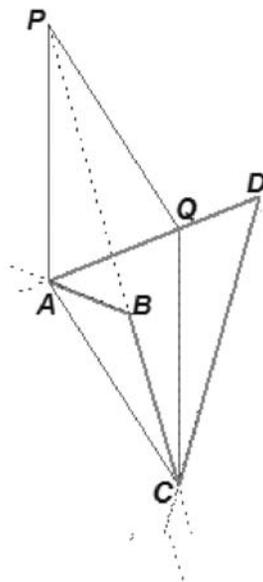


Рис. 3

Так как CQ и AP не равны и параллельны, то угол $\alpha = \angle PAQ$ больше γ . Но в этом случае точка B , лежащая на (CP) и на прямой (AD) , образующей с CP угол α , будет лежать по одну сторону с точкой D от прямой (AP) (т.к. $\alpha > \gamma$), и значит AP не является биссектрисой угла DAB . Таким образом, мы доказали, что четырехугольника с сонаправленными биссектрисами противоположных углов не существует. Иными словами, случай $\vec{CQ} = \vec{AP}$ не имеет места. Теорема доказана.

Заметим, что условие $P \neq C$ необходимо, т.к. если $P = C$, то диагональ AC , являясь биссектрисой углов A и C , будет осью симметрии четырехугольника и $ABCD$ — дельтоидом, а не параллелограммом.

Теоремы 1-4, следствие 1 и примеры были получены в течении двух спаренных уроков и на протяжении всего семестра автор возвращался к поставленной выше задаче, «принуждая» учащихся выводить и доказывать результаты, изложенные в следующих трех параграфах.

2. Пропорциональные отрезки

В этом параграфе рассматривается признак 3, сформулированный в начале работы. Нашей целью здесь является доказательство теорем 5 и 6, а также полезных свойств некоторых четырехугольников.

Теорема 5. Пусть $ABCD$ — простой четырехугольник, а точки Q, Q_1, P и P_1 таковы, что $\vec{AQ} = t\vec{AD}$, $\vec{DQ_1} = t_1\vec{DA}$, $\vec{CP} = t\vec{CB}$ и $\vec{BP_1} = t_1\vec{BC}$. При этом числа t и t_1 связаны условиями:

1. $t \cdot t_1 \neq 0$;
2. $t + t_1 \neq 2$.

Тогда если $CQ = AP$ и $BQ_1 = DP_1$ или $CQ \vec{AP}$ и $BQ_1 \vec{DP_1}$, то $ABCD$ — параллелограмм.

Теорема 6. Пусть $ABCD$ — простой четырехугольник, а точки Q, P, M и N таковы, что $\vec{AQ} = t\vec{AD}$, $\vec{CP} = t\vec{CB}$, $\vec{BM} = t_1\vec{BA}$, $\vec{DN} = t_1\vec{DC}$. При этом числа t и t_1 связаны условиями:

1. $t \cdot t_1 \neq 0$;

2. $(1-t)(1-t_1) \neq -1$ Тогда если $CQ \vec{AP}$ и $BN \vec{DM}$ или $CQ = AP$ и $BN = DM$, то $ABCD$ — параллелограмм.

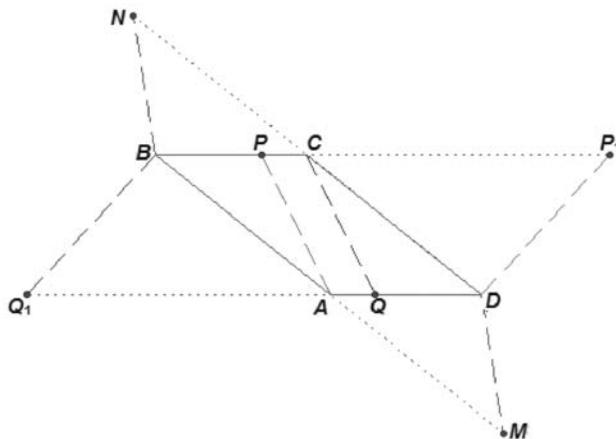


Рис. 4

Для доказательства этих теорем воспользуемся следующей простой леммой.

Лемма 1. Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $AC = b$ и $CB = a$. Точка A_1 лежит на прямой (BC) и $\overrightarrow{BA_1} = t\overrightarrow{BC}$. Тогда

$$AA_1^2 = tb^2 + (1-t)c^2 - t(1-t)a^2.$$

Доказательство. Из условия имеем

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{BC}.$$

Отсюда

$$AA_1^2 = AB^2 + 2t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + t^2BC^2 = c^2 + 2t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + t^2a^2,$$

где удвоенное скалярное произведение $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ найдем, возведя в квадрат равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$:

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 = AC^2 \Leftrightarrow c^2 + a^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - a^2 - c^2.$$

Итак,

$$AA_1^2 = c^2 + t^2a^2 + t(b^2 - a^2 - c^2) = tb^2 + (1-t)c^2 - t(1-t)a^2.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5. Пусть $CQ = AP$ и $BQ_1 = DP_1$, тогда из треугольников ACD и ACB в силу леммы 1 имеем:

$$CQ^2 = (1-t)AC^2 + tCD^2 - t(1-t)AD^2, \quad AP^2 = (1-t)AC^2 + tAB^2 - t(1-t)BC^2,$$

$$t(CD^2 - AB^2) = t(1-t)(AD^2 - BC^2).$$

Так как $t \neq 0$, то

$$CD^2 - AB^2 = (1-t)(AD^2 - BC^2). \quad (1)$$

Аналогично из треугольников ABD и BDC получаем

$$BQ_1^2 = (1-t_1)BD^2 + t_1AB^2 - t_1(1-t_1)AD^2, \quad DP_1^2 = (1-t_1)BD^2 + t_1CD^2 - t_1(1-t_1)BC^2,$$

$$t_1(AB^2 - CD^2) = t_1(1-t_1)(AD^2 - BC^2).$$

И так как $t_1 \neq 0$, то

$$CD^2 - AB^2 = -(1-t_1)(AD^2 - BC^2). \quad (2)$$

Если предположить, что $CD=AB$, то из (1) и (2) вытекает, что $AD = BC$, т.к. в силу условия 2. переменные t и t_1 не могут одновременно обращаться в 1. И тогда $ABCD$ — параллелограмм.

Если же предположить, что $CD \neq AB$, то и $AD \neq BC$. Следовательно, из (1) и (2) имеем $(1-t) = -(1-t_1)$ или $t+t_1 = 2$. Что противоречит условию 2.

Таким образом, мы доказали, что если $CQ = AP$ и $BQ_1 = DP_1$, то $ABCD$ — параллелограмм.

Пусть теперь $CQ \vec{A}P$ и $BQ_1 \vec{D}P_1$. Предположим, что $ABCD$ — не параллелограмм. Тогда $CQ \neq AP$ (в противном случае $AQCP$ — параллелограмм по 1-му признаку, а тогда $\vec{C}P = \vec{Q}A$ и, так как $\vec{A}Q = t\vec{A}D$ и $\vec{C}P = t\vec{C}B$, то $\vec{B}C = \vec{A}D$). Аналогично, $BQ_1 \neq DP_1$.

По условию теоремы имеем равенства:

$$\vec{A}C = \vec{A}P + \vec{P}C = \vec{A}P + t \cdot \vec{B}C \quad \text{и} \quad \vec{C}A = \vec{C}Q + \vec{Q}A = \vec{C}Q + t \cdot \vec{D}A,$$

складывая которые, получим:

$$t \cdot (\vec{B}C + \vec{D}A) = \vec{C}Q - \vec{A}P = \alpha \cdot \vec{A}P. \quad (3)$$

т.к. $QC \vec{A}P$. Аналогично, имеем

$$\vec{D}B = \vec{D}P_1 + t_1 \cdot \vec{B}C, \quad \vec{B}D = \vec{B}Q_1 + t_1 \cdot \vec{D}A$$

и

$$t_1 \cdot (\vec{B}C + \vec{D}A) = \vec{D}P_1 - \vec{B}Q_1 = \beta \cdot \vec{D}P_1, \quad (4)$$

т.к. $Q_1 \parallel \vec{D}P_1$ по условию теоремы.

В силу условия 1. числа t и t_1 не равняются нулю, поэтому если α в равенствах (3) или β — в (4) равны нулю, то $\vec{B}C = \vec{A}D$ и, в силу признака 2, $ABCD$ — параллелограмм.

Если же α и β не равны нулю, то из (8) и (9) следует, что $DP_1 \vec{A}P$ и тогда

$$DP_1 \vec{A}P \vec{Q}C \vec{B}Q_1.^2 \quad (5)$$

Далее заметим, что точки C и P делят отрезок P_1B в отношении:

$$P_1C : CP : PB = (t_1 - 1) : t : (1 - t),$$

а точки Q и A делят отрезок DQ_1 в отношении:

$$DQ : QA : AQ_1 = (1 - t) : t : (t_1 - 1),$$

поэтому по теореме Фалеса

$$(t_1 - 1) : t : (1 - t) = (1 - t) : t : (t_1 - 1).$$

Отсюда $t_1 - 1 = 1 - t$ или $t_1 + t = 2$. А это равенство исключено условием 2. Полученное противоречие и доказывает теорему 5.

Следствие 2. Если в простом четырехугольнике $ABCD$ отрезки, соединяющие противоположные вершины A, C и B, D с серединами противоположных сторон AD и BC соответственно, попарно равны или попарно параллельны, то $ABCD$ — параллелограмм.

Доказательство теоремы 6. Сначала рассмотрим случай $CQ \vec{A}P$ и $BN \vec{D}M$. Предположим, что $ABCD$ — не параллелограмм. Будем считать, что $CQ \neq AP$ и $BN \neq DM$ (в противном случае $ABCD$ — параллелограмм).

²Здесь и ниже сокращенная запись типа $DP_1 \vec{A}P \vec{Q}C \vec{B}Q_1$ обозначает одновременное выполнение утверждений $DP_1 \vec{A}P$, $AP \vec{Q}C$ и $QC \vec{B}Q_1$ — Прим. ред.

Сначала рассмотрим случай $t_1 = 1$. Тогда $N = C$ и $M = A$ и $BC\vec{D}A$. Значит, четырехугольник $AQCP$ — параллелограмм по определению, а $ABCD$ — параллелограмм по теореме 3. Аналогично, доказываем, что если $t=1$, то $ABCD$ — параллелограмм.

Пусть теперь $t_1 \neq 1$ и $t \neq 1$. Как и при доказательстве теоремы 5, получим равенство (3) и так как

$$\vec{BD} = \vec{BN} + \vec{ND} = \vec{BN} + t_1 \cdot \vec{CD} \quad \text{и} \quad \vec{DB} = \vec{DM} + \vec{MB} = \vec{DM} + t_1 \cdot \vec{AB}$$

и $BN\vec{D}M$, то

$$t_1 \cdot (\vec{AB} + \vec{CD}) = -(\vec{DM} + \vec{BN}) = \beta \cdot \vec{BN}, \quad \beta \neq 0. \quad (6)$$

Далее,

$$\vec{DM} = \vec{DA} + \vec{AM} = \vec{DA} + (1 - t_1) \cdot \vec{AB} \quad \text{и} \quad \vec{BN} = \vec{BC} + \vec{CN} = \vec{BC} + (1 - t_1) \cdot \vec{CD}.$$

Складывая эти равенства из (6) и (3), получим

$$-\beta \vec{BN} = \vec{DM} + \vec{BN} = \vec{DA} + \vec{BC} + (1 - t_1) \cdot (\vec{AB} + \vec{CD}) = \frac{\alpha}{t} \cdot \vec{AP} + \frac{1 - t_1}{t_1} \beta \cdot \vec{BN}.$$

Отсюда

$$\frac{\alpha}{t} \vec{AP} + \frac{\beta}{t_1} \vec{BN} = \vec{0}.$$

Следовательно, $BN\vec{A}P$ и тогда $BN\vec{A}P\vec{C}Q\vec{D}M$.

Пусть S — точка пересечения прямых (AB) и (CQ) , а R — пересечение (DC) и (AP) , тогда очевидно, что $CS\vec{A}R\vec{D}M\vec{B}N$. Отсюда и из теоремы Фалеса $CR : RN = BP : PC = t : (1 - t)$ и так как $DC : DN = 1 : t_1$, то $DC : DN = 1 : (t_1 - 1)$ и

$$DC : CR : RN = \frac{1}{t_1 - 1} : t : (1 - t).$$

Аналогично получаем

$$MS : SA : AB = (1 - t) : t : \frac{1}{t_1 - 1}.$$

Но из теоремы Фалеса следует, что $DC : DR : DN = MS : SA : AB$. Поэтому $1 - t = \frac{1}{t_1 - 1}$, т.е. $(1 - t)(1 - t_1) = -1$. Что противоречит условию 2 теоремы 6.

Таким образом, доказано, что если $CQ\vec{A}P$ и $BN\vec{D}M$, то $ABCD$ — параллелограмм.

Пусть теперь $CQ = AP$ и $BN = DM$, тогда, повторяя рассуждения при доказательстве теоремы 5, из треугольников ABD и BDC получаем:

$$BN^2 = (1 - t_1)DB^2 + t_1BC^2 - t_1(1 - t_1)CD^2, \quad DM^2 = (1 - t_1)DB^2 + t_1AD^2 - t_1(1 - t_1)AB^2,$$

$$t_1(BC^2 - AD^2) = t_1(1 - t_1)(CD^2 - AB^2),$$

и, так как $t_1 \neq 0$, то

$$BC^2 - AD^2 = (1 - t_1)(CD^2 - AB^2). \quad (7)$$

Отсюда следует, что если $CD = AB$, то $BC = AD$ и $ABCD$ — параллелограмм по признаку 2. Если же предположить, что $CD \neq AB$, то из (1) и (7) имеем

$$BC^2 - AD^2 = (1 - t_1)(CD^2 - AB^2) = (1 - t_1)(1 - t)(AD^2 - BC^2).$$

Значит, $(1 - t_1)(1 - t) = -1$, что противоречит условию 2. Теорема 6 доказана.

Следствие 3. Если в простом четырехугольнике $ABCD$ точки P и Q — середины сторон BC и AD , а M и N — середины сторон AB и CD соответственно, то $ABCD$ — параллелограмм в том и только случае если $AP = CQ$ и $DM = BN$ или если $CQ \vec{A}P$ и $BN \vec{D}M$.

Установим необходимость условий 1. и 2. теорем 5 и 6. В самом деле, невыполнение условия 1. означает, что $t = 0$ или $t_1 = 0$. Если, например, $t = 0$, то $Q = A$ и $P = B$ и условие теоремы требует тривиального тождества $AC = CA$. А это, очевидно, не может привести к положительному результату.

Для установления необходимости условия 2. сначала рассмотрим случай: $t = 1$ и $t_1 = 1$. Это означает, что $\vec{AQ} = \vec{AD}$, $\vec{DQ}_1 = \vec{DA}$, $\vec{CP} = \vec{CB}$ и $\vec{BP}_1 = \vec{BC}$. Отсюда имеем $Q = D$, $Q_1 = A$, $P = B$, $P_1 = C$ и условие теоремы требует только выполнения равенства $AB = CD$ или условия параллельности $AB \vec{C}D$. Но четырехугольник с двумя противоположными равными или параллельными сторонами не всегда является параллелограммом. Наглядный пример для $t = \frac{1}{2}$, $t_1 = \frac{3}{2}$ на рис. 5

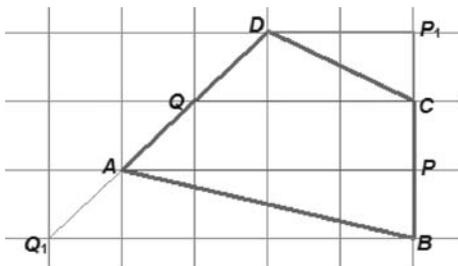


Рис. 5

приводит нас к следующей, полезной в некоторых задачах, лемме (следствие теоремы Фалеса).

Лемма 2. Пусть точка W лежит на прямой (ST) , а точки Y — на (UV) , причем $SW : WT = UY : YV$. Тогда если $TV \vec{S}U$, то и $WY \vec{S}U$.

Доказательство. Если отрезок SU параллелен отрезку TV , то найдется такое число t , что $\vec{TV} = t \cdot \vec{SU}$ и так как $\vec{TV} + \vec{VU} + \vec{US} + \vec{ST} = \vec{0}$, то

$$\vec{VU} + \vec{ST} = (t - 1) \cdot \vec{SU}. \quad (8)$$

Далее, так как $SW : WT = UY : YV$, то найдется такое число α , что $\vec{SW} = \alpha \cdot \vec{ST}$ и $\vec{UY} = \alpha \cdot \vec{UV}$. Отсюда и из (8)

$$\vec{WY} = \vec{WS} + \vec{SU} + \vec{UY} = -\alpha \cdot \vec{ST} + \vec{SU} + \alpha \cdot \vec{UV} = \alpha \cdot (\vec{ST} + \vec{VU}) + \vec{SU} = ((t - 1)\alpha + 1) \cdot \vec{SU}$$

Следовательно, $WY \vec{S}U$. Лемма доказана.

Таким образом, если условия 2. теоремы 5 не выполняется ($t + t_1 = 2$), то из параллельности $CQ \vec{A}P$ и леммы 2 вытекает $CQ \vec{A}P \vec{B}Q_1 \vec{D}P_1$, а тогда четырехугольник $ABCD$ не обязательно является параллелограммом.

Установление же необходимости условия 2. теоремы 5 в случае равенства: $CQ = AP$ и $BQ_1 = DP_1$ также приводит к следующему интересному результату.

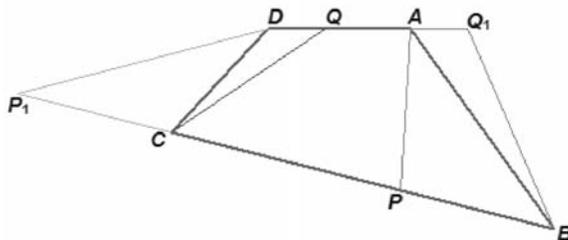


Рис. 6

Теорема 7. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ точки Q и Q_1 лежат на прямой (AD) , точки P и P_1 — на прямой (BC) , причем $\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DQ_1} = (2-t)\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{CP} = t\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BP_1} = (2-t)\overrightarrow{BC}$, $t \neq 0$ и $t \neq 2$. Тогда $DP_1 = BQ_1$ в том и только в том случае, если $CQ = AP$.

Доказательство этой теоремы вытекает из следующей полезной леммы.

Лемма 3. Пусть точки W и X лежат на прямой (ST) , а точки Y и Z — на (UV) , причем $\overrightarrow{SW} : \overrightarrow{WX} : \overrightarrow{XT} = \overrightarrow{UY} : \overrightarrow{YZ} : \overrightarrow{ZV} = \alpha : \beta : \alpha$, где $\beta \neq 0$. Тогда

$$SU = TV \Leftrightarrow WY = XZ.$$

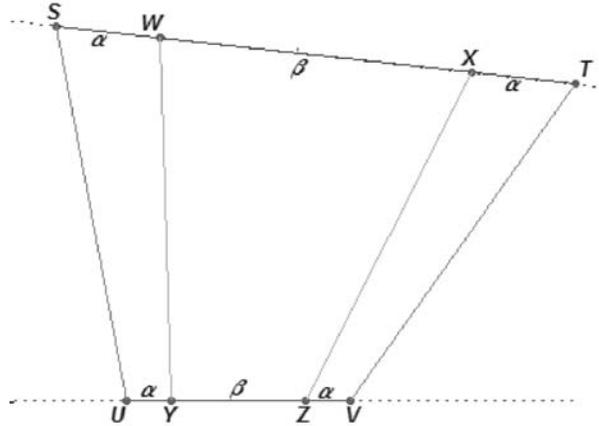


Рис. 7

Доказательство леммы 3. Для доказательства найдем векторы \overrightarrow{SU} , \overrightarrow{TV} , \overrightarrow{XZ} , \overrightarrow{YW} и сравним разность $XZ^2 - YW^2$ с разностью $SU^2 - TV^2$. Для удобства введем обозначим

$$\vec{c} = \overrightarrow{VU} + \overrightarrow{ST}, \tag{9}$$

тогда $\overrightarrow{TV} = \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{UV} = \overrightarrow{SU} - \vec{c}$ и

$$TV^2 - US^2 = c^2 - 2\vec{c} \cdot \overrightarrow{SU}. \tag{10}$$

Далее, без потери общности можно считать, что

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SW} &= \alpha \cdot \overrightarrow{ST}, & \overrightarrow{WX} &= \beta \cdot \overrightarrow{ST}, & \overrightarrow{XT} &= \alpha \cdot \overrightarrow{ST}, \\ \overrightarrow{UY} &= \alpha \cdot \overrightarrow{UV}, & \overrightarrow{YZ} &= \beta \cdot \overrightarrow{UV}, & \overrightarrow{ZV} &= \alpha \cdot \overrightarrow{UV}. \end{aligned} \tag{11}$$

Тогда, учитывая, что $\overrightarrow{ZU} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{VU}$, $\overrightarrow{XS} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{TS}$ и (9), получаем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{YW} &= \overrightarrow{YU} + \overrightarrow{US} + \overrightarrow{SW} = -\alpha \cdot \overrightarrow{UV} + \overrightarrow{US} + \alpha \cdot \overrightarrow{ST} = \alpha \cdot \vec{c} + \overrightarrow{US}, \\ \overrightarrow{ZX} &= \overrightarrow{ZU} + \overrightarrow{US} + \overrightarrow{SX} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{VU} + (\alpha + \beta)\overrightarrow{ST} + \overrightarrow{SU} = (\alpha + \beta) \cdot \vec{c} + \overrightarrow{US}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$XZ^2 - YW^2 = (\alpha + \beta)^2 c^2 + 2(\alpha + \beta) \cdot \vec{c} \cdot \overrightarrow{US} - \alpha^2 c^2 - 2\alpha \cdot \vec{c} \cdot \overrightarrow{US} = \beta((2\alpha + \beta)c^2 + 2 \cdot \vec{c} \cdot \overrightarrow{US}).$$

В силу (11) $2\alpha + \beta = 1$, поэтому отсюда и из (10) имеем

$$XZ^2 - YW^2 = \beta(c^2 + 2 \cdot \vec{c} \cdot \overrightarrow{US}) = \beta(TV^2 - US^2).$$

А так как $\beta \neq 0$, то лемма 3 доказана.

Для доказательства теоремы 7 достаточно заметить, что $\vec{AQ} = t\vec{AD}$, $\vec{QD} = (1-t)\vec{AD}$, $\vec{Q_1A} = (1-t)\vec{AD}$ и $\vec{CP} = t\vec{CB}$, $\vec{PB} = (1-t)\vec{CB}$, $\vec{P_1C} = (1-t)\vec{CB}$, а затем применить лемму 3. Теорема 7 доказана.

Следствие 4. Пусть P и Q — середины сторон CB и AD некоторого четырехугольника $ABCD$, а точки P_1 и Q_1 лежат на продолжении этих сторон так, что $\vec{AQ_1} = \vec{Q_1A}$ и $\vec{CP_1} = \vec{P_1C}$. Тогда

$$Q_1B^2 - P_1D^2 = 3(AP^2 - QC^2).$$

Невыполнение условия 2. теоремы 6 в случае параллельности: $CQ\vec{AP}$ и $BN\vec{DM}$ подтверждается наглядным примером для $t = \frac{1}{2}$ и $t_1 = 3$ на рис. 8.

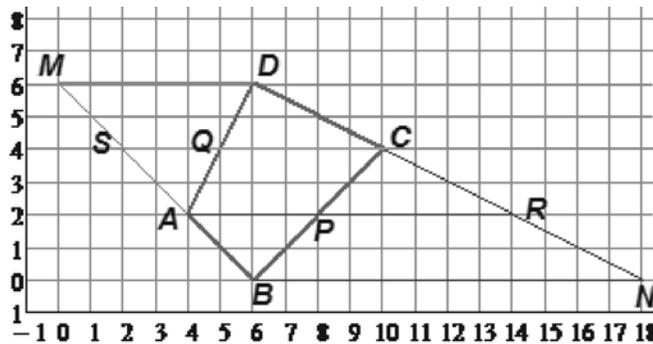


Рис. 8

В случае равенств: $CQ = AP$ и $BN = DM$, условие $(1-t)(1-t_1) = -1$ приводит к следующему интересному результату.

Теорема 8. Пусть точки M , P , N и Q лежат на прямых (AB) , (BC) , (CD) и (AD) соответственно, причем $\vec{AQ} = t\vec{AD}$, $\vec{CP} = t\vec{CB}$, $\vec{BM} = t_1\vec{BA}$ и $\vec{DN} = t_1\vec{DC}$, где $t \neq 0$, $t \neq 2$, а t_1 связано с t условием: $(1-t)(t_1-1) = 1$. Тогда $DM = BN$ в том и только в том случае, если $CQ = AP$.

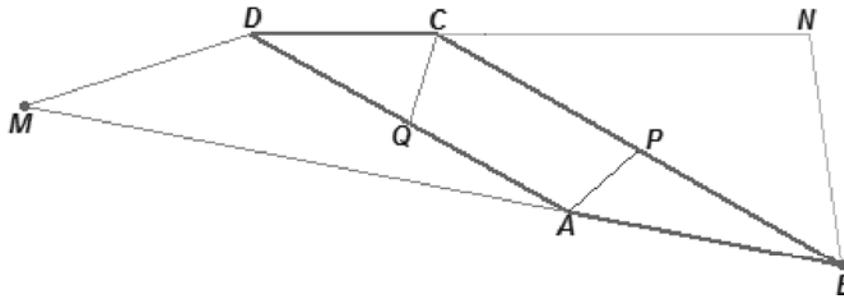


Рис. 9

Доказательство. Для доказательства выразим векторы \vec{BN} , \vec{AP} и \vec{CQ} через векторы \vec{DM} , \vec{DC} и \vec{AB} , затем сравним разность $BN^2 - DM^2$ с разностью $CQ^2 - AP^2$. Для удобства обозначим

$$\vec{c} = \vec{CD} + \vec{AB}. \quad (12)$$

Тогда из условия теоремы имеем

$$\vec{BN} = \vec{BM} + \vec{MD} + \vec{DN} = t_1\vec{BA} + \vec{MD} + t_1\vec{DC} = -(t_1\vec{c} + \vec{DM}).$$

Отсюда

$$BN^2 - DM^2 = t_1^2 c^2 + 2\vec{c} \cdot \vec{DM} = t_1(t_1 c^2 + 2\vec{c} \cdot \vec{DM})$$

и, так как в силу условий: $t \neq 2$ и $(1-t)(t_1-1) = 1$, величина $t_1 \neq 0$, то

$$t_1 c^2 + 2\vec{c} \cdot \overrightarrow{DM} = \frac{BN^2 - DM^2}{t_1}. \quad (13)$$

Далее найдем $(t_1 - 1)^2 AP^2$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + (1-t)(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}), \\ (t_1 - 1)\overrightarrow{AP} &= (t_1 - 1)\overrightarrow{AB} + t_1\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DM} \end{aligned}$$

и, учитывая обозначение (12), получаем

$$\begin{aligned} (t_1 - 1)\overrightarrow{AP} &= -(\overrightarrow{DM} + \vec{c}), \\ (t_1 - 1)^2 AP^2 &= DM^2 + c^2 + 2\overrightarrow{DM} \cdot \vec{c}. \end{aligned} \quad (14)$$

Теперь найдем $(t_1 - 1)^2 CQ^2$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CQ} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{CD} + (1-t)\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + (1-t)(\overrightarrow{DM} + (t_1 - 1)\overrightarrow{AB}), \\ (t_1 - 1)\overrightarrow{CQ} &= (t_1 - 1)(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{DM} = (t_1 - 1)\vec{c} + \overrightarrow{DM}, \\ (t_1 - 1)^2 CQ^2 &= (t_1 - 1)^2 c^2 + DM^2 + 2(t_1 - 1)\vec{c} \cdot \overrightarrow{DM}. \end{aligned}$$

Отсюда, из (14) и (13) получаем

$$\begin{aligned} (t_1 - 1)^2 (CQ^2 - AP^2) &= ((t_1 - 1)^2 - 1)c^2 + 2(t_1 - 1 - 1)\vec{c} \cdot \overrightarrow{DM} = \\ &= (t_1 - 2)(t_1 c^2 + 2\vec{c} \cdot \overrightarrow{DM}) = \frac{t_1 - 2}{t_1} (BN^2 - DM^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Из условий $(1-t)(t_1-1) = 1$ и $t \neq 0$ следует, что $t_1 \neq 2$, поэтому из (15) имеем:

$$BN^2 - DM^2 = \frac{t_1(t_1 - 1)^2}{t_1 - 2} (CQ^2 - AP^2) = \frac{2 - t}{t(1-t)^2} (CQ^2 - AP^2).$$

Теорема 8 доказана.

Следствие 5. Если в четырехугольнике $ABCD$ точки P и Q — середины сторон AD и CB , а стороны DC и BA продолжит до точек N и M так, что $DN = 3DC$ и $BM = 3BA$, то

$$BN^2 - DM^2 = 12(CQ^2 - AP^2).$$

Леммы и следствия этого, как и следующего, параграфов могут быть использованы при составлении различных конкурсных задач.

Литература

1. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. — М.: Наука, 1987. — 158 с.
2. Болтянский В.Г. Четырёхугольники. // Квант. - № 9. - 1974. - С. 53-56.
3. Бутузов В.Ф., Кадомцев С.В. и др. Планиметрия. Пособие для углубленного изучения математики. — М.: Физматлит, 2005. — 488 с.
4. Шарыгин И.Ф. Геометрия 7-9. — М.: Дрофа, 1997. — 352 с.

Привалов Александр Андреевич,
доцент кафедры “Прикладная математика”
Московского автомобильно-дорожного государственного
технического университета (МАДИ),
педагог дополнительного образования
ГБОУ г. Москвы “Школа на Юго-Востоке
имени Маршала В.И. Чуйкова”,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: a_privalov@bk.ru

Свойства степенных вычетов натуральных чисел в различных системах счисления

Э. М. Джамбетов, А. Я. Канель-Белов, И. С. Шудуева

Рассматриваются степенные вычеты натуральных чисел по модулю 10^k , где k — принимает значения $1, 2, \dots, 10$, и их свойства. Выделены однозначные, двузначные, трехзначные числа, все натуральные степени которых сравнимы с самим числом. Показана справедливость этого свойства для приведенных чисел.

Работа поддержана Российским Научным Фондом, Грант № 17-11-01377.

Пусть $m \neq 1$ и a — натуральные числа. Как и все целые числа, множество чисел вида $a^1, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$ разбивается на классы вычетов по модулю m , называемых *степенными*. Число таких классов вычетов в принципе может равняться m . Однако, на практике различных классов оказывается гораздо меньше, чем m .

Ясно, что вычеты даже для двузначных чисел и небольших показателей вычислить сложно. Не менее сложно изучить их свойства.

Для трехзначных чисел гораздо сложнее как вычисление степени, так и нахождение вычета и различных классов, к которому он относится. Использование вычислительной техники позволяет такие вычисления провести.

Для таких расчетов разработана программа на ЭВМ. Она позволила вычислить вычеты для достаточно больших показателей степени. В программе были использованы следующие идеи:

- для вычисления вычета степени a^{n+1} можно вычет числа a^n умножить на само число a и найти вычет произведения,
- вычет числа a по модулю 10^k находят по формуле: $\bar{a} = a - [a/10^k] \cdot 10^k$, где $[a/10^k]$ — целая часть числа $a/10^k$

Такая программа позволяет находить вычеты, не выполняя операцию возведения в степень с большим показателем. Ниже приводится фрагмент программы, написанной на языке FORTRAN-4.

```

1      DIMENSION L(1000), LR(1000)
      READ (1,1) N, M
      FORMAT (2I6)
      DO 5 I = N, M
      L (1) = I
      DO 2 J = 1, 1000
      L (J+1)=L(J)*I-AINT(FLOAT (L(J)*I) / (M+1))*(M+1)
      DO 2 II=1, J
9      IF (L (J + 1) - L(II))2, 4, 2.
2      CONTINUE
4      LR(I - N + 1) = J
      PRINT 10, I, J
```

```

10      FORMAT (2X, 11Н ДЛЯ ЧИСЛА, I4, 2X, 10Н ПЕРИОД = I, 12, 15Н
        ПОСЛЕДНИЕ 6Н ЦИФРЫ,)
        PRINT 11, (L(G1), G1=1,J)
11      FORMAT (64X,10I4/)
5       CONTINUE
        END

```

Вычеты, найденные для однозначных чисел ($n = 1$), представлены в таблице.

$m \setminus a$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	4	9	6	5	6	9	4	1
3	1	8	7	4	5	6	3	2	9
4	1	6	1	6	5	6	1	6	1
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	1	4	4	2	1	1	4	4	2

В первой строке указаны значения $a = 1, 2, 3, \dots, 9$, степенные вычеты которых находят. В первом столбце представлены показатели степени, в которую возводят числа a ($m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$). В последней строке таблицы указано число различных классов вычетов r однозначных чисел a по модулю 10 ($n = 1$). Как видно, начиная с $m = 5$, все вычеты повторяются.

Так, например, число различных классов степенных вычетов для $a = 3$ по модулю 10 равно четырем — и это классы $\bar{3}, \bar{9}, \bar{7}, \bar{1}$. Для $a = 4$ по модулю 10 существуют два класса: $\bar{4}, \bar{6}$

Только числа $a = 1$, $a = 5$ и $a = 6$ по модулю 10 имеют по одному классу степенных вычетов соответственно $\bar{1}, \bar{5}, \bar{6}$

Аналогичные рассуждения показывают, что подобными свойствами обладают степенные вычеты двухзначных чисел. Число $a = 47$ имеет 21 различных классов вычетов по модулю 100 и полная система вычетов запишется в виде

$$47, 09, 23, 81, 07, 29, 63, 61, 67, 49, 03, 41, 27, 69, 43, 21, 87, 89, 83, 1.$$

Число же $a = 59$ имеет 10 различных классов вычетов по модулю 100 и полная система вычетов запишется

$$59, 81, 79, 61, 99, 41, 19, 21, 39, 01.$$

21 — это наибольшее число различных классов вычетов двухзначных чисел по модулю 100.

Только два двухзначных числа $a = 25$ и $a = 76$ имеют по одному классу степенных вычетов по модулю 100 и это классы $\bar{25}, \bar{76}$

Рассматривая степенные вычеты трехзначных чисел, можно заметить, что наибольшее число различных классов вычетов по модулю 1000 равно 102. Таким числом является, например, 102 и это класс вычетов $\overline{102}$:

$$\begin{aligned}
&102\ 404\ 208\ 216032\ 264\ 928\ 656\ 912\ 024448\ 696\ 992\ 184\ 768\ 336\ 272\ 744 \\
&888\ 576752704\ 808\ 416\ 432064\ 528\ 856\ 312\ 824048\ 896\ 392\ 984368\ 536 \\
&672\ 544\ 488\ 776152\ 504\ 408\ 616\ 832\ 864\ 128056\ 712\ 624\ 648096\ 792\ 784 \\
&968\ 736072\ 344088\ 976\ 552\ 304008\ 816\ 232\ 664\ 728\ 256\ 112\ 424\ 248\ 296 \\
&192\ 584\ 568936\ 472\ 144\ 688\ 176952\ 104\ 608016\ 632\ 464328\ 456\ 512\ 224 \\
&848\ 496592\ 384\ 168\ 136\ 872\ 944\ 288\ 376\ 352\ 904.
\end{aligned}$$

Число $a = 625$ по модулю $m = 1000$ имеет один класс вычетов — это $\overline{625}$.

Число $a = 376$ также имеет один класс вычетов по модулю $m = 1000$ и это класс $\overline{376}$.

Таким образом, числа 5, 25, 625 и 6, 76, 376 обладают тем свойством, что любая натуральная степень этих чисел сравнимо с самим числом по модулю соответственно 10, 100, 1000 (или оканчивается теми же цифрами).

Несложно убедиться в том, что любое натуральное число, оканчивающееся на 5, или 25 или 625, также, как и 6, или 76 или 376, само будет иметь один класс вычетов по соответствующему модулю.

Для исследования четырех-, пятизначных и так далее чисел использовать ЭВМ достаточно сложно. Поэтому был использован способ непосредственного поиска чисел, все степенные вычеты которых содержатся в одном классе вычетов.

Очевидно, что полученные числа удовлетворяют сравнениям:

$$\begin{aligned} 5^n &\equiv 5 \pmod{10}, & 25^n &\equiv 25 \pmod{100}, & 625^n &\equiv 625 \pmod{1000}; \\ 6^n &\equiv 6 \pmod{10}, & 76^n &\equiv 76 \pmod{100}, & 376^n &\equiv 376 \pmod{1000} \end{aligned}$$

для всех натуральных n

Можно проверить справедливость этих сравнений единообразно. Выполним это на примере последних сравнений.

$$\begin{aligned} 376^n - 376 &= 376 (376^{n-1} - 1) = 8 \cdot 47 \cdot (376 - 1) (376^{n-2} + 376^{n-3} + \dots + 1) = \\ &= 8 \cdot 125 \cdot 47 \cdot 3 \cdot (376^{n-2} + \dots + 1) : 1000 \\ 625^n - 625 &= 625 (625^{n-1} - 1) = 25 \cdot 25 \cdot (625 - 1) (625^{n-2} + 625^{n-3} + \dots + 1) = \\ &= 8 \cdot 125 \cdot 390 \cdot (625^{n-2} + \dots + 1) : 1000 \end{aligned}$$

Аналогично могут быть проверены другие числа:

$$\begin{aligned} &0625^1, 90625, 890625, 2890625, 12890625, 212890625, 8212890625 \text{ и} \\ &9376, 09376, 109376, 7109376, 87109376, 787109376, 1787109376. \end{aligned}$$

Сравнение $a^n \equiv a \pmod{10^k}$ равносильно сравнению $a^n - a \equiv 0 \pmod{10^k}$, либо $a(a-1)(a^{n-2} + a^{n-3} + \dots + 1) \equiv 0 \pmod{10^k}$.

Чтобы убедиться в справедливости соответствующих сравнений, запишем в виде произведения рассмотренные числа a :

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \cdot 3; & 76 &= 2^2 \cdot 19; & 376 &= 2^3 \cdot 47; & 9376 &= 2^5 \cdot 293; \\ 09376 &= 2^5 \cdot 293; & 109376 &= 2^6 \cdot 1709; & 7109376 &= 2^7 \cdot 55542. \end{aligned}$$

В представлении этих чисел присутствует степень числа 2. При этом в представлении числа $a - 1$ присутствует такая же степень числа 5:

$$\begin{aligned} 5 &= 5; & 75 &= 5^2 \cdot 3; & 375 &= 5^3 \cdot 3; & 9375 &= 5^4 \cdot 15; & 09375 &= 5^5 \cdot 3; \\ 109375 &= 5^6 \cdot 7; & 7109375 &= 5^7 \cdot 91 \end{aligned}$$

Также представим в виде произведения рассмотренные числа a из второй последовательности:

$$\begin{aligned} 5 &= 5; & 25 &= 5^2; & 625 &= 5^3; & 0625 &= 5^3; & 90625 &= 5^5 \cdot 29; \\ 890625 &= 5^6 \cdot 57; & 2890625 &= 5^7 \cdot 37. \end{aligned}$$

¹Запись числа 0625, начинающаяся нулем, означает, что при любом натуральном n верно сравнение $0625^n \equiv 0625 \pmod{10^4}$. Аналогичные сравнения справедливы и для остальных приведенных ниже чисел, запись которых начинается с нуля.

В представлении числа $a - 1$ присутствует такая же соответствующая степень числа 2:

$$\begin{aligned} 4 &= 2^2; & 24 &= 2^3 \cdot 3; & 624 &= 2^4 \cdot 39; & 0624 &= 2^4 \cdot 39; & 90624 &= 2^5 \cdot 2832; \\ 890624 &= 2^6 \cdot 13916; & 2890624 &= 2^7 \cdot 22583. \end{aligned}$$

У приведенных чисел 5, 6, 25, 76, 625, 376, 0625, 9376, 90625, 09376, 890625, 109376, 2890625 и 7109376 и у чисел, на 1 меньших, в разложении присутствуют 2 и 5 в одинаковых степенях, что обеспечивает делимость $a^n - a$ на 10^k при любом натуральном значении n и соответствующем значении k .

Получены две последовательности чисел:

$$5, 25, 625, 0625, 90625, 890625, 2890625, 12890625, 212890625, 8212890625$$

и

$$6, 76, 376, 9376, 09376, 109376, 7109376, 87109376, 787109376, 1787109376,$$

любая натуральная степень которых сравнима с самим числом по модулю, равному соответствующей степени основания системы счисления.

Наличие этого свойства у приведенных чисел связано с системой счисления, основание которой равно 10. Выясним, есть ли подобные числа в других системах счисления.

Рассмотрим систему счисления с основанием 6. Среди однозначных чисел этой системы, за исключением 0, подобным свойством могут обладать числа 1_6 , 3_6 и 4_6 , что следует из следующих сравнений:

$$\begin{aligned} 1_6^2 &\equiv 1_6 \pmod{6} \\ 2_6^2 &\equiv 4_6 \pmod{6} \\ 3_6^2 &= 13_6 \equiv 3_6 \pmod{6} \\ 4_6^2 &= 24_6 \equiv 4_6 \pmod{6} \\ 5_6^2 &= 41_6 \equiv 1_6 \pmod{6} \end{aligned}$$

Видно, что 3 и 4 системы счисления с основанием 6 в любой натуральной степени будут сравнимы сами с собой по модулю 6:

$$\begin{aligned} 1_6^n &\equiv 1_6 \pmod{6^2} \\ 3_6^n &\equiv 3_6 \pmod{6^2} \\ 4_6^n &\equiv 4_6 \pmod{6^2} \end{aligned}$$

Рассмотрим двузначные числа 13_6 , 23_6 , 33_6 , 43_6 , 53_6

$$\begin{aligned} 13_6^2 &= 81_{10} = 2 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 3 \equiv 13_6 \pmod{6^2} \\ 23_6^2 &= 225_{10} = 1 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6 + 3 \equiv 13_6 \pmod{6^2} \\ 33_6^2 &= 441_{10} = 2 \cdot 6^3 + 0 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 3 \equiv 13_6 \pmod{6^2} \\ 43_6^2 &= 729_{10} = 3 \cdot 216 + 2 \cdot 36 + 1 \cdot 6 + 3 \equiv 13_6 \pmod{6^2} \\ 53_6^2 &= 1089_{10} = 5 \cdot 216 + 0 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 3 \equiv 13_6 \pmod{6^2} \end{aligned}$$

Из приведенных сравнений следует, что

$$13_6^n \equiv 13_6 \pmod{6^2}.$$

Рассуждая аналогично, для двузначных чисел $14_6, 24_6, 34_6, 44_6, 54_6$ получим:

$$\begin{aligned} 14_6^2 &= 100_{10} = 2 \cdot 36 + 4 \cdot 6 + 4 \equiv 44_6 \pmod{6^2} \\ 24_6^2 &= 256_{10} = 1 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6 + 4 \equiv 04_6 \pmod{6^2} \\ 34_6^2 &= 484_{10} = 2 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 4 \equiv 24_6 \pmod{6^2} \\ 44_6^2 &= 784_{10} = 3 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 4 \equiv 44_6 \pmod{6^2} \\ 54_6^2 &= 1156_{10} = 5 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6 + 4 \equiv 04_6 \pmod{6^2} \end{aligned}$$

Из последних равенств вытекает, что

$$44_6^n \equiv 44_6 \pmod{6^2}.$$

В шестеричной системе счисления также две последовательности чисел: $3_6, 13_6, \dots$ и $4_6, 44_6, \dots$ состоят из чисел, любая натуральная степень которых сравнима с самим числом по модулю, равному соответствующей степени основания системы счисления.

Полученные числа обладают, на наш взгляд, интересным свойством, выражающимся в том, что они при «воздействии» на них «возведения в натуральную степень» не меняют своей «внешности» — последних цифр.

Литература

1. Бухштаб А.А. Теория чисел: учебник. - М.: «Просвещение», 1966.
2. Джамбетов Э.М. Вычисление степенных вычетов на ЭВМ // Известия ЧГПИ. - № 1. - 2009.
3. Джамбетов Э.М., Джамбетова Л.М. Решение некоторых степенных сравнений с неизвестной // Известия ЧГПИ, № 1(8). - 2014.
4. Джамбетов Э.М., Джамбетова Л.М., Шудуева И.С. Некоторые инвариантные по форме относительно возведения в степень натуральные числа // Известия ЧГПУ. - № 1(17). - 2017.

*Джамбетов Эльман Махмудович,
декан физико-математического факультета
Чеченского государственного педагогического университета,
доцент кафедры математического анализа,
кандидат технических наук,
Почетный работник высшего образования РФ.*

E-mail: hazar-76@mail.ru

*Канель-Белов Алексей Яковлевич,
профессор МФТИ, Главный научный сотрудник,
Федеральный профессор математики, доцент,
доктор физ.-мат. наук.*

E-mail: kanelster@gmail.com

*Шудуева Иман Саидмухамедовна,
магистрант «Математического образования»
Чеченского государственного педагогического университета.*

E-mail: shudueva1997@gmail.com

Иерархический алгоритм построения минимального остовного дерева

С. В. Закурдаев

Анализ построения минимального остовного дерева с использованием известного метода «ближайших соседей» показал, что ребра из вершин, связанных отношениями «ближайших соседей», образуют, в общем случае, несколько фрагментов, в которых одна пара вершин (i, j) обладает уникальным свойством: для вершины i вершина j является «ближайшим соседом», а для вершины j , в свою очередь, вершина i также будет «ближайшим соседом».

Этот факт дает основание для введения нового определения — «взаимоближайших соседей», на основе которого разработан алгоритм построения минимального остовного дерева путем иерархического объединения фрагментов, сформированных из вершин этих фрагментов, связанных отношением «ближайших соседей».

Алгоритм завершает свою работу, когда в очередном фрагменте число «взаимоближайших соседей» будет равно 1.

Рассмотрим связный неориентированный граф $G(V, E)$, где V -множество вершин, а E -множество ребер.

Пусть для каждого ребра (i, j) однозначно определено некоторое число $w(i, j)$ — его вес (длина, стоимость), которое называется *весовой функцией*.

Задача: найти такой связный ациклический подграф T данного графа G , содержащий все вершины, чтобы суммарный вес его ребер был бы минимальным.

В этом случае T называют *минимальным остовным деревом* (Minimum Spanning Tree, MST).

В настоящее время известно несколько алгоритмов нахождения MST и, в частности, односвязывающие алгоритмы Прима-Крускала в, которых используется понятие «ближайшего соседа»: для вершины i «ближайшим соседом» будет вершина j ($i > j$) при соблюдении условия

$$w(i, j) = \min w(i, l), \tag{1}$$

при этом l не равно i и $l = 1, 2, \dots, n$.

Уже при первом шаге образуется первое ребро, представляющее собой фрагмент (F) MST, и в дальнейшем ближайшей вершиной к фрагменту F будем называть такую вершину j , для которой выполняется условие (1), при этом все вершины i будут принадлежать фрагменту F .

Последовательное применение вышеприведенных действий приведет к тому, что за $(n - 1)$ шагов будет построено MST.

Для примера, на заданном графе (рис. 1 а), включающем 9 вершин, MST будет построено за 8 шагов (рис. 1 б).

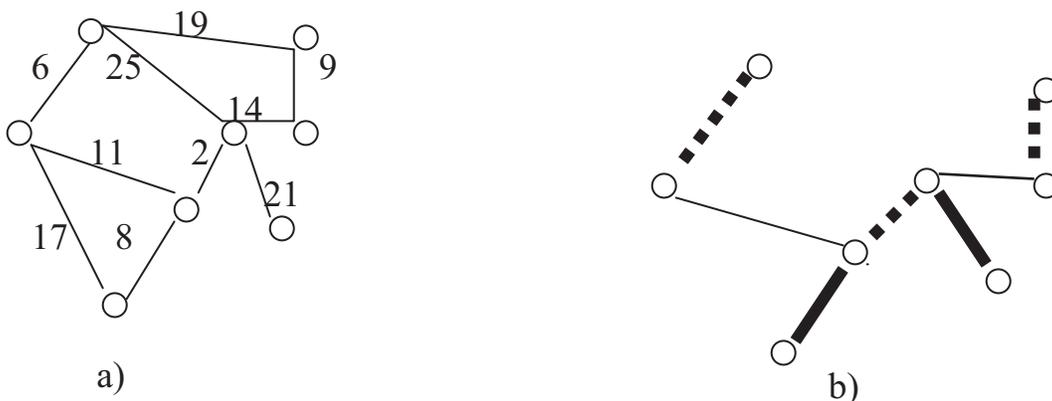


Рис. 1.

Анализ процесса построения MST позволяет заметить следующее:

- все ребра, связанные отношением близости ($i > j$), вошли в MST (отмечены жирными линиями), образовав, в общем случае, несколько фрагментов (F),
- в каждом фрагменте (F) существует одна пара вершин i, j (отмеченные пунктиром), которые обладают уникальным свойством. А именно, для вершины i вершина j будет «ближайшим соседом», а для вершины j вершина i будет, в свою очередь, тоже будет «ближайшим соседом», что дало основание ввести **новое определение**: вершины i и j будем называть «*взаимоближайшими соседями*» ($i < j$ или $i > j$), если верно отношение:

$$w(i, j) = \min w(i, l) = \min w(j, l), \quad (2)$$

при этом l не равно ни i , ни j и $l = 1, 2, \dots, n$ (n — общее число вершин).

Докажем следующие леммы:

Лемма 1: *если все «ближайшие соседи» для m вершин образуют MST, содержащее $(m - 1)$ вершин, тогда только одна пара вершин является «взаимоближайшими соседями» ($i < j$ или $i > j$).*

Доказательство: Это верно, так как в противном случае число ребер будет меньше $(m - 1)$, т.е. будут существовать несвязанные фрагменты (F).

Лемма 2: *дерево, содержащее «ближайших соседей», будет ациклическим.*

Доказательство: в противном случае будет существовать циклическая цепь вершин $v > i, i < j$ или $i > j, j < \dots < u < v$, т.е. для вершины v «ближайшим соседом» будет не только вершина i , но и вершина u , что противоречит исходным данным.

Эти факты позволяют сформулировать *иерархический алгоритм* построения MST:

- **Шаг 1** (i -й уровень иерархии), $i = 0, 1, 2, \dots, k$): *параллельное* определение «ближайших соседей» для всех фрагментов i -го уровня, при этом выполняется условие (1) с уточнением того, что вершины i и j принадлежат разным фрагментам.

(Примечание: все вершины заданного графа являются фрагментами нулевого уровня),

- **Шаг 2:** фрагменты i -го уровня по признаку «близости» *последовательно* объединяются во фрагменты $(i + 1)$ -го уровня,
- **Шаг 3 :** Проверка:
 - если число «взаимоближайших соседей», по условию (2), не равно 1, то осуществляется переход к Шагу 1,
 - если число «взаимоближайших соседей» (вершин либо фрагментов) равно 1, то все «ближайшие соседи» (вершины либо фрагменты) образуют искомое MST (T), что означает завершение работы алгоритма.

При этом число шагов k (уровней иерархии) зависит как от количества вершин, так и от взаимного расположения самих вершин (фрагментов).

Применение данного алгоритма для построения MST для графа $G(V, E)$, приведенного на рис. 1 а), дало следующие результаты:

- на первом уровне иерархии (в результате выполнения Шагов 1 и 2) получены 3 фрагмента (рис. 2 а)),
- на втором уровне иерархии эти 3 фрагмента объединяются в один фрагмент, представляющий искомое MST (рис. 2 б)).

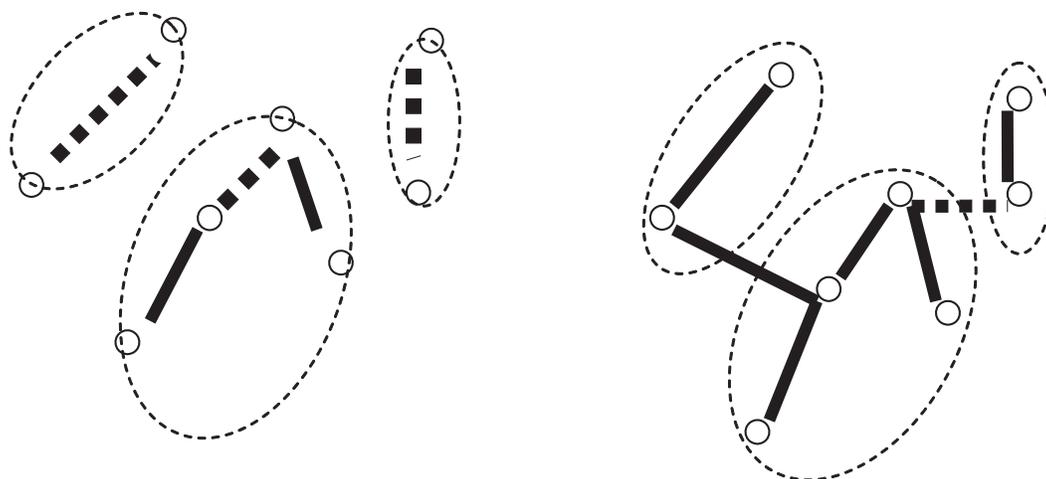


Рис. 2.

Закурдаев Сергей Васильевич,
независимый эксперт.

E-mail: zakurd@rambler.ru

Краткая энциклопедия современной математики (выдающиеся открытия и открытые вопросы с простой формулировкой)

В. И. Войтицкий

Краткое изложение исторического развития основных направлений математики, от античных времен до современности.

Вместо предисловия

Как и любая другая наука, математика является живым организмом (выражаясь метафорично, — *деревом*), который находится в постоянном росте и развитии, имеет свою давнюю историю, насыщенную периодами бурных всплесков и подъемов, а также периодами спада и отсутствия заметных продвижений. Весь XX век, а также в начале XXI века наблюдается стремительное развитие и обогащение математических методов и идей, которое позволило решить или существенно продвинуться в решении ряда выдающихся математических задач. К таким задачам отнесем известные широкой общественности проблемы, которые решались несколько десятилетий или столетий и вызвали появление новых математических направлений и теорий. В данной статье предпринята попытка перечислить большую часть таких доступных для понимания широкой аудитории решенных и нерешенных задач, формирующих контекст, в котором развивается современная математическая наука. Безусловно, список подобных задач априори будет неполным и субъективным. Современные проблемы математики сложны для понимания и требуют значительной математической подготовки. В связи с этим в приоритете данной работы находятся математические проблемы доступные для понимания школьниками старших классов и студентами, на которых в первую очередь и ориентирована данная работа.

Для удобства восприятия материала статьи тематические сюжеты сгруппированы пятерками, объединёнными названиями каждого из пяти разделов. Можно придумать как минимум пять математических объяснений такой группировки: *число 5 является пятым (и притом простым) членом последовательности Фибоначчи; правильный пятиугольник и пятиконечная звезда напрямую связаны с золотым сечением — основой гармонии; существует ровно 5 платоновых тел (правильных многогранников, где в каждой вершине сходится равное число ребер и все грани — правильные многоугольники); начиная с 5 степени алгебраическое уравнение не разрешимо в радикалах; на сегодня известно ровно 5 простых чисел Ферма.* Кроме того, это пятая статья автора в журнале “Математическое образование”.

I. Точность — вежливость королевы наук

1. Аксиоматический подход и математическая логика
2. Теорема К. Гёделя о неполноте
3. Неевклидовы геометрии
4. Теория множеств и континуум-гипотеза Кантора
5. Теория алгоритмов и информатика

1. Математика является строгой дедуктивной наукой, где все утверждения следует рассматривать как гипотезы, которые нужно доказывать с помощью строгих логических переходов, основываясь на заданных определениях и других ранее доказанных утверждениях. Естественно, что такой **аксиоматический подход** (восходящий к трудам Аристотеля) подразумевает наличие базовых утверждений, которые не могут быть доказаны на основе более простых утверждений. Такие принимаемые без доказательства утверждения называются *аксиомами*.

Аксиом и правил вывода должно быть достаточно много, а именно настолько много, чтобы любое утверждение, оперирующее с объектами данной теории, было либо справедливым (т.е. доказуемым в рамках данной системы аксиом) либо не справедливым (т.е. доказуемо его отрицание). Справедливые утверждения называются *теоремами*. Система аксиом, в которой любое утверждение возможно доказать или опровергнуть, называется *полной*. Ясно, что чем больше принимается аксиом, тем вероятнее, что система будет полной, однако при этом возникает другая проблема — возможность доказать справедливость некоторого утверждения вместе с его отрицанием. Такая система аксиом называется *противоречивой*. Очевидно, что в идеальной ситуации система аксиом должна быть полной и непротиворечивой.

В математике можно выделить как минимум четыре важные системы аксиом: *аксиоматика планиметрии*, *арифметики (аксиоматика Пеано)*, *теории множеств* и *теории вероятностей (аксиоматика А.Н. Колмогорова)*. В целом основания математики, теорию математического доказательства и доказуемости изучает отдельная наука — **математическая логика**.

2. Долгие годы считалось, что математическими средствами можно доказать полноту и непротиворечивость систем аксиом арифметики и геометрии. Оказалось, однако, что средствами самой теории невозможно доказать непротиворечивость этой теории, при этом любая непротиворечивая теория является неполной. Данное утверждение, строго доказанное *Куртом Гёделем* в 1930 году, носит название **теоремы Гёделя о неполноте**. Таким образом, строгость арифметики и математики в целом является, вообще говоря, условной. Хорошо известны парадоксы наивной теории множеств, которые допускают неоднозначную трактовку и указывают на несовершенство (либо неполноту) используемой системы аксиом. Разрешение ряда парадоксов приводит к пересмотру аксиом, а также к открытию новых разделов математики. Любой такой «пересмотр», безусловно, является выдающейся задачей и неизбежен в будущем.

3. Знаменитый пересмотр системы аксиом в геометрии произошёл в середине XIX столетия. Восходящая к древнегреческому математику *Евклиду* система аксиом планиметрии (описанная в его главном труде «*Началах*», ставшем на долгие столетия главным учебником по геометрии) включает в себя *пятый постулат*, согласно которому через любую точку вне данной прямой проходит ровно одна прямая, параллельная данной. Долгое время данное утверждение пытались доказать либо опровергнуть, опираясь на другие аксиомы. Но данные попытки были безрезультатны. Оказалось, что данную аксиому можно различным образом видоизменять, в результате чего получаются модели других (**неевклидовых**) **геометрий**. В частности, если предположить, что существуют две различные прямые, проходящие через общую точку, параллельно данной прямой, то возникает непротиворечивая *геометрия Лобачевского*, впервые открытая нашим выдающимся соотечественником Николаем Ивановичем Лобачевским в середине XIX столетия и независимо от него венгерским математиком *Яношом Бойяи*. Существуют и другие неевклидовы геометрии, например, *Римановы геометрии*. Естественно, что привычные школьные факты евклидовой планиметрии могут быть неверными в других аксиоматиках. Например, сумма углов треугольника в геометрии Лобачевского менее 180 градусов, а в сферической геометрии более 180 градусов.

4. В основании современной математики также лежит **теория множеств**, которая, несмотря на свою естественность и простоту, до сих пор таит в себе много загадок. Как независимая математическая ветвь она была создана во второй половине XIX века немецкими математиками *Георгом Кантором* и *Рихардом Дедекиндом*. При этом ее использование почти сразу столкнулось с трудностями в связи с открытием ряда парадоксов, одним из которых является так называемая **континуум-гипотеза**, выдвинутая Кантором в 1877 году. Континуум-гипотеза стала первой из двадцати трёх математических проблем, о которых выдающийся немецкий математик Давид Гильберт доложил на II Международном Конгрессе математиков в Париже в 1900 году (его доклад состоял из 23 крупных проблем, перешедших из XIX в XX век, на сегодня большая часть из них решена).

Континуум-гипотеза возникла в результате сравнения бесконечных множеств. Любые два конечных множества, имеющих равное число элементов, являются *равномощными*, это означает, что

между их элементами существует взаимно-однозначное соответствие (мощность при этом равна числу элементов в каждом из них). Бесконечные подмножества множества действительных чисел могут быть *счетные* (мощности алеф-нуль) и *несчетные*. Элементы счетного множества можно пронумеровать, тем самым осуществив взаимно однозначное соответствие с множеством натуральных чисел (дискретная ситуация). Континуум-гипотеза утверждает, что все несчетные подмножества на числовой оси имеют мощность континуума. Множества мощности континуума можно взаимно однозначно отобразить на конечный интервал или на всю действительную ось (непрерывная ситуация). Суть гипотезы в том, что множеств промежуточной мощности между счетным и континуумом нет.

Решение проблемы континуума было дано в середине XX века *Куртом Гёделем* и *Полом Коэном*, в чьих работах было доказано, что данную гипотезу невозможно ни доказать, ни опровергнуть в рамках стандартной аксиоматической теории множеств. Таким образом, континуум-гипотезу можно либо рассматривать в качестве новой аксиомы, либо принять ее несправедливость, получив тем самым возможность создавать новые математические теории.

5. Теорема Геделя о неполноте послужила толчком для стандартизации понятия алгоритма и появлению в 30-ых годах XX столетия первых формальных языков и вычислительных машин. Начало **теории алгоритмов** и возникшей на ее основе **информатики**, было положено в работах *Алана Тьюринга*, *Эмиля Поста* и *Алонзо Чёрча*. Предложенные ими *машина Тьюринга*, *машина Поста* и *лямбда-исчисление* оказались эквивалентными друг другу, поскольку каждая из задач, разрешимых в одной алгоритмической системе, являлась разрешимой и в другой. Сложно переоценить этот с первого взгляда формальный шаг в математике. Он позволил переформулировать различные задачи на едином языке формальной логики, использовать электронные вычислительные машины для построения переборных решений, классифицировать задачи по трудоемкости алгоритмов, доказать неразрешимость ряда классических задач математики. Все эти факторы существенно повысили возможности современной математики и открыли новую эпоху в ее развитии.

II. «Всё есть число» (Пифагор)

1. Число нуль и его странности
2. Иррациональные числа
3. Комплексные числа, кватернионы и числа Кэли
4. Алгебраические и трансцендентные числа
5. Квадратичные иррациональности и три знаменитые задачи на построение

1. В том или ином виде любая математическая теория опирается на понятие числа. За долгую историю человечество использовало все более сложные и абстрактные числовые системы, необходимые для решения текущих прикладных задач. *Натуральные числа* или числа счета возникли из естественных нужд древних людей в подсчете собранного урожая, измерения расстояния, летоисчисления и др. Нужды торговли привели к понятию долга, который удобно описывается отрицательным числом, при этом снимается запрет отнимать от меньшего числа большее. Потребности в измерениях длин и весов привели людей к понятию *дробей*, которые позволяют умножать и делить не только целые числа, но и дробные числа друг на друга.

Интересно, что многие народы имели специальный символ для обозначения пустоты или ничего, но **нуль** числом не считали, а также не использовали ноль в качестве цифры. Например, таковой была египетская система счисления. Ноль не считался числом также у Древних Греков и Римлян. Даже в XVII веке английский математик *Джон Валлис* писал: «Ноль не есть число». Только в трудах *Леонарда Эйлера* окончательно для Европейской математики ноль уравнен в правах с другими числами.

Особый статус нуля объясняется странностями его использования. Общеизвестно, что *нельзя делить на нуль*. Не ясно, считать ли нуль натуральным числом или нет, кроме того непонятной является конструкция *нуль в нулевой степени*. Дискуссия о значении этого выражения длится с

начала XIX века, и она не закончена до сих пор. В большой советской энциклопедии указывается, что данная конструкция является неопределённостью. Многие современные математики (в том числе Д. Кнут), однако, считают, что это выражение (как и факториал нуля) равно единице.

2. Не сразу вошли в математику и **иррациональные числа**. Считается, что впервые существование иррациональных чисел было обнаружено членом Пифагорейской школы *Гиппасом* около 470 года до нашей эры (по-видимому, этим числом было золотое сечение $\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,62$, равное отношению диагонали к стороне правильного пятиугольника). Существует легенда, согласно которой Гиппас совершил открытие, находясь в морском походе, и был выброшен за борт другими пифагорейцами «за создание элемента вселенной, который отрицает доктрину, что все сущности во вселенной могут быть сведены к целым числам и их отношениям». Постепенно математики Древней Греции приняли идею существования «несоизмеримых величин». В трудах Евдокса и Евклида иррациональные числа выступают наравне с рациональными.

3. В XVII веке в связи с бурным развитием алгебры в математике прочно укрепились **комплексные числа**. Особый вклад в их изучение внесли *Абрахам де Муавр* и *Леонард Эйлер*. Комплексные числа связаны со снятием последнего существенного запрета в математике — извлечением корней у отрицательных чисел. Многие известные математики (в том числе Лейбниц и Декарт) отрицали существование комплексных чисел, отсюда пошло название «мнимые числа». Однако с их помощью удалось найти алгоритм решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степени, а также решить ряд других задач. Впервые такая методика описана в трудах итальянских математиков *Джессероламо Кардано* «Великое искусство, или об алгебраических правилах» (1545), а также независимо от него в работах *Рафаэля Бомбелли*.

Сложно переоценить, насколько сильным оказалось влияние комплексных чисел на всю математику. По сути, вся современная математика оперирует с полем комплексных чисел, поскольку данная структура является наиболее удобной и во многих смыслах оптимальной. Комплексный анализ позволяет более эстетично и с единой точки зрения описывать различные утверждения вещественного анализа, хотя многие факты перестают быть очевидными и естественными, например, число i^i может равняться одному из бесконечного множества действительных чисел, а $\sqrt[n]{1}$ равен одному из n комплексных чисел.

Также в современных приложениях используются более широкие числовые системы — **кватернионы** (упорядоченные четверки) и **числа Кэли** (упорядоченные восьмерки, названные в честь английского математика Артура Кэли). По ряду причин других удобных числовых систем нет. Это связано, в частности, с тем, что, в отличие от комплексных чисел, более широкие множества «гиперчисел» теряют важные привычные свойства. Например, кватернионы не являются коммутативными по отношению к операции умножения (результат умножения зависит от порядка сомножителей), а числа Кэли сверх этого не являются ассоциативными по умножению.

4. Среди иррациональных чисел важную роль играют числа, являющиеся корнями многочленов с целыми коэффициентами. Такие числа называют **алгебраическими** (например, корень любой целой степени из натурального числа). Остальные иррациональные числа называются **трансцендентными**. Впервые понятие трансцендентного числа ввёл французский математик *Жозеф Луи Вилье* в 1844 году, когда доказал теорему о том, что алгебраическое число невозможно слишком хорошо приблизить рациональной дробью. Он же первым построил пример трансцендентного числа.

Такая классификация породила задачи о принадлежности знаменитых математических констант к числу трансцендентных. В 1873 году *Шарль Эрмит* доказал трансцендентность числа e , основания натуральных логарифмов. В 1882 году *Фердинанд фон Линдеман* доказал теорему о трансцендентности степени числа e с ненулевым алгебраическим показателем, тем самым доказав трансцендентность числа π . В 1934 году советский математик *Александр Осипович Гельфонд*, доказал седьмую проблему Гильберта, согласно которой любое число a^b является трансцендентным, если $a \neq 0$, $a \neq 1$, а b — иррациональное алгебраическое число. Например, трансцендентным является число $2^{\sqrt{2}}$. Для

многих чисел свойство трансцендентности (и даже иррациональности) остается не исследованным, например, для числа $\ln \pi$.

5. Важным подвидом алгебраических чисел являются **квадратичные иррациональности**, т.е. числа, получающимися из обыкновенных дробей с помощью 4 арифметических операций и операции извлечения квадратного корня. Оказывается, по эталонному единичному отрезку с помощью циркуля и линейки можно построить лишь отрезки с длинами, являющимися квадратичными иррациональностями. Это накладывает существенное ограничение на возможности построения циркулем и линейкой, которые были основными инструментами геометрических построений с античных времен.

Среди прочих выделяют **три знаменитые античные задачи на построение циркулем и линейкой** (которые являются неразрешимыми):

* **Задача о квадратуре круга.** *С помощью циркуля и линейки построить квадрат, равновеликий данному кругу* (данная задача неразрешима в силу трансцендентности числа π , доказанного Линдеманом лишь в 1882 году).

* **Задача о трисекции угла.** *Поделить произвольный угол на три равные части* (задача неразрешима, поскольку трисекция угла приводит в общем случае к решению кубического уравнения, которое может иметь решения, не являющиеся квадратичными иррациональностями).

* **Задача об удвоении куба.** *С помощью циркуля и линейки построить куб, имеющий в два раза больший объем, чем заданный куб* (задача сводится к построению числа $\sqrt[3]{2}$, которое не является квадратичной иррациональностью).

III. Непростые простые числа

1. Простые числа-близнецы
2. Простые числа Ферма и построения правильных n -угольников
3. Совершенные числа
4. Проблема Гольдбаха
5. Вопросы без ответов

1. Среди натуральных чисел особую роль играют *простые числа*, имеющие в качестве делителей лишь себя и единицу. Единица не является ни простым ни составным числом, при этом каждое натуральное число, большее единицы, единственным образом разлагается в произведение простых сомножителей. Это важное свойство называется *основной теоремой арифметики*. Еще во времена Евклида было известно, что простых чисел бесконечно много. Но многие вопросы о свойствах этого нерегулярного числового ряда до сих пор не имеют ответа.

Например, до сих пор не известно, бесконечно ли много простых **чисел-близнецов**, т.е. простых пар отличающихся на 2, таких как 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19 и т.д. 17 апреля 2013 года американский математик китайского происхождения *Итан Чжан* сообщил о доказательстве того, что существует бесконечно много пар простых чисел, отличающихся не более чем на 70 миллионов. Через год другой американский математик *Пэйс Нильсен* доказал, что существует бесконечно много простых чисел, отличающихся не более чем на 246. На сегодня эта оценка не улучшена.

Интересно, что ряд чисел, обратных простым близнецам (конечный или бесконечный) сходится к *константе Бруна*, которая приближенно равна 1,9. При этом ещё Эйлер в 1740 году выяснил, что ряд чисел, обратных всем простым, расходится.

2. До сих пор не известно, сколько существует **простых чисел Ферма**, т.е. простых чисел вида $2^{2^n} + 1$, где n — натуральное или нуль. На сегодня известно лишь 5 таких чисел: 3, 5, 17, 257, 65537, соответствующих $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Несложно понять, что среди чисел вида $2^n + 1$ простыми могут быть лишь числа Ферма.

В 1796 году выдающийся немецкий математик *Карл Фридрих Гаусс* (ему на тот момент было 19 лет) описал алгоритм построения циркулем и линейкой правильного 17-угольника, а также нашел все

правильные n -угольники с простым числом сторон, которые можно построить с помощью циркуля и линейки. Этот класс совпадает с множеством простых чисел Ферма. Имеет место более общая *теорема Гаусса-Ванцеля*, согласно которой циркулем и линейкой можно построить тот и только тот n -угольник, в котором $n = 2^k p_1 p_2 \dots p_m$, где k — натуральное или нуль, а p_i — различные простые числа Ферма.

Интересно, что в XIX веке были найдены алгоритмы построения 257 и даже 65537-угольника! Правильный 257-угольник построил *Фридрих Ришело* в 1832 году. В 1894 году *Йоган Гермес* опубликовал более чем 200-страничную диссертацию, целиком посвященную построению правильного 65537-угольника. Оригинал рукописи хранится в библиотеке Гёттингенского университета. Легенда гласит, что один слишком навязчивый аспирант довёл своего руководителя до того, что тот сказал ему: «Идите и разработайте построение правильного многоугольника с 65 537 сторонами». Аспирант удался, чтобы вернуться через 20 лет с соответствующим построением.

3. Среди натурального ряда также выделяются **совершенные числа**, равные сумме своих делителей. Таковым является число $6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$, а также 496, 8128 и др. На 2019 год известно 51 совершенное число, каждое из которых является чётным. Согласно теореме *Леонарда Эйлера* (одного из наиболее плодотворных и разносторонних математиков всех времен) все чётные совершенные числа имеют вид $2^{p-1}(2^p - 1)$, где p — такое натуральное число, что $2^p - 1$ является простым. На сегодня не найдено ни одно нечетное совершенное число и не доказано, что таких чисел не существует. Если все же нечетные совершенные числа встречаются, то они превышают 10^{1500} .

4. В 1742 году немецкий математик *Кристиан Гольдбах* послал письмо Эйлеру, в котором высказал следующее предположение «Каждое нечётное число, большее 5, можно представить в виде суммы трёх простых чисел». Эйлер заинтересовался проблемой и выдвинул более сильную гипотезу: «Каждое чётное число, большее двух, можно представить в виде суммы двух простых чисел». Первое утверждение называется **тернарной проблемой Гольдбаха**, второе — **бинарной проблемой Гольдбаха** (или проблемой Эйлера).

Тернарная гипотеза Гольдбаха была окончательно доказана в 2013 году перуанским математиком *Харальдом Гельфготтом*. При этом бинарная проблема не доказана до сих пор. На апрель 2012 года бинарная гипотеза была проверена для всех чётных чисел, не превышающих $4 \cdot 10^{18}$.

Необходимо отметить, что первые шаги в решении проблем Гольдбаха сделаны выдающимся советским математиком *Иваном Матвеевичем Виноградовым*. В 1937 году он доказал справедливость тернарной гипотезы Гольдбаха для всех чисел, больших некоторой константы, однако нижняя граница оказалось настолько большой, что проверить остальные числа с помощью компьютера в XX веке не удалось. В том же году он установил, что почти все чётные числа представимы в виде суммы двух простых чисел.

5. Многие вопросы о свойствах простых чисел до сих пор не имеют ответов. Например, не известно, всегда ли найдется простое число между двумя последовательными квадратами (между 9 и 16, 16 и 25, 25 и 49 и т.д.)? Открытой проблемой является также существование бесконечного количества простых чисел во многих целочисленных последовательностях, например среди чисел Мерсенна (чисел вида $2^n - 1$), чисел Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...), и др.

IV. У истоков современной математики

1. Современная алгебраическая символика
2. Аналитическая геометрия и математический анализ — прародители классической математики
3. Функциональный анализ, теория вероятностей и топология — триединый язык современной математики
4. Формулы для корней многочленов, теория Галуа и зарождение современной алгебры
5. Диофантовы уравнения. Великая теорема Ферма. Алгебраическая геометрия

1. Как только математики освоились с различными числовыми системами, они стали вводить переменные величины, установили общие правила алгебраических преобразований, начали решать различные уравнения. Важный шаг в развитии математики как абстрактной науки был сделан с введением понятия переменной величины и использованием буквенных обозначений для чисел. В Европе это произошло в XVII веке в работах французского математика и юриста *Франсуа Виета* (открывшего также знаменитые формулы для корней многочленов). При этом показатели степени Виет записывал еще словесно.

Дальнейшее становление современной **алгебраической символики** связано с работами выдающегося французского математика и философа *Рене Декарта*. В частности, он начал обозначать показатель степени верхним индексом, переменные величины последними буквами латинского алфавита, а известные величины — начальными буквами. Удачная алгебраическая символика и метод координат Декарта способствовали скорому появлению в конце XVII века новых ветвей математики — аналитической геометрии и математического анализа.

Важен также вклад *Леонарда Эйлера* в современную математическую символику. Он ввел в математику обозначения для констант π , e , i , обозначения функций $y(x)$, $f(x)$, логарифмов $\ln x$, $\log_a(x)$, четырех тригонометрических функций, а также знака суммы \sum .

2. **Аналитическая геометрия** создана в 1637 году, когда был опубликован труд «Геометрия» *Рене Декарта* и независимо от него труд «Введение в изучение плоских и телесных мест» другого выдающегося французского математика *Пьера де Ферма*. Важнейшим открытием этих ученых является возможность интерпретации геометрических объектов и задач на языке алгебры, что имело решающее значение для всей последующей истории развития геометрии и математики в целом.

Официальной датой рождения **дифференциального исчисления** можно считать май 1684 года, когда выдающийся немецкий математик *Готфрид Лейбниц* опубликовал статью «Новый метод отыскания максимумов и минимумов». В этой работе введены понятия бесконечно малого приращения, дифференциала и основ дифференциального исчисления.

Используя другие (не столь удачные) обозначения, независимо от Лейбница основы дифференциального, а также интегрального исчисления заложил гениальный англичанин *Исаак Ньютон* в работе «О квадратуре кривых», вышедшей в 1704 году. В этой работе, основываясь на интуитивном понимании, он ввел понятия предела и производной. Надо отметить, что Ньютон, не публиковал своих результатов по анализу более 30 лет, по-видимому, не имея для этого достаточно времени. В двух других работах 1711 и 1736 годов он предложил методики решений ряда обыкновенных дифференциальных уравнений, ввел понятия частных производных, заложил основы численных методов, а также описал ряд задач механики и геометрии, доказав исключительную важность предложенного им метода для физики и приложений.

Дальнейшее развитие **математического анализа** связано с именами многих выдающихся математиков XVIII-XIX веков. Среди них *Л. Эйлер*, *К. Гаусс*, *И. Бернулли*, *О. Коши*, *Ж. Лагранж*, *К. Вейерштрасс*, *Б. Риман*, *П. Лаплас*, *Ж. Фурье*, *М. Остроградский* и многие другие. В их работах аналитическая геометрия и математический анализ приобрели современные очертания, была заложена основа для создания ряда новых математических дисциплин, ставших впоследствии классическими. К ним относятся *теория вероятностей*, *теория дифференциальных уравнений*, *дифференциальная геометрия*, *линейная алгебра*, *комплексный анализ*, *аналитическая теория чисел*, *вариационное исчисление*, *математическая физика* и другие. Также в продолжение этих исследований в XX веке возник функциональный анализ, ставший вместе с теорией вероятностей и топологией «языком» современной математики.

3. **Функциональный анализ** возник из вопросов сходимости функциональных рядов, представления решений дифференциальных уравнений в виде рядов либо интегралов под влиянием методов линейной алгебры и топологии. Ключевая идея этой науки заключается в рассмотрении функции как элемента (вектора) в некотором абстрактном бесконечномерном топологическом пространстве (наиболее распространенными являются гильбертовы и банаховы пространства). *Гильбертовы простран-*

ства являются наиболее естественным обобщением обычного евклидова пространства. Впервые такое пространство возникло на рубеже XIX и XX веков в работах *Давида Гильберта* по разложению функций в ортогональные ряды и решению интегральных уравнений. Гильбертовы пространства имеют значительную важность благодаря развитой теории операторов (изучающей свойства преобразований функций заданного класса) и широким их приложениям в теории дифференциальных уравнений, квантовой механике и др.

В работах выдающегося польского математика *Стефана Банаха* (создателя Львовской математической школы), а также его учеников и коллег в начале XX века сформировался **современный функциональный анализ**, включающий в себя три основных принципа теории операторов, действующих в банаховых пространствах (*теорема Банаха об обратном операторе*, *теорема Хана-Банаха* и *Банаха-Штейнгауза*). Большой вклад в развитие функционального анализа (а также многих других разделов математики) сделали выдающиеся американские математики *Джон фон Нейман* и *Норберт Винер*, советские математики *Леонид Витальевич Канторович*, *Израиль Моисеевич Гельфанд*, *Марк Григорьевич* и *Селим Григорьевич Крейны*, французский математик *Морис Фреше*, венгерский математик *Фридьеш Рис* и многие другие.

Теория вероятностей зародилась в конце XVII века в результате увлечения богачей азартными играми. Первоначально она не являлась строгой наукой и представляла из себя набор эмпирических закономерностей. Первые классические результаты принадлежат французским математикам *Блезу Паскалю* и *Пьеру Ферма*, которые состояли в личной переписке. Первое систематическое изложение теории вероятностей осуществлено в книге *Якоба Бернулли* (одного из представителей семейства выдающихся швейцарских математиков) «Искусство предположений», вышедшей в 1713 году. Там, в частности, впервые изложен «закон больших чисел», объясняющий причину, по которой частота события в серии испытаний не меняется хаотично, а в некотором смысле стремится к своему предельному значению — вероятности. Дальнейшее развитие классической теории вероятностей связано с именами *Пьера Лапласа*, *Карла Гаусса* и *Симеона Пуассона*, исследовавших классические распределения с применением методов математического анализа, а также заложившим основы математической статистики. Как самостоятельная дисциплина **математическая статистика** оформилась на рубеже XIX и XX веков в работах английского математика *Карла Пирсона*, который разработал теорию корреляции, критерии согласия, регрессионный анализ, алгоритмы проверки гипотез и оценки параметров.

Надо отметить, что, как строгая математическая дисциплина, теория вероятностей оформилась только в 30-е годы XX века. Именно в это время выдающийся советский математик *Андрей Николаевич Колмогоров* предложил ныне общепринятую *аксиоматику теории множеств*, основанную на теории меры (тем самым частично решена 6-я проблема Д. Гильберта, в которой предполагалось «математическое изложение основ физики»). В течение XX века теория вероятностей нашла чрезвычайно много приложений в физике, биологии, теории информации, лингвистике, предложив новые подходы к изучению ряда задач чистой и прикладной математики.

Топология — это наука об инвариантах, т.е. характеристиках и свойствах, сохраняющихся в результате непрерывных преобразований. С точки зрения топологии круг неотличим от квадрата (оба односвязны), но существенно отличается от кольца (не односвязно), лента Мёбиуса роднится со сферой без одной точки (не ориентируемые многообразия), существенно отличаясь от цельной сферы (ориентируемое многообразие). Начала этой науки (как отдельной ветви геометрии) проистекают из работ *Карла Гаусса* начала XIX века. Существенное развитие теория получила в конце XIX века в работах выдающегося французского математика *Анри Пуанкаре* и немецкого математика *Феликса Хаусдорфа*. В XX веке наблюдалось бурное развитие топологических методов, вошедших составной частью в большинство разделов современной математики.

4. Перейдём теперь к описанию истории возникновения **современной алгебры**. Каждый школьник знает формулу для нахождения корней квадратного уравнения через дискриминант. Сама процедура нахождения корней или доказательства их отсутствия является алгоритмической и осуществля-

ется посредством конечного числа арифметических операций и извлечения корня. Существует более сложный конечный алгоритм для нахождения корней кубического уравнения и уравнения четвертой степени. Данные формулы были найдены в начале XVI века итальянскими математиками *Дель Ферро*, *Дж. Кардано*, *Н. Тартальей* и *Л. Феррари*. При этом оказалось, что, с использованием новых формул (названных в честь Дж. Кардано и его ученика Л. Феррари), корни уравнений вычисляются корректно только при возможности извлечения квадратных корней из отрицательных чисел. Этот факт в конечном итоге повлиял на открытие и принятие комплексных чисел.

На протяжении более 2-х веков после успехов в решении уравнений 3 и 4 степени математики искали *формулы для решения уравнений 5 степени и выше*. Финальную точку в этих поисках поставили исследования *Руффини* и *Абеля*. Доказательство неразрешимости уравнений выше 4 степени в радикалах было предложено итальянским математиком *Паоло Руффини* в 1799 году и занимало около 500 страниц. К сожалению, в нем был обнаружен ряд неточностей, который смог исправить 22-летний выдающийся норвежский математик *Нильс Абель* в 1824 году. Тем самым вопрос о разрешимости уравнений высоких степеней был закрыт.

Важно отметить, что современное доказательство теоремы Руффини-Абеля основывается на **теории групп Галуа**, открытых после прочтения мемуаров Абеля молодым французским математиком-революционером *Эваристом Галуа* (прожившим всего 20 лет). Галуа удалось найти необходимые и достаточные условия, при которых уравнение высокой степени разрешимо в радикалах. Удивительным фактом является то, что научными исследованиями Галуа занимался всего 4 года в промежутках между политической борьбой, при этом его открытия не были сразу поняты и опубликованы. Возможно, они так и не стали бы достоянием человечества, если бы не были осознаны *Жозефом Лиувиллем*, который опубликовал их в журнале с подробными комментариями спустя более 10 лет после смерти на дуэли Э. Галуа.

Важно отметить, что, начиная с работ Галуа, в математике используются термины *группа* и *поле*. Данные базовые алгебраические структуры позднее обогатились рядом других понятий, став предметом изучения отдельной дисциплины — **общей (или универсальной) алгебры**. Отдельной важной ветвью этой науки является *теория категорий*, изучающая в максимальной общности свойства отношений между математическими объектами, не зависящие от внутренней структуры объектов.

5. Весьма интересна история решения ряда **диофантовых алгебраических уравнений**, т.е. поиска целых корней многочленов с целыми коэффициентами. Десятая проблема Гильберта подразумевала нахождение универсального метода определения разрешимости произвольного алгебраического диофантового уравнения. Известно, что ряд таких уравнений разрешимы, например, *пифагоровы тройки* или *уравнение Пелля*, а некоторые не имеют целочисленных решений. В 1970 году советский математик *Юрий Матиясевич* доказал алгоритмическую неразрешимость десятой проблемы Гильберта.

К числу неразрешимых диофантовых уравнений относятся уравнения $x^n + y^n = z^n$ для натуральных $n \geq 3$. Этот факт известен как **Великая (или последняя) теорема Ферма**. Отметим, что при $n = 2$ решений (пифагоровых троек) существует бесконечно много и они описывают всевозможные целочисленные прямоугольные треугольники. В общем виде эту задачу сформулировал в 1637 году *Пьер Ферма*, причем сделал он это на полях «*Арифметики*» *Диофанта* (фундаментальная книга древнегреческого математика из 13 томов, в которой были описаны основные достижения арифметики и алгебры, известные в III веке н.э.). По словам Ферма, «на полях не нашлось достаточно места, чтобы поместить элегантное доказательство этого результата». Итогом этих слов явилась почти 300 летняя борьба за доказательство, увенчавшаяся успехом лишь в 1995 году. Именно в этом году английский математик *Эндрю Уайлс* опубликовал в журнале «*Annals of Mathematics*» доказательство, принятое математической общественностью. Отметим, что первый вариант доказательства был получен в 1993 году, однако он содержал серьезный пробел. (Интересно, что в 1769 году *Л. Эйлер* высказал гипотезу, что целый куб не разлагается в сумму двух кубов, целая четвертая степень не

разлагается в сумму трёх слагаемых четвертой степени, целая пятая степень не разлагается в сумму четырех слагаемых пятой степени и т.д. Это утверждение доказано лишь для кубов, для четвертых и пятых степеней существуют контрпримеры:

$$95\,800^4 + 217\,519^4 + 414\,560^4 = 422\,481^4, \quad 21^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

Чрезвычайно сложное доказательство *Эндрю Уайлса* стало возможным благодаря успехам **алгебраической геометрии**, науки, сформировавшейся в XX веке на стыке общей алгебры и геометрии, и изучающей свойства алгебраических многообразий, т.е. геометрических объектов, являющихся решениями систем алгебраических уравнений. Существенный прогресс в методах исследования данных объектов был сделан в 50-е–60-е годы выдающимися французскими математиками *Жан-Пьер Серром* и *Александром Гротендиком*. Надо отметить, что они входили в состав коллектива французских математиков, печатавших свои работы под коллективным псевдонимом *Никола Бурбаки*. Это уникальное математическое сотрудничество возникло в 1935 году, когда группа выпускников парижской Высшей нормальной школы поставила целью в серии научных трудов описать в строгой аксиоматической и формальной манере все разделы математики на основе теории множеств. Итогом данной работы стал выход в свет 10 книг, оказавших существенное влияние на дальнейшее развитие математики. Данная группа впервые стала использовать символ пустого множества \emptyset , обозначения числовых множеств N, Z, Q, R, C , термины «инъекция», «сюръекция», «биекция» и др.

V. Что век текущий нам готовит?

1. Вариации на темы большой теоремы Ферма
2. Проблемы тысячелетия
3. Математическая физика и моделирование на службе у других наук
4. Динамические системы, теория хаоса и фракталы
5. Наконец, конечное число слов о конечной математике

1. Несмотря на то, что эпохальная теорема математики — **большая теорема Ферма** в конце прошлого века доказана, попытки найти более простое доказательство и решить сопутствующие ей задачи не прекращаются. На протяжении XX века большое число математиков и особенно любителей утверждали, что доказали теорему, однако всякий раз компетентные специалисты находили ошибку. Появился даже отдельный термин «*ферматисты*». Подобные наивные доказательства приходилось не без труда вычитывать многим известным математикам. Например, немецкий математик *Эдмунд Ландау*, дабы не отвлекаться от основной работы, заказал несколько сот бланков с шаблонным текстом, сообщающим, что на определённой строке, на некоторой странице находится ошибка, при этом находить ошибку и заполнять пробелы в бланке он поручал своим аспирантам.

До сих пор остаются нерешёнными ряд задач, близких к уравнению Ферма. Одна из них имеет совершенно простую формулировку. На сегодня не известно, существует ли хоть один *совершенный кубоид*, т.е. прямоугольный параллелепипед, у которого семь основных величин (три ребра, диагонали его граней и диагональ самого параллелепипеда) являются натуральными числами. Компьютерный перебор всех таких параллелепипедов со сторонами до $3 \cdot 10^{12}$ не нашел ни одного совершенного, однако позволил обнаружить ряд почти совершенных кубоидов, у которых только одна из величин является нецелой. Также не описаны все *Эйлеровы параллелепипеды* (их бесконечное число), у которых целочисленны все ребра и диагонали граней.

В 1993 году тexasский миллиардер и математик-любитель *Эндрю Бил* учредил премию (ныне в миллион долларов США) за доказательство или опровержение утверждения, названного *гипотезой Била или ABC-гипотезой*: если $A^x + B^y = C^z$, где A, B, C, x, y, z — натуральные, $x, y, z > 2$, то числа A, B, C имеют общий простой делитель. При условии справедливости гипотезы теорему Ферма можно доказать от противного.

Другим обобщением Великой теоремы Ферма является *гипотеза Ландера-Паркина-Селфриджа*, согласно которой уравнение $x_1^k + x_2^k + \dots + x_m^k = y_1^k + y_2^k + \dots + y_n^k$ может иметь нетривиальные

решения в натуральных числах, только если $k \leq n + m$. Все ныне известные примеры таких наборов подтверждают эту гипотезу, но строгого доказательства пока не существует.

2. Имеются и другие обобщения теоремы Ферма, относящиеся к проблемам алгебраической геометрии. Одна из них (*гипотеза Бёрча-Свиннертон-Дайера* из теории эллиптических кривых) входит в число **семи проблем тысячелетия**, определённых *Математическим институтом Клэя* (Массачусетс, США) в 2000 году как «важные классические задачи, решение которых не найдено вот уже в течение многих лет». За решение каждой задачи из данного списка обещано вознаграждение в 1 млн. долларов США.

На сегодня решена лишь одна проблема тысячелетия — *гипотеза Пуанкаре*, сформулированная А. Пуанкаре в 1904 году. Она утверждает, что всякое односвязное компактное трёхмерное многообразие без края в четырёхмерном пространстве гомеоморфно сфере. Гипотеза Пуанкаре была строго доказана в серии статей 2002–2003 годов российского математика *Григория Перельмана*, который отказался от предлагаемого миллиона долларов, а также от *Филдсовской медали* (аналога Нобелевской премии), вручаемой за выдающиеся достижения в математике.

Весьма известной является гипотеза о *дзета-функции Римана*, сформулированная выдающимся немецким математиком *Бернхардом Риманом* в 1859 году. Эта функция комплексного переменного имеет важное значение в теории чисел, теории вероятностей, теоретической физике и в других приложениях. Гипотеза Римана (все нетривиальные нули дзета-функции имеют вещественную часть, равную $1/2$) входила в число 23 проблем Гильберта, однако продолжает оставаться не доказанной до сегодняшнего дня.

Еще одной известной и чрезвычайно важной задачей из списка проблем тысячелетия является *проблема существования и гладкости решений уравнения Навье-Стокса*. Данное (нелинейное) уравнение является основной моделью, описывающей движения вязкой жидкости. Умение находить аналитические явные решения этого уравнения (описывающие в том числе турбулентные течения) чрезвычайно важно для приложений, в том числе для аэродинамических расчетов, прогноза погоды, моделирования климата и других задач.

3. Уравнение Навье-Стокса является модельным уравнением **математической физики**, науки на стыке математики и физики, в которой математическими методами изучаются модели физических явлений. Эта наука сформировалась сразу после открытия дифференциального исчисления и первоначально включала в себя различные прикладные разделы теории дифференциальных уравнений. Важно отметить, что связь математики с приложениями и другими науками осуществляется посредством **математического моделирования**, т.е. перевода реальной задачи на язык математики путем идеализации, формулировки гипотез, выделения главных переменных, упрощения, приближения и т.д. При этом модель может являться дискретной или непрерывной (в зависимости от природы переменных), детерминированной или стохастической (в зависимости от функции, описывающей процесс), линейной или нелинейной (в зависимости от типов модельных уравнений).

На протяжении XVIII–XIX веков наблюдались значительные успехи математической физики. Создана *аналитическая механика, теория колебаний струн, стержней, маятников, акустика, гидродинамика, теория теплопроводности, диффузии, теории упругости, оптика, электродинамика, теория потенциала, теория устойчивости движения* и др. XX век связан с рядом открытий в физике, существенно изменивших подходы и методы в математике. Отметим новые науки, появившиеся в результате взаимодействия двух важнейших наук: *квантовая механика, квантовая теория поля, статистическая физика, теория относительности, теория гравитация, синергетика, теория хаоса*.

Современная **прикладная математика** в значительной степени опирается на достижения математической физики, но включает в себя также ряд других разделов: *теорию оптимизации, исследование операций, биоинформатику, теорию информации, математическую статистику, теорию игр, криптографию, финансовую математику* и др. Многие из перечисленных наук возникли в XX веке связи с потребностями экономики и информатики. Ныне активно развиваются математические

методы в биологии, медицине, химии, психологии и лингвистике, где особенно активно применяются методы численного анализа и статистики. Особенно важно применение этих разделов математики в *анализе больших данных, машинном обучении, теории нейронных сетей* и в других направлениях, связанных с *проблемами создания искусственного интеллекта*.

4. Отдельным важным направлением прикладной математики является **теория динамических систем**. В рамках этой теории изучается функциональная зависимость переменных, описывающих состояние системы, в *фазовом пространстве*, т.е. в пространстве, каждая точка которого целиком характеризует систему (например, положение тела и скорость). В таком пространстве движение характеризуется кривой (фазовой траекторией) и, как правило, полностью определяется значениями переменных в заданный момент времени. Таким образом, теория динамических систем позволяет интерпретировать закон движения (как правило, систему дифференциальных уравнений) в виде системы гиперповерхностей (фазовых портретов) в фазовом пространстве. Такой подход позволяет использовать методы функционального анализа, дифференциальной геометрии и топологии к исследованию задач математической физики. У истоков создания данной теории находится выдающийся французский математик *Анри Пуанкаре*, оставивший свой след также во многих других разделах математики и физики.

Важный вклад в теорию динамических систем сделали выдающиеся советские математики *А.Н. Колмогоров* и *В.И. Арнольд*. В их работах исследованы вопросы устойчивости нелинейных гамильтоновых систем, т.е. систем с сохранением полной энергии (так называемая «*КАМ теория*»).

В нелинейных динамических системах фазовые траектории могут со временем сходиться к сложным замкнутым траекториям, носящим название *странных аттракторов*. Как правило, наличие таких множеств характеризует неустойчивые диссипативные системы, т.е. системы с потерей энергии, в которых малые изменения начальных данных приводят к значительным расхождениям траекторий в будущем. Данный эффект принято называть *эффектом бабочки*. В оригинале его суть содержится в вопросе «*Может ли взмах крыльев бабочки в Бразилии привести к торнадо в американском штате Техас?*», озаглавившем доклад американского математика-метеоролога из Массачусетского университета *Эдварда Лоренца*, сделанного на конференции в 1971 году.

Важно отметить, что положительный ответ на этот вопрос в корне противоречит классической научной догме, которая подразумевает возможность прогнозирования будущего на основе данных о настоящем и прошлом, а также абстрагированию от влияния внешних факторов на развитие замкнутой системы. Этот классический подход выражен в знаменитой (но, к сожалению, ошибочной) цитате выдающегося французского математика *Пьера-Симона Лапласа*: «Мы можем рассматривать настоящее состояние Вселенной как следствие его прошлого и причину его будущего. Разум, которому в каждый определенный момент времени были бы известны все силы, приводящие природу в движение и положение всех тел, из которых она состоит, будь он также достаточно обширен, чтобы подвергнуть эти данные анализу, смог бы объять единым законом движение величайших тел Вселенной и мельчайшего атома; для такого разума ничего не было бы неясного и будущее существовало бы в его глазах точно так же, как прошлое.»

Странное поведение нелинейных динамических систем составляет основу **теории динамического хаоса** (по мнению выдающегося американского математика *Джона фон Неймана* ее создание наряду с созданием квантовой механики и теории относительности входит в тройку наиболее значительных достижений XX века). Начало этой теории заложено в конце XIX века в работах *Анри Пуанкаре*, посвященных изучению *проблемы трёх тел*, движущихся под действием гравитационного поля. В 1892–1899 годах он доказал, что существует бесконечно много частных решений этой задачи (на сегодня известны около 20 из них), при этом до сих пор неизвестно, существует ли общий метод нахождения общего аналитического решения данной задачи в виде равномерно сходящихся рядов (*задача Вейерштрасса*, 1885 г.). Движение планет нашей солнечной системы подчиняется значительно более сложному закону, и устойчивость этого движения является важным нерешённым вопросом.

Странные аттракторы оправдывают свое название рядом странных «фрактальных» свойств. Термин **«фрактал»** введён французским математиком *Бенуа Мандельбротом* в 1975 году. Он означает множество, имеющее нетривиальную *самоподобную структуру и дробную размерность*. Такие множества вошли в математику с конца XIX века (множество Кантора, треугольник Серпинского, функция Вейерштрасса и др.), при этом систематическое их изучение началось в конце XX века. Фрактальные свойства имеют многие объекты в живой и неживой природе (облака, снежинки, береговая линия, кораллы, система кровообращения). Развитие этой науки находится в начальной стадии, однако она уже нашла широкое применение в современных компьютерных технологиях (например, в компьютерной графике).

5. Параллельно с анализом, начиная с XVII века, шло развитие **конечной или дискретной математики**, изучающей свойства множеств, состоящих из конечного числа элементов. Данная наука сочетает в себе несколько независимых направлений: *комбинаторику, теорию графов, теорию конечных групп* и другие.

Комбинаторика как отдельная ветвь математики возникла в середине XVII века. В это время вышла книга *Блеза Паскаля* «Трактат об арифметическом треугольнике», где были изучены свойства биномиальных коэффициентов, составляющих треугольник Паскаля. Чуть позже в 1666 году двадцатилетний *Лейбниц* опубликовал книгу «Рассуждения о комбинаторном искусстве», где впервые было дано систематическое изложение основ науки. Дальнейшее развитие комбинаторики и зарождение теории графов происходило под влиянием работ *Л. Эйлера*. В 1736 году в одном из своих писем он формулирует и предлагает решение *задачи о семи кёнигсбергских мостах*, ставшей впоследствии одной из классических задач теории графов.

Современная комбинаторика существенным образом переплетена с геометрией, топологией, теорией графов, а также гиперграфов (математических объектов, состоящих из вершин и рёбер, соединяющих заданные подмножества вершин). В начале XXI века наблюдается значительный интерес к данным направлениям, связанный с развитием сетевых технологий и анализом больших данных. В 2005 году окончательно решена (с помощью компьютерного перебора) *проблема четырёх красок*, которая состоит в доказательстве того факта, что любую карту на плоскости или на сфере можно раскрасить не более чем четырьмя разными цветами (красками) так, чтобы любые две области с общим участком границы были раскрашены в разные цвета. Точную формулировку гипотезы опубликовал *А. Кэли* в 1878 году.

Теорема о четырёх красках была «доказана» в 1976 году американскими математиками *Кеннетом Appelем* и *Вольфгангом Хакеном* из Иллинойского университета. Однако их подход вызывает до сих пор определенный скептицизм, поскольку не вполне понятно, можно ли его считать строгим доказательством. Со слов авторов: «читатель должен разобраться в 50 страницах текста и диаграмм, 85 страницах с почти 2500 дополнительными диаграммами, 400 страницами микрофишей, содержащими еще диаграммы, а также тысячи отдельных проверок утверждений, сделанных в 24 леммах основного текста. Вдобавок читатель узнает, что проверка некоторых фактов потребовала 1200 часов компьютерного времени, а при проверке вручную потребовалось бы гораздо больше. Статьи устрашающе по стилю и длине, и немногие математики прочли их сколько-нибудь подробно». В 2005 году с помощью специализированной программы *Джорджсом Гонттиром* было получено компьютерное доказательство, принятое математическим сообществом.

Близкой, но до сих пор нерешённой, является *задача о хроматическом числе плоскости* или *задача Нелсона-Эрдёша-Хадвигера*. Нужно найти минимальное число цветов, достаточное для того, чтобы осуществить раскраску плоскости так, чтобы никакие две точки, находящиеся на единичном расстоянии друг от друга, не были покрашены в одинаковый цвет. До 2018 года было известно, что это число лежит в отрезке от 4 до 7, на сегодня это число может равняться 5, 6 или 7. Аналогичная задача не решена для евклидовых пространств более высокой размерности.

В 1933 году польским математиком *Каролем Борсуком* была выдвинута гипотеза, что любое тело диаметра d в n -мерном евклидовом пространстве можно разбить на $n + 1$ часть так, что диаметр

каждой части будет меньше d (*диаметром* называют максимальное расстояние между двумя точками тела)? Случай $n = 2$ был доказан самим Борсуком в 1933 году, в 1955 году доказан случай $n = 3$. Несмотря на то, что для многих тел, обладающих гладкостью или симметрией, данная гипотеза подтверждалась, все же в общем случае она не верна, что было доказано в 1993 году с помощью контрпримера в размерности $n = 1325$. В 2013 году доказано, что она не имеет места для всех $n \geq 64$, при этом до сих пор неизвестно, можно ли улучшить эту оценку.

Современная комбинаторика содержит массу нерешённых задач и открытых гипотез с простыми формулировками. Многие из них сформулированы выдающимся венгерским математиком *Палом Эрдёшем*, опубликовавшим за жизнь более 1500 работ, что является абсолютным рекордом XX века. Приведём несколько задач Эрдёша о расположении точек на плоскости, относящихся к так называемой *теории Рамсея* — разделу математики, изучающему условия, при которых в произвольно формируемых математических объектах обязан появиться некоторый порядок.

До сих пор не доказана *гипотеза Эрдёша-Секереша*, согласно которой из любых $2^{n-2} + 1$ точек на плоскости можно выбрать n точек, образующих выпуклый многоугольник.

Еще одна нерешённая задача состоит в описании метода, позволяющего располагать заданное число n точек на плоскости таким образом, чтобы среди них нашлось максимально возможное число пар, каждая из которых располагается на одинаковом расстоянии друг от друга. Известно, что число таких пар описывается функцией $f(n) = n \cdot \varphi(n)$, где $\varphi(n)$ является возрастающей. Но можно ли добиться того, чтобы она росла как степенная функция n^α , хотя бы для очень малого $\alpha > 0$, неизвестно.

В 1945 году доказана *теорема Эрдёша-Эннинга*, согласно которой все расстояния между бесконечным множеством точек на плоскости могут быть целыми лишь в том случае, если все точки лежат на прямой. Существует, однако, бесконечное множество точек, не лежащих на одной прямой, расстояния между которыми являются рациональными числами (например, на единичной окружности). На сегодня неизвестно, можно ли выбрать это бесконечное множество так, чтобы оно заполняло всюду плотным образом некоторую двумерную область или все пространство. Также открыт вопрос о максимальном числе точек на плоскости, все расстояния между которыми являются целыми, это число должно быть не менее восьми.

В конце статьи сформулируем еще несколько задач, относящихся к конечной математике с занимательным сюжетом. Всем известна *игра «тетрис»* (разработанная советским программистом *Алексеем Пажитновым* из Вычислительного центра АН СССР и впервые выпущенная 6 июня 1984 года). Существует недоказанная гипотеза, что при любом раскладе фигурок и любых размерах поля идеальный игрок наверняка проиграет за конечное время. Напомню, что в игре тетрис участвуют 7 фигурок тетрамино, образованных 4 равными квадратами.

Из n равных квадратов можно составить более сложные фигурки, названные в 1953 году американским математиком *Соломоном Голомбом «полимино»*. Порядком полимино называют минимальное число одинаковых фигурок, из которых можно сложить прямоугольник. До сих пор неизвестно, существует ли непрямоугольное полимино, порядок которого является нечетным числом (в 1992 году доказано, что порядок 3 невозможен). Существуют и другие открытые вопросы об этих фигурках, а также о более общих *полиформах* — фигурах, образованных одинаковыми многоугольниками или многогранниками.

Близкой является задача о замощениях плоскости (полном ее покрытии без пересечений) заданными одинаковыми многоугольниками. Несложно замостить плоскость любым треугольником, а также любым (выпуклым или нет) четырехугольником. На сегодня известно 15 видов замощений плоскости выпуклыми пятиугольниками (последний вариант открыт в июле 2015 года), а также три вида замощений плоскости выпуклыми шестиугольниками. Описание всех типов таких замощений до сих пор является открытой проблемой. Замостить плоскость многоугольниками с числом сторон более шести невозможно.

Еще одна открытая на сегодня задача имеет совершенно житейский сюжет и называется *задачей*

о перемещении дивана (сформулирована в 1966 году канадским математиком *Мозером*). Имеется плоский Г-образный коридор единичной ширины. Нужно найти плоское тело наибольшей площади S (диван), которое можно пронести без деформаций через данный коридор. С 1992 года наилучшей оценкой снизу является пример дивана с площадью около 2,22, полученный *Джозефом Гервером* (его фигура ограничена восемнадцатью дугами аналитических кривых, напоминающих телефонную трубку). В июне 2017 года получена оценка сверху для константы дивана, равная 2,37. Истинный максимум («константа дивана») человечеству неизвестен. Аналогичную задачу можно рассмотреть в случае коридора, образующего заданный (не прямой) угол, а также в пространственном случае с заданными параметрами коридора.

Вместо заключения

Сформировать полный список нерешённых задач с простой формулировкой не представляется возможным в рамках одной статьи. Ещё труднее перечислить все открытые задачи современной математики. Вероятно, их больше, чем решённых задач. На переднем крае науки находится «лиственная система», питающая собой все ветви и ствол математического дерева, необозримого в рамках жизни одного человека. Это дерево неразрывно связано с историей всего человечества, отражая в той или иной степени его интеллектуальное и культурное наследие.

Школьная (элементарная) математика являет собой набор базовых техник, а также основу для понимания и решения простейших задач. Освоение элементарной математики необходимо каждому цивилизованному и культурному человеку, живущему в эпоху научного прогресса. Уровень математической подготовки, а также востребованность математики несомненно будут возрастать, поскольку с каждым годом увеличивается степень взаимодействия математики с другими науками, увеличивается сложность и абстрактность текущих задач.

Конечно, профессиональными математиками становятся единицы, ведь необходимо затратить массу времени и сил, чтоб понять суть актуальных задач современной математики. Тем не менее, на взгляд автора, каждый может понять базовые принципы царицы наук и найти в ней интересные темы и задачи на свой вкус и уровень подготовки. К счастью, сейчас большая часть информации является общедоступной, было бы только желание. А дорогу осилит идущий.

*Войтицкий Виктор Иванович,
доцент кафедры математического анализа
Таврической академии Крымского федерального
университета им. В. И. Вернадского, Симферополь,
кандидат физ.-мат. наук.*

victor.voytitsky@gmail.com

Информация

Поправка к статье “Гладкие функции, формальные ряды и теоремы Уитни”

Н. Г. Павлова, А. О. Ремизов

Опубликованная нами статья [1] содержит задачу 9 (стр. 61) с некорректным условием. В этой задаче мы предлагали доказать, что росток в нуле любой кривой вида

$$x = t^4\varphi_1(t), \quad y = t^5\psi_1(t), \quad (1)$$

где $\varphi_1, \psi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкие функции, $\varphi_1(0) \neq 0$, $\psi_1(0) \neq 0$, с помощью подходящей гладкой локальной замены координат (x, y) и гладкой замены параметра t можно привести к одной из двух нормальных форм:

$$x = t^4, \quad y = t^5; \quad x = t^4, \quad y = t^5 + t^7. \quad (2)$$

На самом деле, приведение ростка кривой (1) к одной из *двух* нормальных форм (2) имеет место в комплексном случае: когда $t, x, y \in \mathbb{C}$, функции $\varphi_1, \psi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфные и обе замены переменных в прообразе и образе также ищутся в классе голоморфных функций. См., например, [2]. В вещественном случае, о котором идет речь в [1], возникает третья нормальная форма.

Правильная формулировка задачи 9 такова: доказать, что росток в нуле любой кривой вида (1) можно привести к одной из *трех* нормальных форм:

$$x = t^4, \quad y = t^5; \quad x = t^4, \quad y = t^5 + t^7; \quad x = t^4, \quad y = t^5 - t^7. \quad (3)$$

Третья нормальная форма из списка (3), отличающаяся от второй знаком при мономе t^7 , в вещественном случае не эквивалентна ни второй, ни первой. В комплексном же случае кривая $x = t^4$, $y = t^5 + t^7$ превращается в $x = t^4$, $y = t^5 - t^7$ (и обратно) с помощью линейных замен: $t \mapsto \tau$, $t = i\tau$ и $y \mapsto -iy$, где i – мнимая единица.

Литература

- [1] Павлова Н.Г., Ремизов А.О. Гладкие функции, формальные ряды и теоремы Уитни // *Математическое образование*. - 2016. - № 3 (79). - с. 49-65.
- [2] Bruce J.W., Gaffney T.J. Simple singularities of mappings $\mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ // *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* - 1982. - № 26. - p. 465-474.

Сведения об авторах:

Павлова Наталья Геннадьевна,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.
E-mail: natasharussia@mail.ru

Ремизов Алексей Олегович,
Московский физико-технический институт.
E-mail: alexey-remizov@yandex.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2020 год (включая стоимость пересылки) – 150 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2020 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,

к/с 3010181000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 100 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

- E. Mish'enko, A. Mish'enko, M. Zelikin. On the Adequacy of Mathematical Models in Control Theory, Physics and Ecology, Finished** 2
- The authors discuss the role of mathematics and the use of mathematical models in various fields of human activity: control theory, physics, modeling of physical, technological and natural processes.
- V. Bodryakov, A. Bykov. Improved Pixel Estimates of Measures of Plane Sets as a Methodological Approach to Introducing the Concept of "Area of a Figure" in Geometry Course. Part 2** 15
- In the second part of the article, proceeding solely from the established formula for the area of a square of an arbitrary side, the areas of the basic figures of the school planimetry with a broken line border (rectangle, triangle, parallelogram, trapezium) are successively displayed. As a convenient in practical implementation laboratory work in mathematics, accompanying the study of geometric properties of the circle, it is proposed to measure the number π by improving the pixel estimates of the areas of quarters of circles of different radii.
- V. Gavrilov. About the Task "Knights of the King Arthur"** 24
- Solutions to the problem of selecting "non-neighboring" objects are given. The cases of placing objects on a circle and on a straight line are considered. The irreversibility of the arrangement and selection of homogeneous objects in combinatorics is noted. A method of selecting "non-neighbors" is proposed, which is based on the interpretation of the concept of "non-neighbors" as objects separated by a common "neighbor". Algorithms for selecting even and odd numbers of objects and a method for "through one" selecting are proposed.
- A. Iglizky. On Non-Trivial Cases of Intersections of a Regular Polygon Diagonals on its Symmetry Axis** 28
- Non-trivial cases of intersection of several diagonals of a regular polygon with an even number of sides at a single point on its symmetry axis are considered.
- A. Privalov. On Some Properties and Criteria of a Parallelogram** 36
- Some properties of a parallelogram are considered and some conditions are established under which the properties become criteria. To be continued.
- E. Djambetov, A. Kanel-Belov, I. Shudueva. Properties of Power Reminders of natural numbers in various number systems** 46
- Unambiguous, two-digit, three-digit numbers are distinguished, all natural degrees of which are comparable with the number itself modulo 10^k for all k .
- S. Zakurdaev. Hierarchical Algorithm for Constructing a Minimal Spanning Tree** 51
- Based on the concept of "mutually adjacent neighbors", an algorithm for constructing a minimal spanning tree is developed.
- V. Voytizky. A Brief Encyclopedia of Modern Mathematics (Outstanding Discoveries and Open Questions with a Simple Formulation)** 54
- A summary of the historical development of the main areas of mathematics, from ancient times to the present.
- Current Information** 69

ISSN 1992-6138

