ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцать третий

№ 3 (91)

июль – сентябрь 2019 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 3 (91), 2019 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2019 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 21.10.2019 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 3,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (91), июль – сентябрь 2019 г.

Содержание

Треугольник и биквадратное уравнение

В. Б. Дроздов

В статье описывается решение и исследование равнобедренного треугольника по заданным радиусам его вписанной и описанной окружностей. Статья адресуется всем любителям математики.

1. Уравнение

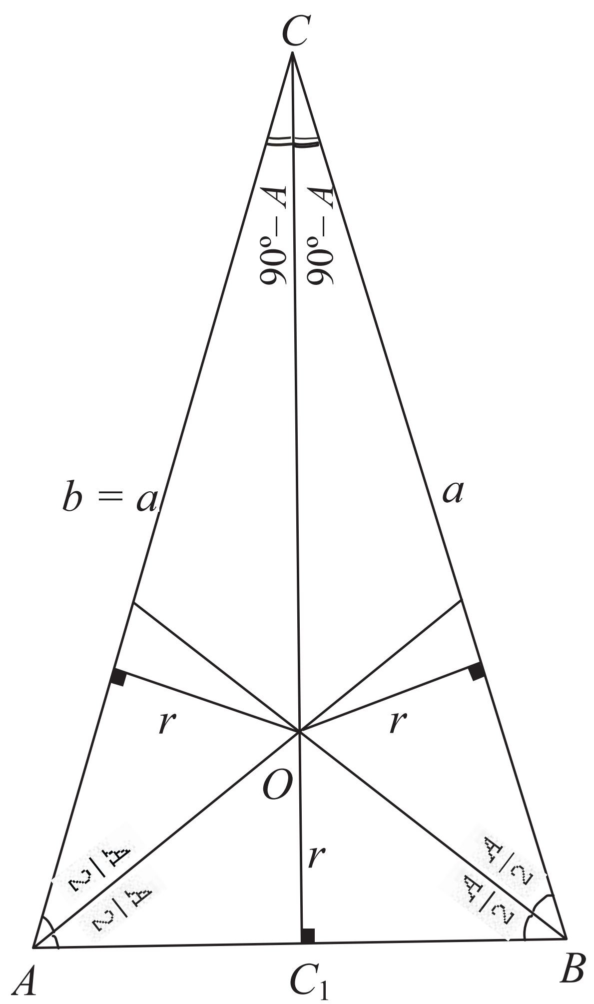


Рис. 1

Пусть в произвольном треугольнике мы знаем радиус описанной окружности R и радиус вписанной окружности r. Известно, что этих данных недостаточно для решения треугольника. Интересно, а что мы получим в случае равнобедренного треугольника? См. рис. 1.

Из прямоугольного треугольника AOC_1, имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{2r}{c}. \tag{1}$$

По теореме синусов для треугольника ABC находим:

$$c=2R\sin C=2R\sin 2A. \tag{2}$$

Добавим известные тригонометрические формулы:

$$\operatorname{tg}A=\frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}, \tag{3}$$

$$\sin 2A=\frac{2\operatorname{tg}A}{1+\operatorname{tg}^2 A}. \tag{4}$$

Если обозначить $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=x\,(0<x<1)$, то из формул (1), (2), (3), (4) вытекает уравнение:

$$\frac{4}{1-x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{4R+r}{r}. \tag{5}$$

2. Функция и ее график

Исследуем функцию

$$y=\frac{4}{1-x^2}+\frac{1}{x^2} \tag{6}$$

и построим ее график.

Очевидно, что при $x\to 0$ и при $x\to 1$ y неограниченно возрастает. Найдем наименьшее значение y.

Формула (6) легко преобразуется к виду

$$x^4+\left(\frac{3}{y}-1\right)\cdot x^2+\frac{1}{y}=0. \tag{7}$$

Выделив в левой части формулы (7) полный квадрат, получим:

$$\left(x^2+\frac{3}{2y}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{(y-1)\,(y-9)}{4y^2}. \tag{8}$$

Из формулы (6) явствует, что $y>5$, тогда из формулы (8) видно, что $y\geq 9$. Значит, $y_{\min}=9$, что достигается только при $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$. График функции (6) изображен на рис. 2. Очевидно, что наименьшее значение функции (6) соответствует равностороннему треугольнику.

3. Частные случаи

Для получения дополнительной информации рассмотрим два частных случая. Нам потребуется знаменитая формула Эйлера

$$d^2=R^2-2Rr, \tag{9}$$

где d — расстояние между центрами окружностей.

А) $d=r$ — вписанная окружность проходит через центр описанной окружности.

Из формулы (9) следует, что $R=r\left(1+\sqrt{2}\right)$, тогда уравнение (5) преобразуется к

$$7x^4-2\left(11-6\sqrt{2}\right)\cdot x^2+\left(4\sqrt{2}-5\right)=0,$$

откуда

$$x^2 = \frac{11 - 6\sqrt{2} \pm 2\left(4\sqrt{2} - 5\right)}{7}.$$

В первом случае $x^2 = 3 - 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$, откуда $x = \sqrt{2} - 1$.

Из формулы (3) легко получим — $\operatorname{tg} A = 1$, то есть $A = B = 45°$. Значит, $C = 90°$.

Во втором случае $x^2 = \frac{1+2\sqrt{2}}{7}$, то есть в парном остроугольном треугольнике $A = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}}$.

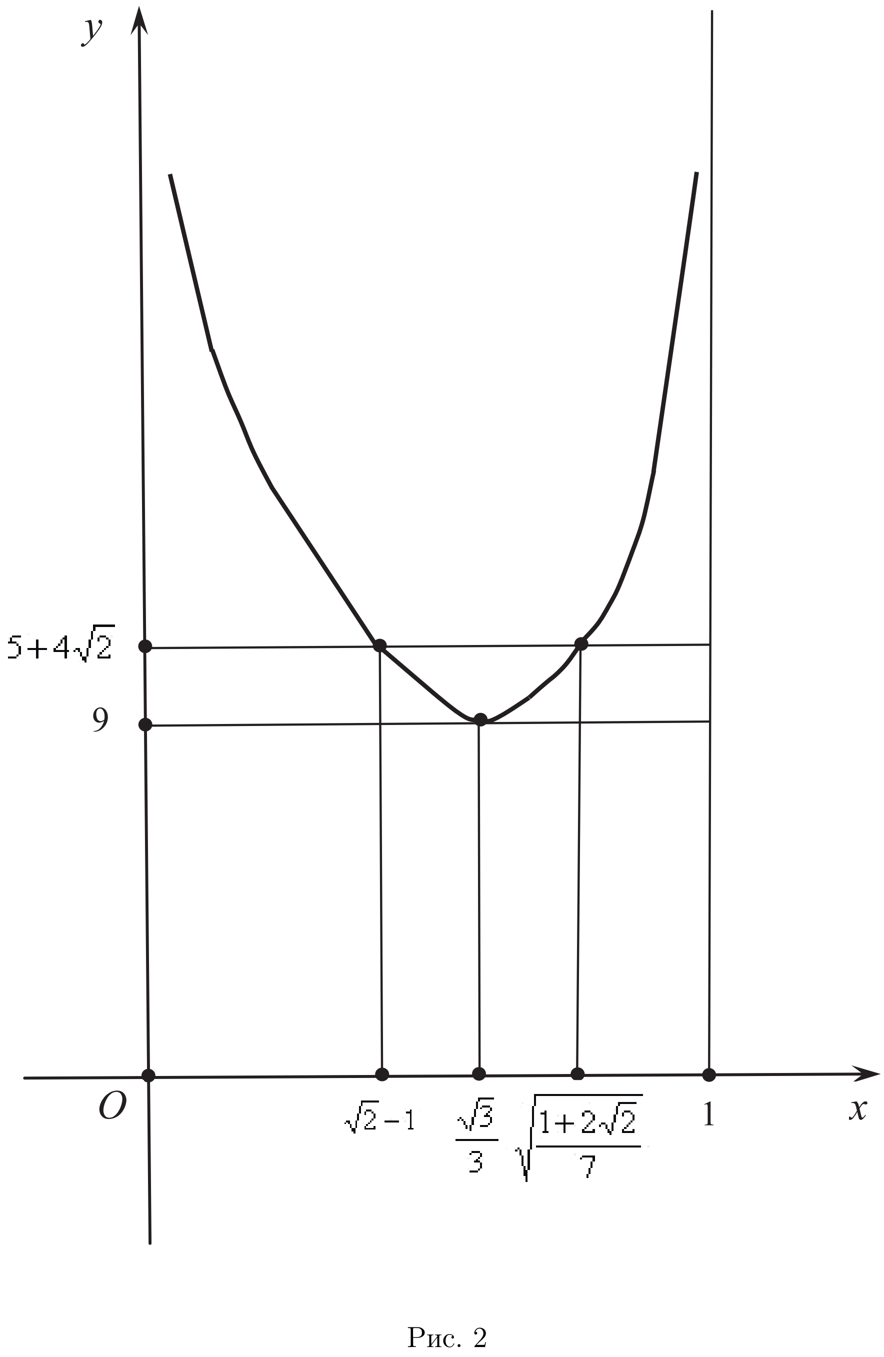


Рис. 2

Б) $d = 2r$ — в тупоугольном треугольнике центры окружностей симметричны относительно его основания.

Из формулы (9) следует, что $R = r\left(1+\sqrt{5}\right)$, тогда уравнение (5) преобразуется к

$$55x^4 + 2\left(6\sqrt{5}-35\right)\cdot x^2 + \left(4\sqrt{5}-5\right) = 0,$$

откуда

$$x^2 = \frac{35-6\sqrt{5} \pm \left(16\sqrt{5}-20\right)}{55}.$$

В первом случае $x^2 = \frac{5-2\sqrt{5}}{5}$. Заметим, что $\operatorname{tg}^2 18^\circ = \frac{5-2\sqrt{5}}{5}$; (подробный разговор о тригонометрических функциях углов, кратных 18°, завел бы слишком далеко в сторону, да это и достаточно известно). Значит, $A = B = 36^\circ$, тогда $C = 108^\circ$.

Во втором случае $x^2 = \frac{3+2\sqrt{5}}{11}$, то есть в парном остроугольном треугольнике $A = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3+2\sqrt{5}}{11}}$.

Итоги проведенных вычислений систематизируем в таблице.

Таблица

$y = 9$	$9 < y < 5+4\sqrt{2}$	$y = 5+4\sqrt{2}$	$5+4\sqrt{2} < y < +\infty$
$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}-1 < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = \sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}}$	$\sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}} < x < 1$
	$\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{7}}$	$x = \sqrt{2}-1$	$0 < x < \sqrt{2}-1$
$\frac{R}{r} = 2$	$2 < \frac{R}{r} < 1+\sqrt{2}$	$\frac{R}{r} = 1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2} < \frac{R}{r} < +\infty$
равносторонний треугольник	остроугольный треугольник	остроугольный треугольник	остроугольный треугольник
	остроугольный треугольник	прямоугольный треугольник	тупоугольный треугольник

4. Определение сторон

Найдем, наконец, стороны треугольника c и $b = a$.

Уравнение (5) без труда трансформируется к удобному виду

$$r\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + (2r-4R)\cdot\frac{1}{x^2} + (4R+r) = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{x^2} = \frac{2R - r \pm 2\sqrt{R\,(R-2r)}}{r}. \tag{10}$$

Из формул (1) и (10) получим

$$c = 2\sqrt{r\left(2R - r \pm 2\sqrt{R(R-2r)}\right)}.$$

По теореме синусов

$$a = 2R \sin A\,. \tag{11}$$

Из формул

$$\sin A = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{A}{2}} = \frac{2x}{1+x^2} \tag{12}$$

и (11) вытекает:

$$a^2 = \frac{16R^2}{\frac{1}{x^2}+x^2+2}\,. \tag{13}$$

Из формул (11) и (13) находим:

$$a = \sqrt{2R\left(R+r\mp\sqrt{R(R-2r)}\right)}\,.$$

Таким образом, во всех случаях, кроме равностороннего треугольника, задача имеет два решения, в которых для c и a берутся одновременно либо верхние, либо нижние знаки перед внутренними радикалами.

Поскольку преобразования «сложных» радикалов лишены искусственности, ибо сводятся к умножению выражения на сопряженное ему, то они предоставляются читателю как полезное упражнение.

Дроздов Виктор Борисович
г. Рязань.

Пространственные спирали (окончание)

Г. А. Клековкин

В статье систематизируются сведения о пространственных спиралях — линиях, которые представляют не только теоретический интерес, но и часто встречаются на практике. Кроме теоретических сведений, автор дает рекомендации по изготовлению динамических чертежей в среде GeoGebra, показывающих процесс рисования спиралей на соответствующих поверхностях. Окончание статьи. Начало в предыдущем номере журнала.

4. Винтовые линии на сфере

Приведем примеры винтовых линий на сфере. Для единообразия изложения будем рассматривать сферу как поверхность вращения, полученную при вращении окружности вокруг прямой, содержащей ее диаметр.

Пусть сфера получена вращением окружности ω радиуса a с центром в точке O вокруг ее диаметра NS. Эта сфера также имеет радиус a, а точка O является ее центром. Точку N сферы при этом удобно считать ее северным полюсом, а точку S — южным. Тогда большую окружность, по которой плоскость, проходящая через центр O перпендикулярно оси вращения NS, пересекает сферу, естественно называть экватором.

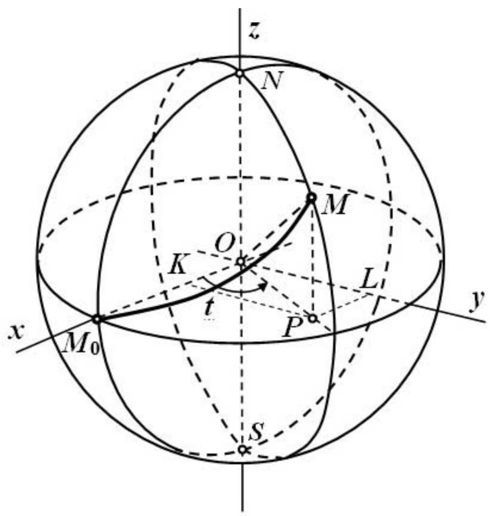


Рис. 14

Простейшую винтовую линию на сфере можно определить как траекторию движения точки M сферы, которая перемещается с постоянной скоростью вдоль оси вращения NS из одного полюса в другой и одновременно вращается с постоянной угловой скоростью вокруг этой оси. Выделим случай, когда за время перемещения из полюса в полюс точка M сделает m оборотов вокруг оси NS. Такую линию назовем *сферической винтовой линией* или *равномерной обмоткой сферы, содержащей m витков*. Очевидно, что сферическая винтовая линия имеет конечную длину.

Найдем параметрические уравнения сферической винтовой линии. Будем считать, что центр сферы O совпадает с началом прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$, ось вращения NS — с координатной осью Oz. Тогда плоскость экватора сферы будет совпадать с координатной плоскостью Oxy. В системе координат $Oxyz$ такая сфера с радиусом a имеет уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Для упрощения будем кроме того считать что в начальный момент времени движущаяся точка находится в точке $M_0(a,0,0)$ пересечения экватора с осью Ox (рис. 14). Пусть $M(x,y,z)$ — произвольная точка сферической винтовой линии γ, P — ее проекция на координатную плоскость Oxy. Угол между положительным направлением оси Ox и отрезком OP обозначим через t и выберем в качестве параметра.

Когда точка M совершает полный оборот вокруг оси вращения, т. е. поворачивается на угол 2π, она одновременно с этим перемещается вдоль этой оси на расстояние $2a/m$. Отсюда можно найти скорость v линейного перемещения. Имеем: $z = PM = vt$. При $t = 0$ точка M находится в точке M_0, которая является серединой сферической винтовой линии. Чтобы попасть в северный полюс $N(0,0,a)$ она должна совершить $m/2$ оборотов, т. е. повернуться на угол πm. Поэтому $a = v\pi m$, откуда $v = \dfrac{a}{\pi m}$ и $z = PM = \dfrac{a}{\pi m}t$.

Из треугольника OMP находим:

$$OP = \sqrt{OM^2 - PM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\pi m}t\right)^2} = \frac{a}{\pi m}\sqrt{\pi^2 m^2 - t^2}.$$

Следовательно,

$$x = OK = OP\cos t = \frac{a}{\pi m}\sqrt{\pi^2 m^2 - t^2}\cos t,$$
$$y = OL = OP\sin t = \frac{a}{\pi m}\sqrt{\pi^2 m^2 - t^2}\sin t.$$

Таким образом, сферическая винтовая линия в прямоугольной декартовой системе координат может быть задана уравнениями

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\pi m}\sqrt{\pi^2 m^2 - t^2}\cos t, \\ y = \frac{a}{\pi m}\sqrt{\pi^2 m^2 - t^2}\sin t, \\ z = \frac{a}{\pi m}t, \end{cases} \tag{1}$$

где $-\pi m \le t \le \pi m$.

На рис. 15 дано изображение сферической винтовой линии при $m = 8$, а на рис. 16, рис. 17 — ее проекций на координатные плоскости Oxy и Oyz соответственно.

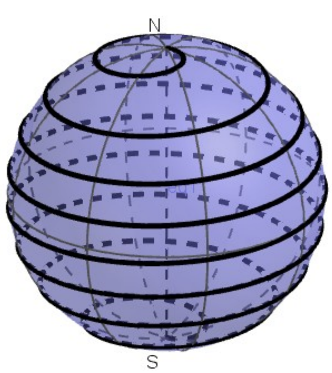


Рис. 15

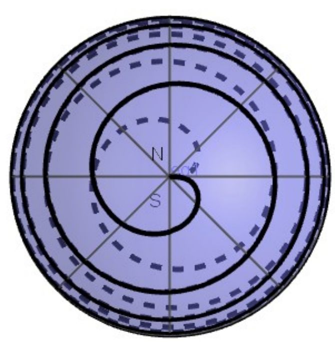


Рис. 16

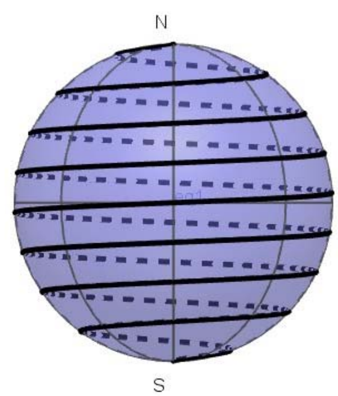


Рис. 17

Задачи

4.1. Напишите параметрические уравнения сферической винтовой линии, изображенной на рисунке 15.

4.2. В среде GeoGebra создайте динамическую модель, демонстрирующую вычерчивание равномерной обмотки сферы, содержащей заданное число витков.

5. Локсодромы на сфере

Наиболее известными сферическими спиралями являются локсодромы, использующиеся в морской и аэронавигации.

Локсодрома или *локсодромия* (от греческих слов $\lambda o\xi \acute{o}\varsigma$ — косой и $\delta\rho\acute{o}\mu o\varsigma$ — бег, путь) — линия на сфере, пересекающая все ее меридианы под постоянным углом $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. Она состоит из бесконечного числа витков и асимптотически приближается к полюсам N и S (рис. 18).

Для вывода уравнений локсодромы потребуются сведения, далеко выходящие за рамки школьной программы по математике. Поэтому ограничимся тем, что без вывода приведем параметрические уравнения локсодромы, расположенной на сфере радиуса a с центром в начале координат прямоугольной декартовой системы координат (подготовленный читатель легко найдет эти уравнения самостоятельно):

$$\begin{cases} x = \frac{a\cos t}{\operatorname{ch}(t\operatorname{ctg}\theta)}, \\ x = \frac{a\sin t}{\operatorname{ch}(t\operatorname{ctg}\theta)}, \\ z = a\operatorname{th}(t\operatorname{ctg}\theta). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $-\infty < t < +\infty$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ — гиперболический косинус, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ — гиперболический тангенс, θ — угол, под которым локсодрома пересекает меридианы сферы.

Изображение локсодромы на рис. 18 построено в среде GeoGebra по параметрическим уравнениям (2). На рис. 19, рис. 20 представлены изображения проекций локсодромы на координатные плоскости Oxy и Oxz соответственно.

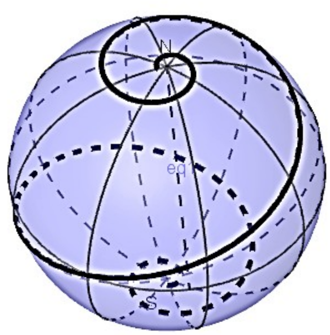


Рис. 18

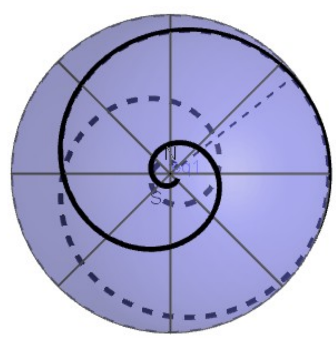


Рис. 19

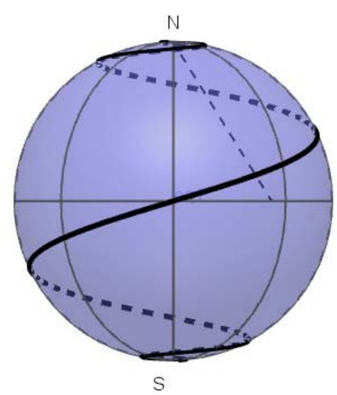


Рис. 20

Рассмотрим способ построения локсодромы, основанный на ее связи с логарифмической спиралью. Для этого введем понятие стереографической проекции сферы на плоскость.

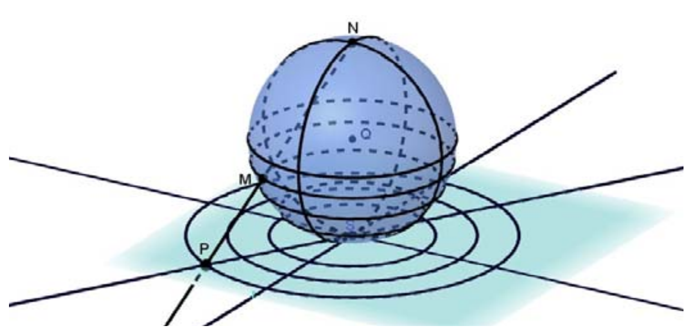


Рис. 21

Пусть N — точка сферы Ω, S — точка, диаметрально ей противоположная, Π — касательная плоскость сферы в точке S. Снова будем считать точку N северным полюсом сферы, а точку S — южным. Каждой точке M сферы Ω, отличной от N, поставим в соответствие точку P плоскости Π, в которой прямая NM пересекает эту плоскость (рис. 21). Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками сферы Ω, без точки N, и точками плоскости Π. Это соответствие называют *стереографической проекцией сферы на плоскость*.

Стереографическая проекция сферы на плоскость обладает следующими замечательными свойствами.

1. Образом всякой окружности γ, лежащей на сфере Ω и отличной от меридиана, является окружность. В частности, параллели сферы проектируются на плоскость Π в концентрические окружности с центром в точке S (рис. 21).
2. Образом всякого меридиана сферы Ω является прямая, проходящая через точку S (рис. 21).
3. Стереографическая проекция сферы на плоскость сохраняет величину угла между кривыми. Иными словами, если γ_1', γ_2' — проекции пересекающихся кривых γ_1, γ_2, лежащих на сфере Ω, то величина угла между ними равна величине угла между кривыми γ_1 и γ_2.

Элементарные доказательства этих свойств можно найти, например, в брошюре [3].

По свойству 1 образами меридианов сферы Ω на плоскости Π являются прямые пучка с центром в точке S. Локсодрома пересекает все меридианы под постоянным углом θ. Поэтому по свойству 3 стереографической проекцией локсодромы будет кривая, пересекающая под постоянным углом θ все прямые пучка с центром S. Кривой, обладающей этим свойством, является логарифмическая спираль [4]. Таким образом, *стереографической проекцией локсодромы служит логарифмическая спираль*.

Из этого свойства вытекает способ построения изображения локсодромы на изображении сферы с помощью обратного проектирования плоскости Π на сферу Ω. Именно, локсодрома строится как образ логарифмической спирали в этом проектировании. Описанный способ позволяет достаточно просто создать в интерактивных динамических системах модель, демонстрирующую процесс вычерчивания локсодромы На рис. 22 показана динамическая модель, созданная в среде GeoGebra.

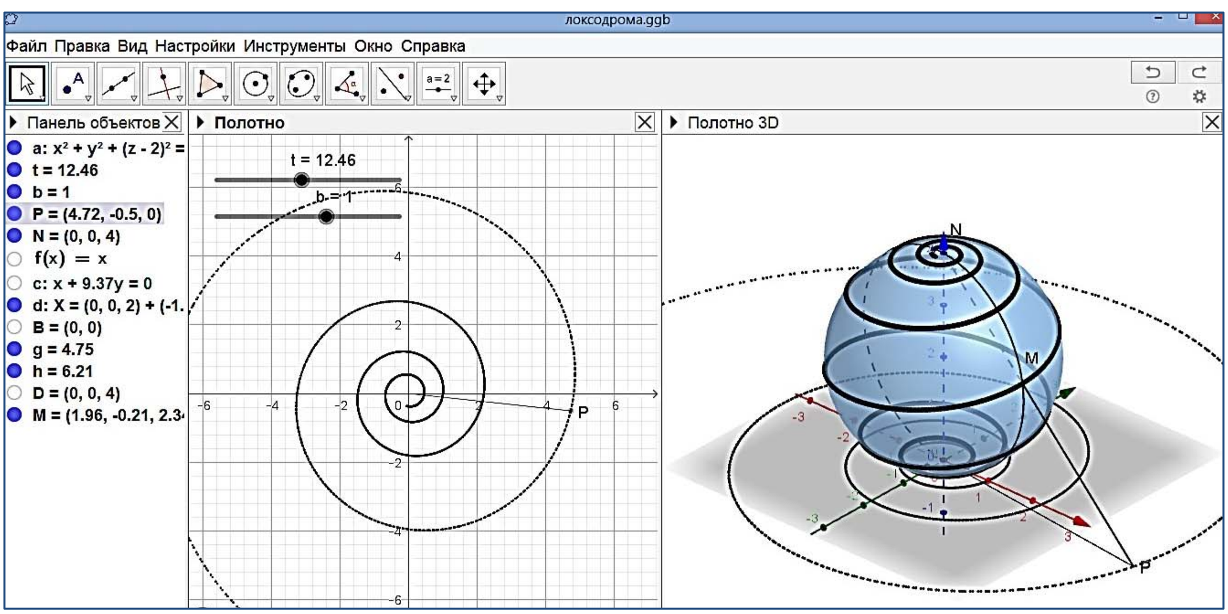


Рис. 22

Приведем протокол создания этой модели (Рис. 23) и дадим к нему некоторые комментарии.

▾ Протокол

№	Имя	Описание	Значение	Заголовок
1	Сфера a		a: x² + y² + (z - 2)² = 4	
2	Число t		t = 21.8	
3	Число b		b = 1	
4	Точка P	(b e^(0.13t) cos(t), b e^(0.13t) sin(t), 0)	P = (-14.98, 2.9, 0)	
5	Точка N_1	Точка пересечения ОсьАппликат и a	N_1 = (0, 0, 4)	
6	Функция f		f(x) = x	
7	Plane c	x - ctg(t) y = 0	c: x + 5.17y = 0	
8	Окружность d	Пересечение кривых c и a	d: X = (0, 0, 2) + (-1.96 cos(t), 0.38 ...	
9	Точка B	Пересечение f и ОсьАбсцисс	B = (0, 0)	
10	Отрезок g	Отрезок [P, B]	g = 15.26	
11	Отрезок h	Отрезок [N_1, P]	h = 15.77	
12	Точка M	Точка пересечения d и h	M = (-0.4, 1.82, 1.28)	
12	Точка N	Точка пересечения d и h	N = (0, 0, 4)	

Рис. 23

В прямоугольной декартовой системе координат Oxy логарифмическая спираль, пересекающая свои радиусы-векторы под углом θ, может быть задана параметрическими уравнениями:

$$x = be^{mt}\cos t, \quad x = be^{mt}\sin t, \tag{3}$$

где $-\infty < t < +\infty$, $m = \operatorname{ctg}\theta$. Впрочем, за счет поворота системы координат вокруг начала O всегда можно добиться, чтобы $b = 1$.

На первом шаге в строке ввода *Полотна 3D* задается сфера

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2,$$

радиуса a, касающаяся плоскости Oxy в начале координат O. Выбран радиус $a = 2$.

На шаге 2 создан ползунок для параметра t. Второй ползунок предназначен для задания коэффициента b в уравнениях (3); в нашем случае выбрано $b = 1$. В представленной модели задано фиксированное значение $m = 0{,}13$. Однако можно было создать ползунок и для m; это позволило бы строить локсодромы, пересекающие меридианы сферы под разными углами.

На шаге 4 в строке ввода на *Полотне 3D* задается текущая точка

$$P = (e^{mt}\cos t, be^{mt}\sin t, 0)$$

логарифмической спирали с фокусом O, лежащей в плоскости Oxy. Если у этой точки активировать опцию *Оставлять след*, то при анимации параметра t точка P будет вычерчивать логарифмическую спираль в плоскости Oxy.

На шаге 5 строится «северный полюс» $N = (0, 0, 4)$ сферы.

На шестом и седьмом шагах задается плоскость ONP. На следующем шаге выделяется окружность d, по которой эта плоскость пересекает сферу.

На заключительных шагах строится отрезок PN, отмечается точка M пересечения этого отрезка с окружностью d. После активации у этой точки опции *Оставлять след*, она при анимации параметра t будет вычерчивать нужную нам локсодрому.

Примечание 2. Так же точно, как это было сделано в предыдущих пунктах, можно рассмотреть винтовые линии на любой поверхности вращения.

Напомним, что *поверхностью вращения* называют поверхность Ω, образованную вращением плоской кривой γ вокруг прямой l, расположенной в плоскости этой кривой. Прямую l при этом называют *осью вращения* поверхности, а линию γ — ее *образующей кривой*. Сечения поверхности Ω плоскостями, проходящими через ось вращения l, как обычно, называются *меридианами*. Все меридианы — плоские линии, равные образующей кривой. В сечении поверхности Ω плоскостями, перпендикулярными оси вращения l, получаются окружности, которые называют *параллелями*.

Выберем прямоугольную декартовую систему координат $Oxyz$ так, чтобы кривая γ лежала в координатной плоскости Oxz, а ось вращения l поверхности совпадала с осью Oz. Пусть кривая γ в системе координат Oxz имеет уравнение $x = f(z)$, тогда, как нетрудно показать, поверхность вращения Ω в системе координат $Oxyz$ будет определяться неявным уравнением

$$x^2 + y^2 = f^2(z). \tag{4}$$

По уравнению (4) строить в среде GeoGebra удается лишь изображения поверхностей вращения второго порядка. Однако, если образующая кривая задана уравнением в плоскости Oxy, то удается создать вполне приемлемое изображение поверхности вращения, полученной вращением этой кривой как относительно оси Ox, так и относительно оси Oy. Так на рисунке 24 показан процесс и результат создания изображения “куска” поверхности вращения, образованной вращением синусоиды $y = \sin x + 3$ вокруг оси Ox.

Опишем этапы создания этого изображения:

1. В строку ввода *Полотна 2D* вводим функцию $y = \sin x + 3$ и строим соответствующую синусоиду.
2. С помощью опции *Точка на объекте* строим на синусоиде точку A.
3. В окне *Вид* переходим к *Полотну 3D*. При этом появляются изображение системы координат $Oxyz$, плоскости Oxy и синусоиды в этой плоскости с точкой A на ней.
4. В *Полотне 3D* строим окружность c по точке A и оси Ox.
5. Выбираем нужные цвета для точки A и окружности c, делаем плоскость Oxy невидимой.
6. Активируем опции *Оставлять след* у точки A и окружности c, анимируем точку A. После этого точка A будет пробегать по синусоиде, а окружность c при этом «заметать» соответствующую поверхность вращения.

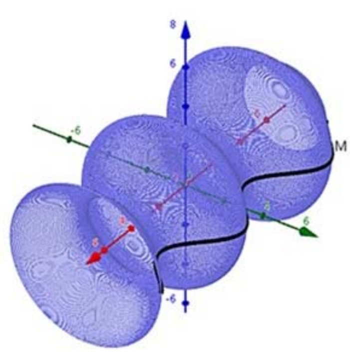


Рис. 24

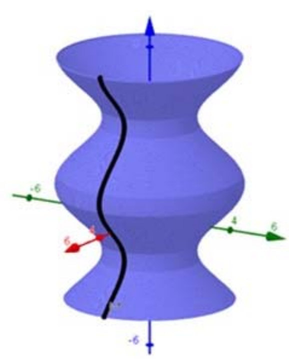


Рис. 25

Поверхность же вращения с осью Oz и образующей $x = f(z)$ можно, например, построить следующим образом:

1. Создаем ползунок для параметра t.

2. В строке ввода *Полотна 3D* задаем в параметрическом виде текущую точку M образующей: $M = (f(t),\ 0,\ t)$.

3. В *Полотне 3D* строим окружность c по точке M и оси Oz.

4. Активируем опции *Оставлять след* у точки M и окружности c, анимируем параметр t. Теперь точка M будет «пробегать» образующую кривую, а окружность "заметать" соответствующую поверхность вращения (рис 25).

5. Примеры пространственных спиралей на поверхностях вращения, отличных от цилиндра, конуса и сферы, даны на рис. 26 и рис. 27. Первая спираль является равномерной обмоткой однополостного гиперболоида вращения, а вторая — равномерной обмоткой поверхности вращения, представленной на рис. 25.

Рис. 26

Рис. 27

Определенным недостатком описанных способов построения поверхностей вращения является «непрозрачность» получаемых изображений: при изучении линий на поверхностях, изображения которых выполнены этими способами, можно наблюдать только видимые части линий.

На любой поверхности вращения можно определить и понятие локсодромы. Именно, *локсодромой на поверхности вращения* Ω называют линию, которая пересекает под постоянным углом θ все меридианы этой поверхности. Локсодромы на поверхности вращения является тем самым своеобразными аналогами линий откоса на цилиндрической поверхности.

Задачи

5.1. Найдите неявное уравнение поверхности вращения с образующей $y = f(x)$ и осью Ox.

5.2. В среде GeoGebra создайте динамическую модель, демонстрирующую вычерчивание равномерной обмотки:

а) эллипсоида вращения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

б) однополостного гиперболоида вращения $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

в) двуполостного гиперболоида вращения $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$;

г) параболоида вращения $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 2z$.

6. Обмотки тора

К пространственным спиралям можно также отнести кривые, которые закручиваются вокруг других кривых, отличных от прямой. Среди таких спиралей наиболее известными являются обмотки тора.

Тором называется поверхность вращения, которая получается при вращении окружности ω вокруг непересекающей ее прямой l, расположенной в плоскости окружности. Форму тора имеет поверхность бублика, автомобильной камеры, спасательного круга (рис 28).

Все меридианы тора — окружности, равные окружности ω, а все параллели — окружности, с центрами на оси вращения расположенные в параллельных плоскостях (рис. 29).

Рис. 28

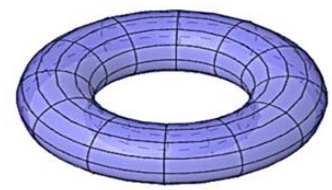


Рис. 29

Пусть точка M тора одновременно участвует в двух движениях: 1) во вращении с постоянной угловой скоростью m вокруг оси тора, 2) во вращении с постоянной угловой скоростью n вокруг центра меридиана, на котором она расположена. Траекторией результирующего движения точки M является линия, обматывающая тор. Эту линию так и называют *обмоткой тора*, реже, — тороидальной спиралью.

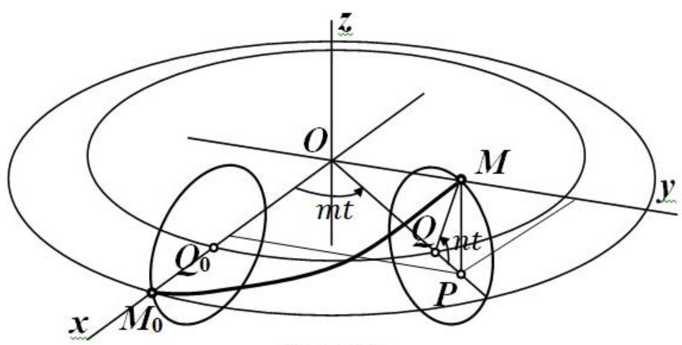


Рис. 30

Найдем параметрические уравнения обмотки γ тора. Выберем прямоугольную декартовую систему координат $Oxyz$ так, чтобы образующая окружность ω и ось l тора лежали в координатной плоскости Oxz. При этом будем считать, что ось l совпадает с координатной осью Oz, а центр Q_0 окружности ω расположен на оси Ox (рис. 30). Пусть a — расстояние от точки Q_0 до начала координат O, b — радиус окружности ω $(a > b)$. В системе координат $Oxyz$ образующая окружность тора задается системой уравнений:

$$y = 0, \quad (x - a)^2 + z^2 = b^2.$$

Рассмотрим траекторию движения точки $M_0(a + b, 0, 0)$ пересечения окружности ω с осью Ox. В качестве параметра обмотки тора удобно выбрать время t. Пусть за промежуток времени t точка M_0 перейдет в точку $M(x, y, z)$. При этом она повернется на угол mt вокруг оси l и в плоскости образующей окружности на угол nt вокруг ее центра. Центр меридиана, на котором лежит точка M, обозначим через Q, проекцию точки M на плоскость Oxy — через P. Тогда

$$z = b \sin nt, \quad QP = b \cos nt, \quad OP = OQ + QP = a + b \cos nt.$$

Отсюда следует, что

$$x = OP \cos mt = (a + b \cos nt) \cos mt, \quad y = OP \sin mt = (a + b \cos nt) \sin mt.$$

Таким образом, обмотка γ тора имеет параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = (a + b\cos nt)\cos mt, \\ y = (a + b\cos nt)\sin mt \\ z = b\sin nt. \end{cases} \tag{5}$$

Найденные уравнения определяют на торе правозакрученную обмотку, можно опять определить и рассмотреть и левозакрученные обмотки.

Кроме того, выделяют периодические или замкнутые обмотки тора. Обмотка тора называется *периодической* (*замкнутой*), если она через некоторый промежуток времени проходит через одну и ту же точку тора. Такая обмотка имеет конечную длину.

Очевидно, что движущаяся точка M оказывается на одном и том же меридиане через промежуток времени, кратный $\frac{2\pi}{m}$. Так же точно через промежуток времени, кратный $\frac{2\pi}{n}$, она оказывается на одной и той же параллели. Поэтому для того, чтобы обмотка была периодической, необходимо и достаточно, чтобы отношение $\frac{m}{n}$ угловых скоростей было рациональным числом.

Пусть $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, где p, q — натуральные числа и $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь (НОД$(p,q) = 1$). Тогда обмотка тора имеет период НОК$(p,q)\pi$, она q раз пересекает каждую параллель и p раз каждый меридиан. Такую обмотку тора называют также *циклом типа* (p,q).

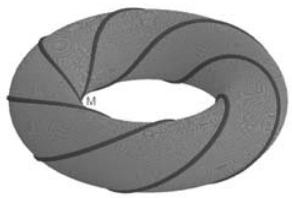
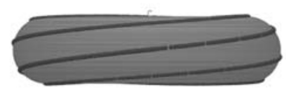
В таблице 1 показаны циклы типов $(1,8)$ и $(8,1)$, имеющие период 8π. Первая обмотка 8 раз пересекает каждую параллель и один раз каждый меридиан. Вторая обмотка, наоборот один раз пересекает каждую параллель и 8 раз каждый меридиан.

Таблица 1

Тип	Обмотка тора	Вид сверху	Вид сбоку
$(1,8)$			
$(8,1)$			

В таблице 2 представлены циклы типов (3, 7) и (7, 3) с периодом 21π.

Таблица 2

Тип	Обмотка тора	Вид сверху	Вид сбоку
$(3,7)$			
$(7,3)$			

Если $\frac{m}{n}$ — иррациональное число, то обмотка тора является *непериодической*, это — незамкнутая бесконечная кривая, проходящая один раз через каждую точку тора, на котором она лежит. В пределе эта кривая целиком "заметет" этот тор.

Задачи

6.1. При $a = 3$ и $b = 1$ напишите параметрические уравнения обмоток тора, представленных в таблицах 1 и 2.

6.2. В среде GeoGebra создайте динамическую модель, демонстрирующую вычерчивание различных обмоток на поверхности тора.

6.3. Сфера получена вращением окружности радиуса a с центром в точке O вокруг ее диаметра NS. Точка M сферы одновременно участвует в двух движениях: 1) во вращении с постоянной угловой скоростью m вокруг диаметра NS сферы, 2) во вращении с постоянной угловой скоростью n вокруг центра меридиана, на котором она расположена. Траекторию результирующего движения точки M можно рассматривать как еще одну сферическую спираль. Найдите параметрические уравнения этой спирали. В среде GeoGebra создайте динамическую модель, демонстрирующую ее вычерчивание на сфере. Исследуйте, как меняется форма спирали в зависимости от значений m и n. При каких условиях спираль имеет конечную длину, а ее концами являются точки N и S?

Примечание 3. Предметом дальнейшего изучения могут стать спирали, закручивающиеся вокруг линий, отличных от прямой и окружности. Наиболее простыми примерами таких спиралей служат обмотки трубчатых и каналовых поверхностей.

Каналовыми поверхностями называются поверхности, образованные движением окружности переменного радиуса, при котором центр окружности перемещается по заданной кривой γ, а плоскость окружности остается перпендикулярной этой кривой. Кривую γ при этом называют *осевой линией.*

Если радиус окружности остается постоянным, то образованная подобным образом поверхность называется *трубчатой.*

Рис. 31

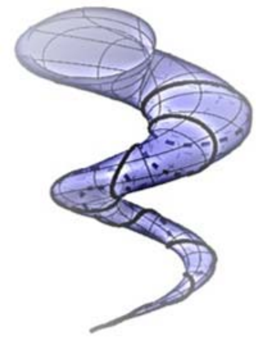


Рис. 32

Рисунок рис. 31 демонстрирует обмотку трубчатой, а рис. 32 — каналовой поверхностей. Осевой линией γ обоих поверхностей является цилиндрическая винтовая линия (точнее, виток этой линии).

Литература

1. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. — М.: Физматгиз, 1958. — 244 с. (Серия «Классический учебник»).

2. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. — М.: URSS, 2014. — 432 с.

3. Розенфельд Б.А., Сергеева Н.Д. Стереографическая проекция. — М.: Наука, 1973. — 48 с. (Серия «Популярные лекции по математике»).

4. Савелов А.А. Плоские кривые: Систематика, свойства, применения. Справочное руководство. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. — 296 с. (Физико-математическое наследие: математика).

Клековкин Геннадий Анатольевич,
профессор кафедры высшей математики и информатики
Самарского филиала Московского городского
педагогического университета,
кандидат физико-математических наук, доцент.

E-mail: klekovkin_ga@mail.ru

О частных производных симметрических многочленов по элементарным многочленам

Н. В. Илюшечкин

Найдены несложные формулы для частных производных произвольного симметрического многочлена по элементарным симметрическим многочленам. С их помощью даётся простой вывод формулы Якоби–Труди для многочленов Шура.

Обозначим n-мерное пространство точек $X = (x_1, \ldots, x_n)$ с комплексными координатами через $\mathbb{C}^n$, а через Ω^n — подмножество этого пространства, состоящее из точек с попарно различными координатами. Мы будем рассматривать симметрические многочлены $g = g(X)$, определённые на всём пространстве $\mathbb{C}^n$. Наиболее важными семействами симметрических многочленов являются следующие.

Во-первых, элементарные симметрические многочлены $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ (конечное семейство). Для них мы также будем использовать другое обозначение $\sigma_r = (-1)^r p_r$. Кроме того, будем считать $\sigma_0 = p_0 = 1$.

Во-вторых, степенные суммы (суммы Ньютона) $s_1, s_2, \ldots$ (бесконечное семейство). Для простоты формул мы введём для них делитель, равный показателю степени, то есть будем использовать выражения

$$\tilde{s}_r(X) = \frac{x_1^r + \cdots + x_n^r}{r}$$

и называть их модифицированными степенными суммами.

В-третьих, полные симметрические многочлены $h_1, h_2, \ldots$ (бесконечное семейство). Многочлен $h_r(X)$ — это сумма всех возможных мономов степени r от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами, равными единице. Мы будем также считать, что $h_0 = 1$ и $h_r = 0$ при $r < 0$.

При этом многочлены первого и третьего семейств связаны соотношениями [1; с. 27]

$$p_0 h_k + p_1 h_{k-1} + \cdots + p_n h_{k-n} = 0, \tag{1}$$

справедливыми при всех натуральных k.

Как известно, любой симметрический многочлен $g(X)$ может быть единственным образом представлен в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

В этой статье предлагается некоторый способ нахождения частных производных $\partial g/\partial \sigma_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Предварительно установим формулу для частной производной элементарного симметрического многочлена σ_r по переменной x_j. Пусть $\sigma_{k,j}$ — элементарный симметрический многочлен степени k от всех, кроме x_j, переменных $x_1, \ldots, x_n$. Из формулы

$$\sigma_r = \sigma_{r,j} + x_j \sigma_{r-1,j} \tag{2}$$

следует, что

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j} = \sigma_{r-1,j}.$$

Последовательно применяя формулу (2), находим отсюда

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j} = (-1)^{r-1} F_{r-1}(x_j), \tag{3}$$

где

$$F_k(x) = p_0 x^k + p_1 x^{k-1} + \cdots + p_k,$$

а x — комплексная переменная.

Предлагаемый ниже способ вычисления частных производных $\partial g / \partial \sigma_i$ основан на следующей теореме.

Теорема. *Если g — произвольный симметрический многочлен степени m от переменных $x_1, \ldots, x_n$, то его частные производные по этим переменным могут быть (вообще говоря, не единственным способом) представлены в форме*

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = G(x_j), \qquad G(x) = \gamma_0 x^{m-1} + \gamma_1 x^{m-2} + \cdots + \gamma_{m-1}, \tag{4}$$

где γ_k $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ — симметрический многочлен степени k.

Далее, если имеются два представления (4) с различными многочленами $G'(x)$ и $G''(x)$, то их разность $G'(x) - G''(x)$ делится на многочлен

$$F_n(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n.$$

Наконец, если для частных производных многочлена g по переменным $x_1, \ldots, x_n$ установлено какое-либо представление (4), то частные производные этого многочлена по элементарным симметрическим многочленам могут быть найдены по формуле

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_i} = (-1)^{i-1} (\gamma_0 h_{m-i} + \gamma_1 h_{m-i-1} + \cdots + \gamma_{m-1} h_{1-i}). \tag{5}$$

Доказательство. Применим индукцию по построению многочлена g. Прежде всего, пусть $g = \sigma_r$ — произвольный элементарный многочлен. Тогда формула (3) даёт искомое представление (4).

Далее, предположим, что это представление возможно для симметрических многочленов g_1 и g_2, то есть

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x_j} &= \gamma_0^{(1)} x_j^{m_1-1} + \gamma_1^{(1)} x_j^{m_1-2} + \cdots + \gamma_{m_1-1}^{(1)}, \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_j} &= \gamma_0^{(2)} x_j^{m_2-1} + \gamma_1^{(2)} x_j^{m_2-2} + \cdots + \gamma_{m_2-1}^{(2)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда из формул дифференцирования суммы и произведения следует, что представление (4) возможно и для многочленов $g_1 + g_2$ и $g_1 g_2$.

Наконец, так как любой симметрический многочлен является многочленом от элементарных, то для него представление (4) также возможно, что доказывает первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения теоремы сначала предположим, что $X \in \Omega^n$. Тогда в случае наличия равенств $G'(x) - G''(x) = 0$ при $x = x_1, \ldots, x_n$ все (различные) числа $x_1, \ldots, x_n$ являются корнями многочлена $G'(x) - G''(x)$. Поэтому этот многочлен должен делиться на произведение

$$(x - x_1) \cdots (x - x_n) = F_n(x).$$

Итак, при $X \in \Omega^n$ справедливо равенство

$$G'(x) - G''(x) = Q(x) F_n(x), \tag{7}$$

где $Q(x)$ — некоторый многочлен от переменной x, коэффициенты которого являются симметрическими многочленами от X. Равенство (7) доказано в предположении $X \in \Omega^n$. Так как множество Ω^n всюду плотно в пространстве $\mathbb{C}^n$, то это равенство можно по непрерывности продолжить на всё пространство $\mathbb{C}^n$. Это доказывает второе утверждение теоремы.

Для доказательства третьего утверждения теоремы снова применим индукцию по построению многочлена g из элементарных многочленов. Сначала пусть $g = \sigma_r$ — элементарный многочлен. Тогда из формулы (3) следует, что должно быть

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \sigma_i} = (-1)^{r+i-2}(p_0 h_{r-i} + p_1 h_{r-i-1} + \cdots + p_{r-1} h_{1-i}).$$

Действительно, если $i > r$, то все полные симметрические многочлены в правой части этого соотношения равны нулю, так что и сама правая часть равна нулю. Если $i = r$, то выражение в правой части равно $p_0 h_0 = 1$. Если же $i < r$, то правая часть равна

$$(-1)^{r+i-2}(p_0 h_{r-i} + p_1 h_{r-i-1} + \cdots + p_n h_{r-i-n}),$$

причём выражение в скобках равно нулю вследствие (1).

Таким образом, если $g = \sigma_r$, то формула (5) даёт $\partial\sigma_r/\partial\sigma_i = \delta_{ri}$ (символ Кронекера), как и должно быть.

Далее, если g_1 и g_2 — симметрические многочлены, для которых найдены представления (6) и справедливы формулы

$$\frac{\partial g_1}{\partial \sigma_i} = (-1)^{i-1}(\gamma_0^{(1)} h_{m_1-i} + \gamma_1^{(1)} h_{m_1-i-1} + \cdots + \gamma_{m_1-1}^{(1)} h_{1-i}),$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial \sigma_i} = (-1)^{i-1}(\gamma_0^{(2)} h_{m_2-i} + \gamma_1^{(2)} h_{m_2-i-1} + \cdots + \gamma_{m_2-1}^{(2)} h_{1-i}),$$

то из формул дифференцирования суммы и произведения следует, что формула (5) верна также для суммы $g_1 + g_2$ и произведения $g_1 g_2$.

Наконец, если для многочлена g найдены два различных представления (4) с многочленами $G'(x)$ и $G''(x)$, то их разность удовлетворяет соотношению (7), где $Q(x)$ — многочлен вида

$$Q(x) = q_0 x^t + q_1 x^{t-1} + \cdots + q_t,$$

коэффициенты которого $q_0, \ldots, q_t$ являются симметрическими многочленами. Поэтому значения частных производных многочлена g по σ_i, найденные по представлениям (4) с G' и G'', отличаются на величину, являющуюся линейной комбинацией величин

$$p_0 h_{n+s-i} + p_1 h_{n+s-i-1} + \cdots + p_n h_{s-i}$$

при $s = 1, \ldots, t+1$. Вследствие (1) это выражение равно нулю, и теорема полностью доказана.

Для модифицированной степенной суммы $\tilde{s}_m$ представление (4) особенно просто: $\partial\tilde{s}_m/\partial x_j = x_j^{m-1}$. Поэтому имеет место

Следствие. *Для модифицированных степенных сумм справедлива формула*

$$\frac{\partial \tilde{s}_m}{\partial \sigma_i} = (-1)^{i-1} h_{m-i}. \tag{8}$$

Применим найденные соотношения для простого вывода формулы Якоби—Труди, выражающей многочлены Шура [2, с. 98 – 99]. Прежде всего, в кольце симметрических многочленов в качестве базовых можно взять многочлены

$$e_1 = (-1)^{n-1}\sigma_n,\ e_2 = (-1)^{n-2}\sigma_{n-1}, \ldots, e_n = \sigma_1.$$

Тогда формулу (8) можно записать в виде $\partial\tilde{s}_m/\partial e_i = h_{m-n+i-1}$. Поэтому, если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — натуральные числа, то якобиан

$$\frac{\partial(\tilde{s}_{\alpha_1}, \ldots, \tilde{s}_{\alpha_n})}{\partial(e_1, \ldots, e_n)}$$

равен определителю

$$\frac{\partial(\tilde{s}_{\alpha_1}, \ldots, \tilde{s}_{\alpha_n})}{\partial(e_1, \ldots, e_n)} = \begin{vmatrix} h_{\alpha_1-n} & h_{\alpha_1-n+1} & \cdots & h_{\alpha_1-1} \\ h_{\alpha_2-n} & h_{\alpha_2-n+1} & \cdots & h_{\alpha_2-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\alpha_n-n} & h_{\alpha_n-n+1} & \cdots & h_{\alpha_n-1} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

В частности, если $\alpha_1 = n, \alpha_2 = n-1, \ldots, \alpha_n = 1$, то в правой части этой формулы стоит определитель верхнетреугольной матрицы, на главной диагонали которой стоят элементы $h_0 = 1$. Поэтому

$$\frac{\partial(\tilde{s}_n, \tilde{s}_{n-1}, \ldots, \tilde{s}_1)}{\partial(e_1, \ldots, e_n)} = 1. \tag{10}$$

Далее, многочлен Шура $S_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}(X)$ степени λ, соответствующий разбиению $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, где $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$, равен некоторой дроби, в числителе и знаменателе которой стоят определители порядка n. Строка числителя с номером k состоит из чисел $x_1^{\lambda_k+n-k}, \ldots, x_n^{\lambda_k+n-k}$, а соответствующая строка знаменателя — из чисел $x_1^{n-k}, \ldots, x_n^{n-k}$. Таким образом, с точностью до знака знаменатель совпадает с определителем Вандермонда $W = W(x_1, \ldots, x_n)$, построенным по числам $x_1, \ldots, x_n$. При $X \in \Omega^n$ знаменатель отличен от нуля, и многочлен Шура можно представить как отношение якобианов

$$\frac{\partial(\tilde{s}_{\lambda_1+n}, \tilde{s}_{\lambda_2+n-1}, \ldots, \tilde{s}_{\lambda_n+1})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \bigg/ \frac{\partial(\tilde{s}_n, \tilde{s}_{n-1}, \ldots, \tilde{s}_1)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} =$$
$$= \frac{\partial(\tilde{s}_{\lambda_1+n}, \tilde{s}_{\lambda_2+n-1}, \ldots, \tilde{s}_{\lambda_n+1})}{\partial(e_1, \ldots, e_n)} \bigg/ \frac{\partial(\tilde{s}_n, \tilde{s}_{n-1}, \ldots, \tilde{s}_1)}{\partial(e_1, \ldots, e_n)}.$$

Вследствие соотношений (9) и (10) получаем (при $X \in \Omega^n$) формулу Якоби—Труди

$$S_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}(X) = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \cdots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \cdots & h_{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_n-n+1} & h_{\lambda_n-n+2} & \cdots & h_{\lambda_n} \end{vmatrix}.$$

По непрерывности эта формула продолжается с множества Ω^n на всё пространство $\mathbb{C}^n$.

Литература

1. Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. – М.: Мир, 1985.
2. Прасолов В.В. Многочлены, – М.: МЦНМО, 2003.

Илюшечкин Никита Васильевич,
Ведущий инженер
АО Концерн Моринформсистема – Агат, г. Москва.

E-mail: ilyush55@mail.ru

Алгоритмизация метода рядов для исследования линейных интегро-дифференциальных уравнений с аналитическими функциями

В. Т. Мураталиева

Построен и реализован на компьютере алгоритм, который по заданному уравнению со степенными сомножителями при дифференциальных и интегральных слагаемых представляет данные для определения существования решения и наличия в нем произвольных постоянных.

Введение

Известны различные способы применения компьютерной техники в теоретической математике. По одной из неформальных классификаций, методы доказательства теорем с помощью компьютера можно разделить на: аксиоматически-логические; точные вычисления с целыми числами и подобными им объектами; аналитические (алгебраические) преобразования, в том числе - формульное дифференцирование и интегрирование; доказательные вычисления - получение строгих результатов приближенными вычислениями. Также можно выделить алгоритмы, которые дают сообщение, что предложенная теорема верна, и алгоритмы, которые по некоторой ситуации дают формулировку теоремы (то есть - «наиболее сильного утверждения, которое может быть доказано за приемлемое время»); алгоритмы, которые также дают доказательство предложенной теоремы («наиболее короткое доказательство»), которое практически невозможно получить без компьютера. В данной статье мы предлагаем алгоритм, который не дает полной формулировки теоремы, а так преобразует условие, что формулировка теоремы является очевидной для понимающего человека.

В [1] мы показали на примерах возможность нахождения достаточных условий существования решений некоторых типов интегро-дифференциальных уравнений с аналитическими функциями методом рядов. В [2] мы систематизировали такой переход от интегро-дифференциальных уравнений к системам разностных уравнений, в [3] мы описали структуру алгоритма для исследования таких разностных систем. В данной статье мы предлагаем такой полный алгоритм и приводим примеры его использования.

Описание класса уравнений и алгоритма

Рассматриваются уравнения, левая часть которых представляет собой сумму слагаемых — операторов от неизвестной функции вида

$$bt^pD^mu(t),\quad D:=\frac{d}{dt},\quad p\geq 0 \ \text{ и вида } \ bt^pI^mu(t),\quad Iu=\int\limits_0^t u(v)dv,\quad p\geq 0,$$

правая часть является заданной аналитической функцией $f(t)=f[0]+f[1]t+\cdots$.

Для единообразия будем записывать интегральные операторы так же, как дифференциальные, но с отрицательным показателем (формулы также аналогичны).

Вводится функция двух целочисленных переменных

$$A(m,n)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{n!}{(n-m)!}, & \text{если } n\geq 0,\ n\geq m,\\ 0, & \text{иначе.}\end{array}\right\}$$

Рассмотрим только «нерезонансный» случай, поддающийся алгоритмизации: все величины $(p-m)$ для различных слагаемых различны.

АЛГОРИТМ

1) Ввести натуральное число K — количество операторов в правой части.

2) Последовательно для $k = 1, \ldots, K$ ввести:

b_k — ненулевое целое число — числовой коэффициент в операторе.

Примечание. «Вещественное число» не является алгоритмическим понятием, но практически в алгоритме можно использовать и вещественные значения b_k.

p_k — неотрицательное целое число — степень независимой переменной в коэффициентах при линейных операторах;

m_k — это положительное целое число (порядок дифференцирования) или отрицательное целое число (порядок интегрирования) или ноль (сама функция); вычислить $I_k := p_k - m_k$.

3) Изобразить получающееся интегро-дифференциальное уравнение для функции $u(t) = u[0] + u[1]t + \cdots$.

В соответствии с принятыми обычаями записи, случаи $b_k = -1$ и $b_k = 1$ изображаются отдельно; случаи $p_k = 0$ и $p_k = 1$ изображаются отдельно; случаи $m_k = -1$, $m_k = 0$ и $m_k = 1$ изображаются отдельно.

4) Изобразить систему разностных уравнений, к которым сводится интегро-дифференциальное уравнение. k-й член в уравнении дает член $b_k A(m_k, n(I_k))u[n(I_k)]$.

В правой части находится выражение $f[n],\ n = 0, 1, 2, \ldots$.

Кроме вышеперечисленных, случай $I_k = 0$ изображается отдельно.

5) Вычислить $n_0 := \max\{m_k, I_k\}$ и изобразить уравнения из системы (4) начиная с $n = 0$ и заканчивая $n = n_0 + 1$.

В результате получается последовательность уравнений для $u[0], u[1], \ldots$

В нескольких первых уравнениях слева может быть ноль.

Методика действий пользователя по окончательной формулировке теоремы

Пользователь анализирует запись п. 5.

6) Если в нескольких первых уравнениях слева находится ноль, то они представляют необходимые условия на $f(t)$ (на первые коэффициенты $f[0], f[1], \ldots, f[k]$) для существования решения.

7) Пользователь определяет, какие первые коэффициенты $u[0], u[1], \ldots$ могут быть выбраны произвольно так, чтобы последующие коэффициенты однозначно определялись через них и через $f[k]$), учитывая, что структура всех последующих уравнений такая же, как и у записанного $(n_0 + 1)$-го уравнения.

Так пользователь устанавливает существование формального ряда для решения.

8) Исходя из структуры всех уравнений, начиная с $(n_0 + 1)$-го уравнения. пользователь находит область сходимости ряда для $u(t)$.

Текст программы на языке Паскаль см. в Приложении 1.

Пример уравнения и теоремы для него

Теорема. Если $f(0) = 0$, то уравнение

$$-t^2 u'(t) + tu(t) + 7t^3 \int\limits_0^t \int\limits_0^s u(v)dvds = f(t) \tag{1}$$

имеет аналитическое решение, зависящее от одной произвольной постоянной $u'(0)$. Его радиус сходимости такой же, как для функции $f(t)$.

Результат применения программы к данному уравнению см. в Приложении 2.

Приложение 1. Текст программы на языке Паскаль

```
PROGRAM venera_1 (input, output); USES CRT, Dos;
var k,j,a_n, a_d,n: integer; p,b,I,I_,m: array[1..5] of integer;
b_,tp_:array[1..5] of string; a_,n_,nn_,nm_,m_,p_:string; and_,no_m:boolean;
procedure a_n_d(m1,n1:integer);
begin and_:=false; if (n1>=0) and (n1>=m1) then
begin and_:=true; str(n1-m1,nm_); str(n1,nn_); a_:=nn_+'!/'+nm_+'! *';
end; end;
begin {main}clrscr; writeln; writeln(' Venera Ordinary IDE 2017');
write(' Input number of summands 2<= K <=5: '); readln(k);
for j:=1 to k do begin
write(' Input coef. b[',j:1,'], t^p[',j:1,'], int/dif m[',j:1,']: ');
readln(b[j], p[j], m[j]); str(b[j],b_[j]); b_[j]:=b_[j]+'*';
if b[j]>0 then b_[j]:=' +'+b_[j]; if b[j]=-1 then b_[j]:='-';
if b[j]=1 then b_[j]:=' +'; tp_[j]:=' '; if p[j]=1 then tp_[j]:='t';
if p[j]>1 then begin str(p[j],p_); tp_[j]:='t^'+p_end;
I[j]:=p[j]-m[j]; I_[j]:=-I[j]; end;
writeln (' Equation'); for j:=1 to k do begin
if m[j]=-1 then write(' ',b_[j], tp_[j],' int_0^t u(s)ds');
if m[j]<-1 then write(' ',b_[j], tp_[j],' (int_0^t)^',-m[j]:2,' u(s)ds');
if m[j]=0 then write(' ',b_[j],tp_[j],' u(t)');
if m[j]>1 then write(' ',b_[j], tp_[j],' D^',m[j]:2,' u(t)');
if m[j]=1 then write(' ',b_[j], tp_[j],' D u(t)'); end; writeln(' = f(t)');
writeln (' System of equations for coefficients');
for j:=1 to k do begin n_:='n'; if I[j]<0 then n_:='n+';
if I[j]<>0 then write(' ',b_[j], 'A(',m[j]:2,',',n_,-I[j]:2,') u[',n_,-I[j]:2,']');
if I[j]=0 then write(' ',b_[j], 'A(',m[j]:2,',',n_,') u[',n_,']'); end;
writeln(' = f[n]'); writeln (' First equations for coefficients');
for n:=0 to 10 do begin no_m:=true;
for j:=1 to k do begin a_n_d(m[j],n-I[j]);
if and_then begin no_m:=false; write(' ',b_[j],a_,' u[',n-I[j]:2,']');
end; end;
if no_m then write(' 0 '); write(' = f[',n:2,']'); writeln;
end; writeln (' ... '); readln; readln end.
```

Приложение 2. Результат применения программы к уравнению (1)

```
Venera Ordinary IDE 2017
Input number of summands 2<= K <=5: 3
Input coef. b[1], t^p[1], int/dif m[1]: -1 2 2
Input coef. b[2], t^p[2], int/dif m[2]: 1 1 0
Input coef. b[3], t^p[3], int/dif m[3]: 7 3 -2
Equation
-t^2 D^2 u(t) +t u(t) +7*t^3 (int_0^t)^2 u(s)ds = f(t)
System of equations for coefficients
-A( 2,n) u[n] +A( 0,n-1) u[n-1] +7*A(-2,n-5) u[n-5] = f[n]
First equations for coefficients
0 = f[ 0]
+0!/0!  * u[ 0] = f[ 1]
-2!/0! * u[ 2] +1!/1! * u[ 1] = f[ 2]
-3!/1! * u[ 3] +2!/2! * u[ 2] = f[ 3]
-4!/2! * u[ 4] +3!/3! * u[ 3] = f[ 4]
-5!/3! * u[ 5] +4!/4! * u[ 4] +7*0!/2! * u[ 0] = f[ 5]
-6!/4! * u[ 6] +5!/5! * u[ 5] +7*1!/3! * u[ 1] = f[ 6]
```

-7!/5! * u[7] +6!/6! * u[6] +7*2!/4! * u[2] = f[7]
-8!/6! * u[8] +7!/7! * u[7] +7*3!/5! * u[3] = f[8]
-9!/7! * u[9] +8!/8! * u[8] +7*4!/6! * u[4] = f[9]
-10!/8! * u[10] +9!/9! * u[9] +7*5!/7! * u[5] = f[10]
...

Литература

1. Мураталиева В.Т. Спектральные свойства линейных вольтерровских интегро-дифференциальных уравнений третьего рода второго порядка // Наука вчера, сегодня, завтра: сб. статей по матер. XXXIV междунар. научно-практ. конф. - № 5(27). - Часть I. – Новосибирск: СибАК, 2016. – С. 57–61.

2. Панков П.С., Мураталиева В.Т. Спектральные свойства линейных задач с аналитическими функциями // Доклады Национальной академии наук Кыргызской Республики. – 2016. – № 1. – С. 11–14.

3. Мураталиева В.Т. Алгоритм для исследования спектральных свойств линейных задач с аналитическими функциями // Вестник Жалал-Абадского государственного университета. – 2016. – № 1(32). – С. 55-59.

Мураталиева Венера Тологоновна,
доцент Жалал-Абадского гос. университета,
г. Жалал-Абад, Кыргызстан, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: vmuratalieva70@mail.ru

Задачи по линейной алгебре на студенческих олимпиадах

А. Ю. Эвнин, Ю. А. Игнатов

В статье рассматриваются задачи по линейной алгебре, предлагавшиеся в последние годы на различных студенческих олимпиадах, а также на вступительном экзамене в Школу анализа данных. Некоторые задачи — подготовительного характера.

Эта подборка задач продолжает серию аналогичных публикаций [7, 8] в журнале «Математическое образование».

Задачи сгруппированы по темам (хотя деление это весьма условно: некоторые задачи можно отнести к разным темам, например, из-за возможности разных способов решения).

Обозначения

I — единичная матрица (подходящего размера);

O — нулевая матрица (подходящего размера);

E — матрица подходящего размера, составленная из одних единиц;

A' — матрица, транспонированная к A;

$\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ — диагональная матрица с заданными элементами главной диагонали;

$\mathrm{rk}\, A$ — ранг матрицы A;

$\mathrm{Ker}\, A$ — ядро матрицы A;

$\mathrm{Im}\, A$ — образ матрицы A;

$\mathrm{tr}\, A$ — след (т. е. сумма элементов главной диагонали) матрицы A;

$\det A$ или $|A|$ — определитель матрицы A;

$\gcd(a, b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b;

$\varphi(m)$ — функция Эйлера (количество натуральных чисел, не превосходящих m и взаимно простых с m);

$\lfloor x \rfloor$ — округление снизу (наибольшее целое число, не превосходящее x);

$\lceil x \rceil$ — округление сверху (наименьшее целое число, не меньшее x).

Условия задач

Операции над матрицами

1. Возведите матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в 2018-ю степень.

2. Возведите матрицу $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ в 2016-ю степень.

3. Сколько есть пар чисел x и y, для которых выполняется матричное равенство

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

4. Дана матрица $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2/n & 6/n \\ 3/n & 1 & 0 \\ -1/n & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^n$.

5. Найдите A^n, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ -4 & 12 & -5 \end{pmatrix}$.

6. Вычислите 100-ю степень матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Пусть A и B — ненулевые матрицы размером $n \times n$, где $n \geqslant 2$. Известно, что $ABA = A$. Следует ли отсюда, что $BAB = B$?

8. Пусть для матриц A и B выполнено равенство $AB = \alpha A + \beta B$, где α и β — некоторые ненулевые числа. Докажите, что $BA = AB$.

9. Пусть A, B, C — квадратные матрицы одинакового размера, причём матрица A невырожденная. Докажите, что если $(A - B)CA = B$, то $AC(A - B) = B$.

10. Пусть A и B — различные действительные квадратные матрицы. Если $A^3 = B^3$ и $A^2B = B^2A$, то может ли матрица $A^2 + B^2$ быть обратимой?

11. Пусть A и B — квадратные матрицы, $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB = BA$. Какие значения может принимать определитель матрицы $A - B$?

12. Матрицы A и B не коммутируют между собой, т. е. $AB \neq BA$. Может ли оказаться, что матрицы A^2 и B^2 коммутируют?

13. Относительно квадратной матрицы A известно, что сумма элементов, выбранных по одному из каждого столбца и каждой строки, одна и та же. Докажите, что $A = B + C$, где в матрице B каждый столбец состоит из одинаковых элементов, а в матрице C каждая строка состоит из одинаковых элементов.

14. A и B — матрицы размером 3×2 и 2×3 соответственно. Известно, что

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу BA.

Определители

15. Все элементы определителя третьего порядка являются квадратами нечётных чисел. Докажите, что определитель делится на 64.

16. Вычислите определитель матрицы $A = (a_{i,j})$ размером $n \times n$ с общим членом $a_{i,j} = \max(i, j)$.

17. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 \\ & & & \dots & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} \end{vmatrix}.$$

18. Имеется числовая матрица $A = (a_{i,j})$ размером 99×99. Известно, что если $i + j$ чётно, то $a_{i,j} = 0$. Докажите, что определитель матрицы A равен нулю.

19. Имеется матрица $A = (a_{i,j})$ размером 6×6 с общим членом $a_{i,j} = ij$. Пусть $f(x)$ — определитель матрицы $A + xI$, где I — единичная матрица размером 6×6. Вычислите $f'(0)$.

20. Пусть $A = (a_{i,j})$ — матрица размером $n \times n$ с общим членом $a_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} k^{i+j}$. Вычислите определитель этой матрицы.

21. Пусть $A = (a_{i,j})$ — матрица размером $n \times n$ с общим членом $a_{i,j} = C_{i+j-2}^{i-1}$. Вычислите определитель этой матрицы.

22. Дана матрица из нулей и единиц, причём для каждой строки матрицы верно следующее: если в строке есть единицы, то они все идут подряд. Докажите, что определитель такой матрицы может быть равен только ± 1 или 0.

23. Пусть $A = (a_{i,j})$ — матрица размером $n \times n$ с общим членом $a_{i,j}$, равным количеству общих делителей чисел i и j. Вычислите определитель этой матрицы.

24. Вычислите определитель матрицы $A = (a_{i,j})$ размером $n \times n$ с общим членом $a_{ij} = \gcd(i, j)$.

25. Положительные попарно различные числа a, b, c являются элементами определителя третьего порядка, причём каждое число взято по три раза. Найдите наибольшее возможное значение определителя.

26. Все элементы определителя четвёртого порядка равны 1 или -1. Найдите наибольшее возможное значение этого определителя.

27. Найдите максимальное значение определителя невырожденной вещественной матрицы а) второго; б) третьего порядка, если сумма квадратов всех её элементов не больше 1.

Ранг матрицы

28. A и B — квадратные матрицы одинакового размера. Обязательно ли
а) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$; б) $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(BA)$?

29. Пусть $a_{ij} = (i - j)^2$. Найдите ранг матрицы A размером $n \times n$, где $n \geqslant 3$, с общим элементом a_{ij}.

30. Пусть A — вырожденная матрица. Докажите, что матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов A, имеет ранг не больше 1.

31. Пусть $A = (a_{i,j})$ — матрица размера $2 \times n$; $\delta_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,i} & a_{1,j} \\ a_{2,i} & a_{2,j} \end{vmatrix}$. Найдите ранг матрицы $\Delta = (\delta_{i,j})$.

32. Матрица размером $m \times n$ имеет ранг r. Нужно дополнить её до квадратной так, чтобы полученная матрица стала невырожденной. Каков наименьший размер полученной квадратной матрицы?

33. Квадратная матрица A размера 20×20 невырождена. Какое наименьшее значение может иметь ранг подматрицы 12×13 матрицы A? (Подматрица получается вычеркиванием из A некоторых строк и столбцов).

Ортогональные матрицы

34. Существуют ли ортогональные кососимметрические матрицы размером а) 9×9; б) 10×10?

35. Пусть A и B — ортогональные матрицы. Докажите, что

$$\det(B'A - A'B) = \det(A + B) \cdot \det(A - B).$$

36. Пусть A и B — ортогональные матрицы одинакового размера. Известно, что сумма их определителей равна нулю. Докажите, что и определитель суммы этих матриц равен нулю.

37. Пусть $A = (a_{i,j})$ — ортогональная матрица размером 3×3, причём все её элементы отличны от нуля. Составим матрицу $B = (b_{i,j})$ с общим элементом $b_{i,j} = \dfrac{1}{a_{i,j}}$. Докажите, что определитель этой матрицы равен нулю.

38. Пусть A — произвольная ортогональная матрица размером $n \times n$. Докажите, что сумма квадратов всех миноров второго порядка матрицы A равна $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Собственные значения. Характеристический многочлен

39. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A размером $n \times n$, все элементы которой неотрицательные действительные числа. Докажите, что $\lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k \geqslant 0$ для любого натурального числа k.

40. Докажите, что целочисленная матрица не может иметь собственного значения, равного $\frac{1}{4}(-3 + i\sqrt{5})$.

41. G — неориентированный непустой граф без петель. Докажите, что его матрица смежности имеет отрицательное собственное значение.

42. Пусть A — матрица размером $n \times n$, $\operatorname{rk} A = 1$. Найдите спектр матрицы A (т. е. её собственные значения вместе с их алгебраическими кратностями), если а) $\operatorname{tr} A \neq 0$; б) $\operatorname{tr} A = 0$.

43. Найдите собственные значения матрицы vv', где $v \in \mathbb{R}^n$ и $v \neq 0$.

44. Пусть E — $n \times n$-матрица, все элементы которой единицы. Вычислите определитель матрицы $E - I$.

45. Дана матрица $B = (b_{ij})$ размером $n \times n$. Если $i \neq j$, то $b_{ij} = a_i a_j$; иначе $b_{ii} = a_i^2 + k$. Вычислите определитель матрицы B.

46. Пусть J — кососимметрическая матрица размером $2n \times 2n$, $u \in \mathbb{R}^{2n}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Вычислите $\det(I + \beta uu'J)$.

47. Пусть A — вещественная трёхдиагональная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix},$$

причём $\forall i \quad a_{i+1}c_i > 0$. Докажите, что все собственные значения матрицы A вещественные.

48. Пусть A — матрица размером 3×3. Известно, что её определитель равен единице, след A и след A^{-1} равны нулю. Докажите, что $A^3 = I$.

49. Даны матрицы $A_1, A_2, \dots, A_n$, где $n \geqslant 3$. Известно, что

$$A_1' = A_2A_3 \dots A_n; \quad A_2' = A_3A_4 \dots A_1; \quad \dots; \quad A_n' = A_1A_2 \dots A_{n-1}.$$

Докажите, что матрица $P = A_1A_2 \dots A_n$ идемпотентна, т. е. что $P^2 = P$.

50. Пусть A и B — квадратные матрицы одинакового размера. Докажите, что $\det(I - AB) = \det(I - BA)$.

Матричные уравнения

51. Найдите все квадратные действительные матрицы размером 3×3, удовлетворяющие уравнению $X^2 + I = 0$.

52. Пусть A и B — квадратные матрицы одинакового размера, причём матрица A — невырожденная. Возможно ли равенство $AB - BA = A$?

53. Существует ли невырожденная квадратная матрица A третьего порядка с действительными элементами такая, что $A^3 + 2A' = 0$?

54. Существует ли вещественная матрица X такая, что

$$X^2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}?$$

55. Пусть квадратная матрица A — невырожденная, а матрица X удовлетворяет уравнению $AX + XA = 0$. Докажите, что след матрицы X равен нулю.

56. Пусть A — квадратная матрица с нулями по главной диагонали. Докажите, что существуют такие матрицы B и C, что $A = BC - CB$.

57. При каких натуральных n существует квадратная матрица размером $n \times n$ с элементами 0, 1 такая, что её квадрат — матрица из одних единиц?

Квадратичная форма

58. Имеется квадратичная форма Q в n-мерном пространстве. Разрешается задавать вопросы вида «Чему равно $Q(v)$?». Какое минимальное число вопросов нужно задать, чтобы определить, является ли форма Q положительно определённой?

59. В пространстве многочленов с действительными коэффициентами степени не выше n задана квадратичная форма $Q(f) = f(1) \cdot f(2)$. Найдите её сигнатуру (число единиц и минус единиц в нормальном виде).

60. Пусть $n \geqslant 2$. Найдите наибольшее p, для которого неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \cdots + x_n^2 \geqslant p(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n)$$

выполняется при всех $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Игры. Инварианты

61. Двое играющих по очереди заполняют таблицу 3×3 в произвольном порядке произвольными числами. Задача второго — добиться, чтобы определитель получившейся матрицы был равен 0; задача первого — ему помешать. У кого есть выигрышная стратегия?

62. Первоначально таблица 5×5 пуста. Аня выбирает любую клетку и записывает в неё любое число от 1 до 25. Затем Ваня в другую клетку записывает число от 1 до 25, отличное от записанного Аней. И далее игроки по очереди записывают в незанятые клетки числа от 1 до 25, отличные от ранее записанных. Если определитель соответствующей матрицы делится на 25, выигрывает Аня; в противном случае побеждает Ваня. Кто выигрывает при правильной игре?

63. Петя и Вася по очереди вписывают элементы в матрицу $2n\times2n$. Вася хочет получить матрицу с собственным значением 2019. Сможет ли Петя ему помешать?

64. Во всех клетках главной диагонали матрицы 3×3 стоит переменная x. Остальные элементы двое играющих заполняют по очереди числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, расставляя их в любом порядке на свободные места. В результате определитель получившейся матрицы будет многочленом 3-й степени. Задача второго игрока — добиться, чтобы этот многочлен имел целочисленный корень, первого — помешать ему. У кого есть выигрышная стратегия?

65. В клетках таблицы 3×3 по одной диагонали записано число $\varepsilon = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, а в остальных клетках 1. Разрешается любую строку или любой столбец умножить на ε. Можно ли за несколько таких операций получить таблицу, в которой по другой диагонали стоит ε, а в остальных клетках 1?

66. Дана матрица $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Разрешается любую строку (столбец) поэлементно умножить или разделить на другую строку (соответственно, столбец). Можно ли за несколько таких операций получить матрицу:
а) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$?

Разные задачи

67. Имеется чётное (но большее двух) количество действительных чисел. Если удалить любое из этих чисел, остальные можно разбить на две части с одинаковыми суммами их элементов. Докажите, что все исходные числа равны нулю.

68. Опишите все невырожденные вещественные матрицы A, для которых все элементы матриц A и A^{-1} неотрицательны.

69. У линейного преобразования n-мерного пространства существуют такие $n + 1$ собственных векторов, что любые n из них линейно независимы. Найдите все матрицы, которые задают такое преобразование.

70. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$ — фиксированные векторы, причём $x \neq 0$. Докажите, что найдётся симметричная вещественная матрица размером $n \times n$ и ранга не больше 2, такая, что $Ax = y$.

71. Для двух квадратных матриц A и B размером $n \times n$ вычислим их произведение $C = AB$. Матрицу D определим так. Если i нечётно, то $d_{ij} = c_{ij}$, иначе $d_{ij} = b_{ij}$. Для матрицы A определим оператор $\Phi : B \to D$ на пространстве матриц $n \times n$.

а) Может ли этот оператор иметь собственное значение 2 для некоторой матрицы A?

б) Какое наибольшее количество различных собственных значений может иметь такой оператор (при фиксированном n)?

72. В каждой строке невырожденной матрицы A порядка n стоит только одно отличное от 0 число, равное 1 или -1. Докажите, что найдется такое m, при котором $A^m = A'$.

73. Пусть A — невырожденная вещественная матрица размером $n \times n$, все элементы которой положительны. Докажите, что число нулей среди элементов матрицы A^{-1} не превосходит $n^2 - 2n$.

74. Квадратная матрица A такова, что $\mathrm{tr}(AX) = 0$ для любой матрицы X, имеющей нулевой след. Докажите, что матрица A является скалярной (т. е. имеет вид αI для некоторого числа α).

75. Назовём матрицу *вращательной*, если при повороте на 90° вокруг центра она не меняется. Докажите, что у вещественной вращательной матрицы все собственные векторы v с отличными от нуля действительными собственными значениями симметричны (т. е. $\forall i \quad v_i = v_{n+1-i}$).

Ответы, указания и решения

1. Легко убедиться в том, что $A^2 = -I$. Отсюда $A^{2018} = -I$.

2. $2^{2016}I$.

Решение. Рассмотрим матрицу поворота

$$U_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $U_\alpha \cdot U_\beta = U_{\alpha+\beta}$. Отсюда $U_\alpha^n = U_{n\alpha}$. Осталось заметить, что $A = 2U_{\pi/6}$.

Замечание. К ответу также легко прийти непосредственными вычислениями:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^6 = \begin{pmatrix} -2^6 & 0 \\ 0 & -2^6 \end{pmatrix}, \ldots$$

3. 10.

Решение. Обозначим $n = 10$. Перейдя от матричного равенства к равенству их определителей, получим, что $(x^2+y^2)^n = 1$. Отсюда $x^2+y^2 = 1$. Поэтому можно считать, что $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ для некоторого $\varphi \in [0; 2\pi)$. Используя обозначения из решения предыдущей задачи, матричное уравнение можно переписать в виде $U_\varphi^{10} = U_{10\varphi} = U_0$. Возникает система уравнений $\cos n\varphi = 1$, $\sin n\varphi = 0$, откуда $n\varphi = 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. На промежутке $[0; 2\pi)$ имеем ровно n решений.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 9 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. Пусть $B_n = A_n - I$. Имеем

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{n} & \frac{6}{n} \\ \frac{3}{n} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{n} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{n^2} & \frac{18}{n^2} \\ 0 & -\frac{2}{n^2} & -\frac{6}{n^2} \end{pmatrix}, \quad B_n^3 = O.$$

Значит, $B_n^k = O$ при $k \geqslant 3$. Поэтому по формуле бинома Ньютона (учитывая перестановочность матриц I и B_n)

$$A_n^n = (I + B_n)^n = I + nB_n + \frac{n(n-1)}{2}B_n^2.$$

5. $\begin{pmatrix} -2^{n+2}+4\cdot 3^n & 6\cdot 2^n - 4\cdot 3^n & -2^{n+1}+3^n \\ -3\cdot 2^{n+1}+4\cdot 3^n & 9\cdot 2^n - 4\cdot 3^n & -6\cdot 2^n + 3^n \\ -2^{n+3}+4\cdot 3^n & 12\cdot 2^n - 4\cdot 3^n & -2^{n+2}+3^n \end{pmatrix}$.

Решение. У матрицы A три различных собственных значения: 2, 3, 0. Поэтому она приводится к диагональному виду. Столбцы матрицы перехода $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ — собственные векторы, отвечающие указанным собственным значениям. Получаем

$$A = T\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}, \quad A^n = T\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}.$$

6. $\begin{pmatrix} -10\,099 & -200 & 9\,900 \\ 10\,200 & 201 & -10\,000 \\ -10\,100 & -200 & 9\,901 \end{pmatrix}$.

Решение. В отличие от предыдущей задачи матрица не является диагонализируемой: её характеристический многочлен равен $-(\lambda+1)^3$, а геометрическая кратность единственного собственного значения равна единице. По теореме Гамильтона - Кэли, $(A+I)^3 = O$. Поэтому нас интересует остаток от деления многочлена x^{100} на многочлен $(x+1)^3$:

$$x^{100} = (x+1)^3 \cdot q(x) + ax^2 + bx + c. \tag{$*$}$$

Для того, чтобы его найти, сделаем замену $t = x+1$ и заметим, что

$$(t-1)^{100} \equiv C_{100}^2 t^2 - 100t + 1 \pmod{t^3}.$$

Отсюда $ax^2 + bx + c = 4950(x+1)^2 - 100(x+1) + 1 = 4950x^2 + 9800x + 4851$ и

$$A^{100} = 4950A^2 + 9800A + 4851.$$

Замечание. В материалах [13] остаток находят так. Дифференцируют два раза тождество $(*)$. Подставляют $x = -1$ и решают получившуюся систему линейных уравнений относительно a, b и c.

7. Неверно.

Решение. Если матрица A невырожденная, то умножив обе части равенства $ABA = A$ слева на A^{-1}, получим, что $BA = I$ и $BAB = B$. Значит, в опровергающем примере матрица A должна быть вырожденной.

Если положить $B = I$, то нужно искать матрицу A, удовлетворяющую условиям $A^2 = A$ (такую матрицу называют идемпотентной) и $A \neq I$. Подойдёт любая диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят нули и единицы, и при этом есть хотя бы один нуль (тогда матрица отлична от I) и хотя бы одна единица (тогда матрица ненулевая, как этого требует условие задачи).

8. Из условия задачи следует, что A и B — квадратные матрицы одинакового размера. Условие $AB = \alpha A + \beta B$ можно переписать в виде

$$(A - \beta I)(B - \alpha I) = \alpha\beta I.$$

Поэтому матрицы $\frac{1}{\beta}(A - \beta I)$ и $\frac{1}{\alpha}(B - \alpha I)$ — взаимно обратные. Значит, $\frac{1}{\alpha\beta}(B - \alpha I)(A - \beta I) = I$, откуда $BA = \alpha A + \beta B = AB$.

9. Из условия следует, что $(A-B)C = BA^{-1}$. Отсюда

$$AC - BC - BA^{-1} + AA^{-1} = I, \quad (A-B)(C+A^{-1}) = I.$$

Поэтому $(A-B)^{-1} = C + A^{-1}$ и

$$(C+A^{-1})(A-B) = I, \quad CA - CB = A^{-1}B, \quad AC(A-B) = B,$$

что и требовалось доказать.

10. Не может.

Решение. Заметим, что

$$(A^2+B^2)(A-B) = A^3 + B^2A - A^2B - B^3 = O.$$

Если бы матрица A^2+B^2 была невырожденной, то из записанного равенства следовало бы, что $A-B=O$.

11. Положим $C = A-B$. Поскольку матрицы A и B коммутируют, имеем

$$C^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = A - B = C.$$

Если $x = \det C$, то $x^3 = x$, откуда $x = 0, \pm 1$. Несложно привести примеры, когда указанные значения достигаются. Например, определитель будет равен -1 при $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

12. Может.

Решение. Можно выбрать одну из матриц так, что её квадрат равен единичной матрице. Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда $AB \neq BA$. В то же время матрица $B^2 = I$ перестановочна с любой матрицей.

13. Любой минор матрицы A (рассматриваемый как подматрица) обладает тем же свойством, что и сама матрица. К этому утверждению легко прийти, зафиксировав выбор элементов из дополнительного минора.

Для минора, расположенного в строках с номерами 1 и i и столбцах с номерами 1 и j, имеем $a_{11} + a_{ij} = a_{1j} + a_{i1}$. Если положить $b_j = a_{1j} - a_{11}$ и $c_i = a_{i1}$, получим $a_{ij} = c_i + b_j$. Отсюда $A = B + C$, где

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 & \dots & c_1 \\ c_2 & c_2 & \dots & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_n & \dots & c_n \end{pmatrix}.$$

Сумма элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, равна $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$.

14. Матрица AB имеет ранг 2, такой же ранг имеют матрицы A и B. Поэтому существуют матрицы A^+ и B^+, такие что $A^+A = I$, $BB^+ = I$. Заметим, что $(AB)^2 = 9AB$. Тогда

$$BA = (A^+A)BA(BB^+) = A^+(AB)^2B^+ = 9A^+(AB)B^+ = 9I.$$

15. Квадрат нечётного числа при делении на 8 дает остаток 1. Вычтем из второй и третьей строки первую. Все элементы этих строк будут кратны 8.

16. $(-1)^{n-1}n$.

Вычтите из строки с номером i предыдущую строку ($i = n, n-1, \ldots, 2$).

17. $-\dfrac{n+1}{2(n-1)!}$.

Решение. Вычтем из 1-го столбца 2-й столбец, удвоенный 3-й, утроенный 4-й, ..., умноженный на n последний столбец. Получится верхнетреугольный определитель, у которого в левом верхнем углу стоит число

$$-(1+2+\cdots+n) = -\frac{n(n+1)}{2},$$

а остальные элементы главной диагонали $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$. После перемножения элементов главной диагонали получим ответ.

18. Как известно, определитель матрицы $A = (a_{i,j})$ размером $n \times n$ равен сумме взятых с определёнными знаками всех произведений вида $a_{1,i_1}a_{2,i_2}\ldots a_{n,i_n}$, где $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — перестановка чисел от 1 до n. При нечётном n в этой перестановке чётных чисел меньше, чем нечётных. Поэтому при каком-то нечётном k число i_k будет нечётным. Но тогда число $a_{k,i_k} = 0$. Значит, каждое произведение равно нулю. Поэтому и определитель равен нулю.

19. 0.

1-й способ. Сначала для $i = 2, 3, \ldots, 6$ из i-й строки вычтем 1-ю строку, умноженную на i. Затем для $j = 2, 3, \ldots, 6$ к 1-му столбцу определителя прибавим j-й столбец, умноженный на j:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4+x & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 6 & 9+x & 12 & 15 & 18 \\ 4 & 8 & 12 & 16+x & 20 & 24 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25+x & 30 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36+x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -2x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3x & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ -4x & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ -5x & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ -6x & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 91+x & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^6 + 91x^5.$$

2-й способ. Широко известен следующий факт. Пусть элементы определителя n-го порядка являются функциями от x. Тогда производная определителя равна сумме n определителей; в i-м определителе i-й столбец исходного определителя заменяется столбцом производных, а остальные столбцы не меняются. В данной задаче получается, что в изменяющемся столбце на i-м месте 1, а остальные элементы — нули. Когда же мы будем вычислять алгебраическое дополнение к единице, подставив $x = 0$, то увидим в нём пропорциональные столбцы. Значит, каждое из шести слагаемых равно нулю.

3-й способ. Пусть $g(x)$ — характеристический многочлен матрицы A. Тогда $f(x) = g(-x)$. Ранг матрицы A равен 1, поэтому 0 является кратным корнем характеристического многочлена. Отсюда $g'(0) = 0$ и $f'(0) = 0$.

20. $|A| = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} k!\right)^2$.

Решение. Рассмотрим матрицу
$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ 2 & 2^2 & \dots & 2^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ n & n^2 & \dots & n^n \end{pmatrix}.$$
Очевидно, что $A=B'\cdot B$. Переходя к определителям, получим
$$|A|=|B'\cdot B|=|B|\cdot|B'|=|B|^2.$$
При вычислении определителя матрицы B вынесем из k-й строки множитель k, после чего получится определитель Вандермонда:
$$|B|=n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 2 & \dots & 2^{n-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & n & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}=n!\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)=1!\cdot 2!\cdot\dots\cdot(n-1)!\cdot n!.$$
Значит, $|A|=\left(\prod\limits_{k=1}^{n}k!\right)^2$.

21. 1.

Решение. Пусть искомый определитель равен x_n. Воспользуемся формулой $C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k}=C_n^k$. Вычтем из i-й строки предыдущую (для $i=n,n-1,\dots,2$), а затем из j-го столбца предыдущий (для $j=n,n-1,\dots,2$). В полученном определителе в верхней строке за 1 следуют нули, а минор единицы равен x_{n-1}. Отсюда $x_n=x_{n-1}=\dots=x_1=1$.

22. 0, ±1.

Решение. Переставляя строки, мы можем добиться того, чтобы позиции первых (слева) единиц не убывали сверху вниз. При этом определитель либо не изменится, либо поменяет знак. Если у двух строк позиции первых единиц совпадают, то вычтем ту, в которой меньше единиц, из той, в которой больше (если у этих строк поровну единиц, то определитель равен нулю). Определитель при этом не меняется. Такими операциями мы можем добиться того, что позиции первых единиц строго возрастают сверху вниз. При этом либо матрица окажется вырожденной, либо верхнетреугольной с единицами на диагонали.

23. 1.

Решение. Первая строка матрицы $(a_{i,j})$ состоит из единиц. Вычтем её из всех последующих. Тогда в клетках останется количество общих делителей i и j, не считая 1. В частности, в строке с номером 2 будут стоять единицы в столбцах с чётными номерами и нули в остальных столбцах. Вычтем эту строку из всех строк, номера которых делятся на 2. Тогда в строках, начиная с третьей, будут стоять количества всех общих делителей кроме 1 и 2. Продолжая этот процесс, получим матрицу, у которой каждый элемент равен числу общих делителей i и j, не меньших i. Ясно, что ниже диагонали в такой матрице стоят нули, а на диагонали единицы.

24. $\varphi(1)\cdot\varphi(2)\cdot\dots\cdot\varphi(n)$.

Решение. Обозначим определитель через D_n.

Приведём определитель к ступенчатому виду. В первой строке и первом столбце стоят единицы. Вычтя первую строку из всех остальных, все элементы в них уменьшим на 1. Индукцией по k докажем, что после приведения к ступенчатому виду k-й элемент на диагонали будет равен $\varphi(k)$.

Во второй строке изначально на нечётных местах были 1, на четных 2. Та же ситуация во втором столбце. После первого шага приведения к ступенчатому виду на этих местах получили соответственно 0 и 1. Поэтому далее вторую строку будем вычитать из всех остальных строк с чётными номерами. В итоге из всех чисел в строках ниже второй с чётными индексами вычтем $1=\varphi(2)$.

Делаем индуктивное предположение, что на диагонали до k-го места после приведения к ступенчатому виду стоят числа $\varphi(1), \dots, \varphi(k-1)$, и что для каждого числа d, меньшего k, в определителе из всех чисел, которые изначально делились на d и были расположены ниже строки с номером d, вычли $\varphi(d)$. На k-м месте диагонали изначально стояло число k. Из теории чисел известна формула $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$. По индуктивному предположению, из n уже вычли $\varphi(d)$ для всех делителей d, меньших k. Значит, на месте k осталось число $\varphi(k)$. Это же относится ко всем числам k-й строки и k-го столбца: на местах, кратных k, осталось $\varphi(k)$, на остальных местах 0. Поэтому когда мы продолжим приведение определителя к ступенчатому виду, из всех чисел, которые изначально делились на k, мы вычтем $\varphi(k)$. Индуктивный переход завершён, и утверждение задачи доказано.

25. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

Решение. Определитель D равен сумме всевозможных произведений элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причём некоторые произведения входят в сумму со знаком «+», остальные со знаком «−». Соответственно сгруппировав их, можно записать $D = S^+ - S^-$. Каждая из этих сумм имеет вид $S = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$. Каждый элемент определителя входит в каждую сумму ровно по одному разу — в одно из трех произведений. Оценим сверху и снизу эти суммы. Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим, имеем

$$S = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \geqslant 3\sqrt[3]{\Pi_1\Pi_2\Pi_3} = 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3abc.$$

Получили нижнюю оценку для S. Теперь докажем верхнюю оценку

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3.$$

Для доказательства этого неравенства представим его в виде

$$\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{3} + \frac{c^3}{3} + \frac{c^3}{3} + \frac{c^3}{3} \geqslant \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3.$$

Каждому произведению вида $\Pi = x_1x_2x_3$ из правой части поставим в соответствие сумму из левой части. Здесь $x_1, x_2, x_3 \in \{a, b, c\}$, значения x_1, x_2, x_3 могут совпадать. Нетрудно заметить, что левая часть распалась на три суммы, соответствующих слагаемым в правой части. Имеем

$$\frac{x_1^3}{3} + \frac{x_2^3}{3} + \frac{x_3^3}{3} \geqslant \sqrt[3]{x_1^3x_2^3x_3^3} = x_1x_2x_3 = \Pi.$$

Это доказывает неравенство.

Максимальное значение S^+ и минимальное значение S^- достигаются одновременно у определителя

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Это и есть наибольшее значение D.

26. Если прибавить первую строку определителя к остальным, то все элементы в этих строках станут чётными. Значит, значение определителя кратно 8. Определитель разлагается в сумму 24 произведений элементов, равных ±1. Поэтому значение определителя не превышает 24. Быть равным 24 определитель не может, так как тогда все произведения должны быть положительными. Но при этом все миноры второго порядка должны быть ненулевыми, что невозможно (убедитесь в этом!). Вот пример определителя, равного 16:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Замечание. Геометрический смысл модуля определителя n-го порядка — объём n-мерного параллелепипеда, построенного на векторах-строках как на рёбрах, выходящих из одной вершины. В данном случае $n = 4$, а длина каждого вектора равна 2. Поэтому объём не больше $2^4 = 16$. Чтобы построить пример, нужно подобрать четыре попарно ортогональных вектора.

27. а) $\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

Решение. Решим задачу для матрицы n-го порядка. Итак, пусть A — невырожденная вещественная матрица n-го порядка. Рассмотрим матрицу $B = AA'$. Вот, чем она замечательна для решения данной задачи:

- все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы B положительны;
- $\operatorname{tr} B = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$;
- $\det B = (\det A)^2$.

Учитывая соотношения $\det B = \prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$, $\operatorname{tr} B = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$ и неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим n положительных чисел, получаем, что

$$\det B \leqslant \left(\frac{\operatorname{tr} B}{n}\right)^n.$$

По условию, $\operatorname{tr} B \leqslant 1$. Поэтому $\det B \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^n$, а $\det A \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$. Равенство в последнем соотношении достигается, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. В качестве матрицы A проще всего взять $A = \operatorname{diag}(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}})$.

Таким образом, максимальное значение определителя равно $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

28. а) Обязательно; б) не обязательно.

Решение. а) Равенство следов матриц AB и BA следует из формулы

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ji}.$$

б) Если хотя бы одна из двух матриц невырожденная, то матрицы AB и BA подобны, и их ранги совпадают. Поэтому контрпример нужно искать среди вырожденных матриц. Простейший контрпример:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $AB = O$, $BA = A$, $\operatorname{rk}(AB) = 0$, $\operatorname{rk}(BA) = 1$.

29. 3.

Решение. Пусть

$$b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1^2 \\ 2^2 \\ \vdots \\ n^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда j-й столбец матрицы A равен $b_2-2jb_1+j^2b_0$. Следовательно, столбцы матрицы A принадлежат подпространству, натянутому на линейно независимые векторы b_0, b_1, b_2. Поэтому $\operatorname{rk} A \leqslant 3$. С другой стороны, в матрице A есть ненулевой минор третьего порядка $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Значит, $\operatorname{rk} A = 3$.

30. Пусть $\hat{A}$ — матрица, составленная их алгебраических дополнений элементов матрицы A. Как хорошо известно, $A\hat{A}' = \det(A) \cdot I$. В нашем случае $A\hat{A}' = O$. Если A — матрица порядка n, а $\operatorname{rk} A \leqslant n-2$, то алгебраические дополнения всех элементов равны нулю, и $\operatorname{rk} \hat{A} = 0$. Пусть теперь $\operatorname{rk} A = n-1$. Найдётся ненулевой минор порядка $n-1$, поэтому $\hat{A} \neq O$. Кроме того, $\dim(\operatorname{Ker} A) = 1$, а каждый столбец матрицы $\hat{A}'$ входит в $\operatorname{Ker} A$. Значит, в этом случае $\operatorname{rk} \hat{A} = \operatorname{rk} \hat{A}' = 1$.

31. Если $\operatorname{rk} A < 2$, то $\operatorname{rk} \Delta = 0$; если $\operatorname{rk} A = 2$, то $\operatorname{rk} \Delta = 2$.

32. $m+n-r$.

Решение. Пусть размер искомой матрицы будет $k\times k$. Сначала добавим к матрице новые столбцы (в количестве $k-n$ штук). Полученные таким образом m строк должны быть линейно независимыми, т. е. ранг промежуточной матрицы должен быть равен m. Но исходная матрица имела r линейно независимых столбцов, значит, добавить нужно как минимум $m-r$ столбцов, из которых ровно $m-r$ не выражаются линейно через r исходных. Это возможно тогда и только тогда, когда имеется необходимое количество добавляемых столбцов, то есть если $k-n \geqslant m-r$. Далее к матрице добавляем строки, чтобы сделать её квадратной. Это возможно сделать, соблюдя требование невырожденности: если исходные m строк линейно независимы, всегда можно найти ещё $k-m$ не зависящих от них строк длиной k. Итак, требуется лишь, чтобы $k \geqslant m+n-r$, откуда и получаем минимальный размер искомой матрицы.

33. 5.

Решение. Пусть ранг подматрицы 12×13 равен r. Из предыдущей задачи следует, что $20 \geqslant 12+13-r$, откуда $r \geqslant 5$. Минимальный ранг 5 достигается, если у единичной матрицы 20×20 рассмотреть левый нижний угол.

34. а) Нет; б) да.

Решение. а) Определитель ортогональной матрицы равен 1 или -1, а определитель кососимметрической матрицы нечётного порядка равен нулю.

б) Приведём пример такой матрицы. Пусть

$$a_{1,10} = a_{2,9} = a_{3,8} = a_{4,7} = a_{5,6} = 1, \quad a_{10,1} = a_{9,2} = a_{8,3} = a_{7,4} = a_{6,5} = -1,$$

а остальные элементы матрицы $A = (a_{i,j})$ равны нулю.

35. Преобразуем правую часть доказываемого равенства, воспользовавшись двумя фактами: 1) при транспонировании матрицы её определитель не меняется; 2) определитель произведения матриц равен произведению их определителей.

$$|A+B| \cdot |A-B| = |A'+B'| \cdot |A-B| = |(A'+B')(A-B)| =$$

$$= |A'A + B'A - A'B - B'B| = |B'A - A'B|.$$

В приведённой выкладке мы учли ортогональность матриц: $A'A = B'B = I$.

36. Без ограничения общности можно считать, что $|A| = 1$, $|B| = -1$. Тогда

$$A+B = A(I + A^{-1}B) = A(B'B + A'B) = A(B'+A')B = A(A+B)'B.$$

От равенства матриц переходим к равенству их определителей:

$$|A+B| = |A(A+B)'B| = |A| \cdot |A+B| \cdot |B| = -|A+B|.$$

Отсюда и вытекает, что $|A+B|=0$.

37. Приводя числа в каждой строке определителя к общему знаменателю и вынося этот знаменатель за знак определителя, получаем

$$|B| = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & \dfrac{1}{a_{12}} & \dfrac{1}{a_{13}} \\ \dfrac{1}{a_{21}} & \dfrac{1}{a_{22}} & \dfrac{1}{a_{23}} \\ \dfrac{1}{a_{31}} & \dfrac{1}{a_{32}} & \dfrac{1}{a_{33}} \end{vmatrix} = \frac{1}{K} \cdot \begin{vmatrix} a_{12}a_{13} & a_{11}a_{13} & a_{11}a_{12} \\ a_{22}a_{23} & a_{21}a_{23} & a_{21}a_{22} \\ a_{32}a_{33} & a_{31}a_{33} & a_{31}a_{32} \end{vmatrix},$$

где K — произведение всех элементов матрицы A.

Заметим, что сумма элементов первого столбца полученного определителя равна скалярному произведению 2-го и 3-го столбцов матрицы A. Но матрица A, по условию, ортогональна. Поэтому любые два её столбца ортогональны — их скалярное произведение равно нулю. Такая же ситуация и для других столбцов. Получилось, что сумма строк определителя матрицы B есть нулевая строка. Отсюда $|B|=0$.

38. Рассмотрим две произвольные строки данной матрицы: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Из условия ортогональности матрицы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1; \quad \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1.$$

Подсчитаем сумму квадратов всех миноров второго порядка, расположенных в этих строках:

$$\sum_{i<j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{j \neq i} b_j^2 - 2 \sum_{i<j} a_i a_j b_i b_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 (1 - b_i^2) - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \cdot \sum_{j \neq i} a_j b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i (-a_i b_i) =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 = 1.$$

Для любых двух строк сумма квадратов миноров оказалась равной 1. Поэтому сумма квадратов всех миноров второго порядка данной матрицы равна $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ — числу способов выбрать из n строк две строки.

39. Задача тривиальна, если знать следующие два факта.

- Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — все собственные значения (с. з.) матрицы A (с учётом их алгебраической кратности), то $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ — все с. з. матрицы $f(A)$.

- Сумма $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ равна следу матрицы (сумме её диагональных элементов).

Очевидно, что при возведении матрицы A в степень k вновь получим матрицу из неотрицательных чисел, след которой также неотрицателен. Последнее и требовалось доказать.

40. (С.М. Воронин) Собственные значения вещественной матрицы являются корнями многочлена с действительными коэффициентами, поэтому число, комплексно сопряжённое собственному значению, также будет собственным значением. Значит, наряду с с. з. $\frac{1}{4}(-3+i\sqrt{5})$ есть с. з. $\frac{1}{4}(-3-i\sqrt{5})$, а характеристический многочлен матрицы должен делиться на квадратный трёхчлен

$$\left(x-\frac{1}{4}(-3+i\sqrt{5})\right)\left(x-\frac{1}{4}(-3-i\sqrt{5})\right)=x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{8}.$$

Предположим, что целочисленная матрица имеет с. з. $\frac{1}{4}(-3+i\sqrt{5})$. Тогда её характеристический многочлен представим в виде

$$x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n=\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{8}\right)\left(x^{n-2}+b_1x^{n-3}+\dots+b_{n-2}\right). \qquad (*)$$

Здесь коэффициенты $a_1,\dots,a_n$ — целые числа. Из $(*)$ следует, что $a_n=\frac{7}{8}b_{n-2}$, $b_{n-2}=\frac{8}{7}a_n$. Приравняв в том же тождестве коэффициенты при x, получим

$$a_{n-1}=\frac{7}{8}b_{n-3}+\frac{3}{2}b_{n-2},\quad b_{n-3}=\frac{8}{7}\left(a_{n-1}-\frac{3}{2}b_{n-2}\right)=\frac{8}{7}\left(a_{n-1}-\frac{12}{7}a_n\right).$$

Значит, b_{n-2} и b_{n-3} являются рациональными числами с чётным числителем и нечётным знаменателем. Аналогично устанавливается, что такого же вида будут и коэффициенты $b_{n-4},\dots b_1$. Однако приравнивание коэффициентов при x^{n-1} в левой и правой частей тождества $(*)$ даёт равенство $a_1=b_1+\frac{3}{2}$, откуда $b_1=a_1-\frac{3}{2}=\frac{2a_1-3}{2}$, что противоречит предыдущему утверждению.

41. [12] Заметим, что матрица смежности A — симметрическая ненулевая матрица с неотрицательными элементами и нулями на диагонали. Докажем, что у такой матрицы есть отрицательное собственное значение.

Известно, что все собственные значения симметрической матрицы вещественны. Допустим, что все собственные значения матрицы A неотрицательны. Тогда квадратичная форма Q с матрицей A в базисе $\{e_1,\dots,e_n\}$ неотрицательно определена. То есть $Q(v)\geqslant 0$ для любого вектора v. С другой стороны, если $a_{ij}\neq 0$, то $Q(e_i-e_j)=a_{ii}-2a_{ij}+a_{jj}<0$. Это противоречит неотрицательной определенности Q. Значит, исходное предположение неверно, и у матрицы A есть отрицательное собственное значение.

42. а) 0 кратности $n-1$ и $\operatorname{tr} A$ кратности 1; б) 0 кратности n.

Решение. Пусть A — матрица $n\times n$. Воспользуемся известным фактом:

$$\dim(\operatorname{Ker} A)+\dim(\operatorname{Im} A)=n.$$

Заметим, что $\dim(\operatorname{Im} A)=\operatorname{rk} A$, а $\dim(\operatorname{Ker} A)$ — это геометрическая кратность нулевого собственного значения матрицы A. Так как $\operatorname{rk} A=1$, нулевое с. з. имеет геометрическую кратность $n-1$. Алгебраическая кратность не меньше геометрической кратности. Сумма всех с. з. с учётом их кратности равна следу матрицы. Поэтому в случае а) нулевое с. з.имеет кратность $n-1$, а число $\operatorname{tr} A$ является с. з. кратности 1. В случае б) нулевое с. з. имеет кратность n.

43. 0 и $|v|^2$.

Решение. Несложно видеть, что $\operatorname{rk} vv'=1$, а $\operatorname{tr} vv'=\sum\limits_{i=1}^{n}v_i^2=|v|^2\neq 0$. Осталось воспользоваться результатом предыдущей задачи.

44. $(-1)^{n-1}(n-1)$.

Решение. Матрица E — одноранговая со следом, равным n. В силу задачи 42 она имеет нулевое с. з. кратности $n-1$ и с. з. n. Вычитание единичной матрицы сдвигает спектр на единицу. Определитель $\det(E-I)$ найдём, вычислив произведение с. з. с учётом их кратности.

45. $k^{n-1}(k+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2)$.

Решение. Рассмотрим вектор-столбец $v \in \mathbb{R}^n$ с координатами a_i. Матрицу B можно записать в виде $B = vv' + kI$. С помощью задачи 42 легко найти спектр матрицы B. Далее нужно перемножить найденные с. з. с учётом их кратности.

46. 1.

Решение. Обозначим $A = uu'J$. Если $A = O$, ответ очевиден. Пусть теперь A — ненулевая матрица. Её столбцы пропорциональны вектору u, поэтому $\operatorname{rk} A = 1$. Найдём $\operatorname{tr} A$, воспользовавшись кососимметричностью матрицы J и тем, что след произведения двух матриц не зависит от порядка множителей:

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A' = \operatorname{tr}(J'uu') = \operatorname{tr}(-Juu') = -\operatorname{tr}(Juu') = -\operatorname{tr}(uu'J) = -\operatorname{tr} A.$$

Получилось, что $\operatorname{tr} A = -\operatorname{tr} A$, откуда $\operatorname{tr} A = 0$. В силу задачи 42 все с. з. матрицы A равны нулю. Значит, все с. з. матрицы $I + \beta A$ равны единице. Отсюда ответ.

47. Пусть $f_n(\lambda) = |A - \lambda I|$ — характеристический многочлен матрицы A. Докажем, что $f_n(\lambda)$ является функцией от $b_1, b_2, \ldots, b_n, c_1a_2, c_2a_3, \ldots, c_{n-1}a_n$. Действительно, $f_1(\lambda) = b_1 - \lambda$, $f_2(\lambda) = (b_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - c_1a_2$. Разложив определитель $|A - \lambda I|$ по последнему столбцу, получим рекуррентное соотношение для последовательности $f_n(\lambda)$:

$$f_n(\lambda) = (b_n - \lambda)f_{n-1}(\lambda) - c_{n-1}a_nf_{n-2}(\lambda).$$

Из начальных условий и рекуррентного соотношения следует, что $f_n(\lambda)$ зависит не от элементов $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, a_2, a_3, \ldots, a_n$, взятых по отдельности, а от произведений $c_1a_2, c_2a_3, \ldots, c_{n-1}a_n$.

Если для $i = 1, 2, \ldots, n-1$ заменить оба элемента c_i и a_{i+1} на их среднее геометрическое, от этого характеристический многочлен матрицы не изменится (как и её собственные значения), но матрица станет симметрической. Как хорошо известно из линейной алгебры, все собственные значения симметрической вещественной матрицы являются вещественными. Значит, и спектр исходной матрицы — вещественный.

48. Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — собственные значения матрицы A. Как известно, определитель и след матрицы равны соответственно произведению и сумме её собственных значений. Значит,

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1; \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \tag{1}$$

Кроме того, матрица A^{-1} имеет собственные значения $\frac{1}{\lambda_1}$, $\frac{1}{\lambda_2}$, $\frac{1}{\lambda_3}$. Поэтому

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_3} = 0.$$

Умножив обе части последнего равенства на $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, получим

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 0. \tag{2}$$

Соотношения (1), (2) позволяют вычислить характеристический многочлен матрицы A:

$$|A - \lambda I| = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) =$$

$$= -\lambda^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\lambda + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\lambda^3 + 1.$$

Осталось применить теорему Гамильтона – Кэли: $-A^3 + I = 0$.

49. (С.М. Воронин) Рассмотрим матрицу $P = A_1A_2 \ldots A_n = A_1A_1'$. Она симметричная, неотрицательно определённая, диагонализируемая, все её собственные значения вещественные и неотрицательные. Вычислим её $(n-1)$-ю степень:

$$P^{n-1} = (A_1A_2 \ldots A_n)(A_1A_2 \ldots A_n) \ldots (A_1A_2 \ldots A_n) =$$

$$= (A_1A_2\dots A_{n-1})(A_nA_1\dots A_{n-2})\dots(A_2A_3\dots A_n) = A'_nA'_{n-1}\dots A'_1 = P' = P.$$

Из матричного равенства $P^{n-1} = P$ вытекает, что для любого собственного значения λ матрицы P выполняется равенство $\lambda^{n-1} = \lambda$. Учитывая неотрицательность λ, получаем, что $\lambda^2 = \lambda$. Отсюда следует, что $P^2 = P$. Действительно, матрица P представима в виде $P = T\Lambda T^{-1}$, где Λ — диагональная матрица, в которой на главной диагонали стоят все с. з. матрицы P. Тогда $P^2 = T\Lambda^2T^{-1} = T\Lambda T^{-1} = P$.

50. Если матрица A невырожденная, то матрицы $I - AB$ и $I - BA$ подобны. Действительно,

$$A^{-1}(I - AB)A = (A^{-1} - B)A = I - BA.$$

Определители подобных матриц равны друг другу.

Пусть теперь A — вырожденная матрица. Рассмотрим матрицу $A_\varepsilon = A+\varepsilon I$. Её спектр получается из спектра A сдвигом на ε. Найдётся проколотая окрестность нуля U, такая что при $\varepsilon \in U$ матрица A_ε невырожденная. Для таких ε выполнено равенство

$$\det(I - A_\varepsilon B) = \det(I - BA_\varepsilon).$$

Переход к пределу при $\varepsilon \to 0$ даёт требуемое соотношение.

51. Таких матриц нет. Переписав уравнение в виде $X^2 = -I$, перейдите от равенства матриц к равенству их определителей.

52. Невозможно.

Решение. Умножим обе части равенства слева на A^{-1}:

$$B - A^{-1}BA = I. \qquad (*)$$

Как известно, у подобных матриц следы одинаковые. След разности матриц равен разности их следов. Значит, след левой части в равенстве $(*)$ равен нулю, чего очевидно, не скажешь о единичной матрице, стоящей в правой части $(*)$.

53. Нет.

Решение. Пусть $x = \det(A)$. От равенства матриц $A^3 = -2A'$ перейдём к равенству их определителей: $x^3 = -8x$ (мы учли, что матрица 3-го порядка). При $x \neq 0$ приходим к противоречию.

54. Нет.

Решение. Пусть $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Прибавив к обеим частям матричного равенства матрицу E^2, получим $(X + E)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Определитель матрицы справа равен -2, в то время как определитель матрицы слева неотрицателен (поскольку определитель квадрата матрицы равен квадрату определителя этой матрицы). Поэтому равенство невозможно.

55. Из равенства $X = -A^{-1}XA$ получаем $\operatorname{tr}(X) = -\operatorname{tr}(X)$, откуда $\operatorname{tr}(X) = 0$. Мы воспользовались тем, что у подобных матриц одинаковый след.

56. Пусть $A = (a_{ij})$. В качестве B и C можно взять матрицы $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, где $b_{ij} = c_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{i-j}$ при $i \neq j$; $b_{ii} = i$; $c_{ii} = 0$.

57. При $n = k^2$, $k \in \mathbb{N}$.

Решение. Пусть A — двоичная матрица, для которой $A^2 = E$. Заметим, что $EA = A^3 = AE$. Пусть в i-й строке матрицы A находится a_i единиц, а в j-м столбце b_j единиц. Тогда

$$AE = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad EA = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

Из равенства двух выписанных матриц следует, что $a_1 = b_j$ для любого j и $b_1 = a_i$ для любого i. Это означает, что для некоторого натурального k при любых i и j выполняется равенство $a_i = b_j = k$: в каждой строке и каждом столбце матрицы A по k единиц. Тогда k — собственное значение матрицы A (с собственным вектором из одних единиц). С другой стороны, у матрицы $A^2 = E$ собственные значения 0 и n. Поэтому $n = k^2$.

Нужно ещё показать, что при указанных n соответствующие матрицы существуют. Случай $k = 1$ тривиален. При $k = 2$ подойдёт матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $k = 3$ сначала построим матрицу B размером 3×9, состоящую из трёх блоков 3×3, первый из которых — единичная матрица, а последующие получаются циклическими перестановками в строках:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Проверьте, что матрица $A = \begin{pmatrix} B \\ B \\ B \end{pmatrix}$ удовлетворяет условию $A^2 = E$. Аналогично строится пример для любого k.

58. $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Решение. (Е.Г. Кукина) Квадратичная форма Q задаётся с помощью симметричной матрицы $A = (a_{ij})$:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Всего (с учётом симметричности) имеем $N = \dfrac{n(n+1)}{2}$ коэффициентов. Ответ на каждый вопрос даёт линейное уравнение относительно этих коэффициентов. Если будет задано менее N вопросов, то уравнений меньше, чем неизвестных. Некоторые неизвестные будут независимыми (остальные — зависимые, они выражаются через независимые). Если среди независимых неизвестных встретится элемент главной диагонали матрицы A, например, a_{ii}, то квадратичная форма не может быть гарантированно положительно определённой, поскольку $Q(e_i) = a_{ii} < 0$ при $a_{ii} < 0$. Пусть в результате полученных ответов выяснено, что $a_{ii} > 0$ для любого i, но какая-то переменная a_{ij} независимая. Тогда для достаточно большого значения a_{ij} многочлен $Q(e_i + te_j) = a_{jj}t^2 + 2a_{ij}t + a_i i$ будет иметь положительный дискриминант, в силу чего при некоторых t будет принимать отрицательные значения.

Значит, при числе вопросов менее N нельзя достоверно установить положительную определённость Q. С другой стороны, узнав (за N вопросов) последовательно значения $Q(e_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $Q(e_i + e_j)$, где $i < j$, мы найдём все коэффициенты квадратичной формы, что позволит выяснить (с помощью любого известного критерия), является ли эта форма положительно определённой.

59. $(1, 1)$.

Решение. Если $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_0$, то $Q(f) = f(1) \cdot f(2)$ — квадратичная форма от коэффициентов данного многочлена. Обозначим

$$A = \frac{f(1) + f(2)}{2}; \quad B = \frac{f(2) - f(1)}{2}.$$

Тогда $Q(f) = A^2 - B^2$. Здесь A и B — линейные функции от коэффициентов многочлена. Поэтому сигнатура квадратичной формы $(1, 1)$.

60. $\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}}$. Задачу можно сформулировать так: при каком наибольшем p квадратичная форма

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \dots + x_n^2 - p(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n)$$

является неотрицательно определённой? Подробное решение см. в [11, с. 32–33].

61. У второго.

Решение. Суть стратегии второго игрока состоит в построении минора второго порядка из нулей. В ответ на первый ход первого игрока он ставит 0 в любом месте, но в другой строке и другом столбце. Этот нуль входит в три минора второго порядка. Своим вторым ходом первый игрок может заблокировать не более двух из них. Тогда второй игрок достраивает третий минор, пользуясь тем, что есть еще строка и столбец, свободные от чисел, поставленных первым игроком. При этом в одном из этих рядов уже стоит 0. Поставив в такой ряд второй нуль, второй игрок угрожает построить ряд из нулей и вынуждает первого дополнить этот ряд своим числом, не трогая строящийся минор. Но при этом нуль уже появится во втором свободном ряду, и второй игрок продолжает построение с его помощью. В итоге нужный минор будет построен, либо появится ряд из нулей. В любом случае определитель матрицы будет равен 0.

62. Аня.

Решение. Аня сможет добиться того, чтобы сумма первых двух строк была $(25, 25, 25, 25, 25)$. Для этого своим первым ходом она поставит число 25 в любую клетку ниже второй строки. Затем если Ваня заполняет некоторую клетку первой (или второй) строки числом k, Аня в соседнюю клетку второй (соответственно, первой) строки ставит число $25 - k$. Если же Ваня ходит числом k в клетку ниже второй строки, то Аня отвечает ходом $25 - k$ также в какую-то клетку ниже второй строки. Ясно, что Ваня не сможет помешать Ане следовать указанной стратегии. Из свойств определителя следует, что определитель полученной матрицы будет делиться на 25.

63. Не сможет.

Решение. Пусть A — (заполненная Петей и Васей) матрица $2n \times 2n$. Вася хочет, чтобы выполнялось равенство $|A - 2019I| = 0$. Для этого он, например, может добиться совпадения двух первых строк определителя $|A - 2019I|$.

64. У второго.

Решение. На каждый ход первого игрока второй в том же столбце ставит число, дополняющее число первого до 7. Тогда сумма строк определителя будет состоять из одинаковых элементов $x+7$, и число -7 будет корнем полученного многочлена.

65. Нельзя. Выясните, каким может быть определитель матрицы.

66. а) Да; б) нет. Решение см. в сборнике [1, с. 85–86].

67. Пусть данные числа $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$. Условие задачи таково: для каждого i выполнено равенство вида

$$\sum_{j=1}^{2n} a_{ij}x_j = 0,$$

где $a_{ii} = 0$, а при $j \neq i$ коэффициент a_{ij} равен 1 или -1. Таким образом, мы имеем однородную систему линейных уравнений с матрицей $A = (a_{ij})$, у которой на главной диагонали нули, а каждый из остальных элементов 1 или -1. Требуется доказать, что система имеет только нулевое решение. Для этого нужно убедиться в невырожденности матрицы A.

Если поменять знак какого-либо ненулевого элемента матрицы A, то в разложении определителя поменяются знаки произведений, содержащих этот элемент, но сохранится чётность значения определителя. Поэтому рассмотрим матрицу B размером $2n \times 2n$, у которой на диагонали нули, а остальные элементы единицы. В силу задачи 44 имеем $|B| = 1 - 2n$. Значение определителя матрицы B — нечётное число. Значит, и определитель матрицы A — нечётное число. Поэтому матрица A невырожденная.

68. В каждой строке и каждом столбце ровно один положительный элемент, остальные элементы — нули.

Решение. Рассмотрим i-ю строку матрицы A. Пусть в ней есть два положительных числа, расположенных в столбцах с номерами j и k. Тогда во всех столбцах матрицы A^{-1} , кроме i-го, на соответствующих местах (j-м и k-м) стоят нули. Значит, j-я и k-я строки этой матрицы пропорциональны, а её определитель равен нулю. Противоречие. Поэтому в каждой строке ровно один положительный элемент.

С другой стороны, единственные положительные элементы строк матрицы A должны быть в разных столбцах. Несложно видеть, что это условие не только необходимое, но и достаточное.

69. Все скалярные матрицы. Решение см. в [12, 2 июня 2013].

70. Два разных решения приведены в [10, с. 126–127].

71. а) Да; б) $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

Решение. а) Пусть в матрице B строки с чётными номерами нулевые, а $A = 2I$. Тогда $D = 2B$.

б) Зададим $n \times n$-матрицы $P_1 = \mathrm{diag}(1, 0, 1, 0, \dots)$ и $P_2 = \mathrm{diag}(0, 1, 0, 1, \dots)$. Матрицу D можно записать в виде $D = P_1AB + P_2B = (P_1A + P_2)B$. Пусть λ — с. з. оператора $\Phi : B \to D$. Тогда $D = (P_1A + P_2)B = \lambda B$, и каждый столбец матрицы B будет собственным вектором матрицы $F = P_1A + P_2$, отвечающим с. з. λ. Характеристический многочлен матрицы F имеет вид

$$|P_1A + P_2 - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{13} & a_{15} & \dots \\ a_{31} & a_{33}-\lambda & a_{35} & \dots \\ a_{51} & a_{53} & a_{55}-\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Теперь видно, что все собственные значения матрицы F (значит, и оператора Φ) — это нуль плюс с. з. матрицы, получающейся из A удалением строк и столбцов с чётными номерами. Указанная матрица имеет порядок $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

72. Ненулевые элементы стоят в попарно различных строках и в попарно различных столбцах матрицы (в силу её невырожденности). Поэтому данная матрица ортогональная, то есть $A' = A^{-1}$. Назовём матрицу из условия задачи «казанской». Кстати, всего казанских матриц порядка n ровно $n! \cdot 2^n$ штук. Легко видеть, что произведение двух казанских матриц будет казанской матрицей. Рассмотрим набор степеней исходной матрицы $I, A, A^2, \dots, A^k, \dots$. Среди них может быть лишь конечное число различных. Пусть, например, $A^k = A^l$, где $k > l$. Тогда $A^{k-l-1} = A^{-1} = A'$.

73. Докажите, что в каждом столбце матрицы A^{-1} не менее двух ненулевых элементов.

74. Пусть X — диагональная матрица, в которой на диагонали два ненулевых элемента: $x_{ii} = 1$, $x_{jj} = -1$. Тогда из равенства $\mathrm{tr}\, AX = a_{ii} - a_{jj} = 0$ (для любых i и j) получаем, что на диагонали матрицы A стоят одинаковые элементы, пусть α.

Если в матрице X всего два ненулевых элемента $x_{ij} = 1$, $x_{ji} = -1$, то из условия получим равенство $a_{ij} = a_{ji}$. Если же в этой матрице поменять 1 на 2, то придём к равенству $a_{ij} = 2a_{ji}$. Отсюда $a_{ij} = a_{ji} = 0$.

Таким образом, $A = \alpha I$.

75. (М.Г. Лепчинский) Для матрицы A выполняется равенство $A = A'K$, где K — матрица, в которой на побочной диагонали единицы, а остальные элементы нули. Пусть $Av = \lambda v$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $v' = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Обозначим через v^s вектор, который получается из v, если его координаты записать в обратном порядке. Имеем

$$\lambda(v, v) = (Av, v) = (A'Kv, v) = (Kv, Av) = \lambda(v^s, v).$$

Получилось, что $(v, v) = (v^s, v)$, или

$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = v_1 v_n + v_2 v_{n-1} + \cdots + v_n v_1.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\sum_{i<n+1-i} (v_i - v_{n+1-i})^2 = 0,$$

откуда $v = v^s$.

Источники задач

Вступительные экзамены в Школу анализа данных Яндекса [12]: 7, 8, 21, 22, 27, 29, 34, 35, 40, 41, 43, 45, 46, 50, 51, 57–59, 63, 68, 70, 71, 73–75.

Олимпиады, проводящиеся в Южно-Уральском университете [10, 11, 9]: 1–3, 9, 17–20, 26, 36–39, 47, 48, 52, 54, 60, 62, 63, 67, 70.

Всероссийский студенческий турнир математических боёв, организуемый Тульским педагогическим университетом им. Л.Н. Толстого [1, 2]: 4, 5, 10, 15, 24–26, 30, 31, 53, 56, 61, 64–67.

Открытая Поволжская олимпиада студентов, проводимая Казанским университетом [3, 4]: 11–13, 23, 32, 33, 52, 55, 72.

Всероссийская студенческая олимпиада (СВФУ, Якутск) [5]: 14, 49.

Олимпиада Северных стран (ИТМО, Санкт-Петербург) [13]: 6.

Литература

[1] Игнатов Ю.А. *Всероссийские студенческие турниры математических боёв. Тула, 2002 – 2015* В 2-х ч. Часть I / Ю.А. Игнатов, В.А. Шулюпов, И. Ю. Реброва и др. — Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2016. – 148 с.

[2] Игнатов Ю.А. *Задачи студенческих математических боёв* / Ю.А. Игнатов, В.А. Шулюпов, А.Ю. Эвнин. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2005. – 43 с.

[3] *Казанские студенческие олимпиады по математике:* сборник задач / сост.: И.С. Григорьева. — Казань: Казанский университет, 2011. – 48 с.

[4] *Казанские студенческие олимпиады по математике, посвященные дню рождения Н.И. Лобачевского:* сборник задач. Часть 2: учеб.-мет. пособие / И.С. Григорьева, Э.Ю. Лернер. — Казань: Казанский университет, 2015. – 36 с.

[5] *Математические олимпиады Лаврентьевских чтений 1997–2015 (СВФУ им. М.К. Аммосова)* / И.Г. Дмитриев, В.Г. Марков, С.В. Попов, Э.И. Шамаев. — Якутск: ИД СВФУ, 2016. – 77 с.

[6] Прасолов В.В. *Задачи и теоремы линейной алгебры* / В.В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2015. – 576 с.

[7] Эвнин А.Ю. *Метод масс в задачах* / А.Ю. Эвнин // Математическое образование. – 2015. – № 1(73). – С. 27–47.

[8] Эвнин А.Ю., Лернер Э.Ю., Игнатов Ю.А., Григорьева И.С. *Задачи по теории вероятностей на студенческих олимпиадах* // Математическое образование. – 2017. – № 4(84). – С. 45–62.

[9] Эвнин А.Ю. *Математические олимпиады в ЮУрГУ 2010–2015 гг.* / А.Ю. Эвнин — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016. – 63 с.

[10] Эвнин А.Ю. *Сто пятьдесят красивых задач для будущих математиков* / А.Ю. Эвнин. — М.: ЛЕНАНД, 2018. – 224 с.

[11] Эвнин А.Ю. *Ещё 150 красивых задач для будущих математиков* / А.Ю. Эвнин. — М.: ЛЕНАНД, 2018. – 216 с.

[12] *Решения вступительных испытаний в ШАД* // `https://efiminem.github.io/supershad/`

[13] *North Countries Universities Mathematical Competition* // `http://mathdep.ifmo.ru/ncumc/archive/`

Эвнин Александр Юрьевич,
доцент кафедры прикладной математики
и программирования Южно-Уральского
государственного университета,
кандидат педагогических наук.

E-mail: graph98@yandex.ru

Игнатов Юрий Александрович,
доцент кафедры алгебры,
математического анализа и геометрии
Тульского государственного педагогического
университета им. Л.Н. Толстого,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: ignatov-yurii@mail.ru

Воспитание творчеством. Памяти московского учителя Садчикова Виктора Андреевича

Т. И. Кузнецова

Статья написана по докладу «Памяти Садчикова Виктора Андреевича (20.06.1941-31.01.2019) – Заслуженного учителя Российской Федерации, художника и поэта», сделанному 14.02.2019 на заседании Всероссийского научно-методического семинара «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом».

Наша задача — сохранить память о достойных
соотечественниках, донести рассказы об их подвигах
беззаветного служения Родине до подрастающего поколения.

В.С. Секованов [7]

14 февраля 2019 г. на базе Московского государственного областного университета состоялось очередное заседание Всероссийского научно-методического семинара «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом» (научный руководитель — доктор педагогических наук, профессор МГУ имени М.В. Ломоносова Кузнецова Т.И.). Один из докладов был посвящен памяти старейшего участника семинара Садчикова Виктора Андреевича — Заслуженного учителя Российской Федерации, художника и поэта, скончавшегося 31 января 2019 г. на 78-м году жизни.

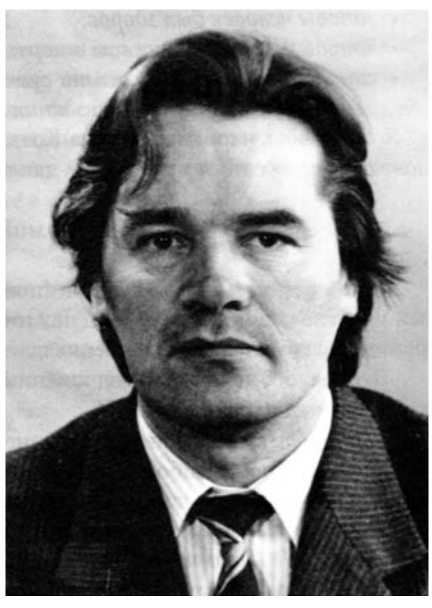


Фото 1. Садчиков Виктор Андреевич (20.06.1941–31.01.2019)

В.А. Садчиков — замечательный московский учитель математики, отдавший все свои силы и знания молодому поколению, посвятивший себя его интеллектуальному развитию, воспитанию активных творческих личностей. С 1970 г. для учащихся московских школ (№ 299, 317, 343, 650, 690, 835, 837) он регулярно проводил школьные **теоретические** математические конференции (27 конференций, см. табл. 1 и фото 2).

Таблица 1. Тематика школьных математических конференций

Год проведения	Порядковый номер	Место проведения	Класс
Тема «Начала стереометрии»			
1970	1-я конференция	Школа № 690	8 класс
Тема «Новые задачи на тела вращения»			
1971	2-я конференция	Школа № 690	9 класс
1976	7-я конференция	Школы № 317, № 299	9 класс
1982	11-я конференция	Школа № 835	9 класс
1987	14-я конференция	Школа № 343	8 класс
1990	17-я конференция	Школа № 343	9 класс
1994	21-я конференция	Школа № 650	10 класс
Тема «История развития теории многогранников. Тела Платона и тела Пуансо в новых задачах (каскады)»			
1972	3-я конференция	Школа № 690	10 класс
1977	8-я конференция	Школы № 317, № 299	10 класс
1984	12-я конференция	МОПИ им. Н.К. Крупской	41-я группа
1988	15-я конференция	Школы № 343, № 837	9 класс, 6 класс
1993	20-я конференция	Школа № 650	10 класс
1996	23-я конференция	Школа № 650	9 класс
Тема «Бином Ньютона»			
1973	4-я конференция	Школа № 317	6 класс
1986	13-я конференция	Школа № 343	6 класс
Тема «Три знаменитые задачи древности»			
1974	5-я конференция	Школы № 317, № 299	7 класс
Тема «Номограммы»			
1974	Турнир математиков	Школы № 317, № 299	7 класс
1975	6-я конференция	Школы № 317, № 299	8 класс
Тема «О самом важном в математике»			
1978	9-я конференция	Школа № 690	6 класс
1989	Турнир математиков	Школа № 343	4 класс
Тема «Отображения плоскости на себя (в пяти моделях)»			
1979	10-я конференция	Школа № 690	7 класс
1992	19-я конференция	Школа № 343	8 класс
1998	25-я конференция	Школа № 650	7 класс
Тема «Диалектика геометрии в ее содержании и ее построении»			
1989	16-я конференция	Школы № 343, № 837	10 класс, 7 класс
Тема «В мире чисел»			
1991	18-я конференция	Школа № 343	10 класс
Тема «Начала Евклида»			
1995	22-я конференция	Школа № 650	8 класс
Тема «Числа и фигуры»			
1997	24-я конференция	Школа № 650	6 класс
Тема «Координаты вершин, середин ребер и центров граней правильных многогранников»			
1999	26-я конференция	Школа № 650	8 класс
Тема «Фигуры вращения антипризм»			
2000	27-я конференция	Школа № 650	11 класс

Фото 2. На заключительном заседании одной из конференций

В табл. 1 приведены сведения об этих конференциях, а именно, перечень их тематик. Особо отметим, что это не олимпиады, которые, что ни говори, носят проверочный характер и не предполагают (в идеале) предварительную исследовательскую работу с учащимися, причем, сугубо творческую с большой долей их самостоятельности. По данным этой таблицы можно только догадываться, какая колоссальная работа с учащимися проводилась этим учителем. Становится очевидной справедливость получения им звания «Заслуженный учитель Российской Федерации».

Существенное влияние на педагогический опыт В.А. Садчикова, по его словам, оказал академик А.Н. Колмогоров. В своей работе [9, с. 154] он приводит слова академика, которые даже спустя 30 лет (а к настоящему моменту — более 40) созвучны творческому настрою и успешности в работе просвещенцев:

- Работа учителя трудна, но и увлекательна. Собственно говоря, каждый настоящий педагог должен быть увлечённым той наукой, которую он преподаёт детям.

- Но увлечение увлечением, а следует еще учитывать и то законное разнообразие интересов, которыми обладают Ваши ученики. В 15-17 лет молодые люди уже способны ставить перед собой ясные и большие цели. Вовсе не обязательно, скажем, углубленно изучать математику всем. У каждого может быть вполне разумный «личный план», в котором отдается предпочтение тому или другому предмету.

- И учитель, в свою очередь, вовсе не обязан тратить время на то, чтобы натаскивать своего ученика для одоления конкурсных экзаменов в вуз. Своему воспитаннику педагог должен дать четкое и яркое представление о роли преподаваемой им науки в жизни страны, в движении нашего общества к будущему.

- Пусть учитель сам углубленно интересуется своей основной наукой, занимается ею с увлечением. Лишь при этом условии в его классе появятся настоящие любители истории, литературы, математики, физики, биологии. Соприкосновение, скажем, с математикой, как творческой деятельностью, имеет большое значение для развития творчества вообще.

- Читайте журналы и специальную литературу, ведите самостоятельные методические исследования. Очень поучительно Вашим ученикам будет видеть, как рождается более удачное, я бы сказал, красивое изложение какого-либо вопроса школьного курса».

Из таблицы 1 видно, что В.А. Садчиков — приверженец педагогических идей академика А.Н. Колмогорова в углублённом преподавании математики в старших математических классах средней школы. Приведем основные из этих идей [9, с. 169]:

- в элементарной геометрии задачи на вращение правильных многогранников считаются самыми трудными потому, что они не поддаются алгебраическим методам решения и требуют хорошо развитого пространственного представления;

- как показала практика, если математика суть творческая деятельность, то задачи на вычисление объема и площади поверхности тел, полученных вращением правильных многогранников, доступны учащимся математических классов средней школы (см. табл. 1);

- решение этих задач позволяет увидеть межпредметные связи геометрии с алгеброй и началами математического анализа, т. е. задачи на вращение правильных многогранников поддаются алгебраическим методам решения с привлечением элементов анализа.

Большинство соответствующих разработок, отмеченных в табл. 1, отражено в книгах «Новые задачи в стереометрии: Фигуры вращения правильных многогранников» [2] и «Многогранники в творческой деятельности школьников» [3].

В.А. Садчиков — выпускник МОПИ им. Н.К. Крупской (в настоящее время МГОУ — Московский государственный областной университет), аспирант члена-корреспондента АПН СССР, профессора Ивана Козьмича Андронова, заведующего кафедрой высшей алгебры, элементарной математики и методики математики МОПИ им. Н.К. Крупской, основателя (1959 г.) и руководителя нашего семинара, а именно, Всероссийского научно-методического семинара «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом».

Ещё учась, а затем работая в МОПИ им. Н.К. Крупской, Виктор Андреевич разработал и создал кабинет математики (ауд. № 44) — в содружестве с братом Анатолием и Г.А. Шакаровым (В.А. Садчиков — теоретическое обоснование, А.А. Садчиков — художественное решение, Г.А. Шакаров — скульптор). Именно в этом кабинете долгое время проводились заседания нашего семинара. К сожалению, в настоящее время кабинет существует только в фотографиях — в статье Виктора Андреевича «История одного барельефа академика Колмогорова Андрея Николаевича» [9] и в его книге [3]. По 1–3 фото представлено в книге [8] (2 фото) и в статьях [6] (3 фото), [7] (1 фото). Сам факт существования кабинета зафиксирован в 1981 г. в журнале «Математика в школе» в одностраничной статье В.А. Садчикова «Кабинет математики в МОПИ им. Н.К. Крупской» [10].

Кабинет знаменит тем, что в нём семинар принимал академика А.Н. Колмогорова, который проявлял искреннюю заботу о математическом образовании нашей молодежи и о школьном образовании вообще. В тот день, 11 июня 1980 г., академик Колмогоров Андрей Николаевич заслушал доклад В.А. Садчикова о моделях школьного курса геометрии, реализованных им в кабинете математики МОПИ им. Н.К. Крупской, и анализировал их психолого-педагогические аспекты. (см. фото 3–5).

Вообще, А.Н. Колмогоров придавал большое значение моделям. По его мнению, «слово «модель» получило такое широкое распространение в популярной литературе, что нам не следует оберегать учащихся от его разумного употребления. Надо лишь подчеркивать, что, создавая схематизированные модели действительности, мы получаем вполне реальное знание о самой действительности. Лишь за пределами своей применимости модель теряет реальное значение и должна быть заменена новой, более совершенной» (см. [4, с. 270–275]).

Фото 3. В.А. Садчиков демонстрируетет академику А.Н. Колмогорову
структурную модель «Преобразования пространства»,
выполненную им самим (в технике маркетри)
на тыльной стене кабинета математики

Фото 4. Андрей Николаевич высказывает свои соображения

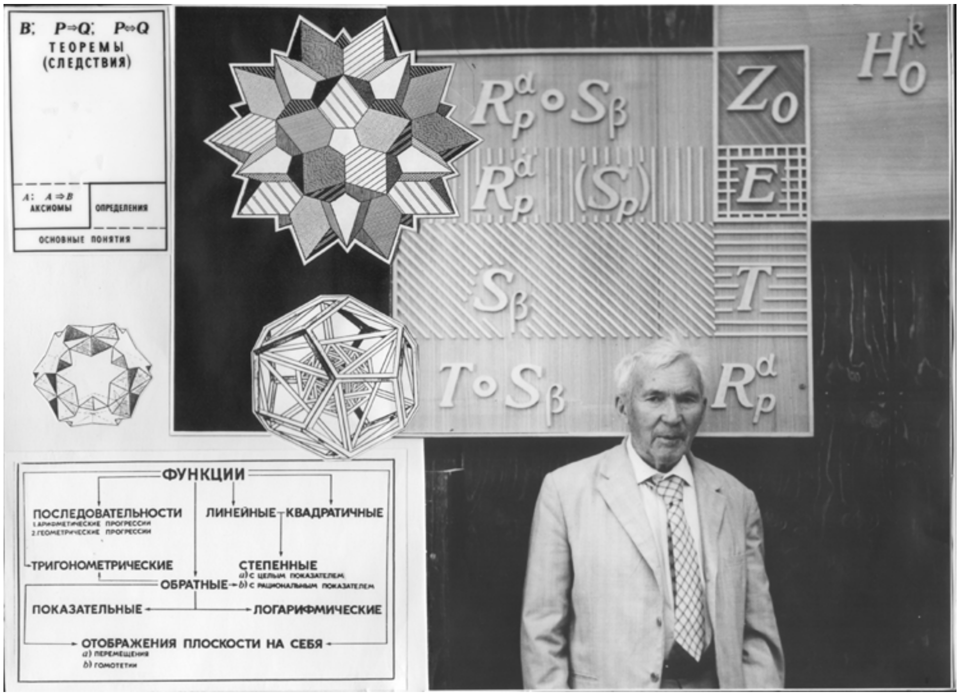


Фото 5. А.Н. Колмогоров на фоне тыльной стены кабинета математики.
Композиция В.А. Садчикова

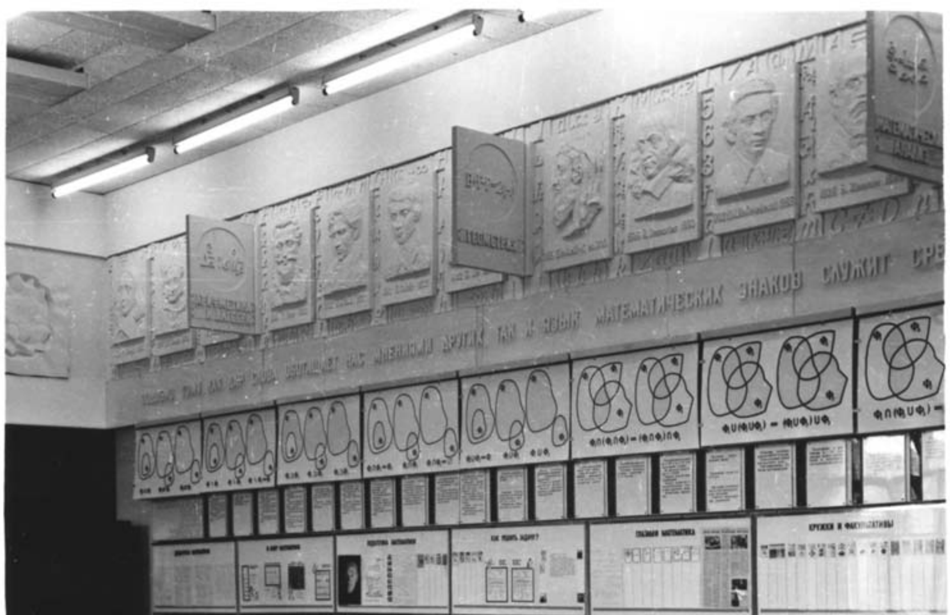


Фото 6.

На фото 6 запечатлен вид на боковую стену кабинета математики МОПИ им. Н.К. Крупской. Как видим, здесь закомпанован фриз ($1400 \times 11\,000$), который включает в себя:

- барельефы великих математиков;
- математическую символику, применяемую в средней школе (она служит фоном для портретов);

- *текст (под барельефами): «Подобно тому, как дар слова обогащает нас мнениями других, так и язык математических знаков служит средством еще более совершенным, более точным и ясным...*

Н.И. Лобачевский»

Портретный ряд этого фриза исполнен тематически:

1. Теория чисел
Ферма Пьер (17.08.1601-12.01.1665)
Гаусс Карл Фридрих (30.04.1777-23.02.1855)
Виноградов Иван Матвеевич (14.09.1891-20.03.1983)

2. Арифметика и алгебра
Виет Франсуа (1540-13.12.1603)
Абель Нильс Хенрик (05.08.1802-06.04.1829)
Галуа Эварист (26.10.1811-30.05.1832)
Ли Софус Мариус (17.12.1842-18.02.1899)

3. Геометрия
Евклид (ок. 356-ок. 300 до н.э.)
Декарт Рене (31.03.1596-11.02.1650)
Лобачевский Николай Иванович (01.12.1792-24.02.1856)
Риман Георг Фридрих Бернхард (17.09.1826-20.07.1866)

4. Математический анализ
Ньютон Исаак (04.01.1643-31.03.1727)
Эйлер Леонард (16.04.1707-18.09.1783)
Коши Огюстен Луи (21.08.1789-23.05.1857)
Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (31.10.1815-19.02.1897)

5. Теория вероятностей
Паскаль Блез (19.04.1623-19.08.1662)
Бернулли Якоб (27.12.1654-16.08.1705)
Чебышев Пафнутий Львович (16.05.1821-08.12.1894)

Противоположная боковая стена кабинета (простенки между окон) несет на себе фриз ($1400 \times 11\,000$), выполненный в аналогичной технике. Тематика этого фриза -

6. История перестройки математического образования в СССР

Здесь размещены барельефы А.Н. Колмогорова и И.К. Андронова. Эти барельефные портреты были изготовлены в соответствии с композицией фотопортретов.

Такое соседство портретов этих двух замечательных людей объясняется их особой ролью в обновлении отечественного математического образования в семидесятых годах прошлого столетия. Если говорить точнее, соответствующая Комиссия по определению содержания среднего образования была организована Академией наук СССР и Академией педагогических наук СССР в декабре 1964 г. Математическую секцию Комиссии возглавил академик АН СССР А.Н. Колмогоров, а новая программа по математике для I-III классов разрабатывалась подкомиссией, которой руководил член-корреспондент АПН СССР И.К. Андронов. Подробнее об этом можно прочитать в статье [9].

Итак, на фризах боковых стен кабинета математики МОПИ им. Н.К. Крупской воплощены 20 барельефов великих математиков, имена которых хорошо известны мировой науке. Фрагменты этих фризов представлены в фотографиях, размещенных в книге [3] и в статье [9].

Следует отметить, что авторский коллектив изготовил два барельефа академика А.Н. Колмогорова, и необходимо вспомнить, что второй барельеф В.А. Садчиков вместе с профессором Р.С. Черкасовым, заведующим кафедрой методики преподавания математики математического факультета

МГПИ им. В.И. Ленина (в настоящее время — МПГУ — Московский педагогический государственный университет), вручил Андрею Николаевичу в дни празднования его 80-летия.

Заметим, что на счету В.А. Садчикова создание не одного кабинета математики. Так, известно об оформлении им кабинета математики школы № 650, в которой он работал долгое время [9, с. 181, 184].

Возвращаясь к многочисленным школьным теоретическим математическим конференциям, с чувством особой теплоты и глубокой благодарности отметим, что В.А. Садчикову удавалось заранее организовать на книгах-премиях персоналии, написанные рукой академика А.Н. Колмогорова, что, безусловно, становилось предметом гордости победителей этих конференций. Так, Любовь Ивановна Згонник (в девичестве Дунькина) — выпускница московской школы № 317, призер шести школьных теоретических конференций (1973–1977, 1979), впоследствии заслуженный учитель Российской Федерации — в свое время получила от Андрея Николаевича следующую персоналию:

«Дорогой Дунькиной Любе с надеждой, что она станет отличным учителем.

14-XII-78 А. Колмогоров»

Высокому статусу педагогических идей академика А.Н. Колмогорова соответствует девиз творческой деятельности школьников-участников школьных теоретических конференций:

ОТДАЙ ДАЖЕ ВНУКАМ
ГОЛОД К НАУКАМ!

Весомым трудом В.А. Садчикова является книга «Во славу лет, не прожитых напрасно. О профессоре И.К. Андронове, талантливом педагоге, ученом, просветителе» [8] (см. фото 7).

Это бесценное наследие И.К. Андронова, которое освещено яркими биографическими сведениями, воспоминаниями коллег, учеников и почитателей, итогами творческой деятельности школьников и материалами архива семьи Андроновых. Большое внимание уделено нашему семинару, благодаря привлечению к участию в работе над книгой его бессменного секретаря В.Н. Шапкиной. В этой книге Виктор Андреевич выступил не только в роли автора-руководителя, но и в роли художника, нарисовав для неё портреты любимого учителя. На фото 8 — один из них.

В 2003–2004 гг. усилиями В.Н. Шапкиной, А.Г. Хармаца и В.А. Садчикова в издательстве МГОУ был издан труд И.К. Андронова «Трилогия предмета и метода математики» — в 3-х частях [7]. Это незабвенный курс, который И.К. Андронов читал более 40 лет в различных вузах страны. Однако издать при его жизни удалось только I часть — в 1974 г. Особенностью курса является то, что в нем значительное внимание уделяется рассмотрению методологических проблем математики.

Заметим, что Виктор Андреевич участвовал в подготовке I части дважды: в 1974 г. — как художник, и в 2004 г. — как художник и как автор стихотворения, посвященного любимому учителю (см. [1, Ч.I, 2004, с. I-II]):

Возродилось Андроново слово.
Луч его на тернистом пути.
И не в том ли Андронова доля —
Наши помыслы к свету вести?

Изысканья откликнутся в ком-то.
Око лет в корень зрит далеко.
А Андронов земные заботы,
Ей же ей, нёс светло и легко.

В заключение воспоминаний о творческом пути выдающегося учителя, вспомним автограф И.К. Андронова, написанный В.А. Садчикову на заре его карьеры — по случаю сдачи им экзамена кандидатского минимума [8, с. 33, 205]:

> Глубокоуважаемому и дорогому Виктору Андреевичу Садчикову — который опередил учителя в своём научно-методическом развитии. Как это приятно! Желаю дальше совершенствоваться! Желаю и предвижу большую дорогу в Вашем движении.
> 26. III. 1974 г. Ваш Иван Андронов

Но жизнь распорядилась иначе: буквально через полтора года Ивана Козьмича не стало и ...движение Виктора Андреевича изменило своё направление: с научно-методического в педагогическом институте на педагогическое направление в средних школах. Не случились ожидаемые когда-то диссертации, но есть множество раскрытых и взращённых им талантливых учеников, творческая работа с которыми отражена в его трудах (см., например, [1–3; 5; 8–11]), и его доклады на актуальные для отечественного образования темы на нашем семинаре, активным участником которого он являлся.

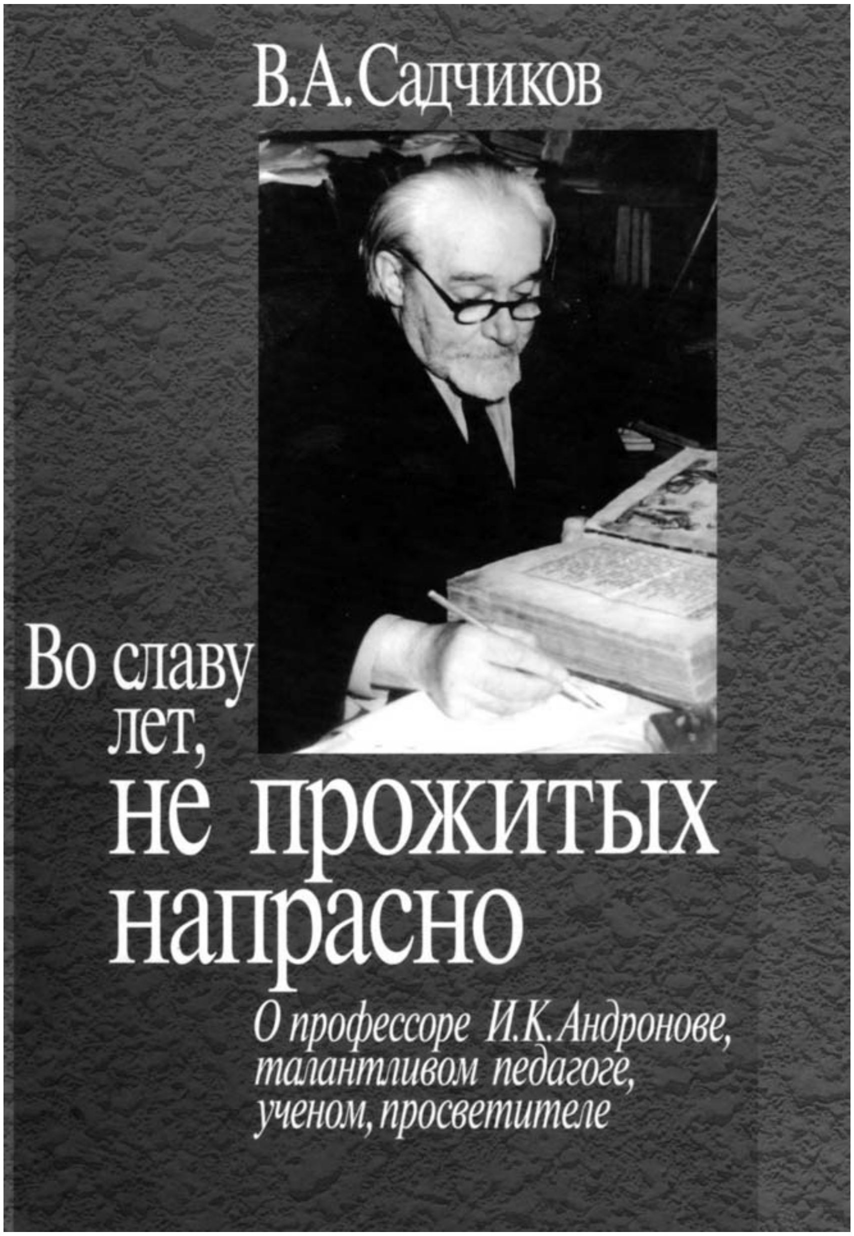


Фото 7.

Проведённое исследование творчества Виктора Андреевича Садчикова, этого удивительного талантливого человека и самозабвенно увлечённого школьной математикой учителя хочется закончить строками, завершающими начатое выше стихотворение, в которых Виктор Андреевич выражает надежды на лучшее будущее отечественного учительства:

Вечно душу морочит морока
Над землёй закружил новый век.
Ан, забыв о школярстве высоком,
Авантюрами сбит человек.

Пали круто к мучительной боли.
И глупей не случалось беды...
Не дадим разорвать наши корни.
А они глубоки и чисты.

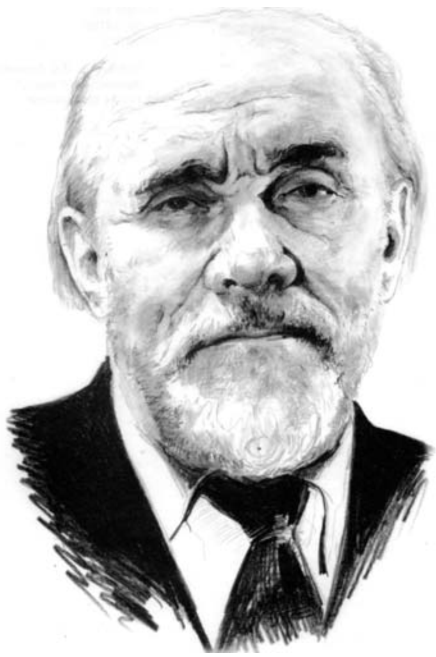


Фото 8. Иван Козьмич Андронов — душа отечественного учительства. Рисунок В.А. Садчикова

Фото 9. В.А. Садчиков у могилы учителя И.К. Андронова. 09.09.2004. Рядом: Кузнецова Татьяна Ивановна и Шапкина Валентина Николаевна

Литература

1. Андронов И.К. Трилогия предмета и метода математики (в 3-х частях): Учебное пособие / Под ред. И.И. Баврина. - Ч. I. М.: МОПИ им. Н.К. Крупской, 1974. 208 с.; 2-е изд. - М.: МГОУ, 2004; Ч. II. М.: МГОУ, 2003. 197 с.; Ч. III. М.: МГОУ, 2004. 146 с.

2. Баврин И.И., Садчиков В.А. Новые задачи в стереометрии: Фигуры вращения правильных многогранников. - М.: ВЛАДОС, 2000. - 204 с. (Библиотека учителя математики).

3. Жилякова Е.В., Садчиков В.А. Многогранники в творческой деятельности школьников. - М. «Когито-Центр», 2010. - 432 с. (Издание осуществлено при финансовой поддержке РГНФ.)

4. Колмогоров А.Н. Математика — наука и профессия / Сост. Г.А. Гальперин. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 288 с. (Библиотечка «Квант», вып. 64.)

5. Колмогоров А.Н., Садчиков В.А. Диалог о математике: Диалог акад. А.Н. Колмогорова и учителя 317-й школы г. Москвы В.А. Садчикова // Учительская газета. - 12.01.1974. - с. 3.

6. Кузнецова Т.И. Дело И.К. Андронова живо: Семинару «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом» — 55. Его основателю И.К. Андронову — 120 // Математическое образование. - 2015. - № 1 (73). - С. 60–76.

7. Кузнецова Т.И., Секованов В.С., Садчиков В.А. К 110-летию со дня рождения академика А.Н. Колмогорова // Народный учитель. - № 4(1849). - 12 апреля 2013 г. - М.: Изд-во МГОУ. - с. 3.

8. Садчиков В.А. Во славу лет, не прожитых напрасно. О профессоре И.К. Андронове, талантливом педагоге, ученом, просветителе. - М.: ПЕР СЭ, 2009. - 400 с. (Издание осуществлено при финансовой поддержке РГНФ.)

9. Садчиков В.А. История одного барельефа академика Колмогорова Андрея Николаевича // Вестник ЦМО МГУ. - 2006. - № 6. - С. 153–186.

10. Садчиков В.А. Кабинет математики в МОПИ им. Н.К. Крупской // Математика в школе, 1981. - № 5. - с. 39.

11. Садчиков В.А., Михайловская А.Ю. Учебные таблицы по «Геометрии–7». - М.: Просвещение, 1976.

Кузнецова Татьяна Ивановна, профессор
кафедры естественнонаучных и гуманитарных дисциплин
Института русского языка и культуры
МГУ имени М.В. Ломоносова,
доктор педагогических наук, доцент,
Руководитель Всероссийского научно-методического семинара
«Передовые идеи в преподавании
математики в России и за рубежом».

E-mail: kuzti45@gmail.com

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2019 год (включая стоимость пересылки) – 150 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2019 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 100 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >