ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцать третий

№ 2 (90)

апрель – июнь 2019 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№2 (90), 2019 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2019 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 19.07.2019 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 3,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (90), апрель – июнь 2019 г.

Содержание

Школьникам о законе больших чисел

О. П. Виноградов

В заметке приведено элементарное, доступное учащимся старших классов доказательство закона больших чисел Бернулли. Доказательство не опирается на понятия независимости, математического ожидания, дисперсии.

1. Введение

Материалы настоящей работы предназначены как для школьников, проявляющих интерес к математике, так и для руководителей математических кружков. В настоящее время в школе при изучении элементов теории вероятностей обычно ограничиваются только знакомством с законом больших чисел на интуитивном уровне. На наш взгляд, изучение теории вероятностей необходимо начинать знакомством со словами академика А.Н. Колмогорова [1]: «Познавательная ценность теории вероятностей обусловлена тем, что массовые случайные явления в своем совокупном действии создают строгие закономерности. Само понятие математической вероятности было бы бесплодно, если не находило бы своего осуществления в виде частоты появления какого-либо результата при многократном повторении однородных условий. Поэтому работы Паскаля и Ферма можно рассматривать лишь как предысторию теории вероятностей, а настоящая ее история начинается с закона больших чисел Я. Бернулли».

Следует обратить внимание, что в некоторых руководствах по теории вероятностей для школьников предлагаются задачи и примеры, в которых не выполнено это условие, и поэтому они не имеют отношения к математической теории вероятностей.

Так как теорема Бернулли является одной из важнейших теорем теории вероятностей, которая объясняет закон устойчивости частот, то, на наш взгляд, полезно ознакомить учащихся с законом больших чисел в самом начале курса. Смысл закона больших чисел прекрасно изложен в классическом учебнике Б.В. Гнеденко [2].

Отметим, что в книге [3], предназначенной для учащихся и преподавателей средних школ, доказана теорема Бернулли, но для его доказательства авторы предварительно знакомят читателей с понятием независимости событий.

В случае, когда вероятность наступления интересующего нас события является рациональным числом, в настоящей работе проводится доказательство закона больших чисел в форме Бернулли, которое не требует знакомства с такими достаточно сложными для школьников понятиями как независимость, математическое ожидание и дисперсия [4]. Предполагается известным читателю понятие равновозможности событий, формула классической вероятности, а также простейшие понятия комбинаторики и формула бинома Ньютона.

2. Теорема Бернулли для рациональных вероятностей

Возьмем $a+b$ неразличимых на ощупь шаров. Раскрасим a из этих в красный цвет, а b шаров — в синий. Положим их в ящик и тщательно перемешаем. Затем, не глядя в ящик, вытащим из него один шар. Запишем цвет вытащенного шара, положим его обратно в ящик и перемешаем эти шары.

После этого опять вытащим из него шар, запишем его цвет и положим его обратно в ящик. Так мы будем поступать n раз, где n — некоторое фиксированное число. Такую процедуру вытаскивания шаров называют *выбором шаров с возвращением.*

Рассмотрим подробнее случай $n = 1$, т. е. случай, когда из ящика шар вынимается только один раз. Рассмотрим два различных исхода этого опыта: вытащен шар либо красного цвета, либо синего. Произойдет только одно из этих двух событий. Эти события не являются равновозможными, если $a \neq b$. Для того чтобы ввести равновозможные события, пронумеруем эти шары. Красные шары пронумеруем числами $1, 2, \ldots, a$, а синие числами $a+1, a+2, \ldots, a+b$. Рассмотрим $a+b$ равновозможных событий. Первое из этих событий заключается в том, что вытащен шар с номером 1, второе — шар с номером 2 и т. д. Так как всего красных шаров равно a, а синих шаров равно b, то по формуле классической вероятности, вероятность вытащить красный шар равна $\dfrac{a}{a+b}$, а синий — $\dfrac{b}{a+b}$.

Рассмотрим теперь случай произвольного n. Любой конкретный выбор шаров можно представить себе в виде строчки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Эта запись означает, что при первом вытаскивании появился шар с номером i_1, при втором — с номером i_2 и т. д. В случае произвольного n общее число равновозможных событий равно$(a + b)^n$. Нас будет интересовать событие, которое заключается в том, что красный шар будет вытащен ровно k раз $(0 \leq k \leq n)$ и, значит, синий — $(n - k)$ раз.

Подсчитаем число благоприятных событий, т. е. таких различных равновозможных событий, в которых красный шар будет вытащен ровно k раз. Эта задача эквивалентна следующей задаче: сколько существует различных строчек длины n, в которых на k местах стоят числа из множества $1, 2, \ldots, a$, а на оставшихся $(n-k)$ местах стоят числа из множества $a+1, a+2, \ldots, a+b$ (две строчки считаются различными, если хотя бы на одном месте стоят разные числа)? Заметим, что на разных местах могут стоять одинаковые числа. Предлагается следующий алгоритм подсчета таких строчек. Сначала из n мест выберем k мест, на которых будут стоять числа из множества $1, 2, \ldots, a$. Такой выбор мест можно сделать C_n^k способами. Фиксируем эти k мест. На любое из них нужно поставить одно из чисел $1, 2, \ldots, a$. Это можно сделать a способами. Поэтому общее число способов заполнения всех этих мест числами из множества $1, 2, \ldots, a$ равно a^k, т.к. на каждый из a способов заполнения первого места имеется a способов заполнения второго места и т. д. Аналогичное рассуждение проводится при заполнении всех $(n - k)$ мест числами из множества $a + 1, a + 2, \ldots, a + b$. Отсюда следует, что общее число благоприятных событий равно $C_n^k a^k b^{n-k}$. По формуле классической вероятности получаем, что искомая вероятность равна

$$\frac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n}. \tag{1}$$

Положим

$$p = \frac{a}{a+b}, \quad q = \frac{b}{a+b}. \tag{2}$$

Заметим, что $p + q = 1$. Из (2) вытекает, что

$$\frac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{3}$$

Эта формула является частным случаем известной в теории вероятностей формулы Бернулли. Обозначим через μ_n число появлений красного шара при n — кратном вытаскивании шаров из ящика. Тогда формулу (3) можно записать в виде

$$\mathrm{P}(\mu_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{4}$$

Из формулы классической вероятности и равенства (4) вытекает, что

$$P(a \leq \mu_n \leq b) = \frac{\sum\limits_{k=a}^{b} C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} = \sum_{k=a}^{b} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Закон больших чисел для случая выбора шаров из ящика с возвращением можно сформулировать следующим образом:

Теорема. *Для любого* $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Прежде чем доказывать эту теорему, докажем несколько тождеств. Так как $p + q = 1$, то по формуле бинома Ньютона получаем

$$1 = (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{5}$$

Из этого равенства вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} = np\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i p^i q^{n-1-i} = np(p+q)^{n-1} = np. \tag{6}$$

Из равенств (5) и (6) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$

$$np\sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} kC_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np\sum_{i=0}^{n-1} (i+1) C_{n-1}^i p^i q^{n-i-1} =$$

$$np\,\Big(\sum_{i=0}^{n-1} iC_{n-1}^i p^i q^{n-i-1} + \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i p^i q^{n-i-1}\Big) = np(n-1)p + np = np(q+np)\,.$$

Тем самым мы доказали, что

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = np(q+np). \tag{7}$$

Для тех школьников, кто знаком с дифференцированием, эти равенства можно доказать способом, который обладает большой общностью и который можно использовать для нахождения явных выражений для различных сумм в других задачах. Действительно, согласно формуле бинома Ньютона, для любого x справедливо равенство

$$(q+px)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} x^k.$$

Дифференцируя по x обе части этого равенства, получим

$$np\,(q+px)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} x^{k-1}. \tag{8}$$

Полагая $x = 1$, получаем равенство (6). Умножим обе части равенства (8) на x и затем продифференцируем по x. Полагая в полученном равенстве $x = 1$, получим равенство (7).

Доказательство теоремы. Зададим некоторое малое число $\varepsilon > 0$. Очевидно, что неравенство $\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon$ эквивалентно неравенству $|\mu_n - np| \geq \varepsilon n$, которое в свою очередь эквивалентно неравенству $(\mu_n - np)^2 \geq \varepsilon^2 n^2$.

Поэтому

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)=\mathrm{P}(|\mu_n-pn|\geq\varepsilon n)=\sum_{k:\{|k-pn|\geq\varepsilon n\}}C_n^kp^kq^{n-k}=\sum_{k:\left\{(k-pn)^2\geq\varepsilon^2n^2\right\}}C_n^kp^kq^{n-k}.$$

Заметим, что неравенство $(k-np)^2\geq\varepsilon^2n^2$ эквивалентно неравенству

$$1\leq\frac{(k-pn)^2}{\varepsilon^2n^2}. \tag{9}$$

Очевидно, что $C_n^k=1\times C_n^k$. Так как мы суммируем по индексу k, для которого выполнено неравенство (9), то

$$\sum_{k:\left\{(k-pn)^2\geq\varepsilon^2n^2\right\}}C_n^kp^kq^{n-k}=\sum_{k:\left\{(k-pn)^2\geq\varepsilon^2n^2\right\}}1\times C_n^kp^kq^{n-k}\leq\frac{1}{\varepsilon^2n^2}\sum_{k:\left\{(k-pn)^2\geq\varepsilon^2n^2\right\}}(k-pn)^2\,C_n^kp^kq^{n-k}.$$

Мы увеличим правую часть этого неравенства, если распространим суммирование по всем возможным k $(0\leq k\leq n)$, поскольку все слагаемые неотрицательны.

Поэтому

$$\frac{1}{\varepsilon^2n^2}\sum_{k:\{(k-pn)^2\geq\varepsilon^2n^2\}}(k-pn)^2C_n^kp^kq^{n-k}\leq\frac{1}{\varepsilon^2n^2}\sum_{k=0}^{n}(k-pn)^2C_n^kp^kq^{n-k}=$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^kp^kq^{n-k}-\frac{2p}{\varepsilon^2n}\sum_{k=0}^{n}kC_n^kp^kq^{n-k}+\frac{p^2}{\varepsilon^2}\sum_{k=0}^{n}C_n^kp^kq^{n-k}=$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2n^2}np(q+np)-\frac{2p}{\varepsilon^2n}np+\frac{p^2}{\varepsilon^2}=\frac{1}{\varepsilon^2n^2}np(q+np)-\frac{p^2}{\varepsilon^2}=\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Тем самым мы доказали неравенство

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{pq}{n\varepsilon^2}. \tag{10}$$

Теорема следует из (10), так как правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n\to\infty$.

Замечание. Из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим вытекает неравенство $\sqrt{pq}\leq(p+q)/2$. Т.к. $p+q=1$, то отсюда следует, что $pq\leq\frac{1}{4}$. Из этого неравенства и неравенства (10) следует неравенство

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{1}{4n\varepsilon^2}\quad.$$

Замечание. Предложенное выше доказательство частного случая теоремы Бернулли повторяет рассуждения П.Л. Чебышева, которые он использовал при доказательстве знаменитого неравенства, носящего его имя, но позволяет избежать введения таких понятий как *независимость, математическое ожидание* и *дисперсия.*

Доказанный нами закон больших чисел является частным случаем теоремы Чебышева, которая была доказана им в 1867 году в работе «О средних величинах».

Теорема Чебышева дает обоснование правилу среднего арифметического, которое используется в теории измерений. Пусть измеряется некоторая постоянная величина, точное значение которой нам не известно. По случайным причинам в результате измерения этой величины вкрадываются ошибки. При некоторых естественных предположениях при большом числе измерений этой величины среднее арифметическое наблюденных значений близко к неизвестной нам измеряемой величине.

Закон больших чисел находит также неожиданное применение в задачах математического анализа. В качестве примера приведем формулировку знаменитой теоремы К. Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами. Доказательство этой теоремы, основанное на законе больших чисел, предложил известный российский математик С.Н. Бернштейн.

Теорема Вейерштрасса. *Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке[0;1]. Тогда при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [0;1]$ имеет место сходимость многочлена $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ к $f(x)$.*

Читатели, не знакомые с понятием *равномерной сходимости*, могут в формулировке теоремы заменить «равномерно по $x \in [0;1]$ » на «для каждого x», которое является более слабым утверждением этой теоремы.

Закон больших чисел используется также в приближенных вычислениях (метод Монте-Карло).

Литература

1. Колмогоров А.Н. Из предисловия к сочинению Я.Бернулли «О законе больших чисел». — М.: Наука, 1986.

2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — М.:УРСС, 2015.

3. Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В. Введение в теорию вероятностей. — М.: МЦНМО, 2015.

4. Виноградов О.П. Школьникам о теории вероятностей. Ч.1. Учебное пособие. — М.: Изд. СУНЦ МГУ, 2015.

Виноградов Олег Павлович
профессор механико-математического
факультета МГУ
доктор физ.-мат. наук.

E-mail: ovinogradov@mail.ru

Решение экстремальных задач без производной

В. И. Войтицкий, А. Ш. Мустафаева

В статье иллюстрируются основные подходы к решению задач на безусловный и условный экстремум, позволяющие не использовать понятия высшей математики, в частности, вычисление производной функции. К таким методам можно отнести использование монотонности, свойств линейной и квадратичной функции, использование числовых неравенств, замены переменной, координатно-векторный метод, метод введения вспомогательного параметра, использование параметрических уравнений. Каждый из предложенных приёмов решения иллюстрируется задачами с разобранными решениями (часть заданий авторские), некоторые из задач предлагается решить самостоятельно.

1. Введение

Среди олимпиадных и прикладных задач часто встречаются задачи на поиск экстремума, т.е. задачи на поиск максимального или минимального значения функции одной или нескольких переменных, когда её аргументы лежат в некоторой заданной области либо удовлетворяют дополнительным условиям связи. Обязательная школьная программа содержит два типа таких задач: поиск локальных экстремумов и поиск максимума и минимума дифференцируемой функции на отрезке. Среди олимпиадных задач и задач повышенной трудности встречаются иные типы заданий, решение которых как правило не требует знаний, выходящих за рамки школьной программы. В статье приведён ряд подобных заданий и обзор методов их элементарного решения. Отметим, что имеются классические универсальные алгоритмы решения экстремальных задач, относящиеся к специальному разделу высшей математики — теории оптимизации. Это методы линейного или нелинейного программирования, методы выпуклого анализа и метод множителей Лагранжа. Для ознакомления с данными методами рекомендуем замечательную книгу В. М. Тихомирова [1].

В школьной практике как правило сложную задачу удаётся свести к поиску максимума или минимума функции одной переменной на отрезке, которая успешно решается с помощью вычисления производной. Имеется однако ряд задач, которые можно решить по-другому. Такие задачи можно, найти, например, в брошюре И. П. Нотансона [2] и книге С. П. Актершева [3]. При этом методика решения может быть довольно разнообразной. На взгляд авторов, предложенный материал будет полезен при решении олимпиадных задач, задач ЕГЭ, проведении математических кружков и факультативов. Освоение различных подходов к решению раскрывает дополнительные возможности элементарной математики, демонстрирует, как различные её разделы могут быть объединены в рамках решения конкретной проблемы.

1.1. Свойства линейной функции. Использование монотонности.

Пожалуй, самой простой задачей является поиск экстремума линейной функции. Общеизвестно, что функция $y(x) = kx + b$ монотонно возрастает при $k > 0$ либо убывает при $k < 0$, отсюда следует, что минимальное и максимальное значение такой функции на отрезке принимается только на концах отрезка.

Аналогично, любая монотонно возрастающая или убывающая функция (а также их сумма) достигает своих экстремальных значений на концах отрезка. Композиция двух возрастающих или двух убывающих функций является возрастающей функцией на своей на области определения, если же функции имеют разный характер монотонности, то их композиция является убывающей функцией (на своей области определения).

Задача 1.1. *Найти максимальное и минимальное значение функции* $y(x) = \sqrt{\ln\frac{1}{x} + 2^{-\sqrt[3]{x}}}$ *при* $x \in [1/8; 1]$.

Решение. Очевидно, функции $1/x$ и $-\sqrt[3]{x}$ убывают на положительной полуоси, а функции $\ln x$ и 2^x возрастают на своей области определения. Отсюда композиции $\ln\frac{1}{x}$ и $2^{-\sqrt[3]{x}}$ убывают на своих областях определения, а их сумма убывает на луче $(0; +\infty)$. Так как функция $\sqrt{x}$ возрастает, то заданная функция $y(x)$ убывает на своей области определения $D(y)$. Несложно заметить, что $[1/8; 1] \subset D(y)$, отсюда $y_{\min} = y(1) = \sqrt{0 + 2^{-1}} = \sqrt{2}/2$, $y_{\max} = y(1/8) = \sqrt{3\ln 2 + \sqrt{2}/2}$. Отметим, что сама область определения $D(y)$ является полуотрезком $(0; x_0]$, где $x_0 > 1$ — корень уравнения $2^{-\sqrt[3]{x}} = \ln x$ (его невозможно найти элементарными методами).

Ответ: $y_{\min} = \sqrt{2}/2$, $y_{\max} = \sqrt{3\ln 2 + \sqrt{2}/2}$.

Среди задач повышенной трудности встречаются такие, где нужно найти экстремум функции вида $y(x) = k_0x + b_0 + |k_1x + b_1| \pm |k_2x + b_2| \pm \ldots \pm |k_nx + b_n|$. Обозначая через x_i корень уравнения $k_ix + b_i = 0$, получаем, что на каждом из интервалов между соседними точками x_i, графиком $y(x)$ будет являться прямая. Следовательно, ее экстремальные значения могут достигаться на концах заданного отрезка $[a; b]$, либо в точках x_i. Если вне зависимости от знаков $k_0 \pm k_1 \pm k_2 \pm \ldots \pm k_n > 0$ (или < 0), то на каждом интервале $y(x)$ будет возрастать (убывать), следовательно экстремальные значения будут приниматься на концах отрезка.

Задача 1.2. *Найти максимум и минимум функции* $y(x) = |x + 2| + 3|x - 3| - 2|x - 2|$ *на отрезке* $[-1; 4]$.

Решение. Нули выражений под модулями образуют множество чисел $\{-2; 2; 3\}$. Следовательно максимум и минимум достигается в одной из точек: $-1; 2; 3; 4$. Имеем $y(-1) = 1 + 12 - 6 = 7$; $y(2) = 4 + 3 = 7$; $y(3) = 5 - 2 = 3$; $y(4) = 6 + 3 - 4 = 5$.

Ответ: $y_{\min} = 3, y_{\max} = 7$.

Задача 1.3 (из открытого банка ЕГЭ). *При каких a для всякого $x \in [0; 7]$ выполнено неравенство* $||x + 2a| - 3a| + ||3x - a| + 4a| \le 7x + 24$.

Решение. Как бы мы не раскрывали модуль функция $y(x) = 7x+24-||x+2a|-3a|-||3x-a|+4a|$ будет возрастающей ($7 \pm 1 \pm 3 > 0$), поэтому достаточно проверить справедливость неравенства $y(x) \ge 0$ на левом конце отрезка. Имеем $y(0) = 24 - ||2a| - 3a| - || - a| + 4a| \ge 0$. Если $a \ge 0$, то $y(0) = 24 - |2a - 3a| - |a + 4a| = 24 - a - 5a = 24 - 6a \ge 0$, отсюда $a \in [0; 4]$. Если $a < 0$, то $y(0) = 24 - | - 2a - 3a| - | - a + 4a| = 24 + 5a + 3a = 24 + 8a \ge 0$, отсюда $a \in [-3; 0)$.

Ответ: $a \in [-3; 4]$.

Задача 1.4 (из открытого банка ЕГЭ). *У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 11 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?*

Решение. Если обозначить за $x_1, x_2 \in [0; 10]$ размеры частей первого и второго поля соответственно, на которой выращиваем картофель, то оставшиеся части $10 - x_1$ и $10 - x_2$ будут засеяны свеклой. Отсюда формальный подсчёт приводит к максимизации функции прибыли

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2) &= (400x_1 + 300x_2)10000 + (300(10 - x_1) + 400(10 - x_2))11000 = \\ &= 10^5[40x_1 + 30x_2 + 330 - 33x_1 + 440 - 44x_2] = 10^5[7x_1 - 14x_2 + 770]. \end{aligned}$$

Функция $S(x_1, x_2)$ является суммой линейных функций от x_1 и x_2. Поскольку коэффициент перед x_1 положителен, а коэффициент перед x_2 отрицателен, то величину x_1 нужно максимизировать, а x_2 — минимизировать. Отсюда $S_{\max} = S(10, 0) = 10^5 \cdot 840 = 84 \cdot 10^6$ рублей.

Ответ: 84 млн. руб.

2. Свойства квадратичной функции

Любой квадратный трёхчлен $y(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) после выделения полного квадрата сводится к виду

$$y(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Отсюда в случае $a > 0$ (ветви параболы направлены вверх) функция имеет глобальный минимум при $x_0 = -b/2a$ (абсцисса вершины параболы). Аналогично в случае $a < 0$ (ветви параболы направлены вниз) функция имеет глобальный максимум при $x_0 = -b/2a$.

Отметим, что если множество значений $E(y)$ данной квадратичной функции содержится в области определения монотонной на $D(g)$ функции $g(x)$, то точка $x_0 = -b/2a$ является глобальным максимумом или минимумом функции $g(y(x))$.

Задача 2.1. *Найти точки экстремумов функций* $y_1(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$, $y_2(x) = \log_{1/2}(2x^2 - x + 1)$, $y_3(x) = 2^{ax^2+bx+c}$.

Решение. Так как парабола $y = x^2 + 2x + 3$ лежит выше оси Ox, значит $E(y) \subset D(g)$, $g(x) = \sqrt{x}$. Функция $g(x)$ является возрастающей, поэтому $y_1(x) = g(y(x))$ достигает глобального минимума при $x_0 = -1$ (максимум не достигается). Парабола $y = 2x^2 + x + 1$ также лежит выше оси Ox, но функция $g(x) = \log_{1/2} x$ убывает на множестве $D(g) = (0; +\infty)$. Поэтому функция $y_2(x)$ достигает глобального максимума при $x_0 = 1/4$ (минимум не достигается). Так как функция $g(x) = 2^x$ возрастает на $\mathbb{R}$, то точкой экстремума функции $y_3(x)$ является $x_0 = -b/2a$. Это точка максимума для $a < 0$ (минимум не достигается, хотя $y_3(x)$ ограничена снизу), либо точка минимума при $a > 0$ (максимум не достигается).

Задача 2.2. *С какой минимальной начальной скоростью человек ростом 2 метра должен подбросить камень вертикально вверх, чтобы он поднялся на высоту в 10 метров.*

Решение. Известно, что функция, выражающая высоту полёта камня спустя t секунд после запуска с высоты h_0 и начальной скоростью v_0 вертикально вверх выражается формулой $h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где $h_0 = 2$. Будем для простоты считать, что $g = 10$ м/c^2, тогда точка максимума функции $h(t)$ равна $t_0 = v_0/10$. Отсюда $h_{\max}(t) = h(v_0/10) = 2 + \frac{v_0^2}{10} - \frac{v_0^2}{20} = 2 + \frac{v_0^2}{20} = 10$. Следовательно, $v_0 = 4\sqrt{10} \approx 12,65$.

Ответ: $v_0 \approx 12,65$ м/с.

Задача 2.3. *На прямой* $2x + 3y - 6 = 0$ *найти точку, находящуюся на минимальном расстоянии от точки* $N(7; 6)$.

Решение. Пусть искомая точка $M(x; y)$, где $y = 2 - 2/3x$. Тогда имеем $MN = d(x) = \sqrt{(x-7)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (4 + 2/3x)^2} = 1/3\sqrt{13x^2 - 78x + 585}$. Имеем точку минимума $x_0 = 78/26 = 3$, откуда $y_0 = 0$.

Ответ: $M(3; 0)$. Отметим, что MN является перпендикуляром, опущенным из точки N на прямую. Ниже указана общая формула для вычисления длины перпендикуляра (7).

Ряд задач, сводящихся к исследованию квадратичной функции рассмотрен в пособии [2]. Это, в частности, задача о нахождении прямоугольника максимальной площади с заданным периметром, с заданным радиусом описанной окружности; задача о нахождении цилиндра с максимальной боковой поверхностью, который можно вписать в данный шар (или цилиндр) и другие.

3. Использование неравенств между средними величинами

В школе широко используется неравенство Коши, согласно которому для любых неотрицательных чисел a и b справедливо, что

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \tag{1}$$

причём равенство возможно лишь при $a = b$.

Задача 3.1. *При заданном $p > 0$ найти минимум функции $y(x) = x + \dfrac{p}{x}$ для $x > 0$.*

Решение. Согласно неравенству (1) имеем $x + \dfrac{p}{x} \geq 2\sqrt{p}$, следовательно минимальное значение равно $2\sqrt{p}$ и достигается оно при $x = p/x$, т.е. при $x = \sqrt{p}$.

Ответ: $2\sqrt{p}$.

Заметим, что следствием данной задачи является часто используемое неравенство $x + 1/x \geq 2$ $(x > 0)$.

Несложно доказать, что для любых положительных чисел a и b справедлива цепочка неравенств

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}, \tag{2}$$

которую называют неравенствами средних величин (среднее квадратичное, арифметическое, геометрическое и гармоническое), причём все четыре выражения равны лишь в том случае, когда $a = b$. Основываясь на этом, несложно решить, например, такую задачу: из всех прямоугольных треугольников с фиксированной гипотенузой найти тот, чья площадь максимальна.

Неравенство (2) обобщается на случай произвольного набора положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а именно

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\ldots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}, \tag{3}$$

где все выражения равны лишь в случае $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Это неравенство является следствием так называемого неравенства Йенсена, справедливого для выпуклых функций, его доказательство можно найти, например, в [4]–[6].

Задача 3.2. *Не используя производную, для заданных чисел $b \geq a > 0$ найти максимум функции $f(x) = x(a-x)(b-x)$ на отрезке $x \in [0; a]$.*

Решение. Ясно, что точка максимума данной функции совпадает с точкой максимума функции $f_k(x) = (k+1)x(a-x)(bk-kx)$ для любого $k > 0$. Несложно при этом заметить, что $(kx+x)+$ $+(a-x)+(bk-kx) = a+bk = \text{const}$. Отсюда, используя неравенство (3), получаем, что

$$((k+1)x)(a-x)(bk-kx) \leq \left(\frac{(kx+x)+(a-x)+(bk-kx)}{3}\right)^3 = \text{const}.$$

Максимальное значение произведения достигается в случае равенства трёх сомножителей, т.е. при выполнении двух равенств

$$kx + x = a - x, \quad a - x = bk - kx.$$

Из системы следует, что $x = a/(k+2)$, где k является решением уравнения

$$bk^2 + 2(b-a)k - a = 0. \tag{4}$$

Так как дискриминант уравнения положителен и число $-a/b < 0$, то согласно теореме Виета уравнение имеет один положительный и один отрицательный корень. Положительный корень k_0 позволяет найти единственную точку максимума $x_0 = a/(k_0 + 2)$.

Ответ: $f(a/(k_0 + 2))$, где k_0 — положительный корень уравнения (4).

Основываясь на предложенном решении, можно решить последнюю задачу из сборника [2].

Задача 3.3. *Дан прямоугольный лист жести, размерами 80 на 50 см. Требуется вырезать около всех его углов четыре одинаковых квадратика так, чтобы после загибания остающихся кромок получилась открытая сверху коробка наибольшего объема.*

Решение. Если обозначить сторону квадратика через x, то можно заметить, что объем коробки будет находится по формуле $V(x) = x(80-2x)(50-2x) = 4x(25-x)(40-x)$, где $x \in [0; 25]$. Найдем точку максимума функции $f(x) = x(25-x)(40-x)$. Основываясь на решении задачи (3), получаем точку максимума $x_0 = 25/(k_0+2)$ (здесь $a = 25, b = 40$), где k_0 — положительный корень уравнения $40k^2 + 30k - 25 = 0$. Несложно убедиться, что $k_0 = 1/2$, отсюда $x_0 = 10$.

Ответ: квадратики размером 10 на 10 см.

«Подгонка» задачи под неравенство средних может быть весьма изощренной. Например, на XIV Всеукраинском Турнире юных математиков им. М. И. Ядренко в 2011 году предлагалась такая задача.

Задача 3.4. *Найти все тройки натуральных чисел a, b и c, для которых выражение*

$$S = \frac{1024}{a} + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{2} \tag{5}$$

принимает свое наименьшее значение.

Решение. Запишем данное выражение в виде суммы 15-ти слагаемых:

$$S = 8 \cdot \frac{128}{a} + 4 \cdot \frac{a^2}{4b} + 2 \cdot \frac{b^2}{2c} + \frac{c^2}{2},$$

тогда согласно неравенству (3) будем иметь

$$S \geq \sqrt[15]{\left(\frac{128}{a}\right)^8 \left(\frac{a^2}{4b}\right)^4 \left(\frac{b^2}{2c}\right)^2 \left(\frac{c^2}{2}\right)} = 120.$$

Минимальное значение принимается при выполнении условий

$$\frac{128}{a} = \frac{a^2}{4b} = \frac{b^2}{2c} = \frac{c^2}{2}.$$

Решая данную систему уравнений, получаем $a = 16, b = 8, c = 4$.

Ответ: $a = 16, b = 8, c = 4$.

Попробуйте самостоятельно решить следующие три задачи, используя неравенство (3).

Задача 3.5. *Докажите, что среди всех треугольников заданного периметра наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник. (Указание: используйте формулу Герона)*

Задача 3.6. *Докажите, что среди всех прямоугольных параллелепипедов, вписанных в данную сферу, наибольший объем имеет куб.*

Задача 3.7 (из книги [3], с. 65). *Найти значение $x > 0$ при котором функция $f(x) = ax^n + bx^{-m}$ для натуральных m и n, и положительных a и b принимает минимальное значение. (Указание: разложите ax^n в сумму m равных слагаемых, а ax^{-m} в сумму n равных слагаемых)*

4. Метод вспомогательного параметра

Пусть нужно найти экстремум функции одной переменной $y = f(x)$ на множестве X. Очевидно, это равносильно нахождению экстремальных значений параметра a, для которых уравнение $f(x) = a$ имеет решение $x \in X$. Эта простая идея позволяет находить множество значений $E(y)$ ряда элементарных функций, например, функции $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{2x^2 - x + 3}$ (задача из книги [7], с. 120).

Подобный подход успешно применяется при решении многих задач на условный экстремум функции двух переменных. Например, для задачи

$$\begin{cases} f(x;y) \to \text{extr}, \\ g(x;y) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

удобно считать, что $f(x;y) = a$, при этом экстремальным значениям соответствуют максимальное и минимальное значения параметра a при которых система имеет решение. Если графики уравнений $f(x;y) = a$ и $g(x;y) = 0$ несложно изобразить, то для решения системы уравнений с параметром можно использовать графический метод. В этом случае может пригодиться формула расстояния между двумя точками $M(x_1;y_1)$ и $N(x_2;y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

а также формула расстояния от точки $K(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C = 0$ (длина перпендикуляра):

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{7}$$

Задача 4.1. *Найти максимум и минимум функции $f(x;y) = 3x + 4y$, если $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$.*

Решение. Найдём максимальное и минимальное значение параметра a, при котором система

$$\begin{cases} 3x + 4y = a, \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9. \end{cases} \tag{8}$$

разрешима. Семейство уравнений $3x + 4y - a = 0$ $(A = 3, B = 4, C = -a)$ задают в координатной плоскости множество параллельных прямых, график второго уравнения — окружность с центром в точке $O(2;-1)$, радиуса $R = 3$. Несложно заметить, что экстремальным значениям параметра a соответствуют случаи касания прямых с окружностью. При этом касательные располагаются от центра окружности на расстоянии $h = R = 3$. Отсюда согласно формуле (7) получаем, что

$$h = \frac{|3 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 - a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|2 - a|}{5} = 3.$$

Решая последнее уравнение, получаем $a = -13$ и $a = 17$.

Ответ: $\min = -13$, $\max = 17$.

Довольно часто встречаются задачи вида (6), когда обе функции f и g являются многочленами первой или второй степени. Если функция g является линейной, т.е. имеется связь $px + qy + r = 0$, то одну из переменных легко исключить и задача сводится к нахождению экстремумов квадратной функции (см. параграф 2). Например, можно найти минимум функции $2x^2 + y^2 + 1$ при условии $2x + y - 6 = 0$. (Ответ: 13)

Рассмотрим теперь другой частный случай:

$$\begin{cases} px + qy + r \to \text{extr}, \\ ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Полагая, что $px + qy + r = a$, можно выразить одну из переменных. Подставляя ее значение во второе соотношение, получим квадратное уравнение, зависящее от параметра. Оно имеет решение при неотрицательном дискриминанте, последнее неравенство позволяет определить экстремальные значения.

Задача 4.2. *Найдем максимальное и минимальное значение, которое может принимать $3x + y$, если известно, что $x^2 + y^2 = 9$.*

Решение. Полагая, что $3x + y = a$, получаем $y = a - 3x$. Отсюда имеем уравнение $x^2 + (a - 3x)^2 - 9 = 0$ или $10x^2 - 6ax + a^2 - 9 = 0$, $D/4 = 9a^2 - 10(a^2 - 9) \geq 0$. Следовательно, $a^2 \leq 90$, т.е. $a \in [-3\sqrt{10}; 3\sqrt{10}]$.

Ответ: $\max = 3\sqrt{10}, \min = -3\sqrt{10}$.

Если обе функции f и g являются квадратными однородными многочленами второй степени, то задача сводится к решению однородной системы, зависящей от параметра. Этим методом в книге И.Ф. Шарыгина [7], с. 121, решена следующая задача.

Задача 4.3. *Найти максимальное и минимальное значение, которое может принимать $2x^2 - xy - y^2$, если известно, что $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$. (Ответ: $\min = 6 - 3\sqrt{6}$, $\max = 6 + 3\sqrt{6}$)*

5. Замена переменных

Иногда при решении задач на условный экстремум удобно использовать замену переменных. Типичными случаями, когда это целесообразно, являются симметрические многочлены (т.е. многочлены, не изменяющие своего значения при любой перестановке переменных), например x^2+y^2, $x^2y+xy+xy^2$, а также однородные многочлены, например $2xy + y^2 - x^2$, $x^3 - 3x^2y + 2y^3$.

Задача 5.1. *Найти минимальное значение, которое может принимать $f(x, y) = x^3 + y^3$, если известно, что x и y являются положительными числами, для которых $g(x, y) = x^2+2xy+y^2+xy^2+ yx^2 = 6$.*

Решение. В данной задаче использованы два симметрических многочлена $f(x, y)$ и $g(x, y)$. Известно (см., например, [8], с. 10), что любой симметрический многочлен от двух переменных является функцией от $x + y = v$ и $xy = u$. Используя данную замену переменных, получаем что нужно подобрать положительные u и v, для которых минимизируется выражение $v^3 - 3uv$ при условии $v^2 + vu = 6$. Так как, очевидно, $v \neq 0$ и $u = (6 - v^2)/v$, то $v^3 - 3uv = v^3 + 3v^2 - 18$. Последняя функция возрастает при $v \geq 0$, при этом значение $v = 0$ не подходит, отсюда можно сделать неверный вывод о том, что минимум не достигается. Ошибка тут кроется в том важном факте, что не для всех пар $(u; v)$ можно вернуться по замене к действительным $(x; y)$. Несложно понять, что необходимым и достаточным условием для этого является выполнение неравенства $v^2 - 4u \geq 0$. Отсюда

$\dfrac{v^3+4v^2-24}{v} \geq 0$. Так как уравнение $v^3+4v^2-24=0$ имеет единственный вещественный корень $v=2$, то неравенство выполняется для $v \in (-\infty;0)\cup[2;+\infty)$. Значит, условию задачи соответствует $v=2$, откуда $u=1$, $x=y=1$.

Ответ: $\min = 2$.

Задача 5.2 (олимпиада «Физтех»-2019, заочный этап). *Положительные числа a и b таковы, что числа $A_1 = \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$, $A_2 = \dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$, $A_3 = \dfrac{a^4+b^4}{a^3+b^3}$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Известно, что $a+b=8$. Найдите наибольшее возможное значение выражения a^2+b^2.*

Решение. Если сразу выразить одну из переменных и подставить в условие $2A_2 = A_1+A_3$, то мы придём к сложному уравнению третьей степени. В то же время замена $x=a/8, y=b/8$ $(x+y=1)$, $xy=t$, не упрощая сути задачи, позволяет свести уравнение $2A_2=A_1+A_3$ к уравнению $t(4t-1)^2=0$. Последнее имеет единственное положительное решение $t=1/4$, откуда $x=y=1/2$, $a=b=4$.

Ответ: $\max = 32$.

Если в задаче (6) одна из функций имеет вид

$$a^2(kx+ly+m)^2+b^2(nx+py+q)^2, \tag{10}$$

где $a\neq 0$ и $b \neq 0$, то можно использовать переход к параметрическим уравнениям окружности. Например, соотношение $a^2(x-x_0)^2+b^2(y-y_0)^2=c^2$ равносильно равенствам $x=x_0+c/a\cos t$, $y=y_0+c/a\sin t$.

Решим методом замены задачу (4.3). Заметим, что второе соотношение равносильно выражению $(x+y)^2+(\sqrt{2}y)^2=4$, отсюда $x+y=2\cos t$, $\sqrt{2}y=2\sin t$, $y=\sqrt{2}\sin t$, $x=2\cos t-\sqrt{2}\sin t$. Подставляя данные величины в первое выражение, после упрощения получим $2x^2-xy-y^2=8\cos^2 t-10\sqrt{2}\cos t\sin t+4\sin^2 t=6+2\cos 2t-5\sqrt{2}\sin 2t$. Так как выражение $\alpha\cos kt+\beta\sin kt$ имеет максимум, равный $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ и минимум $-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ (см. задачу (6.1)), то $\max = 6+\sqrt{4+50}=6+3\sqrt{6}$, $\min = 6-\sqrt{4+50}=6-3\sqrt{6}$.

6. Координатно-векторный метод

Зачастую в задачах на экстремум удобно вводить декартову систему координат, использовать формулы расстояний между точками, между прямой и точкой, либо использовать соотношения между векторами, например, свойства скалярного произведения или неравенство треугольника.

Известно, что для двух данных векторов $\vec{a}=(a_1;a_2;\ldots;a_n)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;\ldots;b_n)$ скалярное произведение равно числу $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\phi$, где ϕ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Это соотношение эквивалентно неравенству Коши-Буняковского, согласно которому

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n|\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \tag{11}$$

для любых наборов действительных чисел a_i и b_i. Причём равенство выполняется лишь в случае коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. при условии, что существует константа λ такая, что $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

Во введении классического задачника под редакцией М.И. Сканави [9] приведены три метода решения задачи поиска максимума и минимума выражения $3\cos x+4\sin x$. Решим её сейчас векторным методом в общем виде.

Задача 6.1. *Найти максимальное и минимальное значение выражения $\alpha\cos kx+\beta\sin kx$ $(k\neq 0)$, $x\in\mathbb{R}$.*

Решение. Если положить $\vec{a} = (\alpha;\beta)$, $\vec{b} = (\cos kx; \sin kx)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $|\vec{b}| = \cos^2 kx + \sin^2 kx = 1$. Согласно неравенству (11) получаем, что $|\alpha\cos kx + \beta\sin kx| = |\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Минимальное и максимальное значения достигаются соответственно на векторах

$$\vec{b}_{\min} = \left(-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}; -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right), \qquad \vec{b}_{\max} = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}; \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right).$$

Ответ: $\min = -\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\max = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Отметим, что стандартное решение данной задачи основано на введении вспомогательного угла, а именно на следующем преобразовании

$$\alpha\cos kx + \beta\sin kx = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos kx + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin kx\right) =$$
$$= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}(\sin\phi\cos kx + \cos\phi\sin kx) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin(\phi+kx) \in [-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}; \sqrt{\alpha^2+\beta^2}].$$

Метод скалярного произведения векторов применим в задачах на условный экстремум вида (6), когда одна из функций является линейной, а вторая имеет вид (10).

Задача 6.2. *При условии* $3x+y=6$ *нужно минимизировать функцию* $2(x+y)^2+3(2x-y)^2$.

Решение. Введём векторы $\vec{a} = (\sqrt{2}(x+y); \sqrt{3}(2x-y))$, $\vec{b} = (\alpha;\beta)$. Подберём числа α и β так, чтобы $3x+y = \vec{a}\cdot\vec{b}$. Последнее эквивалентно системе $\sqrt{2}\alpha + 2\sqrt{3}\beta = 3$, $-\sqrt{2}\alpha - \sqrt{3}\beta = 1$. Решая ее, находим $\alpha = -5/\sqrt{2}$, $\beta = 4/\sqrt{3}$. Следовательно,

$$6 = 3x+y = \vec{a}\cdot\vec{b} \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = (2(x+y)^2+3(2x-y)^2)\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Отсюда $\min = \dfrac{6}{\sqrt{25/2+16/3}} = \dfrac{6\sqrt{6}}{\sqrt{107}}$. Минимум достигается, так как система $x+y=u$, $2x-y=v$ разрешима для любых вещественных чисел u и v.

Ответ: $\min = \dfrac{6\sqrt{6}}{\sqrt{107}}$.

Решите самостоятельно данную задачу методом замены переменной, считая что $u = x+y$, $v = 2x-y$. Описанными здесь методами решаются также задачи 4.1 и 4.2, а также следующие задачи: при условии $2x+y=6$ минимизировать функцию $2x^2+y^2+1$; найти максимальное и минимальное значение, которое может принимать $x-6y$, если известно, что $x^2+4y^2=25$.

Также весьма полезным является неравенство треугольника, согласно которому для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|, \tag{12}$$

причём равенство возможно лишь для для коллинеарных сонаправленных векторов. Отметим, что данное неравенство является следствием неравенства Коши-Буняковского (11).

Задача 6.3 (задание вступительной работы в СУНЦ МГУ 2014 года). *Найти все пары чисел* $(x;y)$ *таких, что выражение*

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y-4)^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2} + \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$$

принимает минимальное значение.

Решение. Сумма квадратов под корнями наводит на мысль о модулях векторов. Действительно, введём точки $P(2;0)$, $N(0;4)$, $L(4;3)$, $K(-2;1)$, $M(x;y)$. Отмечая их на координатной плоскости, замечаем, что $PLNK$ — параллелограмм. Искомое выражение являет собой сумму $|\overrightarrow{MP}|+|\overrightarrow{MN}|+|\overrightarrow{ML}|+|\overrightarrow{MK}|$. Согласно неравенству треугольника получаем, что $|\overrightarrow{MP}|+|\overrightarrow{MN}|+|\overrightarrow{ML}|+|\overrightarrow{MK}|\geq|\overrightarrow{PN}|+|\overrightarrow{KL}|=\sqrt{(-2)^2+4^2}+\sqrt{6^2+2^2}=2(\sqrt{5}+\sqrt{10})$. Очевидно, равенство достигается, если точка M лежит на прямой NP и одновременно с этим на прямой KL. Так как диагонали параллелограмма пересекаются в одной точке, которая делит их пополам, то $x=(2+0)/2=1$, $y=(4+0)/2=2$.

Ответ: $\{(1;2)\}$.

Задача 6.4. *Найти при каком действительном x выражение*

$$\sqrt{x^2-22x+122}+\sqrt{x^2+14x+53}$$

принимает минимальное значение.

Решение. Преобразуем данное выражение к виду $\sqrt{(x-11)^2+1}+\sqrt{(x+7)^2+4}$. Введём точки $N(11;1), N'(11;-1), L(-7;2), L'(-7;-2), M(x;0)$. Имеем $|\overrightarrow{NM}|=|\overrightarrow{N'M}|=\sqrt{(x-11)^2+1}$, $|\overrightarrow{LM}|=|\overrightarrow{L'M}|=\sqrt{(x+7)^2+4}$. Согласно неравенству треугольника минимум достигается в такой точке оси абсцисс, что векторы $\overrightarrow{NM}$ и $\overrightarrow{L'M}$ коллинеарны. Имеем $\overrightarrow{NM}=(x-11;-1)$, $\overrightarrow{L'M}=(x+7;2)$, отсюда $\frac{x+7}{x-11}=-2$ или $x=5$. Отметим, что данная задача иллюстрирует закон зеркального отражения света. А именно, если луч света, выйдя из точки L, после отражения от оси абсцисс переместился в точку N, то он прошёл минимально возможное расстояние $LM+MN$. Этот минимум достигается в точке M, для которой угол падения равен углу отражения. Последнее выполнено в силу того, что точки L и L' расположены симметрично оси абсцисс, и точка M лежит на прямой $L'N$.

Ответ: $x=5$.

Попробуйте самостоятельно решить следующую задачу.

Задача 6.5 (олимпиада «Физтех»-2019, заочный этап). *Найдите минимум x^2+y^2-4y при условии $|4x-3y|+5\sqrt{x^2+y^2-20y+100}=30$.*

Ответ: $36,96$. (Указание: использовать тот факт, что $\dfrac{|4x-3y|}{5}$ является расстоянием от точки $(x;y)$ до прямой $4x=3y$, см. формулу (7))

В заключение данного пункта отметим, что неравенство Коши-Буняковского является частным случаем более общего неравенства Гёльдера

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\leq\left(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p\right)^{1/p}\cdot\left(b_1^q+b_2^q+\ldots+b_n^q\right)^{1/q}, \tag{13}$$

которое выполняется для любых положительных чисел a_i, b_i и любых чисел $p, q\in[1;+\infty)$, которые связаны соотношением $1/p+1/q=1$ (для неравенства Коши-Буняковского имеем $p=q=2$). Причем равенство достигается если существует константа λ, такая что $b_i^q=\lambda a_i^p$. На основе данного неравенства можно решать более сложные задачи, когда вместо суммы квадратов (как в (10)) используется сумма произвольных степеней.

Задача 6.6. *Найдем максимальное значение, которое может принимать выражение $3x+4y+5z$, если известно, что $x^{3/2}+y^{3/2}+z^{3/2}=8$.*

Решение. Согласно (13) при $p=3/2$, $q=3$ имеем

$$3x+4y+5z\leq(x^{3/2}+y^{3/2}+z^{3/2})^{2/3}\cdot(3^3+4^3+5^3)^{1/3}=8^{2/3}\cdot216^{1/3}=4\cdot6=24.$$

Равенство достигается при $x=1$, $y=16/9$, $z=25/9$.

Ответ: $\max=24$. Отметим тот интересный факт, что $6^3=3^3+4^3+5^3$. Вообще, существует бесконечно много кубов целых чисел, представимых нетривиальным образом в виде суммы трёх целых кубов, при этом согласно большой теореме Ферма ни один целый куб не разлагается в сумму двух целых кубов.

7. Десять методов решения одной задачи

Проиллюстрируем использование описанных выше подходов к решению на примере одной новой задачи, которую можно найти на сайте Д. Д. Гущина «Решу ЕГЭ» (см. $https://ege.sdamgia.ru/$).

Задача 7.1. *В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?*

7.1. Стандартное решение с использованием производной.

На сайте можно найти такое решение. В двух областях имеется ресурс труда в 200 часов, который можно распределить между добычей алюминия и никеля. Путь в первой области на добычу алюминия будет потрачено x часов, а во второй — y часов, тогда на добычу никеля останется в первой области $200 - x$ часов, а во второй — $200 - y$ часов. Тогда согласно условия в первой области будет добыто $0,1x$ кг алюминия и $20 - 0,1x$ кг никеля, соответственно во второй области $\sqrt{y}$ кг алюминия и $\sqrt{200-y}$ кг никеля. Нужды промышленности нас приводят к связи

$$A = 0,1x + \sqrt{y} = 3H = 3(20 - 0,1x + \sqrt{200-y}),$$

откуда получаем, что $0,4x = 3\sqrt{200-y} - \sqrt{y} + 60$. Наша задача максимизировать общую массу добытых металлов, поэтому нужно искать максимум функции

$$S = A + H = 4H = 80 - 0,4x + 4\sqrt{200-y} = 20 + \sqrt{200-y} + \sqrt{y}.$$

Имеем

$$S' = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{200-y}} = 0,$$

если $\sqrt{200-y} = \sqrt{y}$. Отсюда $y = 100$, а значит $S = 40$ кг.

7.2. Использование вспомогательного параметра (максимум функции)

Максимум функции $f(y) = \sqrt{200-y} + \sqrt{y}$ можно найти как максимальное значение параметра a, при котором уравнение $\sqrt{200-y} + \sqrt{y} = a$ разрешимо. Если возвести обе части в квадрат, то получим $200 + 2\sqrt{(200-y)y} = a^2$, отсюда

$$200y - y^2 = \frac{(a^2-200)^2}{4}.$$

Слева стоит квадратная функция, которая имеет точку максимума $y_0 = 200/2 = 100$, отсюда $a_{\max} = \sqrt{100} + \sqrt{100} = 20$, следовательно $S = a + 20 = 40$.

7.3. Использование вспомогательного параметра (условный экстремум)

Рассмотрим иной подход к построению математической модели задачи. Пусть в первой области по прежнему на добычу алюминия будет потрачено x часов, а на добычу никеля — $200 - x$ часов. Во второй области на добычу алюминия и никеля потратим u^2 и v^2 часов соответственно. Тогда согласно условию $u^2+v^2=200$, при этом в первой области будет добыто $0,1x$ кг алюминия и $20-0,1x$ кг никеля, во второй области — u кг алюминия и v кг никеля. Нужды промышленности нас приводят к связи

$$A=0,1x+u=3H=3(20-0,1x+v),$$

откуда получаем, что $0,4x=3v-u+60$. Наша задача сводится к решению задачи на условный экстремум

$$\begin{cases} S=4H=u+v+20\to\max, \\ u^2+v^2=200. \end{cases} \tag{14}$$

Положим, что $u+v+20=a+20$, тогда $u=v-a$. Осуществляя подстановку получаем, что задача сводится к поиску максимального a, при котором разрешимо квадратное уравнение $(v-a)^2+v^2=200$ или $2v^2-2av+a^2-200=0$. Из условия $D/4=-a^2+400\geq 0$ заключаем, что $a_{\max}=20$.

7.4. Использование неравенства между средними.

Для решения задачи (14) (а также для максимизации функции $f(y)=\sqrt{200-y}+\sqrt{y}$ при $v=\sqrt{200-y},\ u=\sqrt{y}$) можно использовать неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}.$$

Имеем $u+v\leq 2\sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}}=20$. Максимум достигается при $u=v=10$, отсюда $S_{\max}=40$.

7.5. Решение с геометрической концовкой (треугольники и теорема Пифагора).

Задачу (14) можно решить, изобразив на координатной плоскости Ouv, окружность $u^2+v^2=200$ и семейство прямых $v=-u+a$. Максимальному значению $a=u+v$ соответствует условие касания окружности и прямой. Так как угловой коэффициент прямых $k=-1$, то касательная вместе с осями координат образует прямоугольный равнобедренный треугольник (с острыми углами в 45°), при этом катеты равны $a_{\max}$. Соединим радиус окружности с точкой касания, тогда прямоугольный треугольник разобьется на два меньших равнобедренных прямоугольных треугольника с катетами равными радиусу, отсюда по теореме Пифагора $a_{\max}=\sqrt{R^2+R^2}=\sqrt{200+200}=20$.

7.6. Решение с геометрической концовкой (длина перпендикуляра).

Условию касания окружности и прямой соответствует равенство радиуса окружности расстоянию от центра окружности до прямой (длине перпендикуляра). Согласно формуле расстояния от точки до прямой (7) в данной задаче получаем

$$h=\frac{|1\cdot 0+1\cdot 0-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}=R=\sqrt{200}\quad\Rightarrow\quad a_{\max}=20.$$

7.7. Использование параметрических уравнений.

Окружность $u^2+v^2=200$ можно задать с помощью параметрических уравнений $u=\sqrt{200}\cos t$, $v=\sqrt{200}\sin t$. После их подстановки задача сводится к поиску максимума функции одной переменной $S(t)=\sqrt{200}(\cos t+\sin t)+20=20(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t)+20=20\sin(\pi/4+t)+20$, отсюда $S_{\max}=40$.

7.8. Векторный метод.

Введём векторы $\vec{a} = (u; v)$ и $\vec{b} = (1; 1)$, тогда из свойства $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ получаем, что

$$u + v \leq \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{400} = 20, \tag{15}$$

где равенство (максимум $u + v$) достигается в случае $\vec{a} \parallel \vec{b}$, т.е. $u = v$.

7.9. Неравенство Коши-Буняковского.

Для произвольных положительных чисел u и v согласно неравенству Коши-Буняковского (11) выполнено (15). Равенство (максимум левой части) достигается если $u/1 = v/1$, т.е. $u = v$.

7.10. Метод перебора.

Из смысла задачи логично считать переменные u и v целыми числами, следовательно можно подобрать перебором все пары $(u; v)$ для которых $u^2 + v^2 = 200$. Имеем набор $\{(14; 2), (2; 14), (10; 10)\}$, отсюда $u + v$ достигает максимума при $u = v = 10$, отсюда $S_{\max} = u + v + 20 = 40$.

Литература

[1] Тихомиров В. М. *Рассказы о максимумах и минимумах.* — М.: МЦНМО, 2006. — 200 с.

[2] Нотансон И. П. *Простейшие задачи на максимум и минимум* («Популярные лекции по математике», выпуск 2). — М.-Л. : Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1952. — 32 с.

[3] Актершев С. П. *Задачи на максимум и минимум.* — СПБ: БХВ-петербург, 2005. — 192 с.

[4] Коровкин П. П. *Неравенства* («Популярные лекции по математике», выпуск 5). — М.: Наука, 1966. — 56 с.

[5] Соловьёв Ю. П. *Неравенства (библиотека «Математическое просвещение», выпуск 30).* — М.: МЦНМО, 2005. — 16 с.

[6] Войтицкий В. И. *Средние функциональные величины набора действительных чисел, их сравнение и свойства* // Математическое образование. — 2017. — № 4 (84). — С. 12-19.

[7] Шарыгин И. Ф. *Факультативный курс по математике. Решение задач. Учебное пособие для 10 класса.* — М.: Просвещение, 1989. — 252 с.

[8] Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. *Симметрия в алгебре.* — М.: МЦНМО, 2002. — 240 с.

[9] Сборник задач по математике для поступающих во втузы (под ред. Сканави М. И.). — М.: 2013. — 608 с.

Войтицкий Виктор Иванович,
доцент кафедры математического анализа Таврической академии Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского, к.ф.-м.н.

E-mail: voytitsky@gmail.com

Мустафаева Айше Шевхиевна,
студентка 4 курса факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского.

E-mail: a.aishe@mail.ru

Пространственные спирали

Г. А. Клековкин

В статье систематизируются сведения о пространственных спиралях — линиях, которые представляют не только теоретический интерес, но и часто встречаются на практике. Кроме теоретических сведений, автор дает рекомендации по изготовлению динамических чертежей в среде GeoGebra, показывающих процесс рисования спиралей на соответствующих поверхностях. Статья печатается с продолжением.

Понятие *спираль* (от греч. $\sigma\pi\varepsilon\rho\alpha$, лат. spéira — виток) достаточно часто используется как в повседневной жизни, так и в научной литературе, в том числе математической. Этим понятием охватывается широкий спектр самых разнообразных линий, поэтому его строгое определение обычно заменяется наглядным описанием. Например, в математике спиралями чаще всего называют плоские кривые, которые многократно закручиваются вокруг некоторой точки плоскости, называемой полюсом. Систематическое описание плоских спиралей и их свойств можно найти в книге А. А. Савелова [4].

В повседневном быту пружины, резьбу на болтах и шурупах, обмотки на различных сердечниках и т. п. мы также привыкли называть спиралями. Однако у подобных спиралей точки уже не лежат в одной плоскости, поэтому такие спирали естественно назвать пространственными. Пространственная спираль, в отличие от плоской, закручивается не вокруг точки, а вокруг некоторой оси.

Предлагаемая статья в доступной форме знакомит читателя с пространственными спиралями, наиболее часто встречающимися в математике и механике, и адресована в первую очередь учащимся старших классов, которые уже владеют началами математического анализа и методом координат в пространстве. Для наглядной демонстрации изучаемых линий предполагается использовать графические возможности интерактивной динамической системы (ИДС) GeoGebra. На сегодняшний день в сети Интернет можно найти качественные справочные и методические руководства по работе с этой системой, поэтому все комментарии к предлагаемым динамическим чертежам сведены к минимуму.

Хочется также надеяться, что поднятая тематика вызовет интерес и у учителей математики, активно использующих ИДС в элективном обучении и организации проектной деятельности учащихся.

Более детально свойства некоторых из рассматриваемых в статье линий обычно изучаются в курсах дифференциальной геометрии [1, 2]. Практически каждый вузовский преподаватель этого раздела геометрии будущим учителям математики знает, как трудно бывает убедительно ответить на, казалось бы, банальные вопросы студентов: «Зачем мы изучаем дифференциальную геометрию?», «Где и когда она потребуется в школе?». Регулярное использование в процессе обучения геометрии ИДС поможет преподавателю быть не только более убедительным при ответах на подобные вопросы, но и открывает перед ним широкие возможности для мотивации и организации учебно-исследовательской деятельности студентов, выросших в современной информационной среде.

1. Цилиндрическая винтовая линия

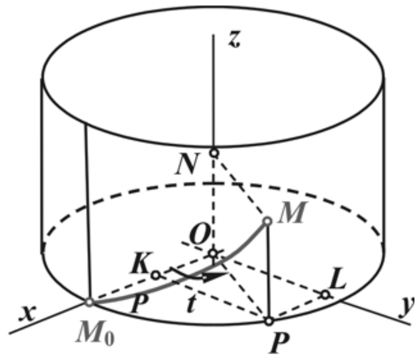


Рис. 1

Цилиндрическую винтовую линию (*обыкновенную винтовую линию, цилиндрическую спираль*) можно определить как траекторию точки M, одновременно участвующей в двух движениях: 1) во вращении с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси l, 2) в равномерном прямолинейном движении вдоль этой оси.

Найдем параметрические уравнения цилиндрической винтовой линии γ. Примем для этого за ее ось l ось Oz прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ (рис 1).

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка линии γ, N и P — ее проекции соответственно на ось Oz и плоскость Oxy. Расстояние до точки M от оси Oz обозначим через α, тогда $NM = OP = a$. Направленный угол между положительным направлением оси Ox и отрезком OP обозначим через t и примем за параметр точки M. Через b обозначим длину отрезка, на который переместится точка M вдоль оси Oz за промежуток времени, в течение которого отрезок OP повернется вокруг точки M на один радиан. Тогда $x = OK = a\cos t$, $y = OL = a\sin t$, $z = MP = bt$. Таким образом, координаты точки M представлены как функции параметра t:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt, \end{cases} \tag{1}$$

где параметр t принимает любые действительные значения. Уравнения (1) являются искомыми параметрическими уравнениями цилиндрической винтовой линии.

Уравнения (1) можно переписать в виде одного векторного уравнения

$$\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}. \tag{2}$$

Здесь, как обычно, $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ — единичные векторы координатных осей Ox, Oy и Oz соответственно.

Из первых двух уравнений в (1) имеем:

$$\cos t = \frac{x}{a}, \quad \sin t = \frac{y}{a}.$$

Возводя эти равенства в квадрат и складывая по частям, получим:

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$$

или

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{3}$$

Пришли к уравнению прямого кругового цилиндра (или цилиндра вращения) с радиусом a и осью Oz. Так как координаты любой точки винтовой линии (1) удовлетворяют уравнению (3), то она лежит на этом цилиндре.

При фиксированном направлении поступательного перемещения в зависимости от направления вращения точки M вокруг оси l различают *правые* (правозакрученные), рис. 2, и *левые* (левозакрученные), рис. 3, винтовые линии. Представление о форме правой винтовой линии дают штопор и резьба обычного правого болта.

Рис. 2

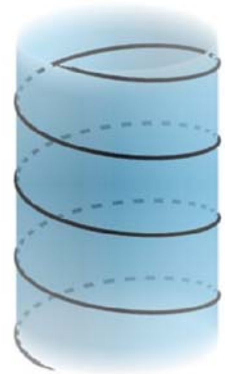


Рис. 3

Для того чтобы создать в среде GeoGebra динамический чертеж, демонстрирующий процесс вычерчивания на цилиндре цилиндрической винтовой линии, можно, например, поступить следующим образом:

1. Построить изображение цилиндра вращения по его неявному уравнению $x^2+y^2 = a^2$. Для этого нужно набрать это уравнение в строку ввода *Полотна 3D*, а затем одновременно нажать клавиши *Ctrl* и *Enter*.
2. Создать ползунок для параметра t.
3. В строке ввода задать текущую точку M вычерчиваемой винтовой линии: $M = (a\cos t, a\sin t, bt)$.
4. Для «оживления» чертежа активировать опцию *Оставлять след* у точки M и анимировать параметр t.

Для окончательной доработки чертежа и придания ему большей наглядности остается подобрать цвет и толщину винтовой линии и цвет цилиндра. Кроме того, потребуется уточнить границы изменения параметра t и скорость его изменения. На выполненных описанным образом чертежах невидимые линии (части линий) либо привычно изображаются штриховыми линиями, либо являются менее яркими, чем видимые.

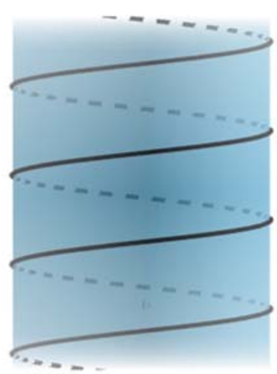


Рис. 4

Заметим, что винтовую линию можно также задать как линию пересечения двух цилиндрических поверхностей. Действительно, с одной стороны, она лежит на круговом цилиндре (3). С другой стороны, выразив в (1) из третьего уравнения параметр t через z, из второго уравнения будем иметь:

$$y = a \sin \frac{z}{b}. \tag{4}$$

В системе координат $Oxyz$ уравнение (4) является уравнением цилиндра, направляющей которого служит синусоида $y = a \sin \dfrac{z}{b}$, лежащая в плоскости Oyz (рис. 4), а образующие параллельны оси Ox.

Таким образом, цилиндрическую винтовую линию (1) можно рассматривать как линию пересечения кругового цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$ и синусоидального цилиндра $y = a \sin \dfrac{z}{b}$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y = a \sin \dfrac{z}{b}. \end{cases}$$

Когда точка M цилиндрической винтовой линии, соответствующая параметру t, совершает полный оборот вокруг оси l, она переходит в точку M', соответствующую параметру $t + 2\pi$. Дугу винтовой линии с концами M и M' часто называют *витком* этой линии.

Образующие кругового цилиндра (3) параллельны координатному вектору $\vec{k} = (0, 0, 1)$, вектор $\vec{r}'(t) = -a \sin t \vec{i} + a \cos t \vec{j} + b\vec{k}$ является касательным вектором винтовой линии γ. Вычисляя

$$\cos\left(\widehat{\vec{k}, \vec{r}'(t)}\right) = \frac{\left(\vec{k}, \vec{r}'(t)\right)}{|\vec{k}||\vec{r}'(t)|} = \frac{b}{a^2 + b^2}\,,$$

видим, что угол между векторами $\vec{k}$ и $\vec{r}'(t)$ не зависит от параметра t. Это означает, что *цилиндрическая винтовая линия* γ *пересекает все образующие кругового цилиндра* (3) *под постоянным углом.*

Из сказанного вытекает простой способ вычерчивания на модели прямого кругового цилиндра винтовой линии, которая пересекает все его образующие под данным углом α. Нужно вырезать из бумаги угол, величина которого равна $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$ (рис. 5). Если наматывать этот бумажный угол на цилиндр так, чтобы одна из его сторон накладывалась на окружность основания цилиндра, то тогда вторая сторона угла будет располагаться на искомой винтовой линии.

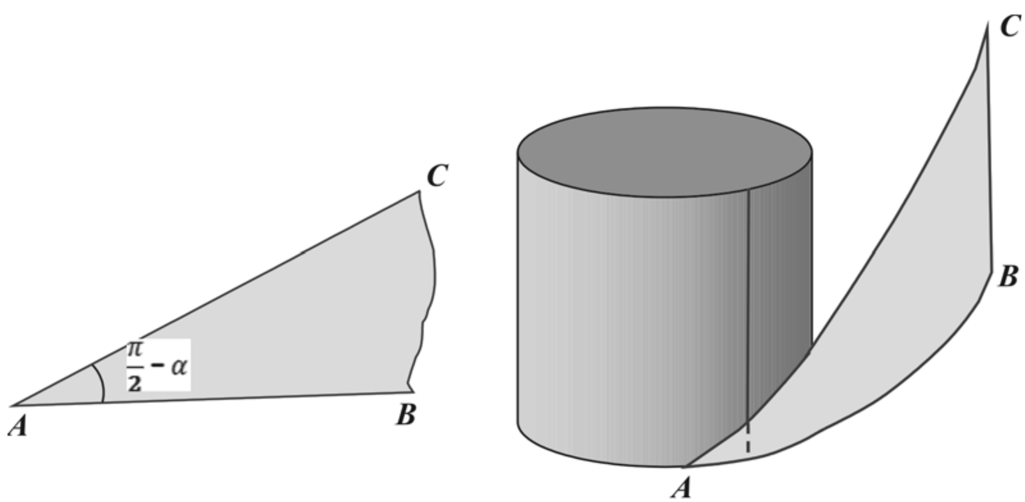


Рис. 5

Замечательным характеристическим свойством цилиндрической винтовой линии является то, что она, не меняя формы, может скользить сама по себе. (На плоскости таким свойством обладают прямые и окружности.)

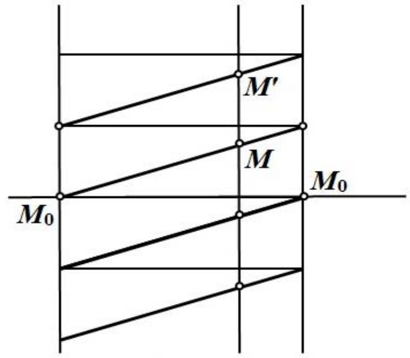


Рис. 6

Циклическая винтовая линия является *периодической.* Наименьшая величина поступательного перемещения цилиндрической винтовой линии вдоль оси, которое совмещает ее саму с собой, называется *шагом* этой линии. Очевидно, что шаг винтовой линии (1) равен расстоянию, на которое смещается любая ее точка M по образующей цилиндра при своем повороте на угол 2π, т. е. равен $2\pi b$.

Разрежем круговой цилиндр (3) по образующей, проходящей через точку M_0 (рис. 1), а затем развернем его на плоскость, касающуюся цилиндра вдоль этой образующей (не подвергая ни сжатиям, ни растяжениям). Тем самым цилиндр превратиться в бесконечную полосу ширины $2\pi a$. Линия разреза при этом будет представлена двумя параллельными прямыми, ограничивающими эту полосу (рис. 6), а винтовая линия γ, расположенная на цилиндре, после его разрезания распадется на бесконечное число равных частей. Именно, после развертывания цилиндра на плоскость витки линии γ «выпрямятся» в равные параллельные отрезки. При этом длина s витка линии γ будет равна длине этих отрезков:

$$s = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Примечание 1. В дифференциальной геометрии вводятся и изучаются *обобщенные винтовые линии*, которые чаще называют *линиями откоса.* Это такие пространственные линии, касательные которых образуют постоянный угол с некоторым фиксированным направлением.

Если через каждую точку линии откоса γ провести прямую фиксированного направления, то эти прямые будут образовывать цилиндрическую поверхность. При развертывании этой цилиндрической поверхности на плоскость линия откоса γ перейдет в кривую, пересекающую под постоянным углом параллельные прямые, в которые переходят ее образующие. Но такой кривой может быть только прямая. Поэтому линия откоса — это кривая, расположенная на цилиндрической поверхности, которая переходит в прямую при развертывании этой поверхности на плоскость. Более того, доказывается, что всякая линия на цилиндрической поверхности, обладающая указанным свойством, есть линия откоса.

Поскольку при развертывании поверхности на плоскость длина линий не меняется, то линия откоса на цилиндрической поверхности служит аналогом прямой на плоскости: кратчайшая дуга, соединяющая две точки цилиндрической поверхности, есть дуга линии откоса, проходящей через эти точки. (Наглядно такую дугу можно представить как резиновую нить, натянутую между точками поверхности.) Линии на поверхности, обладающие указанным свойством, называются *геодезическими.* Следовательно, *линии откоса на цилиндрической поверхности являются на ней геодезическими линиями.*

Задачи

1.1. Напишите параметрические уравнения цилиндрической винтовой линии с шагом, равным длине окружности содержащего ее цилиндра.

1.2. В среде GeoGebra создайте динамическую модель, демонстрирующую вычерчивание цилиндрической винтовой линии на поверхности соответствующего цилиндра.

1.3. Точка M одновременно участвует в двух движениях: 1) во вращении с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси l, 2) в перемещении вдоль этой оси со скоростью, пропорциональной пройденному пути. Найдите параметрические уравнения траектории точки M Создайте динамическую модель, демонстрирующую вычерчивание этой траектории и опишите ее форму.

1.4. Является ли линия $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ линией откоса?

1.5. При каких условиях линия $x = at$, $y = bt^2$, $z = ct^3$ является линией откоса?

2. Коническая винтовая линия

Пусть l и m — пересекающиеся неперпендикулярные прямые, O — точка их пересечения. *Конической винтовой линией* называют траекторию точки M, одновременно участвующей в двух движениях: 1) во вращении с постоянной угловой скоростью вокруг прямой l, 2) в перемещении с постоянной скоростью вдоль прямой m.

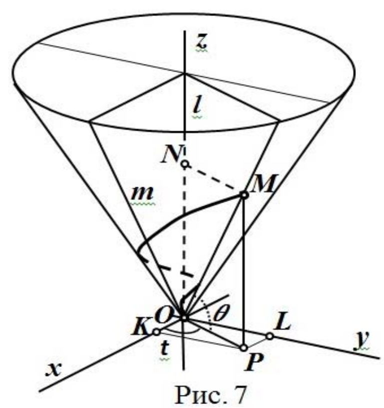


Рис. 7

Найдем параметрические уравнения конической винтовой линии. Прямая m при вращении вокруг прямой l опишет конус вращения с вершиной в точке O. Выберем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ так, чтобы ее начало совпадало с вершиной O конуса, ось Oz — с прямой l, а ось Ox лежала в плоскости прямых l и m (рис. 7). Угол, образованный прямой m с плоскостью Oxy, обозначим через θ.

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка конической винтовой линии γ, N и P — ее проекции соответственно на ось Oz и плоскость Oxy. Направленный угол между положительным направлением оси Ox и отрезком OP обозначим через t и примем за параметр точки M. Через b обозначим длину отрезка, на который переместится точка M вдоль прямой m за промежуток времени, в течение которого отрезок OP повернется вокруг точки O на один радиан. Тогда

$$MP = bt, \quad OP = \frac{b}{\operatorname{tg}\theta}t, \quad OK = \frac{b}{\operatorname{tg}\theta}t\cos t, \quad OL = \frac{b}{\operatorname{tg}\theta}t\sin t.$$

Поэтому, вводя обозначение $\dfrac{b}{\operatorname{tg}\theta} = a$, параметрические уравнения конической винтовой линии можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t, \\ z = bt, \end{cases} \tag{5}$$

где $-\infty < t < +\infty$.

Из первых двух уравнений следует, что $x^2 + y^2 = a^2t^2$. Откуда, возводя в квадрат третье уравнение, имеем: $z^2 = \dfrac{b^2}{a^2}(x^2 + y^2)$. Таким образом, конус, на котором расположена наша винтовая линия, имеет в системе координат $Oxyz$ уравнение

$$b^2(x^2 + y^2) - a^2z^2 = 0. \tag{6}$$

Векторное уравнение конической винтовой линии (5) имеет вид:

$$\vec{r}(t) = at\cos t\,\vec{i} + at\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}. \tag{7}$$

Динамический чертеж (рис. 8), демонстрирующий процесс вычерчивания конической винтовой линии (5) на конусе вращения (6), выполняется по аналогии с соответствующим чертежом для вычерчивания цилиндрической винтовой линии.

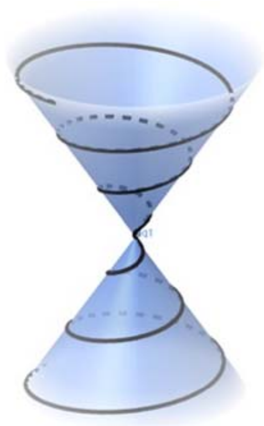


Рис. 8

Рис. 9

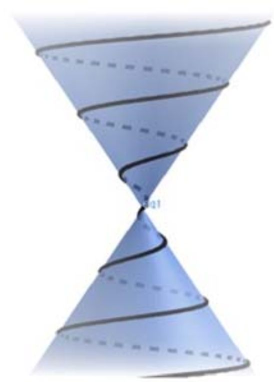


Рис. 10

Найдем проекцию конической винтовой линии (5) на координатную плоскость Oxy. Примем для этого точку O за полюс, а ось Ox за полярную ось полярной системы координат на плоскости Oxy; роль полярного угла при этом будет играть параметр t. Так как полярный радиус $\rho = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$, то из соотношения $x^2 + y^2 = a^2t^2$ заключаем, что $\rho = at$. Полученное уравнение в указанной полярной системе координат является уравнением спирали Архимеда [4]. Следовательно, проекцией винтовой линии (5) на координатную плоскость Oxy будет спираль Архимеда. Точнее, часть конической винтовой линии, расположенная выше плоскости Oxy, проектируется в правозакрученную спираль Архимеда, а часть, расположенная ниже плоскости Oxy, — в левозакрученную (рис. 9).

Выражая в (5) из третьего уравнения параметр t через z, из второго уравнения получим:

$$y = \frac{a}{b}z\sin\frac{z}{b}. \tag{8}$$

В системе координат $Oxyz$ это уравнение цилиндра, направляющей которого служит кривая (8), лежащая в плоскости Oyz (рис. 10), а образующие параллельны оси Ox. Таким образом, коническую винтовую линию можно рассматривать как линию пересечения прямого кругового конуса $b^2(x^2 + y^2) - a^2z^2 = 0$ и указанного цилиндра:

$$\begin{cases} b^2(x^2 + y^2) - a^2z^2 = 0, \\ y = \frac{a}{b}z\sin\frac{z}{b}. \end{cases}$$

Когда точка $M=(at\cos t, at\sin t, bt)$ конической винтовой линии (5) делает полный оборот вокруг оси l, она переходит в точку

$$M'=\big(a(t+2\pi)\cos(t+2\pi),\ a(t+2\pi)\sin(t+2\pi),\ b(t+2\pi)\big)=\\ =\big(a(t+2\pi)\cos t,\ a(t+2\pi)\sin t, b(t+2\pi)\big).$$

Вычисляя расстояние

$$|MM'|=\sqrt{4\pi^2a^2\cos^2 t+4\pi^2a^2\sin^2 t+4\pi^2b^2}=2\pi\sqrt{a^2+b^2},$$

видим, что коническая винтовая линия равномерно обматывает конус, на котором она расположена. Расстояние $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$ между точками M и M' соседних витков конической винтовой линии, лежащими на одной образующей конуса, называют *шагом* этой линии.

Выясним, наконец, пересекает ли коническая винтовая линия (5) образующие конуса (6), на котором она лежит, под постоянным углом. Для этого найдем косинус угла между направляющим вектором

$$\vec{m}=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}+b\,\vec{k}$$

образующей конуса и касательным вектором

$$\vec{r}'(t)=a(\cos t-t\sin t)\vec{i}+a(\sin t+t\cos t)\vec{j}+b\vec{k}$$

винтовой линии. Имеем:

$$\cos\left(\widehat{\vec{m},\vec{r}'(t)}\right)=\frac{a^2(\cos t-t\sin t)\cos t+a^2(\sin t+t\cos t)\sin t+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2(\cos t-t\sin t)^2+a^2(\sin t+t\cos t)^2+b^2}}=\\ =\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2(1+t^2)+b^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)+a^2t^2}}.$$

Отсюда следует, что величина угла между конической винтовой линией и образующими конуса, на котором она лежит, зависит от t, и значит, не является постоянной.

Задачи

2.1. Напишите параметрические уравнения конической винтовой линии, осью вращения которой является: а) ось Ox, б) ось Oy.

2.2. Выясните, является ли коническая винтовая линия линией откоса.

2.3. В среде GeoGebra создайте динамическую модель, демонстрирующую вычерчивание конической винтовой линии на поверхности соответствующего конуса.

2.4. Поверхность конуса с вычерченной на нем конической винтовой линией разрезана вдоль образующей конуса, а затем развернута на плоскость. Опишите образ винтовой линии при этом наложении.

3. Цилиндроконическая винтовая линия

Пусть снова l и m — пересекающиеся неперпендикулярные прямые, O — точка их пересечения. *Цилиндроконической винтовой линией* называют траекторию точки M, одновременно участвующей в двух движениях: 1) во вращении с постоянной угловой скоростью вокруг прямой l, 2) в перемещении вдоль прямой m со скоростью, пропорциональной расстоянию, пройденному от точки O.

Найдем параметрические уравнения цилиндроконической винтовой линии. Выберем прямоугольную декартовую систему координат $Oxyz$ так, чтобы ее начало совпадало с вершиной O конуса, описываемого прямой m, координатная ось Oz — с осью l конуса, а координатная ось Ox лежала в плоскости прямых l и m. При этом можно опять воспользоваться рисунком 7.

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка цилиндроконической винтовой линии γ, N и P — ее проекции соответственно на ось Oz и плоскость Oxy. Угол, образованный прямой m с плоскостью Oxy, по-прежнему обозначим через θ. Направленный угол между положительным направлением оси Ox и отрезком OP обозначим через t и примем за параметр точки M. Через r обозначим расстояние от точки M до точки O. Тогда

$$z = PM = r\sin\theta, \quad OP = r\cos\theta$$

и

$$x = OK = OP\cos t = r\cos\theta\cos t, \quad y = OL = OP\cos\theta = r\cos\theta\sin t.$$

По второму условию определения цилиндроконической линии скорость перемещения точки M вдоль прямой m пропорциональна величине r, т. е.

$$\frac{dr}{dt} = \lambda r,$$

где $\lambda = \mathrm{const}$, $\lambda \neq 0$. Отсюда $\dfrac{dr}{r} = \lambda\, dt$ и, следовательно, $r = Ce^{\lambda t}$. Поэтому

$$x = ce^{\lambda t}\cos\theta\cos t, \quad y = ce^{\lambda t}\cos\theta\sin t, \quad z = ce^{\lambda t}\sin\theta.$$

Вводя обозначения $a = c\cos\theta$, $b = c\sin\theta$, запишем искомые параметрические уравнения в виде

$$\begin{cases} x = ae^{\lambda t}\cos t, \\ y = ae^{\lambda t}\sin t, \\ z = be^{\lambda t} \end{cases} \tag{9}$$

где $\lambda = \mathrm{const}$, $-\infty < t < +\infty$.

Цилиндроконическая винтовая линия (9) лежит на конусе вращения (рис. 11), который в системе координат $Oxyz$ имеет уравнение

$$b^2(x^2 + y^2) - a^2z^2 = 0.$$

Проекцией линии на координатную плоскость Oxy является логарифмическая спираль (рис. 12). В самом деле, из уравнений $x = ae^{\lambda t}\cos t$, $y = ae^{\lambda t}\sin t$ следует, что

$$\rho = ae^{\lambda t},$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. В полярной системе координат с полюсом O и полярной осью Ox это уравнение логарифмической спирали [4].

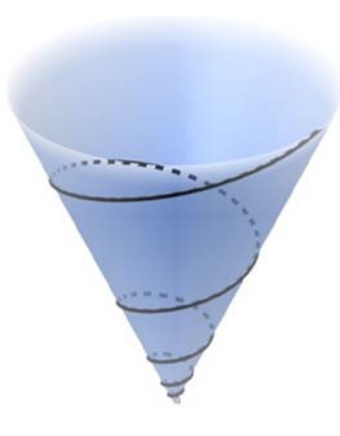


Рис. 11

Рис. 12

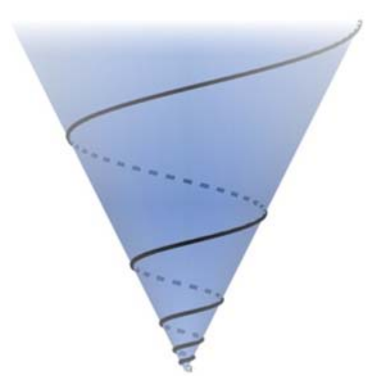


Рис. 13

Из сказанного заключаем, что цилиндроконическая винтовая линия (9) лежит на цилиндрической поверхности, у которой образующие параллельны оси Oz, а указанная спираль служит направляющей. Это позволяет наглядно осознать, чем «намотка» на конус цилиндроконической винтовой линии отличается от намотки конической винтовой линии. Траектория точки M, описывающей на конусе коническую винтовую линию, равномерно обматывает этот конус и проходит через его вершину, а траектория точки, описывающей цилиндроконическую винтовую линию, только асимптотически приближается к вершине конуса, а ее витки «уплотняются» по мере этого приближения (рис. 13).

Цилиндроконическая винтовая линия, в отличие от конической винтовой линии, пересекает образующие конуса, на котором она лежит, под постоянным углом. Действительно, линия имеет векторное уравнение

$$\vec{r}\,(t) = e^{\lambda t}\left(a(\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}) + b\,\vec{k}\right),$$

а ее касательный вектор в произвольной точке —

$$\vec{r}\,'(t) = \lambda e^{\lambda t}\left(a(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}) + b\vec{k}\right) + e^{\lambda t}a(-\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j}) =$$
$$= e^{\lambda t}\left(a(\lambda\cos t - \sin t)\vec{i} + a(\lambda\sin t + \cos t)\vec{j} + \lambda b\vec{k}\right).$$

Вычислим косинус угла между направляющим вектором

$$\vec{m} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + b\,\vec{k}$$

образующей конуса и вектором

$$\vec{l} = a(\lambda\cos t - \sin t)\vec{i} + a(\lambda\sin t + \cos t)\vec{j} + \lambda b\,\vec{k},$$

коллинеарным вектору касательной:

$$\cos\left(\widehat{\vec{m},\vec{l}}\right) = \frac{\lambda(a^2+b^2)}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{\lambda^2(a^2+b^2)+a^2}} = \lambda\sqrt{\frac{a^2+b^2}{\lambda^2(a^2+b^2)+a^2}}.$$

Откуда заключаем, что величина угла между цилиндроконической винтовой линией и образующими конуса, на котором она лежит, не зависит от t, и значит, является постоянной.

Задачи

3.1. Выясните, является ли цилиндроконическая винтовая линия линией откоса.

3.2. Найдите угол между цилиндроконической винтовой линией

$$x = e^{t/\sqrt{2}}\cos t, \quad y = e^{t/\sqrt{2}}\sin t, \quad z = e^{t/\sqrt{2}}$$

и образующими конуса, на котором она расположена.

3.3. В среде GeoGebra создайте динамическую модель, демонстрирующую вычерчивание цилиндроконической винтовой линии на поверхности соответствующего конуса.

3.4. Поверхность конуса с вычерченной на нем цилиндроконической винтовой линией разрезана вдоль образующей конуса, а затем развернута на плоскость. Опишите образ винтовой линией при этом наложении.

Литература

1. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. — М.: Физматгиз, 1958. — 244 с. (Серия «Классический учебник»).

2. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. — М.: URSS, 2014. — 432 с.

3. Розенфельд Б.А., Сергеева Н.Д. Стереографическая проекция. — М.: Наука, 1973. — 48 с. (Серия «Популярные лекции по математике»).

4. Савелов А. А. Плоские кривые: Систематика, свойства, применения. Справочное руководство. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. — 296 с. (Физико-математическое наследие: математика).

Клековкин Геннадий Анатольевич,
профессор кафедры высшей математики и информатики
Самарского филиала Московского городского
педагогического университета,
кандидат физико-математических наук, доцент.

E-mail: klekovkin_ga@mail.ru

Конструирование признаков равенства выпуклых n-угольников

Р. А. Акбердин, И. Б. Шмигирилова

В статье предложен единый подход к рассмотрению признаков равенства выпуклых многоугольников (в частности, признаков равенства треугольников), который позволяет разработать алгоритм для конструирования таких признаков.

При решении многих задач школьного курса геометрии используются признаки равенства треугольников. При этом традиционно используются три основных признака равенства треугольников. Для их обоснования используются прямые доказательства.

Использование такого подхода не позволяет ответить на вопрос, имеет ли вообще место признак равенства треугольников по заданному набору элементов. В предлагаемой статье рассматриваются общетеоретические вопросы, связанные с понятием равенства n-угольников и, в частности, выпуклых n-угольников, а также предложен подход, который дал возможность разработать алгоритм для конструирования признаков равенства выпуклых n-угольников.

В основе рассматриваемого подхода конструирования признаков равенства выпуклых n-угольников лежат понятия *зависимой*, *независимой* и *базисной систем элементов*, которые были введены по аналогии с соответствующими понятиями векторной алгебры.

Определим некоторые необходимые в дальнейшем понятия.

Определение 1. *Основными элементами* n-угольника F назовем его стороны (длины сторон) и внутренние углы (величины внутренних углов).

Определение 2. Отрезки (длины отрезков), углы (величины углов), а также площади n-угольника F и его частей, которые могут быть выражены (вычислены, построены) через его основные элементы, назовем *элементами* этого n-угольника F.

Следствие. *Основные элементы n-угольника F являются его элементами.*

Пример 1 F — треугольник ABC. Основные элементы треугольника: a, b, c — стороны (длины сторон) и α, β, γ — внутренние углы (величины внутренних углов). Элементы треугольника ABC: медианы (длины медиан) — m_a, m_b, m_c; высоты (длины высот) — h_a, h_b, h_c; биссектрисы (длины биссектрис) — l_a, l_b, l_c; радиусы (их длины) вписанной и описанной окружностей r и R и т.п.

Определение 3. n-угольник $F(A_1A_2\dots A_i\dots A_n)$ называется *равным* n-угольнику $F^*(B_1B_2\dots$ $\dots B_i\dots B_n)$ если равны их соответствующие основные элементы, т. е. соответствующие стороны и соответствующие внутренние углы.

Можно также ввести понятие равенства n-угольников с использованием понятия движения (перемещения) плоскости и доказать его эквивалентность введенному понятию равенства n-угольников через равенство соответствующих основных элементов.

Для исследования признаков равенства n-угольников введем еще ряд понятий.

Определение 4. Если $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k\}$, $k \geq 2$, — некоторая система (множество) элементов n-угольника F, то элемент α_i назовем *зависимым относительно системы* Σ для n-угольника F, если α_i можно выразить (вычислить) через остальные элементы этой системы. В противном случае элемент α_i назовем *независимым относительно системы* Σ для n-угольника F.

Пример 1. Пусть F — треугольник ABC. Система элементов треугольника $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, где $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$, $\alpha_3 = c$ — стороны треугольника, α_4— угол при вершине A, известно что $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, т. е. $\alpha_4 = \alpha$ — зависимый элемент относительно системы Σ для треугольника. Легко показать, что и любой другой элемент из Σ является зависимым.

Определение 5. Систему элементов Σ n-угольника F назовем *независимой*, если каждый из элементов α_i этой системы независим относительно системы $\Sigma \setminus \{\alpha_i\}$. В противном случае систему элементов Σ назовем *зависимой*.

Следствие 1. *Система, состоящая из одного элемента, является независимой.*

Пример 2. Система $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ (см. пример 1) треугольника ABC является независимой.

Следствие 2. *Если часть системы зависима, то и вся система зависима.*

Для исследования системы элементов заданного (построенного) n-угольника на зависимость можно воспользоваться следующим утверждением.

Теорема 1. *Если $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_i, \dots \alpha_k\}$, — некоторая система элементов n-угольника F и существует такой n-угольник F_i, для которого $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots \overline{\alpha_i}, \dots \alpha_k\}$ является соответствующей системой элементов, где $\alpha_i \neq \overline{\alpha_i}$, то элемент α_i независим относительно системы элементов Σ для n-угольника F.*

Доказательство. Обозначим $\Sigma_i^* = \Sigma \setminus \{\alpha_i\}$. Тогда Σ_i^* является общей системой элементов для F и F_i. Предположим, что элемент α_i зависим относительно Σ, т. е. α_i однозначно выражается через элементы Σ, тогда и для n-угольника F_i значение соответствующего элемента равно α_i, что противоречит тому, что $\alpha_i \neq \overline{\alpha_i}$.

Следствие. *Если для любого элемента α_i из Σ существует n-угольник F_i, удовлетворяющий условию теоремы 1, то система элементов Σ является независимой для n-угольника F.*

Пример 4. F — треугольник ABC, $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$, $\alpha_3 = c$ — стороны треугольника. Тогда $\Sigma_1 = \{\overline{\alpha_1}, \alpha_2, \alpha_3\}$, где $\overline{\alpha_1} \neq a$. Известно, что существует треугольник, в котором две стороны равны соответствующим сторонам треугольника F, а третья пара сторон не равна. Следовательно, система элементов $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ треугольника F является независимой.

Если задана независимая система элементов Σ n-угольника F, то при добавлении других элементов на некотором шаге получим зависимую систему. То есть существует максимальная по включению независимая система Σ для данного n-угольника F.

Определение 6. Независимую систему элементов Σ n-угольника F назовем *базисной*, если при добавлении любого другого элемента n-угольника F она становится зависимой. То есть Σ является максимальной по включению независимой системой элементов n-угольника F.

Пример 5. F — треугольник ABC (см. пример 4). $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ — независимая, но не базисная система элементов. $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ — базисная система элементов.

Понятие базисной системы элементов связано с понятием равенства n-угольников.

Определение 7. Если $\sum = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ является базисной системой элементов одновременно для n-угольников F и F^*, то назовем Σ *общей базисной системой элементов для F и F^*.*

Теорема 2. *Если n-угольники F и F^* имеют общую базисную систему элементов $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \dots, \alpha_k\}$, то они равны.*

Доказательство. Достаточно доказать, что у n-угольников F и F^* любой соответствующий элемент является общим, т. е. принимает одинаковые значения. Пусть α_j — соответствующий элемент для F и F^*. Возможны два случая: 1) $\alpha_j \in \Sigma$, тогда α_j принимает одинаковые значения для F и F^*; 2) $\alpha_j \notin \Sigma$. Тогда, так как Σ — базисная система элементов, то элемент α_j выражается через элементы Σ. А так как Σ — общая базисная система элементов для F и F^*, то α_j принимает одинаковые значения для F и F^*. Следовательно, n-угольники F и F^* равны.

Пример 6. Применив теорему для треугольника ABC (см. пример 4), где $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$, $\alpha_3 = c$, получим признак равенства треугольников по трем сторонам.

Следствие. *Всякая базисная система элементов n-угольника определяет признак равенства n-угольников.*

Легко доказать, что справедливо и обратное утверждение.

Теорема 3. *Если некоторая система элементов $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ определяет признак равенства n-угольников и является при этом минимальной по включению для любого n-угольника F, то Σ является базисной системой элементов.*

Доказательство. Достаточно доказать, что: 1) Σ является независимой системой элементов; 2) Σ является максимальной по включению независимой системой элементов.

1) Действительно, если предположить противное, т. е. некоторый элемент $\alpha_i \in \Sigma$ можно выразить через остальные элементы из Σ, то система элементов $\Sigma_i^* = \Sigma \setminus \{\alpha_i\}$ также определяет признак равенства n-угольников, что противоречит условию минимальности по включению для Σ.

2) Если предположить, что Σ не является максимальной по включению независимой системой элементов, т. е. существует такой элемент β n-угольника F, что $\Sigma^* = \Sigma \cup \{\beta\}$ остается независимой системой элементов, то элемент β нельзя выразить (вычислить) через элементы из Σ, а, следовательно, Σ не определяет признак равенства n-угольников.

Пример 7. Признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними задан системой элементов $\Sigma = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, где $\beta_1 = a$, $\beta_2 = b$, $\beta_3 = \gamma$. Σ является базисной системой элементов для любого треугольника.

Таким образом, задача «нахождения» признаков равенства n-угольников эквивалентна задаче нахождения базисных систем элементов n-угольника F.

Используя введенные понятия и доказанные предложения, можно предложить следующий алгоритм нахождения общих базисных систем элементов n-угольников.

1) Выбираем произвольный элемент α_1. Он определяет независимую систему элементов.

2) Выбираем некоторый элемент и добавляем к этой системе.

3) Используя теорему 1, проверяем вновь полученную систему на независимость. При этом возможны два случая:

а) эта система зависима, тогда система, полученная на предыдущем шаге, является базисной;

б) эта система не зависима, тогда продолжаем процесс ее наращивания (см. п. 2).

Ясно, что третий этап этого алгоритма трудно реализуем, т. е. трудно выяснить является ли полученная система зависимой или независимой. Если было бы известно число элементов в базисной системе, то третий этап можно реализовать. Но одна и та же система элементов может быть базисной для некоторого класса n-угольников, но не является базисной для всего класса n-угольников.

Пример 8. F — выпуклый четырехугольник, рис. 1 а), F^* — невыпуклый четырехугольник, рис. 1 б), $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$, где $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$, $\alpha_3 = c$, $\alpha_4 = d$, $\alpha_5 = l$. Тогда Σ является базисной системой элементов для выпуклых четырехугольников и не является базисной в классе всех четырехугольников, так как не определяет признак равенства четырехугольников.

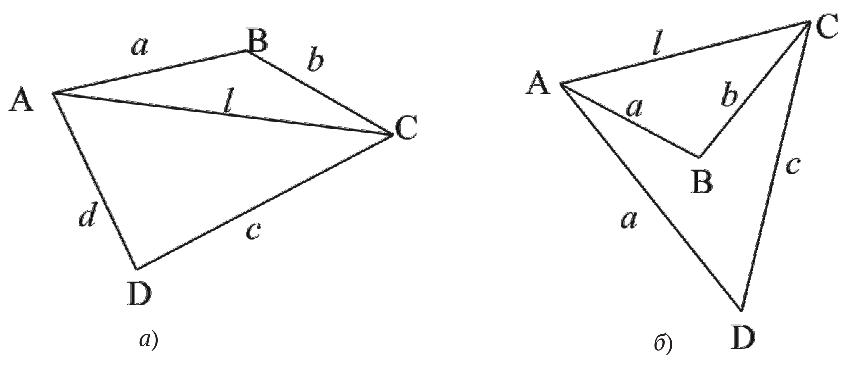


Рис. 1

В дальнейшем ограничимся классом выпуклых n-угольников.

Задача. Найти число элементов в базисных системах для выпуклых n-угольников.

Используя определение равенства n-угольников и признаки равенства треугольников, можем легко доказать следующее предложение, выражающее свойство и признак равенства выпуклых n-угольников.

Теорема 4. *Выпуклый n-угольник $F(A_1A_2\dots A_i\dots A_n)$ равен выпуклому угольнику $F^*(B_1B_2\dots B_i\dots B_n)$ тогда и только тогда, когда равны следующие пары соответствующих треугольников $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$, $A_1A_3A_4$ и $B_1B_3B_4$, $\dots$, $A_1A_{n-1}A_n$ и $B_1B_{n-1}B_n$.*

Доказательство. Необходимость. $\triangle A_1A_2A_3 = \triangle B_1B_2B_3$ по двум сторонам и углу между ними. Из равенства этих треугольников получаем, что $A_1A_3 = B_1B_3$ и $\angle A_2A_3A_1 = \angle B_2B_3B_1$. Тогда $\angle A_1A_3A_4 = \angle B_1B_3B_4$. Следовательно, $\triangle A_1A_3A_4 = \triangle B_1B_3B_4$ также по двум сторонам и углу между ними. Аналогично доказывается равенство других пар соответствующих треугольников.

Достаточность. 1) Из равенства соответствующих сторон пар соответствующих треугольников, получаем равенство сторон соответствующих n-угольников.

2) Из равенства $\triangle A_1A_2A_3 = \triangle B_1B_2B_3$ следует, что $\angle A_1A_2A_3 = \angle B_1B_2B_3$. Так как n-угольники выпуклые, то $\angle A_2A_3A_4 = \angle A_2A_3A_1 + \angle A_1A_3A_4$ и $\angle B_2B_3B_4 = \angle B_2B_3B_1 + \angle B_1B_3B_4$. Тогда и получаем равенство углов при вершинах B_2 и A_2. Аналогично можно доказать равенство углов при остальных соответствующих вершинах n-угольников.

Следствие. *Выпуклый n-угольник $F(A_1A_2\dots A_i\dots A_n)$ равен выпуклому n-угольнику $F^*(B_1B_2\dots B_i\dots B_n)$ тогда и только тогда, когда $\triangle A_1A_2A_3 = \triangle B_1B_2B_3$ и $(n-1)$-угольник $F(A_1A_3\dots A_n)$ равен $(n-1)$-угольнику $F^*(B_1B_3\dots B_n)$.*

Очевидно, что $(n-1)$-угольники F_1 и F_1^* также являются выпуклыми.

Для треугольников базисные множества элементов (признаки равенства) содержат 3 элемента. Тогда, используя для индуктивного перехода предыдущую теорему и следствие, методом математической индукции можно доказать следующее утверждение.

Теорема 5. *Всякая базисная система элементов выпуклого n-угольника содержит ровно$(2n-3)$ элемента, т. е. признаки равенства выпуклых n-угольников определяется ровно $(2n-3)$ элементами, образующими независимую систему элементов.*

Доказательство. Воспользуемся методом мат индукции по числу n — сторон выпуклых n-угольников.

1) При $n = 3$ это предложение верно, так как признаки равенства треугольников определяются $2 \cdot 3 - 3 = 3$ элементами.

2) Предположим, что предложение верно для $n = k$. Пусть заданы выпуклый $(k+1)-$угольник $A_1A_2A_3\dots A_{k+1}$ и равный ему выпуклый $(k+1)-$угольник $B_1B_2B_3\dots B_{k+1}$. Проведя диагонали A_1A_3 и B_1B_3, используя теорему 4, получаем, что $\triangle A_1A_3A_4 = \triangle B_1B_3B_4$ и выпуклый k-угольник $A_1A_3\dots A_{k+1}$ равен выпуклому k-угольнику $B_1B_3\dots B_{k+1}$ и обратно. Тогда система элементов определяет признак равенства (k+1)-угольников тогда и только тогда, когда они являются общими системами, определяющими признаки равенства треугольников и k-угольников. Но у этих систем есть общий элемент — сторона A_1A_3. Тогда признак равенства $(k+1)$-угольников определяется системой из $(2k-3)+2 = 2(k+1)-3$ элементов.

Пример 9. F — выпуклый четырехугольник. Базисная система элементов

$$\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$$

(см. пример 8). Число элементов $2 \cdot 4 - 3 = 5$.

Можно доказать и справедливость обратного утверждения.

Теорема 6. *Всякая независимая система элементов выпуклого n-угольника содержащая$(2n-3)$ элемента, является базисной, а следовательно, определяет признак равенства выпуклых n-угольников.*

Доказательство. Используем метод математической индукции по числу n сторон выпуклых n-угольников.

1) При $n = 3$ это предложение верно, так как для треугольников независимая система из $2\cdot3-3 = 3$ элементов определяет признак равенства.

2) Предположим, что предложение верно для $n = k$. Пусть задан выпуклый $(k + 1)$-угольник $A_1 \dots A_{k+1}$. Он разбивается на треугольник $A_1A_2A_3$ и выпуклый k-угольник $F(A_1A_3 \dots A_{k+1})$. Тогда из $2(k+1) - 3$ независимых элементов $(k+1)$-угольника F, 3 элемента определяют треугольник $A_1A_2A_3$. Тогда оставшиеся $(2k - 4)$ элемента вместе со стороной A_1A_3 треугольника $A_1A_2A_3$ образуют независимую систему $\sum_1$ из $(2k - 3)$ элементов k-угольника F_1. По предположению индукции $\sum_1$ определяет признак равенства выпуклых k-угольников. Тогда, по следствию из теоремы 4, Σ определяет признак равенства для выпуклых $(k+1)$-угольников.

Таким образом, для выпуклых n-угольников алгоритм нахождения базисных систем элементов (признаков равенства) реализуем. Более того, можно рассмотреть переборный алгоритм нахождения всевозможных базисных систем элементов для выпуклых n-угольников.

Если удалось найти некоторое множество базисных систем элементов выпуклых n-угольников, то можно расширить это множество, используя решение следующей задачи.

Задача. Для выпуклых n-угольников задана некоторая система его элементов $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-3}\}$. Необходимо выразить некоторый его элемент β через элементы из Σ.

При решении возможны два случая.

1) Элемент β выражается однозначно. В этом случае нельзя утверждать, что Σ является базисной системой элементов (определяет признак равенства).

Возможны два подслучая:

а) Элемент β в совокупности с какими-то $(2n - 4)$ элементами из Σ определяет ранее найденную базисную систему элементов (признак равенства), в этом случае Σ является базисной системой элементов;

б) ни один из наборов из $(2n - 4)$ элементов из Σ вместе с β не образует базисную систему элементов, в этом случае Σ не является базисной системой элементов.

2) Элемент β выражается не однозначно, в этом случае Σ не является базисной системой элементов.

Дадим теоретическое обоснование вышесказанному.

Теорема 7. *Если Σ система из $(2n - 3)$ элементов выпуклого n-угольника и некоторый его элемент β выражается через элементы из Σ однозначно, причем β в совокупности с какими-то $(2n - 4)$ элементами определяет ранее найденную базисную систему элементов $\sum^*$, то и Σ является базисной системой элементов этого выпуклого n-угольника.*

Доказательство. Достаточно доказать, что Σ определяет признак равенствавыпуклых n-угольников. Пусть F и F^* — два выпуклых n-угольника, для которых соответствующие элементы из Σ принимают одинаковые значения. Так как элемент β однозначно выражается через элементы из Σ, то и элемент β для F и F^* принимает одинаковые значения. Следовательно, элементы из $\sum^*$ принимают одинаковые значения. А так как по условию $\sum^*$ — базисная система элементов, то F и F^* равны и Σ является базисной системой элементов.

Теорема 8. *Если Σ система из $(2n-3)$ элементов выпуклого n-угольника и некоторый элемент β выражается через элементы из Σ не однозначно, то Σ не является базисной системой элементов (не определяет признак равенства выпуклых n-угольников).*

Доказательство этого предложения легко провести от противного.

Пример 10. F — треугольник ABC. $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, где $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$, — стороны, $\alpha_3 = \gamma$ — угол при вершине C, $\beta = c$ — сторона. По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, т. е. β выражается через элементы Σ однозначно. Система элементов $\Sigma^* = \{\alpha_1, \alpha_2, \beta\}$ является базисной. Следовательно, Σ также является базисной.

Пример 11. F — треугольник ABC. $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, где $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$, $\alpha_3 = \alpha$, $\beta = \beta$. По теореме синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Тогда $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$. Известно, что при заданных значениях a, b, α существует два значения $\beta \in (0;\pi)$, удовлетворяющих этому равенству. Следовательно, Σ не является базисной системой элементов треугольника ABC, следовательно, не определяет признак равенства треугольников.

Рассмотренный общий подход к конструированию признаков равенства n-угольников, реализованный в алгоритме, позволяет определять истинность суждений о равенстве выпуклых n-угольников и, в частности, треугольников не только по сторонам и углам, но и по другим его элементам. Полученные таким образом признаки равенства могут затем использоваться при решении задач. Реализацию предлагаемого алгоритма мы осуществили в ранее опубликован пособии [1], в котором были исследованы признаки равенства треугольников по различным комбинациям его элементов, основным (стороны и углы) и дополнительным (медианы, высоты, биссектрисы, периметр, площадь, радиусы вписанной и описанной окружностей). В пособии были рассмотрены два метода доказательства признаков равенства треугольников: конструктивный и аналитический.

В основе конструктивного метода проверки справедливости или опровержения предложений о равенстве n-угольников, в частности, треугольников, лежит использование задач на построение этих фигур по заданному набору элементов. Общепринятой, как известно, является четырехэтапная схема решения конструктивных задач, одним из этапов которой является исследование. Причем целью исследования является нахождение ответа на два вопроса: 1) при каком выборе данных задача имеет и, соответственно, не имеет решения; 2) сколько решений может иметь задача при том или ином выборе данных. Поэтому при использовании данного подхода для установления факта верности признаков равенства n-угольников по заданным элементам особую роль играет именно этот этап. Если при исследовании выясняется, что задача может иметь не более одного решения, тогда можно сделать вывод, что данный набор элементов определяет признак равенства (предложение о равенстве) n-угольников, в противном случае предложение о равенстве неверно. В том случае, когда задача при некоторых дополнительных ограничениях имеет не более одного решения, можно вести речь об ограниченном признаке равенства n-угольников. В пособии приведено исследование 123 возможных признаков равенства треугольников по различным комбинациям элементов. В 61 случае доказательство признака осуществлялось с использованием конструктивного подхода; в 57 случаях использовался аналитический метод. Для 5 случаев использовалось прямое доказательство.

Кроме того, рассмотренный подход к конструированию признаков равенства n-угольников был реализован для выпуклых четырехугольников [2]. В этой же работе приведены примеры решения задач с использованием сконструированных признаков равенства выпуклых четырехугольников.

Литература

1. Акбердин Р.А., Шмигирилова И.Б. Дополнительные главы элементарной геометрии. Признаки равенства треугольников: учеб.-метод. пособие — Петропавловск: СКГУ им. М. Козыбаева, 2016. — 205 с.

2. Акбердин Р.А., Шмигирилова И.Б. Признаки равенства выпуклых четырехугольников // Математика в школе. — 2013. — № 10. — С. 43–47.

Акбердин Рифкат Абдуллович
доцент, Северо-Казахстанский государственный университет
Петропавловск, Казахстан.

E-mail: akberdin47@mail.ru

Шмигирилова Ирина Борисовна
кандидат педагогических наук,
доцент, Северо-Казахстанский государственный университет.

E-mail: irinankzu@mail.ru

Конструктивное доказательство основной теоремы алгебры комплексных многочленов

В. В. Миронов, В. Д. Ситников, М. С. Защитин

Приводится новое доказательство основной теоремы алгебры многочленов на основе модернизации идеи Ж. Даламбера и Ж. Аргана. Это доказательство отличается от известных доказательств простотой, наглядностью и может быть использовано при численном поиске корня (конструктивное доказательство). Результат можно распространить с многочленов на некоторый более широкий класс комплексных функций. Приводится алгоритм, реализующий предложенный метод, создана программа на языке PascalABC и с ее помощью решено тестовое уравнение, подтверждающее состоятельность метода.

1. Введение

Основную теорему алгебры многочленов можно сформулировать так:

Теорема. *Любой (комплексный) многочлен степени* $n \geq 1$

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \tag{1}$$

с коэффициентами $(\forall i)\ a_i \in \mathbb{C}$ *имеет корень в поле комплексных чисел* $\mathbb{C}$.

Или, в равносильной формулировке, так:

Теорема. *Поле комплексных чисел* $\mathbb{C}$ *алгебраически замкнуто.*

Исторически первые формулировки теоремы и попытки ее доказательства приводились в частном случае действительных коэффициентов: $(\forall i)\ a_i \in \mathbb{R}$.

В данной работе проблема решена в общем случае комплексных коэффициентов. Частный случай действительных коэффициентов несколько ускоряет доказательство и упрощает алгоритм численного поиска корня в рамках предложенной информативной схемы. Термин «информативность доказательства» подразумевает (по определению), что доказательно отличается от известных доказательств конструктивностью (то есть возможностью использовать метод доказательства для численного поиска корня на ЭВМ), возможностью иллюстрировать пошаговое приближение численного значения корня к его точному значению, а также простотой и наглядностью (при интуитивном понимании последних терминов), имея также в виду, чем красивее результат, тем он вернее.

Основная теорема — это фундаментальный математический результат, которому многие выдающиеся математики посвятили исследования, доказывая и передоказывая теорему со всё возрастающей степенью строгости.

Вообще, переосмысление известных доказательств известных теорем находит в нынешнем математическом сообществе живой интерес (см., например, [1]). В этом контексте в данной заметке приведено ещё одно доказательство основной теоремы алгебры (комплексных) многочленов. Новое доказательство основано на модернизации идеи Ж. Даламбера и (независимо) Ж. Аргана (см., к примеру, [2]). Оно позволяет не только доказать существование корня, но и найти его численно (конструктивное доказательство). Более сложный вариант предлагаемой идеи можно найти в работе [3].

Представляется, что предлагаемый авторами новый вариант доказательства основной теоремы наиболее прост, нагляден, информативен (в интуитивном понимании простоты и наглядности) среди известных доказательств, что позволяет использовать его в образовательном процессе.

В той же технике результат распространен с многочленов на аналитические комплексные функции широкого класса.

2. Краткая история вопроса

Приведем вначале краткую историю вопроса (без которой подобная заметка потеряет эстетическую привлекательность), отдавая тем самым дань математикам не столь далекого прошлого. Более полно с историей вопроса, вынесенного в заголовок статьи, можно ознакомиться по работам [4–9].

По-видимому, впервые основная теорема встречается у немецкого математика П. Рота (Peter Roth). В 1608 г. им высказана гипотеза, что любой многочлен n-й степени может иметь (а не имеет!) не более n комплексных корней. В 1629 г. французский математик А. Жирар (Albert Girard) предположил уже, что полиномиальное уравнение степени n должно иметь ровно n корней, действительных или воображаемых (комплексных). Однако идеи и работы Рота и Жирара не получили широкой известности.

В 1637 г. Р. Декарт (René Descartes) пишет «...всякое уравнение может иметь столько же различных корней, или же значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений». Несколько позднее К. Маклорен (Colin Maclaurin) и Л. Эйлер (Leonhard Euler) (независимо) модернизировали эту формулировку: всякий многочлен с вещественными коэффициентами можно разложить в произведение линейных и квадратичных множителей с вещественными коэффициентами.

Ж. Даламбер (Jean Le Rond D'Alembert), по-видимому, первым в 1746–1748 гг. предложил уже доказательство этой теоремы (заметим, нестрогое). В 1749–1751 гг. было представлено, а затем и опубликовано доказательство Л. Эйлера (нестрогое).

Во второй половине XVIII в. предлагают свои доказательства Ж.Л. Лагранж (Joseph Louis Lagrange) и П.С. Лаплас (Pierre-Simon de Laplace) и некоторые другие математики. Анализ показывает, что и эти доказательства имели недосказанности и не отличались безупречной строгостью. Ввиду этого К.Ф. Гаусс (Johann Carl Friedrich Gauß) в 1799 г. предложил новое доказательство теоремы, впоследствии он дал ещё три доказательства, основанные на различных идеях.

Полагают, что первое полное и строгое доказательство было представлено Ж. Арганом в 1814 г. (Jean-Robert Argand — французский непрофессиональный математик швейцарского происхождения) на основе идей, схожих с идеей Ж. Даламбера. В 1816 г. К. Гаусс также опубликовал свое строгое доказательство.

Выдающийся российский, советский математик А.Н. Колмогоров (A.N. Kolmogorov), по воспоминаниям современников, также предложил доказательство теоремы, основанное на «чисто топологических» идеях, однако его авторство точно не установлено [10, 11].

Все ныне известные доказательства в той или иной степени используют топологические свойства функции $p(z)$. К «алгебраическим» доказательствам можно (с небольшой долей сомнений или даже возражений) причислить доказательство Э. Артина [12] на основе теории Галуа, а также его модернизированную и адаптированную версию, приведенную в работе [3].

В данной статье отчетливо просматривается связь науки с методикой ее преподавания в студенческой аудитории, что соответствует общему направлению сближения науки и ее преподавания, проводимому авторами в научных исследованиях, и отвечает современным тенденциям [13–20].

3. Известные доказательства

1. Для сравнения предлагаемого доказательства с известными, приведем доказательство (с небольшими изменениями), принадлежащее Ж. Даламберу и (независимо) Ж. Аргану [4].

Доказательство. Пусть, как и ранее в (1), $p(z)$ — многочлен степени $n \geq 1$. Тогда существует точка $a \in \mathbb{C}$, в которой модуль $|p(z)|$ достигает минимума.

Действительно, так как $|p(z)| \to \infty \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ при $z \to \infty \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, то $\inf_{z\in\mathbb{C}} |p(z)| = \inf_{z\in B} |p(z)|$, где B — замкнутый круг достаточно большого радиуса. Тогда нижняя грань $\inf_{z\in B} |p(z)|$ достигается в некоторой точке круга в силу его компактности.

Если $p(a) = 0$, то теорема доказана.

Предположим, что $p(a) \neq 0$. Заменяя (без ограничения общности доказательства) многочлен $p(z)$ на многочлен $f(z) = \frac{p(z+a)}{p(a)}$, сведем дело к случаю, когда $f(0) = 1$ и при этом (как нетрудно видеть) при всех комплексных справедливо неравенство $f(z) \geq 1$.

Представим многочлен $f(z)$ в виде $f(z) = 1 + a_k z^k + \dots a_n z^n$, где коэффициент $a_k \neq 0$. Пусть c — такое комплексное число (очевидно, существующее), что $c^k = -1/a_k$. Заменяя многочлен $f(z)$ (без ограничения общности доказательства) на многочлен $g(z) = 1 - z^k + \dots + a_n c^n z^n$, получим (при естественном обозначении), что $g(z) = 1 - z^k + b(z)$, где $b(z)$ — соответствующий многочлен, и $|g(z)| \geq 1$.

Очевидно, когда z стремится к нулю, значение $|b(z)|$ бесконечно мало по сравнению со значением $|z^k|$. В частности, если x — достаточно малое положительное действительное число, то $|b(x)| < x^k$. При таких x имеет место оценка: $|g(x)| = |1 - x^k + b(x)| \leq 1 - x^k + |b(x)| < 1$ — противоречие с ранее полученной оценкой: $|g(z)| \geq 1$. Поэтому $p(a) = 0$. Теорема доказана.

2. Приведем также доказательство В. Тихомирова [3а].

Доказательство. Пусть $p(z) = a_0 + a_1 z^1 + \dots + a_n z^n$ — полином степени n с комплексными коэффициентами, у которого $a_n \neq 0$. Рассмотрим вещественную функцию двух переменных $f(z) = |p(z)|$. Она непрерывна (докажите!). Покажем, что эта функция «растет на бесконечности» Действительно,

$$f(z) = |a_n||z|^n \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z}\right|.$$

Если величина $|z|$ достаточно велика, то модуль величины $\left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z}\right|$ меньше $\frac{1}{2}$ и, значит, $f(z) \geq \frac{|a_n||z|^n}{2}$, так что (при достаточно большом $|z| = R$) значение $f(z)$ станет больше $f(0)$. Отсюда следует, что минимум функции не может достигаться вне круга радиуса R с центром в нуле и, тем более, вне любого квадрата с центром в нуле, содержащего этот круг.

Но по теореме Вейерштрасса (для квадрата) непрерывная функция f должна достигать минимума в таком квадрате. Пусть это будет число α. Не ограничивая себя в общности, можно считать, что $\alpha = 0$ (иначе сделаем замену от α к $z - \alpha$). Итак, пусть достигает минимума в нуле.

Если $f(0) = 0$, то все доказано. Оказывается, что случай $f(0) > 0$ невозможен.

Лемма Даламбера: *минимум модуля алгебраического полинома степени* $n \geq 1$*, достигающийся в нуле, не может быть отличным от нуля.*

Действительно, пусть a_k — первый после нулевого отличный от нуля коэффициент полинома $p(z) = a_0 + a_1 z^1 + \dots + a_n z^n$ (мы предположили, что $f(0) = |a_n| > 0$, т. е. $a_n \neq 0$). Возьмем одно из решений уравнения $a_0 + a_k z^k = 0$ (это один из корней k-й степени из числа $-a_0 a_k^{-1}$. Обозначив это число через μ, а $t a_{k+1} \mu^{k+1} + \dots + t^{n-k} a_n \mu^n$ — через $g(t)$, получим тогда

$$|p(t\mu)| = \left|a_0 + a_k t^k \mu^k + a_{k+\mu^{k+1}} + \dots + a_n t^n \mu^n\right| = \left|a_0 - t^k(a_0 + g(t))\right| < |a_0| = |p(0)|$$

ибо при малых $t > 0$ имеем $|g(t)| < \frac{|a_0|}{2}$. Получили противоречие. Лемма и теорема доказаны.

4. Новое доказательство

Доказательство. Допустим, многочлен $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0$ не имеет корней в поле $\mathbb{C}$.

Как уже отмечалось, поведение действительной функции $|p(z)|$ в окрестности бесконечности расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ будет определяться поведением старшего члена z^n функции $p(z)$, для которого $z^n \to \infty$ при $z \to \infty$. Следовательно на компактной расширенной плоскости $\mathbb{C}^\infty$ найдётся точка $z_0 = z_0 + y_0 i \in \mathbb{C}$, в которой функция $|p(z)|$ достигает своего минимума и эта точка $z_0 \neq 0$. (Заметим, что точка $z_0 = z_0 + y_0 i$ здесь не вычисляется, факт ее существования достаточен.)

Условие 1. Без ограничения общности можно полагать, что точка экстремума z_0 не лежит на оси координат аффинной комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Действительно, в противном случае без нарушения свойства «иметь экстремум функции $|p(z)|$ в некоторой точке» график функции $|p(z)|$ можно сдвинуть (линейная замена переменных) так, что точка экстремума z_0 «исчезнет» с оси координат.

Работая «в рамках алгебры», придадим точке z_0 некоторое приращение $\Delta = \Delta x_0 + \Delta y_0 i$ и, воспользовавшись формулой бинома Ньютона $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n$, где обозначения традиционны, вычислим значение

$$\begin{gathered}
p(z_0 + (\Delta x + \Delta y i)) = \\
= \big\{(z_0^n + C_n^1(\Delta x + \Delta y i)^1 + \dots + C_n^{ni1}(\Delta x + \Delta y i)^{n-1} + (\Delta x + \Delta y i)^n\big\} = \\
= a_{n-1}\big\{z_0^{n-1} + C_{n-1}^1 z_0^{n-2}(\Delta x + \Delta y i)^1 + \dots + C_{n-1}^{n-2} z_0^1 (\Delta x + \Delta y i)^{n-2} + (\Delta x + \Delta y i)^{n-1}\big\} + \ldots + \\
+ a_2\big\{z_0^2 + C_2^1 z_0(\Delta x + \Delta y i)^1 + (\Delta x + \Delta y i)^2\big\} + a_1\big\{z_0 + (\Delta x + \Delta y i) + a_0\big\} = \\
= p(z_0) + \big\{C_n^1 z_0^{n-1} + C_{n-1}^1 z_0^{n-2} + \dots + C_2^1 z_0^1 + 1\big\}(\Delta x + \Delta y i)^1 + \\
+ \big\{C_n^2 z_0^{n-2} + a_{n-1} C_{n-1}^2 z_0^{n-3} + a_{n-2} z_0^{n-4} + \dots + a_2 C_2^2 z_0^2\big\}(\Delta x + \Delta y i)^2 + \ldots + \\
+ \big\{C_n^k z_0^{n-k} + a_{n-1} C_{n-1}^k z_0^{n-k-1} + \dots + a_k C_k^k z_0^0\big\}(\Delta x + \Delta y i)^k + \ldots + \\
+ 1 \cdot (\Delta x + \Delta y i)^n,
\end{gathered}$$

где (для упрощения записей) ξ_k — обозначение коэффициентов перед соответствующими членами (формами) k-ого порядка $(\Delta x + \Delta y i)^k$, при $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Пусть k — наименьший из индексов (что, очевидно, найдётся), когда $\xi_k \neq 0$. Тогда, возможно представление

$$p(z_0 + \Delta z) = p(z_0) + \xi_k(\Delta x + \Delta y i)^k + F_k, \tag{2}$$

где F_k — сумма всех членов, порядок которых относительно $(\Delta x + \Delta y i)$ строго больше k.

Формулу (2), очевидно, можно получить и средствами математического анализа, разложив полином $p(z)$ в окрестности (гипотетической) точки z_0 по формуле Тейлора ($p(z)$ — аналитическая функция на $\mathbb{C}$).

Будем далее выбирать приращения $(\Delta x, \Delta y)$ настолько малыми, что член F_k не будет оказывать влияние на знаки действительной и мнимой частей числа $\xi_k(\Delta x + \Delta y i)^k$, что очевидно, возможно.

Приняв условие 1, положим, что $p(z_0) = A + Bi$ и в рассматриваемом случае числа A и B отличны от нуля.

Случай 1. Пусть, для определённости $A < 0$ и $B < 0$. Представим число и приращение в тригонометрической форме (при соответствующих модулях и аргументах):

$$\xi_k = \rho(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0),\ \Delta x + \Delta y i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3}$$

Тогда (при очевидном обозначении),

$$\delta_k \stackrel{\text{def}}{=} \xi_k \cdot (\Delta x + \Delta y i)^k = \rho r^k[\cos(k\varphi + \varphi_0) + i\sin(k\varphi + \varphi_0)].$$

Нетрудно видеть, что за счёт выбора аргумента (что равносильно надлежащему выбору приращения Δz) комплексное число δ_k будет принадлежать 1-ой четверти комплексной плоскости:

$$0 < k\varphi + \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{-\varphi_0}{k} < \varphi < \pi 2 - \varphi_o k. \tag{4}$$

Тогда действительная и мнимая части $\Re\delta_k > 0$ и $\Im\delta_k > 0$ и, следовательно, за счёт надлежащего выбора приращения Δz значение $p(z_0 + \Delta z)| < |p(z_0)|$, что противоречит выбору точки z_0.

Случай 2 при $A < 0$ и $B > 0$; случай 3 при $A > 0$ и $B < 0$; а также случай 4 при $A > 0$ и $B > 0$ рассматриваются совершенно аналогично и по этой причине здесь не приводятся. Отличие этих случаев будет состоять в том, из какой четверти выбирать комплексное число δ_k (аналоги формулы (4)).

Итак, во всех возможных случаях найдется приращение Δz такое, что возможно уменьшение функции: $|p(z_0 + \Delta z)| \le |p(z_0)|$. *Теорема доказана.*

Замечание1. Если многочлен вида (1) имеет действительные коэффициенты, то легко показать, что для сопряженной точки $\bar{z} = x_0 - y_0 i$ значение $p(\bar{z}_0) = A - Bi$ и $p(\bar{z}_0)| = |p(z_0)|$. Следовательно, функция $p(z)$ достигает своего минимума и в точке $\bar{z}_0$ (не обязательно отличной от z_0). Это замечание позволяет сократить рассмотрение случаев с 4-х до 2-х и упростить численный поиск корня.

Замечание2. Условие 1 (сдвиг графика модуля многочлена $|p(z)|$) не является необходимым, от него можно отказаться. В самом деле, допустим, какое-то из чисел A или B равно нулю, пусть, для определённости, это будет B (число $A < 0$, по-прежнему).

Из условий (2), (4) вытекает, что угол φ можно выбрать таким (напомним, что параметр сколь угодно мал), что приращение $\rho r^k \sin(k\varphi + \varphi_0)$ к части $B = 0$ будет сколь угодно малым, а приращение $\rho r^k \cos(k\varphi + \varphi_0)$ достаточно большим (это достигается за счет сколь угодно близкого приближения приращения, находящегося в первой четверти, к действительной оси (Ox) и достаточного удаления от мнимой оси (Oy) и таким, что

$$|p(z_0 + \Delta z)| = \sqrt{\left(A + \rho r^k \cos(k\varphi + \varphi_0)\right)^2 + \left(\rho r^k \sin(k\varphi + \varphi_0)\right)^2} < \sqrt{A^2} = |p(z_0)|$$

что снова противоречит выбору точки z_0. Случай $A = 0$ разбирается аналогично (выбирается сколь угодно близкое приращение, находящееся в первой четверти, к мнимой оси (Oy) и достаточно удаленное от действительной оси (Ox)).

Конструктивная модернизация доказательства. Это «второе» доказательство состоит в модернизации первого. Дело в том, что выбор гипотетической точки минимума z_0 функции $|p(z)|$ в качестве «стартовой» точки доказательства не является необходимым.

В самом деле, пусть z_0 — уже любая выбранная (фиксированная) точка комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Если $p(z_0) = 0$, то корень найден. Если $p(z_0) = A + Bi \ne 0$, то повторим все рассуждения из предыдущего доказательства и для некоторого (конструктивно найденного) приращения $\Delta_1 z$ в точке $z_1 = z_0 + \Delta_1 z$ уменьшим модуль $|p(z_1)| < |p(z_0)|$. В этом повторении также рассматриваются все четыре случая из прежнего доказатенлства.

Условие 2. Существенно, что в конструктивном доказательстве из всех возможных приращений будем выбирать такое (т. е. выбирать его аргумент и его модуль, например, с использованием метода градиентного спуска [21]), для которого уменьшение целевой функции максимально, при этом комплексное число по-прежнему будет принадлежать «нужной» четверти.

Если $p(z_1) = 0$, то корень найден. Если $|p(z_1)| \ne 0$, то повторим рассуждения (и построения) и для некоторого приращения $\Delta_2 z$ в точке $z_2 = z_1 + \Delta_2 z$ уменьшим модуль $|p(z_2)| < |p(z_1)|$. И так далее, и так далее…

Возможны следующие две (и только две) ситуации:

1) За конечное число шагов описанного алгоритма (или процедуры) найдена точка $z_m = z_{m-1} + \Delta_m z$, в которой $|p(z_m)| = 0$ и, значит, корень $z = z_m$ многочлена $p(z)$ найден.

2) Существует (бесконечная) последовательность комплексных чисел $\{z_m\}$, $m = 1, 2, 3, \dots,$ в которых функция $|p(z_m)|$ монотонно убывает. Так как последовательность $\{|p(z_m)|\}$ ограничена снизу, то она имеет точную нижнюю грань $\inf\{|p(z_m)|\}$. Эта грань не может (как было доказано ранее) достигаться в бесконечно удалённой точке расширенной плоскости $\mathbb{C}^\infty$. Следовательно, в силу непре-

рывности и $|p(z)|$ плотности чисел в $\mathbb{C}$ значение будет достигнут некоторой точке $z^* \in \mathbb{C}$. Точка же z^* может быть вычислена с любой наперед заданной точностью.

По самой процедуре уменьшить значение $|p(z^*)|$ нельзя.

В самом деле, если $|p(z^*)| \neq 0$, то, продолжив построение последовательности приращений уже с точки $z^* \in \mathbb{C}$, построим точку $\mu \in \mathbb{C}$, в которой $|p(\mu)| < p(z^*)|$. Последнее означает, что на некотором шаге построения последовательности $\{z_m\}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ возможно большее (более длинное) уменьшение целевой функции $p(z)$. Что противоречит условию 2. Следовательно, $|p(z^*)| = 0$ и корень вычислен (с любой компьютерной точностью).

5. Случай произвольной функции

Основную теорему о корне многочлена легко распространить на случай широкого класса аналитических функций. А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть*

1) комплексная функция $f(z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости **C**,

2) ее модуль, функция $|f(z)|$, имеет минимум на плоскости **C** *в (конечной) точке z_0. Тогда уравнение $f(z) = 0$ имеет корень z_0.*

Доказательство становится уже упражнением ввиду вышеизложенного. В самом деле, представим (все обозначения сохраняются!) функцию рядом Тейлора

$$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + \xi_k(\Delta x + \Delta y\, i)^k + F_k, \tag{5}$$

где k — снова наименьший из индексов (что, очевидно, найдётся), когда $\xi_k \neq 0$, F_k — сумма (очевидно, сходящаяся) всех оставшихся членов ряда, порядок которых относительно $(\Delta x + \Delta y\, i)$ строго больше k.

Снова будем выбирать приращения $(\Delta x, \Delta y)$ настолько малыми, что член F_k не будет оказывать влияние на знаки действительной и мнимой частей числа $\xi_k(\Delta x + \Delta y\, i)^k$, что очевидно, возможно.

И далее без изменений по тексту пункта 4. Тем самым, теорему можно считать доказанной.

Важное замечание.

Схожие идеи доказательства можно увидеть в работе [3] Окунева Л.Я., а также в работе [3a] Тихомирова В. (приведено в пункте 3). Но есть существенные отличия:

1. В разделе «Модернизация доказательства» было показано, что выбор точки минимума модуля многочлена как "начальной точки" необязателен;

2. В работе [3] аргумент приращения выбирается определенным образом, чтобы в дальнейшем преобразовать неравенство. В разделе «Новое доказательство» было показано, что для каждого случая (подробно рассмотрен случай 1) можно подобрать множество значений для данного аргумента: они должны удовлетворять определенным условиям;

3. Предложенное доказательство в работе [3a] не является конструктивным, ведь в нем не описаны способы замены переменных z'.

6. Алгоритм нахождения корня многочлена

Шаг 1. Ввод значений (степень многочлена и его коэффициенты, начальная точка);

Шаг 2. Вычисление значения многочлена $p(z_0)$ и модуля многочлена в начальной точке $|p(z_0)|$;

Шаг 3. Пока $|p(z*)| > 10^{-8}$ делай:

начало

шаг 3.1. Вычисление приращения (выбор случая зависит от $p(z*) = A + Bi$):

1) случай $A > 0, B > 0$ (напомним введенные обозначения: $\xi_k = \rho(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_o); \Delta x + \Delta y i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$)

— нахождение φ (или $(\operatorname{Arg}\Delta z)$) по формуле: $\varphi = \frac{5\pi+4\varphi_0}{4k}$;

— вычисление приращения Δz:

а) вычисление «начального» приращения с использованием значения φ;

б) увеличение либо уменьшение приращения в зависимости от соотношения $p(z*)$, δ_k и F_k;

2) случай $A > 0, B < 0$

– нахождение φ по формуле: $\varphi = \frac{3\pi-4\varphi_0}{4k}$;

– вычисление приращения Δz аналогично первому случаю;

3) случай $A < 0, B < 0$

– нахождение φ по формуле: $\varphi = \frac{\pi-4\varphi_0}{4k}$;

– вычисление приращения Δz аналогично первому случаю;

4) случай $A < 0, B > 0$

– нахождение φ по формуле: $\varphi = \frac{7\pi-4\varphi_0}{4k}$;

– вычисление приращения Δz аналогично первому случаю;

5) случай $A = 0, B > 0$

– нахождение φ по формуле: $\varphi = \frac{3\pi-2\varphi_0}{2k}$;

– вычисление приращения Δz аналогично первому случаю;

6) случай $A = 0, B < 0$

– нахождение φ по формуле: $\varphi = \frac{\pi-\varphi_0}{k}$;

– вычисление приращения Δz аналогично первому случаю;

7) случай $A > 0, B = 0$

– нахождение φ по формуле: $\varphi = \frac{\pi-\varphi_0}{k}$;

– вычисление приращения Δz аналогично первому случаю;

8) случай $A < 0, B = 0$

– нахождение φ по формуле: $\varphi = \frac{2\pi-\varphi_0}{k}$;

– вычисление приращения Δz аналогично первому случаю;

шаг 3.2. Вычисление промежуточной точки $z*$, $p(z*)$, $|p(z*)|$;
конец

Шаг 4. Вывод результатов (заданный многочлен; начальная точка; значение многочлена в начальной точке; корень, найденный с заданной точностью; значение многочлена в найденной точке)

7. Тестовое уравнение

На языке PascalABC была создана программа, реализующая приведенный алгоритм, и решена тестовая задача. Вот ее результат.

```
Enter the degree of the polynomial:
N=3
Enter the coefficients a(n-1), . . . a(2), a(1), a(0): a(k)=a+b*i => “a(k)=a b”
a(2)=3 -5
a(1)=1 5
a(0)=2 7
Enter the start point: z(0)=x+y*i  => “z(0)=x y”
z(0)=0 0

Enter 1 to show computing or enter 0 to hide computing: 0
Please, wait. Computing is going now.

The root is founded; enter to see a result

The introduced polynomial:
p(z)=z^3+(3.0+i*(-5.0))*z^2+(1.0+i*(5.0))*z^1+(2.0+i*(7.0))
z0=0+i*(0); p(z0)=2+i*(7)
Number of steps: 950;
z*=-0.770708931609988+i*(0.198809059919098) p(z*)=3.42287492793858E-09=i*(8.38706437633618E-09)

Программа завершена, нажмите любую клавишу . . .
```

Литература

1. Aigner, M; Ziegler, G. Proofs from THE BOOK (4th ed.). — Berlin, New York: Springer-Verlag, 2009. (Айгнер М., Циглер Г. Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней /Пер. 4-го англ. изд. Б.И. Селиванова под ред. А.М. Зубкова. — 2-е изд., доп. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 288 с.: ил.)

2. D'Alembert. Recherches sur le calcul integral // Memoires de l'academie royale des sciences et des belles letters. — Berlin. — 1748. — Vol. 2. — P. 182–224.

3. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. — М.: Просвещение, 1966. — 336 с.

3а. Тихомиров В.М. Теоремы существования и основная теорема алгебры. // Квант. — 2005. — Вып. 4. — С. 2–7.

4. Башмакова И.Г. О доказательстве основной теоремы алгебры // Историко-математические исследования /Под ред. Г.Ф. Рыбкина, А.П. Юшкевича. — М.: Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1957. — Вып. X. — С. 257–304.

5. Математика XVII столетия // История математики /Под ред. А.П. Юшкевича, в 3-х томах. — М.: Наука, 1970. Т. II.

6. Тихомиров В.М., Успенский В.В. 10 доказательств основной теоремы алгебры // Математическое просвещение. — М.: МЦНМО, 1997. — № 1. — С. 50–70.

7. Алексеев В.Б. Теорема Абеля в задачах и решениях // Математ. просвещение. — М.: МЦНМО, 2001. — С. 192.

8. O'Connor J.J., Robertson E.F. The fundamental theorem of algebra / version for printing. — Mac Tutor History of Mathematics archive. School of Mathematics and Statistics. University of St.Andrews, Scotland, 1996.

9. Рыбников К.А. История математики (в 2-х томах). — М.: Изд-во моск. универ., 1963. — Т. 2. — С. 336.

10. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? — М.: Просвещение, 1967.

11. Сборник задач московских олимпиад. / Под ред. А.А. Лемана — М.: Просвещение, 1965.

12. Artin E. Galois Theory / 2nd Edition, With Additions and Revisions. — London; Notre Dame.: University of Notre Dame Press, 1964. — 86 p. (Артин Э. Теория Галуа / Пер. с англ. А.В. Самохина. — М.: МЦНМО, 2004. — 66 с.)

13. Миронов В.В. Информатизация образования: достижения и проблемы // Информатизация образования и науки. — 2017. — № 4 (36). — С 3–18.

14. Миронов В.В., Гришина В.В., Кузнецов А.В., Ципоркова К.А. Типовой расчет по алгебре. Учебное пособие. — Рязань: Book Jet, 2017. — 234 с.

15. Миронов В.В. Новый взгляд на неопределенный интеграл // Сборник трудов III Международной научно-технической и научно-методической конференции «Современные технологии в науке и образовании». — Рязань, BookJet, 2018. — Т. 5. — С. 108–111.

16. Миронов В.В. Построение средства тестирования обучающихся на основе системы автоматизированного проектирования баз знаний // Сборник трудов III Международной научно-технической и научно-методической конференции «Современные технологии в науке и образовании». — Рязань, BookJet, 2018. — Т. 4. — С. 218–224.

17. Миронов В.В., Аникеев С.В. Методологические основы построения программного комплекса синтеза проектных решений в задачах внедрения информационных систем расчетов с населением за жилищно-коммунальные услуги // Сборник трудов III Международной научно-технической и научно-методической конференции «Современные технологии в науке и образовании». — Рязань, BookJet, 2018. — Т. 4. — С. 224–228.

18. Миронов В.В. Один пример почти ассоциативной алгебры с бесконечной системой образующих тождеств // Сборник трудов III Международной научно-технической и научно-методической конференции «Современные технологии в науке и образовании». — Рязань, BookJet, 2018. — Т. 5. — С. 49–56.

19. Миронов В.В., Миронова К.В. Проектирование обработки корпоративных данных на основе системы бизнес-анализа QlikView // Сборник трудов III Международной научно-технической и научно-методической конференции «Современные технологии в науке и образовании». — Рязань, BookJet, 2018. — Т. 5. — С. 101–108.

20. Миронов В.В., Нелюхин С.А. Процедуры применения систем компьютерной алгебры Maple и Wxmaxima при изучении линейной алгебры // Информатизация образования и науки. — 2018. — Вып. 1(37). — С. 3–25.

21. Катулев А.Н., Северцев Н.А. Математические методы в системах поддержки принятия решений. — М.: Высшая школа, 2005. — 311 с.: ил.

Миронов Валентин Васильевич,
профессор кафедры высшей математики
Рязанского государственного радиотехнического
университета им. В.Ф. Уткина (РГРТУ),
доктор физико-математических наук.

E-mail: mironov1vv@mail.ru или *mironov.v.v@rsreu.ru*

Ситников Виктор Дмитриевич,
студент РГРТУ.

E-mail: sitnikovv1999@yandex.ru

Защитин Максим Станиславович,
студент РГРТУ.

E-mail: maksim.zashitin@yandex.ru

Проект «Математика — просто»: популяризация математики в интернете

Е. В. Губкина, Е. А. Кузьмичёв, М. А. Прохорович, А. В. Савватеев

Популяризация физико-математических отраслей знаний ведется в России на государственном уровне — так, например, в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской Академии Наук создана Лаборатория популяризации и пропаганды математики.

Однако, многое зависит и от энтузиастов-популяризаторов. В данной заметке мы коснемся вопроса о популяризации и расскажем о небольшой сети сообществ в социальных сетях, которые популяризируют математику в рамках случайно организовавшегося проекта “Математика — просто”. Отметим, что мы будем говорить про состояние проекта на сегодняшний момент, ибо, как нам кажется, он еще окончательно не сформировался и не обрел свой облик в мультимедийной сфере.

Начало проекта. Паблик VK “Математики шутят”

В 2013-м году Губкиной и Прохоровичем было основано небольшое сообщество (паблик) в VK, которое первоначально называлось “Истории мехмата БГУ” [1]. Сперва там публиковались некоторые забавные случаи из студенческой жизни и преподавательской практики, а руководителями (администраторами) паблика выступали студенты и преподаватели механико-математического факультета Белорусского государственного университета. Естественно, что основными подписчиками на тот момент были студенты вузов Минска и других городов Беларуси. Изначально группа была создана для привлечения абитуриентов на физико-математические специальности в целом и на мехмат БГУ в частности. В коротеньких заметках (постах) создатели и администраторы группы показывали будущим студентам, что математика — это занимательная, интересная наука. Профессионалы, начиная от уровня старших курсов мехмата и заканчивая кандидатами физико-математических наук, в популярной форме объясняли школьникам и студентам, для чего нужны логарифмы, дифференциалы и другая “непонятная и страшная математика”, где она применяется в жизни и для чего ее нужно учить, если она “в дальнейшем нигде не используется”.

В 2014-м году паблик был заброшен, некая существенная активность по его наполнению продолжилась лишь в 2015-м году. В этом же году произошел некий “ребрендинг”: сообщество было переименовано в “Математики шутят”. Фактически, на тот момент оно стало небольшим по численности агрегатором околоматематического юмора (но уже без привязки к конкретному университету либо факультету), что было удачным для паблика ходом и позволило избавиться от локализованности подписчиков и расширить тематику подходящего для публикации материала. Сообщество выросло до $\tilde{4}.000$ человек и получило более обширную по географии аудиторию: Минск – 31.86%, Москва – 12.81%, Санкт–Петербург – 8.24%, Екатеринбург – 2.80%, Казань – 2.58%, другие города в общей сложности – 41.71% [2]. На тот момент основной целью ведения паблика являлось “разоблачение антинаучной деятельности и популяризация науки и научного знания как неоспоримого свидетельства прогресса человеческой цивилизации” [3]. Очень уж раздражали администраторов и редакторов сообщества некомпетентные публикации в новостной ленте VK в стиле “а знаете ли вы, что число ПИ имеет ровно 1.000 000 000 000 000 000 знаков после запятой?”

В 2017-м году Прохорович познакомился с Савватеевым, и 22 мая того же года в Минске на базе мехмата БГУ (не без помощи рекламной кампании в паблике “Математики шутят”) удалось собрать на открытую “савватеевскую” лекцию более 250 человек (пришли студенты нескольких минских вузов, потенциальные абитуриенты, преподаватели и просто интересующиеся математикой слушатели) [4].

С этого момента основной упор деятельности в интернете был сделан именно на популяризацию, а не на борьбу со лженаукой. На сегодняшний день паблик «Математики шутят» насчитывает более 46.000 подписчиков и имеет следующую статистику по городам: Москва – 33.17%, Санкт-Петербург – 18.64%, Минск – 6.93%, Новосибирск – 3.88%, Екатеринбург – 3.75%, прочие города – 33.64%. За первые два месяца 2019-го года записи сообщества просмотрело более 100.000 пользователей (данная статистика автоматически генерируется VK и доступна с корректировкой по реальному времени в расширенном виде по ссылке [5]).

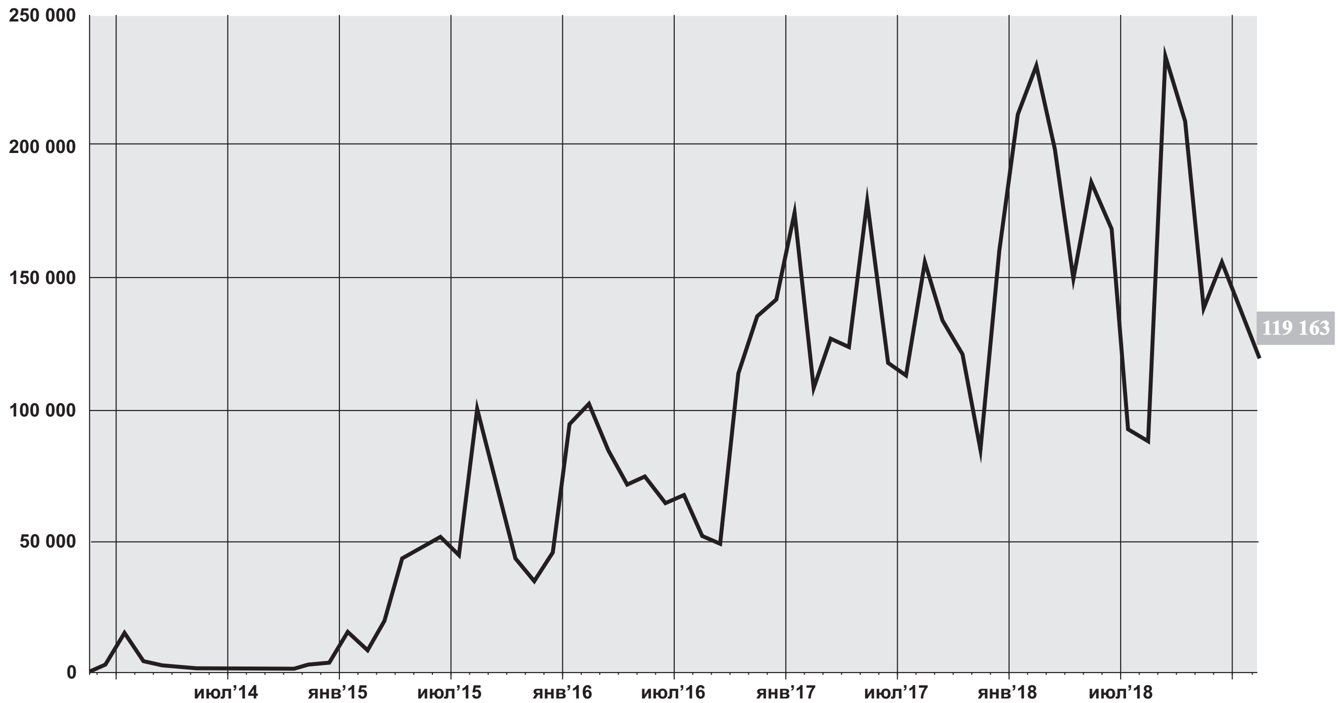


Рис. 1 Статистика охвата аудитории в паблике «математики шутят» по месяцам

Более того, в 2018-м году наша деятельность вышла за рамки VK и в настоящее время представляет собой то, что мы называем проектом “Математика —просто”. Лицом сети сообществ стал Савватеев, как наиболее известный из нашей команды “странствующий лектор”, посетивший только за 2018-й год около 50 городов.

“Математика – просто” (паблик VK и youtube-канал)

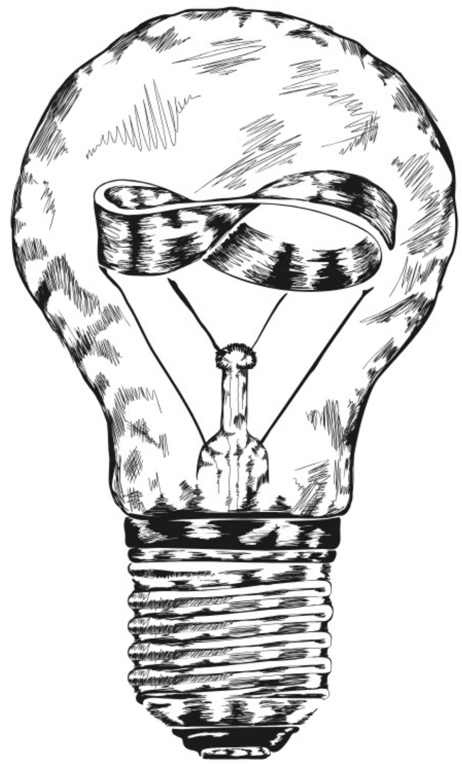


Рис. 2. Логотип проекта «Математика – просто»

Главным источником материала (контента) для проекта в 2018-м году стали видеолекции Савватеева. За год наш youtube-канал набрал более 20.000 подписчиков и более 600.000 просмотров, что является весьма неплохим результатом для группы энтузиастов и волонтеров и сравнимо с youtube-показателями многих достаточно крупных вузов. Паблик “Математика — просто” в VK в настоящее время фактически дублирует youtube-контент и является (как и паблик “Математики шутят”) инструментом привлечения аудитории на основную площадку, которой в настоящий момент является именно youtube-канал.

Основной контент сейчас содержит следующие категории материала:

“Лекции и выступления”. Это видеозаписи “полнометражных” популярных лекций. Основным лектором на сегодняшний момент является Савватеев, мы же (пользуясь печатной трибуной) приглашаем других популяризаторов к сотрудничеству. Однако, отметим, что

1) видеолекции не должны нарушать внутренние правила youtube,

2) мы оставляем за собой право не публиковать чужой материал на нашем канале без объяснения причин.

“Панматематика” — главный “содержательный” раздел. Фактически это авторский курс “савватеевских” лекций по математике для слушателей с нулевой математической подготовкой. Лекции начинаются со свойств целых чисел. Важнейшее из свойств — основная теорема арифметики — уже требует для своего осознания и строгого доказательства достаточно продвинутых идей. Эти идеи связаны с групповой структурой операции сложения целых чисел. К сожалению, мы не можем привести полную программу курса, так как в настоящее время он разрабатывается, корректируется и записывается.

Лекции курса Савватеева нумеруются натуральными числами. Однако, в сентябре 2018 к “Панматематике” присоединился Прохорович и стал записывать материал в “отрицательную сторону”. Целыми отрицательными числами стал нумероваться сборник софизмов. Вообще искать ошибки в рассуждениях — это не такое уж и простое упражнение, даже для сильных студентов. Более того, подобный материал будет полезен и преподавателям. Все софизмы достаточно подробно разбираются Савватеевым в подразделе “Панматематика. Разборы полетов”. Тут следует упомянуть основные печатные издания такого сорта — это сборники правдоподобных рассуждений и ошибочных доказательств [7, 8, 9]. Англоязычные версии софизмов записываются в раздел “thERRORems (theorems & errors)” (с пометкой “content in bad English”).

Также одним из основных разделов канала на настоящий момент является “Skillматематика”. В нем разбираются некоторые нестандартные для общеобразовательных школ задачи (от классических “с подвохом” до олимпиадных). Конечно, если бы на канале появился раздел по подготовке к ЕГЭ (ОГЭ, ЦТ), это наверняка бы позволило привлечь больше зрителей. Но в ближайшее время такого раздела не будет, так как мы считаем подготовку к ЕГЭ “побочным продуктом” проекта в том смысле, что если подписчик заинтересуется нашим проектом и разберется в предложенном лекционном материале, то самостоятельная подготовка к ЕГЭ не вызовет у него никаких трудностей.

Отметим, что в настоящее время канал активно развивается и привлекает все новых и новых подписчиков (на момент написания статьи их уже более 25.000). На конец февраля 2019 основная статистика была такова: нам удалось набрать 82.000 часов просмотра (это 9 лет и 128 дней), количество просмотров приблизилось к миллиону и (с учетом просмотров удаленного материала) составило более 950.000 со средним просмотром в минутах 5:09, записи канала прокомментировало более 8.700 пользователей. Отметку “нравится” поставило более 44.500 пользователей (отметок “не нравится” всего 2.154).

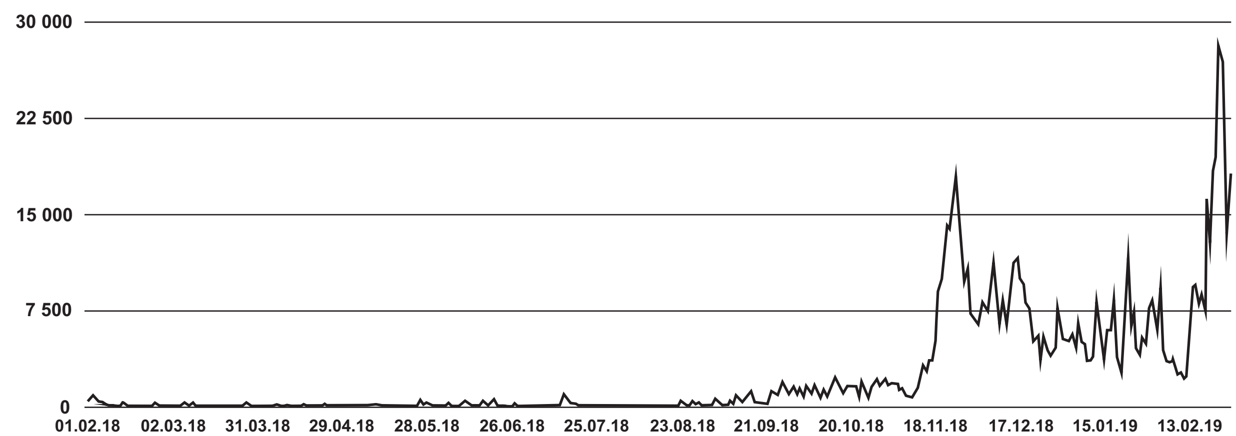


Рис. 3 Статистика количества просмотров youtube-канала «Математика – просто»

Сайт Савватеева

Помимо пабликов VK и youtube-канала, с 2018 года существует сайт [10], который является агрегатором контента из сети. Здесь представлены ссылки на все лекции Савватеева, которые удалось найти с помощью поисковых запросов. Кроме лекций приведены ссылки на уже завершенные проекты — такие, как книга “Математика для гуманитариев. Живые лекции”, а также online-курс “100 уроков математики”, прочитанный Савватеевым для Филипповской школы (описание курса приведено далее в отдельном параграфе данной заметки). Материал отсортирован и структурирован по мере возможностей. Тут же есть форма обратной связи и расписание всех ближайших лекций Савватеева по городам России.

История создания сайта примерно такова: все начиналось с идеи Кузьмичева “собрать все материалы Савватеева”. Ссылки на материалы хранились не структурно в текстовых файлах. С этой целью была написана программа на языке Perl, которая извлекла все ссылки из присланных файлов и внесла в базу данных SQLite.

После этого был создан PHP скрипт, выводящий ссылки на страницу, а также зарегистрирован домен [10], содержащий всю базу ссылок.

Вскоре было принято решение создать вторую версию сайта при помощи популярного web-фреймворка Laravel — он содержал объектный модуль для работы с базой данных, и была добавлена классификация и рубрикация.

Далее сайт был переведен на язык Python, являющийся стандартом в научной среде, и переписан при помощи фреймворка Django. Вместе с тем был опубликован исходный код проекта по адресу [11], что позволило волонтерам улучшать исходный код (были введены новые функции и исправлены некоторые недочеты).

Кроме того, была создана база данных с анонсами публичных лекций Савватеева, которая сейчас служит исходным проверенным источником информации по предстоящим лекциям. Связи в базе данных позволяют вести архив, в котором каждому событию (выступлению) сопоставляется видеозапись на youtube-канале. Эта система решает в реальном времени задачу сбора записей (пока только "савватеевских") выступлений, посвященных популяризации науки.

Также активно используется опция приглашения Савватеева в разные города с лекцией. Все заявки хранятся в базе данных, поэтому потерять или забыть о любой из них невозможно. Таким образом, можно отслеживать статус приглашений, и эффективнее планировать график выступлений.

В настоящее время сайт превратился в образовательный ресурс, где каждый может изучить математику "с нуля". Он играет роль отправной точки на другие ресурсы проекта, фактически расположенные в различных социальных сетях.

«100 уроков математики»: завершенный online-курс

Курс "100 уроков математики" был прочитан Савватеевым в рамках его преподавания в Филипповской школе (г. Москва). Чтение курса заняло чуть менее пяти лет (с марта 2014 по ноябрь 2018 года). В настоящее время видеоуроки расположены в открытом доступе на youtube-канале Филипповской школы и доступны по ссылке [12]. Несмотря на то, что чтение курса началось задолго до того, как в первом приближении сформировался наш проект, "100 уроков математики" можно однозначно считать его частью.

Перейдём к конкретике "савватеевской" программы. Она стоит "на трех китах":

I. Группы преобразований (в первую очередь, движений и подобий) простейших объектов (прямой, плоскости) и группа перестановок на n символах, а также общее понятие группы;

II. Арифметика остатков, вплоть до многочисленных следствий из основной теоремы арифметики (об однозначном разложении на простые множители в кольце целых чисел);

III. Комплексные числа и некоторые их подмножества, образующие кольцо, использование свойств делимости в этих кольцах для решения классических диофантовых уравнений.

При анализе всех свойств этих "китов" возникает необходимость работать со всеми математическими понятиями и концепциями, изучаемыми в школе (а также с гораздо более тонкими и продвинутыми построениями и правилами вывода). Поэтому, как уже отмечалось нами ранее, со сдачей ЕГЭ и ОГЭ у тех, кто проходит данную программу, не должно возникать каких бы то ни было проблем. Более того, опыт троих слушателей "100 уроков математики" намекает на то, что прохождение этой программы значительно улучшает результаты выступлений на олимпиадах.

Вступлением к "100 урокам математики" может служить программа Я.И. Абрамсона для начальных классов, особенно:

1. Натуральные числа, счет до 100 (а лучше до 1000). Системы счисления, операции в них (сложение, умножение). Обратные операции (вычитание и деление). Необходимость построения всех целых и всех дробных (рациональных) чисел.

2. Геометрические фигуры: треугольник, квадрат, окружность, круг, внутренность и граница на визуальном уровне. Визуальные длина и площадь, расстояние между точками, углы. Площадь

прямоугольника. Прямая линия как кратчайшее расстояние между точками. Уравнение прямой и окружности (это в дальнейшем обсуждается по мере необходимости).

3. Понятие о порядке на прямой. Больше-меньше для дробей. Операции с дробями (арифметические). Операция возведения в степень и обращение (операции извлечения корня и взятия логарифма). Правила работы с ними.

4. Принципы доказательств: от противного, математическая индукция, логические операции и кванторы логики, метод бесконечного спуска (эти и другие методы далее будут многократно всплывать и усваиваться).

5. Множества и подмножества, всевозможные операции над подмножествами. Отображение множеств и операция композиции, ассоциативность композиции любых отображений. Образы и прообразы. Количество отображений из одного конечного множества в другое. Факторизация и отношение эквивалентности (последнее всплывет в курсе 100 уроков — знакомства с этой конструкцией не предполагается).

Приведем же наконец поэтапную программу 100 уроков:

1. Числа, символы и фигуры.
2. Соизмеримость и несоизмеримость отрезков.
3. Визуальное представление бинома Ньютона.
4. Бесконечные суммы.
5. Начальные представления о движении.
6. Классификация движений прямой.
7. Таблица умножения движений прямой.
8. Движения окружности.
9. Таблица умножения движений окружности.
10. Конечные подгруппы движений прямой и окружности.
11. Введение в арифметику остатков.
12. Арифметика остатков.
13-14. Основная теорема арифметики.
15. Основная теорема арифметики: следствия.
16-18. Линейные уравнения.
19-20. Цепные дроби.
21-22. Перестановки.
23-24. Перестановки: циклы, четность, порядок.
25-26. Задачи на перестановки.
27-28. Группа Клейна.
29-30. Перестановки: деликатесы.
31-32. Движение плоскости.
33-34. Скользящая симметрия.
35-36. Комплексные числа.
37-38. Геометрия комплексных чисел.
39-40. Комплексные числа и их арифметика (повторение).
41-42. Умножение комплексных чисел.
43-44. Знакомство с Гауссовыми числами.
45-48. Основная теорема арифметики для Гауссовых чисел.
49-50. Пифагоровы тройки, общая формула.
51-52. Конечная арифметика. Теорема Безу.
53-54. Теорема о корнях многочленов.
55-56. Теоремы Виета, Вильсона и Ферма (малая).
57-58. Малая теорема Ферма: основное следствие. Теорема Вильсона.

59-60. Геометрия, арифметика и алгебра преобразований.
61-62. Классификация подобий прямой. Подобия плоскости.
63-64. Геометрия: обзор того, что было.
65-66. Векторы и действие группы подобий на них.
67-68. Линейные отображения прямой и плоскости.
69-70. Линейные отображения плоскости, окончание.
71-72. Координатная запись линейных отображений плоскости.
73-74. Матрицы: арифметика.
75-76. Группа квадратных невырожденных матриц.
77-78. Линейная алгебра, итоги.
79-80. Алгебраические числа, первое знакомство.
81-82. Алгебраические числа: минимальный многочлен.
83-84. Все про корень кубический из двух.
85-86. Теория построений циркулем и линейкой.
87-88. Вычисления на квадратичном калькуляторе.
89-90. Построение правильного 17-угольника.
91-92. Канторова теория множеств: первые наблюдения.
93-94. Вещественные числа: аксиома полноты.
95-96. Сечения Дедекинда и другие модели вещественных чисел.
97-98. Экспонента как решение функционального уравнения.
99-100. Комплексная и матричная экспоненты.

Благодарности

Прежде всего отметим, что если бы мы перечислили всех, кто внес свой вклад в развитие проекта, то этот список был бы длиннее текста данной заметки, однако третий автор считает необходимым отдельно поблагодарить Д.К. Мамия и Кавказский математический центр за приглашение и материальную поддержку на участие в “Неделе математики в Адыгее”, в рамках которой было обсуждено множество важных вопросов по развитию проекта “Математика — просто”.

Библиографический список

1. URL: https://vk.com/bsu_mmf_jokes

2. Прохорович М.А. Кто автор “Принципа Арнольда”? / Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образованияи: сборник статей международной конференции. / Барнаул: Издательство Алтайского государственного университета. - 2015. - С. 2053-2059.

3. Ворошилов А.А., Пономарева С.В., Прохорович М.А., Севрук А.Б. Популяризация естественнонаучного знания в социальных сетях / Лженаука в современном мире: медиасфера, высшее образование, школа: Сборник материалов Третьей Международной научно-практической конференции имени В.Л. Гинзбурга и Э.П. Круглякова, проходившей в Санкт-Петербургском государственном университете 26–27 июня 2015 г. / [редкол.: С.В. Тихонова (отв.ред.) и др.]. - СПб.: Изд-во ВВМ, 2015. - С. 33-40.

4. URL: https://youtu.be/I_JnVNIjKRY

5. URL: https://vk.com/stats?gid=61516226

6. URL: https://www.youtube.com/c/PunkMathematics

7. Дубнов Я.С. Ошибки в геометрических доказательствах. - М.: ФИЗМАТГИЗ, 1961.

8. Литцман В. Где ошибка? - М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.

9. Мадера А.Г., Мадера Д.А. Математические софизмы. - М.: “Просвещение”, 2003.

10. URL: https://savvateev.xyz/

11. URL: https://github.com/aeifn/savva3
12. URL: https://www.youtube.com/channel/UCkeWYPPkCTGvS_Nurt-sRtQ

Губкина Елена Владимировна,
доцент кафедры экономики, туризма и прикладной
информатики Горно-Алтайского государственного
университета (Горно-Алтайск),
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: helenvl@bk.ru

Кузьмичёв Егор Александрович,
магистрант кафедры прикладной математики,
информационных технологий и информационной
безопасности Адыгейского государственного
университета (АГУ, г. Майкоп).

E-mail: egor@kuzmichev.design

Прохорович Михаил Александрович,
доцент кафедры теории функций
механико-математического факультета
Белорусского государственного университета (Минск),
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: prohorovich@mail.ru

Савватеев Алексей Владимирович,
ведущий научный сотрудник Кавказского
Математического Центра АГУ,
профессор АГУ, профессор МФТИ,
ректор Университета Дмитрия Пожарского,
ведущий научный сотрудник Центрального
экономико-математического института РАН,
доктор физико-математических наук.

E-mail: hibiny@mail.ru

Научно-педагогическое наследие Г.Б. Гуревича. К 120-летию со дня рождения

Р. А. Мельников

В 2018 году исполнилось 120 лет со дня рождения известного отечественного математика, доктора физико-математических наук, профессора, крупного специалиста в области алгебраической геометрии Григория Борисовича Гуревича. К сожалению, имя этого талантливого математика редко упоминается в исследованиях как по истории математики, так и трудах, посвящённых истории математического образования в России. В статье реконструируются факты научной биографии и научно-педагогическое наследие учёного. Им были получены значимые результаты в разных частях геометрии (принимал деятельное участие в функционировании семинара по векторному и тензорному анализу; создал теорию тривекторов, продемонстрировал все их инварианты восьмого ранга, записал их через сумму элементарных тривекторов вполне определённого типа, а также произвёл полную классификацию). Много сил и времени Г.Б. Гуревич уделял вопросам совершенствования математического образования будущих учителей математики и принимал активное участие в создании учебной литературы для студентов и слушателей рабфаков.

Григорий Борисович Гуревич

Григорий Борисович Гуревич родился 6 июля 1898 г. в небольшом белорусском городке Горки Могилёвской губернии (ныне Горки – центр Горецкого района Могилевской области республики Беларусь). В возрасте пяти лет вместе с родителями переехал в Петербург. В 1907 г. поступил в гимназию города на Неве, которую с отличием окончил в 1915 г., получив за успехи в обучении золотую медаль. В том же году юноша выдержал вступительные испытания на физико-математическом факультете Петербургского университета и стал студентом.

В 1918 г. семья Гуревичей переехала в город Козлов (ныне Мичуринск Тамбовской области), тем самым Григорий был вынужден прервать получение высшего образования. Далее в течение двух лет он служил в рядах Красной Армии. Лишь осенью 1920 г. молодому человеку удалось продолжить своё обучение в вузе, его зачислили на физико-математический факультет Саратовского университета, который он успешно окончил в 1921 г. Сразу после получения диплома Григорий Борисович приступил к преподавательской деятельности. С 1922 г. он работал в г. Минске, позже перебрался в Москву, где обучал студентов в МИИТе [18, С. 193].

В период с 1925 г. по 1929 г. был аспирантом кафедры дифференциальной геометрии Московского университета. Начиная с 1927 г., Г.Б. Гуревич становится активным участником семинара по векторному и тензорному анализу, организованного известным геометром В.Ф. Каганом (1869–1953). Эта его деятельность (на протяжении 26 лет) привела к тому, что позже он стал учёным секретарём этого научного мероприятия. Тем самым он активно участвовал в управлении работой семинара. Благодаря его усилиям на этом посту были опубликованы 20 выпусков трудов семинара.

Первая печатная работа будущего учёного – "О применении теоремы Стокса к установлению интегрируемости дифференциальных уравнений" [8], вышедшая в свет в 1927 г. до его прихода на семинар Кагана, была весьма далека от той научной сферы, в которой он заработал научный авторитет. В 1930 г. в стенах МГУ он успешно защитил кандидатскую диссертацию на тему "О некоторых интегральных задачах тензорного анализа". В 1932 г. Григорию Борисовичу присвоено учёное звание профессора. Дальнейшие научные изыскания учёного были сосредоточены в области приложений алгебры к вопросам геометрии. "Через всю его научную жизнь проходит изучение тривектора, т.е. кососимметрического трехвалентного тензора" [4, С. 16]. Результатом трудов учёного в этом направлении стала защита докторской диссертации "Алгебра тривектора" (1937). В этом исследовании автор разработал теорию тривекторов, записал их все через сумму элементарных тривекторов вполне определённого типа, а также произвёл их полную классификацию. В дальнейших трудах он изучал общие ковариантные тензоры, рассмотрел аффиноры, сохраняющие тривектор, а затем с их помощью привёл тривектор к каноническому виду.

После защиты докторской диссертации Г.Б. Гуревич стал востребованным преподавателем. Продолжая преподавать в МИИТе (1922-1941), он стал подрабатывать на кафедре геометрии Московского индустриально-педагогического института им. К. Либкнехта (1938–1943). С 1943 по 1950 гг. — в Московском механическом институте боеприпасов Народного комиссариата боеприпасов, с 1950 по 1956 г. заведовал кафедрой высшей математики в Тульском механическом институте. С 1956 г. до выхода на пенсию (в 1975 г.) работал в должности профессора кафедры геометрии математического факультета МГПИ им. В.И. Ленина.

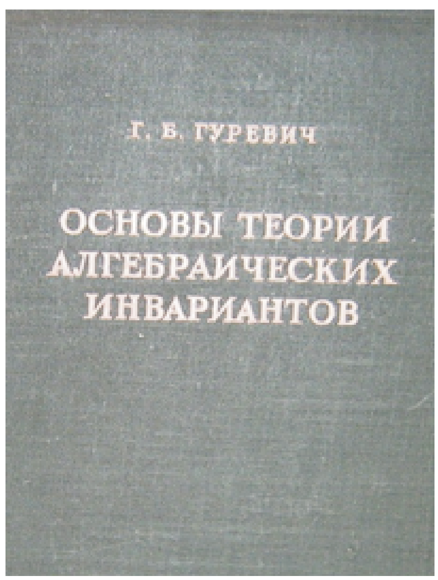
Ещё во времена работы в Туле (вероятно под влиянием местной алгебраической школы, ядро которой составляли выпускники МГУ) в область научных интересов Григория Борисовича вошло ещё одно направление – "изучение матричных алгебр Ли, нормализаторы которых — главные алгебры" [18, С. 194]. Цикл его исследований в этом направлении открывает статья "Квазилиевы алгебры" [10]. "Им получено полное описание стандартных алгебр, состоящих из нильпотентных матриц ("стандартных нуль-алгебр"); доказана глубокая теорема об условиях их изоморфизма как (абстрактных) алгебр Ли; изучены алгебры их дифференцирований и полухарактеристические подалгебры" [18, С. 194]. Результаты, полученные в этом направлении изложены в цикле статей [11], [12], [14], посвящённых метабелевым алгебрам Ли, где главным аспектом исследования выступает проблема дифференцирования этих алгебр. Финальным аккордом стала статья [15].

В 60-х гг. Григория Борисовича стали привлекать для экспертизы кандидатских диссертаций аспирантов смежной кафедры (методики преподавания математики) МГПИ им. В.И. Ленина. Эта кафедра получила всесоюзную известность и стала своеобразным центром притяжения для соискателей учёной степени кандидата педагогических наук. В это же время он вёл семинары для аспирантов: "Методы изображений", "Геометрические построения на плоскости" и др. Спустя некоторое время он стал экспертом ВАК.

Активная преподавательская деятельность Г.Б. Гуревича естественным образом стимулировала его к написанию монографий и учебных пособий, направленных на облегчение студентам понимания сложных математических конструкций.

Первым его методическим трудом стало учебное пособие "Математика для рабфаков", которое состояло из двух частей, и было опубликовано (в соавторстве) в 1926 г. Этот труд стал результатом первого опыта молодого педагога, который он приобрёл ещё в Минске до поступления в аспирантуру.

Для этого издания характерны ясное и лапидарное изложение теории, безукоризненно отобранные примеры, чётко выстроенная система упражнений, включающая немалое число практико-ориентированных задач. Методической особенностью этого пособия является грамотное сочетание арифметико-алгебраического и геометрического материала. Особо подчеркнём, что такой подход до сих пор используется при конструировании содержания учебников математики, предназначенных для 5-6 классов общеобразовательных школ.



Обложка книги Г.Б. Гуревича

В 1936 и 1938 гг. он был одним из авторов задачника по векторной алгебре [19], [20], целевой аудиторией которого были студенты инженерных специальностей.

Первым трудом, сопряжённым с научной работой Григория Борисовича, стала монография "Основы теории алгебраических инвариантов" [9]. В русской алгебраической литературе книги подобного масштаба, посвящённой теории алгебраических инвариантов, ещё не было. До её появления был лишь труд [1] В.Г. Алексеева (1866–1943), изданный в конце XIX века в г. Юрьев (ныне Тарту). Очевидно, что за истекшие пять десятилетий математическая наука шагнула далеко вперёд и книга Г.Б. Гуревича была призвана преодолеть эту пропасть.

В своей книге Григорий Борисович, используя классические методы, построил изложение материала на языке тензорной алгебры, сопроводив его большим числом примеров и упражнений. Ему удалось получить окончательную ясность в вопросе, касающемся использования символики Арангольда. Книга получила всеобщее признание и в 1964 г. была переиздана на английском языке.

Многолетняя работа в педагогическом институте подтолкнула Г.Б. Гуревича к написанию учебных пособий по различным разделам геометрии. Обладая богатой математической и общей эрудицией, Григорий Борисович был наделен редким даром делать сложные вещи простыми и доступными. Таковым, например, является его учебное пособие [13]. Отличительной особенностью этой книги явилось то, что автор построил курс проективной геометрии на аксиоматической основе. Это пособие удостоилось чести быть переведённым на японский язык.

Г.Б. Гуревич не обошёл стороной и вопросы преподавания математики в школе. В 1962 г. на страницах журнала "Математика в школе" была опубликована его статья "О терминологии начальной алгебры", в которой автор дал ряд ценных методических советов по вопросам преподавания алгебры. Основным тезисом автора является его позиция о недопустимости проведения аналогий в арифметической и алгебраической терминологии. Он утверждает: "...первым среди преобразований целых алгебраических выражений, изучаемых в начальной алгебре, должно быть приведение одночлена к каноническому виду; здесь необходимы многочисленные упражнения, так как надо добиться, чтобы эта операция была усвоена в совершенстве" [21, С. 40]. Далее автор говорит: "Естественно, что следующим преобразованием должно явиться приведение многочлена к каноническому виду; оно состоит в представлении всех членов многочлена в таком же виде и в приведении подобных членов. Здесь учащимся становится ясным, зачем надо проводить одночлены к каноническому виду; полезность этой операции может быть пояснена и ранее на числовых примерах, особенно, если использовать таблицы квадратов и кубов" [21, С. 40].

Нельзя недооценивать вклад Г.Б. Гуревича в перестройку преподавания геометрии в педвузах, как реакцию на провал колмогоровской реформы. В рамках этой деятельности им совместно с известным педагогом-геометром Л.С. Атанасяном (1921–1998) были написаны пособия и учебники [2]. Опыт сотрудничества с Левоном Сергеевичем он приобрёл ещё во времена работы над пособиями [23], [24], [25].

Григорий Борисович часто выступал редактором научных изданий, среди которых особо следует выделить [3], [5], [6], [7].

Среди его работ есть и статьи по методике преподавания математики в вузе, например, [16], [17].

О человеческих качествах Г.Б. Гуревича можно судить по словам людей, которые работали с ним плечом к плечу: "Это была открытая, глубоко благожелательная натура, излучавшая непосредственную, можно сказать, простодушную доброту. Это лежало в самой основе его личности и сочеталось с глубокой принципиальностью и честностью" [22, С. 4].

В заключение скажем, что Григорий Борисович участвовал в Великой Отечественной войне, был задействован в народном ополчении.

Г.Б. Гуревич скончался 20 мая 1980 г.

Остается надеяться, что обращение к научно-педагогическому наследию Г.Б. Гуревича в год 120-летия со дня рождения математика поможет молодому поколению учёных осознать масштаб его личности, чтобы самим постараться оставить след в науке.

Литература

1. Алексеев В.Г. Теория рациональных инвариантов бинарных форм в направлении Софуса Ли, Кэли и Арангольда. – Юрьев, 1899. – 232 с.

2. Атанасян Л.С., Гуревич Г.Б. Геометрия: учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов. Ч. 2. – М.: Просвещение, 1976. – 417 с.

3. Бальдус Р. Неевклидова геометрия: гиперболическая геометрия на плоскости / под ред. Г.Б. Гуревича; перевод с нем. Н.В. Ефимова. – М.: ГИТТЛ, 1933. – 147 с.

4. Васильева М.В., Ефимов Н.В., Рашевский П.К. Григорий Борисович Гуревич (к восьмидесятилетию со дня рождения) // УМН. - 1979. - том 34. - выпуск 2 (206). - С. 241-242.

5. Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии: сборник статей / под ред. Г.Б. Гуревича. – М.: МГПИ им. В.И. Ленина, 1963. – 407 с.

6. Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии: сборник статей / под ред. Г.Б. Гуревича. – М.: МГПИ им. В.И. Ленина, 1965. – 445 с.

7. Геометрия однородных пространств: сборник трудов / под ред. Г.Б. Гуревича. – М.: МГПИ им. В.И. Ленина, 1973. – 210 с.

8. Гуревич Г.Б. О применении теоремы Стокса к установлению интегрируемости дифференциальных уравнений // Труды Всероссийского математического съезда. – М., 1927. – С. 245-246.

9. Гуревич Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 408 с.

10. Гуревич Г.Б. Квазилиевы алгебры // Труды механического института. – Тула, 1951. – С. 3-5.

11. Гуревич Г.Б. О некоторых свойствах алгебраических линейных групп Ли // Доклады Академии наук. - № 94. – 1954. – С. 177-178.

12. Гуревич Г.Б. Стандартные алгебры Ли // УМН. - 1955. – том 10. - выпуск 1 (63). – С. 204-205.

13. Гуревич Г.Б. Проективная геометрия. - М.: Физматгиз, 1960. - 320 с.

14. Гуревич Г.Б. О некоторых свойствах метабелевых алгебр Ли // Доклады Академии наук. - № 138. – 1961. – С. 998-1001.

15. Гуревич Г.Б. О метабелевых алгебрах Ли // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. - № 12. – 1962. – С. 9-61.

16. Гуревич Г.Б. Некоторые формулы из теории подстановок // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. - 1967. – № 13. – С. 44-53.

17. Гуревич Г.Б. Отношение двух отрезков; измерение отрезков // Учёные записки МГПИ им. В. И. Ленина. - 1967. – № 271. – С. 415-419.

18. Ефимов Н.В., Рашевский П.К. Григорий Борисович Гуревич (к семидесятилетию со дня рождения) // УМН. - 1968. – том 23, выпуск 5 (143). – С. 193-198.

19. Задачи по векторной алгебре / под ред. проф. Г.Б. Гуревича. – М.: МИИТ им. И.В. Сталина, 1936. – 18 с.

20. Задачи по векторной алгебре / под ред. Г. Б. Гуревича. – 2-е изд., доп. – М.: МИИТ им. И.В. Сталина, 1938. – 32 с.

21. Гуревич Г.Б. О терминологии начальной алгебры // Математика в школе. - 1962. – № 6. - С. 39-44.

22. Памяти Григория Борисовича Гуревича // Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике МГУ им. М.В. Ломоносова / под. ред. проф. П.К. Рашевского. – М.: Издательство Московского университета. – Вып. 20. – 1981. – С. 3-4.

23. Атанасян Л.С., Гуревич Г.Б. и др. Сборник задач по элементарной геометрии: пособие для педагогических институтов. - М.: Учпедгиз, 1958. – 95 с.

24. Атанасян Л.С., Гуревич Г.Б. и др. Сборник задач по элементарной геометрии: пособие для педагогических институтов. – 2-е изд. – М.: Учпедгиз, 1964. – 96 с.

25. Атанасян Л.С., Гуревич Г.Б. и др. Сборник задач по элементарной геометрии: пособие для педагогических институтов. – 3-е изд. – М.: Учпедгиз, 1970. – 96 с.

Мельников Роман Анатольевич,
доцент кафедры математики и методики
её преподавания Института математики,
естествознания и техники Елецкого
государственного университета им. И.А. Бунина,
кандидат педагогических наук.

E-mail: roman_elets_08@mail.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2019 год (включая стоимость пересылки) – 150 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2019 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 100 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >