ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцать третий

№ 1 (89)

январь – март 2019 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№1 (89), 2019 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2019 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 22.04.2019 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (89), январь – март 2019 г.

Содержание

Учащимся и учителям средней школы

В. К. Гаврилов. Пропорциональные отрезки, многоугольник и прямые Чевы в круге 2

С. В. Дворянинов. О невозможности построения центра окружности одной линейкой 9

А. М. Иглицкий. Две заметки по геометрии 13

Студентам и преподавателям математических специальностей

В. Ю. Бодряков, А. А. Быков. История гиперболических функций: их изучение и некоторые приложения (окончание) 22

В. Г. Ильичев. Теория вероятностей и основной вопрос преферанса 32

Е. Г. Смольянова. Применение инвариантов при инволюционном преобразовании треугольников 38

А. Ю. Эвнин. Задачи математического конкурса в ЮУрГУ. II 43

С. В. Шведенко. К выводу «первого замечательного предела». II 57

Пропорциональные отрезки, многоугольник и прямые Чевы в круге

В. К. Гаврилов

Получен аналог равенства Чевы для отношения сторон многоугольника, вписанного в окружность по концам хорд с точкой пересечения. Приведено доказательство теоремы Понселе для вписанного в окружность многоугольника с нечётным и чётным числом сторон. Предложен аналог теоремы Менелая для многоугольника типа «звезда» в круге.

В статье [1] на основе теоремы Менелая рассмотрено пересечение прямых пучка и сторон угла, прямых пучка и сторон треугольника (теорема Чевы) и многоугольника (теорема Понселе). Известно рассмотрение пучка прямых в многоугольнике, вписанном в окружность [2].

Будем искать аналоги теорем Чевы, Понселе и Менелая для многоугольника, вписанного в окружность по концам хорд с точками пересечения. Отметим, что отрезок прямой с концами на окружности — это хорда.

В упрощённом виде содержание теоремы Чевы следующее: если прямые, проходящие через вершины треугольника и пересекающие его стороны, имеют в треугольнике точку пересечения (прямые Чевы [3, с. 11]), то произведение отношений длин отрезков на сторонах треугольника равно единице. Классическое доказательство теоремы Чевы основано на построении подобных треугольников и приведении равенств подобия к единице [3, с. 9]. Варианты доказательства теоремы Чевы приведены в [4], [5].

Теорема классика геометрии Понселе расширяет действие теоремы Чевы на случай многоугольника с нечётным числом сторон: «Прямые, соединяющие какую-нибудь точку с вершинами многоугольника, имеющего нечетное число сторон, образуют на противоположных его сторонах такие отрезки, что произведение отрезков, не имеющих общих концов, равно произведению остальных отрезков» [3, с. 35]. Делением одной части равенства на другую теорема легко приводится к виду равенства единице [3, с. 35]. Теорема Понселе доказывается методом отношения площадей треугольников, построенных на отрезках сторон многоугольника [3, с. 35].

Известно [6, с. 151], что если в круге две хорды пересекаются, то точка пересечения делит хорды на пропорциональные отрезки. Тогда, если соединить концы двух хорд с точкой пересечения отрезками прямых, то получим два подобных треугольника с общей вершиной. В общем случае в круге могут быть две, три, ..., n хорд, имеющих точку пересечения. Если последовательно соединить отрезками прямых концы хорд, то получим ряд подобных треугольников, образующих многоугольник, вписанный в окружность. В зависимости от числа хорд возможны варианты соединения концов хорд на окружности: а) смежных; б) через одну; в) через две; г) через три и т.д., соединение через k хорд, $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k < n$; соответственно, число сторон многоугольника, $N = 2n/(k+1)$; каждая из сторон многоугольника имеет k пересечений хордами. Будем искать при направленном обходе контура полученного многоугольника результат последовательного деления и умножения отношений длин отрезков, противолежащих вертикальным углам, образованным хордами в точке пересечения. Такой алгоритм поиска обеспечивает выполнение утверждения теоремы Понселе: получение равенства единице отношения произведений длин отрезков, не имеющих общих концов.

Действительно, отрезки на сторонах многоугольника, противолежащие вертикальным углам в точке пересечения хорд, общих концов не имеют, а чтобы в произведении длин отрезков не оказались смежные отрезки, при направленном обходе контура многоугольника необходимо чередовать деление и умножение отношений длин отрезков, не имеющих общих концов. В частности, при $k = 0$ такими отрезками могут быть и стороны многоугольника.

Рассмотрим вариант соединения смежных концов n хорд ($k = 0; N = 2n$).

Даны две хорды A_0B_0, A_1B_1; $n = 2$; $N = 4$, — четырёхугольник (рис. 1), содержит пары подобных треугольников: $A_0A_1O \sim B_0B_1O$, $A_1B_0O \sim B_1A_0O$, для которых соответственно имеем:

$$1) \quad \frac{A_0A_1}{B_0B_1} = \frac{A_0O}{B_1O} = \frac{A_1O}{B_0O}; \qquad 2) \quad \frac{A_1B_0}{B_1A_0} = \frac{B_0O}{B_1O} = \frac{A_1O}{A_0O}.$$

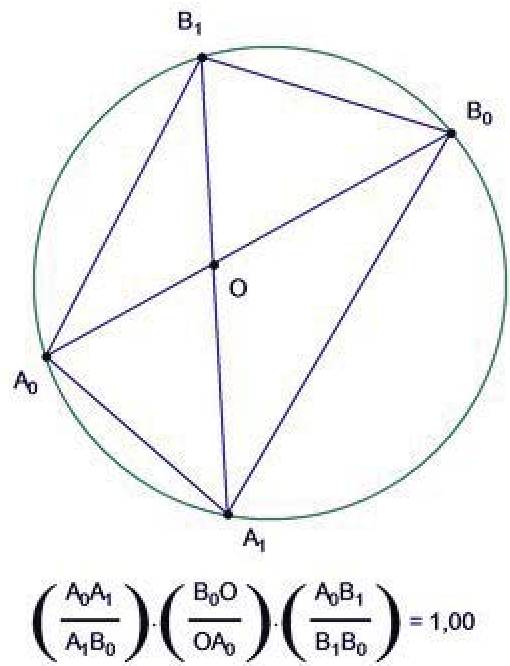


Рис. 1

Замечание. На рисунках приведены доказанные равенства в виде равенств единице. Появление нулей после единицы не связано с доказательством и обусловлено численной проверкой равенств на компьютере (программа The Geometer's Sketchpad V4 KCP Technologics — «Живая геометрия»). Далее, согласно алгоритму поиска, получим:

$$\frac{1)}{2)} \quad \to \quad \frac{A_0A_1}{B_0B_1} \cdot \frac{B_1A_0}{A_1B_0} = \frac{A_0O}{B_0O}. \tag{1}$$

Даны три хорды A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2; $n = 3$; $N = 6$, — шестиугольник (рис. 2); содержит три пары подобных треугольников: $A_0A_1O \sim B_0B_1O$, $A_1A_2O \sim B_1B_2O$, $A_2B_0O \sim B_2A_0O$, для которых соответственно имеем:

$$1) \quad \frac{A_0A_1}{B_0B_1} = \frac{A_0O}{B_1O} = \frac{A_1O}{B_0O}; \qquad 2) \quad \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2O}{B_1O} = \frac{A_1O}{B_2O}; \qquad 3) \quad \frac{A_2B_0}{B_2A_0} = \frac{A_2O}{A_0O} = \frac{B_0O}{B_2O}.$$

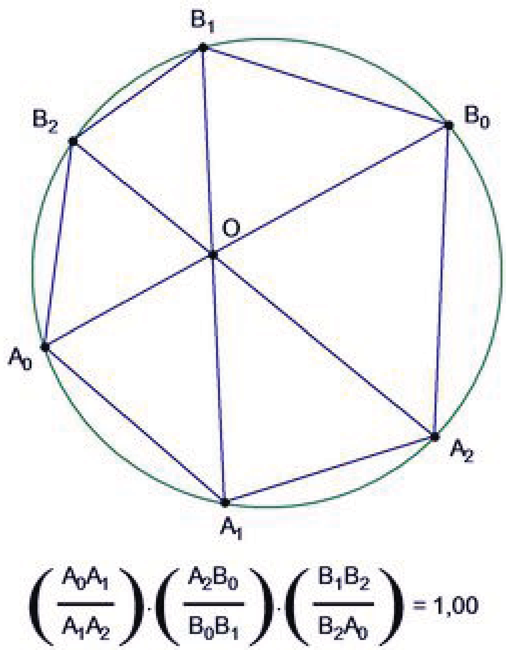


Рис. 2

Далее, согласно алгоритму поиска, получим:

$$\frac{1)}{2)}\cdot 3) \quad \to \quad \frac{A_0A_1}{B_0B_1}\cdot\frac{B_1B_2}{A_1A_2}\cdot\frac{A_2B_0}{B_2A_0} = \frac{A_0O}{B_1O}\cdot\frac{B_1O}{A_2O}\cdot\frac{A_2O}{A_0O} = 1. \tag{2}$$

Аналогично получим:
даны четыре хорды $A_0B_0,\ A_1B_1,\ A_2B_2,\ A_3B_3;\ n = 4;\ N = 8,$ — восьмиугольник,

$$\frac{1)}{2)}\cdot\frac{3)}{4)} \quad \to \quad \frac{A_0A_1}{B_0B_1}\cdot\frac{B_1B_2}{A_1A_2}\cdot\frac{A_2A_3}{B_2B_3}\cdot\frac{B_3A_0}{A_3B_0} = \frac{A_0O}{B_0O}; \tag{3}$$

даны пять хорд $A_0B_0,\ A_1B_1,\ A_2B_2,\ A_3B_3,\ A_4B_4;\ n = 5;\ N = 10,$ — десятиугольник,

$$\frac{1)}{2)}\cdot\frac{3)}{4)}\cdot 5) \quad \to \quad \frac{A_0A_1}{B_0B_1}\cdot\frac{B_1B_2}{A_1A_2}\cdot\frac{A_2A_3}{B_2B_3}\cdot\frac{B_3B_4}{A_3A_4}\cdot\frac{A_4B_0}{B_4A_0} = 1. \tag{4}$$

Метод математической индукции позволяет сформулировать итоговый результат равенств (1), (2), (3), (4) в виде следующей леммы.

Лемма. *В многоугольнике, построенном по смежным концам хорд окружности, имеющих в круге точку пересечения, результат последовательного деления и умножения отношений длин сторон многоугольника, противолежащих вертикальным углам в точке пересечения хорд, при направленном обходе контура многоугольника, равен единице, в случае нечётного числа хорд, и равен отношению длин отрезков хорды, принятой за отсчётную, в случае чётного числа хорд.*

Отметим, что для частного случая, вписанного в окружность шестиугольника, похожие результаты, в части равенства (2), приведены в [2, с. 19]: «Если три большие диагонали вписанного выпуклого шестиугольника пересекаются в одной точке, то произведения взятых через одну сторон равны между собой». Это утверждение аналогично теореме Понселе и делением одной части равенства на другую также приводится к равенству единице.

Рассмотрим вариант соединения концов n хорд через одну $(k = 1,\ N = n)$.

Даны три хорды $A_0B_0,\ A_1B_1,\ A_2B_2;\ n=3;\ N=3,$ — треугольник (рис. 3), для которого согласно алгоритму поиска имеем:

$$\frac{A_0C_1}{C_0B_1}\cdot\frac{B_1C_2}{C_1A_2}\cdot\frac{A_2C_0}{C_2A_0}=\frac{A_0C_1}{C_1A_2}\cdot\frac{A_2C_0}{C_0B_1}\cdot\frac{B_1C_2}{C_2A_0}.$$

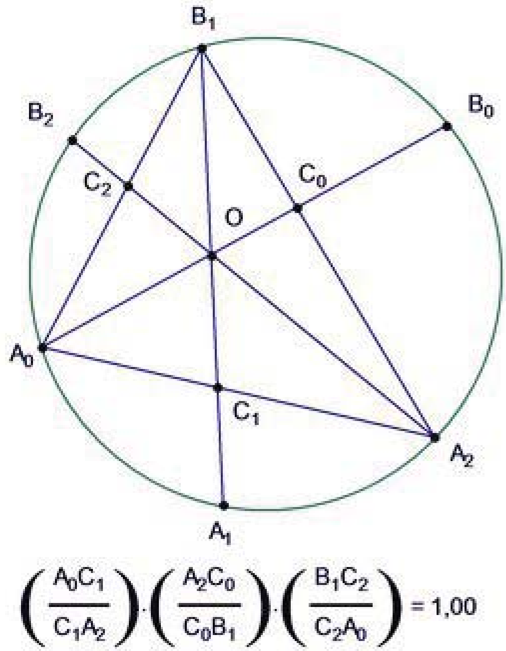


Рис. 3

Каждую из сторон треугольника и хорду, её пересекающую, можно рассматривать в качестве двух хорд, имеющих точку пересечения, тогда, согласно (1), получим:

1) $\dfrac{A_0C_1}{C_1A_2}=\dfrac{A_0A_1}{A_1A_2}\cdot\dfrac{A_0B_1}{B_1A_2};$ 2) $\dfrac{A_2C_0}{C_0B_1}=\dfrac{A_2B_0}{B_0B_1}\cdot\dfrac{A_0A_2}{A_0B_1};$

3) $\dfrac{B_1C_2}{C_2A_0}=\dfrac{B_1B_2}{B_2A_0}\cdot\dfrac{B_1A_2}{A_0A_2}.$

Далее следует:

$$1)\cdot 2)\cdot 3)\quad\to\quad \frac{A_0C_1}{C_1A_2}\cdot\frac{A_2C_0}{C_0B_1}\cdot\frac{B_1C_2}{C_2A_0}=a\cdot b=(1)^2;$$

$$a=\frac{A_0A_1}{A_1A_2}\cdot\frac{A_2B_0}{B_0B_1}\cdot\frac{B_1B_2}{B_2A_0}=1,\ \text{по лемме};$$

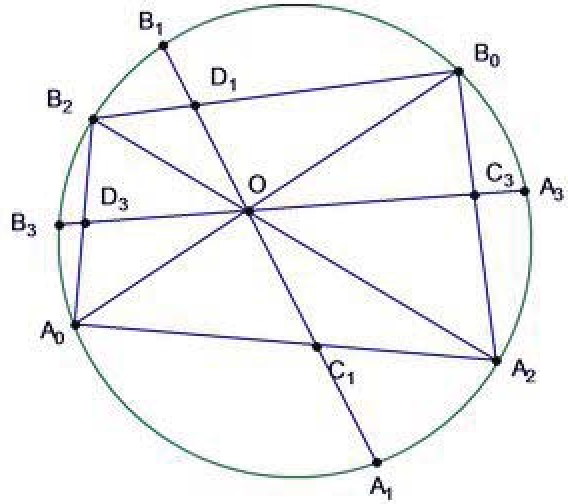
$$b=\frac{A_0B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_0A_2}{A_0B_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_0A_2}=1;\ \text{или}:$$

$$\frac{A_0C_1}{C_1A_2}\cdot\frac{A_2C_0}{C_0B_1}\cdot\frac{B_1C_2}{C_2A_0}=1. \tag{5}$$

Поскольку любой треугольник можно вписать в окружность, приведённое к рис. 3 обоснование можно рассматривать в качестве варианта доказательства теоремы Чевы. Аналогично доказывается теорема Понселе для вписанного в круг многоугольника с нечётным числом сторон, большим трёх.

Даны четыре хорды $A_0B_0,\ A_1B_1,\ A_2B_2,\ A_3B_3;\ n = 4;\ N = 4,$ — четырёхугольник (рис. 4), для которого согласно алгоритму поиска имеем:

$$\frac{A_0C_1}{B_0D_1}\cdot\frac{B_2D_1}{A_2C_1}\cdot\frac{A_2C_3}{B_2D_3}\cdot\frac{D_3A_0}{C_3B_0}=\frac{A_0C_1}{C_1A_2}\cdot\frac{A_2C_3}{C_3B_0}\cdot\frac{A_0D_3}{D_3B_2}\cdot\frac{B_2D_1}{D_1B_0}.$$



$$\left(\frac{A_0C_1}{C_1A_2}\right)\cdot\left(\frac{A_2C_3}{C_3B_0}\right)\cdot\left(\frac{B_0O}{OA_0}\right)\cdot\left(\frac{A_0D_3}{D_3B_2}\right)\cdot\left(\frac{B_2D_1}{D_1B_0}\right)\cdot\left(\frac{B_0O}{OA_0}\right) = 1{,}00$$

Рис. 4

Согласно (1), получим:

$$1)\quad \frac{A_0C_1}{C_1A_2}=\frac{A_0A_1}{A_1A_2}\cdot\frac{A_0B_1}{B_1A_2};\qquad 2)\quad \frac{A_2C_3}{C_3B_0}=\frac{A_2A_3}{A_3B_0}\cdot\frac{A_2B_3}{B_3B_0};$$
$$3)\quad \frac{A_0D_3}{D_3B_2}=\frac{B_3A_0}{B_2B_3}\cdot\frac{A_3A_0}{B_2A_3};\qquad 4)\quad \frac{B_2D_1}{D_1B_0}=\frac{B_1B_2}{B_0B_1}\cdot\frac{A_1B_2}{B_0A_1}.$$

Далее следует:

$$1)\cdot 2)\cdot 3)\cdot 4)\quad \rightarrow\quad \frac{A_0C_1}{C_1A_2}\cdot\frac{A_2C_3}{C_3B_0}\cdot\frac{A_0D_3}{D_3B_2}\cdot\frac{B_2D_1}{D_1B_0}=a\cdot b=(\frac{A_0O}{OB_0})^2;$$
$$a=\quad \frac{A_0A_1}{A_1A_2}\cdot\frac{A_2A_3}{A_3B_0}\cdot\frac{A_0B_3}{B_3B_2}\cdot\frac{B_2B_1}{B_1B_0}=\frac{A_0O}{OB_0},\ \text{по лемме};$$
$$b=\quad \frac{A_0B_1}{A_1B_0}\cdot\frac{A_1B_2}{A_2B_1}\cdot\frac{A_2B_3}{A_3B_2}\cdot\frac{A_3A_0}{B_0B_3}=\frac{A_0O}{OB_0};\ \text{или}:$$

$$\frac{A_0C_1}{C_1A_2}\cdot\frac{A_2C_3}{C_3B_0}\cdot\frac{B_0O}{OA_0}\cdot\frac{A_0D_3}{D_3B_2}\cdot\frac{B_2D_1}{D_1B_0}\cdot\frac{B_0O}{OA_0}=1. \tag{6}$$

Аналогично доказывается равенство единице для вписанного в круг многоугольника с чётным числом сторон, большим четырёх.

Метод математической индукции позволяет сформулировать итоговый результат равенств (5), (6) в виде теоремы 1.

Теорема 1. *Если в многоугольнике, построенном по концам хорд окружности, имеющих в круге точку пересечения, на каждой стороне имеется пересечение хордой, то существует контур, при* *направленном обходе которого произведение отношений длин отрезков на сторонах контура равно единице.*

Следствие 1. *В случае нечётного числа хорд контур образован отрезками на сторонах многоугольника.*

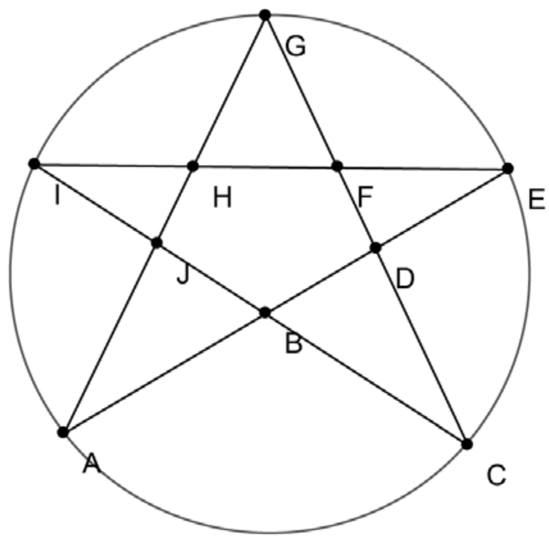
Следствие 2. *В случае чётного числа хорд контур образован отрезками на сторонах многоугольника и отрезками на хорде принятой за отсчётную.*

В отличие от теоремы Понселе для многоугольника с нечётным числом сторон [3, с. 35] теорема 1 позволяет получить равенство единице и для случая многоугольника с чётным числом сторон, — равенство (6).

Для общего случая пересечения хорд в круге докажем теорему 2.

Теорема 2. *Если хорды окружности пересекаются, то существует контур, образованный отрезками хорд между точками пересечения, на котором, при направленном обходе, произведение отношений длин отрезков хорд равно единице.*

Доказательство теоремы 2 приведено на рис. 5 для фигуры “пятиконечная звезда” в круге.



$$\left(\frac{AB}{BC}\right)\cdot\left(\frac{CD}{DE}\right)\cdot\left(\frac{EF}{FG}\right)\cdot\left(\frac{GH}{HI}\right)\cdot\left(\frac{IJ}{JA}\right) = 1{,}00$$

$$\left(\frac{IA}{CE}\right)\cdot\left(\frac{AC}{EG}\right)\cdot\left(\frac{EC}{GI}\right)\cdot\left(\frac{GE}{IA}\right)\cdot\left(\frac{IG}{AC}\right) = 1{,}00$$

Рис. 5

Отметим, что теорема 2 является аналогом расширенного варианта теоремы Менелая по условию: ««если прямые пересекаются» [7]. Очевидно, что если точки пересечения хорд не попадают на окружность, то к отрезкам на контуре применима обычная теорема Менелая для прямых линий. В случае пересечения хорд в круге и на окружности появляются пропорциональные отрезки и появляется возможность применить к отрезкам на контуре рассмотренные выше **Лемму, Теорему 1 и Теорему 2**.

В заключение автор выражает благодарность Полотовскому Г.М. за информационную поддержку и полезные замечания по тексту статьи.

Литература

1. Гаврилов В.К. Равенство Менелая, пучок прямых и многоугольник // Математическое образование. - 2017. - № 3(83). - С. 2-6.

2. Лоповок Л.М. Вписанный шестиугольник // Квант. - 1973. - № 1.

3. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. - М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1962.

4. Oxman V., Stupel M., Sigler A. Use of Different Representations of Ceva?s Theorem for Development of Geometric Properties of a Triangle // Journal of Mathematical Sciences. - 2ю - 2015. - p. 81-87.

5. Шарыгин И.Ф. Теоремы Чевы и Менелая // Квант. - 1976. № 11.

6. Киселев А.П. Геометрия / Под ред. Н.А. Глаголева. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

7. Гаврилов В.К. Равенства Менелая, Чевы и другие равенства // Информационные технологии в математике и математическом образовании. Материалы V Всероссийской научно-методической конференции с международным участием, г. Красноярск. - 2016. - С. 8-12.

Гаврилов Владимир Константинович,
кандидат физ.-мат. наук,
г. Красноярск.

E-mail: gavrilov1009@mail.ru

О невозможности построения центра окружности одной линейкой

С. В. Дворянинов

С начала прошлого века известно, что построить центр окружности одной линейкой нельзя. Статья содержит подробное доказательство этого утверждения.

В И.Ф. Шарыгина [1] читаем:

«Докажите, что с помощью одной линейки нельзя найти центр окружности».

В книге [1] на с. 261 сказано, что «вопрос о возможности определения центра окружности с помощью одной линейки впервые был поставлен выдающимся немецким математиком конца XIX и начала XX века Давидом Гильбертом (D. Hilbert); им же был предложен и метод решения этого вопроса. Дальнейшее развитие эти идеи получили в работах его ученика Д. Кауера в 1912 и 1913 годах».

В книге [3] одного из величайших математиков XX века Владимира Игоревича Арнольда на с. 14 читаем: «Доказательства невозможности являются замечательной и глубоко неочевидной частью математики, и я приведу здесь такое доказательство для другого случая: докажу, невозможность построения центра заданной на плоскости окружности при помощи одной линейки (циркулем и линейкой построить центр можно)».

Стало быть, задача эта примечательна по составу именитых математиков, когда-либо её решавших. А еще она удивительна по способу её решения. Изложим сейчас подробное, со всеми деталями, доказательство этой невозможности, следуя [1–4].

Немного аналитической геометрии

При доказательстве мы будем использовать две окружности, о которых сейчас расскажем. Рассмотрим в пространстве декартову прямоугольную систему координат.

Первая окружность лежит в координатной плоскости XOY (назовем эту плоскость α) и задана уравнением

$$x^2 + (y - 45)^2 = 15^2. \tag{1}$$

(Здесь и далее все числа выбраны ради удобства — координаты всех необходимых точек получаются целыми). Возьмем в пространстве точку O с координатами $(0; 20; 20)$ и пусть $M(u, v, 0)$ — произвольная точка окружности (1), т. е.

$$u^2 + (v - 45)^2 = 15^2. \tag{2}$$

Уравнение прямой MO таково:

$$\frac{x-0}{0-u} = \frac{y-20}{20-v} = \frac{z-20}{20-0}.$$

где (x, y, z) — произвольная точка прямой MO. Рассмотрим точку пересечения этой прямой MO с координатной плоскостью XOZ (назовем эту плоскость β). Для этого в последней системе следует положить $y = 0$. Так получаем систему

$$\frac{x}{-u} = \frac{-20}{20-v} = \frac{z-20}{20}.$$

Отсюда находим, что

$$x = \frac{20u}{20-v}, \qquad z = \frac{-20v}{20-v}.$$

Эти два уравнения суть параметрическое задание окружности в координатной плоскости XOZ, ибо с учетом равенства (1) нетрудно проверить, что переменные x и y удовлетворяют уравнению

$$x^2 + (z - 45)^2 = 15^2. \tag{3}$$

Это означает, что если точка М пробегает окружность (1), то прямая MO рисует на плоскости XOZ окружность (3) (см. рис. 1, который носит условный, схематический характер).

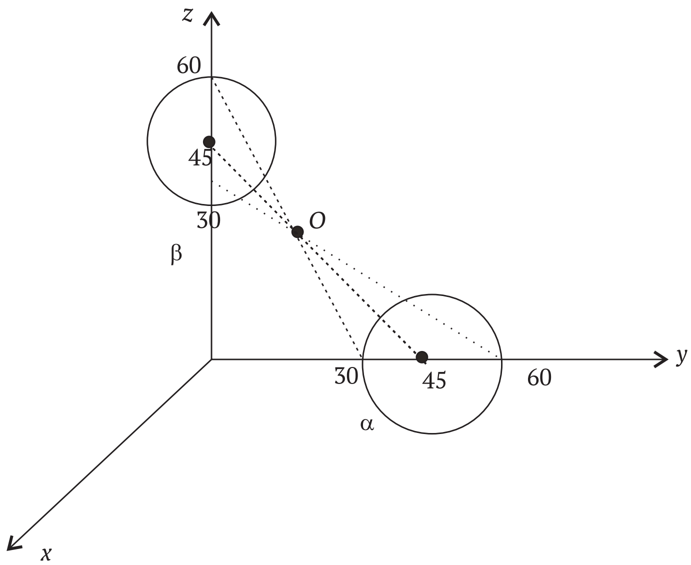


Рис. 1

Если же точка M пробегает на плоскости XOY некоторую прямую, то прямая MO рисует на плоскости XOZ прямую.

Упражнение 1. Докажите последнее утверждение.

Указание. Для доказательства следует использовать то, что три точки определяют плоскость и что пересечение двух плоскостей есть прямая, а можно использовать уравнение прямой в плоскости XOY и найти уравнение образа этой прямой на плоскости XOZ.

Итак, прямая MO задает отображение плоскости XOY на плоскость XOZ. Каждой точке первой плоскости α соответствует единственная точка второй плоскости β. При этом отображении прямая линия переходит в прямую, окружность (1) переходит в окружность (3). Обозначим это отображение буквой F.

Упражнение 2. Пусть точка $Ц_1(0; 45; 0)$ — центр первой окружности (1), $Ц_2(0, 0, 45)$ — центр второй окружности (2). Докажите, что

$$F(Ц_1) = (0, 0, 36).$$

т. е. отображение F не переводит (не отображает) центр первой окружности в центр второй.

Указание. Достаточно в плоскости YOZ рассмотреть прямую, проходящую через две точки $(y = 45, z = 0)$ и $(y = 20, z = 20)$, и найти точку пересечения этой прямой и оси OZ.

Итак, центр второй окружности не есть образ центра первой окружности при отображении F:

$$F(Ц_1) \neq Ц_2 \tag{4}$$

В статье [1] и книге [2] также рассматриваются две окружности. В [1] дано геометрическое построение второй окружности на основе подобия, в [2] использованы сечения косого конуса двумя непараллельными плоскостями.

Алгоритм построения центра одной линейкой не существует

Сейчас начинается главное в нашем рассказе. Применим метод доказательства от противного. А именно, допустим, что есть такой алгоритм, что, действуя согласно ему и используя только одну линейку, можно построить центр нарисованной (как говорят математики, данной) окружности.

Пусть есть человек (назовем его A), который владеет этим алгоритмом, и пусть он хочет по телефону рассказать о нем другому человеку (назовем его B). Или написать изложение этого алгоритма на бумаге, что одно и то же.

Это означает, что человек A на своей плоскости α строит прямую Π_1, потом прямую Π_2, потом Π_3, и так далее до прямой Π_n. В результате пересечение прямых Π_k и Π_n (где $k < n$) оказывается центром первой окружности.

Какие есть варианты для первого шага Π_1? Построить произвольную прямую, которая

1) пересекает первую окружность в двух точках,

2) касается её в одной точке,

3) не пересекает окружность.

Сделав первый шаг, человек A сообщает о нем человеку B. И может случиться так, что B построит прямую $F(\Pi_1)$! Знак ! не есть здесь факториал. Именно так мы хотим обозначить ключевой, важнейший элемент проводимых рассуждений.

Итак, продолжая следовать алгоритму (или получаемым по телефону указаниям), человек B в своей плоскости β МОЖЕТ построить последовательность прямых

$$F(\Pi_1),\ F(\Pi_2),\ \ldots,\ F(\Pi_n).$$

Такая возможность не исключается, и это самое важное. При этом прямые $F(\Pi_k)$ находятся между собой в том же отношении, что и прямые Π_n, пересекаются или нет. Пересечение двух его прямых $F(\Pi_k)$ и $F(\Pi_n)$ есть образ пересечения прямых Π_k и Π_n:

$$F(\Pi_k) \cap F(\Pi_n) = F(\Pi_k \cap \Pi_n),$$

или

$$F(\Pi_k \cap \Pi_n) = F(\text{Ц}_1),$$

или, согласно (4),

$$F(\Pi_k \cap \Pi_n) \neq \text{Ц}_2 \tag{5}$$

Осознаем, не спеша, неравенство (5). Оно того заслуживает. Напомним, что о нем первым размышлял великий Гильберт, и рассказывали нам о нем наши выдающиеся математики.

Человек B следовал указаниям алгоритма, каждая прямая Π_m построена или согласно полученным от A по телефону указаниям, либо согласно написанной на бумаге инструкции. Сделал свой очередной шаг A, — вслед за ним соответствующее построение выполнил B. И так до последнего, n-го шага. Пересечение k-ой и n-ой прямых привело A к центру его окружности. То же должно получиться и у B на его окружности, должен получиться центр окружности, но, как говорит нам (5), это не так:

Вот оно противоречие. Противоречие с нашим допущением о существовании алгоритма построения центра окружности с помощью одной линейки. Противоречие говорит о том, что наше допущение ложно, и алгоритма нет.

Вместо заключения

Современные школьники привыкли к тому, что есть разные школьные учебники. Геометрию можно учить или «по Погорелову», или «по Атанасяну». Вариативность есть во всем. Одну и ту же пьесу разные режиссеры в разных театрах ставят по-разному. Так и с этой задачей. Вы можете прочитать доказательство невозможности построения центра окружности одной линейкой в книге [4]. Это задача 30.58 и её решение на с. 582. Задача со звездочкой. Решение непростое, оно опирается на решение других задач. Ничего удивительного, — эту задачу поставил сам Гильберт! А наши читатели могут гордиться тем, что они прикоснулись к настоящей красивой математике.

Литература

1. Шарыгин И.Ф. Выход в пространство // Квант, № 7, 2017, с. 23–27. (Впервые опубликовано в «Кванте» № 5 за 1975 год).

2. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. Опыты математического мышления. 3-е изд. - М.: Физматлит, 1962.

3. Арнольд В.И. Что такое математика? 2-е изд. - М.: МЦНМО, 2008.

4. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. 5-е изд., испр. и доп. - М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006.

Дворянинов Сергей Владимирович,
редактор журнала "Математика в школе",
доцент, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: dvoryan@yandex.ru

Две заметки по геометрии

А. М. Иглицкий

Предлагаем вниманию читателя две заметки по геометрии. В первой предложен алгоритмический способ определения коллинеарности некоторых точек, образуемых пересечениями диагоналей правильных многоугольников. Во второй предложен численный критерий вырожденности треугольника на основе модифицированной формулы Герона.

1. О коллинеарности точек пересечения диагоналей правильного многоугольника и об алгоритме поиска и анализа таких коллинеарностей

Указанная в заголовке коллинеарность прослеживается для всех правильных многоугольников с числом сторон, большим шести. Для уменьшения объема материала далее рассматривается только случай правильного семиугольника.

Если в правильном семиугольнике провести все диагонали, мы получим 35 точек их пересечения, см. рис. 1.

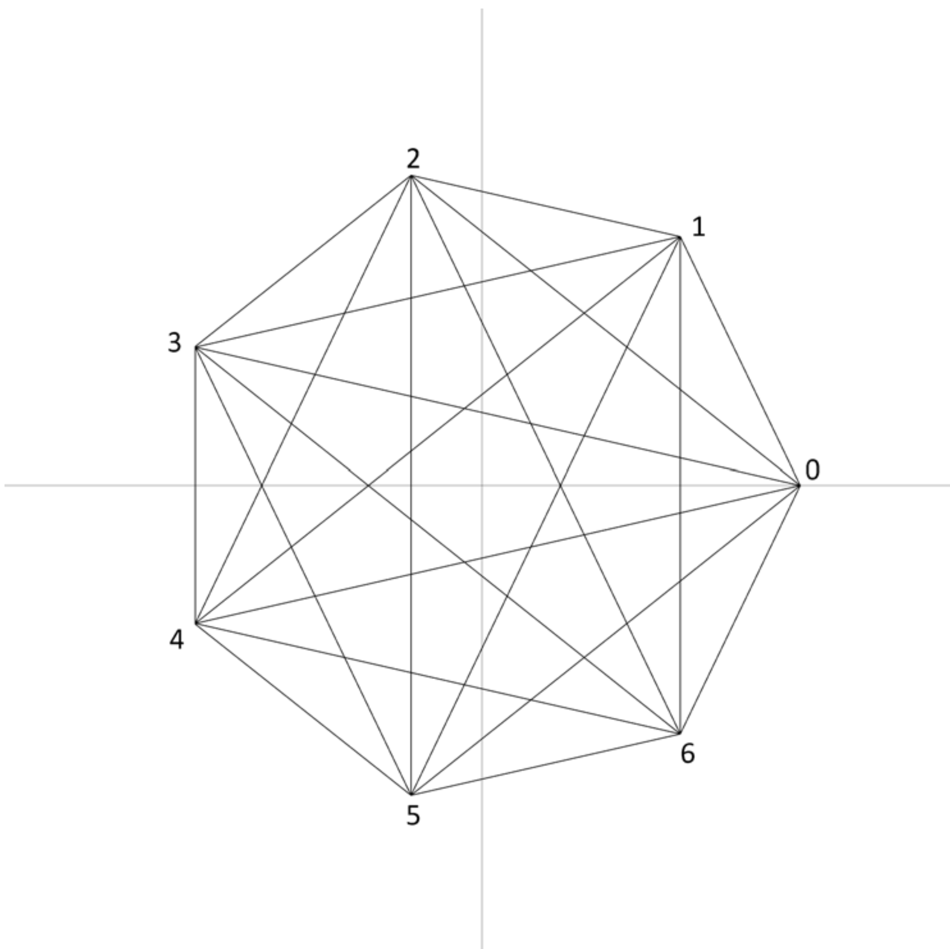


Рис. 1

Не останавливаясь на очевидных свойствах этого множества точек, отметим, например, следующие коллинеарности, рис. 2, рис. 3:

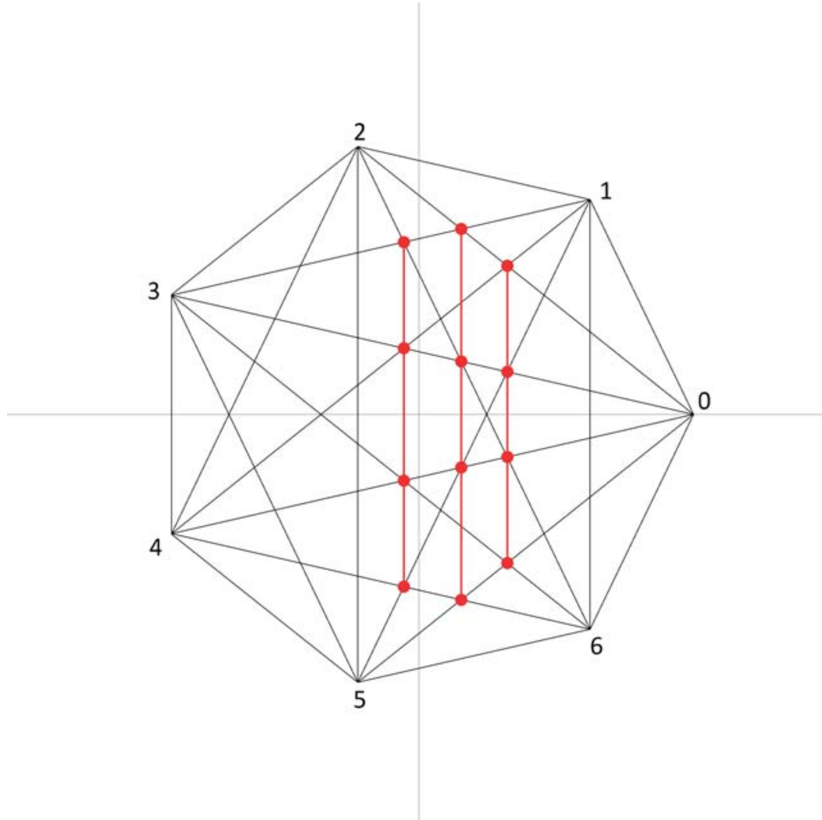


Рис. 2

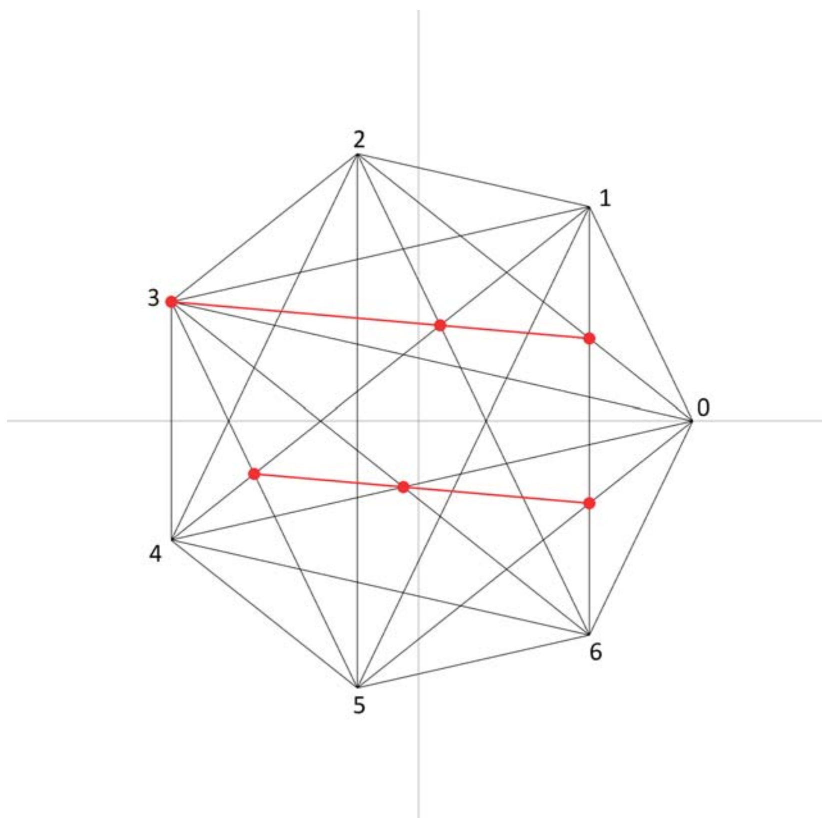


Рис. 3

(Правда, во втором случае нарушается «чистота стиля» — используется вершина исходного семиугольника.)

Наблюдается и противоположное - пересечение нескольких линий в одной точке, рис. 4, рис. 5:

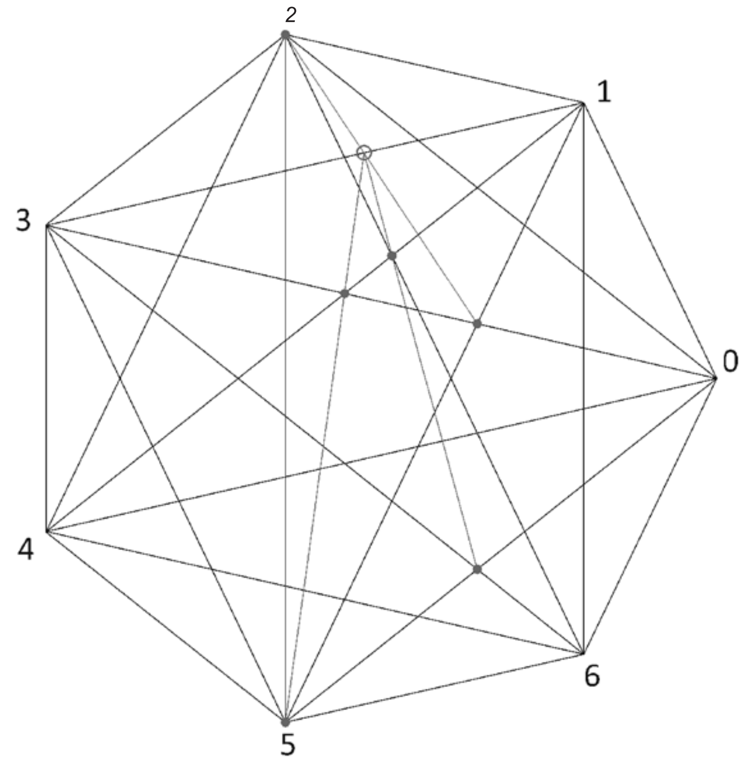


Рис. 4

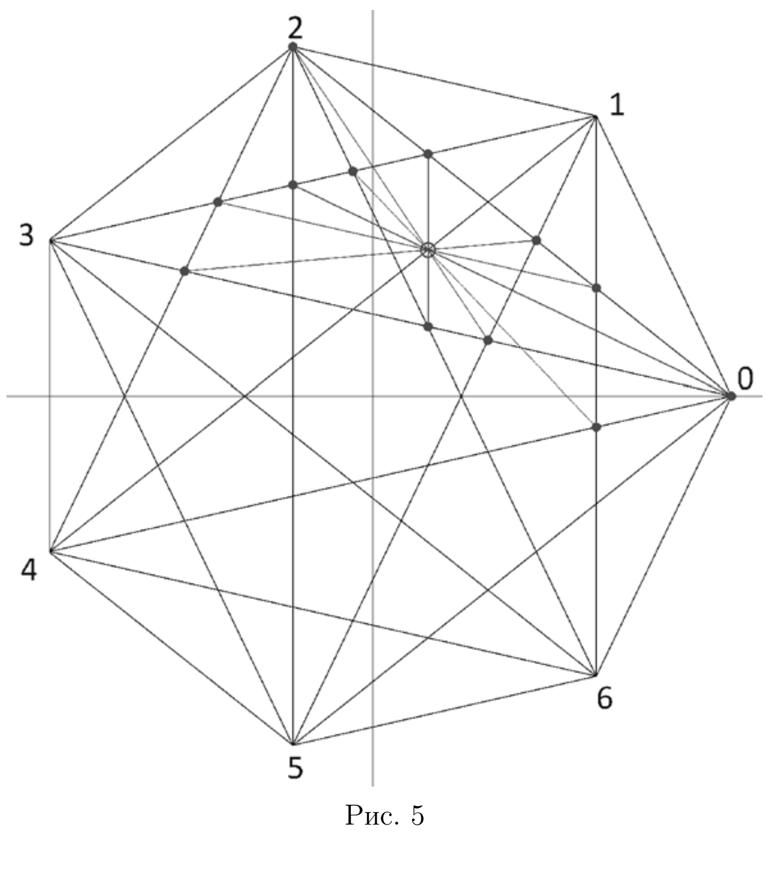


Рис. 5

Можно также отметить и другие свойства — параллельность линий, равенство отрезков и т. п.

Доказательства этих свойств могут быть получены методами элементарной геометрии. Однако подобный подход является малоприемлемым, так как для каждого случая приходится искать отдельное доказательство. Кроме того, выбор указанных фактов «на взгляд» безусловно является неудовлетворительным и требуется какой-то метод, который бы позволял бы найти все подобные случаи без пропусков.

Переход «от геометрии к тригонометрии» упрощает вопрос, ибо позволяет разным геометрическим утверждениям придать общий вид. Если положить

$$W = 2\pi/7 \quad \text{и} \quad V = \pi/7,$$

то вершины исходного семиугольника (полагая, что он вписан в единичную окружность) имеют координаты

$$x_m = \cos mW, \quad y_m = \sin mW$$

при $m = 0, \ldots, 6$, а координаты точки пересечения диагоналей могут быть выражены через координаты их концов. Если считать, что одна диагональ соединяет вершины с номерами n_1 и k_1, а другая — n_2 и k_2, то координаты точки пересечения диагоналей задаются выражениями:

$$x = \frac{\sin((n_1+k_1)V)\cos((n_2-k_2)V) - \cos((n_1-k_1)V)\sin((n_2+k_2)V)}{\sin((n_1+k_1)V)\cos((n_2+k_2)V) - \cos((n_1+k_1)V)\sin((n_2+k_2)V)},$$
$$y = \frac{\cos((n_1-k_1)V)\cos((n_2+k_2)V) - \cos((n_1+k_1)V)\cos((n_2-k_2)V)}{\sin((n_1+k_1)V)\cos((n_2+k_2)V) - \cos((n_1+k_1)V)\sin((n_2+k_2)V)}$$

Легко заметить, что в этих формулах неизбежно появляется многократная повторяемость значений, что должно облегчать работу с ними. Тем не менее и они являются крайне неудобными.

Однако переход «от тригонометрии к комплексному переменному» упрощает задачу радикально и придает ей совершенно другой вид, благодаря чему она становится решаемой численными методами.

Если положить

$$Z = \sqrt[14]{1},$$

с аргументом V, то будем иметь:

$$\cos V = \frac{Z + Z^{-1}}{2} = 0{,}5Z + 0{,}5Z^{13}, \quad \sin V = \frac{Z - Z^{-1}}{2i} = \frac{1}{i}(0{,}5Z - 0{,}5Z^{13})$$

$$\cos 2V = \frac{Z^2 + Z^{-2}}{2} = 0{,}5Z^2 + 0{,}5Z^{12}, \quad \sin 2V = \frac{Z^2 - Z^{-2}}{2i} = \frac{1}{i}(0{,}5Z^2 - 0{,}5Z^{12}),$$

и т. д.

Принципиально важным здесь является то обстоятельство, что тригонометрические функции (значения которых являются действительными числами, могущими быть выраженными только с какой-то погрешностью) заменяются полиномами, коэффициенты которых известны *точно*. Следовательно, и любые выражения, в которые входят только эти функции, могут быть выражены полиномами, коэффициенты которых также известны *точно*.

Например, координаты точки пересечения диагоналей 0–2 и 1–3 даются такими формулами:

$$x = \frac{\sin 2V \cos 2V - \cos 2V \sin 4V}{\sin 2V \cos 4V - \cos 2V \sin 4V}, \quad y = \frac{\cos 2V \cos 4V - \cos 2V \cos 2V}{\sin 2V \cos 4V - \cos 2V \sin 4V}.$$

После подстановки

$$\cos 2V = 0{,}5Z^2 + 0{,}5Z^{12}, \quad \sin 2V = (0{,}5Z^2 - 0{,}5Z^{12})(-i),$$

$$\cos 4V = 0{,}5Z^4 + 0{,}5Z^{10}, \quad \sin 4V = (0{,}5Z^4 - 0{,}5Z^{10})(-i),$$

получаем выражения с целыми коэффициентами:

$$x = \frac{-Z^2 + Z^4 - Z^6 + Z^8 - Z^{10} + Z^{12}}{-2Z^2 + 2Z^{12}}, \quad y = \frac{-2 + Z^2 - Z^4 + Z^6 + Z^8 - Z^{10} + Z^{12}}{-2Z^2 + 2Z^{12}}\, i.$$

Программирование таких вычислений производится очевидным образом. Все числа, участвующие в операциях, представляют собой дроби и характеризуются набором 28 целых коэффициентов. Сумма, разность, произведение и частное таких дробей также являются дробями такого же вида.

Любое геометрическое утверждение — например, «точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) лежат на одной прямой» — может быть превращено в некоторое алгебраическое условие, проверяемое путем вычислений. В данном случае следует проверить равенство

$$x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3.$$

Для нахождения всех случаев коллинеарности точек используется метод полного перебора. Кроме того, одновременно могут вычисляться направления образующихся линий, расстояния между ними, длины отрезков и т. д. и т. п.

Естественным продолжением задачи является анализ расположения точек пересечения (продолжений) диагоналей, находящихся вне многоугольника. И в этом случае наблюдается та же картина, рис. 6, рис. 7:

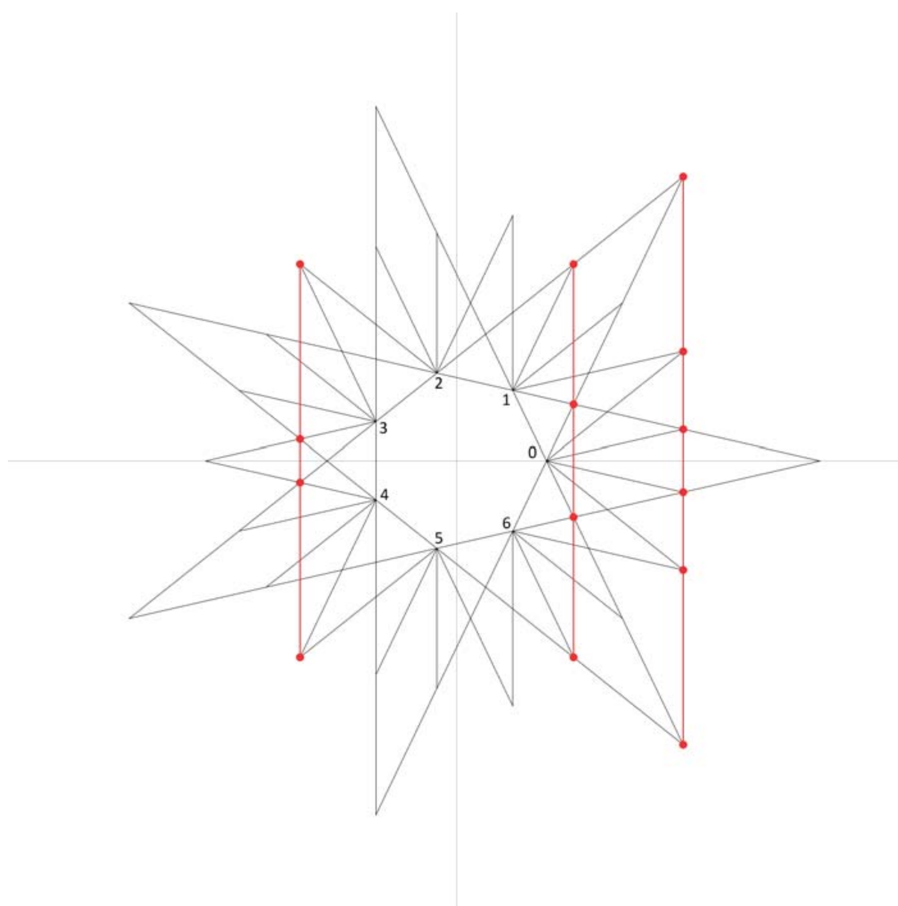


Рис. 6

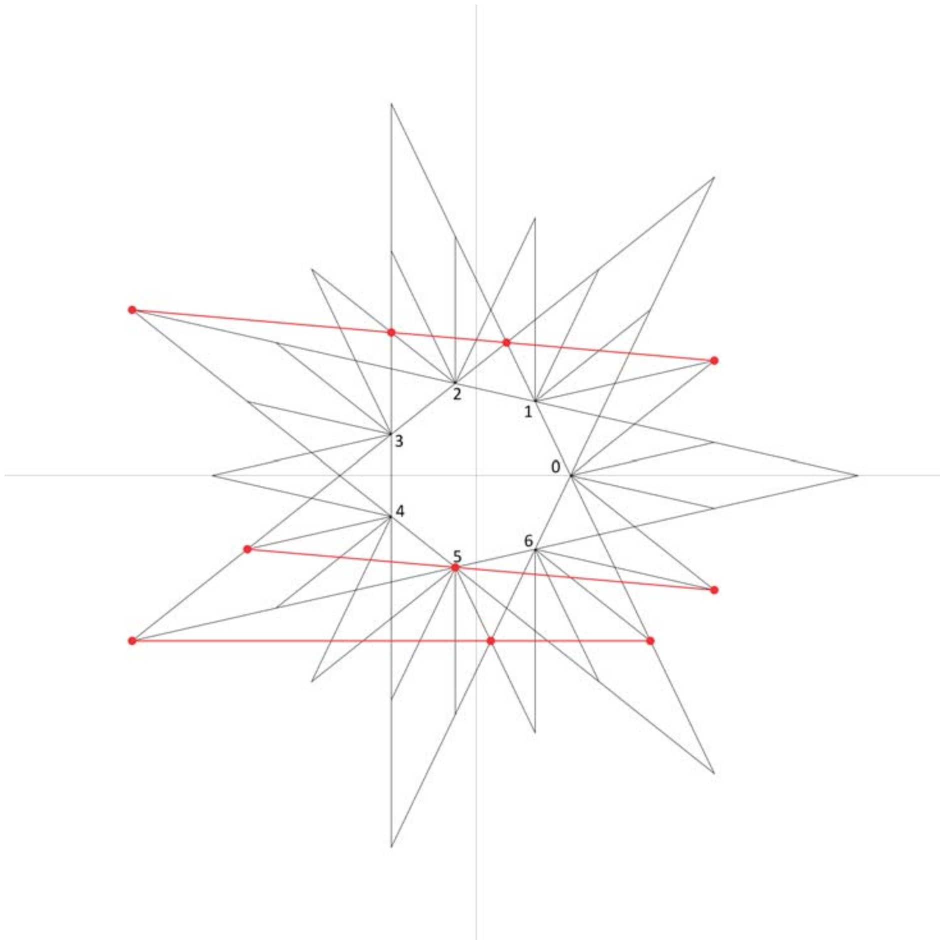


Рис. 7

Не составляет труда проанализировать ситуацию с любым другим правильным многоугольником. В программе потребуется изменить лишь одну строку: вместо $N = 7$ указать $N =$ (любое целое число > 7). Ниже приводятся некоторые картинки для случаев 8- и 9-угольника, рис. 8 – 11:

Кроме коллинеарности, в разных случаях можно отмечать и другие неожиданные свойства. Например, в случае девятиугольника указанные расстояния между линиями равны 0,5 и 1,5 *точно.*

К сожалению, следует отметить очень быстрый рост вычислительной сложности задачи. Если N — количество углов многоугольника, то с ростом N количество диагоналей растет как N^2, а количество их точек пересечения как N^4. Количество троек точек, которые нужно проверять на коллинеарность, растет как N^{12} и т. д. В той же пропорции возрастают требования к объему памяти и время решения задачи.

Тем не менее представляется разумным попытаться получить численное решение задачи до $N = 15 \ldots 20$. Анализ полученных результатов может вскрыть закономерности расположения точек и дать возможность описать явление средствами «чистой» математики.

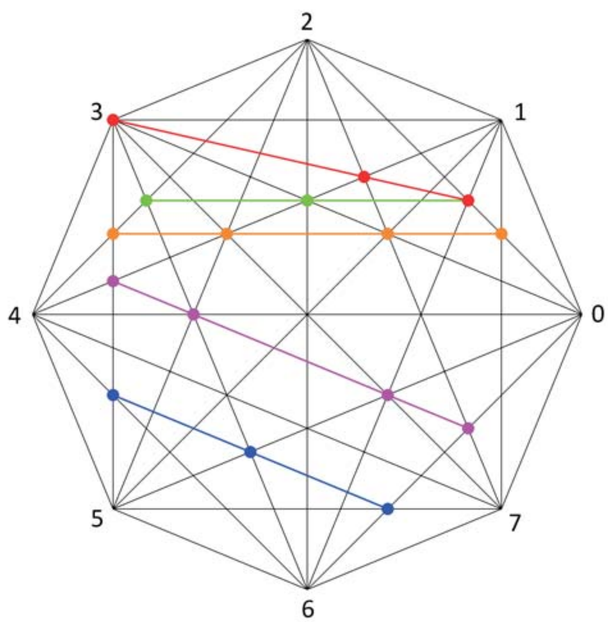


Рис. 8

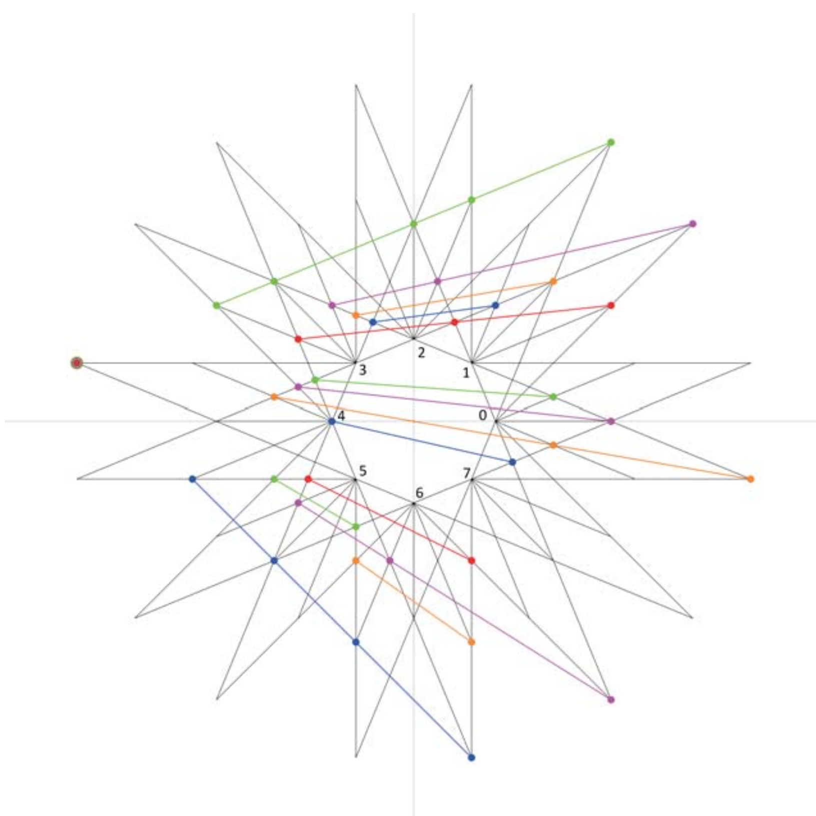


Рис. 9

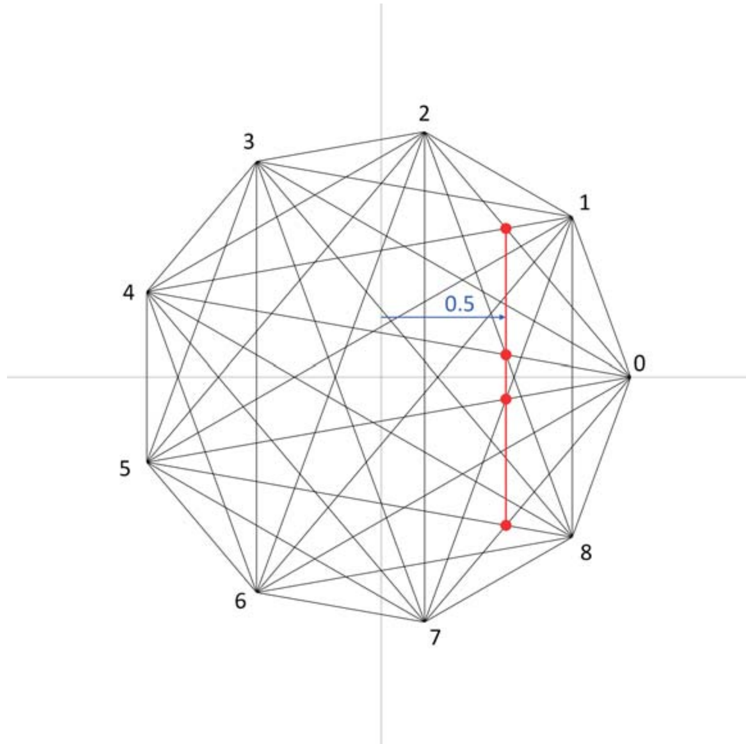


Рис. 10

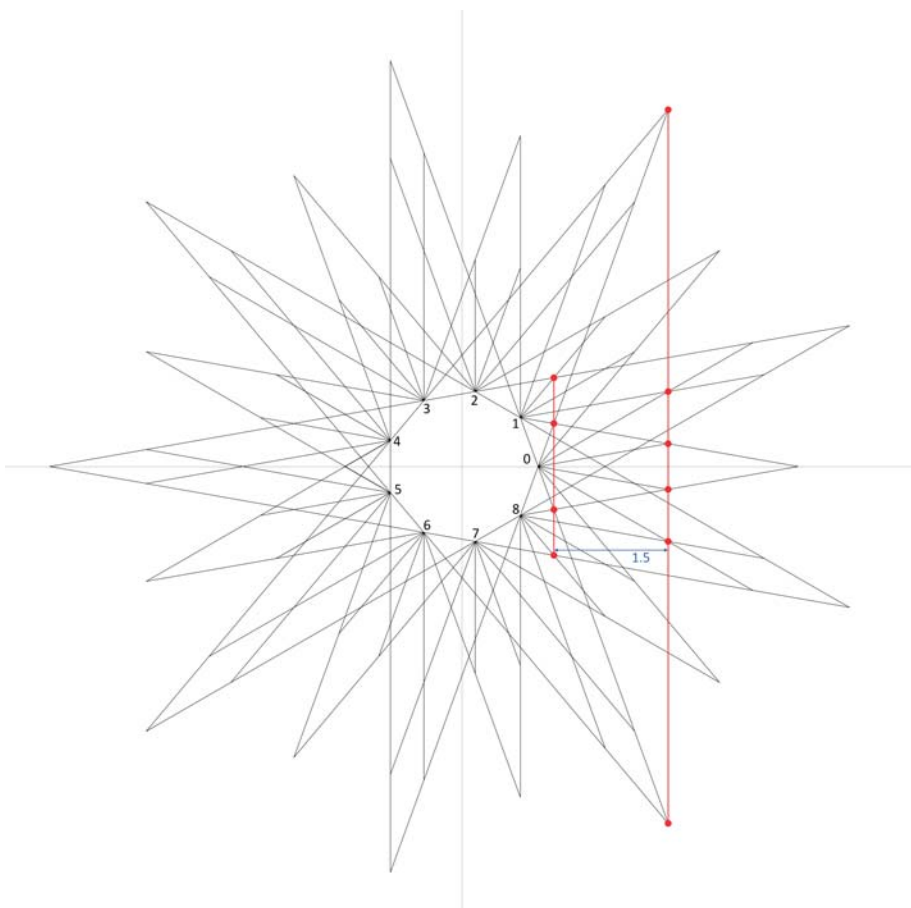


Рис. 11

2. Об одном критерии «меры вытянутости» треугольника

Иногда бывает так, что какая-то геометрическая задача решается вычислительными методами и результат получается в виде некоторых формул. Такие результаты совершенно «ненаглядны» и может оказаться затруднительно охарактеризовать их в «наглядных» выражениях. Например, если вычисляется положение трех вершин треугольника, первый вопрос — он остроугольный, тупоугольный, вырожденный и т. п. Далее предлагается некоторый количественный критерий для определения «меры тупоугольности» треугольника и близости его к вырожденному.

Казалось бы, все вопросы решает известная формула Герона для площади треугольника

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Однако она позволяет лишь ответить на вопрос, лежат ли три точки на одной прямой. Вопрос же, не является ли треугольник «почти вырожденным», остается неясным. К тому же значения вычисляемой по этой формуле площади неодинаковы для подобных треугольников, что явно противоречит интуитивному представлению о равной мере вырожденности подобных треугольников.

Незначительная модификация этой формулы исправляет все ее недостатки одновременно. «Критерий вырожденности» можно определить как

$$K = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p^2}$$

Для вырожденного треугольника $K = 0$, для невырожденного $K > 0$, причем значение K не зависит от размеров треугольника. Ниже приведены результаты для некоторых часто встречающихся треугольников:

60°-60°-60°	$K \approx 0{,}19245$;
45°-45°-90°	$K \approx 0{,}17157$;
30°-60°-90°	$K \approx 0{,}15470$;
120°-30°-30°	$K \approx 0{,}12435$.

Наибольшее значение критерия достигается для равностороннего треугольника, как «наименее похожего» на прямую линию. Из двух прямоугольных треугольников 45°-45°-90° и 30°-60°-90° второй субъективно кажется более «плоским», что подтверждается значением критерия. Еще более «плоским» является треугольник 120°-30°-30°. Таким образом, данный критерий может служить объективной мерой субъективного понимания «чрезмерной вытянутости» треугольника и близости его к вырожденному.

Литература

1. Ястребов А.В. Числовая мера разносторонности треугольника // Математическое образование. - 2017. - № 3(83). - с. 51-53.

Иглицкий Александр Михайлович,
кандидат технических наук,
г. Москва.

E-mail: altetris@mail.ru

История гиперболических функций: их изучение и некоторые приложения (окончание)

В. Ю. Бодряков, А. А. Быков

Окончание статьи об истории гиперболических функций. Начало опубликовано в предыдущем номере журнала.

Вывод уравнения цепной линии: вариационный подход

Хотя можно найти немало выводов уравнения цепной линии из разных принципов и соображений (см. цитированную литературу), нам представляется полезным привести современный вывод уравнения цепной линии как решение вариационной изопериметрической задачи. Мы отдаем тем самым дань уважения великому российскому математику швейцарско-немецкого происхождения, Леонарду Эйлеру (Leonhard Euler, 1707–1783), который и создал вариационное исчисление практически в том виде, которым мы пользуемся сегодня. Добавим, что наиболее употребляемым сегодня является вывод уравнения цепной линии, исходя из условий ее статического равновесия (см., например, [5]). Такой вывод хорош для физиков и инженеров, однако, как показал многолетний педагогический опыт авторов, почти недоступен для не изучавших физику специально математиков, тем более, для педагогов — будущих учителей математики. Однако принцип минимума потенциальной энергии для тела, находящегося в положении устойчивого равновесия интуитивно понятен всем; он лежит в основе предлагаемого вывода. Для решения получающегося при этом дифференциального уравнения достаточно стандартного курса дифференциальных уравнений педагогического университета.

Пусть гибкая тяжелая нить (цепь) свободно подвешена в поле тяжести Земли (ускорение свободного падения $g = 9{,}81\frac{\text{м}}{c^2}$) в симметричных точках с координатами (x_0, y_0) и $(-x_0, y_0)$. Пусть масса цепи равна m и длина $l > 2x_0$. Введем линейную плотность цепи $\rho = \frac{m}{l}$.

Задача состоит в определении уравнения $y = y(x)$ по которому провисает в поле тяжести эта нить.

Если уравнение цепной линии определено, то длину нити между точками подвеса можно определить интегрированием:

$$l = \int\limits_{-x_0}^{x_0} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int\limits_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + y'^2}dx = 2\int\limits_{0}^{x_0} \sqrt{1 + y'^2}dx \tag{1}$$

Отметим, что естественное условие $l > 2x_0$ при этом выполняется автоматически.

Для получения дифференциального уравнения, определяющего уравнение цепной линии $y = y(x)$, потребуется минимизировать функционал потенциальной энергии

$$W(y, y') = \int\limits_{-x_0}^{x_0} y(x)g\, dm, \tag{2}$$

где элемент массы нити равен

$$dm = \rho dl = \rho\sqrt{dx^2 + dy^2} = \rho\sqrt{1 + y'^2}dx. \tag{3}$$

С учетом выражения (3), минимизировать следует функционал

$$\frac{1}{\rho g}W(y, y') = \int\limits_{-x_0}^{x_0} y\sqrt{1 + y'^2}dx \longrightarrow \min, \tag{4}$$

при условии постоянства длины нити

$$l = \int\limits_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + y'^2}dx = const. \tag{5}$$

Заметим, что условия (4), (5) в совокупности составляют изопериметрическую вариационную задачу. Решение этой вариационной задачи на условный экстремум будем искать методом множителей Лагранжа:

$$\int\limits_{-x_0}^{x_0} y\sqrt{1 + y'^2}dx + \mu\int\limits_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + y'^2}dx = \int\limits_{-x_0}^{x_0} \Phi(y, y')dx \longrightarrow \min, \tag{6}$$

где μ — неопределенный множитель Лагранжа и

$$\Phi(y, y') = (y + \mu)\sqrt{1 + y^2}. \tag{7}$$

Варьируя функционал (6), и приравнивая его первую вариацию нулю, получим дифференциальное уравнение Эйлера:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right) = 0. \tag{8}$$

Как нетрудно получить из (7),

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = \sqrt{1 + y'^2}; \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right) = \frac{y'(y + \mu)}{\sqrt{1 + y'^2}}; \tag{10}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y'}\right) = \frac{y''(y + \mu) + y'^2 + y'^4}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \tag{11}$$

Теперь уравнение Эйлера, определяющее форму провисающей нити, есть

$$\sqrt{1 + y'^2} - \frac{y''(y + \mu) + y'^2 + y'^4}{(1 + y'^2)^{3/2}} = 0; \tag{12}$$

после элементарных преобразований, получаем окончательно обыкновенное дифференциальное уравнение (точнее, краевую задачу)

$$y''(y + \mu) - y'^2 = 1 \tag{13}$$

с краевыми условиями

$$y(x_0) = y(-x_0) = y_0. \tag{14}$$

С точки зрения теории дифференциальных уравнений, уравнение (13) является неполным нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка (ДУ-II), которое сводится к ДУ-I с разделяющимися переменными путем замены

$$y' = \frac{dy}{dx} = p(y). \tag{15}$$

Тогда вторая производная

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right) = p(y)\frac{dp(y)}{dy}. \tag{16}$$

Теперь решение уравнение (13) не составляет труда; перепишем его в виде

$$p\frac{dp}{dy}(y+\mu) - p^2 = 1. \tag{17}$$

После разделения переменных в ур. (17)

$$\int \frac{pdp}{1+p^2} = \int \frac{dy}{y+\mu} + \ln C_1, \tag{18}$$

где $C_1 = \mathrm{const}$ — постоянная интегрирования. После интегрирования получаем

$$\frac{1}{2}\ln(1+p^2) = \ln(C_1(y+\mu)). \tag{19}$$

После потенцирования в выражении (19)

$$1 + p^2 = C_1^2(y+\mu)^2 \tag{20}$$

и возвращения к исходным переменным (см. выр. (15)), получаем

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1^2(y+\mu)^2 - 1}. \tag{21}$$

Решим ДУ-I (21) с разделяющимися переменными, выбрав знак “+” (случай “-” рассматривается аналогично):

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1^2(y+\mu)^2 - 1}} = \int dx + C_2 = x + C_2, \tag{22}$$

Интеграл в левой части выражения (22) путем замены

$$z = C_1(y+\mu), \quad dz = C_1 dy, \tag{23}$$

сводится к табличному интегралу типа «длинный логарифм»:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1^2(y+\mu)^2 - 1}} = \frac{1}{C_1}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{C_1}\ln\left|z + \sqrt{z^2-1}\right|. \tag{24}$$

Теперь

$$\ln\left|z + \sqrt{z^2-1}\right| = C_1(x + C_2) \tag{25}$$

или

$$z + \sqrt{z^2-1} = e^{C_1(x+C_2)}. \tag{26}$$

Уравнение (26) легко разрешимо относительно z:

$$\sqrt{z^2-1} = e^{C_1(x+C_2)} - z;\;\; z^2 - 1 = e^{2C_1(x+C_2)} - 2ze^{C_1(x+C_2)} + z^2;\;\; 2ze^{C_1(x+C_2)} = e^{2C_1(x+C_2)} + 1.$$

Окончательно,

$$z = \frac{1}{2}\left[e^{C_1(x+C_2)} + e^{-C_1(x+C_2)}\right], \quad z = \operatorname{ch}\left(C_1(x+C_2)\right),$$

где введено стандартное обозначение $\operatorname{ch}\alpha = \frac{1}{2}(e^{\alpha}+e^{-\alpha})$ для гиперболического косинуса. Возвращаясь к исходной переменной (см. (23)), получим

$$C_1(y+\mu) = \operatorname{ch}\left[C_1(x+C_2)\right]$$

или, окончательно,

$$y = \frac{1}{C_1}\operatorname{ch}\left[C_1(x+C_2)\right] - \mu \tag{27}$$

Для определения констант в выражении (27), воспользуемся краевыми условиями (14):

$$\frac{1}{C_1}\operatorname{ch}\left[C_1(-x_0+C_2)\right] - \mu = y_0 = y(-x_0). \tag{28}$$

$$\frac{1}{C_1}\operatorname{ch}\left[C_1(x_0+C_2)\right] - \mu = y_0 = y(x_0). \tag{29}$$

Приравнивая левые части в выражениях (28), (29), имеем

$$\operatorname{ch}\left[C_1(-x_0+C_2)\right] = \operatorname{ch}\left[C_1(x_0+C_2)\right], \tag{30}$$

откуда, в силу четности функции $\operatorname{ch}\alpha$, либо

$$C_1(-x_0+C_2) = C_1(x_0+C_2), \tag{31}$$

либо

$$C_1(-x_0+C_2) = -C_1(x_0+C_2) \tag{32}$$

Из выражения (31) следует $C_1 = 0$, что не имеет физического смысла, поэтому $C_1 \neq 0$. Из выражения (32) следует

$$C_1C_2 = 0, \tag{33}$$

$$C_2 = 0, \tag{34}$$

и

$$\frac{1}{C_1}\operatorname{ch}(C_1x_0) = y_0 + \mu \tag{35}$$

Теперь, с учетом выражения (35), уравнение цепной линии приобретает вид

$$y(x) = \frac{1}{C_1}\operatorname{ch}(C_1x) - \mu = y_0 + \frac{1}{C_1}\left[\operatorname{ch}(C_1x) - \operatorname{ch}(C_1x_0)\right]. \tag{36}$$

Уравнение цепной линии можно представить в альтернативном виде, используя величину

$$y(0) = y_0 - \frac{1}{C_1}\operatorname{ch}(C_1x_0), \tag{37}$$

так что, теперь уравнение цепной линии приобретает стандартное представление

$$y(x) = y(0) - \frac{1}{C_1}\operatorname{ch}(C_1x_0) + \frac{1}{C_1}\operatorname{ch}(C_1x) = y_0 + \frac{1}{C_1}\operatorname{ch}(C_1x), \tag{38}$$

или, как обычно пишут,

$$y(x) = y(0) - a\operatorname{ch}\frac{x_0}{a} + a\operatorname{ch}\frac{x}{a} = y_0 + a\operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right), \tag{39}$$

где параметр $a = \frac{1}{C_1}$. Для исключения из уравнения (36), (39) постоянной интегрирования C_1, согласно выражению (5) вычислим длину цепной линии с учетом того, что $y' = \operatorname{sh}(C_1 x)$:

$$l = \int\limits_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1+y'^2}dx = \int\limits_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1+(\operatorname{sh}(C_1x))^2}dx = \int\limits_{-x_0}^{x_0} \operatorname{ch}(C_1x)dx = \\ = 2\int\limits_{0}^{x_0} \operatorname{ch}(C_1x)dx = \frac{2}{C_1}\operatorname{sh}(C_1x)\bigg|_0^{x_0} = \frac{2}{C_1}\operatorname{sh}(C_1x_0). \quad (40)$$

Как легко видеть, трансцендентное уравнение

$$\frac{1}{2}C_1 l = \operatorname{sh}(C_1x_0) \quad (41)$$

имеет единственное имеющее физический смысл положительное решение C_1, которое при заданных l и x_0 определяется численно с помощью итерационной процедуры.

Выражения (38), (41) в совокупности определяют полное и точное решение задачи об уравнении $y = y(x)$ цепной линии длиной l, свободно подвешенной в поле тяжести Земли в симметричных относительно вертикальной оси системы координат Oxy точках $-x_0$ и x_0.

Замечание. Вид уравнения цепной линии $y = y(x)$ определяется единственным параметром C_1 (или $a = \frac{1}{C_1}$) и не зависит ни от массы (плотности) нити, ни от величины ускорения свободного падения g. Иными словами, при прочих равных условиях, легкая и тяжелая нити будут провисать одинаково и на Земле, и на Луне.

Компьютерное моделирование цепной линии

Обсуждение истории гиперболических функций было бы неполным без обсуждения современных подходов к моделированию цепной линии с помощью современных средств ИКТ. Тем более, что такое моделирование может быть без большого труда реализовано всюду, где есть компьютер, без обременительных требований как к его техническим возможностям, так и к программному обеспечению. Многочисленные работы отечественных и зарубежных педагогов-исследователей (см., например, работы [1, 2, 3, 4, 6–13] и др.) предлагают неизменно увлекающие обучающихся на разных ступенях образования задачи, в которых свободно подвешенная цепочка являет собой объект математического и численного моделирования и изучения.

Точное математическое решение задачи предопределяет и постановку восходящей к Гюйгенсу модельной задачи — задачи моделирования цепной линии полной массой m и длиной l цепочкой, состоящей из n равноотстоящих одинаковых по массе точечных масс $m_1 = \frac{m}{n}$, соединенных тонкими гибкими невесомыми нитями равной длины $l_1 = \frac{l}{n+1}$.

Будем считать, что, как и в точном решении, цепочка точечных масс подвешена в симметричных относительно вертикальной оси системы координат Oxy точках с координатами $(-x_0, y_0)$ и (x_0, y_0) (см. рис. 9).

Длину цепочки $l = (n+1)l_1$ выберем достаточно большой, так чтобы выполнялось условие $l > 2x_0$. При этом, однако, глубина провисания не слишком велика, так чтобы выполнялось условие

$$y(0) = y_0 - \frac{1}{C_1}\operatorname{ch}(C_1x_0) > 0,$$

где постоянная C_1 определяется условием:

$$\frac{1}{2}C_1 l = \operatorname{sh}(C_1x_0). \quad (42)$$

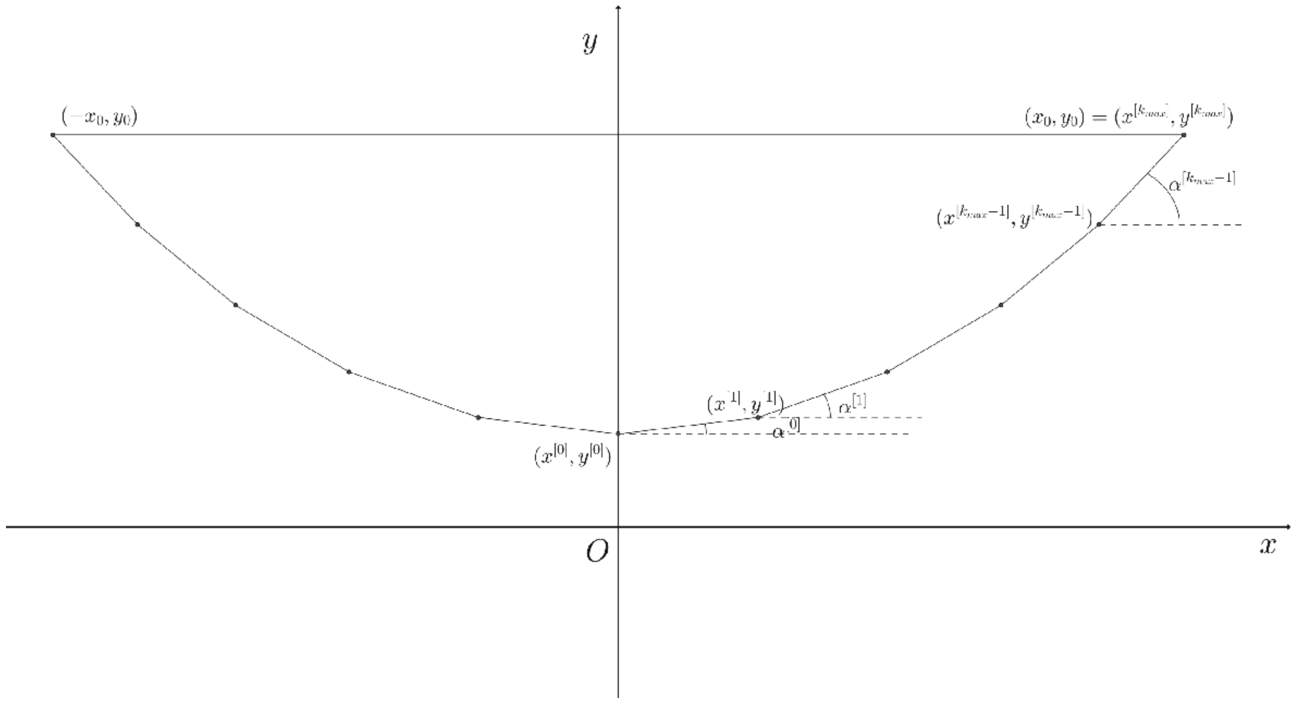


Рис. 9. Моделирование (по Гюйгенсу) цепной линии фиксированной массы и длины системой связанных равноотстоящих точечных масс

Выберем для определенности число грузиков n (задаваемый параметр задачи) нечетным: $n = 2k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots, k_{\max}$. При этом координаты "нулевого" грузика есть $y^{[0]} = y(0)$, $x^{[0]} = 0$. В силу симметрии задачи, очевидно, достаточно рассматривать только половину цепочки; для определенности — правую, с $x \geq 0$. Положения и координаты грузиков — точечных масс обозначим как $M^{[k]}(x^{[k]}, y^{[k]})$, $k = 0, 1, 2, \ldots, k_{\max} - 1$. (При $k = k_{\max}$ имеем правую точку подвеса).

Тогда минимизируемой целевой функцией будет потенциальная энергия выбранной правой половины всей цепочки:

$$W_1 = \frac{1}{2} m_1 g y(0) + m_1 g \sum_{k=0}^{k_{\max}-1} y^{[k]}.$$

В качестве варьируемых минимизирующих параметров удобно выбрать углы $\alpha^{[k]}$ с положительным направлением оси Ox, образуемые отрезками $M^{[k]}M^{[k+1]}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, k_{\max} - 1$, получающейся ломаной линии. Задание углов полностью определяет координаты точечных масс цепочки. Действительно,

$$\begin{aligned}
y^{[0]} &= y(0) = y_0 - l_1 \sum_{k=0}^{k_{\max}-1} \sin \alpha^{[k]}; \\
y^{[1]} &= y^{[0]} + l_1 \sin \alpha^{[0]}; \\
y^{[2]} &= y^{[1]} + l_1 \sin \alpha^{[1]}; \\
y^{[3]} &= y^{[2]} + l_1 \sin \alpha^{[2]}; \\
&\vdots \\
y^{[k]} &= y^{[k-1]} + l_1 \sin \alpha^{[k-1]};
\end{aligned}$$

$$x^{[0]} = 0;$$

$$
\begin{aligned}
x^{[1]} &= x^{[0]} + l_1 \cos\alpha^{[0]};\\
x^{[2]} &= x^{[1]} + l_1 \cos\alpha^{[1]};\\
x^{[3]} &= x^{[2]} + l_1 \cos\alpha^{[2]};\\
&\vdots\\
x^{[k]} &= x^{[k-1]} + l_1 \cos\alpha^{[k-1]};
\end{aligned}
$$

В качестве варьируемых параметров оптимизации возможно, также выбрать угловые разности $\Delta\alpha^{[k]} = \alpha^{[k+1]} - \alpha^{[k]}$. Тогда

$$\alpha^{[0]} \equiv \Delta\alpha^{[0]};\;\; \alpha^{[1]} \equiv \alpha^{[0]} + \Delta\alpha^{[1]};\;\; \alpha^{[2]} \equiv \alpha^{[1]} + \Delta\alpha^{[2]};\ldots$$

и т. д.

При этом в силу физических соображений все $\Delta\alpha^{[k]} > 0$ и $\max\limits_k \alpha^{[k]} < \frac{\pi}{2}$ (90°). При проведении оптимизации условие $\Delta\alpha^{[k]} > 0$ можно указать в качестве дополнительного требования. Условие, отражающее фиксированность длины цепочки можно записать в виде

$$\frac{1}{2}l = l_1 \sum_{k=0}^{k_{\max}-1} \cos\alpha^{[k]}.$$

Подведем итоги сказанному. Минимизируя функционал потенциальной энергии правой половины цепочки грузиков — точечных масс

$$W_1 = \frac{1}{2}m_1 g y(0) + m_1 g \sum_{k=1}^{k_{\max}-1} y^{[k]}.$$

по параметрам оптимизации $\alpha^{[k]}$ (причем все $\alpha^{[k]} > 0$) при дополнительном требовании

$$\frac{1}{2}l = l_1 \sum_{k=0}^{k_{\max}-1} \cos\alpha^{[k]} = Const,$$

можно определить координаты всех грузиков $M^{[k]}(x^{[k]}, y^{[k]})$, $k = 0, 1, 2, \ldots, k_{\max} - 1$, и форму образуемой ими ломаной. Левая половина цепочки будет симметрична правой относительно оси Oy. В предельном переходе при увеличении числа грузиков n (и соответствующем уменьшении массы каждого из них при постоянстве массы m и длины l всей цепи) модельная ломаная линия должна приближаться к точному решению задачи — уравнению цепной линии $y = y(x)$ (гиперболическому косинусу). Последнее можно контролировать путем прямого наблюдения приближения дробящейся ломаной линии к расчетной гладкой непрерывной кривой — точному решению задаче об уравнении цепной линии.

Комментарий. Если число грузиков четно, то $\alpha^{[0]} = 0$, $y^{[0]} = y^{[1]}$, и $x^{[1]} = l_1/2$.

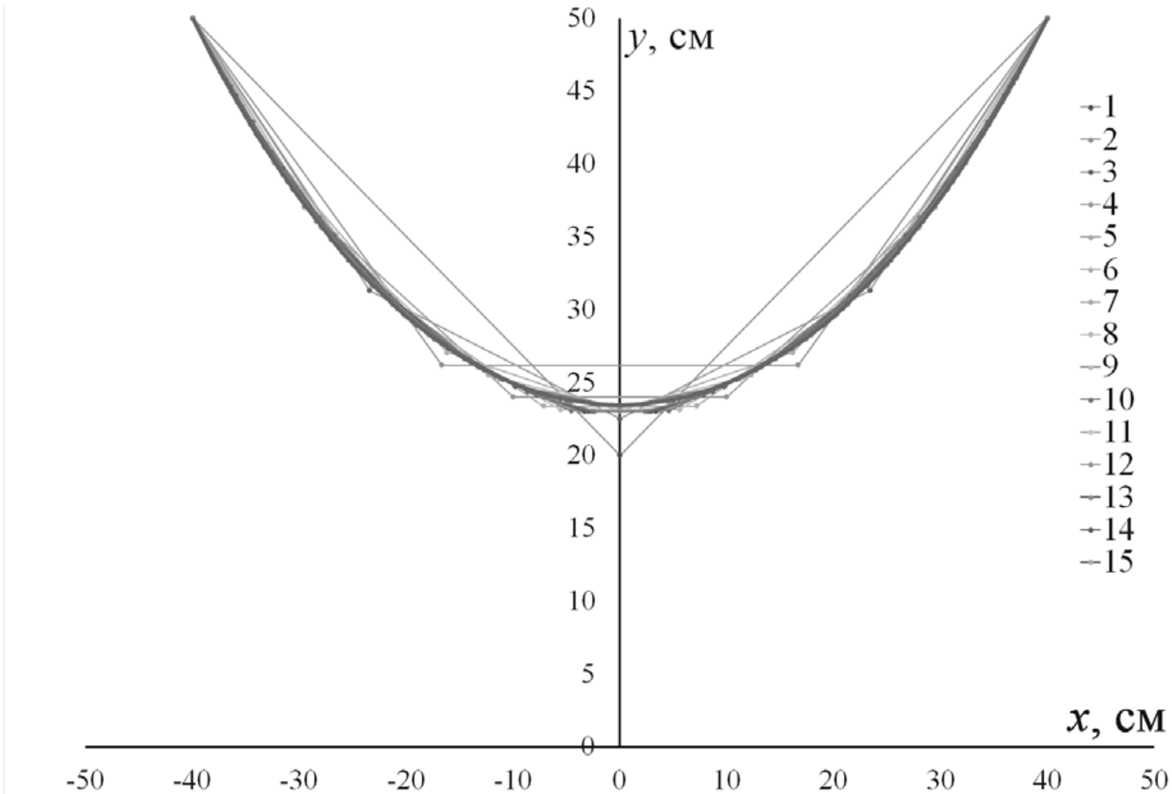


Рис. 10. Цепная линия $y = 33{,}82\,\mathrm{ch}(x/33{,}82)$ — сплошная линия, ломанные линии — модельные расчеты

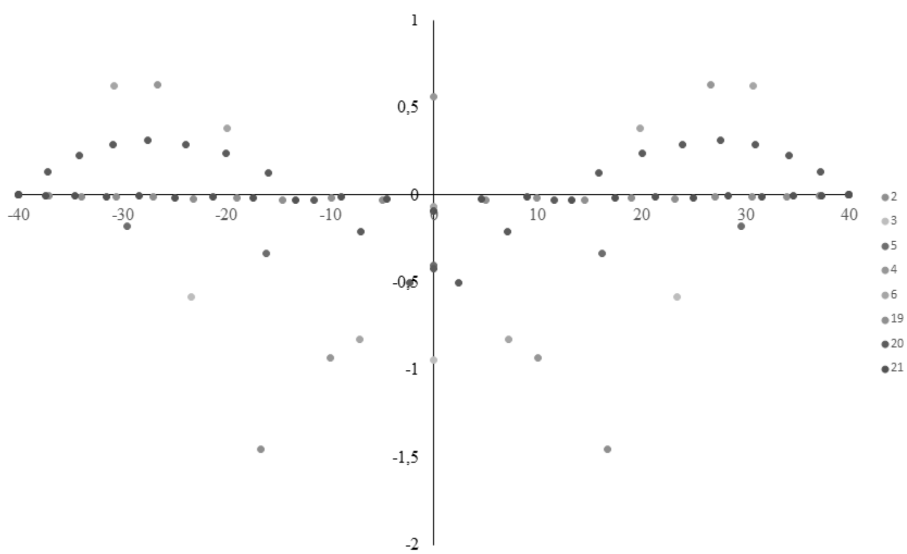


Рис. 11. Разности между модельными приближениями ломаной предельной цепной линией при увеличении числа точечных масс — узлов ломанной (в увеличенном масштабе)

Для примера возьмем цепь длиной 1 метр, массой 1 кг и «закрепим» ее в точках $(-40, 50)$ и $(40, 50)$. Будем увеличивать количество грузиков от 1 до 21. На рис. 10 видно, как при увеличении числа грузиков, модельная линия приближается к теоретической. Масштабированную величину отклонений точечных масс-узлов ломаной от предельной расчетной цепной линии показывает рис. 11. Как и следовало ожидать, с увеличением числа точечных масс ломаная линия быстро стремится к предельной цепной линии, а отклонение становится все меньше. Уже $n_{\max} = 21$ обеспечивает практически полное согласие между точным графиком цепной линии и модельной ломаной «цепной линией».

Сопоставление с натурным экспериментом

Проведем натурный эксперимент. Возьмем кусок обычной хозяйственной цепи. При измерении с помощью рулетки ее длина оказалась равной $l = 107 \pm 0,5$ см, а измеренная с помощью цифровых весов масса $m = 820 \pm 0{,}5$ г.; число звеньев цепи $n = 41$ (рис. 12). Подвесим цепь свободно на два находящихся на одной горизонтали гвоздя так, чтобы она была симметрична относительно установленной с помощью отвеса вертикальной оси. Проведя расчет для этой цепи по формулам для координат узловых точек $\left(x^{[k]}, y^{[k]}\right)$ из предыдущего раздела и совместив полученный с помощью мобильного телефона снимок цепи и модельную ломанную, мы получили *точное*, без каких-либо подгонок, соответствие модели, описанной в предыдущем разделе.

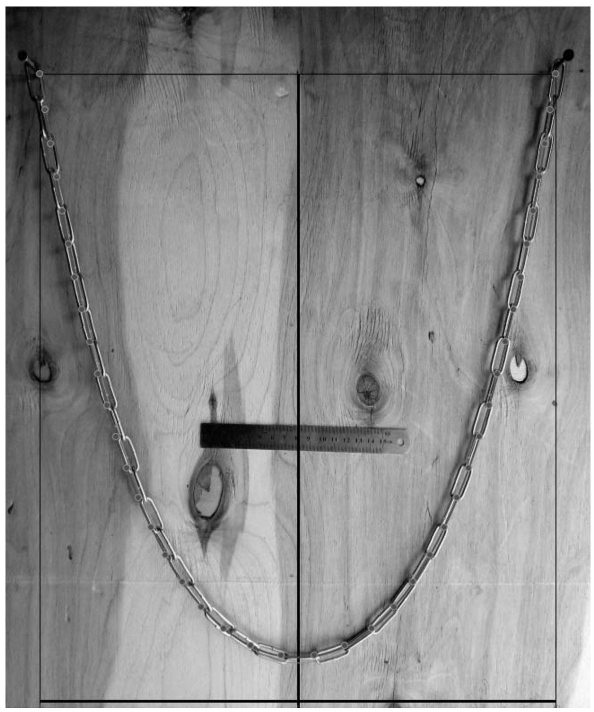


Рис. 12. Реальная цепь и ее модель

Заключение

В краткое заключение нашей довольно объемной работы отметим, что, как показывает анализ литературы, гиперболические функции и, прежде всего, гиперболический косинус (цепная линия) были и остаются поныне активными «действующими лицами» в самых разных разделах современной математики, физики, механики, навигации. На современном этапе наиболее перспективным видится педагогический потенциал свободно подвешенной цепи как удобного, и доступного для разных уровней образования, от обучающегося основной общей школы — до студента классического или педагогического университета, объекта для теоретического, модельного и натурного учебно-исследовательского изучения с использованием широкого спектра внутри- и межпредметных связей математики с физикой, механикой, ИКТ. Не вызывает сомнений, что практическая реализация педагогического потенциала этого подхода будет эффективно способствовать формированию и развитию важных в будущей любой профессиональной деятельности выпускников исследовательских навыков и креативного мышления.

Литература

1. Nedev S. The catenary — an ancient problem on the computer screen // European Journal of Physics. - 2000. - V. 21. - № 5. - P. 451-457.

2. Sobbich E.M. Kurva Catenary Dan Aproksimasi Parabola, Evaluasi Perbedaan Titik Koordinat Dan Panjang Busur [English: Catenary Curve and Parabolic Approximation, Evaluation of Coordinate Point Difference and Arc Length] // Journal Mat Stat. - 2009. - V. 9. - N. 2. - P. 100-107.

3. Ben-Abu Y., Eshach H., Yizhaq H. Interweaving the Principle of Least Potential Energy in School and Introductory University Physics Courses // Symmetry. - 2017. - V. 9. - N. 3. - P. 45-1-12.

4. Федосеев В.М. Лабораторные работы по математике с развитием темы // Математика в Школе. - 2010. - № 6. - С. 62-69.

5. Nicol Imperi. The determination of the equation of the catenary by Huygens, Leibniz and Bernoulli / PhD in Mathematics. - Rome: University of Rome, 2015. - 55 p.

6. Старова О.А. Цепная линия // Математика. Всё для учителя. - 2015. - № 12. - С. 31-33.

7. Саранин В.А. К задаче о висячей цепочке // Учебная физика. - 2016. - № 3. - С. 30-33.

8. Очков В.Ф., Цуриков Г.Н., Чудова Ю.В. Осторожно: Цепная функция // Информатика в школе. - 2017. - № 4 (127). - С. 58-62.

9. Аксенова О.В., Бодряков В.Ю. Система разноуровневых лабораторных работ по математике с применением ИКТ как инструмент фронтального формирования учебно-исследовательских и творческих умений обучающихся. С. 460-462 / В сб. материалов XXVIII Международной конференции “Современные информационные технологии в образовании”, Москва-Троицк: Фонд “БАЙТИК”, 27 июня 2017 г. - 602 с.
URL: http://ito.bytic.ru/uploads/files/conf_2017.pdf

10. Очков В.Ф. Цепная линия = физика + математика + информатика // Информатика в школе. - № 3. - 2018. - С. 56-63.
URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/catenary.pdf.

11. Аксенова О.В., Бодряков В.Ю. Лабораторные работы по математике с применением ИКТ как инструмент формирования исследовательских умений студентов педагогического вуза. С. 175-181 / В сб. докладов и научных статей Всероссийской научно-практической конференции “Состояние и перспективы развития ИТ-образования”, посвященной 50-летию Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова (Чебоксары, 16-18 ноября 2017 г.). - Чебоксары: Изд-во Чувашского гос. ун-та, 2018. - 520 с.

12. Аксенова О.В., Бодряков В.Ю., Быков А.А., Топорова Н.В. Оптимизационная задача о провисании цепной линии. С. 123-130 / В сб.: Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий: межвузовский сборник научных работ / Урал. гос. пед. ун-т. - Екатеринбург: Урал. гос. пед. ун-т, 2018. - 314 с.

13. Аксенова О.В., Бодряков В.Ю. Натурный эксперимент с применением средств ИКТ и мобильных устройств как инструмент формирования исследовательских умений студентов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». - 2018. - Т. 15. - № 4. - С. 363-372.

Бодряков Владимир Юрьевич,
заведующий кафедрой высшей математики и методики обучения математике Уральского государственного педагогического университета, доктор физ.-мат. наук, доцент.

E-mail: Bodryakov_VYu@e1.ru

Быков Антон Александрович,
преподаватель, Екатеринбургского автомобильно-дорожного колледжа.

E-mail: bykov_antony@mail.ru

Теория вероятностей и основной вопрос преферанса

В. Г. Ильичев

Мы сыграли с Талем десять партий
В преферанс, очко и на бильярде,
Таль сказал: «Такой не подведет».
(В. Высоцкий. Честь шахматной короны)

В настоящее время имеется много книг, в которых достаточно хорошо излагаются технические приемы карточных игр, например, преферанса. Однако эти навыки являются лишь тактической составляющей игры. Для высокого уровня игры большое значение имеет и стратегическая сторона дела. Так, на известном сайте [1] приведены вероятности реализации того или иного количества взяток для сложных («дырявых») комбинаций карт определенной масти. Однако это лишь простейший элемент стратегии. Гораздо чаще игроку решать, по сути, основной вопрос преферанса — говорить *раз* (=брать прикуп) или говорить *пас* (=не брать прикуп), особенно когда на руках нет явных шести и более взяток. Ниже на примере популярного варианта игры — »Ростов» — обсудим эту проблему[1] [2].

Напомним два базовых факта из «бухгалтерии» этой игры:

1. При розыгрыше распасов каждый игрок стремится взять как можно меньше взяток. При своем проигрыше распасов с N взятками игрок теряет $5N$ вистов. Обычно проигрыш на партию составляет 25–30 вистов (т. е. в среднем 27.5 вистов).

2. При заказе игры одним из игроков (= обязательство взять определенное число взяток $\geq$ 6) остальные игроки (= вистующие) пытаются помешать заказчику. В случае объявления «шестерной» игры и последующем недоборе одной взятки (= «пятак») проигрыш заказчика составляет:

   штрафные за недобор одной взятки — $3 \times 10 = 30$.
   штрафные за «подсад в гору» — $20 \times 3/4 = 15$.
   потери от того, что вистующие взяли 5 взяток — $5 \times 2 = 10$.

Следовательно, в случае неудачи игрок теряет 55 вистов. Отсюда следует

Осторожный принцип. *Лучше проиграть распасы с девятью взятками, чем сыграть «пятак».*

Если бы игра состояла лишь из одной партии, то следовало бы действовать в соответствие с данным принципом. В реальности же игра включает в себя большое количество (=пул) партий и, не исключено, что это может привести к модификации данного принципа. Так оно и происходит, а именно, имея достаточно крупные карты на руках, лучше придерживаться новой стратегии

Рискованный принцип. *Лучше сыграть «пятак» + «шестерик», чем два раза проиграть распасы.*

В самом деле, в первом случае убыток игрока (в вистах) составляет:

«пятак» $= -55$; «шестерик» $= +20 \times 3/4 - 8 = +7$. В целом, находим -48 вистов.

А во втором случае проигрыш с крупными картами на каждых распасах равен 27,5 вистов. Значит, при проигрыше двух распасов убыток составляет -55.

Разумеется, первый случай более предпочтителен.

[1] Удивительно, но в городе Ростов-на-Дону почти не знают этот вариант игры, а более распространен его громоздкий аналог — Академия.

Из приведенных выше простых арифметических соображений следует, что последователь осторожного принципа будет слишком часто играть и проигрывать распасы. А сторонник смелого принципа будет реже играть и проигрывать распасы. Здесь самое трудное — провести грань в ситуациях, где заведомо не нужно рисковать (следует говорить *пас*), а где, напротив, целесообразно это сделать (следует говорить *раз*).

Заметим, что такая смена стратегии напоминает «революцию» в шахматах 60-х годов. Тогда спокойную позиционную технику сменила рискованная игра, основанная на интуитивных жертвах шахматного материала. Олицетворением этого направления был Михаил Таль.

Перейдем теперь к решению поставленной выше проблемы, опирающегося на понятия силы карточной комбинации и вероятностные свойства прикупа.

Сила комбинации. Определим *силу* (S) конкретной комбинации карт фиксированной масти (например, пики). Грубо говоря, S — это оценка снизу количества взяток, которое может дать данная комбинация (I) играющему, и она не зависит от расположения остальных карт данной масти на руках двух вистующих. На примере конкретного набора $I =$ ТД10 поясним суть вычисления его оценки.

1. Сначала с помощью компьютерного датчика случайных чисел из остаточного множества $J = \{K, B, 9, 8, 7\}$ сформируем наборы карт вистующих (V_1 и V_2). Напомним, что такой датчик случайных чисел (h) обычно реализует их равномерное появление на отрезке [0, 1]. Полагаем:

если $h < 1/2$, то карту К включаем во множество V_1 , иначе К относим к V_2.

Аналогично поступаем и с остальными картами из J.

Пусть, например, получены $V_1 = \{K7\}$ и $V_2 = \{B98\}$.

2. Обсудим стратегии разыгрывания данного расклада. Считаем, что игра происходит в открытую, и первым всегда ходит играющий. Разумеется, ему это не всегда выгодно, но данное допущение сильно упрощает анализ. Также договоримся, что играющий заранее планирует *порядок* выкладывания своих карт. Как найти ему оптимальный порядок ходов?

Ниже запись комбинации через дефис, например, Т-Д-10 подразумевает следующий порядок ходов: сначала выставляется Т, затем Д и потом 10. Когда задан порядок ходов «наивного» играющего (π_0), тогда задача «хитрых» вистующих найти порядок (π_1 и π_2) выкладывания своих карт, чтобы минимизировать количество набираемых игроком взяток (Q).

При использовании компьютера это достигается простым перебором всех возможных порядков ходов вистующих (их здесь совсем немного). Так, обнаружено:

1. при Т-Д-10 на порядках 7-К и 8-9-В реализуется минимум $Q = 1$;
2. для порядка Т-10-Д имеем Q=2 при всех порядках π_1 и π_2;
3. при порядке Д-Т-10 на К-7 и 8-9-В реализуется $Q = 1$;
4. для порядка Д-10-Т на К-7 и 8-В-9 находим $Q = 1$;
5. при порядке 10-Т-Д получаем Q=2 для всех π_1 и π_2;
6. для порядка 10-Д-Т на 7-К и В-8-9 имеем $Q = 1$.

Окончательно, игроку следует выбрать наиболее выгодный ему порядок ходов (Т-10-Д или 10-Д-Т). Знакомые с теорией игр сразу узнают процедуру построения так называемого *максимина.* В этой связи, обозначим через

$$W(I, V_1, V_2) = \max_{\pi_0} \min_{\pi_1, \pi_2} Q(I, V_1, V_2).$$

Далее, следует произвести новую генерацию карт вистующих и вернуться к прежнему алгоритму построения нового W.

Отметим, что при следующей генерации карт вистующих $V = \{KB7\}$ и $V = \{98\}$ получаем $W = 1$. А значения $W = 0$ и $W = 3$ не реализуемы ни в какой генерации карт вистующих.

Пусть таких пар генераций $(V_1, V_2)^i$ произведено N штук, тогда сила данной комбинации есть среднее по всем полученным W. Формально, имеет место

$$S(I) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} W(I, (V_1, V_2)^i),$$

где N — достаточно большое число, например, $N = 3000$.

Теперь значение силы может быть и нецелым числом. В частности, для ТД10 получено значение силы, равное 1.58.

Перейдем к расчету силы комбинации с учетом взятия прикупа. Пусть на руках игрока имеется некоторая комбинация в пике I силы $S = S(I)$. После взятия прикупа возможны следующие три случая:

1. Когда в прикупе нет карт пиковой масти (X), то комбинация остается прежней и её сила, разумеется, не изменяется.

2. Если в прикупе имеется ровно одна карта пиковой масти (X), то возникает расширенная комбинация $I^+ = I + X$. Таких расширений может быть несколько штук. Например, для $I =$ ТД10 имеем пять возможных комбинаций $I^+ =$ ТКД10, ТДВ10, ТД109, ТД108, ТД107. Вычислим среднее значение силы I^+. По сути, требуется вычислить среднее арифметическое по всем допустимым X:

$$S^+(I) = \frac{1}{m}\sum_{X} S(I + X),$$

где m — количество допустимых расширений с одной картой.

3. Пусть в прикупе оказались две карты пиковой масти, тогда рассмотрим расширенную комбинацию $I^{++} = I + X + Y$. Так, в рамках предыдущего примера имеет место $(X, Y) = (KB)$, (К9), (К8), (К7), (В9), (В8), (В7), (98), (97). (87). Теперь определим силу комбинации I^{++} как среднее арифметическое по всем допустимым X и Y:

$$S^{++}(I) = \frac{1}{m}\sum_{X,Y} S(I + X + Y).$$

где m — количество допустимых расширений с двумя картами.

Для ряда конкретных комбинаций (см. таблицы 1–6), содержащих туза или короля, приведем значения S, S^+, S^{++}.

Таблица 1. Сила комбинаций с одной или двумя картами из прикупа

S \ I	Т	К	ТК	ТД	ТВ	КД	КВ
S	1	0	2	1.03	1	1	0.07
S^+	1.15	0.45	2.23	1.77	1.46	1.6	1.22
S^{++}	1.49	1.2	3.51	3.09	2.94	3.06	2.68

Таблица 2. Сила ТК — комбинаций одной или двумя картами из прикупа

S \ I	ТКД	ТКВ	ТК10	ТК9-ТК7	ТК 87	ТК 987
S	3	2.31	2.06	2	3.28	4.75
S^+	3.9	3.52	3.42	3.4	4.81	6
S^{++}	5	4.85	4.85	4.85	6	7

Таблица 3. Сила ТД — комбинаций одной или двумя картами из прикупа

S \ I	ТДВ	ТД10	ТД9	ТД8-ТД7	ТД 87	ТД 987
S	2.06	1.58	1.38	1.31	2.37	3.98
S^+	3.22	2.92	2.85	2.82	4.31	5.67
S^{++}	4.55	4.47	4.47	4.47	5.75	7

Таблица 4. Сила ТВ — комбинаций одной или двумя картами из прикупа

S \ I	ТВ10	ТВ9	ТВ8-ТВ7	ТВ 87	ТВ 987
S	1.19	1.06	1.06	2.25	3.75
S^+	2.85	2.7	2.67	4.13	5.67
S^{++}	4.33	4.33	4.33	5.75	7

Таблица 5. Сила КД — комбинаций одной или двумя картами из прикупа

S \ I	КДВ	КД10	КД9	КД8-КД7	КД 87	КД 987
S	2	1.39	1.13	1.06	2.37	3.75
S^+	3.12	2.9	2.82	2.8	4.13	5.33
S^{++}	4.4	4.32	4.32	4.32	5.5	6.67

Таблица 6. Сила КВ — комбинаций одной или двумя картами из прикупа

S \ I	КВ10	КВ9	КВ8	КВ7	КВ 87	КВ 987
S	1.07	0.74	0.63	0.58	1.49	3.24
S^+	2.52	2.35	2.29	2.27	3.87	5.17
S^{++}	4.18	4.15	4.15	4.15	5.42	6.67

Вероятностные свойства

Обсудим вероятностные характеристики расположения мастей в прикупе (Π) в зависимости от состава мастей на десяти картах играющего. А именно, пусть a, b, c, d - количество карт в пике (п), трефе (т), бубне (б) и черве (ч) на руках игрока. Можно считать, что две карты прикупа являются последовательной случайной выборкой из оставшихся 22 карт. Этот набор содержит $8-a$, $8-b$, $8-c$, $8-d$ карт перечисленных мастей. Отсюда легко получаем вероятности реализации тех или иных прикупов. Так, вероятность одновременного нахождения двух пик в прикупе равна

$$p_{11} = \frac{8-a}{22} \times \frac{7-a}{21},$$

а вероятность пребывания там одной пики и одной трефы равняется

$$p_{12} = \frac{8-a}{22} \times \frac{8-b}{21} + \frac{8-b}{22} \times \frac{8-a}{21}.$$

В таблице 7 приведены указанные вероятности для шести основных раскладов ($R = abcd$).

Таблица 7. Вероятности нахождения мастей в прикупе в зависимости от расклада

П \ R	3322	3331	4321	4330	4420	4411
п+п, p_{11}	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03
т+т, p_{22}	0.04	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03
б+б , p_{33}	0.06	0.04	0.06	0.04	0.06	0.09
ч+ч , p_{44}	0.06	0.09	0.09	0.12	0.12	0.09
п+т , p_{12}	0.11	0.11	0.09	0.09	0.07	0.07
п+б , p_{13}	0.13	0.11	0.10	0.09	0.10	0.12
п+ч , p_{14}	0.13	0.15	0.12	0.14	0.14	0.12
т+б , p_{23}	0.13	0.11	0.13	0.11	0.10	0.12
т+ч , p_{24}	0.13	0.15	0.15	0.17	0.14	0.12
б+ч , p_{34}	0.16	0.15	0.18	0.17	0.21	0.21

Теперь рассмотрим сложные комбинации на десяти исходных картах игрока: I_1 в пике, I_2 в трефе, I_3 в бубне и I_4 в черве. Игроку требуется принять решение, что заказывать: *раз* или *пас*?

Для $k = 1, \ldots, 4$ обозначим через $S_k = S(I_k)$. Здесь простейший подход заключается в подсчете *простой* суммы силы комбинаций по всем мастям $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ и соблюдении следующего правила (= принцип действия персептрона [3]):

Правило 1. *Если Σ больше некоторого порога, то следует говорить раз.* Однако с учетом «волшебной» силы прикупа скорее нужно ориентироваться на следующую *ожидаемую* оценку (на 12 картах):

$$\begin{aligned}\Sigma = p_{11}(S_1^{++} + S_2 + S_3 + S_4) + p_{22}(S_1 + S_2^{++} + S_3 + S_4) + \\ + p_{33}(S_1 + S_2 + S_3^{++} + S_4) + p_{44}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4^{++}) + \\ + p_{12}(S_1^{+} + S_2^{+} + S_3 + S_4) + p_{13}(S_1^{+} + S_2 + S_3^{+} + S_4) + \quad p_{14}(S_1^{+} + S_2 + S_3 + S_4^{+}) + \\ + p_{23}(S_1 + S_2^{+} + S_3^{+} + S_4) + p_{24}(S_1 + S_2^{+} + S_3 + S_4^{+}) + p_{34}(S_1 + S_2 + S_3^{+} + S_4^{+}).\end{aligned}$$

В этой сумме каждое большое слагаемое отвечает за один из десяти вариантов прикупа согласно приведенной выше таблице 7, а вероятности этих событий $\{p_{ij}\}$ берутся из столбца расклада $R = I_1I_2I_3I_4$.

Здесь после сноса двух слабейших карт величина Σ несколько снижается, но обычно не более чем на 0.2.

Приведем ожидаемые оценки для ряда исходных наборов комбинаций.

1. Для расклада вида 4321 рассмотрим:

$$I_1 = \text{Т987}, \quad I_2 = \text{ТВ7}, \quad I_3 = \text{КД}, \quad I_4 = \text{К}.$$

Оценка — простая сумма — равна всего лишь $S = 2.24 + 1.06 + 1 + 0.0 = 4.30$.

Для подсчета ожидаемой оценки потребуются значения $I_1^{+} = 4.06$ и $I_1^{++} = 5.75$, а остальные требуемые слагаемые приведены в таблицах 1–6. Теперь с учетом вероятностей третьего столбца таблицы получаем $\Sigma \approx 6.4$. Это существенно больше, чем исходная оценка. Но достаточно ли этого чтобы сказать *раз*?

2. Для расклада 3331 приведем набор комбинаций:

$$I_1 = \text{ТД7}, \quad I_2 = \text{ТВ7}, \quad I_3 = \text{ТВ7}, \quad I_4 = \text{Т}.$$

Исходная оценка довольно скромная $S = 4.43$. Для подсчета ожидаемой оценки будем использовать ту же схему, но с учетом второго столбца таблицы. Итак, получаем $\Sigma \approx 6.7$.

3. Рассмотрим расклад вида 3322:

$$I_1 = \text{ТД7}, \quad I_2 = \text{ТД7}, \quad I_3 = \text{КД}, \quad I_4 = \text{КД}.$$

Здесь исходная оценка равна $S = 4.62$, а ожидаемая равна $\Sigma \approx 6.8$.

4. Рассмотрим расклад вида 4330:

$$I_1 = \text{ТКДВ}, \quad I_2 = \text{КВ7}, \quad I_3 = \text{КВ7}, \quad I_4 = \text{пусто}.$$

Исходная простая оценка равна 5.14, а при подсчете ожидаемой суммы (внимание!!!) необходимо задать количественные значения S_4, S_4^+, S_4^{++} и для отсутствующей червы. С помощью компьютера находим универсальные (для любой отсутствующей масти) константы

$$S = 0, \quad S_4^+ = 0.12 \text{ и } S_4^{++} = 0.33.$$

В целом, получаем $\Sigma \approx 7.2$.

Эмпирический опыт показывает: при значении порога = 6.5 число удачных «шестериков» более, чем в восемь раз превышает количество «пятаков», ввиду неравенства $(+7) \times 8 - 55 \times 1 > 0$. Поэтому весьма правдоподобно звучит

Правило 2. Если Σ больше 6,5, то следует говорить *раз*. Значит, в примерах 2, 3 и 4 следует говорить *раз*, а в первом примере нужно говорить *пас*.

Проблема четырех тузов. Бытует мнение, что на четырех тузах следует всегда говорить *раз*. Так ли это на самом деле? В этой связи, рассмотрим слабейшие варианты раскладов с 4 тузами:

а) $I_1 =$ Т987, $I_2 =$ Т87, $I_3 =$ Т7, $I_4 =$ Т. Здесь простая оценка равна 5.25, а ожидаемая — 6.91, поэтому согласно правилу 2 говорим *раз*;

б) $I_1 =$ Т987, $I_2 =$ Т7, $I_3 =$ Т7, $I_4 =$ Т7. Простая оценка равна 5.25, а ожидаемая — 6.53. Согласно правилу 2 говорим *раз*;

в) $I_1 =$ Т987, $I_2 =$ Т987, $I_3 =$ Т, $I_4 =$ Т. Простая оценка равна 6.49, а ожидаемая — 8.03. Поэтому говорим *раз*;

г) $I_1 =$ Т87, $I_2 =$ Т87, $I_3 =$ Т7, $I_4 =$ Т7. Простая оценка равна 4, а ожидаемая — 5.79. Поэтому говорим *пас*;

д) $I_1 =$ Т87, $I_2 =$ Т87, $I_3 =$ Т87, $I_4 =$ Т. Простая оценка равна 4, а ожидаемая — 6.17. Поэтому говорим *пас*.

В заключене отметим, что если вдруг при соблюдении правила 2 обнаружатся убытки, то игроку следует просто несколько увеличить порог. Не исключено, что такая процедура »обивания порогов» может надолго затянуться[2]. Поэтому актуальна проблема:

Какое значение порога приносит наибольший доход?

Литература

1. URL: Клуб любителей преферанса//prefclub.by.ru
2. Правила преферанса: URL: Ростов//gambler.ru
3. Розенблатт Ф. Принципы нейродинамики. - М: Мир, 1965.

Ильичев Виталий Григорьевич,
Главный научный сотрудник Южного
Научного Центра, Ростов-на-Дону,
доктор техн. наук, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: vitaly369@yandex.ru

[2]Наконец-то, стал понятен загадочный смысл выражения «обивать пороги».

Применение инвариантов при инволюционном преобразовании треугольников

Е. Г. Смольянова

В работе построен алгоритм нахождения инволюционного преобразования, переводящего заданный непрямоугольный треугольник на координатной плоскости в прямоугольный.

Введём в рассмотрение прямоугольную декартову систему координат XOY и пусть точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$ такие, что образованный ими треугольник T — не прямоугольный и у него нет стороны, параллельной координатной оси OY (рис. 1). Договоримся далее не различать треугольники, полученные из треугольника T параллельным переносом. Обозначим это множество треугольников через $\{T\}$. Постановка задачи: найти инволюционное преобразование U такое, что $T_U = U(T)$ является прямоугольным треугольником при $T \in \{T\}$. В таком случае $U(T_U) = T$.

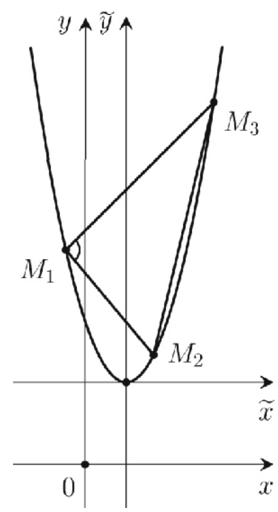


Рис. 1

Опишем алгоритм решения поставленной задачи в виде последовательности Шагов 1–4.

Шаг 1. Находим уравнение $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ (единственной) параболы, которая содержит все вершины треугольника T, $(a \neq 0)$.

Шаг 2. Если $b^2 + c^2 \neq 0$, то осуществляем параллельный перенос координатных осей, добиваясь приведения этого уравнения в новой системе координат к виду $\tilde{y} = a \cdot \tilde{x}^2$. Обозначим последнюю параболу через P_a. В случае $b = c = 0$ переходим к Шагу 3.

Шаг 3. Обратимся к семейству функций, используемых при проективных заменах координат:

$$K = \left\{ \frac{r_1 \cdot x + q_1 \cdot y + l_1}{r_2 \cdot x + q_2 \cdot y + l_2},\ r_i,\ q_i \in R\ ,\ q_i\ \neq 0\ ,\ (i = 1, 2) \right\}.$$

Для дальнейшего нам нужно иметь пару таких функций $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ из K, которые удовлетворяют условиям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(x, y) = u, \\ \beta(x, y) = v. \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha(u, v) = x, \\ \beta(u, v) = y. \end{array} \right. . \tag{1}$$

Тогда отображение $(x, y) \mapsto (u, v)$ окажется так называемым инволюционным (инволютивным) или инволюцией (от лат. involutio — изгиб, свёртывание) как совпадающее со своим обратным.

Можно непосредственно проверить, что условию (1) удовлетворяет, например, следующая пара функций:

$$(\alpha(x,y),\ \beta(x,y)) = \left(-\frac{(P\cdot Q+2)\cdot x+4\cdot P\cdot y+2\cdot Q}{2\cdot(P\cdot x+P^2\cdot y+1)},\ \frac{2\cdot Q\cdot x+4\cdot y+Q^2}{4\cdot(P\cdot x+P^2\cdot y+1)}\right),$$

где $P,\ Q \in R$, причём $P \neq 0$ и $P\cdot Q-2\neq 0$. Далее, поскольку вершины M_i треугольника T имеют координаты $(\tilde{x}_i; \tilde{y}_i) = (\tilde{x}_i; a\cdot\tilde{x}_i^2)$, то

$$\begin{cases} \breve{x}_i = \alpha(\tilde{u},\tilde{v}), \\ \breve{y}_i = \beta(\tilde{u},\tilde{v}). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{u} = \alpha(\tilde{x}_i, a\cdot\tilde{x}_i^2), \\ \tilde{v} = \beta(\tilde{x}_i, a\cdot\tilde{x}_i^2). \end{cases} \qquad (i=1,2,3).$$

Переобозначим:

$$\alpha(t, a\cdot t^2) = \alpha_1(t), \quad \beta(t, a\cdot t^2) = \beta_1(t).$$

Функции $\alpha_1(t)$ и $\beta_1(t)$ являются, очевидно, дробно-квадратическими, если $P \neq 0$. Следовательно, каждая из них при известных условиях на коэффициенты (см., например, [1]) имеет единственный нетривиальный инвариант, т. е. является автоморфной. А именно, если

$$y(t) = \frac{a_1\cdot t^2+b_1\cdot t+c_1}{a_2\cdot t^2+b_2\cdot t+c_2}\ ,$$

то необходимо иметь:

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 \neq \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\ (a_1\neq 0,\ a_2\neq 0).$$

Тогда инвариант функции $y(t)$ есть функция

$$\varphi(t) = -\frac{S_2\cdot t+S_1}{S_3\cdot t+S_2}\ ,$$

где $S_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $S_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $S_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Элементы определителей в формулах для расчёта $S_1,\ S_2,\ S_3$ получаются из матрицы коэффициентов

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

вычёркиванием столбца с соответствующим номером. Так как $\varphi(\varphi(t)) = t$ при всех допустимых значения аргумента, то $\varphi(t)$ — инволюционное преобразование. Можно проверить, что условия $P\neq 0$ и $P\cdot Q-2\neq 0$ гарантируют существование нетривиальных инвариантов у функций $\alpha_1(t)$ и $\beta_1(t)$, если только $a \neq 0{,}25$. Соответствующие инварианты такие:

$$\varphi_\alpha(t) = -\frac{2\cdot a\cdot P\cdot t+1}{a\cdot P\cdot(P\cdot t+2)}\ ,\quad \varphi_\beta(t) = -\frac{a\cdot(P\cdot Q+2)\cdot t+Q}{a\cdot(2\cdot P\cdot t+P\cdot Q+2)}\ .$$

Шаг 4. Выберем любую вершину преобразуемого треугольника Т (выбор зависит от того, какой из его углов мы намереваемся «выпрямить», т. е. добиться для его образа величины в 90°). Пусть, например, выбрана вершина $M_1(\tilde{x}_1; a\cdot\tilde{x}_1^2)$. Если $N_1(\tilde{u}_1;\tilde{v}_1) = U(M_1)$, то

$$\tilde{u}_1 = \alpha_1(\tilde{x}_1);\ \tilde{v}_1 = \beta_1(\tilde{x}_1).$$

Теперь подберём коэффициенты P и Q так, чтобы одновременно выполнялись следующие равенства:

$$\tilde{x}_2 = \varphi_\alpha(\tilde{x}_1), \quad \tilde{x}_3 = \varphi_\beta(\tilde{x}_1) \qquad (\Leftrightarrow \tilde{x}_1 = \varphi_\alpha(\tilde{x}_2) = \varphi_\beta(\tilde{x}_3)). \tag{2}$$

Эта задача сведётся к решению системы двух уравнений относительно P и Q. Предположим, что система совместна. (Условия её совместности можно исследовать отдельно). Тогда

$$U(M_2) = N_2(\tilde{u}_2; \tilde{v}_2) = (\alpha_1(\varphi_\alpha(\tilde{x}_1)); \beta_1(\varphi_\alpha(\tilde{x}_1))) = (\alpha_1(\tilde{x}_1);\ \beta_1(\tilde{x}_2)) = (\tilde{u}_1;\ \beta_1(\tilde{x}_2));$$
$$U(M_3) = N_3(\tilde{u}_3; \tilde{v}_3) = (\alpha_1(\varphi_\beta(\tilde{x}_1)); \beta_1(\varphi_\beta(\tilde{x}_1))) = (\alpha_1(\tilde{x}_3); \beta_1(\tilde{x}_1)) = (\alpha_1(\tilde{x}_3); \tilde{v}_1).$$

Следовательно, если

$$\alpha_1(\tilde{x}_1) \neq \alpha_1(\tilde{x}_3) = \alpha_1(\varphi_\beta(\tilde{x}_1)) \text{ и } \beta_1(\tilde{x}_1) \neq \beta_1(\tilde{x}_2) = \beta_1(\varphi_\alpha(\tilde{x}_1)), \tag{3}$$

то образы вершин треугольника T окажутся вершинами прямоугольного треугольника $\triangle N_1N_2N_3$ с прямым углом $\angle N_2N_1N_3$ (рис. 2). А если учесть то обстоятельство, что преобразование U переводит прямую — в прямую, то поставленная в начале статьи задача на шаге 4 будет решена. Искомая инволюция — преобразование U. (Если (3) не выполняется, то треугольник — вырожденный).

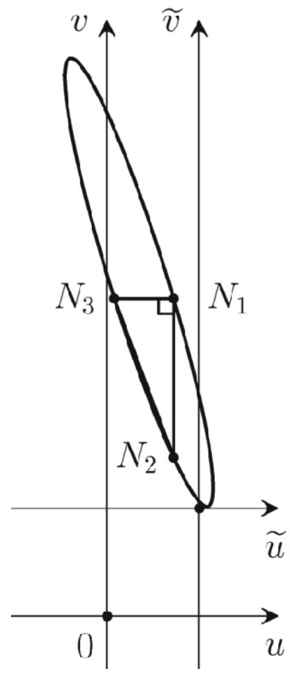


Рис. 2

Применим описанный алгоритм к какому-нибудь конкретному треугольнику Т. Пусть это будет треугольник с вершинами в точках $M_1(-2; 23), M_2(3; 13),\ M_3(8; 103)$. Последовательно реализуем Шаги 1–4.

Шаг 1. Решаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4 \cdot a - 2 \cdot b + c = 23, \\ 9 \cdot a + 3 \cdot b + c = 13, \\ 64 \cdot a + 8 \cdot b + c = 103. \end{cases}$$

Её единственное решение: $(a, b, c) = (2, -4, 7)$. (Заметим, что $a \neq 0,25$). Следовательно, найдена допустимая парабола $P_a = P_2$, которой принадлежат все точки M_i $(i = 1, 2, 3)$:

$$y = 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 7.$$

Шаг 2. Поскольку

$$2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 7 = 2 \cdot (x-1)^2 + 5,$$

то полагаем

$$\tilde{x} = x - 1, \quad \tilde{y} = y - 5.$$

Уравнение параболы, преобразованное к новым координатам, будет таким:

$$\tilde{y} = 2 \cdot \tilde{x}^2.$$

При этом $\tilde{x}_{M_1} = \tilde{x}_1 = -3; \tilde{x}_{M_2} = \tilde{x}_2 = 2;\ \tilde{x}_{M_3} = \tilde{x}_3 = 7$.

Шаг 3. С учётом $a = 2$:

$$\varphi_\alpha(t) = -\frac{4 \cdot P \cdot t + 1}{2 \cdot P \cdot (P \cdot t + 2)}\ , \quad \varphi_\beta(t) = -\frac{2 \cdot (P \cdot Q + 2) \cdot t + Q}{2 \cdot (2 \cdot P \cdot t + P \cdot Q + 2)}\ .$$

Шаг 4. Выбираем вершину $M_1\ (\tilde{x}_1; 2 \cdot \tilde{x}_1^2)$ и приступаем к поиску коэффициентов P и Q, удовлетворяющих условиям (2). В результате будем иметь:

$$\begin{cases} 12 \cdot P^2 + 4 \cdot P - 1 = 0\ , \\ 8 \cdot P \cdot Q - 84 \cdot P + Q + 16 = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 12 \cdot P^2 + 4 \cdot P - 1 = 0\ , \\ Q = \frac{4 \cdot (21 \cdot P - 4)}{8 \cdot P + 1}\ . \end{cases}$$

Решения квадратного уравнения:

$$P_1 = \frac{1}{6}, \qquad P_2 = -\frac{1}{2},$$

откуда $(P_1, Q_1) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{6}{7}\right), (P_2, Q_2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{58}{3}\right)$. Заметим, что $P_i \cdot Q_i \neq 2,\ (i = 1, 2)$. Следовательно, можно предложить две различные пары функций $\big(\alpha_1(t),\ \beta_1(t)\big)$ и, соответственно, две различные инволюции U_1 и U_2 со свойством: $U(M_i) = N_i,\ (i = 1, 2, 3)$. Сделаем выбор. Пусть

$$(P, Q) = (P_1, Q_1) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{6}{7}\right).$$

Тогда

$$\alpha_1(t) = -\frac{3 \cdot (28 \cdot t^2 + 39 \cdot t - 36)}{7 \cdot (t^2 + 3 \cdot t + 18)};$$
$$\beta_1(t) = \frac{18 \cdot (98 \cdot t^2 - 21 \cdot t + 9)}{49 \cdot (t^2 + 3 \cdot t + 18)}$$

и, значит,

$$N_1\big(\tilde{u}_1; \tilde{v}_1\big) = \big(\alpha_1(-3); \beta_1(-3)\big) = \left(-\frac{33}{14}; \frac{954}{49}\right);$$
$$N_2\big(\tilde{u}_2; \tilde{v}_2\big) = \big(\alpha_1(-3); \beta_1(2)\big) = \left(-\frac{33}{14}; \frac{3231}{686}\right);$$
$$N_3\big(\tilde{u}_3; \tilde{v}_3\big) = \big(\alpha_1(7); \beta_1(-3)\big) = \left(-\frac{4827}{616}; \frac{954}{49}\right).$$

(Условия (3), очевидно, выполняются). Итак,

$$N_i(u_i; v_i) = U(M_i) = (\tilde{u}_i + 1; \tilde{v}_i + 5),\ (i = 1, 2, 3),$$

а именно:

$$N_1(u_1; v_1) = \left(-\frac{19}{14}; \frac{1199}{49}\right);$$
$$N_2(u_2; v_2) = \left(-\frac{19}{14}; \frac{6661}{686}\right);$$
$$N_3(u_3; v_3) = \left(-\frac{4211}{616}; \frac{1199}{49}\right).$$

Проверка сводится к подтверждению каждого из следующих равенств:

$$\alpha(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) + 1 = x_i;\ \beta(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i) + 5 = y_i, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Замечание. Для точек параболы P_a:

$$\begin{cases} \alpha(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{x}, \\ \beta(\tilde{u}, \tilde{v}) = a \cdot \tilde{x}^2. \end{cases} \Leftrightarrow \beta(\tilde{u}, \tilde{v}) = a \cdot \alpha^2(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Последнее уравнение преобразуется к виду

$$(2 \cdot Q \cdot \tilde{u} + 4 \cdot \tilde{v} + Q^2) \cdot (P \cdot \tilde{u} + P^2 \cdot \tilde{v} + 1) = a \cdot ((2 + P \cdot Q) \cdot \tilde{u} + 4 \cdot P \cdot \tilde{v} + 2 \cdot Q)^2 \tag{4}$$

и определяет кривую второго порядка — инволюционный образ параболы P_a. Её параметрические уравнения:

$$\tilde{u} = \alpha_1(\tilde{x}_1); \quad \tilde{v} = \beta_1(\tilde{x}_1).$$

Чтобы не иметь (4) уравнением прямых (параллельных, совпадающих или мнимых), следует добавить условие $P{\cdot}Q{+}2 \neq 0$. Так, в рассмотренном выше примере соответствующая кривая является эллипсом, поскольку функции $\alpha_1(t)$ и $\beta_1(t)$ — ограниченные на всей числовой прямой. Определить тип кривой (4) можно и непосредственно через инварианты уравнения: $I_2 > 0$, $\ I_1 \cdot I_3 < 0$. Вообще, так как $I_2 = (1 - 4 \cdot a) \cdot P^2 \cdot (2 + P \cdot Q)^2 \neq 0$ при всех допустимых (в данном исследовании) P и Q, то уравнение (4) определяет либо эллипс, либо гиперболу. При этом точка $H_\infty = \left(-\frac{2}{P}; \frac{1}{P^2}\right)$ является образом «недостижимых» точек ветвей параболы P_a, а точка $H_0 = \left(-Q; \frac{Q^2}{4}\right)$ — образом её вершины. Любопытным оказывается тот факт, что H_∞ и H_0 — точки одной и той же параболы $\tilde{P}$ с уравнением $\tilde{v} = 0{,}25 \cdot \tilde{u}^2$ (независимо от значений P, Q и a). Так что инволюционные образы параболы P_a соответствующими точками H_∞ и H_0 всякий раз «привязаны» к параболе $\tilde{P}$. Исследованием прочих свойств отображения U можно заняться в рамках уже другой статьи.

Литература

1. Чучаев И.И. Методы решения уравнений: учеб. пособие в 3 ч. / Ч. 1: Функциональные приёмы. - Саранск: Издательство Мордовского университета, 2018. - 333 с.

Смольянова Елена Григорьевна,
старший преподаватель кафедры математического анализа
факультета математики и информационных технологий
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский
государственный университет им. Н.П. Огарёва».

E-mail: janovaeg@mail.ru

Задачи математического конкурса в ЮУрГУ. II

А. Ю. Эвнин

В Южно-Уральском государственном университете начиная с 2009 г. регулярно проводятся математические конкурсы. Площадкой проведения конкурса является группа «Математический конкурс в ЮУрГУ» в социальной сети «В контакте». Благодаря интернету в число активных участников конкурса вошли не только студенты и аспиранты ЮУрГУ, но также студенты других вузов и взрослые любители математики из разных городов России и стран ближнего зарубежья. В каждом конкурсе шесть задач, разнообразных по тематике (от элементарной геометрии и алгебры до избранных глав математического анализа и дискретной математики) и сложности (от занимательных задач типа головоломок до задач, содержащих новые научные результаты).

Статья, содержащая материалы конкурсов 41–60, является продолжением публикации [9]. Решения задач конкурсов 1–25 и 26–50 можно найти соответственно в книгах [13] и [7]. Первая из них переведена на испанский язык [15]. См. также [12].

Данную подборку задач можно использовать в работе студенческих и школьных математических кружков, для подготовки к олимпиадам и для самообразования. Задачи взяты, в основном, из книг, указанных в библиографическом списке, а также материалов школьных и студенческих олимпиад последних лет. Некоторые задачи публикуются впервые.

Конкурс 41

241. [Удвоение стороны] Дан произвольный треугольник ABC. Разрежьте его на 3 части, из которых можно сложить треугольник, в котором есть сторона длиной $2AB$.

242. [Лемма Архимеда] Две окружности касаются внутренним образом в точке B. Хорда большей окружности AC касается меньшей окружности в точке P. Докажите, что BP — биссектриса в треугольнике ABC.

243. [Уравнение 100-й степени] Решите уравнение

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + \frac{x(x-1)\dots(x-99)}{100!} = 0.$$

244. [Разбиение тетраэдра] Каждое ребро тетраэдра разделено на n равных частей. Через точки деления проведены всевозможные плоскости, параллельные граням тетраэдра. На сколько частей эти плоскости разбивают тетраэдр?

245. [Несобственный интеграл с параметром] Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ вычислите интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}.$$

246. [На 10 девчонок. . .] На сайте знакомств зарегистрировано m мужчин и n женщин. Каждый мужчина переписывается хотя бы с одной женщиной, и, если какие-нибудь мужчина A и женщина B переписываются между собой, то число мужчин, переписывающихся с B, не превосходит числа женщин, переписывающихся с A. Докажите, что $m \leqslant n$.

Конкурс 42

247. [Пятитонки] Несколько ящиков вместе весят 48 тонн, причём каждый из них весит не более одной тонны. Какое наименьшее количество пятитонных грузовиков заведомо достаточно, чтобы увезти этот груз?

248. [Много корней] Сколько корней имеет уравнение $\cos 2016x = x$?

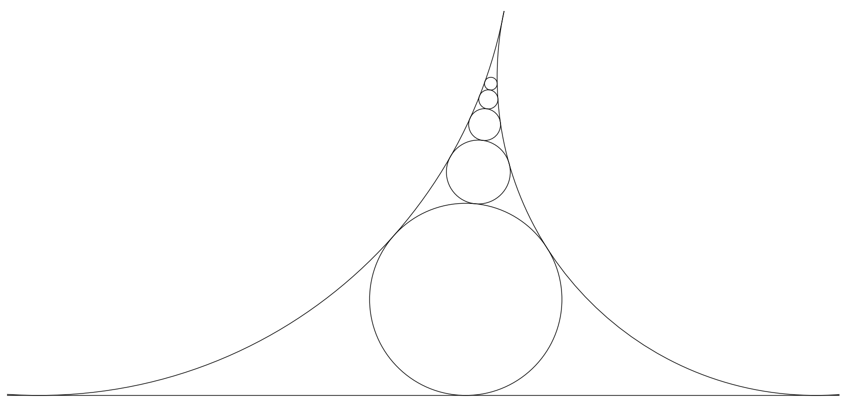
249. [Циркуль и линейка] Даны отрезки длиной a и b. Как с помощью циркуля и линейки построить отрезок длиной $\sqrt[4]{a^4+b^4}$?

250. [Много радикалов] Сходится ли ряд

$$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots?$$

251. [Вспомните Ролля] Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$. Известно, что $f(a)=f(b)=0$. Докажите, что существует точка $x_0\in(a;b)$ такая, что $f'(x_0)=-f(x_0)$.

252. [Цепочка окружностей] Рассмотрим последовательность окружностей (C_n) (r_n — радиус окружности C_n). Окружности C_1, C_2 и C_3 касаются попарно друг друга внешним образом, а также касаются прямой L, при этом $r_3<r_2$ и $r_3<r_1$. Для $n\geqslant 4$ окружность C_n задаётся следующими условиями: C_n касается внешним образом окружностей C_1, C_2 и C_{n-1}, при этом $r_n<r_{n-1}$.



Докажите, что отношение расстояния от центра окружности C_n до прямой L к радиусу этой окружности зависит только от n (т. е. не зависит от r_1 и r_2) и найдите его.

Конкурс 43

253. [Ладьи и доминошки] На доске размером 10×10 стоят 10 не бьющих друг друга ладей. Можно ли остальные клетки замостить доминошками? (Доминошка — прямоугольник размером 1×2 или 2×1).

254. [Найдите угол] В четырёхугольнике $ABCD$ провели диагонали. Известно, что

$$\angle ABD=\angle CBD=35^\circ,\quad \angle CAB=38^\circ,\quad \angle CAD=71^\circ.$$

Чему равен угол ACD?

255. [Два орла] Двое по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадут подряд два орла. С какой вероятностью победит первый игрок?

256. [Найдите площадь] Найдите площадь фигуры, ограниченной линией

$$(x-y)^2 + x^2 = 1.$$

257. [Демидович 2690] Исследуйте на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}.$$

258. [Конгресс] На конгресс съехалось n^2 участников. Оказалось, что у каждого из них не более n знакомых (среди участников). Докажите, что найдётся n папарно незнакомых участников конгресса.

Конкурс 44

259. [Хоровод] В хоровод стало 40 детей. Оказалось, что 22 из них держали за руку мальчика, а 30 — девочку. Сколько было мальчиков в хороводе?

260. [Белые мыши] Имеется 100 бутылок с вином, в одной из которых вино испорчено. Требуется в течение часа при помощи белых мышей обнаружить плохое вино. Если мышь выпьет плохого вина, через час она станет синей. Разрешается накапать вина из разных бутылок (но не более чем из пяти) каждой мыши, и дать им выпить одновременно. Какого наименьшего числа мышей достаточно для решения поставленной задачи?

261. [Прямой угол] В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Известно, что $\angle ABC = 120°$. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ — прямоугольный.

262. [Игра в определитель] Первоначально таблица 5×5 пуста. Аня выбирает любую клетку и записывает в неё любое число от 1 до 25. Затем Ваня в другую клетку записывает число от 1 до 25, отличное от записанного Аней. И далее игроки по очереди записывают в незанятые клетки числа от 1 до 25, отличные от ранее записанных. Если определитель соответствующей матрицы делится на 25, выигрывает Аня; в противном случае побеждает Ваня. Кто выигрывает при правильной игре?

263. [Числа по кругу] При каких $n > 3$ можно по кругу расставить числа $1, 2, \dots, n-1$ так, чтобы разность квадрата каждого и произведения соседних делилась на n?

264. [Рулетка] На игровой рулетке n секторов с числами $1, 2, \dots, n$. Сколько в среднем раз нужно прокрутить барабан, чтобы общая сумма выпавших очков стала не меньше n?

Конкурс 45

265. [Сечение пирамиды] Верно ли, что у любой выпуклой 4-угольной пирамиды имеется сечение, являющееся параллелограммом?

266. [Уравнение 501-й степени] Сколько действительных корней имеет уравнение

$$x(x-2)(x-4)\dots(x-1000) = (x-1)(x-3)\dots(x-999)?$$

267. [100-значное число] Барон Мюнхгаузен написал на листке бумаги 100-значное число, разбил его запись на две части, в результате чего получилось два многозначных числа. Барон утверждает, что одно из этих чисел является квадратом второго. Не обманывает ли барон?

268. [Задача на максимум] Пусть $n \geqslant 3$, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \dots, n$. Найдите как функцию от n наибольшее значение выражения

$$S_n = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1.$$

269. [Предел дробной части] Пусть n — натуральное число. Найдите предел при $n \to \infty$ дробной части суммы $2n$ слагаемых

$$\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}+\dots+\sqrt{n^2+2n}.$$

270. [Линейная рекуррента] Пусть $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$. Последовательность (x_k) такова, что $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ и при $k \geqslant 0$

$$x_{k+2} = \frac{cx_{k+1} - (n-k)x_k}{k+1}.$$

Пусть при фиксированном n число c принимает наибольшее значение, при котором $x_{n+1} = 0$. Выразите x_k через n и k, где $1 \leqslant k \leqslant n$.

Конкурс 46

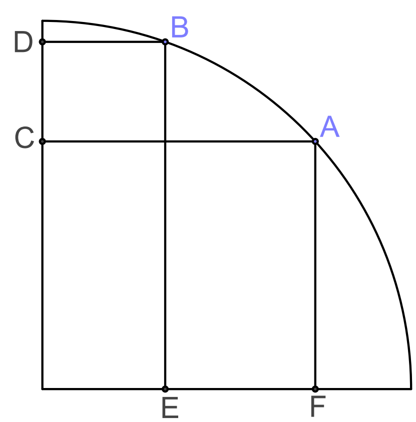
271. [Перекроить в равнобедренный треугольник]
Дан произвольный треугольник. Разрежьте его на такие три части, из которых можно сложить равнобедренный треугольник.

272. [Из единиц и двоек] Найдите наименьшее натуральное число, кратное 2016, в десятичной записи которого есть только единицы и двойки.

273. [Многочлены 100-й степени]
Пусть $f(x) = x^{100} + 1$, $g(x) = x^{100} + 2x^{99} + 3x^{98} + \dots + 100x + 101$, $h(x) = f(x)g^{(100)}(x) - f'(x)g^{(99)}(x) + \dots - f^{(99)}(x)g'(x) + f^{(100)}(x)g(x)$, где $f^{(n)}(x)$ — n-я производная. Вычислите $h(2016)$.

274. [Криволинейные трапеции]

На единичной окружности с центром в начале координат отмечена дуга AB, расположенная целиком в первой четверти. Пусть C, F и D, E — проекции точек A и B на координатные оси.



Докажите, что сумма площадей криволинейных трапеций $DBAC$ и $EBAF$ зависит только от длины дуги AB и не зависит от её местоположения.

275. [Задача на минимум] Пусть $n \geqslant 3$, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \dots, n$. Найдите как функцию от n наименьшее значение выражения

$$S_n = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1.$$

276. [Ограниченная функция] Функция $f(x)$ определена и дифференцируема на всей числовой прямой. Известно, что $\forall x \quad |f(x)| < 1$. Докажите: найдётся такая точка c, что

$$f^2(c) + (f'(c))^2 < 1.$$

Конкурс 47

277. [Большинство — в меньшинстве?] На собрании группы присутствовало нечётное число студентов. Они провели голосование по нечётному числу вопросов. Каждый их студентов голосовал «за» или «против» по каждому предложенному вопросу. По каждому вопросу принято то решение, за которое проголосовало большинство. Участник голосования будет доволен его итогами, если по большинству вопросов было принято то решение, за которое он голосовал. Может ли число довольных быть меньше половины от числа голосующих?

278. [Рациональное уравнение] Решите уравнение

$$\frac{10}{x+10}+\frac{10\cdot 9}{(x+10)(x+9)}+\dots+\frac{10!}{(x+10)(x+9)\dots(x+1)}=11.$$

279. [Определитель 4-го порядка] Все элементы определителя четвёртого порядка равны 1 или -1. Найти наибольшее возможное значение этого определителя.

280. [Исследовать на сходимость] Последовательность задана так: $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Исследуйте её на сходимость в зависимости от a.

281. [Циклическое неравенство] По кругу стоят $2n$ положительных чисел. Каждое из них поделили на сумму n чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Пусть A — сумма полученных чисел. Докажите, что $A \geqslant 2$.

282. [Толстые и худые] На плоскости отмечены вершины выпуклого n-угольника ($n \geqslant 4$). Никакие четыре из них не лежат на одной окружности. Треугольник с вершинами в каких-либо отмеченных точках назовём «толстым», если описанный вокруг него круг содержит все остальные отмеченные точки, и «худым», если этот круг не содержит ни одной из остальных отмеченных точек. Докажите, что толстых треугольников столько же, сколько худых.

Конкурс 48

283. [Кто дипломат?] За круглым столом сидят трое: всегда правдивый рыцарь, всегда лгущий лжец и иногда правдивый дипломат. Сидящие за столом друг про друга знают, кто есть кто. Можно ли при помощи одного вопроса, требующего ответа «да» или «нет» и заданного одновременно всем троим, определить, кто из них дипломат?

284. [Иррациональное уравнение] Решите уравнение

$$2x+1+x\sqrt{x^2+1}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}=0.$$

285. [Флаги на мачтах] n флагов разных стран (по одному флагу от каждой страны), в том числе России, вывешивают на m мачтах (на одну мачту могут быть вывешены несколько флагов друг под другом), причём все способы вывешивания (с учётом порядка флагов и возможного оставления некоторых мачт пустыми) равновероятны. Какова вероятность того, что российский флаг будет висеть сверху на одной из мачт?

286. [Восстановить таблицу] К прямоугольной таблице $m \times n$, клетки которой первоначально были заполнены плюсами, Петя несколько раз применял следующую операцию: выбирал ряд (строку или столбец) и менял знаки во всех клетках этого ряда на противоположные. Какое наименьшее количество знаков можно оставить в полученной Петей таблице, чтобы её затем можно было однозначно восстановить?

287. [Средний квадрат] На сторонах параллелограмма независимо друг от друга случайным образом выбраны две точки. Найдите математическое ожидание квадрата расстояния между этими точками, если стороны параллелограмма равны a и b, а наименьший из углов равен α.

288. [Комбинаторное тождество] Пусть $n \geqslant 2$. Докажите тождество

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} k^{k-2} (n-k)^{n-k-2} = 2n^{n-3}.$$

Конкурс 49

289. [Тяни-Толкай] Тяни-Толкай может тянуть повозку (с грузом не более чем в 40 кирпичей) со скоростью 5 км/час, либо толкать повозку (с грузом не более чем в 70 кирпичей) со скоростью 2 км/час. Ему надо перевезти со склада 2017 кирпичей на расстояние 1 км. Аренда повозки стоит 1 руб за минуту. Сможет ли Тяни-Толкай уложиться в 1210 руб? (В начальный момент он и повозка находятся на складе; по завершению работы повозку следует вернуть на склад; время на погрузку-разгрузку не учитывать).

290. [Точка] На отрезке AB отмечена точка M. По одну сторону от отрезка AB построены квадраты $AMCD$ и $MBEF$. Прямые AF и BC пересекаются в точке N. Докажите, что прямая MN проходит через некоторую фиксированную точку, не зависящую от точки M.

291. [Площадь] Вычислите площадь фигуры, расположенной в первой четверти плоскости Oxy и ограниченной линией $(x+y)^3 = x - y$.

292. [Вещественный спектр] Пусть A — вещественная трёхдиагональная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix},$$

причём $\forall i \quad a_{i+1}c_i > 0$. Докажите, что все собственные значения матрицы A вещественные.

293. [Куку-руку] В начале 1990-х годов в России продавались вафли «Куку-руку». Внутри обёртки каждой вафли имелась одна из ста наклеек (все встречались с одинаковой вероятностью). Сколько в среднем нужно было купить вафелек «Куку-руку», чтобы собрать полный комплект наклеек (тем самым выиграв поездку в Диснейлэнд)?

294. [Тригонометрическое тождество] Пусть n — нечётное натуральное число. Докажите тождество

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(5 - 4\cos\frac{2\pi k}{n}\right) = 2^n - 1.$$

Конкурс 50

295. [Братья и яблоки] Мама купила 10 яблок. Она хочет угостить ими двух своих сыновей. Любой из братьев обидится, если получит яблок меньше, чем другой, или если общий вес его яблок будет хотя бы на 1 г меньше, чем у брата. Сможет ли мама не обидеть сыновей, если известно, что каждое яблоко весит не меньше 50 г и не больше 100 г? (Она не обязана отдавать сыновьям все яблоки, но хотя бы по одному они должны получить. Вес яблока может быть и нецелым числом.)

296. [Точки на границе] Пусть на отрезке AB как на диаметре построена полуокружность. Из точки C, лежащей на AB, проведены два луча под углом α к прямой AB, пересекающие полуокружность в точках D и E. Чему может быть равно расстояние между D и E, если $AB = d$?

297. [Три числа] Из множества чисел $\{1, 2, \ldots, 100\}$ случайно выбирают три различных числа. С какой вероятностью из этих чисел можно составить арифметическую прогрессию?

298. [Десять уравнений] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{1} + \dfrac{x_2}{2} + \cdots + \dfrac{x_{10}}{10} = \dfrac{0!}{10!}; \\ \dfrac{x_1}{2} + \dfrac{x_2}{3} + \cdots + \dfrac{x_{10}}{11} = \dfrac{1!}{11!}; \\ \dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_2}{4} + \cdots + \dfrac{x_{10}}{12} = \dfrac{2!}{12!}; \\ \qquad\qquad \cdots \\ \dfrac{x_1}{10} + \dfrac{x_2}{11} + \cdots + \dfrac{x_{10}}{19} = \dfrac{9!}{19!}. \end{cases}$$

299. [Бесконечное произведение] Пусть F_n — n-е число Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$). Докажите, что

$$\prod_{k=2}^{\infty} \frac{F_{2k}+1}{F_{2k}-1} = 3.$$

300. [Один общий знакомый] При каких n и k ($n > k > 1$) может случиться так, что среди n человек любые k имеют ровно одного общего знакомого среди остальных $n-k$ человек?

Конкурс 51

301. [Нечётные цифры] Вася умножил натуральное число $n > 1$ на 999 999 997. В полученном числе все цифры оказались нечётными. Найдите наименьшее возможное значение n.

302. [101 корова] В стаде 101 корова. Если увести любую одну, то оставшихся можно разделить на 5 групп по 20 коров в каждой, так что суммарный вес коров по всем группам один и тот же. Известно, что каждая корова весит целое число килограммов. Докажите, что все коровы весят одинаково.

303. [Произведение косинусов] Пусть n — натуральное число. Докажите, что

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} \cdot \cos\frac{2\pi}{2n+1} \cdot \cos\frac{3\pi}{2n+1} \cdot \cdots \cdot \cos\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}.$$

304. [Найдите угол] О выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A = 30^\circ$, $BC + CD + DB = AC$. Найдите $\angle C$.

305. [Оцените многочлен] Многочлен второй степени $f(x)$ на концах отрезка $[a; b]$ и в его середине принимает значения, по модулю не большие 1. Каково наибольшее возможное значение $f(x)$ на этом отрезке?

306. [Циклическое неравенство] Пусть $n \geqslant 4$. Для положительных чисел a_1, a_2,…, a_n докажите неравенство

$$1 < \frac{a_1}{a_n + a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1} + a_n + a_1} < \left[\frac{n}{2}\right].$$

Можно ли его усилить?

Конкурс 52

307. [Игра в спички] На столе лежит 2017 спичек. Аня и Боря играют в такую игру. Они по очереди забирают спички со стола. Аня любым своим ходом может забрать любое нечётное число спичек от 1 до 99, а Боря — любое чётное от 2 до 100. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто сможет гарантированно победить, если первый ход делает а) Боря; б) Аня?

308. [Три описанные окружности] На сторонах AB, BC и CA неравностороннего треугольника ABC отмечены соответственно точки K, L и M такие, что

$$\frac{AK}{KB} = \frac{BL}{LC} = \frac{CM}{MA} = \lambda.$$

Известно, что радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников AKM, BLK и CML, равны между собой. Какие значения может принимать число λ?

309. [Ряд с факториалами] Вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!}.$$

310. [Числа на доске] На доске было записано несколько (не обязательно различных) положительных чисел. Известно, что сумма этих чисел равна 96, сумма квадратов этих чисел равна 144, а сумма кубов равна 216. Сколько чисел записано на доске?

311. [Экстраполяция многочленом] Пусть a — некоторое число, а $f(x)$ — такой многочлен степени n, что $f(k) = a^k$ при $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Вычислите $f(n+1)$.

312. [Полоски] Валерий смог замостить прямоугольник $a \times b$ прямоугольниками двух видов: $1 \times m$ и $n \times 1$ (полоски из m клеток он располагал горизонтально, а полоски из n клеток — вертикально). Докажите, что он мог обойтись прямоугольниками только одного из этих двух видов.

Конкурс 53

313. [Ребус] Может ли быть верным равенство

$$\text{Р} \times \text{Е} \times \text{Ш} \times \text{И} = \text{С} \times \text{А} \times \text{М},$$

если в нём каждая буква заменяет некоторую цифру, причём разные буквы заменяют разные цифры?

314. [Бумажный треугольник] Из бумаги вырезан треугольник ABC с длинами сторон $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Его перегнули по прямой так, что вершина C оказалась в точке C_1 на стороне AB. Кроме того, в получившемся четырёхугольнике оказались равными два угла, примыкающие к линии сгиба. Найдите AC_1 и C_1B.

315. [Оценка снизу] Пусть $x > 0$, $y > 0$, $x + y = 1$. Докажите, что $x^x + y^y \geqslant \sqrt{2}$.

316. [Ортогональные матрицы] Пусть A и B — ортогональные матрицы одинакового размера. Известно, что сумма их определителей равна нулю. Докажите, что и определитель суммы этих матриц равен нулю.

317. [Вероятность встречи] План города представляет собой квадрат, разделённый на n^2 одинаковых кварталов квадратной формы. Из левого верхнего угла в противоположный угол вышел Антон, одновременно с ним с той же скоростью навстречу ему вышел Борис. С какой вероятностью они встретятся? На перекрестках направление выбирается произвольным образом, но так, чтобы длина пути была минимальна, т. е. Антон движется вниз или вправо, а Борис вверх или влево.

318. [Универсальная функция] Существует ли такая непрерывная функция $z = z(x, y)$ на квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$, что для любой непрерывной на отрезке $[0; 1]$ и по модулю не превосходящей 1 функции $f(x)$ найдется число $y(f)$ такое, что $\forall x \in [0; 1] \quad f(x) = z(x, y(f))$?

Конкурс 54

319. [Шахматный турнир] В шахматном турнире участвовало две девушки и несколько юношей. Каждый участник играл с каждым ровно один раз. Две девушки набрали вместе 8 очков, а все юноши набрали очков поровну. Сколько юношей участвовало в турнире? (За победу в партии даётся 1 очко, за ничью $\frac{1}{2}$ очка, за проигрыш 0 очков.)

320. [Вероятность делимости] Каждый из n человек назвал случайное натуральное число от 1 до $k - 1$. С какой вероятностью сумма этих чисел делится на k?

321. [Два ряда] Существует ли последовательность (a_n) такая, что ряд с общим членом $(\sin(a_n))$ сходится, а ряд с общим членом $(\sin(2a_n))$ расходится?

322. [Куб матрицы] Пусть A — матрица размером 3×3. Известно, что её определитель равен единице, след A и след A^{-1} равны нулю. Докажите, что $A^3 = I$, где I — единичная матрица размером 3×3.

323. [Неравенство для суперфакториала] Пусть $a = n!$, $b = (n + 1)!$, где $n \geqslant 3$ — натуральное число. Докажите, что

$$2^a \cdot b! < a^b \cdot b^a.$$

324. [Столбцы и строки] Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ и $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ — 20 различных действительных чисел. Составим матрицу размером 10×10, в которой в i-й строке и j-м столбце стоит число $a_i + b_j$ (для всех допустимых i и j). Известно, что произведение чисел в каждом столбце этой матрицы равно q. Докажите, что произведение чисел в каждой строке равно $-q$.

Конкурс 55

325. [Дорожные знаки] На прямолинейном шоссе стоят 100 дорожных знаков. На каждом написана сумма расстояний до остальных 99 знаков. Возможно ли, что на знаках написаны 100 разных чисел?

326. [Точка в правильном треугольнике] Точка P расположена внутри правильного треугольника ABC. Известно, что $PA = 57$, $PB = 65$, $PC = 73$. Найдите AB.

327. [Деление многочленов] Пусть

$$P(x) = x^{605} + x^{604} + x^{603} + x^{602} + x^{601} + 1; \quad Q(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

1) Докажите, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$.
2) Вычислите $S(-1)$, где $S(x)$ — частное от деления $P(x)$ на $Q(x)$.

328. [Три ряда] Пусть $\sum a_n$ и $\sum b_n$ — расходящиеся положительные ряды. Известно, что

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_k \geqslant a_{k+1} \geqslant \ldots; \quad b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_k \geqslant b_{k+1} \geqslant \ldots.$$

Может ли сходиться ряд $\sum \min(a_n, b_n)$?

329. [Три прыжка] Лягушка совершает прыжки, каждый — на метр. Направление каждого прыжка выбирается случайно (считаем, что случайная величина, равная углу поворота, распределена равномерно на отрезке $[-\pi; \pi]$). С какой вероятностью после трёх прыжков лягушка окажется на расстоянии не больше 1 м от начальной точки?

330. [Нетранзитивные тройки] В теннисном турнире приняли участие $2k$ игроков. Каждый сыграл с каждым одну встречу. Известно, что если i-й игрок выиграл у j-го, то сумма количества поражений i-го игрока и количества побед j-го игрока не меньше $2k-2$. Тройку игроков назовём *нетранзитивной*, если в играх между ними каждый одержал по одной победе. Найдите количество нетранзитивных троек в турнире.

Конкурс 56

331. [Крестики и нолики] По кругу выписаны 200 крестиков и 180 ноликов. Известно, что число пар стоящих рядом крестиков равно 50. Чему равно число пар стоящих рядом ноликов?

332. [Касательная] Известно, что график функции

$$y = x^6 - 10x^5 + 29x^4 - 4x^3 + ax^2,$$

где a — некоторая константа, лежит по одну сторону от некоторой прямой, имея с ней три общие точки. Найдите абсциссы точек касания.

333. [Минимакс] Пусть a, b, c, d, e — положительные целые числа. Их сумма равна 2018. Пусть $M = \max(a+b, b+c, c+d, d+e)$. Найдите наименьшее возможное значение M.

334. [Поможет Эйлер] Вычислите интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos 3x dx.$$

335. [Поможет Бертран] Назовём числовое множество *непростым*, если сумма любых двух различных элементов этого множества не является простым числом. Сколько способов разбить множество натуральных чисел на два непростых множества?

336. [Возвращаясь к коровам] Имеется чётное (но большее двух) количество действительных чисел. Если удалить любое из этих чисел, остальные можно разбить на два множества с одинаковыми суммами их элементов. Докажите, что все исходные числа равны нулю.

Конкурс 57

337. [Умный завхоз] Имеются 29 консервных банок массой 197, 198, 199, ..., 225 г. Этикетки с указанием веса потерялись, но завхозу кажется, что он помнит, какая банка сколько весит. Он хочет убедить в этом окружающих, которые никакой информацией о банках не владеют. Какое наименьшее количество гирь понадобится завхозу (он может взять гири любого веса), если и гири, и банки можно размещать на обеих чашках весов, а количество взвешиваний не ограничено?

338. [Квадрат и угол] $ABCD$ — квадрат. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки M и K такие, что $\angle BAM = \angle MKC = 30°$. Найдите $\angle AKD$.

339. [Игра: прибавить делитель] Аня и Боря играют в такую игру. На доске записано число 2. За один ход разрешается к числу прибавлять любой его делитель, кроме него самого. Выигрывает тот, после хода которого впервые получится число, большее 2018. Игроки ходят по очереди, а первый ход — за Аней. Сможет ли она победить, как бы искусно ни играл Боря?

340. [Красим точки] Вдоль окружности на равных расстояниях друг от друга стоят 97 точек. Аня и Боря по очереди красят по одной точке в синий или красный цвет (красить можно любую из ранее не покрашенных точек). Проигрывает тот, после хода которого появятся две соседние точки одного цвета. Кто выиграет при правильной игре?

341. [Вероятность составить n-угольник] На отрезок случайно (с равномерным законом распределения по отрезку) и независимо друг от друга бросаются $n-1$ точек, разбивающих его на n частей. С какой вероятностью из этих частей можно составить n-угольник?

342. [Матрица Гильберта] Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — действительные числа, не все равные нулю. Докажите, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{i+j-1} > 0.$$

Конкурс 58

343. [Делимость на 27] Найдите наименьшее натуральное число, записываемое только нулями и единицами, которое делится на 27.

344. [Лампочки в ряд] В ряд расположены n лампочек. Вначале все они выключены. Пусть $k \leqslant n$ — фиксированное натуральное число. Можно сколько угодно раз выполнять такую операцию: взять любые k подряд идущих лампочек и поменять их состояния (включённые выключить, а выключенные включить). Сколько разных комбинаций состояний лампочек можно получить?

345. [Евклидия] На прямой l отмечена точка M. Можно ли, проведя всего три линии (циркулем и линейкой), провести перпендикуляр к l из точки M?

346. [Три из пяти] Верно ли, что из любых пяти иррациональных чисел можно выбрать такие три числа, что сумма любых двух из них также иррациональное число?

347. [Несобственные интегралы] Пусть $\alpha > 0$ и

$$A(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x + 1}\, dx, \quad B(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x - 1}\, dx.$$

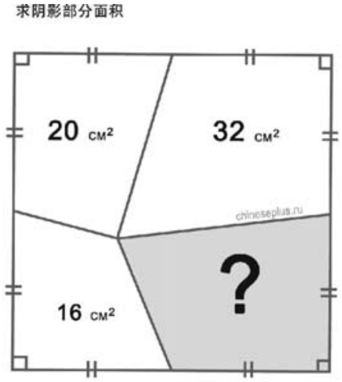
Вычислите $\dfrac{A(\alpha)}{B(\alpha)}$.

348. [Тригонометрический многочлен] Пусть m и k — натуральные числа, а $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — действительные числа. Докажите неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{m} \cos^{2k}(x_i - x_j) \geqslant \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} m^2.$$

Конкурс 59

349. [Задача из Китая]



350. [Ортогональные матрицы] Пусть A и B — ортогональные матрицы. Докажите, что

$$\det(B'A - A'B) = \det(A+B) \cdot \det(A-B).$$

(Здесь $'$ — знак транспонирования).

351. [Раскраска вершин] В простом графе n вершин, степень каждой не больше 11. Докажите, что вершины графа можно раскрасить в 4 цвета так, чтобы рёбер с одноцветными концами было не более n.

352. [Интересный предел] Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{C_n^k}\right)^n$.

353. [Шары в ящике] В ящике лежат m чёрных шаров и n белых ($m, n > 0$). Петя случайным образом достаёт из ящика по одному шару. Если подряд вытащено несколько (не менее одного) шаров одного цвета, а затем шар другого цвета, то последний возвращается в ящик, после чего процедура повторяется заново. Какова вероятность того, что последний вынутый шар белый?

354. [Ошибка братьев Ягломов] На шахматной доске размером $2n \times 2n$ расставляются слоны так, чтобы они били все поля. Докажите, что минимальное количество таких слонов равно $2n$. Сколько способов расставить $2n$ слонов, чтобы они били все поля?

Конкурс 60

355. [Удивительные числа] Назовём *удивительным* натуральное число с таким свойством: если каждую его цифру увеличить на единицу и полученные числа перемножить, то получится исходное число. Найдите все удивительные числа.

356. [Матричные равенства] Пусть A и B — ненулевые матрицы размером $n \times n$, где $n \geqslant 2$. Известно, что $ABA = A$. Следует ли отсюда, что $BAB = B$?

357. [Две функции] Функции f и g определены на $\mathbb{R}$, и для любых чисел x и y выполняется равенство

$$f(x + g(y)) = 2x + y.$$

Найдите функцию $g(x + f(y))$.

358. [Производная 2019-го порядка] Пусть

$$f(x) = \frac{\cos(\sin x)}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

Вычислите $f^{(2019)}(0)$.

359. [Предел последовательности интегралов] Докажите, что для произвольного $a_0 \in (0; 2\pi)$ последовательность, заданная условием

$$a_{n+1} = \int\limits_0^{a_n} \left(1 + \frac{1}{4}\cos^{2n+1} t\right) dt,$$

сходится. Найдите её предел.

360. [Трёхмерная ладья] Составим из единичных кубиков куб с ребром 4. Сколько способов расставить в этих кубиках 16 ладей так, чтобы они не били друг друга? (Ладья бьёт в 3 направлениях, параллельных рёбрам куба).

Ответы

243. $1, 2, \ldots, 100$. **244.** $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$. **245.** $\dfrac{\pi}{4}$. **247.** 12. **248.** 1283. **250.** Да. **252.** $2(n-2)^2-1$. **253.** Нет. **254.** 54°. **255.** 0,56. **256.** π. **257.** Ряд сходится. **259.** 16. **260.** 33. **262.** Аня. **263.** При простых n. **264.** $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$. **265.** Да. **266.** 501. **267.** Обманывает. **268.** $\dfrac{2n^3+3n^2-11n+18}{6}$. **269.** $\dfrac{1}{6}$. **270.** C_{n-1}^{k-1}. **272.** 12 122 222 112 **273.** $102 \cdot 100!$. **275.** $\dfrac{n^3+3n^2+5n-6}{6}$, если n чётно; $\dfrac{n^3+3n^2+5n-3}{6}$, если n нечётно. **277.** Да, может. **278.** $-\dfrac{1}{11}$. **279.** Нет. **280.** При $0 \leqslant a \leqslant 1$ последовательность сходится к 1; при остальных a последовательность расходится. **283.** Да. **284.** $-\dfrac{1}{2}$. **285.** $\dfrac{m}{n+m-1}$. **286.** $m+n-1$. **287.** $\dfrac{(a+b)^2}{6}$. **289.** Нет. **291.** $\dfrac{1}{8}$. **293.** $100 \cdot \sum\limits_{n=1}^{100} \dfrac{1}{n} \approx 518{,}7$. **295.** Сможет. **296.** $d\cos\alpha$. **297.** $\dfrac{1}{66}$. **298.** $x_i = \dfrac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!(n-i)!}$, $i = 1, \ldots, 10$. **300.** Если $k=2$, то $n = 3, 5, 7, 9, \ldots$; если $k \geqslant 3$, то $n = k+1$. **301.** 333 333 333. **304.** 120°. **305.** 1,25. **306.** Нет, усилить нельзя. **307.** а) Боря; б) Аня. **308.** 1. **309.** 0,5. **310.** 64. **311.** $a^{n+1}-(a-1)^{n+1}$. **313.** Нет. **314.** $AC_1 = \frac{ac}{a+b}$, $C_1B = \frac{bc}{a+b}$. **317.** $\frac{C_{2n}^n}{4^n}$. **318.** Нет. **319.** 7 или 14. **320.** $\dfrac{1}{k}\left(1+(-1)^n\dfrac{1}{(k-1)^{n-1}}\right)$. **321.** Да. **325.** Нет. **326.** 112. **327.** 201. **328.** Да. **329.** 0,25. **330.** $\frac{k^3-k}{3}$. **331.** 30. **332.** $-1, 2, 4$. **333.** 673. **334.** $\frac{\pi}{6}$. **335.** Один способ. **337.** Одна гиря. **338.** 75°. **339.** Да. **340.** Второй игрок. **341.** $1-\dfrac{n}{2^{n-1}}$. **343.** 1 101 111 111. **344.** 2^{n-k+1}. **345.** Да. **346.** Да. **347.** $1-\frac{1}{2^\alpha}$. **349.** 28. **352.** e^2. **353.** $\frac{1}{2}$. **354.** $\left((n-1)!(n^2+\lceil\frac{n}{2}\rceil)\right)^2$. **355.** 18. **356.** Нет. **357.** $\frac{x}{2}+y$. **358.** 0. **359.** π. **360.** 576.

Авторы задач

Н. И. Авилов (244), Е. В. Бакаев (241, 259, 286, 304, 331), С. Г. Волчёнков (283), С. М. Воронин (264, 289), М. М. Гольденберг (299), М. А. Евдокимов (272), Ю. А. Игнатов (255), В. В. Карачик и Л. Д. Менихес (269), А. М. Магомедов (246), А. Б. Певный (342, 348), В. А. Попов (276), В. Расторгуев (304), С. И. Токарев (283, 300), А. К. Толпыго (298), А. И. Храбров (323, 337), А. В. Шаповалов (295), И. Ф. Шарыгин (261), А. Ю. Эвнин (252, 281, 287, 294, 300, 302, 308, 313, 323), G. Carrol (312), D. E. Daykin(311).

Победители конкурсов

Е. Аникина (Челябинск) 41, А. Астахова (Москва) 45, И. Зыков (Екатеринбург) 42, В.Л. Дорофеев (Мытищи) 55, 57, А. Загуляев (Красноярск) 56, А. Заневский (Хабаровск) 43–45, 51, 59, 60, Р. Карандашов (Москва) 51, Е. Кичак (Москва) 53–55, П. Кузнецов (Челябинск) 49, 58, Р. Максимов (Montpellier) 57, Р. Полищук (Астана) 41, К. Серков (Москва) 59, К. Чернышёв (Санкт-Петербург) 54, 55, Д. Ямковой (Екатеринбург) 42.

Литература

[1] Балк М. Б., Болтянский В. Г. *Геометрия масс.* — М.: Наука, 1987. – 160 с.

[2] *Всероссийские студенческие турниры математических боёв. Тула, 2002–2015 гг.:* Учеб.-метод. пособие: В 2 ч. / Авт.-сост. Ю. А. Игнатов, В. А. Шулюпов, И. Ю. Реброва, А. Е. Устян, А. Ю. Эвнин. – Тула, Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2016. - Ч. I. – 144 с.

[3] *Всероссийские студенческие турниры математических боёв. Тула, 2002–2015 гг.:* Учеб.-метод. пособие: В 2 ч. / Авт.-сост. Ю. А. Игнатов, В. А. Шулюпов, И. Ю. Реброва, А. Е. Устян, А. Ю. Эвнин. – Тула, Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2017. - Ч. II. – 147 с.

[4] Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* — М.: АСТ, 2009.

[5] Жижилкин И. Д. *Инверсия.* — М.: МЦНМО, 2009. – 72 с.

[6] Эвнин А. Ю. *Вокруг теоремы Холла.* / Стереот. изд. — М.: URSS, 2019. – 88 с.

[7] Эвнин А. Ю. *Ещё сто пятьдесят красивых задач для будущих математиков.* — М.: ЛЕНАНД, 2018. – 216 с.

[8] Эвнин А. Ю. *Задача о лягушке* // Математика в высшем образовании. – 2018. – № 16. – С. 35–42.

[9] Эвнин А. Ю. *Задачи математического конкурса в ЮУрГУ* // Математическое образование. – 2015. – № 4(76). – С. 26–52.

[10] Эвнин А. Ю., Лернер Э. Ю., Игнатов Ю. А., Григорьева И. С. *Задачи по теории вероятностей на студенческих олимпиадах* // Математическое образование. – 2017. – № 4(84). – С. 45–62.

[11] Эвнин А. Ю. *Задачник по дискретной математике.* Стереот. изд. — М.: URSS, 2019. – 272 с.

[12] Эвнин А. Ю. *Математический конкурс в ЮУрГУ 2012–2016 гг. : сборник задач.* — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2017. – 176 с.

[13] Эвнин А. Ю. *Сто пятьдесят красивых задач для будущих математиков.* — М.: КРАСАНД, 2018. – 224 с.

[14] Эвнин А. Ю. *Элементы теории чисел.* 2-е изд., перераб. и доп. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – 93 с.

[15] Evnin A.Yu. *150 elegantes problemas para futuros matematicos: Con soluciones detalladas.* Пер. с рус. — М.: KRASAND, 2015. – 240 pp. (Spanish)

[16] *Iranian University Students Mathematics Competitions, 1973–2007* / Bamdad R. Yahaghi. (Texts and Readings in Mathematics). – Hindustan Book Agency, 2010. – 270 pp.

[17] *Problems from the Book* / T. Andreescu, G. Dospinescu. — XYZ Press, 2010. – 572 pp.

[18] *The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985–2000. Problems, Solutions, and Commentary* / Kiran S. Kedlaya, Bjorn Poonen, Ravi Vakil. — MAA, 2002. – 337 pp.

Эвнин Александр Юрьевич,
доцент кафедры прикладной математики и программирования
Южно-Уральского государственного университета,
кандидат педагогических наук.

E-mail: graph98@yandex.ru

К выводу «первого замечательного предела». II

С. В. Шведенко

В заметке предложено методически продуманное (в плане графического изображения для студентов) обоснование неравенств, которые используются для вывода первого замечательного предела.

Многие видят, но немногие желают замечать, что традиционное доказательство предельного соотношения $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (по старинке цветисто называемого *«первым замечательным пределом»*) является некорректным, поскольку вывод играющих в нем центральную роль неравенств

$$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x \qquad (0 < x < \pi/2), \tag{1}$$

связывающих удвоенные площади сектора единичного круга OAB и двух треугольников — OAB и OAC (рис. 1), содержит ошибку *«порочного круга»* — в той части, где с ходу заявляется, что площадь сектора единичного круга, опирающегося на дугу длины x, равна (численно) $\frac{1}{2}x$, тогда как основанием так считать служит как раз *доказываемое* предельное соотношение. На это уже обращалось внимание в [1].

Одновременно в [1] был предложен вполне корректный способ получения неравенств (1), основанный на сравнении не *площадей* вышеупомянутых треугольников и сектора, а *длин* вписанных в дугу единичной окружности и описанных около нее ломаных. При всей простоте этого способа опыт его изложения «мелом на доске» выявил трудности его графической иллюстрации: разборчиво изобразить на одной картинке дугу окружности и несколько вписанных и описанных ломаных с разным числом звеньев весьма затруднительно. В результате поиска более удобного для изложения вывода неравенств (1) был опробован следующий подход.

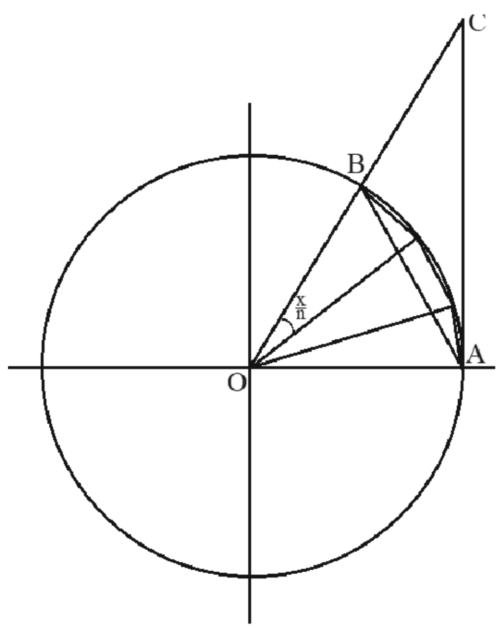


Рис. 1

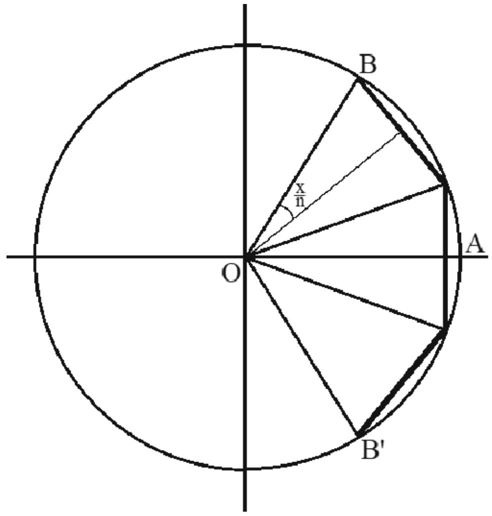


Рис. 2

Наряду с уже упоминавшимися треугольниками OAB и OAC площадей соответственно $\frac{1}{2}\sin x$ и $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$ (рис. 1) рассматривается содержащая первый из этих треугольников и содержащаяся во втором фигура, составленная из n равнобедренных треугольников с общей вершиной O и основаниями, образующими правильную n-звенную ломаную, вписанную в дугу длины x единичной окружности (рис. 1 в случае $n = 3$). Площадь этой фигуры равна $n\frac{1}{2}\sin\frac{x}{n}$, так что справедливы неравенства

$$\sin x \leqslant n \sin\frac{x}{n} \leqslant \operatorname{tg} x \qquad (0 < x < \pi/2). \tag{2}$$

С другой стороны, правильная n-звенная ломаная, вписанная в дугу BAB' длины $2x$ единичной окружности (рис. 2 в случае $n = 3$), имеет длину $2n\sin\frac{x}{n}$, и в соответствии с определением длины дуги окружности (как предела длин вписанных в нее правильных ломаных при неограниченном увеличении числа их звеньев) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\sin\frac{x}{n} = 2x$. Это позволяет перейти в неравенствах (2) к пределу при $n \to +\infty$, получив требуемые неравенства (1).

Литература

1. Шведенко С.В. Две заметки по математическому анализу // Математическое образование. - 2011. - № 3-4 (59-60). - С. 34-37.

Шведенко Сергей Владимирович,
доцент кафедры высшей математики
Национального исследовательского ядерного
университета (МИФИ), кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: sershvedenko@mail.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2019 год (включая стоимость пересылки) – 150 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2019 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 100 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

V. Gavrilov. Proportional Segments, a Polygon, and Chevy's Lines into a Circle **2**

It is received an equality analogous to Chevy's equality for a polygon inscribed into a circumference over the ends of the chords with cross point. A new version of proof of Ponsel's theorem is offered for a polygon inscribed into a circumference with an odd or even numbers of sides. It is offered an analog to Menelaus' theorem for a polygon of "star" type inscribed into a circumference.

S. Dvoryaninov. On Impossibility to Construct a Center of a Circle by a Ruler Alone **9**

The impossibility to construct a center of a circle by a ruler alone is proved.

A. Iglizky. Two Geometric Notes **13**

In the first note, consider a regular polygon. Its diagonals have a number of intersection points some of which happen to be collinear. An algorithmic method of discovering the collinearity is suggested. In the second note, a numeric measure of degeneracy of a triangle is suggested.

V. Bodryakiv, A. Bykov. The History of Hyperbolic Functions: Research and Some Applications, finished **22**

On the history of discovering and research the hyperbolic functions.

V. Ilychev. The Probability Theory and the Main Issue of the Preference Card Game **32**

The main strategic issue of the Preference card game, from the viewpoint of the probability theory is discussed.

E. Smolyanova. Application of Invariants for Involution Transforms of a Triangle **38**

An algorithm for finding an involution transform which maps a given non-rectangular triangle to a rectangular one, is constructed.

A. Evnin. Problems of Math Competition of the South Ural State University. II **43**

A collection of problems of the mathematics competition for higher school students. The competition is arranged online by the South Ural State University. Part II.

S. Shvedenko. To Derivation of the "First Remarkable Limit" **57**

An easy-to-use graphic approach to derivation of the first remarkable limit is suggested.

ISSN 1992-6138

9 771992 613776