ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцать первый

№ 3 (83)

июль – сентябрь 2017 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”
www.lomonosovclub.com

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№3 (83), 2017 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2017 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.09.2017 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (83), июль – сентябрь 2017 г.

Содержание

Равенство Менелая, пучок прямых и многоугольник

В. К. Гаврилов

Предложено рассмотрение равенства Менелая в качестве равенства для пересечений сторон угла и двух прямых пучка. Получено равенство единице для пересечений сторон угла и трёх прямых пучка. Предложен новый алгоритм доказательства аналога теоремы Понселе для многоугольника с нечётным и чётным числом сторон. Получено равенство единице для многоугольника вида “звезда”.

Известно расширение действия равенства Чевы на многоугольник с нечётным числом сторон по теореме Понселе: «Прямые, соединяющие какую-нибудь точку с вершинами многоугольника, имеющего нечетное число сторон, образуют на противоположных его сторонах такие отрезки, что произведение отрезков, не имеющих общих концов, равно произведению остальных отрезков», [1, с. 35]. Делением одной части равенства на другую теорема Понселе легко приводится к виду равенства единице [1, с. 35].

Будем искать расширение действия равенства Чевы на многоугольник с чётным числом сторон на основе связи равенства Чевы с равенством Менелая.

В [2, с. 8] предложен вариант расширенной трактовки теоремы Менелая:

Теорема 1. *Если прямые $A_0B_0, A_0C_0, B_0B_1, C_0C_1$ пересекаются, то отрезки между точками пересечения прямых образуют ряд контуров, на каждом из которых, при направленном обходе контура, произведение отношений длин отрезков равно единице.*

В теореме Менелая пересечения четырёх прямых традиционно рассматривают в качестве треугольника и прямой [1, с. 37], секущей треугольник (рис 1). Теорема 1 не ограничивает действие теоремы Менелая треугольником и секущей, в частности, рассмотрим пересечения четырёх прямых в теореме Менелая в качестве пересечений двух прямых, образующих угол, и прямых пучка.

Теорема 1, следствие 1. *Пересечения прямых, образующих угол, и прямых пучка.*
В пучке две прямых.
Следствие 1 эквивалентно теореме Менелая (рис. 1), равенство (1); доказательство известно [1, с. 37] .

$$\frac{A_0B_0}{B_0C_1} \cdot \frac{C_1O}{OC_0} \cdot \frac{C_0B_1}{B_1A_0} = 1. \tag{1}$$

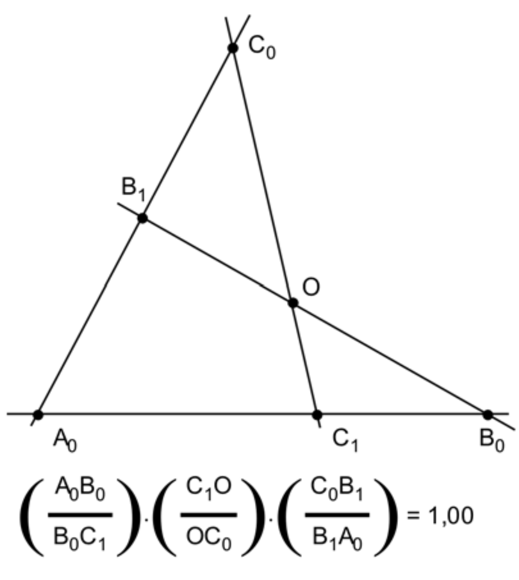


Рис 1.

Замечание. На рисунках приведены доказанные равенства в виде равенств единице. Появление нулей после единицы не связано с доказательством и обусловлено численной проверкой равенств на компьютере (программа The Geometer's Sketchpad V4 KCP Technologics — «Живая геометрия»).
В пучке три прямых.
Доказательство. На рисунке 1 через центр O пучка проведём прямую D_0D_1 и рассмотрим пересечения двух прямых A_0B_0, A_0C_0, образующих угол A_0, и трёх прямых пучка, B_0B_1, C_0C_1, D_0D_1, с центром в точке O (рис. 2). Будем искать равенство единице на контуре, образованном отрезками прямых между точками пересечений: C_1, O, C_0, D_1, B_1, O, B_0, D_0, C_1.

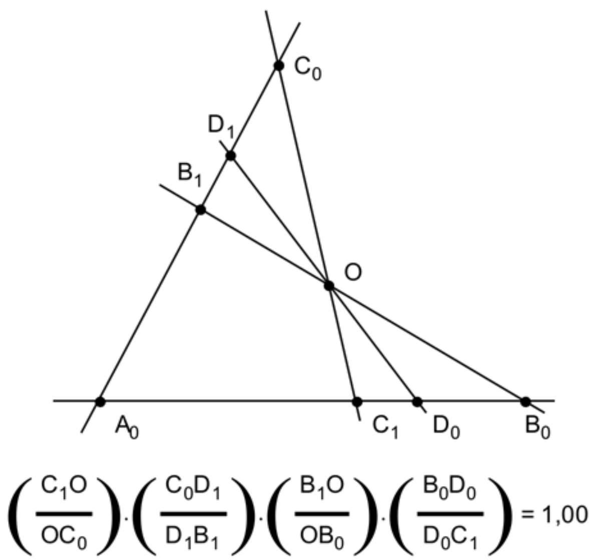


Рис 2.

Согласно (1) для прямой D_0D_1, секущей треугольники $A_0B_0B_1$ *и* $A_0C_1C_0$ соответственно имеем равенства:

$$\frac{A_0D_1}{D_1B_1}\cdot\frac{B_1O}{OB_0}\cdot\frac{B_0D_0}{D_0A_0}=1.$$

$$\frac{A_0D_0}{D_0C_1}\cdot\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0D_1}{D_1A_0}=1.$$

Перемножив равенства получим:

$$\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0D_1}{D_1B_1}\cdot\frac{B_1O}{OB_0}\cdot\frac{B_0D_0}{D_0C_1}=1. \tag{2}$$

Равенство единице найдено, — равенство (2), следствие 1 теоремы 1 доказано.

С помощью полученного равенства (2) докажем теорему 2, расширяющую действие равенства Чевы на многоугольник с нечётным и чётным числом сторон.

Теорема 2. *Прямые пучка с центром в многоугольнике, поочерёдно проходящие через вершины и пересекающие стороны углов многоугольника, отсекают на прямых, проходящих через вершины углов многоугольника, отрезки, образующие контур, при направленном обходе которого, произведение отношений длин отрезков на сторонах контура равно единице.*
Следствие 1. *В случае нечётного числа прямых в пучке контур образован отрезками на сторонах многоугольника.*

Следствие 2. *В случае чётного числа прямых в пучке контур образован отрезками на сторонах многоугольника и отрезками на прямой пучка, принятой за отсчётную.*

Отметим, что в теореме 2 термин «поочерёдно» устанавливает однозначное соответствие между числом прямых в пучке и числом сторон в многоугольнике.

Докажем следствие 1 теоремы 2 на примере треугольника.

Доказательство следствия 1. На рисунке 1 проведём прямые A_0O, B_0C_0, точку пересечения прямых обозначим через A_1. Проведём отрезки A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1, точки пересечения отрезков с прямыми A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 обозначим соответственно через A_2, B_2, C_2 (рис. 3). В каждом из треугольников $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$ прямые пучка с центром в точке O поочерёдно проходят через вершины и пересекают стороны углов треугольника.

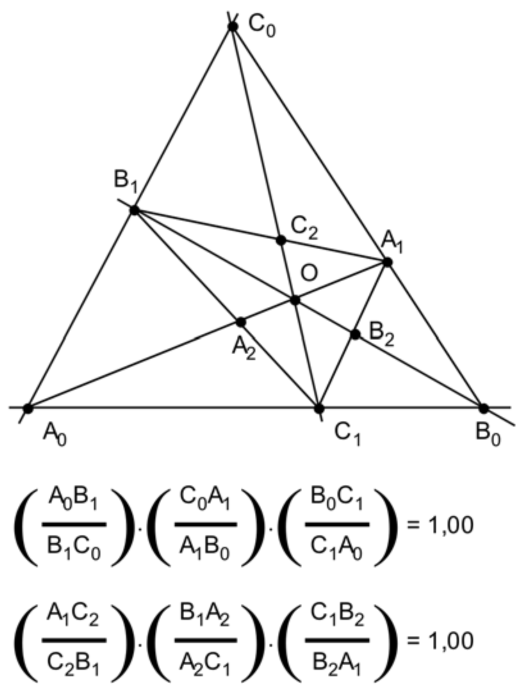


Рис 3.

Согласно (2) для каждой пары противолежащих сторон треугольников $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$ имеем равенства:

$$\frac{A_0O}{OA_1}\cdot\frac{A_1C_2}{C_2B_1}\cdot\frac{B_1O}{OB_0}\cdot\frac{B_0C_1}{C_1A_0} = 1;$$
$$\frac{B_0O}{OB_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\cdot\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0A_1}{A_1B_0} = 1;$$
$$\frac{C_0O}{OC_1}\cdot\frac{C_1B_2}{B_2A_1}\cdot\frac{A_1O}{OA_0}\cdot\frac{A_0B_1}{B_1C_0} = 1.$$

Перемножив равенства получим:

$$\left(\frac{A_0B_1}{B_1C_0}\cdot\frac{C_0A_1}{A_1B_0}\cdot\frac{B_0C_1}{C_1A_0}\right)\cdot\left(\frac{A_1C_2}{C_2B_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\cdot\frac{C_1B_2}{B_2A_1}\right) = 1. \tag{3}$$

Поскольку форма треугольника $A_0B_0C_0$ постоянна, а форма треугольника $A_1B_1C_1$ зависит от произвольного выбора положения точки O, то треугольники $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$ независимы. Тогда из (3) следуют равенства:

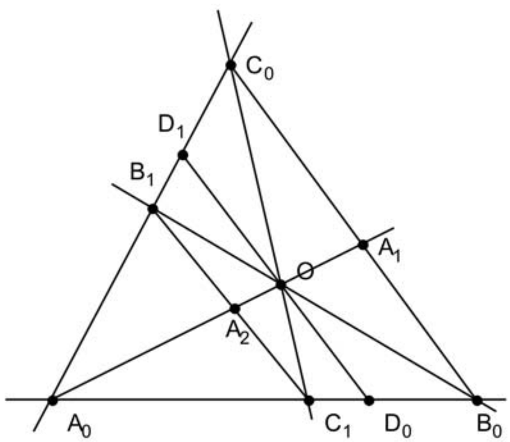
$$\frac{A_0B_1}{B_1C_0}\cdot\frac{C_0A_1}{A_1B_0}\cdot\frac{B_0C_1}{C_1A_0} = 1; \tag{4}$$

$$\frac{A_1C_2}{C_2B_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\cdot\frac{C_1B_2}{B_2A_1}=1.$$

Полученное для каждого треугольника равенство является равенством Чевы. Равенство единице для треугольника получено, — равенство (4), следствие 1 теоремы 2 доказано. Аналогично доказывается и теорема Понселе для случая многоугольника с нечётным числом сторон большим трёх.

Докажем следствие 2 теоремы 2 на примере четырёхугольника.

Доказательство следствия 2. На рисунке 1 проведём прямые A_0O, D_0D_1 и отрезки B_0C_0, B_1C_1; точки пересечения отрезков с прямой A_0O обозначим A_1, $A2$ (рис. 4). Рассмотрим четырёхугольник $C_1B_0C_0B_1$ и четыре прямых пучка,— A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1, D_0D_1, из которых поочерёдно две,— B_0B_1, C_0C_1, каждая проходит через две вершины углов четырёхугольника, а две,— A_0A_1, D_0D_1, каждая пересекает две стороны четырёхугольника.



$$\left(\frac{C_1O}{OC_0}\right)\cdot\left(\frac{C_0D_1}{D_1B_1}\right)\cdot\left(\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\right)\cdot\left(\frac{C_1O}{OC_0}\right)\cdot\left(\frac{C_0A_1}{A_1B_0}\right)\cdot\left(\frac{B_0D_0}{D_0C_1}\right)=1{,}00$$

Рис 4.

Согласно (2) для каждой пары противолежащих сторон четырёхугольника имеем равенства:

$$\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0D_1}{D_1B_1}\cdot\frac{B_1O}{OB_0}\cdot\frac{B_0D_0}{D_0C_1}=1;$$

$$\frac{B_0O}{OB_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\cdot\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0A_1}{A_1B_0}=1.$$

Перемножив равенства получим:

$$\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0D_1}{D_1B_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\cdot\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0A_1}{A_1B_0}\cdot\frac{B_0D_0}{D_0C_1}=1. \tag{5}$$

Равенство единице для четырёхугольника получено, — равенство (5), следствие 2 и теорема 2 доказаны. Аналогично доказывается теорема 2 для случая многоугольника с чётным числом сторон большим четырёх.

Четырёхугольник Менелая (рис. 1) можно рассматривать и в качестве невыпуклого четырёхугольника вида «звезда» с двумя лучами. Размещая такие четырёхугольники один возле другого, можно получить ряд невыпуклых многоугольников вида «звезда» с числом лучей больше двух. В частности, применяя равенство (6) [2, с. 9, ф. (5)] к контурам смежных четырёхугольников, получим равенство (7) на контуре из отрезков, формирующих три луча многоугольника вида «звезда» (рис. 5).

$$\frac{A_0C_1}{C_1B_0}\cdot\frac{B_0B_1}{B_1O}\cdot\frac{OC_1}{C_1C_0}\cdot\frac{C_0B_1}{B_1A_0}=1. \tag{6}$$

$$\frac{HO}{OI}\cdot\frac{IN}{NJ}\cdot\frac{JP}{PK}\cdot\frac{KO}{OL}\cdot\frac{LN}{NM}\cdot\frac{MP}{PH}=1. \tag{7}$$

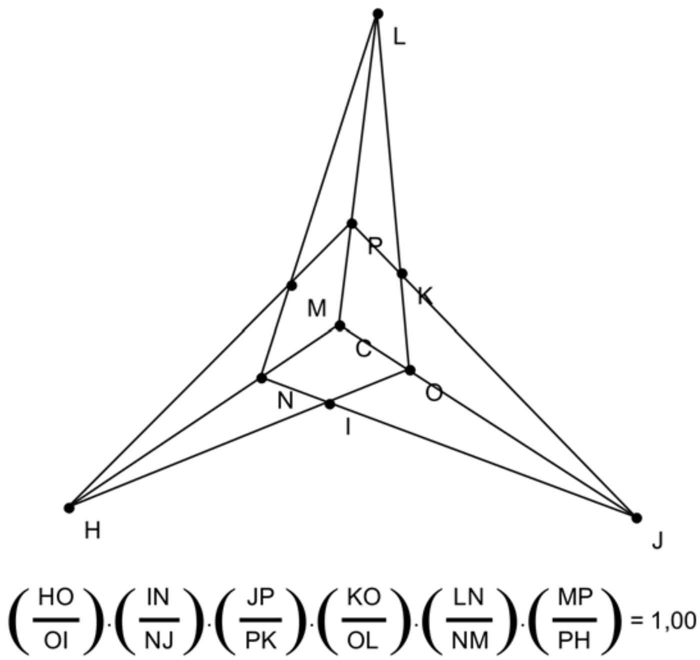


Рис 5.

Таким образом, расширенный вариант теоремы Менелая даёт возможность получить аналоги равенства Чевы для многоугольников с нечётным и чётным числом сторон и для многоугольников вида «звезда».

Литература

1. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. - М.: Государственное учебно-педагогическое издательство мин. просвещения РСФСР, 1962.

2. Гаврилов В.К. Равенства Менелая, Чевы и другие равенства / «Информационные технологии в математике и математическом образовании». Материалы V Всероссийской научно-методической конференции с международным участием, Красноярск. - 2016 г. - С. 8-12.

URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=27468320.

Гаврилов Владимир Константинович,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: gavrilov1009@mail.ru

Дифференцирование функций на основе метода наглядных построений в средней школе

В.А. Делянов, Т. Н. Брянцева

Статья обсуждает вопрос, касающийся методики обучения математике в профильных классах и преимущество метода наглядного толкования математических операций перед традиционным аналитическим подходом. Статья подчеркивает важность при таком обучении правильного сочетания визуальной, вербальной и формульной форм получения информации учащимися.

В данной статье мы предлагаем, на примере изучения дифференцирования некоторых элементарных функций, один из способов разрешения вопроса об использовании вместе различных способов представления учебного материала — вербального, аналитического и визуального, см. [3], и при этом упор делаем на последнем.

Нисколько не претендуя на новые способы доказательств, мы здесь лишь сопоставляем традиционно аналитическим методам в содержании учебного материала по математическому анализу, см. [2], некоторые приёмы, аналогии и примеры по интерпретации самих математических понятий и операций.

А основное противоречие, касающееся чрезмерно объёмного содержания учебного материала в современной школе и возможности качественного его усвоения учащимися, приводит нас к пониманию необходимости перейти от взгляда на наглядность как одного из вспомогательных средств обучения математике к полноценному использованию визуального мышления школьника в процессе становления его математического образования.

О дифференцировании функций $y = \sin\varphi$ и $y = x^n$ с использованием наглядных построений

Рассмотрим некоторые так называемые геометрические приемы, помогающие усвоению операций дифференцирования указанных функций.

На тригонометрическом круге радиуса $r = OD$ (рис. 1.) углу φ соответствует значение ординаты y, так что $y = \sin\varphi$ (обозначим DE)[1]. Приращению $\Delta\varphi$ угла φ будет соответствовать приращение Δy ординаты y. Это показано на рис. 2. А рис. 3. уже помогает в увеличенном масштабе увидеть следующие соотношения: из подобия треугольников ODE и DBF, при условии, что $\Delta\varphi \to 0$ и в силу взаимной перпендикулярности сторон OD с BD и OE с BF:

$$\frac{\Delta y}{\Delta\varphi_{(рад)}} = \frac{Sin\,(\varphi + \Delta\varphi) - Sin\,\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{BF}{\Delta\varphi} = \frac{BF}{DB/r} = \frac{BF}{DB} = \frac{OE}{OD},$$

что позволяет сразу записать $\lim\limits_{\Delta\varphi\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta\varphi} = \cos\varphi$. Следовательно, производная от $y = \sin\varphi$ равна $\cos\varphi$.

[1]считается, что радиус $r = 1$

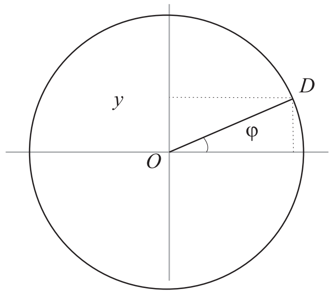


Рис. 1. Тригонометрический круг

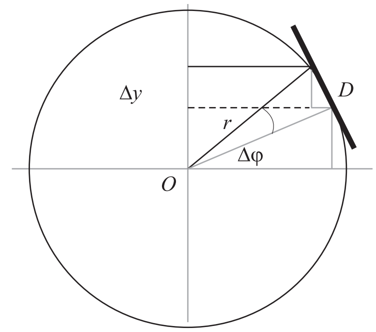


Рис. 2. Приращение Δy функции $y = \sin\varphi$

Рассмотрим теперь функцию $y = x^n$. Пусть значениям x^n для случая $n = 2$ соответствует площадь квадрата со сторонами x, так что $s = x^2$ (см. рис. 4). Непосредственно из рисунка видно, что изменение площади Δs, связанное с изменением x, можно выразить так:

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

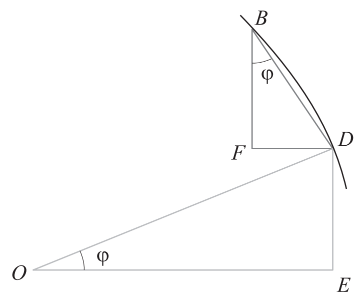


Рис. 3. Подобные прямоугольные треугольники BFD и OED

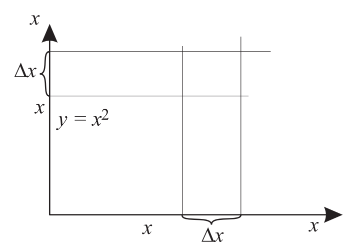


Рис. 4. Соответствие функции $y = x^2$ площади квадрата со стороной x

Это последнее выражение, при условии, $\Delta x \to 0$ дает $\dfrac{\Delta S}{\Delta x} = 2x$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta x} = 2x$.

Итак, производная степенной функции вида $y = x^n$ в случае $n = 2$ равна $2x$.

Можно, однако, распространить этот прием вычисления производной для других значений $n = 3, 4, \ldots$, а, следовательно, по аналогии, производная от $y = x^n$ запишется как $n \cdot x^{n-1}$.

Как показывает личный опыт автора, подобные приемы служат для хорошего запоминания учащимися и самих формул, и смысла операций дифференцирования в силу их наглядности, что в дальнейшем служит хорошей базой для изучения аналитических приемов, снимая излишне абстрактную составляющую при изучении данной темы.

Производные сложной и обратной функций. Уметь вычислить производную сложной функции крайне важно, т.к. это является удобным методом вычисления, для большого числа функций, их производных. Однако в средней школе к этой задаче подходят слишком формально. В результате чего учащиеся путаются даже в понятии сложной функции, не говоря уже о навыках работы с ней. Здесь мы попытаемся вести разговор с позиций наглядного толкования процесса вычисления производной для такого вида функций.

Сложная функция и ее дифференцирование (геометрический подход). Пусть дана сложная функция y, т. е. такая функция, что ее можно представить в следующем виде: $y = F(U)$, где $U = \varphi(x)$,

При этом U — называют промежуточным аргументом. Сделаем рис. 5, где покажем соответствие $x \to \varphi \to F$. Из рис. 5 (см. ниже) видно, что при достаточно малых приращений Δx отношение ΔF

к Δx связано с промежуточным аргументом как $\dfrac{\Delta F}{\Delta\varphi}\cdot\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x}$. В пределе при $\Delta x \to 0$ все рассуждения остаются такие же, поэтому имеем формулу: $y'_x = F'_U(U)\cdot\varphi'_x(x)^2$.

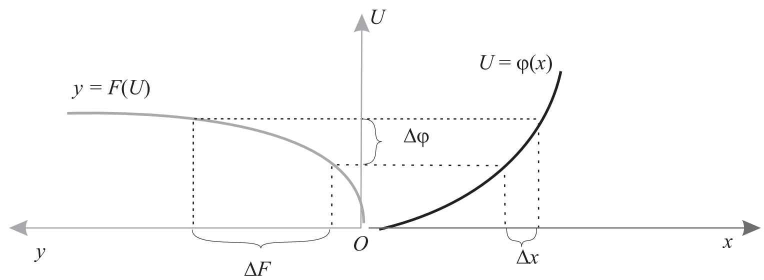


Рис 5. Сложная функция как переход к другому аргументу

Обратная функция и ее дифференцирование (геометрический подход).

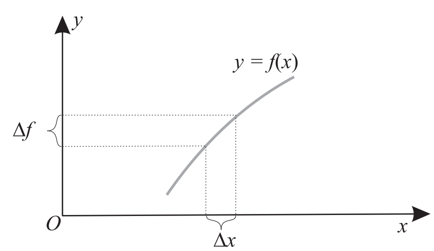


Рис 6. Обратная и прямая функции на одном графике

Пусть имеется функция $y = f(x)$ и для нее существует обратная функция $x = \varphi(y)$. Тогда $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$. Для иллюстрации последнего утверждения мы используем следующий рис. 6. Из него (графика функции) видно, что одной и той же линии графика будет соответствовать и функция $y = f(x)$ и функция $x = \varphi(y)$. Так что для y само y' определяется отношением $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, а для x уже x' определяется обратным отношением. А переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, можем записать окончательно формулу: $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

Важно отметь, что последнее довольно легко позволяет понять результат вычисления производной степенной функции с дробным показателем.

О дифференцировании показательной функции. Как известно, функция $f(x,a) = a^x$ играет важную роль как в самой математике, так и в применении её к различным разделам физики. Однако традиционные математические операции по нахождению её производной, слишком сложны для учащихся. О тех дополнительных приёмах, с которыми эта функция могла бы преподноситься в школьной математике (имеется ввиду вне основной школьной программы, в профильных классах, на факультативах и т. п.), с использованием наглядной аналогии и на примерах хорошо понятных зависимостей, и пойдет речь ниже.

1. Рассмотрим функции вида $f(x,a) = a^x$ для случая, когда $a = 2, 3, \ldots$, сопоставляя значениям этих функций для $x = 0, 1, 2, \ldots$ (т. е. при изменении аргумента на одну и ту же величину $\Delta x = 1$) интервалы на некоторой оси, которые для удобства обозначим дугами (см. рис. 7).

[2]Буквально это утверждение не совсем верно, так как может оказаться, что $\Delta\varphi = 0$ при $\Delta x \neq 0$ (причем, для бесконечного множества значений Δx), тогда первый множитель произведения не определен. Для устранения этой трудности в учебниках математического анализа предпринимаются специальные усилия. — *Прим. ред.*

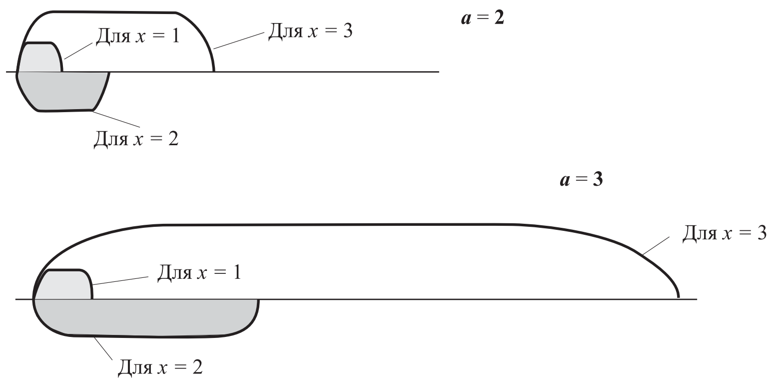


Рис 7. Наглядная интерпретация изменения

Используя этот рисунок, удобно провести аналогию между, скажем, функцией $f(x,a) = 2^x$ и её изменением $\Delta f = f(x+\Delta x, a) - f(x,a)$. При этом нетрудно заметить следующую зависимость: $\frac{\Delta f}{f\,\Delta x}$ не зависит от x для конкретного значения $a = 2$. Затем легко можно распространить это положение для любых a и Δx.

Действительно:

$$\frac{\Delta f}{f \cdot \Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{a^x \cdot \Delta x} = \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

Отсюда мы делаем следующий вывод: если последнее выражение справедливо и при $\Delta x \to 0$, то $\frac{f'}{f}$ так же не зависит от x для конкретных значений a. (Если рассуждать более строго, то из последнего выражения следует его сходимость при $\Delta x \to 0$ при разложить в ряд по степеням, см. далее ряд Тейлора.)

2. Далее нам потребуется учесть следующее обстоятельство: если выражение производной для одной показательной функции $f(x,a) = a^x$ будет найдено, то можно найти его и для функции $f(x,b) = b^x$, т. е. если будет уже другое основание. Действительно. Любую функцию $f(x,b) = b^x$ можно представить как $f(x,b) = a^{kx}$. (На рис. 8-б это видно как результат «сжатия» графика функции a^x, представленного вначале на рис. 8-а). Другими словами, изменяется крутизна зависимости.

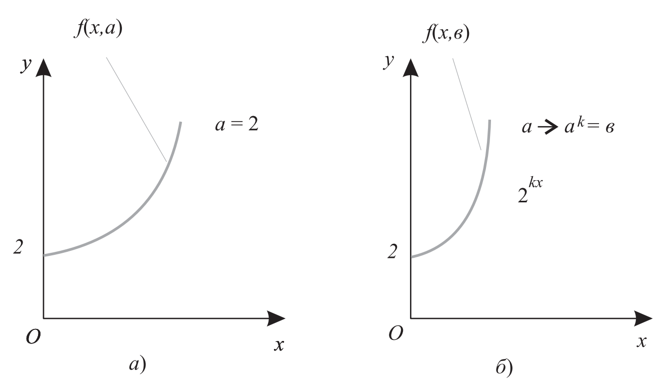


Рис 8. Иллюстрация изменения основания показательной функции

К примеру, если мы возьмем конкретное значение $b = 8$, то функция $b^x = a^{kx}$ будет иметь вид a^{3x}. (Учащимся важно напомнить, что для условия $b^x = a^{kx}$ число k находится из формулы $b = a^k$, т. е. $k = \log_a b$, и, значит, при $a = 2$, $b = 8$ имеем $8 = 2^k \Rightarrow k = \log_2 8 = 3$.

Итак, если мы каким-либо способом сумели бы найти выражение производной для какого-то одного значения a функции вида $f(x,a) = a^x$, то для других значений b мы это тоже можем сделать через $k(a)$.

3. Теперь займемся нахождением самой производной. Сделаем рисунок (рис. 9) для разных значений a: например $e > a_1 > a$ для функции $f(x,a) = a^x$. Очевидно, что можно так подобрать «наклон» кривой $f(x,a)$, чтобы хотя бы в одной точке x_0 выполнялось условие $f'(x_0,a) = f(x_0,a)$, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}\Big|_{x_0} = f(x_0),$$

и что возможно в силу выше рассмотренной зависимости $\Delta f \sim f$ на всех значениях x, и из чего можно сделать вывод о том, что $f'(x,a) = f(x,a)$.

Итак, с учетом рассмотренной связи $\Delta f \sim f$, мы можем подобрать $k(a)$, чтобы выполнялось равенство $f'(x_0,a) = f(x_0,a)$, причём обозначим для этого случая значение a через e. И тогда $f'(x,a) = f(x,a)$, а в свою очередь-любая другая функция $f(x, a \neq e)$ будет иметь производную $f'(x, a \neq e) = f'(x_0, e) \cdot \log_e a$. $f'(x, a \neq e) = f'(x_0, e) \cdot \ell og_e a$ или просто $f'(x,a) = f'(x,e) \cdot \ell og_e a$.

4. Однако мы не нашли еще того значения $a = e$, когда справедливо соотношение $f'(x,e) = f(x,e)$. Поэтому далее поступим так:

а) считаем, что есть ещё какая-то функция(во всяком случае, как-то по-другому записанная), где явно видно, что $f' = f$, а, значит $f'' = f$, и вообще $f^{(n)} = f$ для любого x. И такая функция (обозначим её $Z(x)$) действительно есть, хотя вид её не совсем обычный:

$$Z(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

причём $Z^{(n)}(x) = Z(x)$ (см. выше дифференцирование степенных функций).

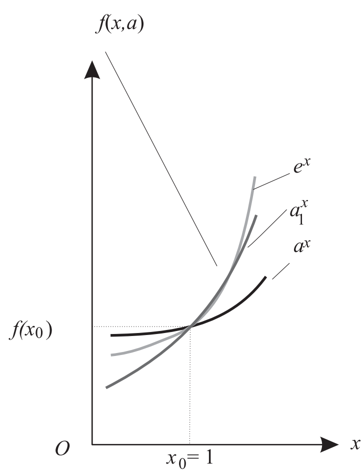


Рис. 9. Подбор условия $f'(x_0,a) = f(x_0,a)$

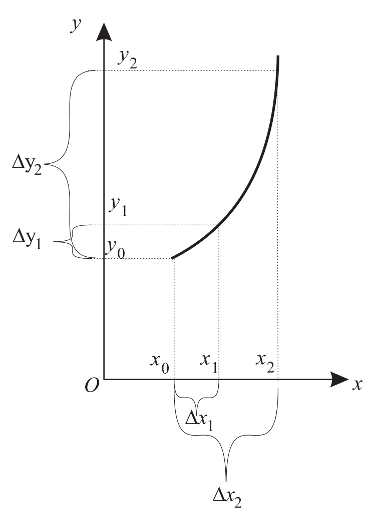


Рис. 10. Отражение нелинейности функции с увеличением Δx

б) считаем, что есть некоторое число из значений a, обозначим его e, что для $f(x,e) = e^x$ справедливо $f'(x,e) = f(x,e)$, и вообще $f^{(n)}(x,e) = f(x,e)$.

Но как найти это число $\boldsymbol{e}$? Для ответа на это вопрос и имеем уравнение: $f(x,e) = Z(x)$ *относительно e:*

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots.$$

Отсюда и находим e^x при $x = 1$. Приближенно $e = 2{,}71\ldots.$

В заключение отметим, что выражение для e^x говорит о том, что на больших x ее составляющие x^n ведут себя нелинейно в силу больших степеней n, и наоборот, для малых x большую роль на изменение e^x по x оказывают составляющие ее меньшие степени, т. е. функция более линейна см. рис. 10.). Это и подтверждает наше начальное предположение о том, что можно было подобрать так a, чтобы получить производные равные самой функции.

Производная логарифмической функции. (Это более простое, по сравнению с традиционным, доказательство на основе понятия производной о показательной функции.)

Пусть $y = \ell og_a x$. Тогда

$$a^y = a^{\ell og_a x} = x,$$

или

$$(a^y)'_y = (x)'_y,$$

причем будем считать, что x – обратная функция для y (см. выше пункт «обратная функция и её дифференцирование»), когда $y = f(x), x = \varphi(y), f'_x = \frac{1}{\varphi'_y(y)}$. А, раскрывая последнее выражение, имеем:

$$\log_e a \cdot a^y = x'_y,$$

т. е.

$$y'_x = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\log_e a} \cdot \frac{1}{x} = \log_a e \cdot \frac{1}{x}.$$

Основываясь на своем личном опыте преподавания, автор этой статьи полагает, что предлагаемый вариант наглядного изучения производной, особенно для показательной и логарифмической функций, совместно с традиционным подходом сделают более доступным содержание курса математического анализа для учащихся не только профильной средней школы, но и вуза.

Литература

1. Делянов В.А. Геометрические подходы в изложении элементов дифференциального исчисления как базы математического аппарата квантовой механики./ Приложение к Сб. «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом.» (Труды одноименного семинара Моск. пед. Университета.). - 2001 г. - № 1.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1972.

3. Резник Н.А. Дидактические основы обучения математике в средней школе с использованием средств развития визуального мышления». Дисс. на соиск. уч. степ. докт. пед. наук. - М.: 1997.

Брянцева Татьяна Николаевна, преподаватель математики,
кандидат пед. наук.

Делянов Владимир Александрович,
учитель математики и физики,
Московский Химический Лицей №1303,
кандидат пед. наук.

E-mail: nash-dom70@mail.ru

Гладкие функции, формальные ряды и теоремы Уитни (окончание)

Н. Г. Павлова, А. О. Ремизов

Эта статья является продолжением предыдущей, опубликованной в журнале «Математическое образование» год назад [10]. Мы продолжаем знакомить читателя с основами теории особенностей гладких отображений, в частности, с теоремой деления, подготовительной теоремой Мальгранжа и доказательством теоремы Уитни об отображениях плоскости на плоскость.

1. Типичные особенности гладких отображений $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Как и прежде, под «гладкостью» функции или отображения мы будем подразумевать бесконечную дифференцируемость (C^∞). В частности, все диффеоморфизмы считаются принадлежащими классу C^∞.

1.1. Лево-правая эквивалентность. Обозначим плоскость-прообраз и плоскость-образ буквами M и N, соответственно. Рассмотрим росток гладкого отображения

$$f = (f_1, f_2) \ : \ M \to N, \quad \dim M = \dim N = 2, \tag{1.1}$$

в особой точке. Наша задача состоит в том, чтобы выбрать локальные координаты в M и N таким образом, чтобы провести росток отображения (1.1) к наиболее простому виду, называемому «нормальной формой». Использование обозначений M и N имеет следующие достоинства. Во-первых, под ними можно подразумевать не только плоскости, но и произвольные гладкие поверхности (читатель, знакомый с понятием многообразия, может считать M и N двумерными многообразиями). Во-вторых, это позволяет подчеркнуть, что локальные координаты в пробразе и образе (локальные диффеоморфизмы $\varphi : M \to M$ и $\psi : N \to N$) выбираются независимо друг от друга.

В локальных координатах $(u, v) \in M$ и $(x, y) \in N$ отображение (1.1) задается парой функций $x = f_1(u, v)$ и $y = f_2(u, v)$, а в новых локальных координатах $(\tilde u, \tilde v) \in M$ и $(\tilde x, \tilde y) \in N$ – парой функций $\tilde x = g_1(\tilde u, \tilde v)$ и $\tilde y = g_2(\tilde u, \tilde v)$. Сказанное удобно записать в виде коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & N \arrow[d, "\psi"] \\ M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

Слово «коммутативная» означает, что переход по верхней и правой стрелкам диаграммы дает тот же результат, что и переход по левой и нижней стрелкам, т. е.

$$\psi \circ f = g \circ \varphi \ \Leftrightarrow \ g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \ \Leftrightarrow \ f = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi. \tag{1.2}$$

Ростки отображений f и g, связанные соотношением (1.2), называются *лево-право-эквивалентными* (сокращенно, RL-эквивалентными), а диффеоморфизмы φ и ψ — *правой* и *левой* заменами, в соответствии с тем порядком, в котором они идут в формуле (1.2). В случае, если $\varphi = \mathrm{id}$ (тождественное отображение) или, наоборот, $\psi = \mathrm{id}$, речь идет соответственно о *левой* и *правой* эквивалентности ростков f и g.

Очевидно, что все данные выше определения распространяются и на случай, когда M и N — поверхности (или многообразия) произвольных размерностей m и n. В качестве простого упражнения предложим читателю пару задач об RL-эквивалентности. Для их решения нужно знать лишь теорему о неявной функции (решения можно найти в [7], но гораздо полезнее сделать это самостоятельно).

Задача 1. Докажите, что в случае $n = m$ росток любого диффеоморфизма RL-эквивалентен id. Более того, докажите, что на самом деле здесь имеет место и правая, и левая эквивалентность отдельно.

Росток отображения $f : M \to N$ называется *регулярным*, если его ранг (т. е. ранг его матрицы Якоби) имеет максимально возможное значение, равное $\min\{n, m\}$.

Задача 2. Докажите, что любой регулярный росток

$$f = (f_1, \dots, f_n) \ : \ M \to N, \quad \dim N = n, \ \dim M = m,$$

RL-эквивалентен

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = x_1, \ \dots, \ f_n(x) = x_n, & \text{если } n \le m, \\ f_1(x) = x_1, \ \dots, \ f_m(x) = x_m, \ f_{m+1}(x) = 0, \ \dots, \ f_n(x) = 0, & \text{если } n \ge m. \end{array}$$

Более сложным является вопрос о RL-эквивалентности *нерегулярных* ростков отображений, он составляет значительную часть так называемой «теории особенностей» или «теории катастроф», см., например, [1, 2, 4, 6]. С некоторыми примерами такого рода мы уже сталкивались в предыдущей статье [10]. Мы имели дело с RL-эквивалентностью ростков отображений $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ при исследовании особенностей кривых на плоскости (раздел 4), а также ростков отображений $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (раздел 5). Было показано, что для $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ существует только одна *типичная* (т. е. устойчивая относительно малых возмущений) особенность, называемая *зонтиком Уитни*, а в случае $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ имеются две типичных особенности — *складка* и *сборка*.

В [10] были получены нормальные формы ростков отображений для складки и зонтика Уитни[1]. Нормальная форма для сборки была приведена без доказательства. В настоящей статье мы восполним этот пробел: представим достаточно простой и короткий вывод нормальной формы для сборки, основанный на использовании двух фундаментальных результатов — теоремы деления и подготовительной теоремы Мальгранжа. Эти теоремы мы доказывать не будем. Странная идея выводить одну теорему из двух других, которые не доказаны, в данном случае оправдывается двумя причинами. Во-первых, обе указанные теоремы важны сами по себе и имеют множество интересных приложений (доказательство теоремы о сборке — лишь одно из них). Во-вторых, их доказательства достаточно громоздки и могут быть найдены в существующей литературе, например, [4, 6, 8].

1.2. Складки и сборки. В локальных координатах $(u, v) \in M$ и $(x, y) \in N$ матрица Якоби отображения (1.1) имеет вид

$$J_f = \begin{pmatrix} (f_1)'_u & (f_1)'_v \\ (f_2)'_u & (f_2)'_v \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

и множество S особых точек этого отображения определяется условием $|J_f| = 0$, т. е. $\mathrm{rg}\, J_f = 1$ или $\mathrm{rg}\, J_f = 0$. Точки, в которых $\mathrm{rg}\, J_f = 0$, мы исключаем из рассмотрения, так как они находятся на пересечении *четырех* кривых на *двумерном* M.

[1]При упоминании нормальных форм ростков отображений речь всегда идет от RL-эквивалентности, если не указано противное.

В предыдущей заметке [10] мы выяснили, что росток отображения (1.1) в любой точке с условием $\operatorname{rg} J_f = 1$ право-эквивалентен

$$x = F(u, v), \quad y = v, \tag{1.4}$$

где $F(u, v)$ — гладкая функция (задача 10 в [10]). Формула (1.4) позволяет интерпретировать рассматриваемое отображение как проектирование поверхности $x = F(u, v)$ в пространстве с координатами (u, v, x) на плоскость (x, v) вдоль оси u. Особые точки отображения (1.4) задаются уравнением $F_u(u, v) = 0$, которое определяет на M кривую, регулярную в окрестности каждой точки, где выполнено условие

$$|F_{uu}| + |F_{uv}| \neq 0. \tag{1.5}$$

Отображение (1.4) общего положения имеет особые точки двух типов:

- $F_u = 0,\ \ F_{uu} \neq 0,$
- $F_u = 0,\ \ F_{uu} = 0,\ \ F_{uv} \neq 0,\ \ F_{uuu} \neq 0,$

все равенства подразумеваются выполненными в рассматриваемой особой точке. Особые точки двух указанных типов называются соответственно *складками* и *сборками*. Множество особых точек, не относящихся ни к одной из двух указанных категорий, задается *тремя* уравнениями $F_u = F_{uu} = F_{uv} = 0$ или $F_u = F_{uu} = F_{uuu} = 0$. Это дает пересечение трех кривых на плоскости (u, v), не устойчивое относительно сколь угодно малых возмущений функции F (подробнее об этом см. в [10]).

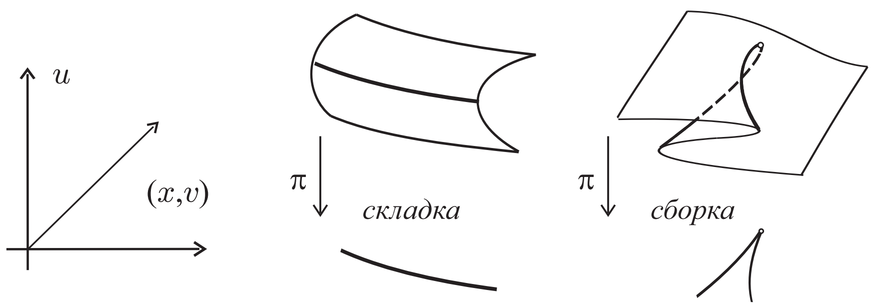


Рис. 1. Складка и сборка, реализующиеся при проектировании поверхности $x = F(u, v)$ на плоскость (x, v). Направление проектирования — ось u (вертикальная).

Заметим, что при определении складки и сборки отображения (1.1) мы использовали специальные координаты, в которых одна из двух функций, задающих отображение, совпадает с одной из координат в образе (формула (1.4)). Так как такие координаты можно выбрать различными способами, формально мы должны еще доказать корректность этого определения, т. е. что особая точка является складкой или сборкой независимо от того, какие именно координаты были выбраны. Хотя это и несложно сделать, лучше дать инвариантное (т. е. вообще не зависящее от координат) определение складки и сборки, а потом убедиться, что в частном случае отображения (1.4) оно совпадает с приведенным выше.

Существуют два основных инвариантных геометрических объекта, связанных с особенностью отображения (1.1). Первый — это кривая $S \subset M$, состоящая из особых точек отображения, она задается условием $|J_f| = 0$. Второй объект — это *поле ядер* дифференциала отображения f, определенное во всех точках кривой S, в которых $\operatorname{rg} J_f = 1$.

Напомним (см., например, учебники [7, 9]), что дифференциал отображения f — это отображение $df : TM \to TN$, действующее между *касательными расслоениями* TM и TN, причем для каждой фиксированной точки $p \in M$ отображение

$$df_p(\xi) : T_pM \to T_{f(p)}N, \quad \forall \xi \in T_pM \tag{1.6}$$

является линейным отображением векторных пространств T_pM и $T_{f(p)}N$. Выбор локальных координат (u, v) в M и (x, y) в N автоматически определяет базисы в касательных пространствах T_pM и $T_{f(p)}N$. Матрица Якоби $J_f(p)$ — это матрица линейного отображения (1.6) в этих базисах. Из условия $\operatorname{rg} J_f(p) = 1$ следует, что отображение (1.6) в каждой точке $p \in S$ имеет одномерное ядро $X_p \subset T_pM$. Совокупность X_p для всех $p \in S$ называется *полем ядер* дифференциала отображения f.

Пример 1. На рис. 2 изображены кривая S (жирная линия) и поле ядер X (горизонтальные прямые) для отображений (1.4) с функциями $F = u^2$ и $F = u^3 + uv$ (слева и в центре). Справа изображены кривая S и поле X для $F = u^4 + au^2 + uv$ ($a = 0$ — жирная линия, $a > 0$ — короткий пунктир, $a < 0$ — длинный пунктир). Поле X *трансверсально* (т. е. не касательно) кривой S почти всюду, за исключением лишь точек, отмеченных маленькими кружками. Это начало координат для $F = u^3 + uv$, $F = u^4 + uv$ и пара точек для $F = u^4 + au^2 + uv$ при $a < 0$.

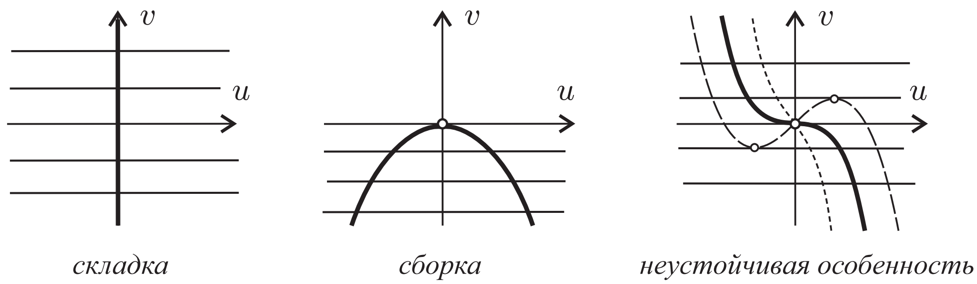


Рис. 2. Кривая особых точек и поле ядер для $F = u^2$, $F = u^3 + uv$ и $F = u^4 + au^2 + uv$.

Нетрудно видеть, что в случаях $F = u^2$ и $F = u^3 + uv$ тип особенности (складка и сборка, соответственно) устойчив относительно малых возмущений функции F. Например, если слегка «возмутить» функцию $F = u^3 + uv$, то кривая S уже не будет параболой $3u^2 + v = 0$, но превратится в похожую на нее кривую. При этом точка сборки (касания S и X) немного переместится, но не исчезнет и не «рассыпется» на несколько разных точек. Напротив, если «возмутить» функцию $F = u^4 + uv$, добавив слагаемое au^2 со сколь угодно малым $|a| > 0$, произойдет качественное изменение. Если $a > 0$, то сборка (точка касания S и X) исчезнет, а если $a < 0$, то, наоборот, «рассыпется» на две, как это изображено на рис. 2 справа пунктирной линией.

Складка и сборка определяются следующими инвариантными условиями:

- Кривая S регулярна и поле X трансверсально S.
- Кривая S регулярна и поле X касается S, причем касание первого порядка.

Задача 3. Докажите, что в тех координатах, где отображение имеет вид (1.4), приведенные выше условия эквивалентны первому определению складки и сборки, соответственно.

Теперь сформулируем один из главных результатов теории особенностей гладких отображений – теорему Уитни о нормальных формах в точках складки и сборки.

Теорема 1 (Уитни, [11]). *Росток отображения* (1.1) *в точке складки RL-эквивалентен* $x = u^2$, $y = v$, *а в точке сборки RL-эквивалентен* $x = u^3 + uv$, $y = v$.

Доказательства утверждения для складки было изложено в [10], поэтому нам нужно доказать лишь утверждение для сборки. Очевидно, что достаточно доказать его для отображений вида (1.4), что мы и сделаем в заключительной части статьи. Для этого нам понадобятся некоторые новые понятия и факты, к изложению которых мы сейчас приступаем.

2. Кратность отображений $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

2.1. Алгебры, идеалы, фактор-алгебры. Сейчас нам понадобится сделать небольшое отступление в область абстрактной алгебры. При этом мы предполагаем, что читатель знаком с такими базовыми понятиями, как группа, кольцо, поле, а также гомоморфизм и изоморфизм этих структур (см., например, [5]).

Пусть R — коммутативное кольцо и $I \subset R$ — *идеал* в нем. Последнее означает, что подмножество I «замкнуто» относительно операции сложения ($a+b \in I$ для любых элементов $a, b \in I$) и «выдерживает» умножение на каждый элемент кольца R ($ab \in I$ для любых $a \in I$ и $b \in R$). Привести пример идеала достаточно просто: рассмотрим произвольный конечный набор элементов $e_1, \ldots, e_r \in R$ и положим множество I состоящим из всех комбинаций

$$a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r, \quad \forall\, a_1, \ldots, a_r \in R. \tag{2.1}$$

Такой идеал $I \subset R$ называется *конечнопорожденным* и обозначается $\langle e_1, \ldots, e_r \rangle$, а элементы $e_1, \ldots, e_r$ называются его *образующими*.

Конструкция конечнопорожденного идеала напоминает линейную оболочку в векторном пространстве. Если потребовать, чтобы число образующих r было минимальным, то оно становится похоже на размерность подпространства, а образующие элементы — на базис. Тем не менее, имеются отличия (обусловленные тем, что «коэффициенты» $a_1, \ldots, a_r$ в (2.1) — элементы кольца, а не поля). Например, представление элемента $x \in I$ в виде комбинации $x = a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r$ неоднозначно.

Если рассматривать в R только операцию сложения (забыв про умножение), то R является группой, а $I \subset R$ — его аддитивной подгруппой. *Смежным классом* элемента a группы R по подгруппе I называется множество

$$a + I = \{a + b \mid \forall\, b \in I\}.$$

Очевидно, что для двух элементов a и a' смежные классы $a+I$ и $a'+I$ либо совпадают (если $a-a' \in I$), либо не пересекаются (если $a - a' \notin I$). *Фактор-группой* R по I называется множество (обозначается R/I), состоящее из всех смежных классов группы R по подгруппе I, в котором определена операция сложения по формуле $(a+I)+(a'+I) = (a+a')+I$. Нетрудно проверить, что множество R/I с определенной таким образом операцией сложения является аддитивной группой (в частности, ее нулевым элементом является I).

Теперь вспомним, что на самом деле R — это не только аддитивная группа, но и кольцо, т. е. кроме операции сложения в нем есть еще умножение, и они связаны свойством дистрибутивности. Это позволяет определить умножение и в фактор-группе R/I по формуле $(a+I)(a'+I) = aa' + I$.

Задача 4. Доказать, что определенная выше операция умножения смежных классов дистрибутивна относительно сложения, если $I \subset R$ — идеал (одного лишь условия, что I является подкольцом, для этого недостаточно).

Таким образом, в случае, когда I — идеал (далее это всегда будет предполагаться), множество R/I с определенными выше операциями сложения и умножения является кольцом. Оно называется *фактор-кольцом* R по I.

Пусть A — *коммутативная алгебра*, т. е. коммутативное кольцо и векторное пространство (над некоторым полем $\mathbb{K}$), причем операции умножения на элементы поля $\mathbb{K}$ и кольца R согласованы:

$$(ka)b = a(kb) = k(ab) \quad \forall\, k \in \mathbb{K}, \quad \forall\, a, b \in R.$$

Размерностью и базисом алгебры A называются размерность и базис A как векторного пространства. Примеры коммутативных алгебр: алгебра гладких функций $f(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, алгебра ростков гладких функций $f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в некоторой фиксированной точке, алгебра многочленов от n переменных, алгебра формальных степенных рядов от n переменных. Для двух последних приняты обозначения $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ и $\mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$, соответственно. Все эти алгебры бесконечномерны.

Пример 2. Теперь попробуем превратить в алгебру конечномерное векторное пространство J^p, состоящее из многочленов от n переменных, степени которых не превосходят некоторого целого $p \geq 0$. Проблема заключается в том, что результатом умножения двух многочленов из J^p может быть многочлен степени больше p, и таким образом, J^p с обычной операцией произведения многочленов кольцом не является.

Это можно исправить, если определить умножение двух элементов $f, g \in J^p$ следующим образом: сначала f и g умножаются как обычные многочлены, а после этого в получившемся произведении отбрасываются все мономы, степени которых превосходят p. Нетрудно убедиться, что J^p с определенной таким образом операцией умножения является конечномерной коммутативной алгеброй. Она называется *срезанной алгеброй многочленов степеней не выше* p от n переменных. В качестве базиса срезанной алгебры J^p можно взять набор всевозможных мономов вида $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq p$. Отсюда, в частности, видно, что если $n = 1$, то $\dim J^p = p + 1$, а если $n = 2$, то $\dim J^p = (p+1)(p+2)/2$.

Гомоморфизмом (изоморфизмом) алгебр A и A' называется отображение $A \to A'$, которое является одновременно гомоморфизмом (соответственно, изоморфизмом) A и A' как колец и как векторных пространств.

Пусть $I \subset A$ — идеал кольца A и одновременно подпространство в векторном пространстве A, тогда I называется *идеалом* алгебры A. В этом случае можно превратить фактор-кольцо A/I в *фактор-алгебру*. Для этого, очевидно, нужно сделать его векторным пространством (над полем $\mathbb{K}$). Сложение векторов в A/I уже определено (как сложение элементов кольца), и нам остается лишь определить операцию умножения элементов A/I на элементы поля $\mathbb{K}$ таким образом, чтобы были выполнены все аксиомы векторного пространства. Это делается по правилу:

$$k(a + I) = ka + I, \quad \forall\, a \in A, \;\; k \in \mathbb{K}.$$

Нетрудно проверить (предлагаем читателю сделать это самостоятельно), что все аксиомы векторного пространства выполняются и, кроме того, операции умножения на элементы поля $\mathbb{K}$ и кольца согласованы. Полученная таким образом алгебра и называется *фактор-алгеброй* A/I.

Задача 5. Пусть $A = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ или $A = \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$ или A является алгеброй ростков гладких функций $f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в начале координат. Докажите, что определенная выше алгебра J^p представима в виде $J^p = A/I_p$, где идеал I_p порожден всевозможными мономами вида $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = p + 1$.

Алгебра J^p играет важную роль при анализе локального поведения различных гладких объектов: отображений, поверхностей, дифференциальных уравнений и др. Скажем об этом пару слов, хотя и не будем использовать это в дальнейшем.

Пусть A — алгебра ростков гладких функций $f(x_1, \dots, x_n) \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в начале координат. Для заданного целого p введем в A отношение эквивалентности: $f \sim g$, если $|f(x) - g(x)| = o(|x|^p)$ при $x \to 0$. Соответствующие классы эквивалентности называются *p-струями* (или, на английский манер, *p-джетами*). Каждый росток $f \in A$ относится ровно к одному из классов эквивалентности, который называется его p-струей и обозначается $j^p[f]$. Множество p-струй (для любителей формальных обозначений: $A/\sim$) является алгеброй, представляющей собой конечномерную аппроксимацию бесконечномерной алгебры A, если определить сумму и произведение p-струй, а также их умножение на числа по естественным правилам, вытекающим из принятого нами определения эквивалентности ростков. Именно, для любых ростков $f_i \sim g_i$ и числа α имеем:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2 &\;\Rightarrow\; j^p[f_1] + j^p[f_2] = j^p[f_1 + f_2], \\ f_1 f_2 \sim g_1 g_2 &\;\Rightarrow\; j^p[f_1] \cdot j^p[f_2] = j^p[f_1\, f_2], \\ \alpha f_i \sim \alpha g_i &\;\Rightarrow\; \alpha j^p[f_i] = j^p[\alpha f_i]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Нулевым элементом построенной алгебры $A/\sim$ является класс $j^p[0]$ — p-струя ростка тождественно нулевой функции. Ростки с нулевой p-струей называются *p-плоскими* и образуют идеал в A. Если выбрать систему координат (точнее говоря, две системы локальных координат: в n-мерном пространстве-прообразе и одномерном пространстве-образе), то можно отождествить струю $j^p[f]$ с элементом построенной выше алгебры J^p, именно, многочленом Тейлора ростка f степени p.

Задача 6. Докажите, что построенное выше соответствие между $A/\sim$ и алгеброй J^p срезанных многочленов степени не выше p является изоморфизмом этих алгебр. При этом определенное в J^p произведение многочленов отвечает формулам (2.2).

2.2. Определение кратности. Рассмотрим росток гладкого отображения

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \;:\; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \tag{2.3}$$

в некоторой точке 0. Без ограничения общности будем считать, что 0 является началом координат пространства-прообраза и ее образом является начало координат пространства-образа, т. е. все $f_i(0) = 0$. Нам нужно выбрать некоторую «основную» алгебру A, с помощью которой будет определена кратность. В качестве таковой можно выбрать алгебру ростков гладких функций от n переменных в точке 0 или же алгебру формальных степенных рядов $\mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$. В обоих случаях рассуждения будут совершенно аналогичными, если во втором случае под $f_i(x)$ понимать не сами гладкие функции, а их формальные ряды Тейлора в точке 0.

В алгебре A рассмотрим идеал, порожденный образующими $f_i(x)$:

$$I_f = \langle f_1(x), \ldots, f_n(x) \rangle.$$

Фактор-алгебра $Q_f = A/I_f$ называется *локальной алгеброй* ростка (2.3), *кратностью* этого ростка называется ее размерность $\mu = \dim Q_f$. *Образующими* локальной алгебры Q_f называется набор элементов

$$e_1(x), \; \ldots, \; e_\mu(x) \in A, \tag{2.4}$$

который при факторизации по идеалу I_f переходит в базис векторного пространства Q_f. Из сказанного следует, что набор элементов (2.4) обладает следующим свойством: каждый элемент $g(x) \in A$ представим в форме

$$g(x) = \alpha_1 e_1(x) + \cdots + \alpha_\mu e_\mu(x) \;+\; \beta_1(x) f_1(x) + \cdots + \beta_n(x) f_n(x) \tag{2.5}$$

с подходящими числами $\alpha_i \in \mathbb{R}$ и элементами $\beta_i(x) \in A$.

Набор образующих (2.4), как и базис векторного пространства Q_f, можно выбрать бесконечным числом способов.[2] При этом для фиксированного набора образующих и заданной функции $g(x)$ числа α_i в формуле (2.5) определяются однозначно, а функции $\beta_i(x)$ — вообще говоря, нет. Содержательная теория имеется для ростков конечной кратности. Далее всюду, где не оговорено противное, мы будем считать $\mu < \infty$.

[2]Заметим, что $\mu > 0$, так как алгебра A содержит ростки $g(x)$, $g(0) \neq 0$, а по условию, все $f_i(0) = 0$.

Пример 3. Если (2.3) — регулярный росток, т. е. его якобиан $|J_f| \neq 0$, то $\mu = 1$. Действительно, из условия регулярности следует, что $f_1(x), \dots, f_n(x)$ имеют линейно независимые дифференциалы (градиенты). Следовательно, произвольный элемент $g(x) \in A$ можно представить в виде

$$g(x) = g(0) + \beta_1(x)f_1(x) + \cdots + \beta_n(x)f_n(x) \tag{2.6}$$

с подходящими $\beta_i(x) \in A$. Для доказательства представления (2.6) в категории гладких ростков можно использовать лемму Адамара. Ее можно найти во многих учебниках по анализу, например, [7]. Для удобства читателя мы также приводим лемму Адамара и некоторые нужные нам следствия из нее в конце статьи. В категории формальных рядов доказательство еще проще, кроме того, оно вытекает из первой с помощью леммы Бореля–Уитни [10]. Представление (2.6) означает, что локальная алгебра Q_f имеет одну образующую $e_1(x) = 1$, и ее размерность $\mu = 1$.

Пример 4. Вычислим кратность ростка отображения $f(x, y) : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$, заданного формулой

$$f_1(x, y) = y_1, \ \dots, \ f_{n-1}(x, y) = y_{n-1}, \ f_n(x, y) = x^2. \tag{2.7}$$

Для этого покажем, что любой элемент $g(x) \in A$ представим в виде (2.5) с $\mu = 2$ и образующими $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$. Действительно,

$$\begin{aligned} g(x, y) = g_0(y) + xg_1(y) + x^2 g_2(x, y) = \\ &= g_0(0) + \sum_{i=1}^{n-1} g_{0i}(x, y)y_i + x\Big(g_1(0) + \sum_{i=1}^{n-1} g_{1i}(x, y)y_i\Big) + x^2 g_2(x, y) = \\ &= g_0(0) + xg_1(0) + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(x, y)y_i + \beta_n(x, y)x^2 = \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x, y)f_i(x, y), \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\alpha_1 = g_0(0) = g(0, y)$, $\alpha_2 = g_1(0) = g_x(0)$ и функции $\beta_i(x, y) = g_{0i}(x, y) + xg_{1i}(x, y)$ при всех $i = 1, \dots, n-1$ и $\beta_n(x, y) = g_2(x, y)$. При выводе представления (2.8) в категории гладких ростков мы воспользовались леммой Адамара. В категории формальных рядов это представление вообще очевидно, так как с формальными рядами можно обращаться так же, как и с многочленами. Тем самым мы установили, что $\mu = 2$ и локальная алгебра ростка (2.7) изоморфна алгебре срезанных многочленов не выше первой степени от одной переменной.

Задача 7. (i) Покажите, что кратность ростка отображения $f(x, y) : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$, заданного формулой

$$f_1(x, y) = y_1, \ \dots, \ f_{n-1}(x, y) = y_{n-1}, \ f_n(x, y) = x^p, \quad p \geq 1, \tag{2.9}$$

равна p и его локальная алгебра изоморфна алгебре срезанных многочленов степени не выше $p - 1$ от одной переменной.

(ii) Вычислите кратность ростка отображения, заданного формулой

$$f_1(x, y) = y_1, \ \dots, \ f_{n-1}(x, y) = y_{n-1}, \ f_n(x, y) = x^p(y_1 + \cdots + y_{n-1}).$$

Ответ: в случае (ii) кратность $\mu = \infty$.

Для вычисления кратностей ростков бывает удобно использовать подходящие локальные координаты, как в образе, так и в прообразе, т. е. переходить от данного ростка к RL-эквивалентному ростку, устроенному в определенном смысле более просто. Конечно, для этого нужно быть уверенным, что при RL-эквивалентности кратность ростка не изменяется. Мы оставляем это утверждение в виде задачи читателю:

Задача 8. Докажите, что если ростки f и g RL-эквивалентны, то их локальные алгебры Q_f и Q_g изоморфны, и следовательно, их кратности совпадают.

Задача 9. Вычислите кратность μ и (в случае $\mu < \infty$) найдите образующие Q_f для ростков отображений $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в начале координат, заданных формулами: (i) $f_1 = x^3 + xy$, $f_2 = y$; (ii) $f_1 = x^2+y^2$, $f_2 = y$; (iii) $f_1 = x^2+y^2$, $f_2 = xy$; (iv) $f_1 = xy$, $f_2 = y$; (v) $f_1 = x^2$, $f_2 = y^3$; (vi) $f_1 = x^3$, $f_2 = y^3$; (vii) $f_1 = \sin x$, $f_2 = \cos y - 1$.

Понятия локальной алгебры, образующих и кратности распространяются на ростки гладких отображений (2.3), не обязательно в начале координат и не обязательно удовлетворяющих условию $f_i(0) = 0$. Нужно сделать перенос рассматриваемой точки в начало координат пространства-прообраза и вычесть из каждой компоненты $f_i(x)$ число $f_i(0)$, после чего рассмотреть соответствующие понятия у нового отображения.

3. Подготовительные теоремы

3.1. Теорема деления. Рассмотрим росток гладкой функции

$$F(x, y) \ : \ \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^1, \quad y = (y_1, \ldots, y_{n-1}), \tag{3.1}$$

в начале координат 0, $F(0) = 0$. Мы специально выделили переменную x, так как в дальнейшем она играет особую роль. Если подставить вместо остальных переменных y их значения в данной точке (нули), получится росток отображения $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, к которому применимо определенное выше понятие кратности — обозначим такую кратность («по переменной x») буквой m. Нетрудно видеть (проверьте!), что m определяется как такое целое число, что

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0) = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial^{m-1} F}{\partial x^{m-1}}(0) = 0, \quad \frac{\partial^m F}{\partial x^m}(0) \neq 0. \tag{3.2}$$

Далее всегда будем считать, что такое число существует, т. е. $m < \infty$.

Теорема 2 (деления). *Если $m < \infty$, то росток функции* (3.1) *представим в виде*

$$F(x, y) = \varphi(x, y) \cdot \left(x^m + \sum_{i=1}^{m} a_i(y)\, x^{m-i}\right), \tag{3.3}$$

где $a_i(y)$ и $\varphi(x, y)$ — гладкие функции, причем все $a_i(0) = 0$ и $\varphi(x, y) \neq 0$. Если функция $F(x, y)$ аналитическая, то и все функции $a_i(y)$ и $\varphi(x, y)$ тоже аналитические.

Доказательство можно найти в учебниках по теории особенностей [4, 6]. Впервые эта теорема была доказана Вейерштрассом[3] для аналитических функций комплексных переменных, поэтому ее комплексно-аналитический и вещественно-аналитический варианты часто называются «теоремой деления Вейерштрасса». Гладкий вариант теоремы деления (приведенный выше) иногда называют «теоремой деления Мальгранжа» или «теоремой деления Мазера»[4]. Очевидно, что теорема деления

[3] Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815 – 1897) – немецкий математик, один из основателей современного анализа. Теорема деления содержится в работе «Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze» (Mathematische Werke, V. II, Mayer und Müller, Berlin, 1895, 135–188).

[4] Бернард Мальгранж (Bernard Malgrange, род. в 1928) – французский математик, известный своими работами в теории особенностей и дифференциальных уравнениях. Джон Норман Мазер (John Norman Mather, 1942 – 2017) — американский математик, специалист по теории особенностей и теории динамических систем.

справедлива не только в начале координат, но и в произвольной точке (общий случай получается из частного с помощью сдвига).

В качестве применения теоремы деления расскажем об одной красивой задаче, восходящей к Ньютону. Пусть на плоскости (x,t) задана регулярная[5] кривая

$$F(x,t)=0, \tag{3.4}$$

где F — гладкая функция. Наша задача — локально разрешить уравнение (3.4) относительно x, т. е. представить кривую в виде графика функции $x=f(t)$ или нескольких таких графиков, называемых *ветвями* данной кривой.[6] По теореме о неявной функции, в окрестности каждой точки, где $F_x\neq 0$, уравнение (3.4) равносильно $x=f(t)$ с некоторой гладкой функцией f. Интерес представляют те точки кривой, в которых $F_x=0$, и теорема о неявной функции не применима. Однако в этом случае очень хорошо работает теорема деления.

Будем полагать, что рассматриваемая точка — начало координат 0 и росток функции $F(x,t)$ в 0 имеет по переменной x кратность m, $1<m<\infty$. Из условия регулярности следует, что в окрестности 0 уравнение (3.4) разрешимо относительно t, т. е. кривая задается в виде $t=g(x)$ с гладкой функцией g, причем росток g в нуле имеет ту же кратность m. Если m четно, то функция $g(x)$ имеет в нуле локальный максимум или минимум (рис. 3, слева и в центре). Сделав при необходимости замену $t\mapsto -t$, всегда можно считать, что это минимум, и кривая состоит из двух ветвей вида $x=f(t)$, $t\geq 0$. Если же m нечетно, то кривая состоит из единственной ветви $x=f(t)$, определенной как при положительных, так и отрицательных t (рис. 3, справа).

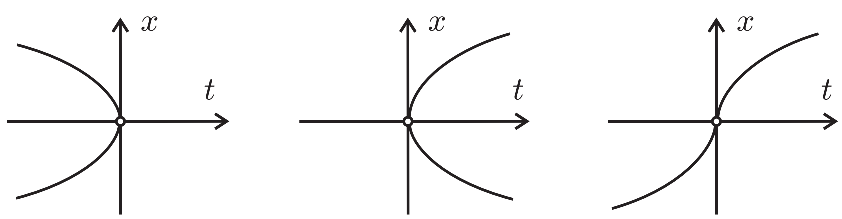


Рис. 3. Точки ветвления регулярных кривых на плоскости

Из теоремы деления следует, что в окрестности 0 уравнение (3.4) равносильно

$$x^m+a_1(t)x^{m-1}+\cdots+a_m(t)=0,\quad a_i(0)=0,\quad a_m'(0)\neq 0.$$

Используя лемму Адамара, можно представить все $a_i(t)$ в виде $a_i(t)=-tb_i(t)$ с подходящими гладкими функциями $b_i(t)$, и переписать предыдущее уравнение в виде

$$x^m=t\left(b_1(t)x^{m-1}+\cdots+b_m(t)\right),\quad b_m(0)\neq 0. \tag{3.5}$$

Предполагая, что $b_m(0)>0$, сделаем замену $t=\xi^m$ и извлечем корень степени m из обеих частей уравнения (3.5). Здесь проявляется различие между четным и нечетным m: во втором случае корень извлекается однозначно, а в первом перед корнем появляется знак $\pm$, соответствующий различным ветвям кривой. Таким образом, уравнение (3.5) приводится к форме

$$x=\epsilon\xi\left(b_1(\xi^m)x^{m-1}+\cdots+b_m(\xi^m)\right)^{\frac{1}{m}},\quad \epsilon=\begin{cases}\;\;1, & \text{если } m \text{ нечетное}\\ \pm 1, & \text{если } m \text{ четное.}\end{cases} \tag{3.6}$$

[5]Условие регулярности состоит в том, что F, F_x, F_t не обращаются в нуль одновременно.

[6]Пример: парабола $x^2-t=0$ состоит из двух ветвей $x=\pm\sqrt{t}$, определенных при $t\geq 0$. Кубическая парабола $x^3-t=0$ состоит одной ветви $x=t^{\frac{1}{3}}$.

Используя теорему о неявной функции, уравнение (3.6) можно локально разрешить относительно x, получив $x = f_\epsilon(\xi)$ с гладкой функцией f_ϵ, $f_\epsilon(0) = 0$. Возвращаясь от вспомогательной переменной ξ к исходной переменной t, мы получаем представление кривой в виде графика функции $x = f_1(t^{1/m})$, если m нечетно. При четном m кривая состоит из двух ветвей: $x = f_{\pm 1}(t^{1/m})$, $t \geq 0$.

Если функция $F(x,t)$ — аналитическая, то функции $b_i(t)$ и функции $f_\epsilon(\xi)$ тоже аналитические. Следовательно, формулы $x = f_\epsilon(t^{1/m})$ представляют собой сходящиеся ряды с дробными степенями i/m, $i = 1, 2, \ldots$ Такие ряды называются *дробно-степенными* или рядами *Ньютона–Пюизё* или просто рядами *Пюизё*.[7] Если функция $F(x,t)$ — гладкая, но не аналитическая, то же самое рассуждение приводит нас к формальным рядам Пюизё.

3.2. Подготовительная теорема Мальгранжа. Как и в предшествующем разделе, мы будем рассматривать росток гладкого отображения

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

в начале координат, предполагая, что все $f_i(0) = 0$. Буквой A мы будем обозначать алгебру ростков гладких (или аналитических) функций от n переменных или алгебру формальных степенных рядов $\mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$. Рассмотрим идеал $I_f \subset A$ и локальную алгебру $Q_f = A/I_f$, как это было объяснено выше, $\mu = \dim Q_f$. Свобода выбора алгебры A объясняется тем, что и в категории ростков гладких (аналитических) функций, и в категории формальных рядов содержательная теория ($\mu < \infty$) выглядит одинаково.

Теорема 3. *Пусть росток отображения $f(x)$ имеет кратность $\mu < \infty$ и образующие его локальной алгебры Q_f суть $e_1(x), \ldots, e_\mu(x)$. Тогда любой элемент $h(x) \in A$ может быть представлен в виде*

$$h(x) = a_1(f(x))e_1(x) + \cdots + a_\mu(f(x))e_\mu(x) \tag{3.7}$$

с подходящими $a_i(x) \in A$.

Теорема 3 называется «подготовительной теоремой Мальгранжа» (далее — ПТМ). Доказательство в категории формальных рядов (более простое) изложено в [1], в категории ростков гладких функций (более сложное) — в [4, 6, 8].

Задача 10. Что ПТМ дает в случае, когда $\mu = 1$, т.е. росток отображения f является диффеоморфизмом?

Решение. При $\mu = 1$ ростки функций $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ имеют линейно независимые градиенты. Используя лемму Адамара, представим произвольный росток $g \in A$ в виде

$$g = g(0) + \beta_1(x)f_1(x) + \cdots + \beta_n(x)f_n(x)$$

с подходящими $\beta_i(x) \in A$. Сравнивая это с (2.5), мы видим, что $e_1(x) = 1$ является образующей одномерной локальной алгебры Q_f. Следовательно, представление (3.7) принимает вид

$$h(x) = a_1(f(x))e_1(x) = a_1(f(x))$$

и не содержит никакой нетривиальной информации: так как f является локальным диффеоморфизмом, для любой функции $h \in A$ равенство $h(x) = a_1(f(x))$ выполняется с функцией $a_1(y) = h(f^{-1}(y))$.

[7] Виктор-Александр Пюизё (Victor Alexandre Puiseux, 1820–1883) — французский математик и астроном (по-русски его фамилию часто пишут также как Пюизо или Пюизе). Пюизё систематически исследовал дробно-степенные ряды в 1850–1851 гг. Ньютон же начал использовать их почти на двести лет раньше, в частности, они встречаются в его втором письме к секретарю Лондонского Королевского общества Генри Ольденбургу (1676), через которого Ньютон вел переписку с Лейбницем — см., например, параграф «Многоугольник Ньютона» в книге [3].

Несмотря на рассмотренный нами «бесполезный» пример $\mu = 1$, ПТМ является очень мощным инструментом для исследования ростков отображений в *особых точках*, т. е. при $1 < \mu < \infty$. Она позволяет получить много нетривиальных результатов, малую часть которых мы приведем ниже.

Задача 11. Докажите, что росток гладкой функции $h(x, y_1, \dots, y_{n-1}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ может быть представлен в виде

$$h(x, y) = a_1(x^2, y) + x a_2(x^2, y), \quad y = (y_1, \dots, y_{n-1}), \tag{3.8}$$

где $a_{1,2}(\cdot\,,\,\cdot)$ — некоторые гладкие функции.

Решение. В примере 4 мы рассматривали росток отображения (2.7). Было показано, что его локальная алгебра двумерна и имеет образующие $e_1(x, y) = 1$, $e_2(x, y) = x$. Отсюда, согласно ПТМ, для любого гладкого ростка $h(x, y)$ следует представление $h(x, y) = a_1(f(x, y)) + x a_2(f(x, y))$, т. е. формула (3.8).

Замечание. Представление (3.8) было установлено нами в предшествующей статье [10] с помощью совсем другой техники. Сравнивая его вывод в том и в другом случае, можно оценить, насколько проще доказательство этой формулы получается с помощью ПТМ. Более того, разложения из следующих задач если и можно получить с помощью нашей старой техники, то сделать это будет гораздо сложнее, чем с помощью ПТМ.

Задача 12. Применяя ПТМ к отображению (2.9), докажите, что для любого $p \geq 2$ росток гладкой функции $h(x, y_1, \dots, y_{n-1}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ может быть представлен в виде

$$h(x, y) = a_1(x^p, y) + x a_2(x^p, y) + \dots + x^{p-1} a_{p-1}(x^p, y), \quad y = (y_1, \dots, y_{n-1}), \tag{3.9}$$

где $a_i(\cdot\,,\,\cdot)$ — некоторые гладкие функции.

Задача 13. Примените ПТМ к отображению $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, где

$$f_1(x, y) = x^3 + \psi(y) x^2 y + xy, \quad f_2(x, y) = y, \tag{3.10}$$

и $\psi(y)$ — произвольная гладкая функция.

Решение. Покажем, что кратность $\mu = 3$ и локальная алгебра отображения (3.10) порождена образующими $e_1(x, y) = 1$, $e_2(x, y) = x$, $e_3(x, y) = x^2$. Действительно, используя лемму Адамара, можно представить росток любой гладкой функции $g(x, y)$ в виде $g(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + y\beta_1(x, y) + x^3 \beta_2(x, y)$, где $\alpha_1 = g(0)$, $\alpha_2 = g_x(0)$, $\alpha_3 = \frac{1}{2} g_{xx}(0)$, с некоторыми гладкими $\beta_i(x, y)$, т. е., если ввести новое обозначение $\overline{\beta}_1 = \beta_1 - x(1 + x\psi(y))\beta_2$, в виде

$$g(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + y\overline{\beta}_1(x, y) + \bigl(x^3 + \psi(y) x^2 y + xy\bigr)\beta_2(x, y).$$

Последнее и есть представление (2.5) с числом $\mu = 3$ и образующими $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$. Отсюда, согласно ПТМ, для любого ростка $h(x, y)$ следует представление

$$h(x, y) = a_1(f_1, y) + x a_2(f_1, y) + x^2 a_3(f_1, y), \tag{3.11}$$

где функция $f_1(x, y)$ взята из формулы (3.10).

Задача 14. Установите представление (3.11), в котором

$$f_1(x, y) = \varphi(x, y)\bigl(x^3 + \psi(y) x^2 y + xy\bigr),$$

$\varphi(x, y)$ и $\psi(y)$ — произвольные гладкие функции, причем $\varphi \neq 0$. Указание: применить ПТМ к ростку отображения $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определенному формулой

$$f_1(x, y) = \varphi(x, y)\bigl(x^3 + \psi(y) x^2 y + xy\bigr), \quad f_2(x, y) = y,$$

и использовать рассуждения, аналогичные предыдущим.

4. Доказательство теоремы 1 для сборки

Как и в разделе 1, будем использовать координаты $(u,v) \in M$ и $(x,y) \in N$ в прообразе и образе соответственно. Напомним, что с помощью правой замены мы уже привели росток отображения к виду (1.4).

4.1. Шаг 1. Покажем, что росток (1.4) с функцией $F(u,v)$, удовлетворяющей условиям

$$F_u(0) = 0, \quad F_{uu}(0) = 0, \quad F_{uv}(0) \neq 0, \quad F_{uuu}(0) \neq 0, \tag{4.1}$$

RL-эквивалентен ростку (1.4) с функцией $F = \varphi(u,v)\left(u^3 + \psi(v)u^2v + uv\right)$, где $\varphi(u,v)$ и $\psi(v)$ — некоторые гладкие функции, причем $\varphi(0) \neq 0$. Действительно, используя лемму Адамара, можно написать представление $F(u,v) = f_0(v) + ug(u,v)$, где $f_0(v) = F(0,v)$. При этом из условия (4.1) вытекает, что

$$g(0) = 0, \quad g_u(0) = 0, \quad g_v(0) \neq 0, \quad g_{uu}(0) \neq 0. \tag{4.2}$$

Сделав левую замену $x \mapsto x - f_0(y)$, с учетом $y = v$ получаем $f_0(v) \equiv 0$, т. е. росток (1.4) с функцией $F(u,v) = ug(u,v)$. Применим к ростку функции $g(u,v)$ с выделенной переменной u теорему деления. Из (4.2) вытекает, что $m = 2$ и

$$g(u,v) = \varphi(u,v)\,(u^2 + \alpha(v)u + \beta(v)) \tag{4.3}$$

с некоторыми гладкими $\alpha(v), \beta(v)$, $\varphi(u,v)$, причем $\alpha(0) = \beta(0) = 0$ и $\varphi(0) \neq 0$.

Из условия $g_v(0) \neq 0$ следует, что $\beta'(0) \neq 0$. Сделаем правую замену переменных $v \mapsto \beta(v)$ и одновременно левую замену $y \mapsto \beta(y)$. Очевидно, при этом коэффициент $\beta(v)$ в формуле (4.3) превратится в v, а соотношение $y = v$ для второй компоненты нашего отображения сохранится. После этого запишем (новый) коэффициент $\alpha(v)$ в виде $\alpha(v) = \psi(v)v$ с некоторой гладкой функцией ψ. В результате наше отображение примет вид (1.4) с функцией

$$F(u,v) = ug(u,v) = \varphi(u,v)\left(u^3 + \psi(v)u^2v + uv\right), \quad \varphi(0) \neq 0, \tag{4.4}$$

что нам и требовалось.

4.2. Шаг 2. Согласно доказанному выше (см. задачи 13, 14), росток любой гладкой функции $h(u,v)$ может быть представлен в виде

$$h(u,v) = a_1(F,v) + ua_2(F,v) + u^2a_3(F,v) \tag{4.5}$$

с подходящими гладкими $a_i(\cdot\,,\cdot)$, где функция $F(u,v)$ взята из формулы (4.4). Применим представление (4.5) к функции $h(u,v) = u^3$, для удобства заменяя коэффициенты: $a_2 \mapsto -a_2$ и $a_3 \mapsto 3a_3$. В результате получаем представление

$$u^3 = a_1(F,v) - ua_2(F,v) + 3u^2a_3(F,v). \tag{4.6}$$

Так как левая часть тождества (4.6) не содержит мономов u^i, $i = 0,1,2$, то и правая его часть также не содержит этих мономов. Отсюда, с учетом формулы (4.4), следует, что все $a_i(0) = 0$.

Тождество (4.6) можно переписать в виде

$$(u - a(F,v))^3 + b(F,v)(u - a(F,v)) = c(F,v) \tag{4.7}$$

с коэффициентами $a = a_3$, $b = a_2 - 3a^2$, $c = a_1 - ab - a^3$, причем, как следует из сказанного выше, $a(0) = b(0) = c(0) = 0$. Как видно из формулы (4.7), теперь нужно одновременно сделать правую замену

$$\tilde{u} = u - a(F(u,v),v), \quad \tilde{v} = b(F(u,v),v) \tag{4.8}$$

и левую замену

$$\tilde{x} = c(x, y), \quad \tilde{y} = b(x, y). \tag{4.9}$$

В результате этого росток отображения $x = F(u, v)$, $y = v$ с функцией $F(u, v)$, удовлетворяющей соотношению (4.7), примет требуемый вид $\tilde{x} = \tilde{u}^3 + \tilde{u}\tilde{v}$, $\tilde{y} = \tilde{v}$.

4.3. Шаг 3. Для завершения доказательства теоремы 1 остается убедиться, что обе замены (4.8) и (4.9) являются локальными диффеоморфизмами, т. е. их матрицы Якоби в начале координат невырождены. Для этого покажем, что

$$\frac{\partial a_1}{\partial F}(0) = \frac{1}{\varphi(0)} \neq 0, \qquad \frac{\partial a_2}{\partial v}(0) = 1. \tag{4.10}$$

Действительно, сравнивая коэффициенты при мономе u^3 в левой и правой части тождества (4.6) с учетом (4.4), мы сразу же получаем первое соотношение (4.10). Теперь посмотрим на коэффициент при мономе uv. В левой части этот коэффициент равен нулю, а в правой он складывается из двух, соответствующих первому и второму слагаемому в формуле (4.6) (третье слагаемое не содержит монома uv). С учетом первого соотношения (4.10), отсюда получаем второе соотношение (4.10).

Докажем требуемое утверждение для замены (4.8). С учетом выражений для функций a, b, c через a_1, a_2, a_3, а также формул (4.4) и (4.10), в начале координат имеем:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial u}(0) = 1 - \frac{\partial a}{\partial F}F_u = 1, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u}(0) = \frac{\partial b}{\partial F}F_u = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v}(0) = \frac{\partial b}{\partial F}F_v + \frac{\partial b}{\partial v} = \frac{\partial a_2}{\partial v} = 1.$$

Отсюда следует, что в начале координат матрица Якоби замены (4.8) невырождена. Аналогичная проверка для замены (4.9) оставляется читателю.

5. Лемма Адамара и ее следствия

Пусть $F(x, y) : X \times Y \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, причем $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ и $y = (y_1, \ldots, y_m) \in Y$, где $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^m$ — области, причем область X выпуклая.

Лемма Адамара. *Функция $F(x, y)$ представима в виде*

$$F(x, y) = F(0, y) + \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i(x, y),$$

где все $\varphi_i(x, y)$ — некоторые гладкие функциию.

Следствие 1. *Если $n = 1$, то для любого натурального p функция $F(x, y)$ представима в виде*

$$F(x, y) = f_0(y) + x f_1(y) + \cdots + x^{p-1} f_{p-1}(y) + x^p g_p(x, y),$$

где $f_1(y), \ldots, f_{p-1}(y)$ и $g_p(x, y)$ — некоторые гладкие функции.

Следствие 2. *Пусть $X_1(x, y), \ldots, X_n(x, y)$ — ростки гладких функций в точке 0, обращающиеся в нуль и имеющие линейно независимые градиенты по переменной x. Тогда росток функции $F(x, y)$ представим в виде*

$$F(x, y) = F(0, y) + \sum_{i=1}^{n} X_i(x, y) \varphi_i(x, y).$$

Подчеркнем, что в отличие от первого следствия и самой леммы Адамара, второе следствие имеет локальный характер. Точнее, оно справедливо в такой окрестности точки 0, в которой отображение

$(x_1, \ldots, x_n, y) \mapsto (X_1(x, y), \ldots, X_n(x, y), y)$ является диффеоморфизмом. Доказательство леммы Адамара можно найти в [7, 10].

Литература

1. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. - М.: МЦНМО, 2004.

2. Арнольд В.И. Теория катастроф. - М.: Наука, 1990.

3. Арнольд В.И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. - М.: Наука, 1989.

4. Брекер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. - М.: Мир, 1977.

5. Винберг Э.Б. Курс алгебры. - М.: Факториал, 2002.

6. Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. - М.: Мир, 1977.

7. Зорич В.А. Математический анализ. - М.: Наука, 1981.

8. Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций. - М: Мир, 1968.

9. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. - М.: Факториал, 2000.

10. Павлова Н.Г., Ремизов А.О. Гладкие функции, формальные ряды и теоремы Уитни // Математическое образование. - № 3 (79). - 2016. - с. 49–65.

11. Whitney H. On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane // Annals of Mathematics, Second Series. - Vol. 62. - No. 3. - 1955. - p. 374–410.

Павлова Наталья Геннадьевна,
доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации
Российского университета дружбы народов,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: natasharussia@mail.ru

Ремизов Алексей Олегович,
старший научный сотрудник
Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: alexey-remizov@yandex.ru

Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника

М. Е. Степанов

В данной статье сопоставляются геометрия треугольника и Эрлангенская программа Ф. Клейна, в результате чего выявляется ошибочность распространённой трактовки планиметрии Евклида как учения об инвариантах группы движений плоскости. Автор рассматривает один из возможных способов устранения данной ошибки с помощью построения иной группы преобразований.

Ниже даётся сокращённое изложение статьи, опубликованной в [1–2]. В частности, в данной публикации опущены теория циклоидальных кривых, обсуждение причин ошибки в трактовке евклидовой геометрии и доказательство известных теорем, относящихся к геометрии треугольника. В некоторых доказательствах удалены ссылки на доказанные в [1–2] теоремы.

Введение

Высокая степень обобщённости математических теорий как бы нивелирует значение исторически исходных математических объектов. Однако жизнь постоянно подтверждает фундаментальность именно этих понятий, образов и представлений. К ним можно отнести натуральные числа, числовую прямую, плоскость и трёхмерное пространство. В определённом смысле именно они доступны для чувственного восприятия и экспериментального изучения и являются неотъемлемой базой любого математического исследования.

Евклидова плоскость — важнейший для математики объект. Этот факт обусловлен множеством причин как математического, так и общекультурного порядка. Прежде всего, реально существуют и играют важную роль в человеческой жизни многочисленные чувственные прообразы плоскости, такие как водная, а часто и земная поверхность, натянутая ткань. Освоение пространства, связанное со становлением любой личности, во многом привязано к плоскости. При этом речь идёт как о движении человека по поверхностям, близким к плоскости, так и об изобразительной деятельности, знакомой каждому ребёнку.

Евклидова плоскость, вернее её конечные куски, обозримы. По этой причине плоскость можно считать окном в платоновский мир совершенных идей. Возможно, это обстоятельство и привело к созданию первой научной дедуктивной теории — геометрии Евклида. Эта теория увязывает и объясняет большое количество различных фактов по принципу, сходному с принципом причинности. Геометрия Евклида в течение тысячелетий служила образцом построения научной теории. Простота же доказательств сделала знакомство с ней одним из основных методов целенаправленного развития интеллекта европейского типа (теперь, возможно, более уместно говорить о староевропейском типе).

Несмотря на огромную прикладную значимость геометрии Евклида, в чисто математическом плане она в настоящее время почти выпала из сферы интересов ведущих учёных.

Геометрия Евклида является первой из математических теорий, изучающих плоскость, но на данный момент далеко не единственной такой теорией. Однако все более поздние теории, описывающие плоскость, зародились в её недрах и генетически теснейшим образом с ней связаны.

Книга Рене Декарта «Геометрия» указала геометрам по новое направление. Итогом развития метода координат и реализации картезианской программы стали аналитическая геометрия, математический анализ функций одной переменной, дифференциальная геометрия. Каждая из этих взаимосвязанных теорий позволяет глубже понять геометрию плоскости.

В частности, на основе методов Декарта возникла теория плоских кривых. Сейчас эта теория также считается далёкой от магистральных направлений современной математики, стремящейся к максимальной общности своих положений. Но именно теория плоских кривых стала зародышем алгебраической геометрии. Следует упомянуть и тот факт, что теория плоских кривых и сейчас не потеряла своего значения и может быть полезна для решения современных проблем математики [3].

Отметим, что такой важнейший объект математики как поле комплексных чисел прочно привязан к плоскости. Видимо, уже Леонард Эйлер, задолго до Карла Фридриха Гаусса, ясно понимал это обстоятельство. История развития Клейном и Анри Пуанкаре теории автоморфных функций даёт впечатляющий пример роли геометрических идей в других областях математики. Кроме того, Клейн и Пуанкаре показали, что геометрия Лобачевского не только не противоречит геометрии Евклида, но и может быть успешно «смоделирована» с помощью последней.

В каждой из перечисленных теорий речь по-прежнему идёт всё о той же плоскости. Хотя богатство содержания резко возрастает с увеличением числа новых теорий, вне схем и абстракций геометрия плоскости является единой. Однако на практике геометрия плоскости парадоксальным образом распадается на ряд специализированных разделов, которые постепенно теряют между собой непосредственную связь. Специалист по теории дифференциальных уравнений может не только не знать многих теорем геометрии треугольника, но и отзываться о них с известным пренебрежением. В то же время есть и иная точка зрения, состоящая в том, что подлинное познание объекта должно соединить все известные факты, какими бы разнородными они ни были.

Тем не менее, среди математиков весьма распространено мнение, что евклидова геометрия сыграла роль почвы, из которой выросли более общие теории, но при этом полностью потеряла своё значение в рамках математики, как развивающейся науки. На самом же деле внутренняя проблематика евклидовой геометрии стимулировала развитие математики даже и в двадцатом веке.

Проблемы, связанные с пятым постулатом «Начал», тысячелетиями захватывали математиков, пока не привели к открытию новых математических миров. В том же ключе можно рассматривать и работы Давида Гильберта по основаниям геометрии, оказавшие значительное влияние на развитие математической логики.

Неотъемлемая часть геометрии Евклида — задачи на построение. Эти задачи играли заметную роль в математике девятнадцатого века. Прежде всего, нельзя обойти вниманием первое открытие Гаусса, связанное с доказательством возможности построения циркулем и линейкой правильных многоугольников. Последствия этого открытия для математики весьма значимы.

Наоборот, идеи, возникшие в конце восемнадцатого и в начале девятнадцатого века за пределами геометрии, позволили не только развить новые геометрические теории, но и окончательно решить трудные проблемы классической геометрии. Так исследования Жозефа Луи Лагранжа и Эвариста Галуа, связанные с задачей решения алгебраических уравнений, ознаменовали возникновение теории групп. Соединение этой теории и идей проективной геометрии, также выросшей из геометрии Евклида, привело к созданию теории геометрических преобразований, общий смысл которой сформулирован в Эрлангенской программе Клейна. На этом же пути была решена проблема, связанная с разрешимостью задач на построение циркулем и линейкой.

Следует упомянуть также и раздел современной геометрии, использующий как новейшие математические теории, так и элементарные методы евклидовой геометрии. Речь идёт о геометрии в целом, разработанной, прежде всего, отечественной школой математиков, в том числе Б.Н. Делоне, А.Д. Александровым, А.В. Погореловым и Н.В. Ефимовым [4].

Как ни удивительно, но и геометрия Евклида в собственном смысле слова продолжала интенсивно развиваться, несмотря на возникновение новых теорий. К этому приложили руку математики всех калибров. Среди великих следует назвать Эйлера (прямая Эйлера, окружность девяти точек), Гаусса (прямая Гаусса), Якоба Штейнера (теорема об огибающей прямых Симсона, эллипс Штейнера, развитие теории геометрических построений). В то же время математики девятнадцатого века Фейербах и Морлей, открывшие теоремы Фейербаха и Морлея, известны только этими результатами.

В двадцатом веке едва ли не экспоненциально продолжалось накопление новых фактов. В первую очередь речь идёт о геометрии треугольника. Недаром в начале двадцатого века возник раздел планиметрии, называемый «новой геометрией треугольника» [5]. Порекомендуем также [6–9].

В этой связи хочется упомянуть исследования Евгения Дмитриевича Куланина, который является одним из лучших специалистов по геометрии треугольника. Математические снобы полагают, что проблемы такого рода находятся слишком далеко от модных направлений математики и слишком просты для них. Думается, что это не совсем так.

В геометрии треугольника поражает удивительное богатство содержания. С треугольником связаны сотни объектов, некоторые из которых мы упомянём, выбирая почти наугад:

- замечательные точки (например, общеизвестные точки пересечения медиан, биссектрис, высот, срединных перпендикуляров, и куда менее знаменитые точки Брокара, Лемуана, Торричелли, Фейербаха и т. д.);
- замечательные прямые (прямая Эйлера, бесконечное число прямых Симсона и т. д.);
- замечательные треугольники, порождаемые исходным треугольником (треугольник Наполеона, треугольник Морлея и т. д.);
- замечательные окружности (вписанная, описанная, вневписанные окружности, окружность Эйлера и т. д.);
- замечательные кривые (кривая Штейнера, являющаяся огибающей прямых Симсона, различные коники и кубики).

Охватить соответствующую проблематику с наскока невозможно. Знать геометрию треугольника может лишь специалист высокого уровня, каковым и является Е.Д. Куланин. Тут невольно вспоминаются слова Вольтера о том, что каждый должен возделывать свой сад.

Продолжая мысль Вольтера, сравним садовника и космонавта. Садовник, конечно, может обрести широкую известность, например, если он Иван Мичурин или Лютер Бербанк. Но слава к нему может прийти только в зрелые годы. И как же мало знаменитых садовников. *А* космонавтам честь, хвала и слава в молодые годы. Они ступали на другие планеты, на которых рядовые люди побывать не смогут. Они видели иные, неизвестные человечеству миры, безмерно холодные, безмерно горячие, лишённые жизни. Но вот вопрос. Будут ли нужны кому-нибудь эти миры, если на земле не останется садов? Элементарная геометрия — это тот сад, в который может войти каждый, если хватит упорства и трудолюбия. *А* тропа из этого сада ведёт на космодром.

Многолетнее общение с Куланиным помогло автору настоящей статьи составить некоторое представление о геометрии треугольника и заставило задуматься о причинах необыкновенной насыщенности этого раздела евклидовой геометрии. Кроме того, автору пришлось с удивлением обнаружить курьёзное, на его взгляд, утверждение, связанное с Эрлангенской программой Клейна и имеющее отношение к евклидовой геометрии вообще и геометрии треугольника в частности.

Геометрия Евклида в эрлангенской программе Клейна

Суть Эрлангенской программы Клейна коротко и ясно изложена в статье, первоначально напечатанной в Большой Советской Энциклопедии. В дальнейшем она перепечатывалась в Математической Энциклопедии [10] и Математическом энциклопедическом словаре. Таким образом, её содержание можно считать общепризнанной точкой зрения на Эрлангенскую программу (ЭП). По этой причине ниже мы приведём данную статью полностью.

> «Эрлангенская программа — единая точка зрения на различные геометрии (напр., евклидову, аффинную, проективную), сформулированная впервые Ф. Клейном (F. Klein) на лекции, прочитанной в 1872 в ун-те г. Эрланген (Германия) и напечатанной в том же году под назв. «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований» (см. сб. «Об основаниях геометрии», М.: 1956, с. 399–434).

Сущность ЭП состоит в следующем. Евклидова геометрия рассматривает те свойства фигур, которые не меняются при движениях; равные фигуры определяются как фигуры, которые можно перевести одну в другую движением. Но вместо движений можно выбрать какую нибудь иную совокупность геометрич. преобразований и объявить «равными» фигуры, получающиеся одна из другой с помощью преобразований этой совокупности; при этом приходят к иной «геометрии», изучающей свойства фигур, не меняющиеся при рассматриваемых преобразованиях. Введённое «равенство» должно удовлетворять следующим трём естественным условиям:

1) каждая фигура F «равна» сама себе;
2) если фигура F «равна» фигуре F', то и F' «равна» F;
3) если фигура F «равна» F', а F' «равна» F'', то и F «равна» F''.

Соответственно этому приходится накладывать на совокупность преобразований следующие три требования: 1) в совокупность должно входить тождественное преобразование, оставляющее всякую фигуру на месте; 2) наряду с каждым преобразованием Π, переводящим фигуру F в F', в совокупность должно входить «обратное» преобразование Π^{-1}, переводящее F' в F; 3) с двумя преобразованиями Π_1 и Π_2, переводящих соответственноF в F' и F' в F'', в совокупность должно входить произведение $\Pi_2\Pi_1$ этих преобразований переводящее F в F'' ($\Pi_2\Pi_1$ состоит в том, что сначала производится Π_1, а затем Π_2). Требования 1), 2) и 3) означают, что рассматриваемая совокупность является группой преобразований. Теория, которая изучает свойства фигур, сохраняющиеся при всех преобразованиях данной группы, наз. геометрией этой группы.

Выбирая по-разному группы преобразований, получают разные геометрии. Так, принимая за основу группу движений, приходят к обычной (евклидовой) геометрии; заменяя движения аффинными или проективным преобразованиями, — к аффинной или соответственно к проективной геометрии. Основываясь на идеях А. Кэли (A. Cayley), Ф. Клейн показал, что принятие за основу группы проективных преобразований, переводящих в себя некоторый круг (или произвольное конич. сечение), приводит к неевклидовой *геометрии Лобачевского.* Ф. Клейн ввёл в рассмотрение довольно широкий круг других геометрий, определяемых подобным же образом.

ЭП не охватывает некоторых важных разделов геометрии, напр. риманову геометрию. Однако ЭП Имела для дальнейшего развития геометрии существенное стимулирующее значение».

Итак, относительно геометрии Евклида мы можем извлечь из соответствующего текста два положения.

1. Приняв за основу группу движений плоскости (то есть группу преобразований, сохраняющих расстояния), мы приходим к евклидовой геометрии.

2. Евклидова геометрия изучает свойства фигур, сохраняющиеся при всех движениях плоскости.

Очевидно, что при подобной интерпретации евклидова геометрия превращается в набор тавтологий типа «A тождественно А», поскольку любому здравомыслящему человеку ясно, что два равных треугольника обладают одинаковыми свойствами или, что то же самое, геометрические свойства треугольника при его перемещениях не изменяются.

Вряд ли кто-нибудь будет оспаривать тот факт, что теоремы, описывающие разнообразные свойства треугольников, должны быть отнесены к евклидовой планиметрии. Приведём примеры общеизвестных теорем, доказательство которых разбирают школьники, приступившие к изучению курса геометрии.

Начнём с теоремы о медианах. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении два к одному, считая от вершины. Каждому человеку, понявшему доказательство, ясно, что теорема верна для всех треугольников. Согласно концепции Клейна должна существовать группа преобразований, которая преобразует любой треугольник в любой, но при этом описанное в теореме свойство сохраняется. Такая группа преобразований существует. Однако это не движения плоскости, а аффинные преобразования.

Таким образом, в геометрии треугольника имеются теоремы, которые описывают свойства треугольника, инвариантные относительно группы аффинных преобразований. Все их можно доказать для правильного треугольника, а затем перенести на другие треугольники.

Однако, как известно каждому, в планиметрии есть и теоремы иного характера. В этом легко убедиться, если после теоремы о медианах вспомнить теорему о биссектрисах треугольника. Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Очевидно, что точка пересечения биссектрис равноудалена от сторон треугольника и, по этой причине, является центром вписанной в треугольник окружности.

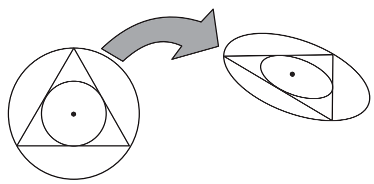


Рис 1.

Утверждение о том, что в треугольник можно вписать окружность не относится к аффинной геометрии. Дело в том, что при аффинных преобразованиях окружность переходит в эллипс, рис. 1. Если правильный треугольник отобразить на треугольник произвольной формы, вписанная в правильный треугольник окружность перейдёт в так называемый эллипс Штейнера.

Сделаем предварительный вывод. Геометрия треугольника, составляющая часть евклидовой геометрии плоскости, включает в себя как теоремы, описывающие инварианты аффинной группы преобразований, так и теоремы о свойствах присущих всем треугольникам, но инвариантами аффинной группы не являющимися.

Вернёмся теперь к описанным вокруг треугольников окружностям и попытаемся найти группу, которая переводит треугольники произвольной формы друг в друга, но сохраняет описанную окружность, не превращая её в эллипс. Рассмотрим модель Клейна геометрии Лобачевского, у которой в качестве абсолюта взята окружность. Группа проективных преобразований, переводящих окружность-абсолют в себя, может перевести любые три точки A_1, B_1, C_1 на окружности любые три точки A_2, B_2, C_2 на той же окружности. Дополнив эту группу преобразованиями подобия, мы получим группу преобразований, переводящую произвольный треугольник и описанную вокруг него окружность в любой другой треугольник, сохраняя описанную окружность.

Итак к геометрии треугольника имеет отношение подгруппа группы проективных преобразований, к тому же связанная с неевклидовой геометрией.

Гипоциклоиды и кривая Штейнера

Гипоциклоиды возникают при качении подвижной окружности по внутреннему ободу неподвижной окружности. При этом перо находится непосредственно на ободе подвижной окружности.

Кривая Штейнера возникает при качении подвижной окружности по внутреннему ободу неподвижной окружности. При этом радиус подвижной окружности в три раза меньше радиуса неподвижной окружности. Легко понять, что кривая Штейнера состоит из трёх арок. Она похожа на греческую букву дельта и, по этой причине, её порой называют дельтоидой, рис. 2.

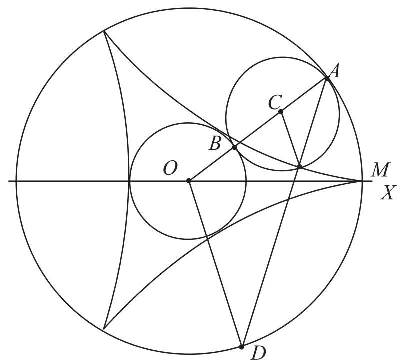


Рис 2.

Кривая Штейнера может быть построена следующим образом. Пусть точки A и D движутся по окружности радиуса r_0 с постоянными угловыми скоростями в разные стороны, причём модуль скорости точки D в два раза больше скорости точки A. Точка M, определяемая условием $AM = \frac{1}{3}AD$, описывает дельтоиду.

Если угол AOX равен u, то будем говорить, что точка A определяется углом u. Рассмотрим кроме точки A ещё и точку A_1, которая определяется углом $u + \pi$. Назовём точки A и A_1 связанными, а отрезок AA_1 — диаметром кривой Штейнера.

Кривую Штейнера можно построить как огибающую некоторого семейства прямых. Пусть по окружности радиуса $\frac{1}{3}r_0$ с постоянной угловой скоростью ω_1 движется точка, через которую проходит прямая, вращающаяся также с постоянной угловой скоростью ω_2. Тогда в случае, когда $\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{1}{2}$, огибающей следов, оставляемых этой прямой, является кривая Штейнера, описанная вокруг окружности радиуса $\frac{1}{3}r_0$.

Теорема. *Любой из диаметров кривой Штейнера касается этой кривой и имеет постоянную длину, равную удвоенному диаметру катящейся окружности. Касательные, проведённые через концы диаметра, перпендикулярны друг другу, а точка их пересечения лежит на окружности радиуса* $\frac{1}{3}r_0$.

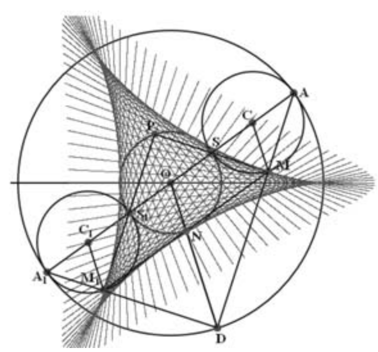


Рис 3.

Доказательство. См. рис. 3. Пусть точка A определяется углом u, а связанная с ней точка A_1 — углом $u + \pi$. Тогда точки D и D_1, соответствующие точкам A и A_1, определяются углами $-2u$ и $-2u + 2\pi$, то есть D и D_1 совпадают. Поскольку отрезок AA_1 является диаметром неподвижной окружности, угол ADA_1 — прямой.

Поскольку $AM = \frac{1}{3}AD$, так же как и $AM_1 = \frac{1}{3}A_1D_1$, то подобны пары треугольников OAD и CAM, а так же OA_1D и CA_1M_1. Из этого следует, что отрезки CM и C_1M_1 параллельны и равны. Таким образом, четырёхугольник MCC_1M_1 является параллелограммом. Значит, диаметр кривой Штейнера MM_1 параллелен отрезку AA_1 и равен двум диаметрам катящейся окружности.

Кроме того, диаметр кривой Штейнера MM_1 наклонён к горизонтали под углом u (в силу параллельности отрезку AA_1) и проходит через точку N, лежащую на пересечении свободной окружности и отрезка OD, который наклонён к горизонтали под углом $-2u$. Получается, что любой из диаметров кривой Штейнера лежит на прямой NM, причём точка N движется с угловой скоростью -2, а прямая NM вращается с угловой скоростью 1. Из этого следует, что диаметры кривой Штейнера касаются этой кривой.

Теперь проведём в точках M и M_1 касательные к кривой Штейнера. Поскольку AD — нормаль к этой кривой, то отрезок MS, соединяющий точку M на кривой с точкой S пересечения катящейся окружности с отрезком AA_1 является касательной. Действительно, угол SMA опирается на диаметр катящейся окружности и является прямым, то есть AD и MS перпендикулярны.

Точно так же отрезок MS_1, соединяющий точку M_1 на кривой Штейнера с точкой S_1 пересечения катящейся окружности в новом её положении с отрезком AA_1 является касательной.

Поскольку отрезки AD и AD_1 перпендикулярны, перпендикулярны друг другу и касательные MS и MS_1. А поскольку они исходят из концов диаметра SS_1 свободной окружности, то пересекаются в некой точке P, лежащей на этой же окружности. Теорема доказана.

Вернёмся к доказательству теоремы. Очевидно, что упоминаемая там точка N, лежащая на свободной окружности, является серединой диаметра кривой Штейнера. Таким образом, середина диаметров кривой Штейнера вычерчивает окружность, вписанную в кривую Штейнера.

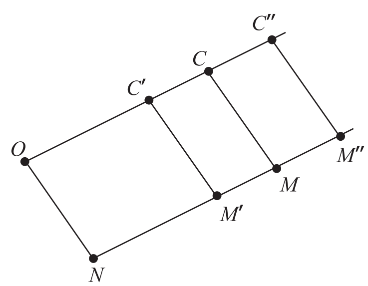


Рис 4.

Возникает вопрос, какие кривые вычерчивают другие точки, делящие диаметр в постоянном отношении. Мы можем предположить, что речь идёт о гипотрохоидах, связанных с кривой Штейнера. Снова вернёмся к доказательству еоремы. Для построения кривой Штейнера используется параллелограмм $OCMN$, рис. 4.

Если выбрать на отрезке точку M', которая делит отрезок MM_1, а, значит, и отрезок MN, в заданном отношении $\frac{M'N}{MN} < 1$, то параллелограмм $OC'M'N$ позволит построить удлинённую гипотрохоиду. В случае $\frac{MN}{MN} > 1$ параллелограмм $OC''M''N$ позволит построить укороченную гипотрохоиду. При этом способе построения укороченные гипотрохоиды будут целиком охватывать кривую Штейнера, удлинённые будут расположены в её внутренней части.

Более того, рассмотрим качение диаметра по одной из арок кривой Штейнера. Нас интересует положение точки касания в различных фазах движения. В начальной фазе точка касания находится на правом конце отрезка (фаза 1). Далее она постепенно перемещается вдоль катящегося отрезка (фаза 2), пока не достигнет левого конца (фаза 3), см. рис. 5.

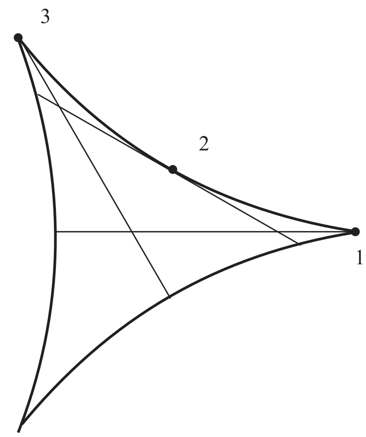


Рис 5.

Таким образом, точка касания проходит вдоль всего отрезка и делит его во всех возможных отношениях. По этой причине любая удлинённая гипотрохоида, определяемая фиксированным отношением $\nu = \frac{M'N}{MN} < 1$, касается каждой арки кривой Штейнера. На самом деле при полном цикле проката диаметра по кривой Штейнера он меняет ориентацию и касается каждой арки кривой ещё раз в точках, определяемых отношением $1-\nu$. Из этого следует, что удлинённая гипотрохоида похожа на листок клевера, но является кривой с самопересечениями.

Важными фактами, связанными с рассматриваемым вопросом, является то, что через любую внутреннюю точку области, ограниченной кривой Штейнера, можно провести

- три касательные к кривой Штейнера;
- три нормали к кривой Штейнера.

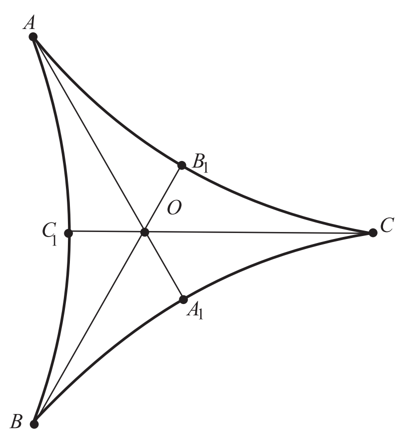


Рис 6.

Продемонстрируем правильность этих утверждений с помощью рассуждений качественного характера. Три диаметра кривой Штейнера AA_1, BB_1 и CC_1, исходящие из точек возврата, делят внутреннюю область на криволинейные треугольники, рис. 6. В частности, можно говорить о треугольниках AA_1B и AA_1C, BB_1A и BB_1C, CC_1A и CC_1B. Назовём их базовыми.

Ещё раз рассмотрим процесс перекатывания диаметра по арке кривой Штейнера из положения AA_1 в положение BB_1. Обозначим концы движущегося диаметра через T и P. Тогда T непрерывно переходит из положения A_1 в положение B, а P — из положения A в B_1. Кроме того, точка касания диаметра M переходит по арке из положения A в положение B.

Своеобразная трансверсаль MT при движении целиком заметает криволинейный треугольник AA_1B, а трансверсаль MP — криволинейный треугольник AB_1B. Иными словами, через каждую точку криволинейного треугольника AA_1B можно провести касательную к арке AB кривой Штейнера. Через каждую точку криволинейного треугольника AB_1B также можно провести касательную к арке AB, которая отличается от предыдущей касательной.

Итак, с каждым базовым треугольником связана касательная к одной из арок кривой Штейнера. Кроме того, каждая точка внутри дельтоиды накрыта тремя базовыми треугольниками, поскольку любая пара треугольников с общим диаметром накрывает соответствующую область, но точка может попасть только в один треугольник из пары. В итоге становится ясно, что через любую внутреннюю точку области, ограниченной кривой Штейнера, можно провести три касательные к кривой Штейнера.

Отметим, что в общем положении две касательные проведены к одной арке, и одна — к другой. К третьей арке касательную провести нельзя.

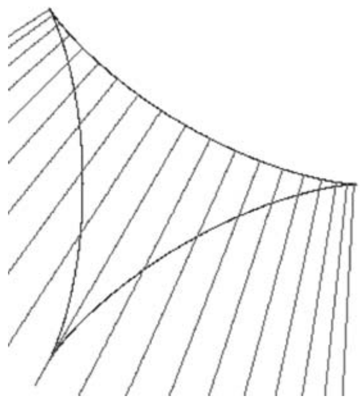


Рис 7.

Перейдём к случаю нормалей, рис. 7. Здесь всё очень просто. Если двигать нормаль по одной из арок дельтоиды, то она, перемещаясь непрерывно, заметёт все внутренние точки соответствующей области без перекрытий. Таким образом, из каждой внутренней точки можно провести одну нормаль к каждой из трёх арок кривой Штейнера.

Далее используются следующие теоремы из геометрии треугольника.

Окружность Эйлера или окружность девяти точек. *Середины трёх сторон треугольника, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности. Эта окружность гомотетична описанной окружности относительно ортоцентра с коэффициентом 0,5.*

Прямые Симсона. *Если выбрать на описанной окружности произвольную точку P, то основания A_1, B_1 и C_1 перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника ABC, лежат на одной прямой, называемой прямой Симсона. Каждой точке на описанной окружности соответствует своя прямая Симсона.*

Теорема Штейнера о прямых Симсона. *Огибающей прямых Симсона является кривая Штейнера.*

Построение группы преобразований, связанной с геометрией треугольника

Теорема Штейнера даёт возможность построить группу преобразований, которая, несомненно, имеет прямую связь с геометрией треугольника. Прежде чем строить её, обсудим вопрос о связи треугольника и соответствующей ему кривой Штейнера. Итак, треугольник с помощью своих прямых Симсона порождает кривую Штейнера. Его стороны и высоты при этом являются касательными соответствующей кривой. Будем говорить, что данный треугольник вложен в кривую Штейнера.

Сейчас мы покажем, что в кривую Штейнера можно вложить треугольник любой формы, то есть треугольник, подобный любому другому произвольно выбранному треугольнику. Вообще это обстоятельство почти очевидно, но мы в силу его важности для нас рассмотрим достаточно подробно.

Зафиксируем на плоскости окружность γ и выберем два произвольных треугольника. Форма треугольника, которая у подобных треугольников одинакова, определяется двумя параметрами — двумя углами. Впишем в окружность γ треугольники, подобные выбранным, и построим для каждого из них кривую Штейнера. Очевидно, что эти кривые будут конгруэнтны, поскольку равны их окружности Эйлера, вписанные в каждую из кривых Штейнера. Совместив две кривые Штейнера, мы вложим оба треугольника в одну дельтоиду. Можно провести эту процедуру практически, нарисовав соответствующие треугольники и кривые на двух кальках и наложив их друг на друга.

Однако подобные действия можно провести и с одним треугольником. Пусть на двух кальках нарисованы две кривые Штейнера, порождённые одинаковыми треугольниками. Ясно, что совместить кривые Штейнера на кальках можно несколькими способами. Число возможных вариантов равно шести, поскольку кривая Штейнера совмещается сама с собой либо при повороте на $120°$, либо при зеркальной симметрии относительно касательной, проходящей через излом кривой.

Как истолковать это обстоятельство? Дело в том, что треугольник можно воспринимать не только как фигуру, подобную реальному предмету, но и более абстрактно, например, как упорядоченную тройку действительных чисел, задающую длины сторон. Тогда один треугольник со сторонами a, b и c превращается в шесть треугольников, а именно в $\{a, b, c\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$, $-\{a, b, c\}$, $-\{b, c, a\}$, $-\{c, a, b\}$, где знак минус указывает на смену ориентации треугольника на евклидовой плоскости. Подобное неоднозначное понимание треугольника можно усмотреть уже в одной из реконструкций доказательства Фалеса теоремы о равнобедренном треугольнике.

Сделаем следующее замечание по поводу описания треугольников, вложенных в кривую Штейнера. Построение кривой Штейнера мы обычно начинаем с того момента, когда точка, движущаяся по окружности, находится на горизонтальном радиус-векторе, направленном вправо, а прямая, вращающаяся вокруг этой точки, горизонтальна. Естественно считать, что в этот начальный момент угол $\omega = 0$. Далее радиус-вектор начинает вращаться против часовой стрелки, а прямая — по часовой. При этом положение каждой касательной к кривой Штейнера можно «проиндексировать» углом ω. В результате каждая касательная может быть однозначно описана индексом. По этой причине мы можем сопоставить каждому треугольнику, вложенному в кривую Штейнера, тройку действительных чисел, каждое из которых принадлежит отрезку $[0; 2\pi)$. На этот раз тройка является неупорядоченной.

Итак, кривая Штейнера содержит в себе треугольники всех форм. Естественно допустить, что группа преобразований, которую мы строим, будет связанна именно с кривой Штейнера. Продолжая построение группы, мы попытаемся сопоставить каждому треугольнику некоторую точку на плоскости.

Пусть некоторый треугольник вложен в кривую Штейнера. Тогда его ортоцентр лежит внутри области, ограниченной этой кривой, поскольку три касательных к кривой Штейнера можно провести только через внутренние точки. Этими касательными являются три высоты треугольника.

Теперь займёмся построением треугольника, ортоцентр которого является внутренней точкой области, ограниченной кривой Штейнера. Как мы знаем, диаметры кривой Штейнера, одновременно являющиеся касательными к ней, полностью заметают внутренность дельтоиды. По этой причине вместо того, чтобы выбирать произвольную точку H внутри кривой Штейнера, мы выберем произвольный диаметр кривой Штейнера, лежащий на прямой L, касающейся этой кривой. Затем на этом диаметре выберем произвольную точку H. Очевидно, что таким образом можно выбрать любую внутреннюю точку области, ограниченной кривой Штейнера.

Теперь наша задача состоит в том, чтобы построить треугольник, вложенный в кривую Штейнера, ортоцентр которого совпадает с точкой H, а одна из высот — с проходящей через эту точку касательной L.

Мы знаем, что вписанная в кривую Штейнера окружность γ является окружностью Эйлера искомого треугольника. Окружность γ и касательная L обязательно имеют две общие точки U_1 и U_2, которые сливаются в одну только в том случае, когда диаметр касается окружности γ.

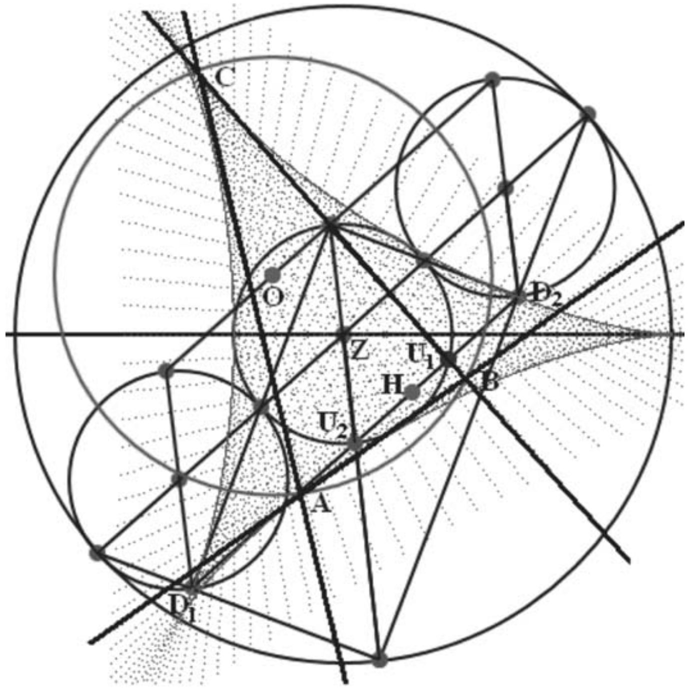


Рис 8.

Подчеркнём два обстоятельства, которые нам нужно будет иметь в виду. Прежде всего, одна из двух упомянутых точек U_2 является серединой диаметра кривой Штейнера. Кроме того, при качении диаметра вдоль окружности γ точка пересечения касательных, проходящих через концы диаметра, пробегает по всей окружности γ. Таким образом, через любую точку окружности γ проходят две взаимно перпендикулярные касательные к кривой Штейнера.

Итак, на прямой L лежат две важные точки будущего треугольника. Одна из них должна стать основанием его высоты, а вторая — будет лежать посередине между ортоцентром и вершиной, из которой опущена высота L. Именно эта (вторая) роль будет предоставлена середине диаметра D_1D_2 точке U_2.

Теперь мы можем описать процедуру построения искомого треугольника ABC, рис. 8. Поскольку нам известны ортоцентр H и окружность Эйлера γ с центром Z, мы можем гомотетией относительно H с коэффициентом 2 получить окружность ξ, в которую будет вписан треугольник ABC, рис 9.

Вершины B и C мы получим как точки пересечения перпендикуляра к диаметру D_1D_2 в точке U_1 с окружностью ξ. Поясним, почему такое пересечение всегда имеет место. Крайними положениями ортоцентра H являются концы диаметра D_1 и D_2. Гомотетические образы окружности Эйлера в свою очередь являются крайними положениями описанной окружности. Их центры F_1 и F_2 являются концами отрезка, параллельного диаметру D_1D_2 и имеющего такую же длину. По этой причине два крайних варианта описанных окружностей касаются и друг друга, и перпендикуляра к диаметру, восстановленного из точки U_1. Касание происходит в точке F_3, диаметрально противоположной на окружности Эйлера середине диаметра точке U_2. Все остальные описанные окружности, соответствующие промежуточным положениям ортоцентра H на диаметре, заведомо пересекаются с перпендикуляром U_2U_3.

Перейдём к построению третьей вершины треугольника. Вершина A является точкой пересечения прямой L с описанной окружностью. Однако, поскольку прямая и окружность пересекаются в двух точках, нужно разобраться, какую из них следует выбрать. Поскольку точка H лежит на диаметре кривой Штейнера, то при гомотетии точки U_1 и U_2 переходят в точки пересечения прямой L с описанной окружностью ξ. Точкой A назовём гомотетический образ точки U_2, а гомотетический образ точки U_1 обозначим через P.

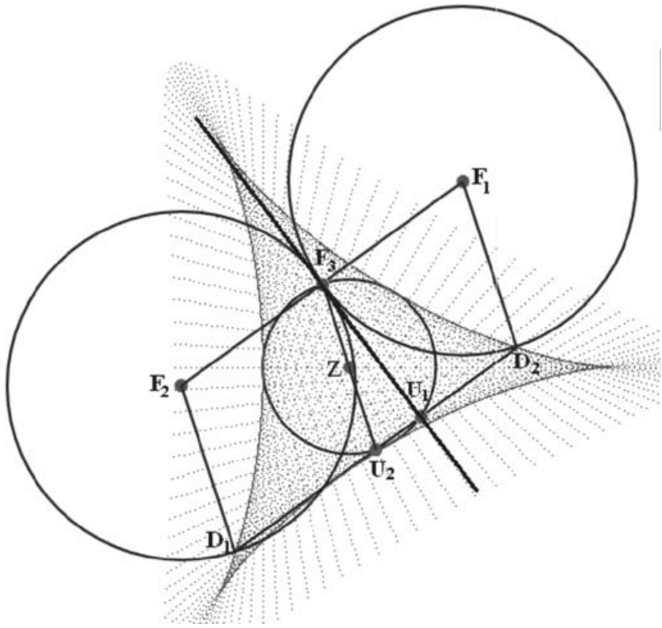


Рис 9.

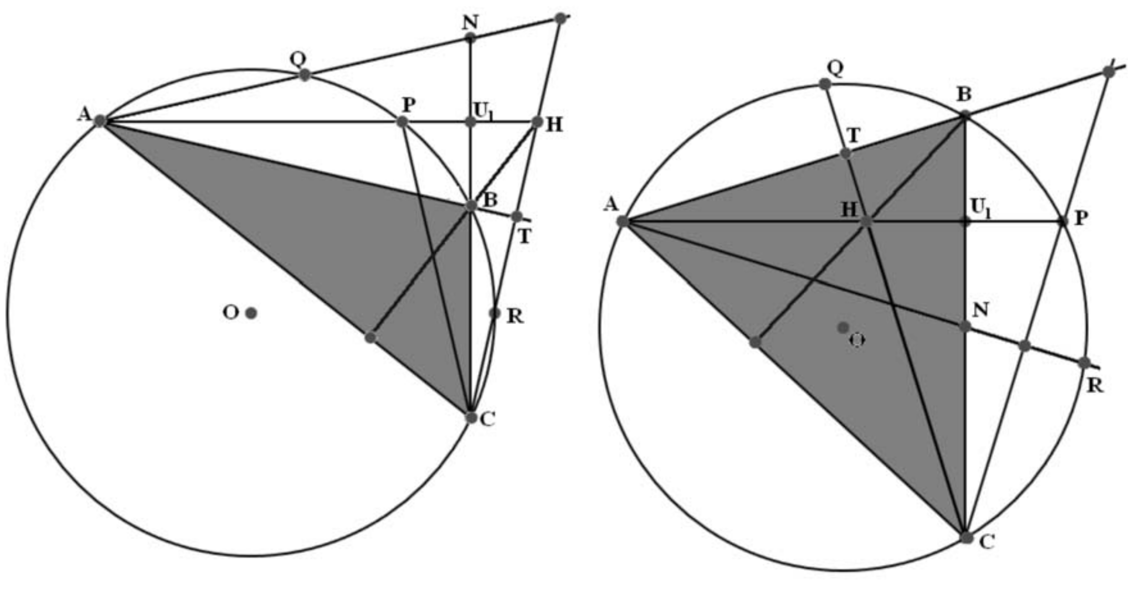


Рис 10.

Итак, треугольник построен. Однако нам необходимо доказать, что точка H является его ортоцентром. Отметим то обстоятельство, что различные расположения точки H относительно отрезка U_1U_2 создают различные конфигурации для искомого треугольника ABC, рис. 10. Однако доказательство того, что H при данном способе построения является ортоцентром, не меняется. По этой причине мы приводим на чертеже две конфигурации (первая — H правее отрезка U_1U_2; вторая — H внутри отрезка U_1U_2), но доказательство проводим только для первого случая.

Поскольку точка U_1 при гомотетии с центром в H и коэффициентом 2 переходит в точку P, отрезки HU_1 и U_1P равны. На прямой BC выделим точку N, такую, чтобы отрезки BU_1 и U_1N были равны. Треугольники ANB и CPH являются равнобедренными. Более того, половины их углов при вершине — углы PAB и PCB, опираются на дугу PB, а значит, равны между собой. Таким образом, треугольники ANB и CPH подобны.

Треугольник AHT по этой причине является прямоугольным. Действительно, $\angle BCH + \angle AHT = 90^\circ$ как острые углы треугольника CU_1H. Кроме того, $\angle HAB = \angle BCH$. Следовательно, прямая AB является высотой треугольника ABC. Но его высотой является и прямая CB. Таким образом, точка B является ортоцентром треугольника ABC. По этой причине третьей высотой этого треугольника является прямая BH. То есть прямая HB перпендикулярна AC.

Но это означает, что в треугольнике ABC две высоты AP и HB пересекаются в точке H, и эта точка является ортоцентром треугольника ABC, рис. 11.

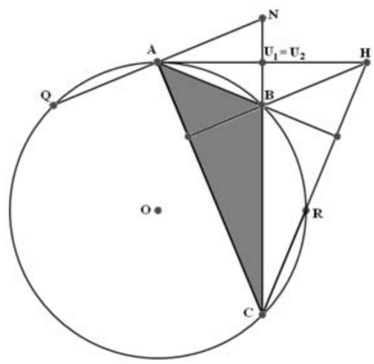


Рис 11.

По поводу случая, когда диаметр касается окружности γ, и точки U_1 и U_2 сливаются, нет необходимости говорить много, поскольку доказательство существования треугольника полностью сохраняет свою силу. Ограничимся лишь тем, что приведём чертёж, соответствующий этому случаю. Отличие лишь в том, что угол ACB опирается на дугу AB, а угол BAH является углом между касательной и хордой, а значит, тоже равен половине той же дуги AB.

Наконец, отметим, что в случаях, когда H находится на самой кривой Штейнера, треугольник ABC вырождается в отрезок. Это обстоятельство вытекает из наших рассуждений, посвящённых доказательству пересечения перпендикуляра к диаметру D_1D_2, восстановленному из точки U_1, с окружностью ξ.

Кроме всего прочего понятно, что поскольку одна из высот и одна из сторон треугольника ABC являются касательными к кривой Штейнера, то и все его стороны и высоты также являются касательными к ней. Это следует из того, что, кривая Штейнера, образованная прямыми Симсона треугольника ABC, должна совпадать с исходной кривой Штейнера.

Оформим доказанное нами свойство кривой Штейнера как теорему.

Теорема. *Каждая точка, находящаяся внутри кривой Штейнера, является ортоцентром некоторого треугольника, высоты и стороны которого касаются данной кривой. Среди этих треугольников можно найти треугольник любой формы, то есть треугольник, подобный любому произвольно выбранному треугольнику.*

Опираясь на этот факт, можно построить группу преобразований, переводящую любой треугольник в любой другой.

Построение группы можно провести исходя из следующих соображений. С точки зрения топологии, внутренние точки области, ограниченной кривой Штейнера, гомеоморфны внутренней части единичного круга, а для внутренности круга существует тесно связанная с геометрией группа автоморфизмов.

Речь, естественно, идёт о группе дробно-линейных преобразований. Эта группа соответствует группе движений плоскости Лобачевского, реализованной в модели Пуанкаре. В первой части нашей статьи мы из других соображений отмечали возможную связь между геометрией треугольника и группой преобразований геометрии Лобачевского. Сейчас же мы со значительно большим основанием можем говорить о том, что группа дробно-линейных преобразований позволяет переводить любые треугольники евклидовой плоскости друг в друга.

Понятно, что мы рассматриваем единичный круг на комплексной плоскости. Выбранный нами гомеоморфизм сопоставляет каждому треугольнику комплексное число, по модулю меньшее единицы.

Действие группы дробно-линейных преобразований сохраняется при любом выборе этого гомеоморфизма между внутренними областями кривой Штейнера и единичного круга. Тем не менее, этот выбор влияет на восприятие множества евклидовых треугольников, поскольку при разных гомеоморфизмах множества треугольников различным образом группируются в совокупности, которые соответствуют таким фигурам геометрии Лобачевского, как прямые, окружности, орициклы и эквидистанты.

По-видимому, наиболее естественным гомеоморфизмом между внутренними точками кривой Штейнера и внутренностью круга в этом случае должно было бы стать конформное их отображение друг на друга. По теореме Римана такое отображение существует, но его построение является достаточно сложной задачей. По этой причине мы можем использовать неаналитическую функцию $w = 2\bar{z} + z^2$. Однако в любом случае при нашем подходе преобразование треугольников друг в друга производится группой дробно-линейных преобразований.

Отметим, что теорема Штейнера и связанные с ней дополнительные построения позволяют утверждать, что каждый треугольник порождает на плоскости сложную структуру, содержащую точки, прямые, кривые и новые треугольники. При этом эта структура в определённом смысле содержит любой из возможных треугольников, то есть каждый треугольник в известном смысле уже содержит в себе всю геометрию треугольника.

Связь прямых Симсона с ортополом

Далее в [1-2] рассматривается понятие ортпола и его связь с прямыми Симсона.

Определение ортопола и теорема о нём. Пусть на плоскости заданы треугольник ABC и прямая L. Из вершин треугольника опустим на прямую L перпендикуляры и обозначим их основания через R, Q и P соответственно. Из точки R восстановим перпендикуляр к стороне BC, из точки Q — перпендикуляр к стороне AC, и, наконец, из точки P — перпендикуляр к стороне AB. Тогда эти три перпендикуляра пересекутся в одной точке, называемой ортополом прямой L относительно треугольника ABC.

Доказаны две теоремы.

Теорема 1. *Пусть на плоскости заданы треугольник ABC и прямая L. При этом прямая L_1, проходящая через точку ортопола перпендикулярно прямой L, является прямой Симсона треугольника ABC.*

Теорема 2. *Пусть вокруг треугольника описана окружность. Множество точек ортополов касательных к ней относительно этого треугольника образуют кривую Штейнера.*

Из этой теоремы вытекает следующий факт. Если мы берём любую окружность, концентрическую к описанной, то все ортополы её касательных вычерчивают гипотрохоиду, связанную с кривой Штейнера.

Выводы

В статьях [1-2] отмечена неправильная трактовка планиметрии евклидовой плоскости, которая согласно Эрлангенской программе Клейна определяется группой движений, то есть группой преобразований, оставляющих евклидовы расстояния неизменными. В принципе, это ошибочное мнение затрагивает вопрос, находящейся на периферии интересов современных математиков, и ни в коей мере не затрагивает значимость идей, высказанных Феликсом Клейном. Тем не менее, ошибка должна быть устранена. Рассмотрение данного вопроса потребовало изложения

I. Теории циклоидальных кривых без использования сколько-нибудь сложных методов дифференциальной геометрии. Их заменили соображения кинематического характера.

II. Некоторых фактов геометрии треугольника, необходимые для построения соответствующей группы преобразований, в том числе и важнейшая для всего изложения теорема Штейнера о прямых Симсона.

Мы показали, что

1. Каждой внутренней точке области, ограниченной кривой Штейнера, соответствует некоторый треугольник.

2. Среди этих треугольников можно найти треугольники любой формы.

3. Тем самым, группа преобразований внутренней области, ограниченной кривой Штейнера, является и группой преобразований, действующей на множестве треугольников. Эта группа, в отличие от группы движений и групп аффинных и проективных преобразований, не является группой точечных преобразований.

4. На роль данной группы после установления гомеоморфизма между внутренней областью, ограниченной кривой Штейнера, и единичным кругом на комплексной плоскости может быть взята группа дробно-линейных преобразований.

5. Доказаны теоремы о связи ортопола с прямыми Симсона. В частности доказано, что точки ортопола касательных к описанной окружности образуют кривую Штейнера.

6. Отмечена связь геометрии треугольника с теорией особенностей дифференцируемых отображений.

Литература

1. Степанов М.Е. Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника (часть первая). Моделирование и анализ данных. Научный журнал. - Вып. 1. - 2015.

2. Степанов М.Е. Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника (часть вторая). Моделирование и анализ данных. Научный журнал. - Вып. 1. - 2016.

3. Арнольд В.И. Астроидальная геометрия гипоциклоид и гессианова топология гиперболических многочленов. - М.: Изд. МЦНМО. 2001.

4. История отечественной математики. Том 3. - Киев, Наукова думка. 1968.

5. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. - М.: Учпедгиз. 1962.

6. Куланин Е.Д., Федин С.Н. Геометрия треугольника в задачах. - М.: Книжный дом «Либроком», 2009.

7. Куланин Е.Д., Шихова Н.А. Геометрический фейерверк: Творческие задания на уроках математики. - М.: Илекса, 2016.

8. Куланин Е.Д. О прямых Симсона, кривой Штейнера и кубике Мак-Кэя // Математическое просвещение. - Сер. 3. - Вып. 10. - 2006.

9. Куланин Е.Д. Виктор Тебо и его задачи // Математическое просвещение. - Сер. 3. - Вып. 11. - 2007.

10. Математическая энциклопедия. Том 5. - М.: Советская энциклопедия. 1985.

Степанов Михаил Евграфович,
доцент кафедры прикладной математики
Московского государственного
психолого-педагогического университета,
кандидат педагогических наук.

E-mail: mestepanov@yandex.ru

Вариант математического моделирования физиологических процессов

Д. А. Тарновский

В статье предложен вариант математического моделирование физиологических процессов. Как пример рассмотрена модель переключения внимания между внешними и внутренними объектами. Принцип моделирования — наложение структуры рассматриваемых процессов на специально сконструированное моделирующее геометрическое пространство.

Введение

За основу для нашего анализа, в качестве фрагмента предлагаемой модели, взят фрагмент специально сконструированного геометрического пространства S, определена структура модели в целом, рассмотрены отдельные ее свойства.

Затем рассмотрен пример моделирования ряда составных частей процесса мышления человека при помощи наложения существенных компонентов рассматриваемого процесса на модель нашего пространства.

Цель исследования — попытка синтеза и комплексного рассмотрения ряда сложных физиологических процессов: восприятия, воображения, памяти, внимания; попытка изучения некоторых общих закономерностей процесса мышления.

Материалы и методы исследования

В качестве модели для нашего исследования сконструировано специальное геометрическое пространство, в статье частично рассмотрена его структура, показаны отдельные его свойства. Основным методом исследования является наложение существенных компонентов рассматриваемых процессов на фрагменты пространства.

Описание модели, пример моделирования

Рассмотрим фрагмент плоскостной геометрической структуры, элементы которой помечены рядом числовых значений, рис. 1:

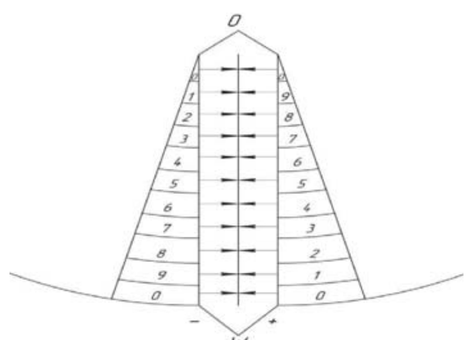


Рис. 1. Фрагмент плоскостной структуры для моделирования

Фрагмент состоит из центральной оси OW, назовем ее также ось Y, к которой с двух сторон примыкают области; каждой области присвоено определенное направление, обозначенное стрелкой. Видно, что прилегающие к оси области направлены друг к другу. К областям прилегают числовые ряды от 1 до 9. В целом фрагмент представляет собой сектор большого круга, разделенный на более мелкие области радиусами круга и дугами окружностей.

Направленность числовых рядов находится во взаимозависимости с направленностью областей, к которым они примыкают. Из рис. 1 мы видим, что числовые ряды, прилегающие к оси Y, расположены, если так можно выразится, в числовой ассиметрии. К примеру, область со значением 9 накладывается на 1, 8 на 2 и т. д. (Можно провести аналогию с тем, когда одноименные электрические заряды между собой отталкиваются, а разноименные притягиваются.)

В данном случае "притягиваются" не заряды, а области с разноименными числовыми значениями ("противоположными потенциалами"). Существенным свойством для нас является притяжение областей с противоположными числовыми потенциалами.

Мы видим, что числовые области граничат друг с другом таким образом, что наложение соответствующих числовых рядов друг на друга дает в сумме ноль по модулю 10. Точка W будет двусторонней, где максимум будет накладываться на минимум (max/min).

Теперь предложенный фрагмент пространства попробуем связать с процессами из области физиологии, в частности, смоделируем некоторые составные части процесса мышления человека. Моделирование осуществим путем наложения существенных компонентов рассматриваемых процессов на наш фрагмент пространства.

Для этого рассмотрим прямую Y или OW и области с прилегающими к ней числовыми рядами.

Всю информацию мы условно можем классифицировать на 2 вида.

1) Информация, получаемая от внешних объектов в виде ощущений: зрительных, слуховых, вкусовых, обонятельных, осязательных, то есть восприятие. Его мы свяжем с числовым рядом, прилегающим к положительной части OW, и заключим в интервале между двумя критическим точками W + O.

2) Информация получаемая от внутренних объектов или из памяти, то есть воображение, которое свяжем с числовым рядом, прилегающим к отрицательной части WO и заключим в интервале между двумя критическим точками W - O. Эти два ряда являются параллельными и противоположно направленными (рис. 2).

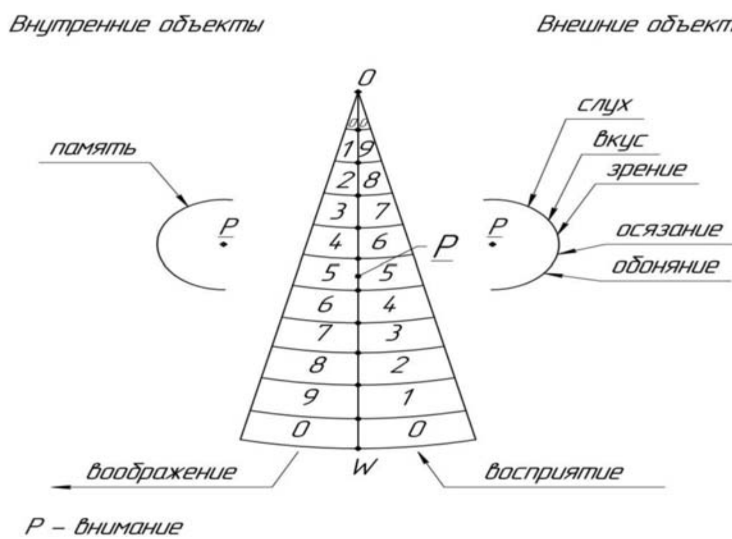


Рис. 2. Восприятие, воображение, внимание в соответствии с элементами моделирующего фрагмента

Эти два числовых ряда наложены друг на друга таким образом, что максимум одного накладывается на минимум другого и наоборот (max/min).

Свяжем внимание с движением точки P по оси (Y).

В основе моделирования лежит гипотеза: возрастание внимания по отношению к внешним объектам сопровождается снижением внимания к внутренним объектам и наоборот.

Теперь классифицируем объекты воздействующие на наше сознание. (рис. 3).

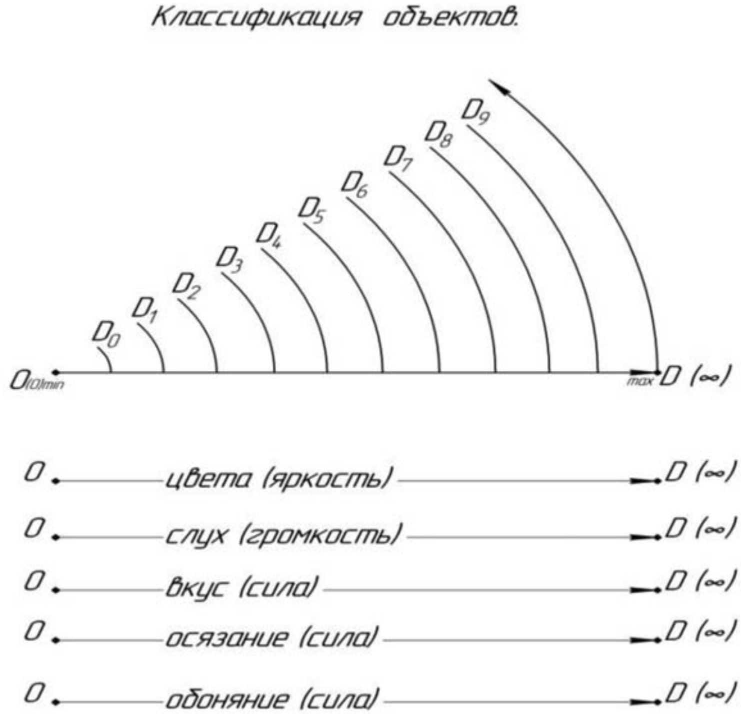


Рис. 3. Классификация внешних объектов

Цвета мы можем классифицировать в зависимости от яркости от минимальной к максимальной и заключим в интервал от $O(0) \to D(\infty)$.

Звуки аналогичным образом классифицируем исходя из громкости от минимальной к максимальной и заключим в аналогичный интервал от $O(0) \to D(\infty)$.

Вкусовые, обонятельные, осязательные ощущения, исходя из силы воздействия так же заключим в интервал от $O(0) \to D(\infty)$.

Это лишь один из видов классификации, пригодный для описания нашего принципа моделирования.

Также данные объекты (цвета, звуки, вкусовые, обонятельные, осязательные ощущения) мы можем классифицировать и по-другому, например, в зависимости от диапазона. К примеру, цвета (красный, оранжевый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый) мы можем заключить в аналогичный интервал, с каждым цветом связав соответствующую точку в интервале от $O(0) \to D(\infty)$.

Теперь смоделируем фрагмент процесса мышления, исходя из поведения точки P на прямой OW, которая нами ранее была связана с вниманием, рис. 4.

Допустим, в момент времени t внимание (P_9) сконцентрировано на внешнем объекте (A_1). Пусть объект (A_1) вкусового характера. Внимание со значением — (P_9) направлено на объект с потенциалом (A_1).

В момент времени t_2 внимание (P_8) притягивает объект с бо́льшим потенциалом (B_2). Пусть это объект (B_2) звукового характера. Внимание со значением P_8 направлено на объект с потенциалом (B_2).

Внимание переключилось с объекта (A_1) на объект (B_2) в силу того, что объект (B_2) обладал бо́льшим потенциалом относительно объекта (A_1) в момент времени t_2.

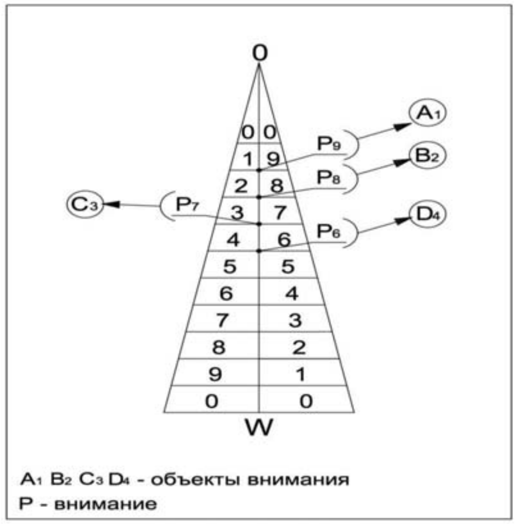


Рис. 4. Моделирование фрагмента процесса мышления

В момент времени t_3 внимание аналогичным образом (P_7) притягивает также внутренний объект (C_3). Внимание со значением P_7 направлено на объект с потенциалом (C_3). С объектом (C_3) мы можем связать ассоциацию, вызванную внешним объектом (B_2). Внимание переключилось с объекта (B_2) на объект (C_3), так как объект (C_3) обладал бóльшим потенциалом относительно объекта (B_2) в момент времени t_3.

В момент времени t_4 внимание становится (P_6) переключается на внешний объект (D_4). С объектом (D_4) мы свяжем ассоциацию вызванную внутренним объектом (C_3). Внимание переключилось с объекта (C_3) на объект (D_4) в силу того, что объект (D_4) обладает бóльшим потенциалом относительно объекта (C_3) в момент времени t_4.

Таким образом, моделирование основано на гипотезе, что внимание всегда будет концентрироваться на объекте с бóльшим потенциалом.

Отметим, что описанные выше фрагменты, являются частными случаями проявления единого "сборного пространства", при помощи которого мы можем смоделировать комплексный процесс мышления, рис.5. При этом каждую компоненту комплексного процесса моделируем при помощи одного из фрагментов "сборного пространства", как описано выше.

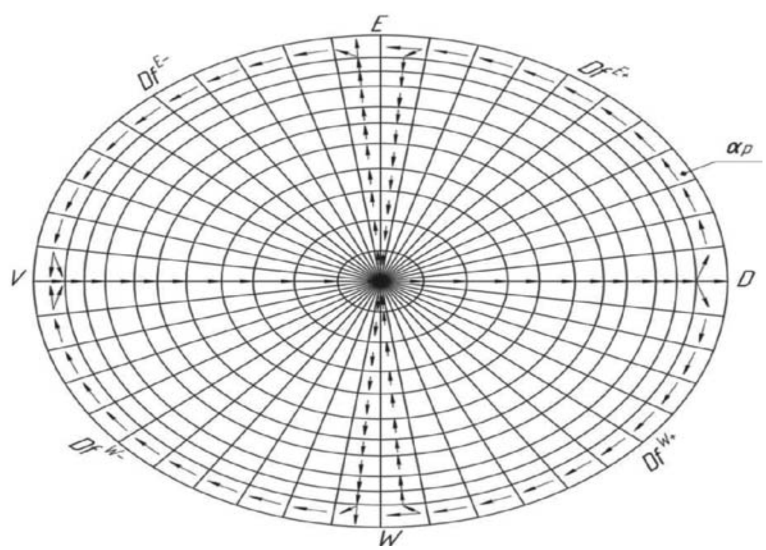


Рис. 5. Геометрическое пространство для моделирования комплексных процессов

Заключение

Несмотря на обширный объем материала по вопросу математического моделирования в области физиологии в целом и процесса мышления в частности, перехода на качественно новый уровень в изучении данных сложнейших процессов нашего сознания на сегодняшний день добиться не удается. Большинство исследователей считают возможность использования математического аппарата при описании психических процессов нашего сознания весьма отдаленной перспективой.

Автор считает, что предложенный подход позволяет начать моделирование комплексных процессов мышления, выявляя их общую и взаимозависимую природу. Возможно, предложенные идеи внесут новый импульс в изучение и понимание рассмотренных вопросов.

Предложен принцип математического моделирования посредством наложения структуры рассматриваемого процесса на моделирующее геометрическое пространство, рассмотрен пример моделирования фрагмента процесса мышления человека.

Все изложение материала было произведено при минимальном использовании математического аппарата, что придает работе бо́льшую доступность для понимания. В перспективе нужна разработка математического аппарата для моделирования комплексных процессов на сборном пространстве.

Тарновский Денис Александрович,
Чувашский государственный университет,
специалист.

E mail: denis-tarnovskij@yandex.ru

Альтернативное определение комплексного логарифма

С. В. Шведенко

В отношении пары экспонента — логарифм как функций действительной переменной в заметке [3] было показано, что акценты в этой паре можно расставить иначе: ведущую роль отдать *логарифму*, определив значение $\ln x$ для положительных значений x как предел сходящейся последовательности $\{n(\sqrt[n]{x}-1)\}$. Затем была установлена корректность этого определения и проверено, что из него вытекают все привычные свойства логарифма. В настоящей заметке этот подход реализуется уже для функций комплексной переменной.

Элементарными называют[1] те функции (действительной или комплексной переменной), которые можно явно выразить через *переменную* и *константы* посредством конечных комбинаций из *а)* четырех основных действий и *б)* двух функций — *экспоненты* и (натурального) *логарифма*[2] ([**1**], sér. II, t. X, p. 19; [**2**], с. 7).

В паре *экспонента — логарифм* («мамы» и «папы» всего семейства *элементарных функций*) ведущую роль традиционно отдают *экспоненте*, понимая ее (для комплексных значений z) как $e^z \equiv \exp z \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty}\bigl(1+\frac{z}{1!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\bigr)$, и уже исходя из ее свойств определяют *логарифм* (и *действительный*, и *комплексный*) как обратную к ней функцию. В частности, запись *комплексного логарифма* $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ есть переиначенная *формула Эйлера*:

$$w=\operatorname{Ln} z \overset{\text{def}}{\iff} z=\exp w \overset{w=u+iv}{\iff} z=e^{u+iv} \iff z=e^u(\cos v+i\sin v) \overset{w=u+iv}{\iff} w=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z.$$

В отношении пары *экспонента — логарифм*, понимаемых как функции *действительной* переменной, в заметке [**3**] было показано, что акценты в этой паре можно (и технически более выигрышно) расставить иначе: ведущую роль отдать *логарифму*, определив значение $\ln x$ для *положительных* значений x как предел *сходящейся* последовательности $\{n(\sqrt[n]{x}-1)\}$, а затем, установив корректность этого определения[3], ввести *экспоненту* (*действительной* переменной) как функцию, *обратную логарифму*, выводя ее свойства из свойств последнего.

В настоящей заметке этот подход к паре *экспонента — логарифм* реализуется уже в рамках функций *комплексной* переменной. Основой для этого служит следующее утверждение, позволяющее распространить альтернативное определение логарифма $\ln x \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)$, $x>0$, на *комплексные* значения x.

> *Пусть z — ненулевое комплексное число и $\varphi = \arg z$ — какое-либо значение[4] его аргумента. В предположении, что $\sqrt[n]{z}$ есть то значение корня степени n из z, аргумент которого равен $\frac{\varphi}{n}$, последовательность $\{n(\sqrt[n]{z}-1)\}$ сходится к числу $\ln|z|+i\varphi$.*

---

[1] Вслед за французским математиком Коши (Cauchy, Augustin-Louis, 1789–1857) и английским математиком Харди (или Гарди; Hardy, Godfrey Harold, 1877–1947).

[2] Вообще говоря, комплексной переменной. Вот примеры *элементарных* функций *действительной* переменной: $\bigl(1+\frac{1}{x}\bigr)^x = \exp\bigl(x\ln\bigl(1+\frac{1}{x}\bigr)\bigr)$, $\cos x = \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2}$, $\arccos x = -i\ln(x+\sqrt{x^2-1}) = -i\ln\bigl(x+i\exp\frac{\ln(1-x^2)}{2}\bigr)$.

[3] Проверив, что из него вытекают все привычные свойства *логарифма*, и в частности: равенство $\ln e = 1$, тождество $\ln(x_1x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$, существование *производной* $\ln' x = \frac{1}{x}$, а также *взаимная однозначность* отображения функцией $y=\ln x$ полуоси $(0,+\infty)$ на ось $(-\infty,+\infty)$, обеспечивающая существование *обратной* функции $x=\ln^{-1} y$, принимаемой за <u>*экспоненту*</u> $e^y \overset{\text{def}}{=} \ln^{-1} y$, $-\infty<y<+\infty$, и обладающей ее привычными свойствами.

[4] Из множества $\operatorname{Arg} z$ всех значений.

<u>*Доказательство*</u>. С учетом того, что $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{|z|}-1)=\ln|z|$ (а $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|z|}=1$), выполняются соотношения:

$$n(\sqrt[n]{z}-1)=n\big(\sqrt[n]{|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)}-1\big)=n\Big(\sqrt[n]{|z|}\Big(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\Big)-1\Big)=$$
$$=n\big(\sqrt[n]{|z|}-1\big)\cos\frac{\varphi}{n}+n\Big(\cos\frac{\varphi}{n}-1\Big)+\sqrt[n]{|z|}\,in\sin\frac{\varphi}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ln|z|+i\varphi.$$

Переход от выбранного значения $\varphi=\arg z$ к другим значениям $\varphi+2\pi k$ $(k=\pm1,\,\pm2,\,\ldots)$ аргумента числа z приводит к *множеству* значений $\operatorname{Ln}z\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{n\to+\infty}n(\sqrt[n]{z}-1)=\ln|z|+i\operatorname{Arg}z$ — <u>*комплексному логарифму*</u> числа z, а если считать z комплексной *переменной*, — к *многозначной функции* с тем же названием и обозначением. Ее однозначные ветви $\ln z=\ln|z|+i\arg z$ определены там же, где определены однозначные ветви $\varphi=\arg z$ *аргумента* переменной z.

Оперируя свойствами *действительного логарифма* $\ln x\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{n\to+\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)$, $x>0$, отмеченными в подстрочном примечании[3], можно прийти к следующим свойствам *комплексного логарифма* $\operatorname{Ln}z\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{n\to+\infty}n(\sqrt[n]{z}-1)=\lim\limits_{n\to+\infty}n(\sqrt[n]{|z|}-1)+i\operatorname{Arg}z=\ln|z|+i\operatorname{Arg}z$.

1°. *Для ненулевых комплексных чисел* z_1, z_2 *справедливо тождество* $\operatorname{Ln}z_1+\operatorname{Ln}z_2=\operatorname{Ln}(z_1z_2)$, *понимаемое в том смысле, что при любом выборе значений* $\ln z_1\in\operatorname{Ln}z_1$, $\ln z_2\in\operatorname{Ln}z_2$ *и* $\ln(z_1z_2)\in\operatorname{Ln}(z_1z_2)$ *либо* $\ln z_1+\ln z_2=\ln(z_1z_2)$, *либо это равенство выполняется с точностью до слагаемого, кратного* $i2\pi$.

2°. *Любая однозначная ветвь* $\ln z=\ln|z|+i\arg z$ *комплексного логарифма имеет производную* $\ln' z=\dfrac{1}{z}$.

3°. *Комплексный логарифм* $w=\operatorname{Ln}z$ $(=\ln|z|+i\operatorname{Arg}z)$, *являясь многозначной функцией, имеет однозначную обратную* $z=\operatorname{Ln}^{-1}w$, *принимаемую за* <u>*экспоненту*</u> *комплексной переменной*: $e^w\equiv\exp w\overset{\text{def}}{=}\operatorname{Ln}^{-1}w$.

<u>*Доказательства*</u>. 1°. Поскольку $\ln z=\ln|z|+i\arg z$, достаточно воспользоваться тем, что $\ln(|z_1||z_2|)=\ln|z_1|+\ln|z_2|$, а $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$ (с точностью до слагаемого, кратного 2π). Можно предложить и другое обоснование:

$$\operatorname{Ln}(z_1z_2)\overset{\text{def}}{=}\lim_{n\to+\infty}n\big(\sqrt[n]{z_1z_2}-1\big)=\lim_{n\to+\infty}n\big(\sqrt[n]{z_2}(\sqrt[n]{z_1}-1)+(\sqrt[n]{z_2}-1)\big)=\operatorname{Ln}z_1+\operatorname{Ln}z_2.$$

2°. Существование производной у однозначных ветвей $\ln z=\ln|z|+i\arg z$ комплексного логарифма есть следствие выполнения для функции $f(z)=\ln r+i\varphi$ $(r=|z|,\ \varphi=\arg z)$ *уравнения Коши–Римана* $\dfrac{\partial f}{\partial r}+\dfrac{i}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\varphi}=0$ (в полярных координатах); значение производной $\ln' z=\dfrac{1}{z}$ дает равенство $f'(z)=\dfrac{r}{z}\dfrac{\partial f}{\partial r}$, вытекающее из того, что $\dfrac{\partial f}{\partial r}=f'(z)\dfrac{\partial z}{\partial r}=f'(z)(\cos\varphi+i\sin\varphi)=f'(z)\dfrac{z}{r}$.

3°. Для определения обратной функции $z=\operatorname{Ln}^{-1}w$ ($\equiv\exp w\equiv e^w$ — *экспоненты* комплексной переменной) достаточно сопоставить произвольно взятому комплексному числу $w=u+iv$ комплексное число z, модуль которого равен $e^u\overset{\text{def}}{=}\ln^{-1}u$ (см. подстрочное примечание[3]), а аргумент равен v: $\operatorname{Ln}^{-1}(u+iv)\overset{\text{def}}{=}e^u(\cos v+i\sin v)$. В силу этого определения функция $z=\operatorname{Ln}^{-1}w$ оказывается $i2\pi$-периодической, и для всех комплексных $z\neq0$ и $w=u+iv$ выполняются соотношения:

$$\operatorname{Ln}^{-1}(\operatorname{Ln}z)=\operatorname{Ln}^{-1}(\ln|z|+i\operatorname{Arg}z)=z,$$

$$\operatorname{Ln}\big(\operatorname{Ln}^{-1}w\big)=\operatorname{Ln}\big(\operatorname{Ln}^{-1}(u+iv)\big)=\operatorname{Ln}\big(e^u(\cos v+i\sin v)\big)=u+i(v+2\pi k)=w+i2\pi k.$$

Из данного определения $e^w\overset{\text{def}}{=}\operatorname{Ln}^{-1}w$ и свойств *комплексного логарифма* стандартными приемами обращения с обратными функциями выводятся все привычные свойства *экспоненты* комплексной переменной. В частности, соотношения

$$e^{w_1}e^{w_2} = \mathrm{Ln}^{-1}\big(\mathrm{Ln}(e^{w_1}e^{w_2})\big) \overset{1^\circ}{=} \mathrm{Ln}^{-1}\big(\mathrm{Ln}\, e^{w_1} + \mathrm{Ln}\, e^{w_2}\big) = \mathrm{Ln}^{-1}\big((w_1 + i2\pi k_1) + (w_2 + i2\pi k_2)\big) = e^{w_1+w_2}$$

доказывают справедливость тождества $e^{w_1+w_2} = e^{w_1}e^{w_2}$, а подстановкой $f(w) = e^u(\cos v + i\sin v)$ в *уравнение Коши–Римана* $\frac{\partial f}{\partial u} + i\frac{\partial f}{\partial v} = 0$ и равенство $f'(w) = \frac{\partial f(u+iv)}{\partial u}$ устанавливаются существование производной экспоненты и ее значение $(e^w)' = \frac{\partial\,\mathrm{Ln}^{-1}(u+iv)}{\partial u} = \frac{\partial(e^u(\cos v+i\sin v))}{\partial u} = e^w$.

Литература

1. Cauchy A.L. Œuvres complètes. Sér. I–II. - Paris, 1887–1974.

2. Гарди Г. Интегрирование элементарных функций. - М.-Л.: ОНТИ, 1935.

3. Шведенко С.В. Об альтернативном определении логарифма // Математическое образование. - 2017. - № 4 (80). - С. 52-53.

Шведенко Сергей Владимирович,
доцент кафедры высшей математики
Национального исследовательского ядерного
университета (МИФИ), кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: sershvedenko@mail.ru

Числовая мера разносторонности треугольника

А. В. Ястребов

Научный руководитель школьника сталкивается с определенными трудностями уже на этапе формулировки проблемы. С одной стороны, содержательная задача, которая могла бы считаться научной работой школьника, зачастую труднодоступна или недоступна для него, поскольку требует серьезной предварительной подготовки. С другой стороны, доступная для школьника задача, пусть даже очень трудная для него лично, часто не может рассматриваться как научная работа в силу своей объективной простоты. Одним из методов разрешения данного противоречия может служить выполнение следующего принципа: научная математическая проблема, решаемая школьником, должна иметь своим источником либо материал школьной программы, либо дополнительный материал той же сложности, что и школьная программа [1, 2]. В статье предлагается результат, который был получен автором в процессе реализации этого принципа.

1. Постановка задачи

Представим себе, что на вертикальной стене нарисован равнобедренный треугольник BAC с горизонтальным основанием AC длиною 1 м и вертикальной высотой BM длиною 1,5 м.

Будем смещать вершину B параллельно основанию. Более точно, рассмотрим три ее положения: 1) B_1, где $BB_1 = 1$ мм; 2) B_2, где $BB_2 = 2$ см; 3) B_3, где $BB_3 = 40$ см. Нарисуем треугольники B_1AC, B_2AC и B_3AC, а боковые стороны исходного треугольника сотрем.

Можно с уверенностью сказать, что человек со стандартным глазомером сочтет разносторонний треугольник B_1AC равнобедренным. Возможно, он не заметит разносторонность треугольника B_2AC. Если же подозрения в разносторонности возникнут, то их можно будет легко подтвердить, найдя с помощью отвеса высоту B_2H и убедившись с помощью нити того же отвеса, что H не является серединой стороны AC. Что же касается треугольника B_3AC, то он изначально будет восприниматься как разносторонний и не будет находиться в ассоциативной связи с каким бы то ни было равнобедренным треугольником.

Обобщенно говоря, на интуитивном уровне человек ощущает, что три разносторонних треугольника B_1AC, B_2AC и B_3AC являются разносторонними как-то «по-разному», что они имеют различные «количества разносторонности».

Слова в кавычках, будучи интуитивно понятными, не обладают точным математическим смыслом. Так возникает математическая

Задача 1. Ввести числовую меру разносторонности треугольника и изучить ее свойства.

2. Наблюдение и основное определение

Один из подходов к решению задачи подсказывает наблюдение за динамическим чертежом, который можно создать в какой-либо интерактивной математической среде, например, в GeoGebra.

Изобразим равнобедренный треугольник B_0AC и отметим середину M его основания AC (рис. 1).

Через точку B_0 проведем прямую l, параллельную основанию, и отметим на ней точку B. Построим треугольник BAC, проведем биссектрису BS угла B и совместим точку B с точкой B_0. Двигая точку B вдоль прямой l (скажем, «направо»), будем наблюдать за движением точки S.

Очевидно, что в исходный момент времени точка S будет совпадать с точкой M. В начале движения точки B точка S будет *удаляться* от точки M, а затем начнет *приближаться* к ней. По мере удаления точки B «в бесконечность» точка S будет неограниченно приближаться к точке M, но никогда не будет совпадать с ней.

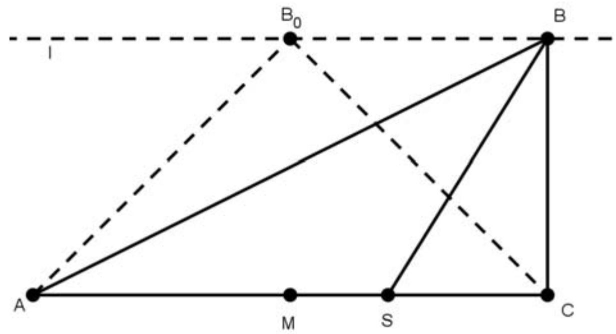


Рис. 1

Дадим геометрическое истолкование наблюдаемым физическим явлениям.

В самом начале движения длина отрезка BA увеличивается, а длина отрезка BC уменьшается. Следовательно, отношение $\frac{BA}{BC}$ возрастает, а значит, возрастает и равное ему отношение $\frac{AS}{SC}$. В силу возрастания этого последнего отношения происходит удаление точки S от точки M. Образно говоря, треугольник BAC становится все менее и менее «похож» на равнобедренный.

По мере того, как точка B уходит все дальше и дальше, начинает превалировать другой фактор. Очевидно, что самая длинная сторона BA удовлетворяет неравенству $BA < BC + CA$, откуда следует, что $BA - BC < CA$ и $\frac{BA}{BC} - 1 < \frac{CA}{BC}$. В процессе движения точки B длина стороны CA остается постоянной, а длина стороны BC стремится к бесконечности, откуда следует, что $\frac{CA}{BC} \to 0$ и $\frac{BA}{BC} - 1 \to 0$, а значит, $\frac{BA}{BC} \to 1$. Образно говоря, последнее соотношение можно истолковать так: треугольник BAC становится все более и более «похож» на равнобедренный треугольник с «почти равными» сторонами BA и BC.

Итак, сделанное наблюдение показывает, что сходство или несходство треугольника BAC с равнобедренным связано с величиной расстояния MS между основаниями медианы и биссектрисы.

Дадим теперь точные определения.

Определение 1. Медианно-биссектральной частью стороны треугольника называется отрезок, концами которого являются основания медианы и биссектрисы, проведенные к этой стороне.

Для краткости будем называть их mb-частью или mb-отрезком стороны треугольника.

Определение 2. Индексом разносторонности угла A называется число, равное отношению длины mb-части противоположной стороны к этой стороне.

Отметим одно неочевидное обстоятельство: определение индекса разносторонности угла похоже на определение давления в физике. Действительно, давление p, производимое силой F на фигуру площади S, измеряется по формуле $p = \frac{F}{S}$, т. е. представляет собой силу, приходящуюся на единицу площади. Подобно этому, индекс разносторонности представляет собой ту часть mb-отрезка, которая приходится на единицу длины стороны треугольника.

Условимся в дальнейшем употреблять следующие обозначения.

1) Будем считать, что против углов треугольника ABC лежат стороны a, b, c соответственно, для которых выполняется соотношение

$$a \leq b \leq c. \tag{1}$$

2) Длину mb-части стороны a будем обозначать через Δ_a.

3) Индекс разносторонности угла A будем обозначать через i_A. В наших обозначениях

$$i_A := \frac{\Delta_a}{a}. \tag{2}$$

3. Свойства индексов разносторонности

Первые два утверждения связывают стороны треугольника с его индексами разносторонности.

Предложение 1. *Стороны треугольника и его индексы разносторонности связаны формулами*

$$\begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{1/2+i_A}{1/2-i_A}, \\ \frac{b}{a} = \frac{1/2+i_C}{1/2-i_C}, \\ \frac{c}{a} = \frac{1/2+i_B}{1/2-i_B}. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Для всех сторон треугольника запишем теорему о делении этой стороны биссектрисой противолежащего угла (рис. 2).

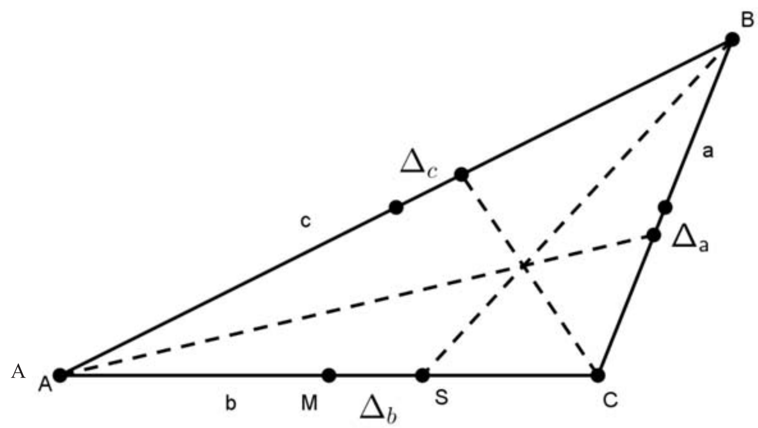


Рис. 2

Получим, что

$$\begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{a/2+\Delta_a}{a/2-\Delta_a}, \\ \frac{b}{a} = \frac{c/2+\Delta_c}{c/2-\Delta_c}, \\ \frac{c}{a} = \frac{b/2+\Delta_b}{b/2-\Delta_b}. \end{cases} \tag{4}$$

В первой из формул (4) числитель и знаменатель правой части почленно поделим на a. В силу формулы (2) получим первую из формул (3). С двумя другими формулами можно поступить аналогично, с той разницей, что делить нужно на c и b соответственно.

Теорема 2. *Индекс разносторонности угла треугольника выражается через длины образующих его сторон по формулам*

$$\begin{cases} i_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{c-b}{c+b}, \\ i_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{b+a}, \\ i_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{c-a}{c+a}. \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство. Если к первой из формул (3) применить основное свойство пропорции и выразить из полученного равенства индекс i_A, то получим первую из формул (5). Остальные формулы получаются аналогично.

Следствие. *Индексы разносторонности углов треугольника принадлежат промежутку* $[0; 0{,}5)$.

Доказательство непосредственно следует из формул (5).

Следующие три утверждения связывают индексы разносторонности и понятие подобия треугольников.

Предложение 3. *Если треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны, то индексы разносторонности соответствующих углов равны.*

Доказательство. Если коэффициент подобия равен k, то по определению $a' = ka$, $b' = kb$ и $c' = kc$. С помощью первой из формул (5) получаем, что

$$i'_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{c' - b'}{c' + b'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{kc - kb}{kc + kb} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c - b}{c + b} = i_A.$$

Остальные формулы получаются аналогично.

Предложение 4. *Если два индекса разносторонности треугольника ABC соответственно равны двум индексам разносторонности треугольника $A'B'C'$, то такие треугольники подобны.*

Доказательство. Пусть для определенности выполняются равенства $i_A = i'_A$ и $i_B = i'_B$. Из первого равенства следует, что $\frac{1}{2} \cdot \frac{c - b}{c + b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c' - b'}{c' + b'}$. Домножим равенство на 2, применим основное свойство пропорции, раскроем скобки и приведем подобные члены. Получим, что $cb' = c'b$, откуда $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$. Аналогично из второго равенства получаем, что $\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}$. И двух полученных пропорций вытекает подобие треугольников.

Доказательство для других пар равных индексов проводится аналогично.

Интересно, что предложение 4 по своей логической структуре похоже на признак подобия треугольников по двум углам.

Предложение 5. *Индексы разносторонности определяют стороны треугольника с точностью до подобия.*

Доказательство. В формулах (3) придадим стороне b конкретное значение 1. Тогда из них следует, что $c = \frac{1/2 + i_A}{1/2 - i_A}$ и $a = \frac{1/2 - i_A C}{1/2 + i_C}$. Окончательно получаем, что

$$a : b : c = \frac{1/2 - i_C}{1/2 + i_C} : 1 : \frac{1/2 + i_A}{1/2 - i_A}.$$

Аналогичные результаты получаются, если придавать конкретное значение не параметру b, а другим параметрам.

Следующее утверждение связывает между собой все три индекса разносторонности.

Теорема 6. *Индексы разносторонности треугольника удовлетворяют равенству*

$$i_A - i_B - 4 i_A i_B i_C = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Первую из формул (3) умножим на вторую и поделим на третью. Получим равенство $\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{1/2 + i_A}{1/2 - i_A} \cdot \frac{1/2 + i_C}{1/2 - i_C} : \frac{1/2 + i_B}{1/2 - i_B}$, из которого следует, что

$$\frac{1/2 + i_B}{1/2 - i_B} = \frac{1/2 + i_A}{1/2 - i_A} \cdot \frac{1/2 + i_C}{1/2 - i_C} \tag{7}$$

Применив к полученному равенству основное свойство пропорции, раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим требуемое равенство (6).

В определенном смысле можно считать, что теорема 6 аналогична теореме о сумме углов треугольника. Действительно, зная два индекса разносторонности треугольника, можно по формуле (6) найти третий индекс, подобно тому, как по двум углам треугольника можно найти третий.

И формула (6), и в особенности формула (7) показывают, что индекс разносторонности среднего по величине угла B играет особую роль по отношению к другим индексам. Это будет выявлено с помощью следующих двух утверждений о сравнении различных индексов.

Предложение 7. *Если стороны треугольника удовлетворяют соотношению $a \le b \le c$, то для индексов разносторонности выполняются неравенства*

$$i_B \ge i_A \quad \text{и} \quad i_B \ge i_C. \tag{8}$$

Доказательство. Вычислив разность двух индексов по формулам (5), получим, что $i_B - i_A = \dfrac{c(b-a)}{(c+a)(c+b)} \ge 0$, откуда следует первое из доказываемых неравенств. Второе неравенство доказывается аналогично.

Итак, чуть-чуть упрощая ситуацию, можно сказать, что средний по величине угол обладает наибольшим индексом разносторонности.

Следующий пример показывает, что соотношение типа «больше-меньше» между индексами разносторонности самого маленького и самого большого угла треугольника не является общим для всех треугольников.

Пример 1. Для каждого из треугольников $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ и $\mathcal{T}_3$, стороны которых заданы в таблице, вычислите индексы разносторонности углов и сравните их по величине.

	a	b	c
$\mathcal{T}_1$	24	36	52
$\mathcal{T}_2$	24	36	56
$\mathcal{T}_3$	24	36	54

Решение. 1) Прямым вычислением по формулам (5) получаем, что индексы разносторонности треугольника $\mathcal{T}_1$ принимают значения $i_A = \dfrac{1}{11}$, $i_C = \dfrac{1}{10}$ и $i_B = \dfrac{7}{38}$, так что выполняется неравенство $i_A < i_C < i_B$.

2) Для треугольника $\mathcal{T}_2$ значения индексов другие: $i_A = \dfrac{5}{46}$, $i_C = \dfrac{1}{10}$ и $i_B = \dfrac{2}{10}$, так что выполняется другое неравенство: $i_C < i_A < i_B$.

3) Для треугольника $\mathcal{T}_3$ значения индексов самые интересные: $i_A = \dfrac{1}{10}$, $i_C = \dfrac{1}{10}$ и $i_B = \dfrac{5}{26}$, поэтому одно из неравенств превращается в равенство: $i_A = i_C < i_B$.

Итак, мы видим, что разные по величине углы могут иметь одинаковые индексы разносторонности. Объяснение данного феномена дает следующее утверждение.

Предложение 8. *Пусть стороны треугольника удовлетворяют соотношению $a \le b \le c$. Тогда справедливы следующие утверждения. 1) $i_A < i_C$ тогда и только тогда, когда среднее геометрическое сторон a и c меньше средней стороны b. 2) $i_A > i_C$ тогда и только тогда, когда среднее геометрическое сторон a и c больше средней стороны b. 3) $i_A = i_C$ тогда и только тогда, когда среднее геометрическое сторон a и c равно средней стороне b.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. В силу формул (5) неравенство $i_A < i_C$ равносильно неравенству $\dfrac{c-b}{c+b} < \dfrac{b-a}{b+a}$. Пользуясь основным свойством пропорции, раскрывая скобки и приводя подобные члены, мы получим неравенство $ac < b^2$, откуда и следует требуемое.

Два других утверждения теоремы доказываются аналогично.

Утверждение 3 предложения 8 можно трактовать как аналог теоремы Пифагора для треугольников с равными индексами разносторонности i_A и i_B. Действительно, оно означает, что $ac = b^2$. Другими словами, для треугольников с равными индексами разносторонности обращается в нуль квадратичная форма $f(a,b,c) = ac - b^2$, подобно тому, как для прямоугольных треугольников обращается в нуль другая квадратичная форма, а именно, $g(a,b,c) = a^2 + b^2 - c^2$.

Следующие два предложения выявляют геометрические следствия, вытекающие из достижения равенства в неравенствах (8).

Предложение 9. *Пусть стороны треугольника удовлетворяют соотношению $a \le b \le c$.*

1) Если $i_B = i_A$, то $i_C = 0$ и $a = b$, т. е. треугольник является равнобедренным.

2) Если $i_B = i_C$, то $i_A = 0$ и $b = c$, т. е. треугольник является равнобедренным.

3) Если все три индекса разносторонности равны между собой, то треугольник является равносторонним.

Доказательство. 1) Если в формуле (6) положить $i_B = i_A$, то она примет вид $i_C - 4i_A^2 i_C = 0$, откуда $i_C(1-4i_A^2) = 0$. Второй сомножитель отличен от нуля в силу следствия из теоремы 2, поэтому $i_C = 0$. По второй из формул (5) получаем, что $a = b$.

Доказательство второго утверждения получается аналогично. Третье утверждение следует из первых двух.

Следующее утверждение является обратным к предложению 9.

Предложение 10. *Если индекс разносторонности самого малого или самого большого угла равен нулю, то два других индекса разносторонности равны между собой и треугольник является равнобедренным. Если индекс разносторонности среднего по величине угла равен нулю, то два других индекса тоже равны нулю и треугольник является равносторонним.*

Доказательство. Если $i_A = 0$, то по формуле (6) $i_B = i_C$, а если $i_C = 0$, то по той же причине (6) $i_B = i_A$. Если в формулах (8) положить $i_B = 0$, то два других индекса тоже обратятся в ноль.

Следующее предложение показывает возможность построения нового треугольника, в определённом смысле ассоциированного с исходным треугольником.

Теорема 11. *Если длины трех отрезков численно равны индексам разносторонности углов какого-либо разностороннего треугольника, то из них можно построить новый треугольник.*

Доказательство. Если в левой части формулы (6) отбросить неотрицательный член $4i_A i_B i_C$, то она превратится в неравенство $i_A - i_B + i_C > 0$, или $i_B < i_A + i_C$. В силу предложения 7 получается, что самый длинный отрезок меньше суммы двух других, откуда вытекает возможность построения нового треугольника.

Интересно, что мы не знаем, можно ли построить треугольник из mb-частей сторон треугольника.

4. В поисках «самого неправильного» треугольника

До сих пор мы определяли индексы разносторонности отдельных углов треугольника, однако не определяли меру разносторонности треугольника в целом. Сформулируем ее определение.

Определение 3. Индексом разносторонности треугольника ABC, стороны которого удовлетворяют соотношениям $a \le b \le c$, называется число

$$I = i_A - i_B + i_C. \tag{9}$$

С геометрической точки зрения в определении 3 речь идет об алгебраической сумме сторон треугольника из предложения 11: из суммы двух коротких сторон треугольника вычитается самая длинная его сторона.

Предложение 12. *Индекс разносторонности треугольника принадлежит промежутку* $[0; 1)$.

Доказательство немедленно следует из того факта, что каждый из индексов разносторонности угла принадлежит промежутку $[0; 0{,}5)$.

Заметим, что оценка сверху является весьма грубой и ниже будет существенно уточнена.

Теорема 13. *Индекс разносторонности треугольника равен нулю тогда и только тогда, когда треугольник является равнобедренным.*

Доказательство. В силу формулы (6) определение индекса разносторонности треугольника может быть переписано в виде $I = i_A - i_B + i_C = 4i_A i_B i_C$. Если $I = 0$, то один из сомножителей последнего произведения равен нулю, а это значит, что треугольник является равнобедренным. Обратно, если треугольник является равнобедренным, то один из сомножителей равен нулю, а значит и $I = 0$.

Предложения 9 и 13 означают, что для равнобедренных треугольников достигается нижняя граница того числового промежутка, которому, согласно предложению 12, должен принадлежать индекс разносторонности треугольника. Поставим теперь задачу о точном определении верхней границы индекса разносторонности треугольника.

Задача 2. Какова точная верхняя грань индекса разносторонности треугольника? Достигается ли она?

Образно говоря, мы решаем задачу о том, «насколько разносторонним» может быть треугольник и существует ли «самый разносторонний» треугольник.

Прежде всего, введем необходимы обозначения, переводящие задачу 2 на язык формул.

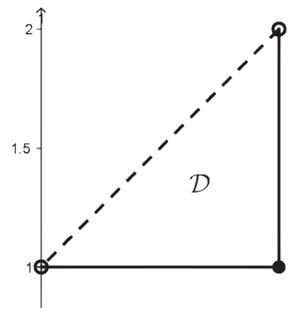


Рис. 3

Пусть средняя сторона $b = 1$. Тогда две другие стороны треугольника удовлетворяют неравенствам $0 < a \leq 1 \leq c$ и $a + 1 > c$. Это означает, что для решения задачи 2 нужно будет установить наличие или отсутствие глобального экстремума функции I в незамкнутой ограниченной области D (рис. 3), задаваемой системой неравенств

$$\begin{cases} 0 < a \leq 1, \\ 1 \leq c < a + 1. \end{cases} \tag{10}$$

Начнем с того, что решим вспомогательную задачу.

Задача 2′. Найдите глобальный экстремум функции I в замкнутой ограниченной области $\bar{D}$, задаваемой системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq a \leq 1, \\ 1 \leq c \leq a + 1. \end{cases} \tag{11}$$

Решение задачи основано на трех леммах.

Лемма 1. *Функция I не имеет локальных экстремумов внутри области $\bar{D}$.*

Доказательство. Прежде всего, выразим функцию I через стороны треугольника. По формулам (9) и (5) получим, что

$$I(a, c) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c-1}{c+1} - \frac{c-a}{c+a} + \frac{1-a}{1+a} \right). \tag{12}$$

Функция представляет собой сумму рациональных функций от двух аргументов, которая не обращается в нуль внутри области $\bar{D}$. В силу этого в экстремальной точке, если таковая существует, должны обращаться в нуль частные производные $\dfrac{\partial I}{\partial a}$ и $\dfrac{\partial I}{\partial c}$.

Применяя формулы дифференцирования и приводя подобные члены, находим, что

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{(c-1)(a^2-c)}{(c+a)^2(1+a)^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial I}{\partial c} = \frac{(a-1)(a-c^2)}{(c+a)^2(1+c)^2}.$$

Приравняв к нулю частные производные, получим систему

$$\begin{cases} (c-1)(a^2-c) = 0, \\ (a-1)(a-c^2) = 0. \end{cases}$$

Она распадается на совокупность четырех систем и дает два решения: $a = c = 0$ и $a = c = 1$. Первая точка лежит вне области $\bar{D}$, а вторая — на ее границе, что и доказывает лемму.

Лемма 2. *На горизонтальной и вертикальной частях границы области $\bar{D}$ функция I тождественно равна нулю.*

Доказательство. На горизонтальной части границы $c = 1$, поэтому формула (12) принимает вид $I(a, 1) = 0$. На вертикальной части границы $a = 1$, поэтому формула (12) принимает вид $I(1, c) = 0$.

Заметим, что лемму 2 можно вывести из геометрических соображений, поскольку горизонтальная и вертикальная части границы области соответствуют равнобедренным треугольникам.

Лемма 3. *Наклонная часть границы области $\bar{D}$ содержит точно одну точку локального экстремума α. При этом точка α является корнем уравнения $a^4-2a^3-7a^2-2a+1 = 0$, принадлежит интервалу $(0; 1)$ и представляет собой точку локального максимума.*

Доказательство. Для наклонной части границы области $\bar{D}$ выполняются соотношения $0 \le a \le 1$ и $c = a + 1$, поэтому формула (12) принимает вид

$$I(a, a+1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{a+2} - \frac{1}{2a+1} + \frac{1-a}{1+a} \right) =: \varphi(a). \tag{13}$$

Дифференцируя функцию φ, получим, что

$$\varphi'(a) = \frac{1}{(a+2)^2} + \frac{1}{(2a+1)^2} - \frac{1}{(a+1)^2}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю, а затем приводя подобные члены, получим, что

$$\varphi'(a) = \frac{a^4 - 2a^3 - 7a^2 - 2a + 1}{(a+2)^2(2a+1)^2(a+1)^2}.$$

Очевидно, что для поиска точек экстремума функции φ нужно найти корни и промежутки знакопостоянства многочлена $f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1$. Это можно сделать разными способами.

Прежде всего, можно построить в интерактивной математической среде график многочлена $f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1$ и наглядно увидеть, что он имеет точно один корень на отрезке $[0; 1]$. Приближенное с недостатком значение этого корня с точностью до 10 знаков получено нами в среде GeoGebra. Оно таково: $\alpha \approx 0{,}2559980601$.

Кроме того, можно вычислить значения многочлена $f(x)$ в точках $-2, -1, 0, 1, 3, 4$ и по чередованию знаков убедиться, что многочлен имеет точно один корень на каждом из отрезков $[-2; -1]$, $[-1; 0]$, $[0; 1]$, $[3; 4]$. Приближенное значение корня на отрезке $[0; 1]$ можно найти любым из известных методов.

Наконец, можно решить уравнение $x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0$ методом Феррари и выразить в радикалах точное значение корня α.

Теперь решение задачи 2 может быть сформулировано в виде следующей теоремы.

Теорема 14. *Точная верхняя грань множества значений индекса разносторонности треугольника по незамкнутой области D равна $I(\alpha, \alpha + 1)$. Она не достигается.*

Доказательство. 1) Из лемм 1–3 следует, что точка с координатами $E(\alpha, \alpha+1)$ является точкой глобального экстремума функции I в замкнутой области $\bar{D}$, поэтому для любой точки $T(a, c) \in D$ выполняется неравенство $I(\alpha, \alpha + 1) > I(a, c)$.

2) Соединим точки E и T отрезком. В силу непрерывности функции I в области $\bar{D}$ она принимает *все* значения между $I(\alpha, \alpha + 1)$ и $I(a, c)$.

3) Из двух предыдущих пунктов доказательства следует, что число $I(\alpha, \alpha + 1)$ является точной верхней гранью изучаемого множества. Поскольку неравенство в первом пункте доказательства является нестрогим, точная верхняя грань не достигается.

Следствие 1. *Индекс разносторонности треугольника принадлежит промежутку* $\big[0; I(\alpha, \alpha+1)\big)$ *и принимает все значения из этого промежутка.*

Сформулируем не вполне строгий, «вольный», качественный результат решения задачи 2. Он состоит в том, что «самого разностороннего» треугольника не существует в природе, и что для любого треугольника можно построить другой треугольник с бóльшим индексом разносторонности.

Следствие 2. *Точная верхняя грань множества значений индекса разносторонности приближенно равна* 0,022228.

Доказательство. По теореме 14 получаем, что

$$\sup I = (\alpha, \alpha+1) = \varphi(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha+2} - \frac{1}{2\alpha+1} + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) \approx$$
$$\approx \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{0{,}255999}{0{,}255998+2} - \frac{1}{2\cdot 0{,}255998} + \frac{1-0{,}255998}{1+0{,}255998}\right) = 0{,}022228.$$

В заключение приведем алгоритм построения динамического чертежа, с помощью которого можно строить треугольники, у которых значения индекса разносторонности приближаются к верхней грани.

1. С помощью инструмента **Отрезок с фиксированной длиной** постройте вспомогательный отрезок длины α, выбрав при этом достаточно точное значение числа α.
2. С помощью инструмента **Отрезок с фиксированной длиной** постройте отрезок AC длины 1.
3. С помощью инструмента **Циркуль** постройте окружность радиуса α с центром в точке C.
4. С помощью инструмента **Точка на объекте** построй точку B на окружности.
5. С помощью инструмента **Отрезок** постройте отрезки AB и CB.

Треугольник ABC является искомым. При стремлении точки B вдоль окружности к точке пересечения окружности с продолжением стороны AC индекс разносторонности треугольника будет стремиться к своей точной верхней грани.

Литература

1. Ястребов А.В. Школьный учебник как источник исследовательских задач // Учебный год. — 2007. — Вып. 1. — С. 72–77

2. Ястребов А.В. Неравенства Ки Фана в исследованиях школьников // Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования: материалы Междунар. науч. конф. (Архангельск 16–21 ноября 2014 г.). — Архангельск: САФУ, 2014. — С. 126–131.

Ястребов Александр Васильевич,
профессор кафедры математического анализа,
теории и методики обучения математике
Ярославского государственного педагогического
университета им. К.Д. Ушинского,
Кандидат физико-математических наук,
доктор педагогических наук.

alexander.yastrebov47@gmail.com

Всеармейские математические олимпиады: эволюция и проблемы

Е. И. Знак

В статье описана история возникновения и развития всеармейских математических олимпиад для курсантов военных вузов. Обозначены основные тенденции и проблемы развития. Предложены некоторые конструктивные механизмы и процедуры для повышения общего качественного уровня подобных конкурсов.

Вехи большого пути

1970-е – 1980-е (праистория). До 1996-го официальных всеармейских олимпиад не было, но многие военные вузы Ленинграда-Петербурга участвовали в 80-х и в первой половине 90-х в общегородских математических конкурсах (олимпиадах), которые проходили в Политехническом институте им. М.И. Калинина (в 70-х и 80-х) и в Военной инженерно-космической академии им. А.Ф. Можайского (ВИКА) — в первой половине 90-х. Мероприятия были как бы полуофициальными, носили вполне добровольный характер и отличались свободной доброжелательной атмосферой и разумной демократической организацией. Инспирировались они отдельными энтузиастами математических кафедр городских вузов и в целом являли собой один из многочисленных элементов культурной и научной жизни Ленинграда. Сегодня интересно отметить, что в те далёкие времена в рассматриваемой форме образовательной деятельности наибольшую активность среди военных вузов проявляли военно-морские. Они же чаще других попадали в пятёрку лучших по результатам очередной городской математической олимпиады для учащихся технических вузов. В то же время во многих военных вузах Ленинграда тогда ещё и слыхом не слыхивали о каких-то городских математических конкурсах.

Начало эпохи Военно-космической академии (ВКА): 1992 – 1996. К началу 1992-го года зарплата вузовского профессора ещё позволяла приобрести несколько килограммов картофеля (особенно если ходить на работу и с работы пешком). Это позволяло, употребляя в день по полторы картофелины (плюс пока ещё бесплатная вода из городского водопровода), дожить до следующей зарплаты. Но от полноценной образовательной деятельности приходилось отказываться. Кафедра высшей математики Ленинградского политехнического института им. М.И. Калинина (ЛПИ) объявила о том, что она не в состоянии и дальше проводить традиционные общегородские математические конкурсы для учащихся вузов. Упавший олимпийский факел поднял советский полковник Пётр Васильевич Герасименко, заведующий кафедрой математики ВИКА им. А.Ф. Можайского. И традиция ежегодных городских олимпиад для студентов и курсантов продолжилась: они стали проводится в ВИКА. Для этого периода характерно наличие среди конкурсных заданий отдельных нетривиальных задач из теории функций действительной переменной. Ощущалось лёгкое присутствие настоящей математики. В течение девяностых, как правило, в оргкомитет или в жюри входил какой-нибудь профессор с математико-механического факультета ЛГУ (СПбГУ) . Чуть больше половины команд от общего количества были из невоенных вузов. Первые два призовых места обычно занимали команды Ленинградского института точной механики и оптики (ЛИТМО) и ЛПИ. Команда ВИКА оказывалась на третьем или четвёртом (иногда на втором). Большинство команд военных вузов занимали места где-то в середине (во второй трети) общего списка. Любопытно отметить, что в течение девяностых на последних местах оказывались обычно команды невоенных вузов. В эти годы команда участников состояла из семи человек, а зачёт (суммирование очков) осуществлялся по пяти лучшим из семи.

Расцвет эпохи ВКА: 1997 – 1999. Осенью 1996-го в помещении Ленинградского отделения математического института им. В.А. Стеклова (ЛОМИ) на углу Фонтанки и Невского состоялось собрание представителей военных и технических вузов города, на котором в числе всего прочего было принято решение проводить по итогам городской олимпиады, помимо общего командного зачёта, ещё и отдельный зачёт среди команд только военных вузов. Так зародилась официальная отчётность по Всеармейской математической олимпиаде. Уже через год конкурсные задания стали заметно проще — теперь они в основном приблизительно соответствовали известным задачникам Демидовича и Бермана. Примерно в это же время Валерий Дмитриевич Лукьянов, доцент кафедры математики Военного инженерно-технического университета (ВИТУ), впоследствии он возглавит эту кафедру, затевает свой ежегодный семинар, посвящённый математическим конкурсам среди учащихся технических вузов (в том числе и военных). Начинают выходить первые выпуски "Сборника докладов семинара". В дальнейшем этот "Сборник" по своему содержательному уровню станет подобным чему-то вроде журнала "Квант" и выпусков "Библиотечки «Кванта»", но адресован будет не школьникам и студентам, а студентам и преподавателям технических вузов, включая военные. Впрочем, самые первые выпуски "Сборника" не представляли собой ничего особенного. В них разбирались некоторые конкурсные задания и некоторые приёмы решений. Официальный отсчёт всеармейских олимпиад начинается с 1996 года: в этом году на конкурс в СПб впервые прибыла иногородняя команда — команда курсантов Тульского артиллерийского инженерного института (ТАИИ). А уже в 1998-м организатор олимпиады (ВИКА) принимал у себя команды военных вузов Смоленска, Тулы, Ярославля и других городов.

Эпоха Лукьянова: 2000 – 2007. Всеармейские математические олимпиады проходили в Ярославле (2000, Ярославский военный финансово-экономический институт), в Санкт-Петербурге (2001, Морской корпус), в Серпухове (2002, Военная академия РВСН), в Туле (2003, ТАИИ), в Коломне (2004, филиал Военной артиллерийской академии), в Пушкине (2005, ВИТУ), в Саратове (2006, Военный институт РХБЗ), в СПб (2007, ВКА).

Впервые в истории всеармейская олимпиада была проведена не в Санкт-Петербурге в 2000-м году. Отныне Всеармейская математическая олимпиада оформилась практически окончательно, приобрела собственное характерное содержание, стала замкнутой и самодостаточной. Хотя руководящие положения и нюансы регламента дорабатывались и перерабатывались ещё многие годы (в частности, к 2003-му году была официально утверждена новая численность команды: четыре человека). При этом городская студенческая олимпиада в Санкт-Петербурге не исчезла, а сохранилась. Но проводилась она уже не в ВКА. В дальнейшем курсанты отдельных военных вузов принимали участие и в общегородской олимпиаде.

Достаточно стихийно одним из основных неформальных идеологов всеармейской олимпиады стал доктор физико-математических наук В.Д. Лукьянов. В результате его подвижнической деятельности стабилизировались, в конце концов, типовые уровни олимпиадных заданий. Изящные тонкости теории функций действительной переменной и изюминки теории матриц остались в прошлом, но и скатывания до банальных упражнений в духе втузовских задачников Демидовича или Бермана удалось избежать. Теперь вдумчивое чтение издаваемых под редакцией Лукьянова «Сборников» повышало образовательный уровень не только студентов и курсантов, но и многих преподавателей.

Завершение эпохи Лукьянова: 2008 – 2010. Всеармейские математические олимпиады проходили в Саратове (2008 и 2009, Военный институт РХБЗ), в Костроме (2010, Военная академия РХБЗ).

В конце концов, Валерию Дмитриевичу удалось привлечь в свой "Сборник" достаточно интересных авторов. Стали появляться весьма содержательные и довольно глубокие материалы. Одними из лучших публикаций оказались замечательные статьи молодого учёного П.П. Петтая из Санкт-Петербурга.

Иногда В.Д. Лукьянов не то шутя, не то всерьёз говорил, что его главная и не афишируемая сверхзадача состоит в том, чтобы улучшать физико-математическую компетентность преподавателей. Мол, для начала, хорошо бы поднять образовательный уровень преподавателей, а уж потом, возможно, и образовательный уровень студентов и курсантов поднимется. Как говорят тинейджеры, в шутке есть и доля шутки. Последний выпуск "Сборника докладов семинара" вышел в 2010-м году.

Между прочим, Лукьянову и его сторонникам удалось в 2006-м году продвинуть объективную и демократическую концепцию случайной жеребьёвки конкурсных заданий. Каждый вуз ежегодно присылает полтора десятка оригинальных новых заданий и в день олимпиады посредством компьютерного генератора случайных чисел осуществляется публичный случайный отбор заданий этого года из общей базы. Подразумевалось при этом, что в конкурсное задание входят двенадцать задач, помеченных аббревиатурами соответствующих вузов, а каждому конкурсанту следует по своему личному усмотрению выбрать для решения десять из предложенных двенадцати так, чтобы "не решать задачу своего вуза", если среди двенадцати аббревиатур-меток встречается аббревиатура его вуза. Практическая реализация такого механизма началась только с 2008-го. Вообще-то, сбор и накопление вузом-организатором предлагаемых другими вузами вариантов интересных и оригинальных конкурсных заданий имели место и почти во все предыдущие годы. Но вот окончательный отбор из общей базы и формирование окончательного варианта конкурса до 2007-го года включительно отдавалось на откуп вузу-организатору.

Эпоха департамента: 2011 – 2013. Всеармейские математические олимпиады проходили в Костроме (2011, ВА РХБЗ), в Санкт-Петербурге (2012, ВКА), в Пушкине (2013, Военный учебно-научный центр ВМФ).

С 2011 года олимпиадная реальность стала стремительно обогащаться новшествами. Тогдашний управляющий военным образованием департамент в лице Ольги Владимировны Фаллер с искренним удивлением обнаружил настоящую жизнь где-то в среднем звене образовательной вертикали.

На тот момент всеармейские олимпиады не просто были чем-то довольно живым, настоящим и содержательным, но и являли собой определённую точку роста и развития. Олимпиадная деятельность и Ольга Владимировна нашли друг друга. Появилась система двух туров. А в 2012-м зародился ещё и третий тур (с заданиями логического и элементарно-математического характера). Вдруг, неожиданно для многих, по-тихому исчез запрет "решать задачи из своего вуза" (хорошо это или же плохо — до сих пор неясно). Были разные эксперименты вроде конкурса капитанов команд. Заметно усилилось взаимодействие со всевозможными средствами массовой информации.

Постдепартаментская эпоха: 2014 – 2017. Всеармейские математические олимпиады проходили в Санкт-Петербурге (2014, ВКА), в Воронеже (2015, Военно-воздушная академия), в Ярославле (2016, Военная академия ПВО).

После скандальной отставки с поста министра полного человека в штатском с самоуверенной ухмылкой, канул в лету и пресловутый департамент. Однако до 2014-го Ольга Владимировна всё ещё продолжала плодотворно курировать и развивать олимпиады. Затем она пошла на повышение, а Всеармейская математическая олимпиада продолжила своё движение по инерции в неизвестное будущее. Кстати, в 2014-м олимпиада приобрела официальный международный статус: отныне регулярными участниками стали команды курсантов военных вузов стран СНГ.

Сегодня главной проблемой Всеармейской математической олимпиады является неосуществлённая смена поколений в сообществе руководителей команд. Эффективного и качественного обновления так и не произошло. С одной стороны, средний возраст в данном сообществе далеко за пятьдесят (и при этом, несмотря на высокий средний возраст, очень мало тех, кто непрерывно участвовал бы в этой деятельности, начиная с девяностых годов). А с другой стороны, в нём почти отсутствуют профессиональные математики. К редким исключениям относится кандидат физико-математических наук Алексей Сергеевич Андреев, занимающийся подготовкой олимпиадных команд курсантов уже более двадцати лет. Как востребованный и авторитетный эксперт, компетентное мнение которого неоднократно помогало регулировать спорные ситуации, он много раз входил в жюри олимпиады.

Также необходимо упомянуть руководителя команды курсантов Балтийского военно-морского института им. Ф.Ф. Ушакова кандидата физико-математических наук Виктора Ефимовича Спектора, отдавшего много энергии и труда для развития этой олимпиады.

В заключение отметим, что через всю историю всеармейских олимпиад проходит не только проблема отбора задач для очередного конкурса, но и проблема их редактирования. Вот свежий пример 2016-го года (точная копия условия).

Известно, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$ и удовлетворяет соотношению

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=\lim_{n\to\infty}n(f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)).$$

Докажите, что график функции проходит через точку $(-1;0)$.

Из текста условия вытекает, что точки x_0 и -1 входят в область определения функции f, но вовсе не следует, что эта область определения обязательно содержит, например, луч вида $(a;+\infty)$.

Это обстоятельство, а также обнуление обоих этажей дроби $\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$ при $x = x_0$, сразу наводит на мысль об опечатке слева. После начала конкурса отдельные студенты и курсанты довольно скоро обратили внимание жюри на то, что вместо $x \to +\infty$ подразумевалось, вероятно, $x \to x_0$. Вскоре прозвучало официальное подтверждение. И всё. И всё . . . А между тем, эта опечатка выглядит простительной мелочью на фоне того прискорбного факта, что утверждение задачи неверно. Что показывает пример, скажем, функции $f(x) = x^2 + 8$. Слева получается $8 - x_0^2$, а справа получается $2x_0$. При $x_0 = 2$ имеем совпадение, но $f(-1) = 9 \neq 0$.

Это типичный (и, увы, довольно частый) пример ситуации, когда за псевдоматематической задачей стоит неприятная практическая задача "угадайте, что имели в виду авторы". Поскольку равенство пределов из условия фактически имеет вид $f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f'(x_0)$, то имели они в виду, вероятно, одно из двух: либо $x_0 = -1$ (то есть x_0 и -1 — это одно и то же, но авторы постеснялись сказать об этом в условии прямо), либо же x_0 не "некоторая" точка, а *произвольная* точка промежутка области определения функции f, содержащего точку -1.

В первом случае задача должна была быть сформулирована так: *функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = -1$ и удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{x\to-1}\frac{xf(-1)+f(x)}{x+1}=\lim_{n\to\infty}n(f(\frac{1}{n}-1)-f(-1)).$$

Докажите, что график функции проходит через точку $(-1;0)$.

А во втором случае она должна была быть сформулирована так: *функция дифференцируема на некотором промежутке, содержащем точку -1, и во* **всякой** *точке x_0 этого промежутка удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=\lim_{n\to\infty}n(f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)).$$

Докажите, что график функции проходит через точку $(-1;0)$.

Плоды большие и маленькие

Главные "плоды" Всеармейской математической олимпиады — это рождавшиеся в разные годы двадцать первого века всеармейские олимпиады по информатике, военной истории, иностранным языкам и военно-профессиональному мастерству. "Дочерние" олимпиады, так сказать. Такая вот, нескромная и даже "неадекватная" для непосвящённых, точка зрения неоднократно озвучивалась в ВКА почти официально. Озвучивалась там, где фактически родилась "материнская" олимпиада. Несмотря на некоторую помпезность, кажущуюся преувеличенность и амбициозность, такая историческая концепция имеет под собой определённые основания. В утрированной и несколько условной форме размышления её сторонников выглядят примерно следующим образом. Сначала в 60-х, или даже раньше, в Ленинграде (и в Москве тоже) на волне советского научно-просветительского энтузиазма возникает такая специфическая форма научно-популярной деятельности, как математические олимпиады для учащихся вузов, куда приглашаются для участия заинтересованные студенты и курсанты. Затем в 70-х и 80-х в образовательном пространстве Ленинграда постепенно возникает довольно устойчивая традиция участия курсантов определённых военных вузов в этих городских математических конкурсах. В 90-х это явление, рождённое энтузиазмом советской цивилизации, почему-то парадоксальным образом упрямо не умирает. Ну, а в нулевых годах, так сказать, “жизнь постепенно налаживается”. В начале нулевых соответствующие чиновники в погонах, ежегодно получавшие какую-то отчётность по всеармейской математической олимпиаде, резонно рассудили, что вообще-то учащимся военных вузов хорошо бы состязаться не только в математике. И помимо традиционных спортивных соревнований по разным видам спорта, и помимо всеармейских математических олимпиад должно быть что-то ещё. Так в начале нулевых возникли всеармейские олимпиады по информатике и военной истории (итого $1 + 2 = 3$). Затем в министерстве образуется структура полезных и не очень полезных департаментов. В образовательном департаменте с радостным удивлением узнали о существовании каких-то олимпиад. Живой источник вдохновил на созидательную деятельность. Так появилась всеармейская олимпиада по иностранным языкам. Олимпиада не общелингвистическая (не по структурной лингвистике, как это бывает для студентов гражданских вузов), без головоломок и иероглифов на тему старофранцузского, древнеегипетского, кельтского, персидского или японского. На владение “инглишем” и на соответствующие умения, с современных позиций — безусловно полезная олимпиада. Ольга Владимировна молодец (итого $1 + 3 = 4$). И, наконец, совсем недавно появилась всеармейская олимпиада по военно-профессиональному мастерству. Совершенно естественный для военных вузов конкурс, и возник он, вероятно, с подачи нового министра (итого $1 + 4 = 5$). Такая вот историческая цепочка.

Ещё о плодах. Как общее следствие олимпиадных процессов, на математических кафедрах некоторых военных вузов издательская деятельность обогатилась работой над изданиями, подобными “Сборнику” под редакцией В.Д. Лукьянова. Наилучшие результаты в этом направлении достигнуты, пожалуй, Е.П. Поздняковой с её обширным и довольно полезным двухтомником, и математической кафедрой ВА РХБЗ ИВ (г. Кострома), выпускающей ежегодный широкий альманах. Да и вообще, на кафедрах математики стало увеличиваться количество преподавателей, осознающих, что настоящая, живая и бескрайняя содержательная математика находится за пределами стандартных учебников и программ.

Наконец, отметим следующий сопутствующий позитивный эффект для практически каждого из участвующих вузов: ежегодно после очередной олимпиады образуется группа из 5-8 курсантов, уровень математического образования которых существенно превосходит средний уровень по вузу. Впоследствии некоторые из них, например, охотно участвуют в конкурсах научных работ или в других формах научно-исследовательской деятельности.

Ажиотаж

В первой половине 90-х не только администрация вуза, но даже руководство кафедры могло просто не знать о каких-то там «олимпиадах». Действовали как бы иррациональные мотивы отдельных преподавателей-энтузиастов по какой-то советской инерции. К концу девяностых и началу нулевых определённую заинтересованность руководство кафедр уже демонстрировало. А с 2012-го, стараниями Ольги Владимировны, заинтересованность была и у руководителей вузов. Иногда уже и обострённая заинтересованность. В 2012-м департамент несколько переусердствовал, и в математической олимпиаде участвовала даже команда от Военно-медицинской академии. Всеармейские олимпиады стали попадать всё чаще в поле зрения средств массовой информации, особенно региональных. Впрочем, такой широкой известности как, например, танковый биатлон, они ещё не приобрели.

С некоторых пор на общий рейтинг военного вуза стали заметно влиять ежегодные результаты пяти всеармейских олимпиад (информатика, военная история, математика, иностранные языки, военно-профессиональное мастерство).

С другой стороны, на олимпиады влияют текущая жизнь страны и современные тенденции. Так, например, для проведения олимпиады по военно-профессиональному мастерству были привлечены возможности и ресурсы нового выставочно-познавательного парка “Патриот” в Кубинке. С 2012-го года во всеармейских олимпиадах регулярно участвуют команды от научных рот МО, а также команды студентов от военных кафедр некоторых невоенных вузов.

Деструктивным фактором, ежегодно приводящим к недоразумениям и дефектам в работе рабочих групп жюри и апелляционной комиссии, является отсутствие основополагающего “Положения об олимпиаде”, утверждённого Общим собранием всеармейской математической олимпиады. Именно так — утверждённого Общим собранием, а не формально спущенного сверху в форме очередного регламента.

Факторы

Все обстоятельства и нюансы, влияющие на результат выступления команды данного вуза на всеармейских олимпиадах, в основном, разбиваются на три группы — на три крупных фактора: фактор А — средний уровень математического развития поступающих в данный вуз абитуриентов, фактор Б — возможности и качество работы отвечающей кафедры (сюда входит и количество учебных часов официально отведённых на изучение математики по программе), фактор В — сопутствующая деятельность остальных (помимо кафедры) структурных подразделений вуза (сюда входит и степень заинтересованности административной вертикали вуза в результате участия команды этого вуза в олимпиаде).

Несколько утрируя и усредняя по большинству вузов, можно сказать, что до 2011-го года значимость (удельный вес) этих факторов распределялась так: фактор А — 45%, фактор Б — 20%, фактор В — 35%.

Грубо говоря, обычно преподаватели мало что могут сделать при недостаточной заинтересованности администрации и ежегодно поступающих на первый курс абитуриентах-троечниках (в основной массе). Также и при отсутствии на кафедре традиций какой-либо “олимпиадной” деятельности.

К началу 2017-го года это распределение для многих вузов выглядит уже так: фактор А — 35%, фактор Б — 45%, фактор В — 20% .

Появилась живая заинтересованность в административной вертикали (с позитивными практическими последствиями конструктивного характера), на кафедрах появились компетентные в данном направлении сотрудники, а иногда и маленькие научно-методические школы подготовки к участию в вузовских олимпиадах. Теперь дело за кафедрами. Хотя по-прежнему многое зависит от образовательного уровня поступающих на первый курс абитуриентов.

В последнее время стали заметны две противоположные крайности в позициях начальников разных уровней. Администраторы высшего звена всё сводят к фактору Б (мы создали все необходимые условия и теперь кафедра должна отобрать, взрастить и подготовить команду чемпионов из имеющегося контингента учащихся). Администраторы же среднего звена всё сводят к фактору А (никакой тренер-репетитор не создаст суперкоманду из посредственного материала как бы он ни старался). Следует сказать, что истина находится в стороне от этих двух крайностей.

Любопытно, что вузы, которые задолго до ажиотажа, ещё с 90-х и с начала нулевых, как-то уже участвовали в процессе — эти вузы и в наше время чаще других по результатам всеармейских математических олимпиад оказываются в первой трети зачётного списка.

Некоторые последствия ажиотажа

Обычно на слуху три внешних показателя эффективной учебной деятельности вуза:

- результаты всевозможных внешних тестирований учащихся (например, официальное интернет-тестирование);

- вовлечённость учащихся в научную деятельность, результаты внешних конкурсов научных работ (проектов, рефератов и т. п.);

- результаты участия во внешних конкурсах типа пресловутых студенческих олимпиад.

Назовём их "*Тестирование*", "*Работы*" и "*Олимпиады*" соответственно. Очевидно, что с формальных априорных позиций эти показатели по важности располагаются в следующем порядке: "*Тестирование*" — "*Работы*" — "*Олимпиады*". Фактически же в настоящее время в общественном сознании и в чиновничьем подсознании эти показатели (особенно для военных вузов) по степени объективности и значимости ранжированы так: "*Олимпиады*" — "*Тестирование*" — "*Работы*".

Конкурсы "научных работ учащихся вузов" зачастую почти полностью сводятся к соревнованию научных руководителей, к системам связей и влияний, к постылому лоббированию, к влиятельности вузов. Другое дело — сетевое тестирование, здесь позитивные изменения вполне возможны. Если бы, во-первых, во время тестирования многочисленные видеорегистраторы чётко отслеживали каждый кубический дециметр помещения, во-вторых, каждый кубический дециметр помещения транслировался на официальном портале на всю страну (подобно видеотрансляции с избирательных участков в последнее время), то через два-три года на первое место по значимости уверенно вышел бы показатель "*Тестирование*", а показатель "*Олимпиады*" неминуемо опустился бы на второе место. Имеется в виду, что такая прозрачная система контроля должна полностью охватить все невоенные, а затем и все военные вузы. Ну, а пока и чиновникам, и общественности в целом интуитивно ясно, что в первую очередь именно результаты всеармейских олимпиад (всех пяти в совокупности) более или менее дают некоторое первичное представление об учебном потенциале военного вуза.

Криминал

Ажиотаж постоянно провоцирует криминальные поползновения и авантюры, поскольку человек слаб. Самые наивные и примитивные криминальные мыслишки — это, во-первых, идентификация курсанта по почерку или по скрытым дешифрующим пометкам во время проверки и оценки его работы соответствующими подкомиссиями, а во-вторых ? контакт дежурящих в аудитории членов жюри с находящимися там участниками конкурса. Против первого давно придуманы определённые меры, а против второго имеется, например, *принцип пяти аудиторий* В.Д. Лукьянова: если руководитель команды оказался дежурящим в аудитории членом жюри, то в этой аудитории нет курсантов его команды — они находятся по одному в каждой из четырёх других аудиторий. Но это всё цветочки, мелочи. Не для "крупных комбинаторов".

Обозначим здесь две бросающиеся в глаза проблемы, и ещё раз напомним уже частично практиковавшиеся ранее пути довольно эффективного разрешения этих проблем.

Проблема первая: коррупционный обмен информацией и утечка информации по конкурсным заданиям. Эффективный путь решения этой ключевой проблемы был продемонстрирован на 15-й Всеармейской олимпиаде в 2010-м году: задания формировались не в Москве, а в день олимпиады в присутствии руководителей команд всех вузов с помощью генератора случайных номеров (механическое устройство как в старой телепередаче "Спортлото"). Важно, чтобы генератор случайных номеров был не компьютерный: уже к 2010-му году шли устойчивые разговоры о недоверии к компьютерной жеребьёвке (в плане "чей компьютер — того и случайность"). А из Москвы доставляется только база заданий. В нынешнее время весьма желательно, чтобы в ней уже было не менее тысячи различных заданий.

Проблема вторая: неадекватная, не вполне компетентная работа апелляционной комиссии (в худшем варианте — "апелляционный сговор"). Совершенно не достаточно заботиться о том, чтобы в комиссию входили "порядочные, честные, компетентные, профессиональные, авторитетные и благородные". Необходимо законодательно (в регламенте) ограничить количество добавляемых при апелляции баллов по одному заданию: *в любом случае* не более 30% от количества баллов, полагающихся за это задание. А в том случае, если группа проверки и оценки «проморгала» или не сумела понять и оценить выполнение задания, предусмотреть служебное взыскание (сколь угодно суровое, если надо) для входивших в эту подкомиссию, но курсанту всё равно добавлять не более 30% от количества баллов полагающихся за это задание.

Разные рейтинги

Через $F(i, m, n)$ обозначим место в общем командном зачёте, которое занимает вуз i на всеармейской олимпиаде m (вид олимпиады) в году n. В последнее время набирает популярность рейтинговая оценка учебной работы вуза в данном году через усреднение результатов пяти всеармейских олимпиад по формуле

$$A(i, n) = \frac{1}{5} \sum_{m=1}^{5} F(i, m, n).$$

Но, пожалуй, гораздо интереснее и объективнее интегральная оценка вуза по конкретному виду всеармейских олимпиад за весь период существования всеармейских олимпиад данного вида:

$$B(i, m) = \frac{1}{N} \sum_{n} F(i, m, n).$$

(здесь N — количество лет). Жаль только, что вряд ли полные архивные данные, хотя бы с 1996-го года, где-то всё ещё хранятся...

Во всяком случае, все имеющиеся итоговые данные по всеармейским математическим олимпиадам позволяют констатировать, что за последние пятнадцать лет чаще всего в пятёрке лучших в общекомандном зачёте оказывались команды курсантов Военно-космической академии (Санкт-Петербург), Военного инженерного института радиоэлектроники (Череповец), Военного инженерно-технического университета (Санкт-Петербург), Военной академии ПВО (Смоленск) и Военно-воздушной академии (Воронеж).

Литература

1. Лукьянов В.Д., Спектор В.Е., Фаллер О.В. XVII Всеармейская олимпиада по математике для курсантов высших военно-учебных заведений МО РФ // Математика в высшем образовании. - № 10. - с. 67–76.

2. Солодова Е.А. Фаллер О.В. Олимпиада как фактор развития эффективности системы образования // Мир образования. - № 4. - 201. - с. 71–80.

3. Сборник докладов семинара “Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе”. - Санкт-Петербург, ВИТУ. - выпуски 1–12. - 1998/2009.

4. Сборник докладов семинара “Актуальные вопросы преподавания математики в образовательной организации высшего образования”. - Кострома, ВА РХБЗ ИВ. - выпуски 1–7. - 2011/2017.

5. Позднякова Е.П. Задачи Всеармейских олимпиад по математике», том 1. - Саратов, ВИ РХБЗ, 2008.

6. Позднякова Е.П. Задачи Всеармейских олимпиад по математике, том 2. - Саратовский государственный университет, 2014.

Знак Евгений Иосифович,
доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Михайловской Военной Артиллерийской Академии, Санкт-Петербург.

E-mail: evgematem@mail.ru

Математик, которого не было

М. А. Прохорович, А. В. Савватеев

Он был самым сильным французским математиком XX века, без ложной скромности претендовавшим на гениальность. Им двигала великая амбиция — изложить всю современную ему математику с единых позиций, показать ее единство, структуру и глубинные конструкции. Чем он и занялся, делая все с абсолютной строгостью и аккуратностью. Возможно, что именно он приучил многих математиков к четкому, формализованному изложению, сформировав некоторый "стандарт", который бессознательно закрепился в математической деятельности. Он десятками издавал книги и публиковал статьи, оказав при этом огромное влияние на развитие французской, американской и даже советской математики. Естественно, что он стал знаменит и о его личности сложили множество легенд. Однако, самым удивительным фактом из его жизни является то, что... его не существовало! Тем не менее, в данной заметке мы попытаемся кратко изложить "биографию" математика, которого на самом деле не было.

Первое правило бойцовского клуба гласит:
никому не рассказывать о бойцовском клубе.
(Чак Паланик, «Бойцовский клуб»)

Введение

Никола Бурбаки. Почти каждый интересующийся математикой хотя бы раз слышал это имя, а возможно даже видел книги из серии "Элементы математики" с советским — неброским, но узнаваемым — дизайном обложки. Весьма интенсивно книги Бурбаки (это были переводы с французского) издавались в СССР примерно с конца 50-х до середины 80-х годов прошлого века.

Немногие студенты первых курсов пытались читать эти книги. Написаны они довольно сложно и их вряд ли можно рассматривать как учебник для студентов — скорее они будут интересны аспирантам или уже состоявшимся профессионалам, чем тем, кто только начинает изучать математику[1]. Сам автор отмечает, что необходимая для чтения книги подготовка составляет "приблизительно два года обучения на математическом факультете университета". Тома этого трактата чаще можно увидеть на пыльных и не очень полках математических кафедр университетов, чем в списках рекомендуемой лекторами литературы. Ну или на полках букинистических магазинов — первые издания стали чуть ли не библиографической редкостью.

Вроде пока нет ничего необычного — был французский математик, который написал серию книг, пусть и большую, пусть и очень сложных, пусть и за весьма короткий по научным меркам промежуток времени. Однако, дело в том, что... такого математика не было! Никола Бурбаки — это не просто псевдоним автора или группы авторов. Скорее, это (было) закрытое в некотором смысле

[1]Впрочем, встречаются и исключения. Доктор физико-математических наук В.И. Данилов, который любезно согласился прочесть первые наброски нашей статьи, с теплотой вспоминает (цитата):

— Я был просто очарован их книгой по "общей топологии". Студентом еще, на семинаре Узкова, мы разбирали тензорные произведения. Это был глоток свежего воздуха после всех этих тензоров из теории относительности и римановой геометрии. Там же мы начали овладевать плоскими модулями, читая свежеиспеченные главы 1 и 2 из "Коммутативной алгебры".

общество молодых, талантливых, но при этом озорных и даже в некотором смысле хулиганистых математиков, причем со специфическим чувством юмора (нередко черного). И вот об этом знают уже не все... даже не все студенты математических специальностей.

Ниже мы попробуем рассказать "биографию" Никола Бурбаки, собранную из обрывков преданий, легенд, баек и упоминаний в печатных изданиях. Отметим, что написанное ниже ни в коем случае не претендует и не может претендовать на полную достоверность[2]! Основных причин две:

1) Поскольку информации о личности Никола Бурбаки очень мало, мы не смогли обойтись без интернет-источников. Конечно, мы выбирали из них те, которые считаются наиболее "надежными" или претендуют на некую энциклопедичность (к примеру, ту же Википедию, информации в которой почему-то практически безоговорочно доверяет современная молодежь[3]).

2) Многие участники общества "Бурбаки" не только старались сохранить свою личную анонимность, но и распускали заведомо противоречивые и ложные слухи по поводу группы. Это, безусловно, значительно затрудняло (и затрудняет до сих пор) не только идентификацию членов сообщества, но и проверку подлинности связанных с личностью Никола Бурбаки жизненных историй.

Мы понимаем, что ни один факт из приведенного ниже жизнеописания французского математика до сих пор невозможно проверить на подлинность[4], однако, на наш взгляд, это не делает его (описание) менее интересным.

Ведущий математик Франции

Французскому математику Данжуа на III Всесоюзном
съезде математиков в Москве был задан вопрос:
– Кто является ведущим математиком Франции?
– Никола Бурбаки, — ответил ученый. [5 стр. 213]

Здесь (в основной части статьи) мы попробуем разобраться в "биографии" французского математика. Некоторые сведения из нее обрывочны, некоторые противоречивы, но кое-что выяснить можно... естественно, лишь с достаточно приемлемой степенью достоверности.

Никола Бурбаки (Nicolas Bourbaki) родился, причем сразу взрослым, в 1935 году — именно тогда группа французских математиков выбрала себе этот псевдоним. Основателями группы считаются такие известные математики, как Жан Дьедонне (Jean Dieudonne, главный учредитель), Анри Картан (Henri Cartan), Клод Шевалле (Claude Chevalley), Андре Вейль (Andre Weil), Жан Дельсарт (Jean Delsarte), Рене де Поссель (Rene de Possel) и Шолем Мандельбройт (Szolem Mandelbrojt). Если Вы не математик и никогда не слышали этих имен, то поверьте нам на слово — это действительно очень известные в научных кругах люди. Можно добавить в этот список еще несколько знаменитых фамилий[5], однако для дальнейшего изложения гораздо полезнее сейчас еще раз отметить, что свой точный состав и численность группа изначально старалась сохранить в строжайшем секрете, и в разное время в работе "Бурбаки" приняли участие и многие другие выдающиеся математики, в том числе иностранные.

[2]Собственно, то же самое отмечается и в источниках, которыми мы пользовались, например: "бóльшую часть историй о Бурбаки следует считать недостоверной", "не принадлежащие к этой группе люди вряд ли знают, насколько достоверно то, о чем они говорят: они лишь пересказывают, как правило, приукрашенные легенды" [7].

[3]Напомним читателю, что еще В.И. Ленин писал по этому поводу: "во избежание дезинформации со стороны буржуазной пропаганды пролетариат не должен принимать на веру то, что пишут в интернете!!!" (см. Ленин В.И. Полное собрание сочинений. / Москва: издательство полиграфической литературы, 1967. Т. 17, стр. 731.).

[4]Да, поначалу члены этого закрытого общества очень скрывались. Лишь в последнее время некоторые вещи стали постепенно раскрываться.

[5]Например, Лоран-Моиз Шварц (Laurent-Moïse Schwartz), Жан-Пьер Серр (Jean-Pierre Serre), Александр Гротендик (Alexander Grothendieck), Джон Торренс Тейт (John Torrence Tate, американский математик), Самуэль Эйленберг (Samuel Eilenberg, польский и американский математик), Серж Ленг (Serge Lang, американский математик), Пьер Самюэль (Pierre Samuel), Арман Борель (Armand Borel, швейцарский математик), Пьер Эмиль Жан Картье (Pierre Emile Jean Cartier), Ален Конн (Alain Connes) и другие.

Скорее всего, псевдоним был взят группой “шутки ради или же для того, чтобы избежать длинного списка авторов на титульном листе своих научных работ” [5, стр. 213], [7]. Второй возможной причиной является то, что стиль изложения материала в трудах Никола Бурбаки изначально по задумке авторов сильно отличался от традиционного, и авторы прекрасно понимали, что отношение к их труду в математическом мире может оказаться весьма разным.

Уже сам выбор псевдонима отражал эксцентричность этой творческой группы. Согласно одной из версий на выбор их подтолкнула помпезная конная статуя[6] генерала Шарля-Дени-Сотэ Бурбаки, которая стояла (причем, возможно, что до сих пор стоит, но также возможно, что и вовсе никогда не стояла) в городе Нанси[7]. Генерал был интересной личностью — в 1862 году ему предлагали стать королем Греции, но он отказался. Зато прославился своими провалами и неудачами (в итоге даже пытался покончить с собой, но попытку самоубийства также успешно провалил) [4, стр. 6-9], [6], [7].

По другой версии псевдоним выбрали из-за розыгрыша, который стал студенческой легендой высшей математической школы Франции. Согласно преданию первокурсникам школы однажды прочитали запутанную лекцию, финалом которой стало доказательство несуществующей теоремы. Лекцию прочел актер, никакого отношения к математике не имеющий, но выдавший себя за выдающегося приезжего профессора по имени... да, да, именно Никола Бурбаки! Естественно, сама лекция была фикцией и представляла собой бессвязную белиберду с использованием математического жаргона. Впрочем, актер был хорош, а изложение достаточно запутанным — первокурсники раскрыли подвох лишь через несколько дней [3], [7].

После того, как у Никола появилось имя, его надо было где-то поселить, хотя бы формально. И Бурбаки поселился в несуществующем городе Нанкаго[8]. Уже в 1939 (в возрасте четырех лет) Никола Бурбаки начал публиковать свои первые труды — в серьезных математических журналах Франции были напечатаны статьи некоего “господина Бурбаки, члена Полдавской академии наук” (Полдавию так же бесполезно искать на политической карте мира, как и город-призрак Нанкаго). Далее за подписью Никола Бурбаки начали появляться книжные тома, которые постепенно объединялись в фундаментальный труд “Элементы математики”. Такой трактат не мог не вызвать интерес — сразу же сложилось впечатление, что автор решил собрать воедино и изложить всю современную математику того времени, примерно так, как Евклид систематически изложил в “Началах” всю древнегреческую математику. Стиль изложения в работах резко отличался от принятых в академических кругах канонов.

Типичный пример стиля Бурбаки — их подход к определению числа “1”: примерно 200 страниц текста уделено подготовке к определению, после чего в высшей степени сжато и сокращенно приводится само определение, а сноске указывается, что не сокращенная форма этого определения потребовала бы десятков тысяч символов. Этот факт неоднократно освещался ([3], [7]) и стал “бородатым анекдотом”. Вполне вероятно, что они сами сознательно “пустили” этот анекдот в массы[9].

Кроме того, одной из основных особенностей стиля было практически полное по научным мер-

[6]Впрочем, в источнике [6] достоверность этой версии ставится под сомнение, а в самом тексте не без иронии отмечается, что “при посещении Нанси автор этих строк никакой конной статуи генерала там не обнаружил”.

[7]Происхождение или работа многих членов “Бурбаки” были связаны с именно этим городом — кстати, название города повлияло на место жительства Никола, но об этом ниже.

[8]Даже при выборе названия города коллектив молодых математиков не смог обойтись без определенного юмора — на самом деле это аббревиатура: НАНси (NANcy) и ЧиКАГО (ChiCAGO) превратились в НАНКАГО (NANCAGO). Нанси нами уже упоминался, а причем тут Чикаго? Все просто — именно там работал в то время Андре Вейль и некоторые другие участники группы; позже Никола выпустит серию математических книг под заголовком “Труды Математического института Нанкаго”.

[9]Отметим, что определить число “1” — это не такой простой вопрос, как кажется на первый взгляд. К примеру, в книге [1, стр. 24] приводится фраза Бертрана Рассела о том, что потребовалось множество веков для открытия того, что пара фазанов и пара дней являются, по сути, примерами числа “2”, а далее сразу же говорится, что “понадобилось примерно двадцать пять столетий цивилизации, чтобы сформулировать расселовское логическое определение числа «два»” (специалисты, работающие в области математической логики при прочтении этой сноски наверняка грустно улыбнутся).

кам отсутствие ссылок на предшествующие работы — авторы неохотно и очень редко ссылались на классиков и почти вовсе не приводили ссылки на своих современников[10] [3], [7]. Такой стиль изложения выглядел весьма вызывающе (фраза "математик должен считать за честь, если какая-либо из его статей украдена Бурбаки и использована в качестве упражнений" стала известным афоризмом). Стоит ли говорить о том, что сама терминология и символика "Бурбаков" слишком часто отличались от общепринятых?

Но даже без специфической манеры изложения сама попытка написать нечто подобное была серьезным заявлением (или даже вызовом), и научное сообщество осознало это еще раньше, чем сами авторы! Основатель группы Жан Дьедонне позже говорил: "Бурбаки в то время были очень молоды. Они, без сомнения, никогда не начали бы эту работу, если бы не были так молоды и, в особенности, если бы они в то время не были так невежественны (...) став более компетентными и не столь неграмотными, мы поняли необъятность нашей задачи..." [2]. Фактически авторы взялись за работу, сложность которой даже не могли себе представить[11]. За основу они взяли трактат по алгебре Ван-дер-Вардена, отличающийся исключительной точностью языка и сжатостью изложения.

Сразу после Второй Мировой Войны книги получили большой резонанс в математическом обществе, за которым пришел издательский успех — вскоре трактат начали переводить на основные языки мира. Никола в одночасье стал знаменитым. Однако он нигде не появлялся — не выступал с докладами на конференциях и ни разу не прочел ни одной лекции. При этом он не забывал поддерживать интерес к своей личности — так, например, Бурбаки написал письмо с заявкой на вступление в общество математиков. Общество предложило математику коллективное членство. Тогда Никола начал возмущено отстаивать право на свою личность, единую биографию и паспорт, при этом, естественно, так и не показываясь никому на глаза, что спровоцировало новые разговоры и слухи [4, стр. 6-9].

В итоге французский математик стал еще более знаменитым и относительно богатым. Теперь бурбакисты проводили свои ежегодные собрания на средиземноморском побережье. Члены группы получили лучшие места в университетах и международное признание как индивидуальные ученые среди математиков[12]. При этом они продолжили распространять о себе всякие небылицы.

Во время своего визита в Москву в 1966 году Жан Дьедонне сказал: "Я глубоко уважаю господина Бурбаки, но, к сожалению, не знаю его лично". И тут же представил документы, в которых знаменитый француз доверял получение гонорара за публикацию в СССР русского перевода своих книг "моему другу Ж. Дьедонне[13]" [4, стр. 6-9]. Бурбаки не только мог выписать доверенность на

[10]Частично это объясняется тем, что в трактате "вся математика" выводится практически с самых основ.

[11]Они последовательно перелопачивали, перепахивали одну область за другой, вычленяя суть. Начали они с топологии (алгебры коснулись меньше, потому что бóльшую часть работы уже проделал Ван-дер-Варден). Конечно, надо было заложить и фундамент — теорию множеств, которую можно рассматривать в данном контексте как язык, на котором говорится обо всем остальном. Возможно, что тут они постарались поскорее закончить и перейти к сути и содержанию — к топологии, к алгебре, к функциональному анализу, коммутативной алгебре и теории Ли и т.п.

Вполне вероятно, что дело было так: Вейль и Дьедонне должны были читать математический анализ, обязательный в университетах. Но их ужасно не устраивал отработанный к тому времени и уже окостеневший курс. И они встретились, чтобы создать современный, учитывающий новшества (что вполне понятно, если учесть их молодость и амбициозность). Но когда они начали размышлять об этом более детально, они поняли, что надо перестраивать не только математический анализ, но и его основания — множества, топологию, алгебру и т.д., то есть изложить по-новому и современному всю математику. Отсюда и вырос проект.

[12]О, да... они стали очень влиятельны, и это не могло не вызвать реакцию. Члены этой секретной организации постепенно "захватили власть" в руководстве французской математики и "продвигали своих" по карьерной лестнице. Не всем это нравилось... Этим, отчасти, объясняется частое неприятие Бурбаки и нападки на него.

[13]Вообще члены этого закрытого математического клуба по возможности старались не афишировать документально свою принадлежность к нему. Об этом можно судить хотя бы по тому факту, что у самого Бурбаки число Эрдеша (число звеньев в кратчайшем пути соавторства по совместным научным публикациям от какого-либо ученого до венгерского математика Пола Эрдеша) по открытым данным [10] на сегодняшний день равно четырем. Однако, когда Дьедонне обнаружил ошибку в своей статье, опубликованной от имени клуба, он исправил ее от своего имени в работе "Об ошибке г. Бурбаки" [7]. Более того, он является единственным соавторам Никола Бурбаки (опять же по данным

получение гонорара, но даже имел свой почтовый ящик на Международном съезде математиков в Москве в 1966 году. Почта из ящика исправно забиралась. При этом самого французского господина по-прежнему никто не видел.

Никола не любил, когда раскрывали его секреты. В начале пятидесятых годов в США была опубликована математическая энциклопедия, в которой Харольд Боас написал, что "Н. Бурбаки — это коллективный псевдоним группы молодых французских математиков, занимающихся...". Сразу после выхода энциклопедии он получил короткое письмо: "Вас ждет страшная кара. Н. Бурбаки", а спустя всего пару месяцев Харольд прочитал в реферативном журнале разгромную рецензию на свою работу: "Х. Боас — коллективный псевдоним группы молодых американских математиков. В работе исследуется...". Сформулированные в работе результаты были оценены как малозначительные и не представляющие большой научной ценности, кроме того была обнаружена "грубая ошибка в ключевой лемме". Рецензия была подписана известным господином из университета Нанкаго [3], [4, стр. 6-9], [6], [7].

Несмотря на все тайны, легенды, разговоры и слухи, покрывающие личность Бурбаки, некоторые сведения о деятельности коллектива все же стали достоянием общественности. Во-первых, для участия в группе необходимо было свободно говорить по-французски. Долгое время единственным упомянутым в печати иностранным членом группы являлся поляк Самуэль Эйленберг[14], "говорящий по-французски лучше, чем на своем родном языке, и знающий по части алгебраической топологии больше, чем любые два француза, вместе взятые" [3], [4, стр. 6-9], [7]. Свободное владение французским было необходимо для ожесточенных дискуссий и споров. А спорили Бурбаки постоянно, причем спорили на повышенных тонах, спорили до хрипоты, спорили до драки... Но при этом спорили продуктивно — основная работа Бурбаки "Элементы математики" возникла именно из-из спора между Андре Вейлем и Жаном Дельсартом на тему о том, как следует преподавать математический анализ [7]. Критика была беспощадной. Каждый член группы имел право вето, и немало мужества надо было иметь, чтобы дать согласие на написание предварительного варианта рукописи. Дьедонне описывал процесс так: "Каждый раз, когда первый вариант оказывался разорванным на мелкие куски, превратившись в ничто, другому сотруднику поручалось все начать заново. Несчастный знал, что его ожидает (...) его редакция могла снова оказаться разорванной на мелкие куски и все начиналось заново в третий раз и так далее. Казалось, что этот процесс бесконечен, что эта рекуррентная последовательность не имеет конца, но в действительности все заканчивалось по чисто человеческим причинам. Когда шесть или семь, или восемь, или десять раз подряд видели возвращавшейся одну и ту же главу, все уставали до такой степени, что появлялось единодушное желание отправить ее в печать" [2].

Тут будет очень кстати упомянуть, что один из вариантов книги Бурбаки был написан самим Дьедонне и получил название "Чудовища Дьедонне". По одной из версий "чудовище" было похоже по содержанию на достаточно известную книгу американского математика N[15]. И коллеги полностью забраковали труд с вердиктом: "Вместо того, чтобы писать подобные вещи, можно просто перевести книгу N на французский язык!" [7]. "Чудовище Дьедонне" никогда не было напечатано. Более того, по одной из версий оно было просто уничтожено. Жан Дьедонне резко раскритиковал очередную рукопись, и именно ему и поручили написание следующей версии. Через год он представил двенадцать (по числу членов группы) экземпляров рукописи. Дискуссия была недолгой — первое же выступление было резко критичным и завершилось оценкой "Место этому чудовищу — здесь!". После чего машинописные листы рукописи с аккуратно написанными от руки формулами были отправлены в

[10]).

[14] См. сноску 5.

[15] Весьма вероятно, что под литерой N автор [7] имел в виду самого себя. Отторжение "чудовища" привело к экстравагантному определению интеграла как непрерывного линейного функционала на пространстве непрерывных функций. В этом были плюсы и минусы — в последних главах "Интегрирования" наблюдается постепенное возвращение к классике.

камин. Остальные выступления завершились так же. Обиженный автор пошел в свою комнату за личным (последним) экземпляром труда. К своему ужасу вместо него он обнаружил лишь горсть пепла с запиской “Здесь покоится прах чудовища Дьедонне” [6].

Не удивительно, что Дьедонне как-то признался: некоторые иностранцы, приглашенные в качестве зрителей на встречи Бурбаки, “выносили о них впечатление как о собрании группы сумасшедших, и совершенно не могли понять, как эти люди, кричавшие всегда по трое и по четверо сразу, говоря о математике, могли когда-либо сделать что-либо осмысленное” [2], [5, стр. 214].

Впрочем, бурбакисты отмечались своей экстравагантностью и за пределами группы. Например, во время Всемирного Математического Конгресса в Москве в 1966 году неподдельный интерес и любопытство со стороны советских математиков вызвал действующий участник группы Адриен Дуади[16], который “выступил с секционным докладом босиком и в рваных джинсах” [6].

Вторым (после свободного владения французским языком) необходимым условием участия в “Бурбаки” был возраст: устав предписывал автоматическое исключение любого члена группы по достижению 50-летнего возраста. Видимо, это возрастное ограничение пошло от Дьедонне, который утверждал, что “50-летний математик хорошо знает ту математику, которую он изучал в 20-30-летнем возрасте, но зачастую имеет несколько смутное представление о математике того времени, когда ему уже 50 лет” [2].

Ему же (Дьедонне), вероятно, принадлежат и правила приема в “Бурбаки”, о которых он говорил в докладе, прочитанном 10 октября 1968 г. в Румынской Академии наук: кандидата “приглашают присутствовать на совете в качестве подопытной “морской свинки”. Это — традиционный способ. Вы знаете, что такое морская свинка, на которой испытываются все вирусы. Несчастный подвергается перекрестному огню дискуссии и должен не только понимать ее, но и участвовать в ней. Если он молчит, то все кончается просто — его больше не приглашают” [2]. Также Дьедонне упомянул и второй обязательный критерий — “предполагалось, что каждый бурбакист интересуется всем, что он услышит. Если он неистовый алгебраист и заявляет: “я интересуюсь алгеброй и ничем больше”, — это его право, но он никогда не будет членом коллектива” [2].

Единственным у бурбакистов правилом было отсутствие всяких правил, кроме права вето и отставки в 50 лет. Однако, был и еще один обряд исключения из группы — если прочие считали, что участник перестал быть творчески работающим математиком, его изгоняли. В 1956 году Андре Вейлю должно было исполниться 50 лет, что означало автоматический выход из коллектива. Однако, до него дошли слухи, что его собираются исключить пораньше за “профессиональную некомпетентность”. Вейлю было нелегко держаться в курсе работ молодежи, но он старался как мог, так как не хотел быть исключенным из группы досрочно. Он очень внимательно следил за одним выступлением (интересным, но запутанным) молодого докладчика на семинаре Бурбаки, прерывал его умными вопросами и радовался, что не теряет нить доклада, в то время как молодые уже запутались и перестали слушать. Лишь когда доклад закончился, Вейль узнал, что его жестоко разыграли: последние 15 минут докладчик по договоренности с остальными участниками группы нес полную ахинею. Андре Вейль был исключен из “Бурбаки” за два месяца до своего пятидесятилетия[17] [6].

Математическая фикция длилась много лет. Постепенно начались склоки — некоторые ушли сами, иные выбыли по возрасту. Пополнение группы шло все менее интенсивно. В итоге один из научных журналов опубликовал некролог Никола Бурбаки, выдержанный в лучших традициях жесткого юмора. Умер ли Никола Бурбаки? Этот вопрос автор статьи с одноименным названием [6] поставил

[16]Авторы не уверены, стоит ли его причислять к членам Бурбаки. Мы не видели его имени в тех списках группы, которые приводят разные люди (в основном, Картье). Возможно, это был лишь короткий эпизод — слишком уж узкий специалист Дуади для такой группы.

[17]Это ни коим образом не было актом неуважения, просто таковы были правила этого закрытого сообщества — Дьедонне отмечал, что “даже наличие разницы в возрасте в 20 лет не мешает младшему позорить старшего тогда, когда ему кажется, что старший ничего не понял в рассматриваемом вопросе” [2]. Фактически это было повторение розыгрыша первокурсников высшей математической школы Франции.

в 1998 году. И сам же на него ответил: “и да, и нет”, отмечая, что как юридическое лицо Никола еще существует, ровно как существует “Семинар Бурбаки”, и даже выпускается издаваемый им журнал. Прошло девятнадцать лет. И поныне работает сайт “Ассоциации сотрудников Никола Бурбаки” [9], а в открытой реферативной базе данных европейского математического общества [10] выходят публикации с его подписью. Более того, в прошлом году в издательстве Springer вышла новая книга по алгебраической топологии [8], автором которой значится воскресший Никола Бурбаки[18] — математик, которого не было...

Послесловие

Наша заметка рассчитана на достаточно широкую аудиторию и не претендует на сколь-нибудь серьезный анализ деятельности бурбакистов — скорее это подборка курьезов, собрание легенд и компиляция жизненных оказий, связанных с личностью известного математика. Основное содержание сознательно написано нами в популярной (даже можно сказать развлекательной) форме и в целом представляет собой обработанную и расширенную версию рассказа “Бурбаки из Полдавии” из книги [4] (или журнальной статьи [3]), снабженную комментариями, пояснениями и ссылками. Анализ влияния бурбакистов на развитие мировой математики не входит в цели данной публикации, однако мы не можем не отметить, что оно (влияние) было просто огромным во Франции, большим в Бельгии, и весьма значительным в США. Наша математическая школа относилась к «бурбакинизации» образовательного процесса с определенной осторожностью, и до сих пор не утихают споры о том, положительно или отрицательно повлияла деятельность коллектива Бурбаки на математическое образование в русскоязычных странах. В данном вопросе мы принципиально не будем высказывать свое мнение (даже если оно у нас и есть).

Также следует упомянуть напоследок, что подобные анонимные авторские коллективы — вовсе не новое явление в научном мире. К примеру (и нам приятно это вспомнить) — существовала легенда о “русских Бурбаки[19]” — дело в том, что авторитет советского математика Колмогорова был настолько велик, что одно время среди наших американских коллег пошли слухи о том, что под именем “Колмогоров” в СССР работает целая группа математиков[20] [5, стр. 169].

P.S. Авторы выражают глубокую благодарность доктору физико-математических наук В.И. Данилову за проявленный интерес к нашей статье, за конструктивные замечания, которые мы учли при подготовке рукописи, и за ценные комментарии, часть из которых мы практически дословно привели в сносках (хотя и без дополнительных пояснений).

Литература

[1] Белл Э.Т. Творцы математики. Предшественники современной математики. – Москва: “Просвещение”, 1979. – 256 с.

[2] Дьедонне Ж.А. О деятельности Бурбаки // Успехи математических наук. – Том 28, выпуск 3(171). – 1973. – с. 205–216.

[3] Замков А. Н. Бурбаки — математический феномен XX века // Техника молодежи. – №4. – 1966. – с. 16-17.

[4] Зернес С. Великие научные курьезы. 100 историй о смешных случаях в науке. – Москва: Центрполиграф, 2011. – 318 с.

[18] Возможно, что в группе уже нет таких гигантов, как Дьедонне, Серр, Гротендик или Картье... Да и сама математика ушла далеко вперед (в частности, благодаря усилиям того же Никола), и многим уже кажется, что рамки теории множеств, на котором строилось все изложение, стали узкими...

[19] В советской математике деятельность Бурбаки и правда вызвала желание создать отечественный аналог, куда намечались Колмогоров, Понтрягин, Гельфанд... Но, как говорится, “не пошло”.

[20] Вообще, за рубежом не раз выражались такого рода подозрения о наших ученых — аж до XIX века по Европе ходила байка о двух Ломоносовых (о поэте и об ученом).

[5] Смышляев. В.К. О математике и математиках. – Йошкар-Ола: Марийское книжное издательство, 1977. – 224 с.

[6] Сосинский А.Б. Умер ли Никола Бурбаки? // Математическое просвещение. – Серия 3, выпуск 2. – 1998. – с. 4–12.

[7] Халмош П.Р. Николай Бурбаки (Перевод с английского Ф.Л. Варпаховского и Г.А. Шестопал) // Математическое просвещение. – Серия 2, выпуск 5. – 1960. – с. 229–238.

[8] Bourbaki, N. Topologie algébrique (Eléments de mathématique: Chapitres 1 - 4). – Berlin: Springer-Verlag, 2016. – 498 p.

[9] URL: http://www.bourbaki.ens.fr/

[10] URL: https://zbmath.org/

Прохорович Михаил Александрович,
доцент кафедры теории функций
механико-математического факультета
Белорусского государственного университета (Минск),
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: prohorovich@mail.ru

Савватеев Алексей Владимирович,
Ректор Университета Дмитрия Пожарского,
профессор МФТИ, ведущий научный сотрудник
ЛИСОМО РЭШ и ЦЭМИ РАН (Москва),
доктор физ.-мат. наук.

E-mail: hibiny@mail.ru

О выходе книги Наташи Рожковской

От редакции

В новосибирском издательстве Tamara Rozhkovskaya Publisher вышла новая книга Наташи Рожковской (на английском языке) "M is for Math, Museum, and Manhatten, Kansas". Примерный перевод названия "М означает Математику, Музей, а также город Манхэттен штата Канзас".

Книга посвящена естественным связям, соединяющим искусство и математику. которые иллюстрируются произведениями искусства из коллекции музея искусств Marianna Kistler Beach Museum of Art города Манхэттен штата Канзас, США. Обсуждаемые в книге математические вопросы охватывают свойства многогранников, комбинаторику бросания игральных костей, симметрию, геометрию окружностей, последовательность Фибоначчи, геометрическую оптику, линейную перспективу, звездные многоугольники и неориентируемые поверхности. Во многих случаях математическое рассмотрение способствует лучшему пониманию произведения искусства, а также методов и намерений художника. Каждая глава включает изучение произведения искусства из коллекции музея, за которым следует математическое обсуждение, список математических задач, библиографические заметки о художнике, а также творческие проекты. Материал основан на занятиях математического кружка, которые автор проводил в рамках программы математического просвещения в Университете штата Канзас.

Книга предназначена для широкого круга читателей, которые интересуются взаимоотношением между искусством и математикой: как для всех желающих, так и для профессиональных математиков, профессиональных художников, педагогов в сфере искусства и математики, родителей и школьников.

Выходные данные

Natasha Rozhkovskaya

R 66 M is for Math, Museum, and Manhatten, Kansas. – Novosibirsk, Tamara Rozhkovskaya Publisher, 2017. – 200 p.

УДК 372.851 + 51-8 + 7.067

ББК 22.1

R 66

ISBN 978-5-901873-47-2

Интернет-страница издательства www.mathbooks.ru

Напомним, что о выходе предыдущей книги этого автора наш журнал сообщал в номере 1(61), 2012 г.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.
Отдельные материалы имеются на www.lomonosovclub.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2017 год (включая стоимость пересылки) – 100 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2017 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.
Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 90 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах Word, PDF и т.п.

Внимание!
Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.
Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents