ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцать первый

№ 2 (82)

апрель – июнь 2017 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”
www.lomonosovclub.com

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№2 (82), 2017 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2017 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.06.2017 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (82), апрель – июнь 2017 г.

Содержание

Опыт возрождения русской советской системы обучения

Т. А. Алтушкина, И. П. Костенко

В статье описывается опыт возрождения элементов русской советской классической системы обучения, начатого группой педагогов и родителей Екатеринбурга. В настоящее время это движение, известное как Русская Классическая Школа, достаточно широко распространилось и во многом отвечает общественным потребностям. Проанализированы преимущества этого подхода по сравнению с сложившейся постсоветской практикой. Материал статьи доступен также по адресу http://www.congress-cron.com/doklady/vss.html

"Да здравствует солнце, да скроется тьма!"
А.С. Пушкин

Почему "русской советской"? Потому что фактическое *содержание* (исключая идеологическую составляющую) и *методы* обучения советской школы, включая учебники, взято в 1930-х годах целиком и полностью от дореволюционной русской школы-гимназии. А организация *системы* образования — это собственно советское: удивительная простота, согласованность и стройность всех учебных учреждений (программ), начиная от детского сада до университета, широчайшая массовость охвата учащихся, подлинный демократизм отношений. Можно сказать, что *душа* советской школы *русская*, а *форма* организации — *советская*.

О возврате к советской системе *образования* мы сегодня можем только мечтать. Но можем начать возрождение русской советской системы *обучения*. Тем более, что запрос общества на возврат к традиции становится всё более массовым и настойчивым. В статье описываются первые реальные шаги, которые уже сделаны и которые надо продолжать, активно расширяя пространство.

Общественное движение за восстановление качественного обучения на базе классических методик и учебников зародилось в середине 2000-х годов. Инициаторами выступила группа учителей, методистов и родителей Екатеринбурга. Постепенно к ним присоединились другие энтузиасты. И уже 10 лет, как существуют в России школы, которые работают в русле традиции. Таких школ около 30 в разных городах страны, а также одна в Казахстане (Алматы) и две (Харьков и Киев) на Украине (было 3).

В этих школах на начальной стадии обучения (1-4 классы) преподавание предметов "литературное чтение", "русский язык", "окружающий мир" ведётся по классическим учебным книгам К.Д. Ушинского: "Родное слово", "Детский мир" и "Хрестоматия".

Длительный уже опыт работы по этим замечательным книгам показал, что содержание текстов формирует у детей цельное и объёмное представление о мире, соответствующее их возрасту, укореняет в родной культуре и, тем самым, закладывает эмоциональные основы патриотизма. Простой и образный язык понятен детям и соответствует природе детского восприятия, что делает обучение доступным и радостным для ребёнка, укрепляет его уверенность в собственных силах. Родителям не нужно за него делать непонятные, причудливые, если не сказать извращенные, домашние задания, которыми полны современные учебники, — он их делает сам полностью осознанно. Художественные тексты книг К.Д. Ушинского закладывают семена добра в чуткие детские души в самый нежный и восприимчивый к добру возраст — возраст младшего школьника.

По математике используются учебники арифметики А.С. Пчёлко и Г.Б. Поляка, по которым наша школа успешно учила детей до реформы 1970-х годов ("реформа-70") — с 1954 г. по 1969 г. Учебники адаптированы к современным реалиям и переизданы[1]. Отсканированы и рассылаются

[1]Заказы можно направлять по адресу: rcsh77@gmail.com

всем желающим электронные версии всех ключевых методик. В частности, “Методика преподавания арифметики в начальной школе” А.С. Пчёлко, 1945 года издания, которая очень помогает учителям выйти на забытую верную методическую дорогу.

Эти книги основаны на методических принципах и методах дореволюционной русской школы. После реформы-70 эти книги и методы (устный счёт, система постепенно усложняющихся типовых задач и др.) выведены из обучения и непрерывно заменяются всевозможными вариативными “инновациями”, характерные качества которых отнюдь не новы: наукообразие, заумность, бессистемность, хаотичность, а часто и полная бессмыслица.

Подлинно новое свойство современных учебников состоит в “развлекаловке”. Это как усилитель вкуса (глютамат натрия) в несъедобных продуктах. Учебник по факту заумный и непосильный для ребенка, поэтому, чтобы хоть как-то держать внимание ученика, его и снабжают развлекалочками в виде сквозных героев, мультяшных картинок, дурашливых задачек и других дешевеньких финтифлюшек.

Группой учителей и методистов Екатеринбурга создан целостный учебно-методический комплект для начальной школы с методическим сопровождением по каждому учебнику и каждому классу в виде подробных поурочных планов. Поурочные планы составлены на базе соответствующих данным учебникам поурочных разработок 1950-х годов, они изданы и рассылаются всем желающим. Эффективность работы с использованием этого комплекта проверена и доказана практикой многих школ России.

Система обучения, разработанная в Екатеринбурге и построенная на принципах классической методики, получила название “Русская классическая школа” (кратко — РКШ).

Выше мы рассказали вкратце об обучении младших школьников по системе РКШ. Для старшей школы создание такой системы значительно труднее из-за увеличения числа учебных предметов, трудностей согласования программ РКШ с официальными программами и требованиями ФГОСов, ОГЭ, ЕГЭ, а также по причине психологического сопротивления многих учителей, привыкших к другим учебникам. Но работа в направлении создания такой системы идёт и в старшей школе. Опишем вкратце её результаты, ограничившись математикой, где, благодаря высокому профессионализму и энтузиазму учителя Е.М. Нифонтовой, эта работа завершена, насколько это возможно в наших условиях.

Возвращена предметная система обучения и классические учебники. Вместо одного конгломератного, сконструированного “реформаторами” предмета “Математика” есть 5 учебных предметов: “Арифметика”, “Алгебра”, “Геометрия”, “Тригонометрия”, “Элементы высшей математики” (кратко — ЭВМ). Первые три идут по учебникам А.П. Киселёва, тригонометрия — по учебнику Н.А. Рыбкина. Используются также задачники Е.С. Березанской (арифметика), П.А. Ларичева (алгебра) и Н.А. Рыбкина (геометрия, тригонометрия).

Для ЭВМ нет хорошего учебника, приходится учителю самому как-то компилировать материал из разных книг и препарировать его, подгоняя к возможностям учащихся и учебного времени. И всё равно не удаётся довести этот раздел до понимания учащихся. Основные его темы (производная, интеграл) введены в школу реформой-70. Сегодня их следовало бы изъять, ибо сорокалетняя пореформенная практика обучения школьников этим “элементам” доказала их непосильность и ненужность для общего образования. Подавляющее большинство детей не могут их сознательно усвоить, следовательно, образовательная ценность этих тем для старшеклассников чисто декларативна. Нелепость ещё и в том, что все эти темы полно и систематически изучаются в высшей школе. Зачем же дублировать их крохи в общеобразовательной?

Предметная система обучения математике, разрушенная реформой-70, позволяет повысить качество знаний за счёт *цельности* содержания каждого предмета, его тесного согласования с учебником и его посильного объёма, выверенного практическим опытом советской школы. Цельность состоит в органическом взаимодействии и работе всех разделов, понятий, методов, правил, теорем на протяжении всего времени изучения предмета. Такое долговременное взаимодействие всех элементов курса способствует углублению знаний и сплавляет их в прочную систему в сознании учащегося. Это было официальной целью и признанным результатом обучения в советской школе до реформы-70: *осмысленные, глубокие и прочные* знания! Сегодня такой цели у государства нет.

Использование классических учебников Киселёва и Рыбкина позволяет, в силу их *доступности*, вернуть в обучение регулярную *самостоятельную* работу учащихся с книгой. Это важнейший методический принцип русской и советской школы. Учащийся должен *сам* добывать, наполнять *смыслами*, присваивать знания, и только тогда они будут *не формальными*.

В современной школе учащиеся не читают учебников потому, что они *непонятны* — затуманены наукообразием и дико перегружены хаотичной, разнородной информацией. Современные авторы учебных книг для старшей школы совершенно не знают методики и в своём изложении ориентируются на шаблон научной систематики предмета. Псевдонаучный стиль изложения, характерными чертами которого являются *абстрактность* и *формализм*, обессмысливает обучение и вызывает у детей законное отвращение к математике. Такой стиль написания учебников тоже есть следствие реформы-70. Именно после этой реформы и возникла проблема учебника, ставшая в нашей школе неразрешимой.

Есть ещё один фактор, который препятствует чтению книг, это Интернет. Он активно обессмысливает и фрагментирует знания, которые потребитель бессистемно из него извлекает. Более того, формирует патологическую зависимость от такого лёгкого способа "обучения". Разумно было бы исключить Интернет и компьютерные технологии обучения из школы. В РКШ Интернет и презентации исключены. Основы компьютерной грамотности вводятся с восьмого класса в виде урока информатики.

Сказанное приводит нас к новой и пока не осознанной нашей академической педагогией проблеме — проблеме обучения чтению. *Осмысленному чтению*, формирующему способность понимать текст, наполнять учебную информацию смыслами. "Чтение — вот лучшее учение" (А.С. Пушкин). "Люди перестают мыслить, когда перестают читать" (Д. Дидро).

Современная молодёжь при чтении не делает никаких усилий, мысленно проговаривает слова, не вникая в их смыслы и не чувствуя их связи с другими словами. При этом в голове не возникает никаких образов — пустота. Такая бессмысленная деятельность, естественно, сопровождается чувством уныния и даже отвращения, которое переносится на все книги как таковые.

Как же преодолеть это отвращение?

Коллективом разработчиков системы РКШ эта проблема глубоко осознана и проработана до мельчайших методических нюансов. Опять же, на основе нашей классики, на основе наследия К.Д. Ушинского. И этим мы обязаны И.А. Горячевой[2], именно она смогла воспроизвести дореволюционную методику обучения осмысленному чтению и адаптировала её к современной школе.

Обучение осмысленному чтению начинается с первого класса и построено так, чтобы научить детей рождать собственные *образы* при прочтении печатного слова, понимать *всю* суть прочитанного текста. С прочтения самых первых слов Азбуки и далее через весь курс начального обучения воображение и сознание ребенка принуждаются представлять в деталях реальность, описанную в тексте. Такая работа продолжается на уроках литературы в старших классах.

Точно по этому же принципу строится обучение чтению, пониманию и решению текстовых задач в арифметике. Мы нашли в классической методике много тонких методических приемов, которые позволяют без насилия над ребенком запускать механизмы осмысленного творческого чтения учебного текста, неважно, литературного или математического. Это очень глубинные методологические отличия в подходах классической методики и современных "методик". И чем младше ребенок, тем более серьёзное влияние такое обучение оказывает на формирование его личности.

Дети, которые с первого класса учатся у нас, очень отличаются от детей, приходящих к нам из обычной школы после "началки" (не только по уровню предметных знаний, что предсказуемо и

[2] https://www.youtube.com/watch?v=eHoy8KfncGw&feature=youtu.be

понятно, но и по поставленным учебным навыкам, что мы к нашей радости — мы на верном пути! — обнаружили опытным путем и убеждаемся в этом раз за разом): наши дети привычно и без напряжения (!) держат внимание весь урок (дети из обычной школы регулярно выпадают — этот защитный психологический механизм запускается и закрепляется в начальной школе от вынужденности все время выполнять непонятные и часто беспредметно-бессмысленные абсурдные задания); наши дети имеют крепкий навык понимать всё происходящее на уроке (детям из обычной школы по тем же причинам привычно и комфортно скольжение по поверхности информации без понимания сути); в случае каких-то затруднений наши дети хорошо осознают (рефлексируют) то, что они что-то НЕ понимают, и им внутренне от этого дискомфортно, они испытывают психологическую потребность понять (у детей из обычной школы непонимание не вызывает дискомфорта, это привычное состояние, ибо атрофирована познавательная мотивация).

На уроках математики в старшей школе проблема обучения осмысленному чтению имеет свои особенности и трудности из-за абстрактности учебного материала. Здесь используется систематический *разбор фрагментов учебного текста* учителем совместно с учениками с акцентом на *смыслах слов*, предложений и связях между ними (самостоятельное образное наполнение текста). В домашние задания всегда включается задание на чтение параграфов учебника с контролем на следующем уроке (вызов учащихся к доске и оценка ответа). Последний приём был обязательным элементом каждого урока в советской дореформенной школе. Помимо контрольной функции он способствует развитию речи и органически связанного с речью мышления детей. А современные учащиеся (школы и вуза) не умеют не только читать, но и говорить.

Наконец, следует сказать ещё об одном элементе учебного процесса, возвращённом в обучение системой РКШ — о *повторении*. Это один из краеугольных принципов русской советской школы, без которого невозможно достичь глубоких и прочных знаний. Повторение *систематическое*: в начале и в конце учебного года, в конце каждой темы, на отдельных уроках, перед экзаменами, которые были в советской школе ежегодно. Повторение — это не просто повторение, а всегда *углубление понимания* материала, изученного ранее, установление новых связей, закрепление в памяти.

Итак, **природосообразная методика, предметное обучение, единые классические учебники, регулярная самостоятельная работа учащихся с книгой, систематическое повторение и закрепление пройденного** — вот важнейшие элементы классической педагогической культуры, возвращённые в обучение системой РКШ. Эти фундаментальные принципы отечественной дидактики требуют первоочередного возвращения в нашу массовую школу. И сделать это не очень трудно, ибо здесь нужны только организационные решения.

Следующая, гораздо более трудная задача, — *восстановление методической культуры учителей* и внедрение классической методики в массовое обучение.

Вся методика русской школы направлялась принципом *природосообразности* и была пронизана заботой об Ученике, проникновением в его психологию, пониманием его трудностей, анализом причин этих трудностей. На основе такого, порой тончайшего психологического анализа наши лучшие учителя (не академики!) находили верные решения и методики, облегчающие детям труд учения, предупреждающие ошибки, незаметно направлявшие их мысль по верному пути[3]. Эти решения проверялись длительным опытом, совершенствовались и становились классикой.

Сегодняшние учителя даже не понимают вопроса: “В чем *причины* конкретных ошибок учащихся?” Не могут проанализировать ход мысли ученика и понять, в какой момент и почему произошёл сбой, приведший к ошибке. “Какие ещё причины? Сам виноват!” В лучшем случае говорят: “Недостаточно внимателен. Не усвоил. Надо поработать, порешать.” И никто не скажет себе: “А может, я, учитель, виноват? Что-то неправильно делал. Допустил методическую ошибку.”

Истина, заключённая в классической методике, ныне почти совершенно забыта, она подменена ложью и хаосом псевдонаучных “подходов”, “вариативных” методов и инноваций. Более того, ин-

[3]См.: И.П. Костенко. Проблема качества математического образования в свете исторической ретроспективы. Монография, М., 2013. Гл. 2.

новации объявляются единственным средством решения проблем современного образования. Эта установка бездумно принимается управляющим сообществом и даже учителями, лишёнными ориентиров подлинной методической культуры.

И вот здесь — *в учителях* — находится главное препятствие для возрождения качества нашего образования. Здесь и огромная трудность для управленцев, если они только поймут жизненно важную необходимость возвращения нашего образования на традиционный путь. Как изменить профессиональное сознание учителей? Как помочь им перестроить шаблон своего преподавания? Как мотивировать? Как преодолеть естественную пассивность и нежелание менять выработанные долгой практикой стереотипы? Это долгая задача и начинать её решение надо будет с коренной перестройки обучения в педвузах, которое изуродовали те же "реформаторы-70"[4].

Надо знать, что советские учителя до реформы-70 в массе своей обладали достаточной профессиональной культурой, в чём им помогали классические учебники, хранившие и транслировавшие эту культуру новым поколениям учителей. Это и позволяло тогда сдерживать негативные последствия "реформаторских" инноваций. Надо также знать, что эти инновации начали планомерно и жёстко внедряться в нашу школу ещё в 1950-х годах. Через 20 лет "реформаторы" достигли своей цели — полностью вывели истинную методику из обучения, радикально изменив программы и учебники. В результате качество обучения и знаний обрушилось, а лучшие учителя были вынуждены уйти из школы, посылая руководителям реформы проклятия. Сегодня мы всё ещё живём под гнётом идей реформы-70, привыкли к ним и забыли историю. Надо бы восстановить в массовом учительском и общественном сознании эту историю[5].

Но не только в учителях проблема будущего возрождения. В нашем обществе и в образовании продолжают действовать наследники "реформаторов-70", которые активно стараются увести нас на новые ложные пути. Наследием реформы-70 является и армия дипломированных педагогов и методистов, направляющая профессиональное образование учителей в педвузах и продуцирующая в несчётном количестве "новые" идеи, оторванные от реалий школы и годные только для изготовления диссертаций. Это и академики РАО, выдумывающие всевозможные "подходы", "развивающие технологии" и прочий вздор на потребу дня, — так же, как они в своё время придумывали "научные" теории для обслуживания реформы-70. Для всех таких теоретиков признание классики равносильно самоубийству. Это и кланы авторов учебников, тесно переплетённые с издательствами и управленцами на местах, для которых возникает угроза потери огромных барышей.

Оптимизм внушает то, что идея восстановления традиционных ценностей в образовании (и не только) всё шире распространяется в обществе. Интернет переполнен негодованием на то, что творят новые "реформаторы" с молодым поколением страны. Родители возмущены и напуганы страшными инновационными методами обучения и воспитания их детей. Многие уже перестают отдавать своих детей в школы и переходят на домашнее обучение. Кажется, и власть стала понимать всю опасность (и для неё) своей образовательной политики.

Идея овладевает массами и становится материальной силой. И процесс этот неостановим!

Алтушкина Татьяна Анатольевна,
руководитель группы разработчиков
образовательной системы РКШ, Екатеринбург.

E-mail: altushkina@gmail.com

Костенко Игорь Петрович,
канд. физ.-мат. наук, доцент, Краснодар.

E-mail: kost@kubannet.ru

[4] Там же, гл.10.
[5] См.: http://www.congress-cron.com/kolonka-redaktora/item/622-kost.

Командные математические олимпиады в ЮУрГУ

А. Ю. Эвнин

В статье содержатся условия и решения задач открытых командных олимпиад, ежегодно проводящихся в Южно-Уральском государственном университете начиная с 2012 г. Данную подборку задач можно использовать в работе студенческих и школьных математических кружков, для подготовки к олимпиадам и для самообразования.

Большой интерес у студентов вызывают командные олимпиады, в которых заметную роль играет умение участников команд работать в коллективе. Популярной формой командной олимпиады являются математические бои [2]. Этот вид олимпиад рассчитан на очень узкий круг самых подготовленных участников и требует больших временны́х затрат от организаторов и участников.

Более «демократичной» является командная игра, проводимая одновременно для большого числа команд. Об идеологии таких олимпиад, позволяющих сочетать массовость, зрелищность и математическую содержательность, подробно и эмоционально написано в статье [1].

Формат командной игры состоит в следующем. Состав каждой команды — 3–4 человека. Задачи предъявляются командам последовательно (по одной) с указанием времени на решение данной задачи. Баллы за задачу начисляются обратно пропорционально числу команд, её решивших. Промежуточные итоги подводятся после каждой задачи. Такая форма проведения олимпиады позволяет сохранить интригу до самого конца: одна задача может решить исход всего соревнования.

Материалы командных Интернет-олимпиад, организованных Ариэльским университетом (Израиль) в 2009–2016 гг., а также очных командных олимпиад, проводившихся в рамках суперфиналов международной Интернет-олимпиады по математике в Израиле в 2011-2016 гг., можно найти на сайте `www.i-olymp.net`.

В Южно-Уральском государственном университете в 2012–2016 гг. командная олимпиада проводилась по несколько иному формату.

Основный контингент участников олимпиады составили студенты I и II курсов. Наряду с ними состязались старшекурсники и даже аспиранты. Вне конкурса выступали школьники знаменитого челябинского лицея 31 (победители и призёры Всероссийских олимпиад по математике и информатике). Ясно, что при таком широком спектре участников нужна более гибкая схема проведения олимпиады.

Мы объединяли задачи в блоки по две или три задачи. Этим достигались сразу две цели. Во-первых, оказалось возможным предлагать задачи более широкой тематики, оставляя шанс показать хороший результат более молодым участникам (в каждом блоке должна быть задача, доступная школьникам и студентам первого курса). Во-вторых, усиливается командный характер олимпиады. Дело в том, что если на заданный промежуток времени предлагается для решения всего одна задача, то один сильный «игрок» может решить судьбу всей игры. В случае же нескольких задач, которые нужно решить за тот же промежуток времени, усилий только одного участника команды, скорее всего, окажется недостаточно для победы (если в соревнованиях участвуют достаточно подготовленные и относительно равные по силам команды).

Всем командам предлагался один и тот же набор задач, но результаты подводились по разным номинациям: школьники, I курс, II курс, III-IV курс, магистранты и аспиранты.

В 2012 г. в олимпиаде приняли участие 18 команд, в 2013 г. и в 2014 г. — по 41 команде, в 2015 г. — 52 команды, в 2016 г. — 50 команд. Помимо студентов ЮУрГУ в олимпиадах принимали участие представители ЧелГУ, ЧГПУ, лицеев 31, 35, 77, 82, ЧОПЛИ.

В 2015 г. у олимпиады появился спонсор — компания Orange Apps.

Технические результаты олимпиад можно найти на сайте `http://vk.com/konkursinsusu` (группа «Математический конкурс в ЮУрГУ» социальной сети «В контакте»).

Дополнительные сведения о математических олимпиадах ЮУрГУ содержатся в [2–10].

Приводим условия и решения задач командных олимпиад 2012 – 2016 гг.

2012 год

1-й раунд (3 задачи на 20 минут)

1. Часы показывают 8 ч 20 мин. Через сколько минут минутная стрелка в четвёртый раз догонит часовую стрелку?

2. Дан прямоугольный треугольник, в котором высота, опущенная из вершины прямого угла, в 4 раза меньше гипотенузы. Чему равен наименьший угол этого треугольника (в градусах)?

3. Вычислите интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^4+x^5}{1+x^{10}}dx.$$

2-й раунд (3 задачи на 25 минут)

4. Найдите площадь фигуры, задаваемой на координатной плоскости неравенством $x^2+y^2 \leqslant x+y$.

5. Комплексное число a является корнем уравнения $z^2-z+1=0$. Вычислите значение выражения $a^{11}+a$.

6. Вычислите

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{50}}{2}\right)^n.$$

3-й раунд (2 задачи на 20 минут)

7. Лариса, Вера и Саша собирали грибы. Вера собрала грибов на 25% больше, чем Саша, но на 25% меньше, чем Лариса. На сколько процентов Саша собрал грибов меньше, чем Лариса?

8. Найдите целую часть числа

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$

4-й раунд (3 задачи на 30 минут)

9. [По мотивам молдавской народной сказки] Как-то шли по дороге двое знакомых. У Штефана в котомке шесть хлебов, а у Петра пять. Проголодавшись, уселись они в тени ветвистой ракиты, у колодца. Только вынули хлеб из котомок, подходит к ним незнакомый прохожий, здоровается и просит его попотчевать: очень ему есть захотелось, а с собой съестного из дому не прихватил и купить негде. — Садись, добрый человек, и кушай с нами, — сказали путники. Стали они все трое голый хлеб уписывать, студеной водой колодезной запивать. Ели они втроём, пока не исчезли все 11 хлебов, словно их и не было. Вынул тогда незнакомец из кошелька 11 лей. — Возьмите, люди добрые, в благодарность за то, что накормили меня досыта.

Сколько из этих денег полагается Штефану, а сколько Петру (если делить деньги по справедливости)?

10. Пусть

$$f(x) = \frac{14-3x}{x^2-6x+8}.$$

Вычислите $f^{(5)}(3)$.

11. Вычислите

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\pi/4} \sin(x^2)\cos(y^2)dxdy.$$

5-й раунд (2 задачи на 30 минут)

12. На плоскости проведено n прямых, среди них нет параллельных и никакие четыре не проходят через одну точку. Всего имеется 16 точек пересечения этих прямых, причём ровно через 6 точек проходит по три прямые. Чему равно n?

13. Вычислите

$$\log_2(\sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdots \sin 87^\circ \cdot \sin 89^\circ).$$

Ответы и решения

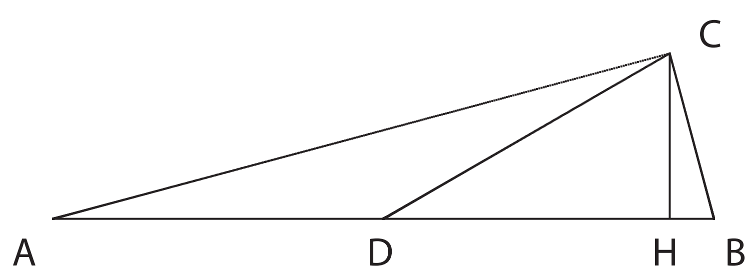
1. Через 220 мин.

В начальный момент времени минутная стрелка составляет с направлением на 12 часов угол в 120°, а минутная — в 250°. К моменту, когда минутная стрелка в четвёртый раз догонит часовую стрелку, она должна повернуться по сравнению с часовой стрелкой на $130+360\cdot 3$ градусов больше. За один час её угол поворота на 330° больше. Значит, искомое время $\frac{1210}{330} = \frac{11}{3}$ (в часах), или 220 мин.

Замечание. Можно было рассуждать и так. Ясно, что в 12 ч минутная стрелка догонит часовую. Промежуток времени между их встречами $\frac{12}{11}$ часа. Исходя из этого нетрудно прикинуть, что встреча в 12 ч как раз четвёртая по счёту!

2. 15°.

Пусть в треугольнике ABC угол C — прямой, $\angle A < \angle B$, CH и CD — высота и медиана.



По свойству медианы, проведённой из вершины прямого угла, $CD = AD = \dfrac{1}{2}AB$. По условию, $CH = \dfrac{1}{4}AB$. Значит, в прямоугольном треугольнике CDH катет CH вдвое меньше гипотенузы CD. Отсюда $\angle CDH = 30^\circ$. Этот угол является внешним для треугольника ADC. Внешний угол равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с этим внешним. Поскольку $AD = DC$, имеем равенство углов $\angle DAC = \angle ACD$. Значит, $\angle A = 15^\circ$.

3. $\dfrac{\pi}{10}$.

4. $\frac{\pi}{2}$.

5. 1.

Очевидно, $a^3 = -1$. Отсюда $a^{11} = -a^2$. Значит,

$$a^{11} + a = -a^2 + a = 1.$$

6. 10.

Используя второй замечательный предел, имеем

$$a_n = \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{50}}{2}\right)^n = 2\left(\frac{1 + \sqrt[n]{25}}{2}\right)^n = 2\left(1 + \frac{\sqrt[n]{25} - 1}{2}\right)^n =$$

$$= 2\left(1 + \frac{\sqrt[n]{25} - 1}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{25}-1} \cdot \frac{n(\sqrt[n]{25}-1)}{2}}.$$

Как известно, $a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a$ (при $\alpha \to 0$). Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt[n]{25} - 1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \frac{1}{n} \ln 25}{2} = \frac{1}{2} \ln 25.$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2e^{\frac{1}{2}\ln 25} = 2 \cdot 5 = 10.$$

Замечание. Точно так же доказывается, что предел среднего степенного двух положительных чисел равен их среднему геометрическому:

$$\lim_{\alpha\to 0} \left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt{ab}.$$

7. 40.

Пусть Саша собрал x грибов, а Лариса y грибов. Тогда Вера собрала $1{,}25x = 0{,}75y$ грибов. Отсюда $x = 0{,}6y$, — е Сашины грибы составляют 60% от Ларисиных.

8. 1997.

Суммируя неравенства $\frac{1}{\sqrt{n}} < \int\limits_{n-1}^{n} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ по n от 2 до 10^6, получаем

$$S < \int\limits_{1}^{10^6} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(10^3 - 1) = 1998.$$

Суммируя неравенства $\frac{1}{\sqrt{n}} > \int\limits_{n}^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ по n от 1 до 10^6, получаем

$$S + 1 > \int\limits_{1}^{10^6+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} > 1998.$$

Значит, $1997 < S < 1998$.

9. Штефану полагается 7 лей, а Петру — 4.

На каждого едока пришлось по 11/3 хлебов. Значит, прохожий получил от Штефана $6 - 11/3 = 7/3$ хлебов, а от Петра 4/3 хлебов. В такой же пропорции $7 : 4$ они должны разделить деньги.

10. $3 \cdot 5! = 360$.

Представим функцию в виде суммы простейших дробей:

$$f(x) = \frac{1}{x-4} - \frac{4}{x-2}.$$

Отсюда

$$f^{(5)}(x) = -\frac{5!}{(x-4)^6} + \frac{4 \cdot 5!}{(x-2)^6}.$$

11. $\dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Благодаря симметричности области интегрирования относительно прямой $y = x$ имеем

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant \pi/4} \sin(y^2)\cos(x^2)dxdy.$$

Отсюда

$$2I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant \pi/4} \sin(x^2+y^2)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\pi}/2} \rho\sin(\rho^2)d\rho =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{\pi}/2} \sin(\rho^2)d(\rho^2) = \pi \cdot (-\cos t)\big|_0^{\pi/4} = \pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

12. 8.

Немного пошевелим прямые, чтобы они стали прямыми общего положения. При этом каждая точка пересечения трёх прямых даст по три точки попарного пересечения этих прямых. Всего получится $16 + 2 \cdot 6 = 28$ точек. Поскольку n прямых общего положения пересекаются в $\dfrac{n(n-1)}{2}$ точках, имеем уравнение $\dfrac{n(n-1)}{2} = 28$, из которого $n = 8$.

13. $-44{,}5$.

Пусть $A = \sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdots \sin 87^\circ \cdot \sin 89^\circ$, $B = \sin 2^\circ \cdot \sin 4^\circ \cdots \sin 87^\circ \cdot \sin 88^\circ$. Тогда $A \cdot B = \sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdots \sin 88^\circ \cdot \sin 89^\circ = (\sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ) \cdot (\sin 2^\circ \cdot \cos 2^\circ) \cdots (\sin 44^\circ \cdot \cos 44^\circ) \cdot \sin 45^\circ =$

$$= \frac{1}{2^{44}} \sin 2^\circ \cdots \sin 88^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{44{,}5}} \cdot B.$$

Отсюда $A = 2^{-44{,}5}$.

2013 год

1-й раунд (2 задачи на 20 минут)

1. Назовём год *лихим*, если в записи его номера есть повторяющиеся цифры. Например, все года с 1988 по 2012 были лихими. Каково максимальное количество лихих лет, идущих подряд, среди уже прошедших лет нашей эры?

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + xy = 11; \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$$

2-й раунд (3 задачи на 25 минут)

3. Иван Петрович каждый день в одно и то же время выезжает на своём автомобиле на работу. Если он едет со средней скоростью 40 км/ч, то он прибывает на работу в 8 ч 04 мин. Если его средняя скорость 60 км/ч, то он приезжает в 7 ч 56 мин. С какой средней скоростью нужно ехать Ивану Петровичу, чтобы прибыть на работу ровно в 8 ч?

4. Решите уравнение

$$4 \sin x + \operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$

5. Вычислите криволинейный интеграл по длине $\oint\limits_C x^2 dl$, где C — линия пересечения поверхностей $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $x + y + z = 1$.

3-й раунд (3 задачи на 30 минут)

6. На окружности отмечены 13 точек. Сколько существует выпуклых многоугольников с вершинами в этих точках?

7. Вычислите интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \bigl(\arcsin(x^2) + \arccos(x^2)\bigr)\, dx.$$

8. На прямой $y = x$ найдите точку, сумма расстояний от которой до кривых $x^2 + 14x - 2y + 53 = 0$ и $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 22 = 0$ минимальна.

4-й раунд (2 задачи на 25 минут)

9. Азимут — это угол от 0° до 360°, отсчитанный по часовой стрелке от направления на север до направления на заданный ориентир. Аристарх видит телебашню, водонапорную башню и колокольню соответственно под азимутами 60°, 90° и 120°. Борис видит телебашню и водонапорную башню соответственно под азимутами 270° и 240°. Под каким азимутом Борис может видеть колокольню?

10. Сходится ли последовательность с общим членом

$$a_n = \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n})?$$

Если да, найдите её предел.

5-й раунд (2 задачи на 30 минут)

11. В первом ряду театра 12 мест. Сколькими способами обладатели билетов на эти места могут разместиться на них так, чтобы каждый оказался на своём месте (согласно купленному билету) или на соседнем с ним?

12. Имеется матрица $A = (a_{i,j})$ размера 6×6 с общим членом $a_{i,j} = i\cdot j$. Пусть $f(x)$ — определитель матрицы $A + xI$, где I — единичная матрица размера 6×6. Вычислите $f'(0)$.

Ответы и решения

1. 104.

С 1099 по 1202 все года лихие. Рассмотрим нелихие года 102, 203, 304, 405, 506, 607, 708, 809, 910, 1023, 1098; 1203, 1304, 1405, 1506, 1607, 1708, 1809, 1907, 1987, 2013. Кроме рекордного промежутка между соседними годами в этой последовательности, все остальные промежутки — более короткие!

2. (2;3), (3;2), (1; 5), (5;1).

Замена $u = x + y$, $v = xy$. После этого трижды применяем (обратную) теорему Виета.

3. 48 км/ч.

Пусть Иван Петрович едет на работу со скоростью 60 км/ч, а обратно со скоростью 40 км/ч. Тогда его средняя скорость совпадёт с искомой скоростью. Задача сведена к весьма известной. Ответом служит среднее гармоническое скоростей из условия задачи.

4. $\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $k, n \in \mathbb{Z}$.

$$4 \sin x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} x = \frac{\sin(\frac{\pi}{3} - x)}{\frac{1}{2} \cos x} \iff \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$$

5. $\frac{2\pi}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Из-за симметрии кривой C относительно координатных плоскостей

$$\oint\limits_C x^2 dl = \oint\limits_C y^2 dl = \oint\limits_C z^2 dl = \frac{1}{3} \oint\limits_C (x^2 + y^2 + z^2) dl = \frac{1}{3} \oint\limits_C dl = \frac{2\pi}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}},$$

поскольку линия пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и плоскости $x + y + z = 1$ есть, как несложно подсчитать, окружность радиуса $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

6. 8100.

Многоугольник определяется своими вершинами, их должно быть не меньше трёх. Поэтому из всех подмножеств 13-элементного множества нужно исключить множества из 0, 1 и 2 элементов. Искомых многоугольников

$$2^{13} - \left(1 + 13 + C_{13}^2\right) = 8192 - (1 + 13 + 78) = 8100.$$

7. π.

8. (1;1).

Окружность $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 4$ и парабола $y = \frac{1}{2}(x + 7)^2 + 2$ расположены выше прямой l с уравнением $y = x$. Отразив окружность симметрично относительно данной прямой (от этого расстояния от точек прямой до окружности не изменятся), получим окружность C с уравнением $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 4$. Расстояния от любой точки l до C меньше расстояния до центра окружности $O(5; -1)$ на 2. Поэтому решаемая задача равносильна такой: на l найти точку с минимальной суммой расстояний до параболы и до точки O. Ясно, что это будет точка пересечения нормали к параболе, проведённой из точки O, с прямой l.

Уравнение нормали $y - y_0 = -\frac{1}{x_0+7}(x - x_0)$, где $(x_0; y_0)$ — точка параболы. Обозначим $a = x_0$. Тогда $y_0 = \frac{1}{2}(a+7)^2+2$. Из условия, что нормаль проходит через точку $O(5; -1)$, получаем уравнение

$$-1 - \frac{1}{2}(a + 7)^2 - 2 = -\frac{5 - a}{a + 7}.$$

Это уравнение сводится к кубическому, и у него единственный корень $a = 5$. Осталось найти точку пересечения найденной нормали с l.

9. От 120° до 270° (не включительно).

Пусть A — точка, в которой находится Аристарх, B — телебашня, C — Борис, D — водонапорная башня, K — колокольня. Из условия следует, что $ABCD$ — параллелограмм. Рассмотрим четырёхугольник $ABCK$. В нём $\angle A = 60°$, $\angle B = 150°$. Отсюда $\angle C < 150°$. При $K \to \infty$ (вдоль соответствующего луча) $\angle C \to 150°$, а азимут стремится к $120°$. Если же устремить K к A, а C к бесконечности (по соответствующим лучам), то азимут будет стремиться к $270°$.

10. Сходится к 1.

$$\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n} - \pi n) = \sin^2 \frac{\pi n}{\sqrt{n^2+n}+n} \to \sin^2\frac{\pi}{2} = 1.$$

11. 233.

Пусть a_n — количество перестановок чисел от 1 до n, в которых для каждого i число i стоит на i-м месте или на соседнем с ним. В задаче требуется найти a_{12}.

Очевидно, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Число n стоит на n-м месте или на $(n-1)$-м. В первом случае количество перестановок равно a_{n-1}. А во втором случае на n-м месте может стоять только число $n-1$; таких перестановок a_{n-2}. Отсюда получаем рекуррентное соотношение

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

с помощью которого последовательно находим $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$, $a_{11} = 144$, $a_{12} = 233$.

12. 0.

Первое решение. Сначала для $i = 2, 3, \ldots, 6$ из i-й строки вычтем 1-ю строку, умноженную на i. Затем для $j = 2, 3, \ldots, 6$ к 1-му столбцу определителя прибавим j-й столбец, умноженный на j:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4+x & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 6 & 9+x & 12 & 15 & 18 \\ 4 & 8 & 12 & 16+x & 20 & 24 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25+x & 30 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36+x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -2x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3x & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ -4x & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ -5x & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ -6x & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 91+x & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^6 + 91x^5.$$

Второе решение. Широко известен следующий факт. Пусть элементы определителя n-го порядка являются функциями от x. Тогда производная определителя равна сумме n определителей; в i-м определителе i-й столбец исходного определителя заменяется столбцом производных, а остальные столбцы не меняются. В данной задаче получается, что в изменяющемся столбце на i-м месте 1, а остальные элементы — нули. Когда же мы будем вычислять алгебраическое дополнение к единице, подставив $x = 0$, то увидим в нём пропорциональные столбцы. Значит, каждое из шести слагаемых равно нулю.

Третье решение. Пусть $g(x)$ — характеристический многочлен матрицы A. Тогда $f(x) = g(-x)$. Ранг матрицы A равен 1, поэтому 0 является кратным корнем характеристического многочлена. Отсюда $g'(0) = 0$ и $f'(0) = 0$.

2014 год

1-й раунд (2 задачи на 20 минут)

1. Имеется клетчатое поле размером 8×8. У Игоря три краски — белая, серая и чёрная. Он должен раскрасить клетки так, чтобы соседние клетки были разного цвета, но при этом не было резкой смены цвета, т. е. запрещается соседство белой клетки и чёрной. (Клетки называются соседними, если у них есть общая сторона). Сколько способов у Игоря покрасить доску?

2. Под какими углами кривая $y=\dfrac{20x^2-14x+1}{40x-14}$ пересекает ось Ox?

2-й раунд (3 задачи на 25 минут)

3. Вычислите произведение

$$(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}2^\circ)(1+\operatorname{tg}3^\circ)\dots(1+\operatorname{tg}44^\circ).$$

4. Найдите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что для любого числа x

$$x(1-f(x))=f(1-x).$$

5. Определите знак числа $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\frac{3^x-1}{3^x+1}dx$.

3-й раунд (3 задачи на 30 минут)

6. Решите в целых числах уравнение

$$(x^2+y^2)(x-2y+15)=2xy.$$

7. Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2}(\sin^2(\sin x)+\cos^2(\cos x))dx$.

8. Барон Мюнхгаузен изобразил в некотором 3D-редакторе 2015 попарно неколлинеарных векторов и утверждает, что для любых двух из них найдётся такой вектор из им нарисованных, который перпендикулярен каждому из этих двух векторов. Может ли заявление барона быть правдивым?

4-й раунд (2 задачи на 25 минут)

9. Сколько есть пар чисел x и y, для которых выполняется матричное равенство

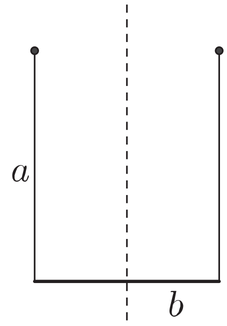
$$\begin{pmatrix} x & -y\\ y & x\end{pmatrix}^{2014}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}?$$

10. В какое наименьшее число цветов можно покрасить натуральные числа, чтобы числа, разность которых — простое число, были разного цвета?

5-й раунд (3 задачи на 30 минут)

11. A — двоичная (т. е. её элементы — нули и единицы) невырожденная матрица размера 6×6. Какое наибольшее число единиц может быть в такой матрице?

12. На параллельных верёвках длиной a подвешена балка длиной b.



Её повернули вокруг вертикальной оси на угол $\varphi < \pi$ (центр балки остался на этой оси, но немного сдвинулся вверх) так, что верёвки остались натянутыми. На какую высоту поднялась балка?

13. Барон Мюнхгаузен утверждает, что знает два различных натуральных числа таких, что если сложить их квадраты, получится куб, а если сложить их кубы, получится квадрат. Может ли заявление барона быть правдивым?

Ответы и решения

1. 2^{33}.

Если заменить (временно) белый и чёрный цвет зелёным, то у Игоря должна получится щахматная серо-зелёная раскраска. Таких раскрасок ровно две. Теперь осталось для каждой из 32 зелёных клеток выбрать один из двух цветов.

2. $45°$.

График функции $y = \dfrac{20x^2 - 14x + 1}{40x - 14}$ пересекает ось абсцисс в двух точках x_1 и x_2. Найдём производную функции в этих точках:

$$y'(x_i) = \frac{(40x_i - 14)^2 - 40(20x_i^2 - 14x_i + 1)}{(40x_i - 14)^2} = 1,$$

поскольку $20x_i^2 - 14x_i + 1 = 0$.

3. 2^{22}.

$$\prod_{n=1}^{44}(1 + \operatorname{tg} n^\circ) = \prod_{n=1}^{44} \frac{\cos n^\circ + \sin n^\circ}{\cos n^\circ} = \prod_{n=1}^{44} \frac{\cos n^\circ + \cos(90^\circ - n^\circ)}{\cos n^\circ} =$$

$$= \prod_{n=1}^{44} \frac{2\cos 45^\circ \cdot \cos(45^\circ - n)}{\cos n^\circ} = (\sqrt{2})^{44} \cdot \frac{\cos 44^\circ \cdot \cos 43^\circ \cdots \cos 1^\circ}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdots \cos 44^\circ} = 2^{22}.$$

Другое решение основывается на такой цепочке преобразований:

$$1 + \operatorname{tg} n^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} n^\circ = \frac{\sin(n^\circ + 45^\circ)}{\cos 45^\circ \cos n^\circ} = \sqrt{2}\, \frac{\cos(45^\circ - n^\circ)}{\cos n^\circ}.$$

4. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-x+1} = 1 - \frac{x}{x^2-x+1}$.

Положим $t = 1 - x$. Тогда $(1 - t)(1 - f(1 - t)) = f(t)$ для любого t. Подставив в тождество

$$(1 - x)(1 - f(1 - x)) = f(x)$$

выражение $f(1 - x) = x(1 - f(x))$, получим $(1 - x)(1 - x(1 - f(x)) = f(x)$, откуда после несложных преобразований находим $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}$. Проверка подтверждает, что найденная функция удовлетворяет условию задачи.

5. Это число равно нулю.

Подынтегральная функция является нечётной.

6. $(0;0), (-15;0), (14,14)$.

Если $y = 0$, то $x^2(x+15) = 0$ и $x = 0$ или $x = -15$. При $x = 0$ новых решений уравнения не обнаруживается. Пусть теперь $xy \neq 0$. Тогда и $x - 2y + 15 \neq 0$. При этом

$$|(x^2+y^2)(x-2y+15)| \geqslant x^2+y^2 \geqslant 2|xy|,$$

а равенство возможно лишь при $|x| = |y|$ и $x - 2y + 15 = \pm 1$, а именно:

- если $x = y$, то $x - 2y + 15 = 1$ и $x = y = 14$;
- если $x = -y$, то $x - 2y + 15 = -1$ и решения в целых числах нет.

7. $\frac{\pi}{2}$.

Указание. Как известно, если f — непрерывная функция, то $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$.

8. Может.

Пусть один из векторов перпендикулярен плоскости, в которой лежат остальные векторы, разбитые на пары взаимно перпендикулярных векторов (и при этом среди этих 2014 векторов нет коллинеарных). Тогда утверждение барона будет выполнено.

9. 2014.

10. 4.

Пример. Можно разбить $\mathbb{N}$ на 4 прогрессии с разностью 4, и члены каждой прогрессии покрасить своим цветом.

Оценка. Числа 1, 3, 6 и 8 должны быть разного цвета, поскольку их попарные разности — простые числа.

11. 31.

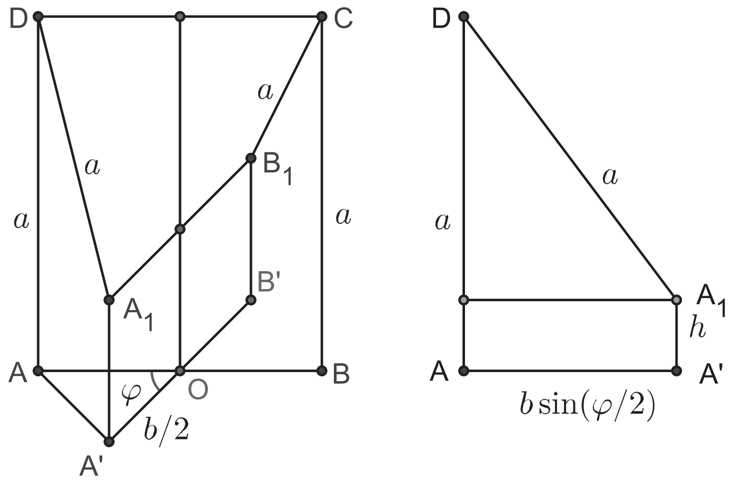
Если в матрице не менее 32 единиц, то нулей не более четырёх и найдётся два столбца из одних единиц, в силу чего матрица будет вырожденной. Пример невырожденной матрицы с 31 единицами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Её определитель можно подсчитать так. Оставив неизменным первый столбец, из всех остальных столбцов вычтем первый. Получится нижнетреугольный определитель, у которого на диагонали есть одна единица, а на остальных местах стоит -1.

12. $a - \sqrt{a^2 - b^2\sin^2(\varphi/2)}$.

Пусть балка AB, висящая на верёвках DA и CB, заняла положение A_1B_1. Отрезок A_1B_1 параллелен горизонтальной плоскости, длина его, как и отрезка AB, равна b. Пусть $A'B'$ — проекция A_1B_1 на горизонтальную плоскость, в которой лежит отрезок AB.



В треугольнике AOA', где O — середина отрезка AB, имеем $AO = OA' = b/2$ и $\angle AOA' = \varphi$. Отсюда $AA' = b\sin(\varphi/2)$. Теперь в прямоугольной трапеции $DAA'A_1$ нам известны длины трёх сторон. Легко найти длину меньшего основания этой трапеции $A'A_1$. Это и есть высота, на которую поднялась балка.

13. Может. Пример: 5^4 и $2 \cdot 5^4$.

2015 год

1-й раунд (2 задачи на 20 минут)

1. Кран с холодной водой заполняет ванну за 17 мин, а с горячей за 23 мин. Открыли кран с горячей водой. Через сколько минут нужно открыть кран с холодной водой, чтобы к тому моменту, как ванна будет заполнена полностью, в ней холодной и горячей воды было поровну?

2. На плоскости Oxy заданы прямые

$$5x - 12y + 20 = 0 \quad \text{и} \quad 24x + 10y + 15 = 0.$$

Найдите биссектрисы углов, образованных этими прямыми.

2-й раунд (3 задачи на 25 минут)

3. Прямоугольные параллелепипед размером $30 \times 40 \times 50$, разбитый на единичные кубики, проткнули иглой по его диагонали. Сколько единичных кубиков проткнула игла?

4. Решите уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + 2015x)\,dx$.

3-й раунд (3 задачи на 30 минут)

6. Найдите все натуральные n, для которых $2n^2 - n - 36$ — квадрат простого числа.

7. ABC — равнобедренный треугольник ($AB = BC$). Точка O — середина высоты BD. Луч AO пересекает сторону BC в точке E. Найдите площадь треугольника BOE, если площадь треугольника ABC равна 60.

8. Найдите наименьшее значение функции $y = x^x$, где $x > 0$.

4-й раунд (2 задачи на 30 минут)

9. Решите уравнение $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \dfrac{35}{12}$.

10. Сколько существует тупоугольных треугольников, чьи вершины расположены в вершинах фиксированного правильного 17-угольника?

5-й раунд (2 задачи на 30 минут)

11. 31 шариков одинаковой массы с одинаковыми скоростями двигаются по жёлобу по направлению к металлической стенке. Навстречу им с такой же скоростью двигаются 50 шариков той же массы. При столкновении двух шариков они разлетаются с той же скоростью. После столкновения со стенкой шарик отскакивает от неё с той же скоростью. (Шарики двигаются только по жёлобу). Найдите общее число соударений шариков.

12. Вычислите поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S (x - y + z)\,dx\,dy + (y - z + x)\,dy\,dz + (z - x + y)\,dz\,dx,$$

где S — внешняя сторона поверхности

$$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1.$$

Ответы и решения

1. Через 3 минуты.

Половина ванны заполняется горячей водой за 11,5 минут, а холодной водой за 8,5 минут. Значит, кран с горячей водой должен быть открыт на 3 минуты дольше.

2. $34x - 14y + 55 = 0; \quad 14x + 34y - 25 = 0.$

Пусть l_1 и l_2 — прямые из условия задачи. Составим уравнение пучка прямых $\alpha(5x - 12y + 20) + \beta(24x + 10y + 15) = 0$, определяемого данными прямыми. Если положить $\alpha = 2$, $\beta = \pm 1$, то получим уравнения прямых, у которых нормальные векторы являются суммами нормальных векторов к l_1 и l_2 одинаковой длины. Поскольку медиана в равнобедренном треугольнике является и биссектрисой. получится то, что нужно!

Замечание. Другое решение можно получить, исходя из того, искомые биссектрисы — геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных прямых, и применив формулу расстояния от точки до прямой.

3. 100.

Игла проходит по диагонали десяти параллелепипедов размером $3 \times 4 \times 5$. Рассмотрим такой параллелепипед П. Покрасим единичные кубики, через которые проходит диагональ, чёрным цветом. Направим оси координат параллельно рёбрам этих кубиков. Из-за того, что 3, 4 и 5 — взаимно простые числа, любые два соседних чёрных кубика имеют общую грань. Переходов вдоль каждой оси будет соответственно 2, 3 и 4. С учётом первого кубика всего получаем 10 чёрных кубиков в П. Во всём параллелепипеде их в 10 раз больше.

4. 1, 2, 3.

Очевидно, что при $x = 1, 2$ и 3 определитель равен нулю (всякий раз в нём будет две равные строки). С другой стороны, перед нами уравнение 3-й степени (в этом несложно убедиться), у которого не может быть более трёх корней.

Замечание. Можно было также использовать разложение на множители определителя Вандермонда.

5. 0.

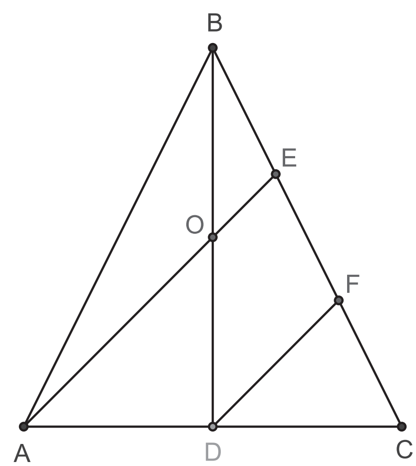
Подынтегральная функция нечётная и имеет период 2π. Как известно, интеграл от периодической функции по промежутку, чья длина равна периоду этой функции, не зависит от расположения этого промежутка на числовой прямой. Интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ равен нулю из-за нечётности $f(x)$.

6. 5, 13.

$(2n-9)(n+4) = p^2$. Второй множитель в левой части равенства — натуральное число, значит, и в первой скобке натуральное число. Если произведение двух натуральных чисел равно квадрату простого числа, то либо один из множителей равен 1 (в нашей задаче может быть только $2n-9=1$, откуда $n=5$), либо множители равны друг другу ($2n-9=n+4$, откуда $n=13$). В обоих случаях число $2n^2-n-36$ оказывается квадратом простого числа.

7. 5.

Пусть $DF \parallel AE$ и $F \in BC$.



Тогда DF — средняя линия в треугольнике AEC, откуда F — середина отрезка EC. С другой стороны, OE — средняя линия в треугольнике BDF, откуда E — середина отрезка BF. Значит, точки E и F делят сторону BC на три равных отрезка. Поскольку $BE = \frac{1}{3}BC$, а $BO = \frac{1}{2}BD$, $S_{BOE} = \frac{1}{6}S_{BDC} = \frac{1}{12}S_{ABC}$.

Замечание. Возможно решение и без дополнительных построений, например, с помощью метода масс или теоремы Менелая.

8. $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

Функция $x^x = e^{x\ln x}$ убывает на промежутке $(0; \frac{1}{e}]$ и возрастает на луче $[\frac{1}{e}; +\infty)$.

9. $\frac{5}{3}; \frac{5}{4}$.

Первое решение. Ясно, что $x > 0$ и $x^2 > 1$. Отсюда $x > 1$. Замена переменной $x = \dfrac{1}{\cos t}$, где

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$, приводит к уравнению $\dfrac{1}{\cos t} + \dfrac{1}{\sin t} = \dfrac{35}{12}$, или

$$12(\cos t + \sin t) = 35 \sin t \cos t.$$

Если $y = \cos t + \sin t$, то $\sin t \cos t = \dfrac{y^2 - 1}{2}$. Значит, относительно y имеем уравнение $35y^2 - 24y - 35 = 0$, корнями которого являются числа $\dfrac{7}{5}$ и $-\dfrac{5}{7}$. Поскольку t — величина острого угла, $y > 0$. Итак, $\cos t + \sin t = \dfrac{7}{5}$. Далее стандартные выкладки приводят к тому, что $\cos t = \dfrac{3}{5}$ или $\cos t = \dfrac{4}{5}$.

Второе решение. Замена $t = \sqrt{x^2 - 1}$ и последующее возведение в квадрат приводят к возвратному уравнению

$$(t^2 + 1)(t + 1)^2 = \left(\frac{35}{12}\right)^2 t^2.$$

После стандартной замены $y = t + \dfrac{1}{t}$ приходим к уравнению $y^2 + 2y = \left(\dfrac{35}{12}\right)^2$, откуда $(y + 1)^2 = \left(\dfrac{37}{12}\right)^2$. Далее последовательно находим $y = \dfrac{25}{12}$, $t = \dfrac{3}{4}$ или $t = \dfrac{4}{3}$ и $x = \dfrac{5}{4}$ или $x = \dfrac{5}{3}$.

Замечание. Если решать задачу «в лоб», избавляясь от иррациональности, то получим уравнение

$$144x^4 - 840x^3 + 937x^2 + 840x - 1225 = 0$$

с дополнительным условием $1 < x < \dfrac{35}{12}$. Можно ли его решить, не имея под рукой компьютера, за приемлемое время?

10. 476.

Пусть ABC — тупоугольный треугольник из условия задачи, причём вершины A, B и C расположены по ходу часовой стрелки, и AC — наибольшая сторона. Пусть также угловые величины дуг AB, BC и CA окружности, описанной вокруг 17-угольника, равны соответственно αx, αy и αz, где $\alpha = \frac{2\pi}{17}$. Тогда $x + y + z = 17$, причём $z > 8$. Замена $z = z' + 8$ даёт уравнение в натуральных числах $x + y + z' = 9$, у которого $C_8^2 = 28$ решений. С учётом того, что положение точки A можно выбрать 17 способами, получаем ответ.

11. 2015.

Будем считать, что изначально у каждого шарика, двигающегося к стенке, красный флажок, а у остальных шариков синие флажки. Представим, что при столкновении шарики обмениваются флажками. Тогда каждый синий флажок двигается с постоянной скоростью в одном направлении (от стенки), а каждый красный долетает до стенки, после чего летит в противоположном направлении. Количество соударений шариков равно количеству обменов флажками. Каждый красный флажок один раз поменяется с каждым синим. Любые два красных флажка также единожды поменяются местами. Значит, общее число обменов равно $31 \cdot 50 + C_{31}^2 = 2015$.

12. 1.

Пусть $\boldsymbol{r} = (x - y + z; y - z + x; z - x + y)$. Нужно вычислить поток вектора $\boldsymbol{r}$ через поверхность S. Поскольку $\operatorname{div} \boldsymbol{r} = 3$, по теореме Остроградского — Гаусса, искомый интеграл равен утроенному объёму тела D, ограниченного поверхностью $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y| = 1$. Чтобы вычислить этот объём, перейдём к новым координатам.

$$u = x - y + z; \quad v = y - z + x; \quad w = z - x + y.$$

В новых координатах уравнение границы $|u| + |v| + |w| = 1$. Координатные плоскости разбивают нашу фигуру на 8 одинаковых пирамид объёмом $\frac{1}{6}$. Значит, общий объём (в новых координатах) равен $\frac{4}{3}$. Поскольку

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{4}$, и объём D равен $\frac{1}{3}$.

2016 год

1-й раунд (2 задачи на 20 минут)

1. Какое наибольшее конечное количество точек пересечения могут иметь контуры 56-угольника и 36-угольника?

2. Поверхности $x + y + z = 7$ и $xy + yz + zx = 11$ пересекаются по кривой L. Найдите проекцию L на ось Oz.

2-й раунд (3 задачи на 30 минут)

3. Галя и Федя собирали грибы. До обеда Галя собрала на 25% грибов меньше, чем Федя, зато после обеда на 20% больше, чем Федя. По итогам дня оказалось, что Галя собрала на 10% грибов больше, чем Федя. Общее количество собранных ребятами грибов оказалось меньше 250. Сколько грибов собрал Федя?

4. В треугольнике ABC медиана BM в два раза меньше стороны AB и образует с ней угол $42°$. Найдите угол ABC.

5. Возведите матрицу $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ в 2016-ю степень.

3-й раунд (3 задачи на 30 минут)

6. Решите уравнение

$$(x^3 - 2)(2^{\operatorname{tg} x} - 1) + (2^{x^3} - 4)\operatorname{tg} x = 0.$$

7. Вычислите

$$\lim_{x\to+\infty} 7\left(\sqrt[7]{x^7 + x^6} - \sqrt[7]{x^7 - x^6}\right).$$

8. Существует ли вещественная матрица X такая, что

$$X^2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}?$$

4-й раунд (2 задачи на 30 минут)

9. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он может подсчитать сумму попарных произведений шести чисел, выполнив лишь 5 умножений и 8 сложений. Не обманывает ли барон?

10. По кругу стоят 2016 чисел, каждое из которых принадлежит отрезку $[0; 1]$. Каждые два соседних числа перемножили. Затем сложили полученные 2016 произведений, после чего найденную сумму вычли из суммы исходных чисел. В результате получилось число A. Найдите наибольшее возможное значение A.

5-й раунд (2 задачи на 30 минут)

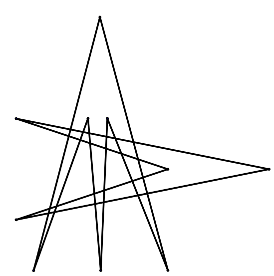
11. Вычислите с точностью до 0,01 двойной интеграл $\iint\limits_D y^3\,dx\,dy$, где D — фигура, ограниченная кривыми $y = x^2$, $y = 2x^2$, $xy = 3$, $xy = 9$.

12. Предвидя потоп, Ной отобрал по 4 экземпляра каждого из n видов животных («тварей») и для обеспечения успеха своей миссии начал строительство двух ковчегов. Когда вода стала прибывать, твари решили попытать счастья без Ноя и уплыли на $2n$ утлых лодках, на каждой из которых поместились по две твари (одного или разных видов). Ковчеги были достроены вовремя и стали догонять тонущих беглецов. Докажите, что Ной мог организовать спасательную операцию так, чтобы каждая лодка пристала точно к одному из ковчегов, и при этом на каждом ковчеге оказалось каждого вида твари по паре.

Ответы и решения

1. 2016.

Наибольшее число точек пересечения получится, если каждая сторона одного многоугольника пересечёт каждую сторону второго многоугольника, что возможно. Конструкция аналогична показанной на рис., где вместо 36 и 56 взяты числа 4 и 6.



2. $[-1/3; 5]$.

Перепишем уравнения в виде

$$x + y = 7 - z; \quad xy = 11 - z(7 - z).$$

Нужно найти, при каких z эта система разрешима относительно x и y. Хорошо известно (и легко доказывается), что система

$$x + y = u; \quad xy = v$$

разрешима тогда и только тогда, когда $u^2 \geqslant 4v$. Таким образом, все возможные значения z находятся из неравенства $(7 - z)^2 \geqslant 44 + 4z^2 - 28z$, или $3z^2 - 14z - 5 \leqslant 0$.

3. 90.

Число грибов, собранных Федей до обеда, должно делиться на 4 (чтобы 25% от этой величины было целым числом). Аналогично число грибов, собранных Федей после обеда, должно делиться на 5. Пусть Федя до обеда собрал $4x$ грибов, а после обеда $5y$ грибов. Тогда Галя собрала соответственно $3x$ и $6y$. При этом число $4x+5y$ должно делиться на 10. Отсюда x кратно 5, а y чётно. Пусть $x = 5a$, $y = 2b$. Тогда

$$3x + 6y = \frac{11}{10}(4x + 5y); \quad 15a + 12b = \frac{11}{10}(20a + 10b),$$

откуда $b = 7a$. Несложный подсчёт показывает, что Галя собрала $99a$ грибов, а Федя $90a$ грибов, вместе они собрали $189a$ грибов. Из условия $189a < 250$ находим $a = 1$.

4. 111°.

Пусть M — середина отрезка BD. Тогда $ABCD$ — параллелограмм. В треугольнике ABD имеем равенство сторон AB и BD. Поэтому

$$\angle BDA = \frac{1}{2}(180^\circ - 42^\circ) = 69^\circ.$$

Углы ADB и CBD равны как накрест лежащие. Значит,

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 42^\circ + 69^\circ = 111^\circ.$$

5. $2^{2016}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим матрицу поворота

$$U_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $U_\alpha \cdot U_\beta = U_{\alpha+\beta}$. Отсюда $U_\alpha^n = U_{n\alpha}$. Осталось заметить, что $A = 2U_{\pi/6}$.

Замечание. К ответу также легко прийти непосредственными вычислениями:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^6 = \begin{pmatrix} -2^6 & 0 \\ 0 & -2^6 \end{pmatrix}; \dots$$

6. $\sqrt[3]{2}$; $\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Функция $y = 2^t$ возрастающая, поэтому разность $2^a - 2^b$ того же знака, что и разность $a - b$. Отсюда оба произведения в левой части уравнения одного знака, и равенство нулю их суммы возможно, лишь когда один из множителей равен нулю.

7. 2.

Известно, что при $\alpha \to 0$ справедливо соотношение $(1+\alpha)^p = 1 + \alpha p + o(\alpha)$. Поэтому при $x \to \infty$

$$\sqrt[7]{x^7 + x^6} - \sqrt[7]{x^7 - x^6} = x\left(\sqrt[7]{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt[7]{1 - \frac{1}{x}}\right) =$$

$$= x(1 + \frac{1}{7x} + o(1/x) - 1 + \frac{1}{7x} + o(1/x)) = \frac{2}{7} + o(1).$$

8. Нет.

Пусть $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Прибавив к обеим частям матричного равенства матрицу E^2, получим $(X+E)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Определитель матрицы справа равен -2, в то время как определитель матрицы слева неотрицателен (поскольку определитель квадрата матрицы равен квадрату определителя этой матрицы). Поэтому равенство невозможно.

9. Не обманывает.

Вот заветная формула:

$$S = ab + c(a+b) + d(a+b+c) + e(a+b+c+d) + f(a+b+c+d+e).$$

Здесь при вычислении суммы в очередной скобке используется всего одно сложение, поскольку скобка отличается от предыдущей одним дополнительным слагаемым.

Замечание. Есть и другие способы решения.

10. 1008.

Первое решение. Пусть $2n = 2016$. Требуется максимизировать значение выражения

$$A = \sum_{k=1}^{2n} x_k - \sum_{k=1}^{2n} x_k x_{k+1},$$

где $x_{2n+1} = x_1$ и $\forall k\ 0 \leqslant x_k \leqslant 1$. Заметим, что

$$A = n - \sum_{k=1}^{n} (1 - x_{2k-1})(1 - x_{2k}) - \sum_{k=1}^{n} x_{2k} x_{2k+1}.$$

Обе вычитаемые из n суммы неотрицательны. Поэтому $A \leqslant n$. Равенство достигается, когда по кругу, строго чередуясь, стоят нули и единицы.

Второе решение. A как функция от $x_1, \ldots, x_n$ линейна по каждой переменной. Значит, если фиксировать значения всех переменных, кроме одной, скажем, x_i, минимальное значение A достигается при $x_i = 0$ или $x_i = 1$. Поэтому можно считать, все переменные равны 0 или 1. Рассмотрим группу из k подряд стоящих единиц, ограниченную нулями. Её вклад в A равен $k - (k-1) = 1$. Поэтому значение A равно количеству таких групп (исключая случай, когда нулей нет вовсе). Ясно, что наибольшее число групп равно $[n/2]$, где n — количество чисел.

11. 78.

Рассмотрим отображение $\xi = \frac{y}{x^2}$, $\eta = xy$. Образом D при таком отображении является прямоугольник $D' = [1;2] \times [3;9]$. Несложно подсчитать, что $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = -\frac{3y}{x^2} = -3\xi$. Отсюда $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = -\frac{1}{3\xi}$. Заметим также, что $y^3 = \xi\eta^2$. Поэтому

$$\iint\limits_D y^3\,dx\,dy = \int\limits_{D'} \xi\eta^2 |J|\,d\xi\,d\eta = \frac{1}{3}\int\limits_1^2 1 d\xi \int\limits_3^9 \eta^2 d\eta = 78.$$

12. Рассмотрим граф, в котором n вершин (каждая соответствует какому-то виду животных), а каждое ребро соответствует лодке (соединяет соответствующие виды тварей). Этот граф — регулярный степени 4. Любая компонента связности этого графа является эйлеровым графом (так как степени всех вершин чётны). Заметим, что при этом длина эйлерова цикла — чётное число (поскольку число рёбер в два раза меньше суммы степеней вершин, а последняя равна $4k$, где k — число вершин в компоненте связности).

Будем последовательно красить рёбра эйлерова цикла (т. е. лодки) в красный и синий цвет. Так поступим с каждой компонентой связности. Пусть теперь красные лодки будут приставать к одному ковчегу, а синие — к другому. В рассматриваемом графе каждая вершина инцидентна двум красным и двум синим рёбрам (по способу раскраски рёбер). Поэтому на каждом ковчеге и окажется каждой твари по паре.

Литература

1. Домошницкий, А. *Интернет-олимпиада по математике для студентов и некие размышления о месте математических соревнований в общем контексте математического просвещения* / А. Домошницкий // Математическое образование. — 2011. — № 3–4 (59–60). — С. 2–5.

2. Игнатов, Ю.А. *Задачи студенческих математических боёв* / Ю.А. Игнатов, В.А. Шулюпов, А.Ю. Эвнин. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2005. — 43 с.

3. Заляпин, В.И. *Заочные студенческие математические олимпиады* / В.И. Заляпин, А.Ю. Эвнин // Математика в высшем образовании. — 2014. — № 12. — С. 51–60.

4. Эвнин, А.Ю. *Южно-Уральская региональная математическая олимпиада* / А.Ю. Эвнин // Математическое образование. — 2009. — № 1(49). — С. 2–12.

5. Эвнин, А.Ю. *Южно-Уральская олимпиада по математике 2004–2010* / А.Ю. Эвнин, С.М. Воронин, В.И. Заляпин. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2010. — 34 с.

6. Эвнин, А.Ю. *Математический конкурс в ЮУрГУ* / А.Ю. Эвнин. — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. — 86 с.

7. Эвнин, А.Ю. *Олимпиада в форме компьютерного теста* / А.Ю. Эвнин // Математика в высшем образовании. — 2013. — № 11. — С. 97–102.

8. Эвнин, А.Ю. *Олимпиада в форме командной игры* / А.Ю. Эвнин // Математика в высшем образовании. — 2015. — № 13. — С. 81–94.

9. Эвнин, А.Ю. *Сто пятьдесят красивых задач для будущих математиков* / А.Ю. Эвнин. — М.: КРАСАНД, 2016. — 224 с.

10. Эвнин, А.Ю. *Задачи математического конкурса в ЮУрГУ* / А.Ю. Эвнин // Математическое образование. — 2015. — № 4(76). — С. 26–52.

Эвнин Александр Юрьевич,
доцент кафедры прикладной математики и программирования
Южно-Уральского государственного университета,
кандидат педагогических наук.

E-mail: graph98@yandex.ru

О точках и векторах в геометрии

В. И. Игошин

В статье рассказывается, как математика от векторного метода решения конкретных геометрических задач, абстрагируясь от конкретных объектов, приходит к понятию векторного пространства и аксиоматической теории таких пространств, а также — от координатного метода решения конкретных геометрических задач — к понятию аффинного (точечного) пространства и аксиоматической теории таких пространств. Выводятся из аксиом начальные теоремы теории векторных и аффинных пространств. Подробно объяснена суть аксиоматического метода.

История развития математики красноречиво говорит о том, что многие её разделы начинались с решения тех или иных задач, которые возникали в ходе практической деятельности людей. Так, потребности в счёте привели к созданию арифметики, потребности в землемерии — к геометрии, в рассуждениях — к логике. Возникающие теории далее продолжали развиваться уже по своим внутренним законам математической науки, порой весьма далеко удаляясь от породившей их практики. Но поразительным является тот факт, что тот или иной раздел математики, развившись до глубокой, пространной и весьма абстрактной теории, вдруг находит новые практические приложения, помогая решить новые задачи, возникающие в практике.

Но это, так сказать, о крупных разделах математики, превратившихся в самостоятельные её дисциплины, например, такие, как алгебра, геометрия, математический анализ, теория вероятностей и т. д. Тем не менее, аналогичным образом происходит развитие и внутри этих глобальных разделов математики. Для решения возникающих там конкретных математических задач математика создаёт свои собственные внутренние инструменты и методы. Конкретные задачи решаются. Но математика на этом не останавливается. Разработанные инструменты и методы как бы отрываются от уже решённых конкретных задач и становятся источниками некоей общей теории, которая впоследствии находит применение для решения новых конкретных математических задач.

В этой статье рассказывается о двух таких эпизодах математической истории, происшедших в одном из разделов математики — элементарной геометрии. А именно, рассказывается, как математика от векторного метода решения конкретных геометрических задач пришла к понятию векторного пространства и теории таких пространств, а также — от координатного метода решения конкретных геометрических задач — к понятию аффинного (точечного) пространства и теории таких пространств.

Эта статья находится в рамках той логико-педагогической концепции в обучении математике, которая обосновывалась автором в монографиях [1], [2] и, в частности, направлена на методическое раскрытие одного из авторских принципов логики в обучении математике — принципа обучения строению математических теорий. Она будет полезна действующим учителям математики, а также студентам современных педагогических вузов, готовящимся стать бакалаврами и магистрами педагогического образования в области математики.

Геометрические фигуры на плоскости и в пространстве

Геометрия — наука о геометрических фигурах. Существует два подхода к определению понятия геометрической фигуры. Согласно первому, геометрическая фигура представляет собой множество, состоящее из точек. Согласно второму, геометрическая фигура рассматривается как нечто целое, как целостный объект. Мы не будем здесь обсуждать достоинства и недостатки каждого из этих подходов. Отметим только, что школьные учебники геометрии последнего времени явно или неявно по существу придерживаются первого подхода. И в этой работе наш подход к пониманию геометрической фигуры будет именно таким. Итак, геометрическая фигура есть множество точек, состоит из точек, а задача геометрии как раздела математики — изучать различными методами такие геометрические фигуры и их свойства.

На протяжении веков, по мере развития различных разделов математики, геометрия выработала множество методов, направленных на изучение геометрических фигур на плоскости и в пространстве. Мы рассмотрим здесь два таких метода — векторный и координатный, и покажем, почему их следует разделять. Будет также рассмотрен и синтез этих методов — векторно-координатный метод.

Координатный метод был создан в XVII веке. Его основоположником является французский математик Р. Декарт (1596 – 1650). Векторный метод сформировался значительно позже — в 40-ых годах XIX века в работах немецкого геометра Г. Грассмана (1809 – 1877) и ирландского математика У. Гамильтона (1805 – 1865). Тем не менее, в данной статье целесообразнее начать с рассмотрения векторного метода.

Векторный метод решения геометрических задач (аффинные задачи)

Векторный метод — один из мощнейших методов геометрии, методов, предназначенных для изучения геометрических фигур на плоскости и в пространстве. Векторный метод позволяет смоделировать (интерпретировать) геометрическую ситуацию с помощью аппарата векторной алгебры, т. е. в геометрическую картину данной задачи подходящим образом ввести векторы и условие задачи записать в векторной форме. Затем средствами векторной алгебры исходное условие задачи, записанное в векторной форме, преобразуется к такому виду, который даёт решение задачи в векторной форме. Наконец, полученным векторным соотношениям даётся обратная интерпретация — в геометрических терминах исходной задачи. Таким образом, решение геометрической задачи векторным методом — это решение геометрической задачи с помощью построения векторной модели, т. е. с помощью векторного моделирования.

Геометрические задачи, для решения которых может быть применён векторный метод, подразделяются на два класса — аффинные задачи и метрические задачи. Аффинные задачи — это задачи, в которых речь идёт о принадлежности точек прямым, о коллинеарности точек (принадлежности нескольких точек одной прямой), о параллельности прямых, о пропорциональности отрезков. Метрические задачи — это задачи, в которых требуется найти длины отрезков и величины углов.

Предполагается, что читатель знаком с понятием вектора (как направленного отрезка), линейными операциями с векторами (сложение векторов и умножение вектора на число (скаляр)) и свойствами этих операций (ассоциативность и коммутативность сложения векторов, нуль-вектор, дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения скаляров и относительно сложения векторов). Полезными также являются понятия линейной зависимости и линейной независимости системы векторов, базиса совокупности векторов и разложения вектора по базису. Именно эти методы векторной алгебры используются при решении аффинных задач на плоскости и в пространстве.

Понятие вектора и элементы векторной алгебры вошли в школьный курс геометрии в 60-е годы XX века в ходе великой реформы школьного математического образования, проведённой в то время в нашей стране под руководством академика А.Н. Колмогорова. За более чем полвека, прошедшие с тех пор, написано огромное количество методических книг и статей (в том числе и в журнале «Математика в школе»), посвящённых этому разделу геометрии, в которых, в частности, показано, как векторный метод применяется к решению геометрических задач. Так, например, познакомиться с применением векторного метода к решению аффинных геометрических задач на плоскости можно по публикациям: [13: задачи 1–6], [15: задачи 1–6], [16: задачи 1, 3, 4], [17], [18], а к решению аффинных геометрических задач в пространстве — по публикациям [13: задачи 14, 15], [19: задача 5 (II способ)], [14: задачи 3, 4, 5], [16: задача 2].

Примеры аффинных геометрических задач на плоскости и в пространстве, решаемых векторным методом, можно найти также в книге [4], раздел 2.1, стр. 90 – 100.

Обратите внимание на то, что, во-первых, каждая из рассмотренных задач носит чисто геометрический характер, т. е. в их условиях вообще не участвуют векторы. Тем не менее, умелое введение векторов и использование их свойств приводит к решению геометрической задачи. Во-вторых, векторная техника используется, так сказать, в чистом виде, без использования координат векторов.

Аксиоматический метод и аксиоматические теории

Попробуем более глубоко осмыслить решения указанных задач. Перед нами стояли некие конкретные геометрические задачи на плоскости и в пространстве. Для их решения был изобретён некий конкретный математический инструмент, основанный на введённом понятии вектора как направленного отрезка. Чтобы этот инструмент начал действовать, для него был разработан необходимый аппарат — аппарат векторной алгебры: над векторами введены два действия — сложение и умножение на скаляр, выявлены и доказаны свойства этих действий — ассоциативность, коммутативность и т. д. С помощью этого аппарата геометрические задачи были решены.

Конечно, аппарат векторной алгебры представляет собой некую математическую теорию. Но теория эта — конкретная, применимая только в данном конкретном случае, т. е. только здесь и сейчас. Тем не менее, она послужила источником для математической теории более общего вида. Теории самого общего вида в математике строятся как так называемые аксиоматические теории.

Аксиоматический метод — фундаментальнейший метод организации и умножения научного знания в самых разных его областях — сформировался на протяжении более чем двухтысячелетней истории развития науки. У истоков идеи аксиоматического метода стоят титаны древнегреческой мысли Платон, Аристотель, Евклид. Согласно нему, построение той или иной научной теории начинается с выбора ряда *первоначальных понятий*, которые не определяются и используются без объяснения их смысла. Далее, формулируются некоторые утверждения о первоначальных понятиях. Они объявляются истинными, принимаются без доказательства и называются *аксиомами*. Совокупность всех аксиом обозначим Σ. После того, как система аксиом выбрана, приступают к развитию самой научной теории. Для этого, исходя из выбранной системы аксиом, с помощью логических рассуждений выводят (доказывают) новые утверждения о первоначальных понятиях, а также о понятиях, которые определяются. Получаемые утверждения называются *теоремами*. Совокупность всех теорем, доказываемых, исходя из выбранной системы аксиом Σ, называется *аксиоматической теорией*, построенной на основе системы аксиом Σ. Такую совокупность теорем обозначают $Th(\Sigma)$.

Изложенный метод построения научной теории носит название *аксиоматического* или *дедуктивного метода*. Выбор системы аксиом есть дело условия: одно и то же утверждение теории может быть аксиомой, если оно так выбрано, а может выступать в качестве теоремы, если выбор аксиом осуществлён по-иному. Итак, если в обыденной жизни за термином «аксиома» утвердился его изначальный смысл (в переводе с греческого «аксиома» означает «достойный признания»), именно смысл самоочевидной, безусловной истины, то в математике, при построении аксиоматических теорий, аксиомы условны. Они «достойны признания» не сами по себе, не ввиду их самоочевидной истинности, а потому что на их основе строится та или иная аксиоматическая теория. При новом выборе системы аксиом прежние аксиомы становятся теоремами. Коротко говоря, аксиомы — это то, из чего выводятся теоремы, а теоремы — то, что выводится из аксиом.

Аксиоматическая теория векторных (линейных) пространств

Как же теперь от конкретной математической теории, называемой векторной алгеброй и созданной для решения конкретных практических задач элементарной геометрии, перейти к абстрактной, аксиоматической теории? Согласно общей концепции аксиоматической теории, описанной в предыдущем пункте, начать нужно с выбора первоначальных понятий. Здесь таким первоначальным неопределяемым понятием, естественно, будет понятие вектора. Но это уже не направленный отрезок, природу которого мы прекрасно представляем, а некий объект произвольной природы. Но как же всё-таки охарактеризовать этот объект? При аксиоматическом подходе этот объект характеризуется не сам по себе, а как член некоторой совокупности объектов, обладающих неким набором общих свойств. Эти свойства и выражаются в аксиомах.

Применительно к нашей ситуации: за какие свойства конкретных направленных отрезков мы можем "ухватиться", чтобы абстрагироваться (отвлечься) от природы направленных отрезков, но в то же время достаточно адекватно представить их. Мы видим, что над направленными отрезками определены два конкретных действия: сложение (по правилу треугольника или параллелограмма) и умножения на скаляр (число). Используя конкретную природу направленных отрезков и наглядные определения этих действий (операций), мы смогли доказать ряд свойств этих операций — ассоциативность, коммутативность и т. д. Вот здесь и наступает момент отрыва от конкретности (реальности) и переход в абстракцию.

Забыв (отринув) природу объектов, над которыми выполнялись действия, мы оставляем лишь свойства этих действий. И говорим: если найдутся какие-либо объекты, над которыми можно определить (задать) два действия указанного типа, которые будут обладать всеми теми свойствами, которые мы обнаружили у направленных отрезков с операциями сложения отрезков и умножения на скаляр (число), то такая система объектов будет подобна системе направленных отрезков, и подобие это, конечно, будет задаваться теми свойствами операций, которые мы выделим в качестве аксиом.

Теперь мы приступаем к изучению этих аксиом и стараемся из них с помощью логических рассуждений вывести новые свойства. Можно сказать, что это будут уже не свойства направленных отрезков и действий с ними, а свойства свойств, и этими свойствами будут обладать все объекты любой природы, которые подчинены исходным свойствам — аксиомам. Таким образом, мы приходим к рассуждениям более высокого уровня абстракции — к доказательствам теорем аксиоматической теории. Здесь в рассуждениях мы оперируем уже не конкретными (пусть даже и математическими) объектами, а оперируем языком, на котором выражены свойства наших первообъектов (направленных отрезков) и которые возведены в новый ранг — в ранг аксиом аксиоматической теории.

Язык аксиоматической теории имеет характер логико-математического языка. В нём, во-первых, фигурируют понятия математической теории. В данном случае это — действия (операции): сложение объектов, дающее объект той же природы, и умножение объектов на действительные числа, дающее также объекты той же природы. И во-вторых, в логико-математическом языке участвуют понятия логики, которые связывают математические объекты нитью рассуждений.

В нашем случае совокупность объектов, относительно которой мы хотим построить аксиоматическую теорию, принято называть векторным (или линейным) пространством. Дадим наконец его точное определение.

ПОНЯТИЕ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА. *Векторным* (или *линейным*) пространством над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ (или *вещественным векторным пространством*) называется множество V объектов произвольной природы (обозначаемых $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\ldots$), для которых определены операция сложения: $+\colon V \times V \to V$, сопоставляющая любым двум элементам $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из V третий элемент из V, обозначаемый $\bar{x}+\bar{y}$, и операция умножения вещественного числа на вектор: $\cdot\colon \mathbb{R} \times V \to V$, сопоставляющая любому числу $\alpha \in \mathbb{R}$ и любому элементу $\bar{x} \in V$ элемент из V, обозначаемый $\alpha\,\bar{x}$; при этом, должны выполняться следующие восемь свойств (называемые аксиомами векторного пространства):

(I_1)	$(\forall\bar{x})\ (\forall\bar{y})\ (\forall\bar{z})\ [(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z}=\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})]$	(ассоциативность сложения);
(I_2)	$(\forall\bar{x})\ (\forall\bar{y})\ (\bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x})$	(коммутативность сложения);
(I_3)	$(\exists\bar{0})\ (\forall\bar{x})\ (\bar{x}+\bar{0}=\bar{x})$	(существование нулевого элемента);
(I_4)	$(\forall\bar{x})\ (\exists\bar{x}')\ (\bar{x}+\bar{x}'=\bar{0})$	(существование для каждого элемента противоположного элемента);
(II_1)	$(\forall\alpha)\ (\forall\beta)\ (\forall\bar{x})\ [(\alpha+\beta)\,\bar{x}=\alpha\bar{x}+\beta\bar{x}]$	(дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения скаляров);
(II_2)	$(\forall\alpha)\ (\forall\bar{x})\ (\forall\bar{y})\ [\alpha\,(\bar{x}+\bar{y})=\alpha\bar{x}+\alpha\bar{y}]$	(дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов);
(II_3)	$(\forall\alpha)\ (\forall\beta)\ (\forall\bar{x})\ [\alpha\,(\beta\,\bar{x})=(\alpha\beta)\,\bar{x}]$	(ассоциативность умножения на скаляр);
(II_4)	$(\forall\bar{x})\ (1\cdot\bar{x}=\bar{x})\,.$	

Элементы из V называются *векторами*.

Аксиомы I_1–I_4 означают, что векторы относительно операции сложения образуют абелеву (коммутативную) группу. Аксиомы II_1–II_4 выражают свойства умножения вектора на число (скаляр): в этих аксиомах $1,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Таким образом, свойства, которыми обладали операции сложения и умножения на число над геометрическими векторами (т. е. конкретными объектами — направленными отрезками), теперь нами аксиоматизируются, т. е. принимаются за определяющие свойства абстрактного векторного пространства. Конкретные совокупности V_2 всех векторов плоскости и V_3 всех векторов пространства, становятся конкретными примерами (или, как говорят, *моделями*) векторных пространств, т. е. примерами таких совокупностей, которые удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства. Еще одним важным примером (моделью) векторного пространства является арифметическое векторное пространство $\mathbb{R}^n$.

АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО $\mathbb{R}^n$. Его элементами (векторами) являются всевозможные упорядоченные n-ки (наборы длины n, или матрицы-строки длины n), составленные из вещественных чисел:

$$\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n):\ \alpha_1\in\mathbb{R},\,\alpha_2\in\mathbb{R},\,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}\}\,.$$

Операции сложения n-ок и умножения n-ки на число определяются следующим образом:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\ldots,\alpha_n+\beta_n)\,,$$

$$\lambda\,(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\ldots,\lambda\alpha_n)\,.$$

Нетрудно проверить, что (с учетом соответствующих свойств действительных чисел) все восемь аксиом векторного пространства будут выполняться. В частности, нулевым элементом (аксиома I_3), будет n-ка $(0,\,0,\,\ldots,\,0)$, а противоположным элементом (аксиома I_4) для n-ки $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ будет n-ка $(-\alpha_1,-\alpha_2,\ldots,-\alpha_n)$.

ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ. С опорой только на введенные аксиомы I_1–I_4; II_1–II_4 доказываются следующие теоремы, устанавливающие новые свойства векторных пространств.

Теорема 1. *Существует единственный нулевой вектор, т. е. (см. аксиому I_3) такой вектор $\bar{0}$, что $\bar{x}+\bar{0}=\bar{x}$ для любого вектора $\bar{x}$.*

Доказательство. Если $\bar{0}'$ — еще один такой вектор, то, используя аксиомы I_3 и I_2, имеем: $\bar{0}'=\bar{0}'+\bar{0}=\bar{0}+\bar{0}'=\bar{0}$. □

Теорема 2. *Для каждого вектора $\bar{x}$ существует единственный противоположный вектор, т. е. (см. аксиому I_4) такой вектор $\bar{x}'$, что $\bar{x}+\bar{x}'=\bar{0}$.*

Доказательство. Допустим, что имеется еще один вектор $\bar{x}''$ такой, что $\bar{x}+\bar{x}''=\bar{0}$. Тогда, используя аксиомы I, получаем: $\bar{x}'=\bar{x}'+\bar{0}=\bar{x}'+(\bar{x}+\bar{x}'')=(\bar{x}'+\bar{x})+\bar{x}''=(\bar{x}+\bar{x}')+\bar{x}''=\bar{0}+\bar{x}''=\bar{x}''+\bar{0}=\bar{x}''$, т. е. $\bar{x}'=\bar{x}''$. Противоположный для $\bar{x}$ вектор обозначается $-\bar{x}$. □

Теорема 3. *Для любых двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ существует единственный вектор $\bar{x}$ такой, что $\bar{a}+\bar{x}=\bar{b}$.*

Доказательство. Существование. Покажем, что вектор $\bar{b}+(-\bar{a})$ удовлетворяет теореме: $\bar{a}+\big(\bar{b}+(-\bar{a})\big)=\bar{a}+\big((-\bar{a})+\bar{b}\big)=(\bar{a}+(-\bar{a}))+\bar{b}=\bar{0}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{0}=\bar{b}$. Заметим, что в процессе преобразований были использованы все аксиомы I_1–I_4.

Единственность. Предположим, что существуют два вектора $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, удовлетворяющие уравнению (1), т. е. $\bar{a}+\bar{x}_1=\bar{a}+\bar{x}_2$. Прибавив к обеим частям этого равенства по $-\bar{a}$, получим $\bar{x}_1=\bar{x}_2$. Теорема доказана.□

Вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий соотношению $\bar{a}+\bar{x}=\bar{b}$, называется *разностью* векторов $\bar{b}$ и $\bar{a}$ и обозначается $\bar{b}-\bar{a}$. Таким образом, $\bar{b}-\bar{a}=\bar{b}+(-\bar{a})$. □

Теорема 4.

1) $(\forall\bar{x})\ [-(-\bar{x})=\bar{x}]$;
2) $-\bar{0}=\bar{0}$;
3) $(\forall\bar{x})\ (\forall\bar{y})\ [-(\bar{x}+\bar{y})=(-\bar{x})+(-\bar{y})]$;
4) $(\forall\bar{x})\,(\forall\alpha\in\mathbb{R})\ [(\alpha\bar{x}=\bar{0}\wedge\alpha\neq 0)\to\bar{x}=\bar{0}]$.

Доказательство. По аксиоме I_4, $\bar{x}+(-\bar{x})=\bar{0}$. Взяв здесь в качестве вектора $\bar{x}$ вектор $-\bar{x}$, получим $(-\bar{x})+(-(-\bar{x}))=\bar{0}$. Первое из этих соотношений (на основании аксиомы I_2) можно переписать: $(-\bar{x})+\bar{x}=\bar{0}$. Тогда два последних соотношения означают, что каждый из векторов $-(-\bar{x})$ и $\bar{x}$ является решением уравнения $(-\bar{x})+\bar{y}=\bar{0}$. По теореме 3 такое решение единственно и, значит $-(-\bar{x})=\bar{x}$.

Остальные утверждения докажите самостоятельно. □

Теорема 5.

1) $(\forall\bar{x})\,(0\cdot\bar{x}=\bar{0})$;
2) $(\forall\alpha)\ (\alpha\bar{0}=\bar{0})$;
3) $(\forall\alpha)\,(\forall\bar{x})\,[\alpha\,(-\bar{x})=-\alpha\,\bar{x}]$;
4) $(\forall\bar{x})\,[-\bar{x}=(-1)\,\bar{x}]$.

Доказательство. 1) В силу аксиом II_4 и II_1 имеем: $\bar{x}=1\cdot\bar{x}=(1+0)\,\bar{x}=1\cdot\bar{x}+0\cdot\bar{x}=\bar{x}+0\cdot\bar{x}$, т. е. $\bar{x}=\bar{x}+0\cdot\bar{x}$. Это означает, что $0\bar{x}$ — нулевой элемент. В силу его единственности (теорема 1), $0\cdot\bar{x}=\bar{0}$.

2) Если $\alpha=0$, то утверждение сводится к утверждению 1. Пусть $\alpha\neq 0$. Тогда: $\bar{x}+\alpha\bar{0}=(\alpha\cdot(1/\alpha))\,\bar{x}+\alpha\bar{0}=\alpha\,((1/\alpha)\cdot\bar{x})+\alpha\bar{0}=\alpha\,((1/\alpha)\cdot\bar{x}+\bar{0})==\alpha\,((1/\alpha)\cdot\bar{x})=(\alpha\cdot(1/\alpha))\,\bar{x}=1\cdot\bar{x}=\bar{x}$. Это и означает, что $\alpha\cdot\bar{0}=\bar{0}$.

3), 4) Докажите самостоятельно. □

РАЗМЕРНОСТЬ ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА. В аксиоматически определённых векторных пространствах можно говорить о линейно независимых системах векторов точно также, как мы говорим о них для систем геометрических векторов; при этом дословно могут быть доказаны и известные свойства этих понятий, так как их доказательства опираются на те свойства операций сложения и умножения на число, которые аксиоматизированы (постулированы) в аксиомах векторного пространства.

Но теперь, при аксиоматическом подходе, мы свободны от геометрической (наглядной, интуитивной) интерпретации понятия линейной зависимости векторов. Эта свобода позволяет нам осмыслить понятие базиса не только применительно к совокупностям векторов плоскости или пространства (понимаемого интуитивно), но и применительно к абстрактному векторному пространству (понимаемому аксиоматически). Это осмысление помогает нам шагнуть от реального трёхмерного пространства к пространству любого числа измерений и ввести следующее определение.

Векторное пространство V называется n-мерным (или *имеющим размерность* n, запись $\dim V = n$), если оно удовлетворяет следующим двум аксиомам размерности:

$$(III_1) \quad (\exists \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)\ (\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n)\ (\lambda_1 \bar{a}_1 + \cdots + \lambda_n \bar{a}_n = \bar{0} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0)\,;$$

$$(III_2) \quad (\forall \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, \bar{a}_{n+1})\ (\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})\,;$$
$$[(\lambda_1 \neq 0 \vee \cdots \vee \lambda_n \neq 0 \vee \lambda_{n+1} \neq 0) \wedge \lambda_1 \bar{a}_1 + \cdots + \lambda_n \bar{a}_n + \lambda_{n+1} \bar{a}_{n+1} = \bar{0}]\ .$$

Аксиома III_1 может быть прочитана так: существует система n линейно независимых векторов. Аксиома III_2: любые $n+1$ векторов линейно зависимы. Аксиомы III_1 и III_2 называются аксиомами размерности и они выражают тот факт, что размерность совокупности векторов равна n.

Другими словами, n-мерность векторного пространства означает, что в нём существует базис, состоящий из n векторов. (Бесконечномерность пространства означает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ в нём существует линейно независимая система из n векторов).

Точно так же, как и для направленных отрезков, определяются координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\ldots$, $\overline{e_n}$: это — коэффициенты в разложении этого вектора в линейную комбинацию векторов базиса.

$$\bar{a}(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) \overset{def}{\Leftrightarrow} \bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{e}_n.$$

Может быть доказана единственность координат вектора в данном базисе (единственность разложения вектора по базису) и теорема о координатах линейной комбинации векторов.

Вспоминая интуитивные представления о геометрических векторах, можно и для абстрактных векторов определить (теперь уже определить!): *коллинеарность* двух векторов $\bar{a} \| \bar{b}$ как их линейную зависимость (или как существование такого числа $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\bar{b} = \lambda \bar{a}$); *компланарность* трёх векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ как их линейную зависимость.

Векторный метод решения геометрических задач (метрические задачи)

Но вернёмся снова к конкретным векторам, рассматриваемым как направленные отрезки, и продолжим их применение к решению конкретных геометрических задач, расширив круг таких задач. Именно, мы хотим решать так называемые метрические задачи, т. е. задачи, в которых речь пойдёт о перпендикулярности (двух прямых, двух плоскостей, прямых и плоскостей), о величинах углов (между двумя прямыми, двумя плоскостями, прямыми и плоскостями), о расстояниях (между двумя точками, от точек до прямых, от точек до плоскостей, между двумя прямыми). Для этого над векторами вводится ещё одна операция — скалярное умножение двух векторов по следующему правилу:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\,, \vec{b}}).$$

В результате получается действительное число, вычисляемое по указанной формуле. Эта операция обладает свойствами коммутативности, дистрибутивности относительно сложения векторов, ассоциативности относительно умножения вектора на скаляр. С помощью неё происходит вычисление модуля вектора и угла между векторами по следующим формулам:

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2},\ \cos(\widehat{\vec{a}\,, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\sqrt{\vec{a}^2} \cdot \sqrt{\vec{b}^2}}.$$

Из второй формулы, в частности, вытекает следующее важное свойство, часто используемое при решении геометрических задач:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Познакомиться с применением векторного метода к решению метрических геометрических задач на плоскости можно по публикациям: [13: задачи 7–10, 17], [14: задачи 6, 15; теорема 4], [15: задачи

7–12], [20: задачи 1–3], [16: задачи 5, 6, 7, 10], [21: задача 3], [22], [23], [24], а к решению метрических геометрических задач в пространстве — по публикациям [13: задача 16], [19: задача 4 (II способ)], [14: задачи 7 - 14], [16: задача 8], [21: задачи 1, 2].

Примеры метрических геометрических задач на плоскости и в пространстве, решаемых векторным методом, можно найти также в книге [4], раздел 2.2, стр. 100–119.

Снова обратите внимание на то, что каждая из этих задач носит чисто геометрический характер, т. е. в их условиях не участвуют векторы, и векторная техника также используется в чистом виде, без использования координат векторов, но здесь уже существенно работает новая операция над векторами - скалярное произведение.

Аксиоматическая теория евклидовых векторных (линейных) пространств

Продолжим развитие аксиоматического подхода к геометрической теории векторов, начатого выше. Посмотрим, как аксиоматизируется понятие скалярного произведения, и увидим, к каким простейшим следствиям приводит эта аксиоматизация.

ПОНЯТИЕ ЕВКЛИДОВА ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА. Подобно тому, как при определении векторного пространства были приняты за аксиомы некоторые свойства операций сложения и умножения на скаляр геометрических векторов, так при определении евклидова векторного пространства, за аксиомы принимаются некоторые свойства операции скалярного умножения векторов.

Векторное пространство V над полем вещественных чисел R называется *евклидовым*, если в нём определена ещё операция скалярного умножения векторов, т. е. такое отображение $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$, сопоставляющее любым двум векторам $\bar{x}$ и $\bar{y}$ действительное число, обозначаемое $\bar{x}\cdot\bar{y}$, для которого выполняются следующие свойства (называемые аксиомами скалярного произведения):

(IV_1) $(\forall\bar{x})$ $(\forall\bar{y})$ $(\bar{x}\cdot\bar{y}=\bar{y}\cdot\bar{x})$ (коммутативность);

(IV_2) $(\forall\bar{x})$ $(\forall\bar{y})$ $(\forall\bar{z})$ $[(\bar{x}+\bar{y})\cdot\bar{z}=\bar{x}\cdot\bar{z}+\bar{y}\cdot\bar{z}]$

(дистрибутивность скалярного умножения относительно сложения векторов);

(IV_3) $(\forall\alpha)$ $(\forall\bar{x})$ $(\forall\bar{y})$ $[(\alpha\bar{x})\cdot\bar{y}=\alpha\,(\bar{x}\cdot\bar{y})]\,;$

(IV_4) $(\forall\bar{x})$ $(\bar{x}\neq\bar{0}\to\bar{x}\cdot\bar{x}>0)\,.$

Если исходное векторное пространство было n-мерным, то и евклидово векторное пространство называется n-мерным.

ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ЕВКЛИДОВЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ. В следующей теореме устанавливается ряд свойств евклидовых векторных пространств, непосредственно выводимых из аксиом. Фактически это — свойства скалярного произведения.

Теорема 6. *Для любых векторов и любых действительных чисел справедливы следующие утверждения*:

1) $\bar{x}\cdot(\beta\bar{y})=\beta\,(\bar{x}\cdot\bar{y})\,;$
2) $\bar{x}\cdot(\bar{y}+\bar{z})=\bar{x}\cdot\bar{y}+\bar{x}\cdot\bar{z};$
3) $(\alpha_1\bar{x}_1+\cdots+\alpha_n\bar{x}_n)\cdot\bar{y}=\alpha_1\,(\bar{x}_1\cdot\bar{y})+\cdots+\alpha_n\,(\bar{x}_n\cdot\bar{y})\,;$
4) $\bar{x}\cdot\bar{0}=\bar{0}\cdot\bar{x}=0;$
5) $\bar{0}\cdot\bar{0}=0.$

Доказательство. 1) $\bar{x}\cdot(\beta\bar{y})=(\beta\bar{y})\cdot\bar{x}=\beta\,(\bar{y}\cdot\bar{x})=\beta\,(\bar{x}\cdot\bar{y})$. При вычислении была дважды использована аксиома IV_1 и один раз — аксиома IV_3.

2) Доказывается аналогично предыдущему свойству с использованием аксиом IV_1 и IV_2.

3) Это свойство обобщает аксиому IV_2 на случай n слагаемых (доказывается методом полной математической индукции); коэффициенты выносятся за знак скалярного произведения на основании аксиомы IV_3.

4) 1-й способ. Используя аксиомы IV_1, I_3, IV_2, вычисляем: $\bar{x}\cdot\bar{0}=\bar{0}\cdot\bar{x}=(\bar{0}+\bar{0})\cdot\bar{x}=\bar{0}\cdot\bar{x}+\bar{0}\cdot\bar{x}=\bar{x}\cdot\bar{0}+\bar{x}\cdot\bar{0}$. Так как $\bar{x}\cdot\bar{0}$ — действительное число, то отсюда заключаем, что $\bar{x}\cdot\bar{0}=0$.

2-й способ. Представим нулевой вектор следующим образом (см. теорема 5(1)): $\bar{0}=\bar{0}\cdot\bar{y}$. Тогда $\bar{x}\cdot\bar{0}=\bar{x}\cdot(0\cdot\bar{y})=0\,(\bar{x}\cdot\bar{y})=0$. Использовано свойство 1 настоящей теоремы.

5) Очевидно следует из предыдущего свойства. Теорема полностью доказана. □

ПРИМЕРЫ ЕВКЛИДОВЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ.

1) Если в векторном пространстве V_3 геометрических векторов (направленных отрезков) определить скалярное произведение следующим образом: $\vec{x}\cdot\vec{y}\overset{def}{=}|\,\vec{x}\,|\cdot|\,\vec{y}\,|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{x}\,,\vec{y}}\right)$, то, как известно, аксиомы IV_1–IV_4 будут выполнены. Тем самым пространство V_3 становится 3-мерным евклидовым векторным пространством над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел.

2) Если в арифметическом векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ строк длины n, составленных из вещественных чисел, определить скалярное произведение двух строк $\bar{x}=(\xi_1,\xi_2,\,\ldots,\xi_n)$ и $\bar{y}=(\eta_1,\eta_2,\,\ldots,\eta_n)$ следующим образом $\bar{x}\cdot\bar{y}=\xi_1\cdot\eta_1+\xi_2\cdot\eta_2+\cdots+\xi_n\eta_n$, то можно проверить выполнимость аксиом IV_1–IV_4. В частности, аксиома IV_4 выполняется, так как из определения следует $\bar{x}\cdot\bar{x}=\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2>0$ при $\bar{x}\neq\bar{0}$. Таким образом, $\mathbb{R}^n$ превращается в евклидово пространство, называемое n-мерным арифметическим евклидовым пространством.

ДЛИНА (МОДУЛЬ) ВЕКТОРА В ЕВКЛИДОВОМ ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. Аксиоматическое задание скалярного произведения позволяет определить в евклидовом векторном пространстве понятие длины вектора. *Длиной* (или *модулем*) вектора $\bar{x}$ евклидова векторного пространства называется неотрицательное значение квадратного корня из скалярного квадрата этого вектора:

$$|\bar{x}|\ \overset{def}{=}\ \sqrt{\bar{x}^2}=\sqrt{\bar{x}\,\cdot\,\bar{x}}.$$

Теорема 7. *Для любых векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и любого вещественного числа $\alpha\in\mathbb{R}$ справедливы утверждения:*

1) $|\bar{x}|=0\Leftrightarrow\bar{x}=\bar{0}$;

2) $|\alpha\cdot\bar{x}|=|\alpha|\cdot|\bar{x}|$;

3) $|\bar{x}\cdot\bar{y}|\le|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|$ (неравенство Коши-Буняковского);

4) $|\bar{x}+\bar{y}|\le|\bar{x}|+|\bar{y}|$ (неравенство треугольника).

Доказательство. 1) Если $|\bar{x}|=0$, т.е. $\bar{x}\cdot\bar{x}=0$, то по аксиоме IV_4, неверно, что $\bar{x}\neq\bar{0}$, т.е. $\bar{x}=0$. Если $\bar{x}=0$, то по свойству 5 из теоремы 6, $\bar{x}\cdot\bar{x}=\bar{0}\cdot\bar{0}=0$, т.е. $|\bar{x}|=0$.

Заметим, что из аксиомы IV_4 и доказанного свойства, в частности, следует, что скалярный квадрат любого вектора неотрицателен: $(\forall x)\left(\bar{x}^2\ge 0\right)$.

2) Используем аксиому IV_3 и свойство 1 из теоремы пункта 2, вычисляем:

$$|\alpha\cdot\bar{x}|=\sqrt{(\alpha\cdot\bar{x})\,(\alpha\cdot\bar{x})}=\sqrt{\alpha^2\,(\bar{x}\cdot\bar{x})}=|\alpha|\cdot\sqrt{\bar{x}^2}=|\alpha|\cdot|\bar{x}|\,.$$

3) Рассмотрим вектор $\xi\,\bar{x}+\bar{y}$, где $\xi\in\mathbb{R}$. Его скалярный квадрат неотрицателен: $(\xi\,\bar{x}+\bar{y})^2\ge 0$, т.е. (используя аксиомы IV_1–IV_3) $\quad\xi^2\bar{x}^2+2\xi\,(\bar{x}\cdot\bar{y})+\bar{y}^2\ge 0$. В левой части полученного неравенства стоит квадратный трёхчлен относительно переменной ξ, у которого коэффициент при $\xi^{\,2}$положителен (так как можем считать, что $\bar{x}\neq\bar{0}$, ибо при $\bar{x}=\bar{0}$ доказываемое неравенство превращается в равенство, вытекающее из свойства 1 настоящей теоремы и свойства 5 из теоремы 6). Полученное неравенство показывает, что этот квадратный трёхчлен принимает неотрицательные значения при любом действительном ξ. Следовательно, дискриминант этого квадратного трёхчлена неположителен: $D=4\,(\bar{x}\cdot\bar{y})^2-4\bar{x}^2\cdot\bar{y}^2\le 0$; отсюда получаем $(\bar{x}\cdot\bar{y})^2\le\bar{x}^2\cdot\bar{y}^2=|\bar{x}|^2\cdot|\bar{y}|^2$, т.е. $|\bar{x}\cdot\bar{y}|\le|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|$.

4) Имеем с использованием предыдущего неравенства:

$$|\bar{x}+\bar{y}|^2=(\bar{x}+\bar{y})^2=\bar{x}^2+2\bar{x}\cdot\bar{y}+\bar{y}^2\le|\bar{x}|^2+2\,|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|+|\bar{y}|^2=(|\bar{x}|+|\bar{y}|)^2\,.$$

Извлекая из обеих частей квадратный корень, получаем требуемое неравенство. Теорема полностью доказана. □

Вектор $\bar{x}$ называется *единичным* или *нормированным*, если его модуль равен 1: $|\bar{x}| = 1$.

Из свойства 1 предыдущей теоремы следует, что каждый ненулевой вектор можно нормировать, умножив его на величину, обратную $|\bar{x}|$. Получаемый при этом вектор $\bar{x}^0 = \frac{1}{|\bar{x}|}\bar{x}$ называется ортом вектора $\bar{x}$. Вычислим его модуль: $\left|\bar{x}^0\right|^2 = \left(\bar{x}^0\right)^2 = \left(\frac{1}{|\bar{x}|}\bar{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{|\bar{x}|}\bar{x}\right) = \frac{1}{|\bar{x}|^2}\bar{x}^2 = \frac{1}{|\bar{x}|^2}|\bar{x}|^2 = 1$, т. е. $\left|\bar{x}^0\right| = 1$.

УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ, ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ВЕКТОРОВ. В абстрактном евклидовом пространстве можно идти дальше и определить понятие угла между абстрактными векторами.

Согласно неравенству Коши-Буняковского $|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}| \cdot |\bar{y}|$. Тогда: $\frac{|\bar{x}\cdot\bar{y}|}{|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|} \leq 1$ и значит,
$-1 \leq \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|} \leq 1$.

Поэтому можем ввести следующее определение. *Углом* между ненулевыми векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$ евклидова пространства называется число $\phi = \arccos\frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|}$.

Два вектора $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называются *ортогональными* (*перпендикулярными*), если их скалярное произведение равно нулю.

$$\bar{x} \perp \bar{y} \Leftrightarrow \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

Следовательно, угол между ортогональными векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$ равен $\phi = \arccos 0 = \pi/2$. Ясно, что нуль-вектор ортогонален любому вектору. Из аксиомы IV_3 следует, что если $\bar{x} \perp \bar{y}$, то $\alpha\bar{x} \perp \bar{y}$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Обобщением известной из школьной геометрии теоремы о трёх перпендикулярах является следующая теорема.

Теорема 8. *Если вектор $\bar{b}$ ортогонален к каждому из векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$, то он ортогонален к каждому из векторов линейного подпространства $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k)$, порождённого векторами $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$.*

Доказательство. Всякий вектор $\bar{x} \in L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k)$ имеет вид $\bar{x} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \cdots + \alpha_k\bar{a}_k$. Вычислим $\bar{x} \cdot \bar{b}$, пользуясь свойствами скалярного произведения:

$$\begin{aligned}\bar{x} \cdot \bar{b} &= (\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \cdots + \alpha_k\bar{a}_k) \cdot \bar{b} = \\ &= \alpha_1\left(\bar{a}_1 \cdot \bar{b}\right) + \alpha_2\left(\bar{a}_2 \cdot \bar{b}\right) + \cdots + \alpha_k\left(\bar{a}_k \cdot \bar{b}\right) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_k \cdot 0 = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0,\end{aligned}$$

т. е. $\bar{b}$ ортогонален $\bar{x}$. □

О БАЗИСАХ ЕВКЛИДОВЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ. Сначала установим, что ортогональность системы векторов влечёт её линейную независимость.

Теорема 9. *Любая система ненулевых попарно ортогональных векторов (ортогональная система векторов) евклидова векторного пространства линейно независима.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. ортогональная система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ линейно зависима. Тогда $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \cdots + \alpha_k\bar{a}_k = \bar{0}$, причём можем считать (не нарушая общности), что $\alpha_1 \neq 0$. Умножим обе части этого равенства скалярно на $\bar{a}_1$ и, учитывая ортогональность вектора $\bar{a}_1$ с остальными векторами системы, получим $\alpha_1\bar{a}_1^2 = 0$. Поскольку $\alpha_1 \neq 0$, поэтому $\bar{a}_1^2 = 0$ и, следовательно, $\bar{a}_1 = \bar{0}$, что противоречит условию. □

Теорема 10. *В n-мерном евклидовом векторном пространстве существует ортогональная система из n векторов.*

С учётом теоремы 9 отсюда вытекает существование во всяком n-мерном евклидовом векторном пространстве ортогонального базиса. Векторы этого базиса нормируются и мы приходим к существованию во всяком n-мерном евклидовом векторном пространстве ортогонормированного базиса.

Теорема 10 доказывается методом ортогонализации. Её доказательство, а также дальнейшее развитие аксиоматической теории векторных пространств и евклидовых векторных пространств осуществляется в курсе высшей алгебры (раздел линейная алгебра).

Координатный метод

Метод берёт своё начало от книги Р. Декарта «Геометрия», вышедшей в свет в 1647 г. и произведшей фактически настоящий переворот в математической науке. В ней было введено понятие координатной плоскости, что позволило впервые со времён древних греков соединить число с геометрическими образами, причем реальное истолкование получили даже отрицательные числа, а геометрические отношения оказались выраженными через алгебраические уравнения, неравенства и их системы. Геометрические задачи стали сводиться к чисто алгебраическим, а алгебраические — к чисто геометрическим. Это позволило замечательному французскому математику Софи Жермен (1776–1831) в начале XIX века сказать: «Алгебра — не что иное как записанная в символах геометрия, а геометрия — это просто алгебра, воплощённая в фигурах».

Координатный метод (или метод координат) долгое время существовал, так сказать, в чистом виде, без примеси векторов. Учебники по аналитической геометрии, в которых основополагающим был декартов метод координат, излагавшие теории прямых, алгебраических кривых второго порядка, плоскостей и алгебраических поверхностей второго порядка, вообще не содержали понятия вектора. (См., например, [7], [8], [9]). Классическими задачами, решенными с помощью метода координат, были задачи на определение вида той или иной геометрической фигуры (линии или поверхности), задаваемой в форме словесного описания её свойств, т. е. фигуры как геометрического места точек. С помощью координатного метода составлялось уравнение этой фигуры в подходящим образом введённой (декартовой) системе координат, а затем путём алгебраического анализа полученного уравнения устанавливался вид исследуемой фигуры. На решении одной из таких задач, приведённой Декартом в его «Геометрии», он и демонстрировал силу своего метода. В упомянутых учебниках по аналитической геометрии этим методом исследуются прямые, окружности, эллипсы, гиперболы, параболы и т. д.

Для оперирования координатным методом необходимо владеть понятиями аффинной и декартовой систем координат на плоскости и в пространстве, координат точек в них; уметь находить координаты точки, делящей в данном отношении отрезок с концами в точках, координаты которых известны (в частности, середины отрезка); находить расстояние между двумя точками, координаты которых даны; уметь составлять различные уравнения прямых на плоскости и в пространстве, уравнения плоскостей, окружностей, сфер; уметь находить расстояния от точки до прямой и от точки до плоскости.

Геометрические задачи на плоскости, которые могут быть решены координатным методом приводятся, например, в публикации: [19: задача 1 (I способ)], а в пространстве — в публикациях [19: задача 4 (III способ)], [25], [26: задачи 3-5], [27: задача 7].

Примеры геометрических задач на плоскости и в пространстве, решаемых координатным методом, можно найти также в книге [5], разделы 3.1 и 3.2, стр. 179–193.

Обратите внимание на то, что каждая из этих задач также носит чисто геометрический характер. Но при их решении уже не используются векторы, а для решения вводится подходящим образом система координат — аффинная или декартова.

Векторно-координатный метод решения геометрических задач

После того, как в середине XIX века появилось понятие вектора, декартов координатный метод был усилен векторным методом и сформировался более действенный векторно-координатный метод. Для оперирования этим методом необходимо владеть понятиями базиса совокупности векторов, координат вектора в базисе: уметь находить координаты вектора по известным координатам точек, являющихся его началом и концом; уметь находить координаты линейной комбинации векторов; уметь находить координаты точки, делящей в данном отношении отрезок, координаты концов которого известны; вычислять длину (модуль) вектора и скалярное произведение двух векторов, зная координаты этих векторов в базисе. Так, если в некотором ортонормированном базисе векторы имеют координаты $\vec{a}\,(a_x,\,a_y,\,a_z)$ и $\vec{b}\,(b_x,\,b_y,\,b_z)$, то $|\,\vec{a}\,(a_x,\,a_y,\,a_z)\,| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$.

Условие перпендикулярности двух векторов в декартовых координатах принимает следующий вид:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z = 0.$$

Геометрические задачи на плоскости, которые могут быть решены векторно-координатным методом приводятся, например, в публикации: [16: задача 9], а в пространстве — в публикациях: [27], [28], [29], [30], [31], [32: задача С2 (решение 6-ым способом)].

Примеры геометрических задач на плоскости и в пространстве, решаемых векторно-координатным методом, можно найти также в книге [5], разделы 3.1 и 3.2, стр. 179 — 193.

Обратите внимание на то, что все эти задачи по-прежнему носят чисто геометрический характер, а для решения вводились базисные векторы, и значение имели уже координаты векторов, возникающих в задаче.

Аффинное и евклидово точечные пространства

Продолжим наше движение от конкретных математических задач и методов их решений к абстрактной, аксиоматической теории. На предыдущих двух этапах было аксиоматизировано понятие вектора, в результате чего мы пришли к аксиоматическим теориям векторного пространства и евклидова векторного пространства. Теперь, опираясь на полученный опыт формализации понятия вектора, мы можем сделать следующий шаг и попытаться осмыслить с аксиоматической точки зрения понятие точки и связь этого понятия с понятием вектора.

Мы уже отмечали, что точки и векторы — это объекты разной природы, с абстрактной точки зрения, — объекты, принадлежащие разным множествам. Поэтому рассмотрим два непустых и непересекающихся множества E и V и назовём первое множеством точек, а второе — множеством векторов. Как связаны точки и векторы на содержательном уровне? Любые две точки (в указанном порядке) A и B задают вектор как направленный отрезок $\vec{AB}$. Первая точка A называется началом вектора, вторая B — его концом. Говорят также, что вектор $\vec{AB}$ отложен от точки A. с абстрактной точки зрения это означает, что имеется отображение, которое любым двум элементам из множества E ставит в соответствие единственный элемент из множества V.

Безусловно, таких отображений существует бесконечно много. Спрашивается, как среди них выбрать то, которое будет достаточно адекватно характеризовать описанное соответствие между реальными точками и реальными векторами (направленными отрезками). Для этого нужно выявить некие свойства этого реального соответствия и постараться представить их на абстрактном языке отображений. Такие свойства есть. Первым таким свойством является следующее: каждый вектор может быть отложен от любой точки. К нему примыкает второе свойство — такое отложение единственно, т. е. если от некоторой точки A отложен фиксированный вектор $\vec{a}$, то концом его может быть только одна точка. Другими словами, если два равных вектора имеют общее начало, то и концы их совпадают: $\vec{AB_1} = \vec{AB_2} \;\Rightarrow\; B_1 = B_2$.

Оба эти свойства мы не можем доказать, они как бы даны нам изначально, мы ощущаем их интуитивно. Первым мы пользуемся практически бессознательно. Вторым — более осознанно.

Наконец, третье свойство носит более сложный характер и выражает оно свойство операции сложения, которую мы задали над направленными отрезками по правилу треугольника: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

ПОНЯТИЕ АФФИННОГО И ЕВКЛИДОВА ТОЧЕЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ. Переходим теперь к абстрактным формулировкам этих свойств в виде аксиом будущей аксиоматической теории. Элементы из множества E будем называть «точками» и обозначать заглавными латинскими буквами

$A, B, C, \ldots$. Элементы из множества V будем называть «векторами» и обозначать малыми латинскими буквами с чертой сверху $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\ldots$. Черта, а не стрелка подчеркивает тот факт, что данный объект не есть направленный отрезок, но объект произвольной природы.

Отображение, сопоставляющее двум точкам вектор, обозначим $\sigma\colon E \times E \to V$. Три свойства конкретных векторов, которые мы перечислили, на логико-математическом языке с использованием математического отношения σ запишутся тогда следующим образом:

$$\begin{aligned}
&(V_1) \quad (\forall A)\ (\forall \bar{a})\ (\exists B)\ (\sigma(A, B) = \bar{a});\\
&(V_2) \quad (\forall A, M, N)\ (\sigma(A, M) = \sigma(A, N) \Rightarrow M = N);\\
&(V_3) \quad (\forall A, B, C)\ (\sigma(A, B) + \sigma(B, C) = \sigma(A, C)).
\end{aligned}$$

Для сокращения записей, но, главное, для поддержки нашей интуиции будем обозначать «вектор», сопоставляемый отображением σ двум «точкам» A и B не $\sigma(A, B)$, а $\overline{AB}$, т. е. $\sigma(A, B) = \overline{AB}$. Тогда аксиомы (V_1), (V_2), (V_3) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
&(V_1) \quad (\forall A)\ (\forall \bar{a})\ (\exists B)\ \left(\overline{AB} = \bar{a}\right);\\
&(V_2) \quad (\forall A, M, N)\ \left(\overline{AM} = \overline{AN} \Rightarrow M = N\right);\\
&(V_3) \quad (\forall A, B, C)\ \left(\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}\right).
\end{aligned}$$

Итак, множество E объектов произвольной природы такое, что для векторного пространства V имеется отображение $\sigma\colon E \times E \to V$, удовлетворяющее аксиомам (V_1)–(V_3), называется *аффинным точечным пространством над векторным пространством* V. Если при этом векторное пространство V_n имеет размерность n, то говорят, что и аффинное точечное пространство *имеет размерность* n и обозначается E_n. Если векторное пространство V_n является евклидовым (в нём задано скалярное умножение векторов), то говорят, что и точечное пространство E_n также является *евклидовым.*

Аксиомы (V_1)–(V_3) впервые сформулировал немецкий математик Г. Вейль в 1918 г., и они называются *аксиомами Вейля* аффинного точечного пространства.

В совокупности евклидово точечное пространство описывается системой Σ аксиом, содержащей аксиомы евклидова векторного пространства и аксиомы Вейля аффинного точечного пространства и насчитывающей всего 17 аксиом:

$$\sum = \{I_1 - I_4, II_1 - II_4, III_1, III_2, IV_1 - IV_4, V_1 - V_3\}.$$

АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ АФФИННЫХ И ЕВКЛИДОВЫХ ТОЧЕЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ. Теперь можно приступить к развитию аксиоматической теории на базе этой системы аксиом, которая и будет представлять собой элементарную евклидову геометрию. Первая теорема касается дополнительных свойств отображения σ.

Теорема 11. *Для любых точек A, B, C, D справедливы следующие утверждения:*

1) $\overline{AA} = \bar{0}$;
2) $\overline{BA} = -\overline{AB}$;
3) $\overline{AB} = \overline{DC} \to \overline{AD} = \overline{BC}$;
4) $\overline{AB} = \bar{0} \to A = B$;
5) $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$.

Доказательство. 1) По аксиоме (V_3), $\overline{AA} + \overline{AA} = \overline{AA}$, т. е. вектор $\overline{AA}$ удовлетворяет уравнению $\overline{AA} + \bar{x} = \overline{AA}$. Вектор $\bar{0}$ также удовлетворяет этому уравнению (по аксиоме I_3). В силу единственности решения такого уравнения (теорема 3), $\overline{AA} = \bar{0}$.

2) По аксиоме V_3, $\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA}$. Примените теперь предыдущее утверждение и аксиому I_4.

3) Докажите самостоятельно.

4) Пусть $\overline{AB} = \bar{0}$. По аксиоме V_3, $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$. Тогда $\overline{AM} + \overline{MB} = \bar{0}$, т. е. $\overline{MB} = -\overline{AM}$, или (применяем свойство 2) $\overline{MB} = \overline{MA}$. Следовательно, по аксиоме V_2, $B = A$.

5) $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{AB} + \left(-\overline{AC}\right) = \overline{AB} + \overline{CA} = \overline{CA} + \overline{AB} = \overline{CB}$.

Легко доказать, что из утверждения 4 вытекает аксиома V_2. Это означает, что утверждение 4 может быть взято в качестве аксиомы V_2. Теорема полностью доказана. $\square$

Тесная связь точек и векторов позволяет определить в евклидовом точечном пространстве E_3 понятия системы координат и расстояния между точками.

Система координат в E_3 — это упорядоченная четвёрка $\left\{O, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right\}$, где $O \in E_3$, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — базис соответствующего векторного пространства V_3.

Система координат $\left\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$, где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — ортонормированный базис, называется *прямоугольной*, или *декартовой*. Согласно теореме 11, для любой точки $P \in E_3$ вектор $\overline{OP}$ (называемый *радиус-вектором* точки P) однозначно представляется в виде линейной комбинации векторов ортонормированного базиса: $\overline{OP} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Числа x, y, z называются координатами точки P в системе координат $\left\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$. Запись: $P(x,\ y,\ z)$. Расстоянием между точками A и B называется длина (модуль) вектора $\overline{AB}:\ d\left(A, B\right) = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{\overline{AB}^2}$.

Теорема 12. *Понятие расстояния обладает следующими свойствами (для любых точек A, B, C):*

1) $d\left(A, B\right) = d\left(B, A\right)$;

2) $d\left(A, B\right) + d\left(B, C\right) \geq d\left(A, C\right)$;

3) $d\left(A, B\right) \geq 0 \wedge d\left(A, B\right) = 0 \Leftrightarrow A = B$;

4) $d\left(A, B\right) = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$ в декартовой системе координат, где $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$.

Выполнимость утверждений 1–3 означает, что E_3 является *метрическим пространством.*

Таким образом, система аксиом I, II, III, IV, V групп и есть *система аксиом евклидовой геометрии по Герману Вейлю.* Все дальнейшие понятия (как то прямая, плоскость и т. д.) вводятся при помощи определений на основе уже введённых первоначальных понятий, т. е. являются определяемыми, вторичными. Все теоремы о первоначальных и вторичных понятиях доказываются на основе сформулированных аксиом (с использованием, конечно, уже доказанных теорем). Такое построение евклидовой геометрии на основе системы аксиом Вейля осуществляется, например, в книгах [6], [10], [11].

Продемонстрируем, например, как при таком подходе происходит определение понятия прямой, и доказываются некоторые теоремы об этом понятии.

Прямой, проходящей через точку $A \in E_3$ в направлении вектора $\bar{a} \in V_3$, $\bar{a} \neq \bar{0}$, называется следующее множество точек:

$$l\left(A, \bar{a}\right) = \left\{M \in E_3 : \overline{AM} = \alpha\bar{a}, \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

(Если вспомнить аналитическую геометрию в пространстве, то можно видеть, что уравнение $\overline{AM} = \alpha\bar{a}$ представляет собой параметрическое уравнение прямой (в векторной форме), проходящей через точку A параллельно вектору $\bar{a}$).

Следующие две теоремы указывают различные способы задания одной и той же прямой.

Теорема 13. *Если $B \in l\left(A, \bar{a}\right)$, то $l\left(A, \bar{a}\right) = l\left(B, \bar{a}\right)$.*

Доказательство. Нужно доказать, что множества $l\left(A, \bar{a}\right)$ и $l\left(B, \bar{a}\right)$ совпадают. Пусть $M \in l\left(A, \bar{a}\right)$, т. е. $\overline{AM} = \alpha\bar{a}$. Кроме того, поскольку, по условию, $B \in l\left(A, \bar{a}\right)$, то $\overline{AB} = \beta\bar{a}$. Отсюда $-\overline{AB} = -\beta\bar{a}$ и, значит (см. теоремы 11(2) и 5(3)), $\overline{BA} = \left(-\beta\right)\bar{a}$. Учитывая два полученных равенства и аксиомы V_3, II_1, находим: $\overline{BM} = \overline{BA} + \overline{AM} = \left(-\beta\right)\bar{a} + \alpha\bar{a} = \left(-\beta + \alpha\right)\bar{a}$. Это и означает, что $M \in l\left(B, \bar{a}\right)$. Следовательно, $l\left(A, \bar{a}\right) \subseteq l\left(B, \bar{a}\right)$.

Аналогично доказывается, что если $M \in l\left(B, \bar{a}\right)$, то $M \in l\left(A, \bar{a}\right)$, т. е. $l\left(B, \bar{a}\right) \subseteq l\left(A, \bar{a}\right)$. Таким образом, $l\left(A, \bar{a}\right) = l\left(B, \bar{a}\right)$. $\square$

Назовём два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ *коллинеарными* (запись: $\bar{a} \parallel \bar{b}$), если они линейно зависимы, т. е. если $\bar{a} = \lambda\bar{b}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема 14. *Прямые* $l\,(A,\bar{a})$ *и* $l\left(A,\bar{b}\right)$ *совпадают тогда и только тогда, когда векторы* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *коллинеарные.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $l\,(A,\bar{a}) = l\left(A,\bar{b}\right)$. Возьмём такую точку M, что $\overline{AM} = \bar{a}$ (аксиома V_1). Тогда $M \in l\,(A,\bar{a})$. Но $l\,(A,\bar{a}) = l\left(A,\bar{b}\right)$: значит, $M \in l\left(A,\bar{b}\right)$, т. е. $\overline{AM} = \beta\bar{b}$. Следовательно, $\bar{a} = \beta\bar{b}$, т. е. $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Достаточность. Обратно пусть $\bar{a} \parallel \bar{b}$, т. е. $\bar{a} = \lambda\bar{b}$. Покажем, что $l\,(A,\bar{a}) = l\left(A,\bar{b}\right)$. В самом деле, если $M \in l\,(A,\bar{a})$, т. е. $\overline{AM} = \alpha\bar{a}$, то $\overline{AM} = \alpha\left(\lambda\bar{b}\right) = (\alpha\lambda)\,\bar{b}$, т. е. $M \in l\left(A,\bar{b}\right)$. Таким образом, $l\,(A,\bar{a}) \subseteq l\left(A,\bar{b}\right)$.

Обратно, если $M \in l\left(A,\bar{b}\right)$, то $\overline{AM} = \beta\bar{b}$. Так как $\bar{a} = \lambda\bar{b}$, то $\bar{b} = (1/\lambda)\,\bar{a}$, и, значит, $\overline{AM} = (\beta/\lambda)\,\bar{a}$, т. е. $M \in l\,(A,\bar{a})$. Таким образом, $l\left(A,\bar{b}\right) \subseteq l\,(A,\bar{a})$. В итоге: $l\,(A,\bar{a}) = l\left(A,\bar{b}\right)$.□

Теорема 15. *Через любые две различные точки A и B проходит прямая:*

$$(AB) = \left\{M \in E_3 : \overline{AM} = \alpha\overline{AB}, \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

Доказательство. Эта прямая действительно проходит через точку A (так как $\overline{AA} = \alpha\overline{AB}$ при $\alpha = 0$) и через точку B (так как $\overline{AB} = \alpha\overline{AB}$ при $\alpha = 1$). □

Следствие. *Через любые две различные точки проходит единственная прямая.*

Доказательство вытекает из теорем 15 и 14. □

Подход Д. Гильберта к обоснованию евклидовой геометрии

Другим классическим подходом к обоснованию евклидовой геометрии, т. е. построением евклидовой геометрии как аксиоматическ5ой теории, является путь, предложенный немецким математиком Давидом Гильбертом в его книге «Основания геометрии», вышедшей в 1899 г. [12]. В качестве первоначальных неопределяемых понятий им были выбраны понятия точки, прямой и плоскости. Его подход оказался близок к подходу Евклида, но был, конечно, безупречно логически выверен с учётом достижений математической науки на протяжении тех веков, которые прошли со времён Евклида.

Следствие из теоремы 15, доказанное в конце предыдущего пункта, является в системе Гильберта одной из двадцати аксиом. Развивая аксиоматический подход Вейля к евклидовой геометрии, можно доказать, что все аксиомы Гильберта являются теоремами при обосновании геометрии по Вейлю. Отсюда следует, что всякая теорема евклидовой геометрии, выводимая из системы аксиом Гильберта, может быть выведена и из системы аксиом Вейля (к выводу теоремы из системы аксиом Гильберта нужно добавить вначале выводы необходимых аксиом Гильберта из системы аксиом Вейля). Верно и обратное утверждение. Тот факт, что из системы аксиом Гильберта выводится каждое утверждение о векторах, которое Вейлем принято за аксиому, фактически и доказывается в различных курсах элементарной математики, в которых понятие вектора сделано вторичным. Отсюда следует, что всякая теорема евклидовой геометрии, выводимая из системы аксиом Вейля, может быть выведена и из системы аксиом Гильберта.

Таким образом, системы аксиом Гильберта и Вейля оказываются эквивалентными: на основе каждой из них могут быть доказаны одни и те же теоремы евклидовой геометрии.

Заключение

На рассмотренном математическом материале, связанном с понятиями точки и вектора в геометрии, мы увидели, как в математике, отправляясь от решения конкретных математических задач, строятся абстрактные математические теории. Эти математические теории имеют характер аксиоматических теорий. Затем эти аксиоматические теории порой весьма неожиданно находят применения в различных областях математики и других наук. Так, рассмотренное здесь понятие векторного пространства имеет широкие приложения в различных разделах математики — в линейной и абстрактной алгебре, линейном программировании, функциональном анализе и других, а также во многих разделах физики, химии, биологии, экономики и других наук и в их практических приложениях.

Идея аксиоматического построения науки была впервые сформулирована древнегреческими учёными Платоном и Аристотелем в IV в. до Р.Х. Её впервые практически осуществил также древнегреческий учёный Евклид, создав в своей знаменитой книге «Начала» аксиоматическую теорию геометрии. С течением времени эта идея стала распространяться на другие науки. Именно под воздействием и в методологическом духе евклидовых «Начал» писались важнейшие работы в области геометрии, арифметики, астрономии, философии, такие как «Великое математическое построение по астрономии в тринадцати книгах» (или «Альмагест») Клавдия Птолемея, «Арифметика» Диофанта, «Математическое собрание» Паппа, «Первоначала философии» Декарта, «Этика» Спинозы, «Математические начала натуральной философии» Ньютона. Важнейший шаг на пути понимания существа и значения аксиоматического метода для математики сделал Д. Гильберт в своём труде «Основания геометрии» (1899). В нём он фактически переписал «Начала» Евклида, дав им твёрдое логико-аксиоматическое основание, не прибегая ни к интуиции, ни к чертежам. Это позволило сказать ему знаменитую фразу о том, что математика — это есть искусство называть разные вещи одним и тем же именем. По существу, именно в этом и состоит методологическая сущность аксиоматического метода.

Если та или иная наука достигает совершенства, когда ей удаётся пользоваться математикой, то можно сказать, что математическая наука достигает совершенства, когда ей удаётся пользоваться аксиоматическим методом, т. е. когда наука принимает характер аксиоматической теории. Развитие наук в двадцатом столетии показало, что математика выделяется в системе наук тем, что она, по существу, единственная, использующая аксиоматический метод чрезвычайно широко, и что этот метод в значительной мере обусловливает поразительную эффективность математики в процессе познания окружающего мира и преобразующего воздействия на него.

Литература

1. *Игошин В. И.* Математическая логика как педагогика математики. — Саратов: Изд-во ООО Издательский центр «Наука», 2009. — 360 с.

2. *Игошин В.И.* Математическая логика в обучении математике. Логико-дидактическая подготовка учителя математики. — Saarbrüken, Deutschland / Германия: Palmarium Academic Publishing, 2012. — 517 с. [ISBN 978-3-659-98033-6].

3. *Игошин В.И.* Десять лекций по геометрии. — Саратов: Изд-во ООО Издательский центр «Наука», 2010. — 176 с.

4. *Игошин В.И.* Векторная алгебра. — Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2005. — 128 с. (Серия «Лекции по геометрии»).

5. *Игошин В.И.* Аналитическая геометрия. — Саратов: Изд-во ООО Издательский центр «Наука», 2007. — 208 с. (Серия «Лекции по геометрии»).

6. *Игошин В.И.* Основания геометрии. — Саратов: Изд-во «Научная книга», 2004. — 84 с. (Серия «Лекции по геометрии»).

7. *Млодзеевский Б.К.* Основы аналитической геометрии в пространстве. (Нормальные руководства для высшей школы). Издание 5-е. — М.: Госиздат, 1929. — 186 с.

8. *Адамов А.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и дифференциальному исчислению. (Нормальные руководства для высшей школы). — М.: Госиздат, 1923. — 420 с.

9. *Дубнов Я.С.* Введение в аналитическую геометрию. (Пособие для самообразования). — М.: Физматгиз, 1959. — 140 с.

10. *Болтянский В.Г., Воловин М.Б., Семушин А.Д.* Векторное изложение геометрии. — М.: Просвещение, 1982.

11. *Рогановский Н.М., Столяр А.А.* Векторное построение стереометрии. — Минск, 1974.

12. *Гильберт Д.* Основания геометрии. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. — 492 с.

13. *Гусев В.А., Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л.* Векторы в школьном курсе геометрии. — М.: Просвещение, 1976. — 48 с.

14. *Клопский В.М., Ягодовский М.И., Скопец З.А.* Применение векторов в курсе геометрии IX класса // Математика в школе. — 1975. — № 3. — С. 27–42.

15. *Клопский В.М., Ягодовский М.И., Скопец З.А.* Применение элементов векторной алгебры к решению планиметрических задач // Математика в школе. — 1975. — № 6. — С. 26–35.

16. *Корикова Т.М.* Некоторые геометрические неравенства и их векторное решение // Математика в школе. — 1977. — № 3. — С. 64–67.

17. *Хан Д.И.* Некоторые приложения векторной алгебры к решению задач // Математика в школе. — 1975. — № 4. — С. 70–74.

18. *Лопшиц А.* Векторное решение аффинных задач // Квант. — 1979. — № 8. — С. 30–35.

19. *Петрова М.А.* Разные способы решения известных задач // Математика в школе. — 2004. — № 8. — С. 14–18.

20. *Имранов Б, Г.* Вычисление расстояний и величин углов с помощью векторов // Математика в школе. — 1991. — № 2. — С. 37–38.

21. *Ясиновый Э.А.* Применение векторов // Математика в школе. — 1979. — № 3. — С. 71–73.

22. Задача № 526 // Квант. — 1979. — № 8. — с. 42–43.

23. *Готман Э.* Задачи на доказательство // Квант. — 1976. — № 7. — С. 21–24.

24. *Панарин Я.* Вычисление площадей // Квант. — 1976. — № 7. — С. 25–27.

25. *Потоскуев Е.В.* Векторно-координатный метод решения стереометрических задач // Математика в школе. — 1995. — № 1. — С. 23–25.

26. *Габович И., Горнштейн П.* Вооружившись методом координат // Квант. — 1978. — № 11. — С. 42–47.

27. *Шувалова Э.* Координатный метод // Квант. — 1977. — № 11. — С. 82–89.

28. *Бардушкин В.В., Прокофьев А.А.* Обобщающее повторение темы "Решение заданий С2 координатно-векторным способом". Часть 1 // Математика в школе. — 2012. — № 10. — С. 9–15.

29. *Бардушкин В.В., Прокофьев А.А.* Обобщающее повторение темы «Решение заданий С2 координатно-векторным способом». Часть 2 // Математика в школе. — 2013. — № 1. — С. 8–18.

30. *Голобокова Р.В., Певзнер С.Л.* Векторы и координаты в стереометрических задачах // Математика в школе. — 1991. — № 5. — С. 43–44.

31. *Ионин Ю.И., Некрасов В.Б.* Вычисление расстояний и углов // Квант. — 1987. — № 1. — С. 47 –52.

32. *Самсонов П.И.* Анализ ошибок выпускников на ЕГЭ-2012 по математике. I часть // Математика в школе. — 2012. — № 8. — С. 14–22.

Игошин Владимир Иванович,
профессор кафедры геометрии
ФГБОУ ВПО “Саратовский национальный
исследовательский государственный
университет им. Н.Г.Чернышевского”,
доктор пед. наук, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: igoshinvi@mail.ru

Аппроксимация эйлеровых уравнений

А. Н. Буланова, В. В. Ивлев

В работах [1, 2] предлагается обобщение известного уравнения Эйлера, коэффициентами которого являются производные от некоторой производящей функции. Там же даются примеры прямого интегрирования обобщенного уравнения Эйлера. В данной статье рассматривается приближенное решение уравнения с произвольной производящей функцией, основанное на методе наименьших квадратов. Приводятся конкретные решения для уравнений 2–6 порядков.

1. Введение

Рассмотрим обобщенное уравнение Эйлера [1, 2]:

$$p(x)y^{(n)} + a_1p'(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_np^{(n-1)}(x)y = q(x) \tag{1}$$

Уравнение (1) интегрируется прямым образом и принимает вид:

$$p(x)y^{(n-1)} + \bar{a}_1p'(x)y^{(n-2)} + \cdots + \bar{a}_{n-1}p^{(n-1)}(x)y = \int q(x)\,dx \tag{2}$$

при выполнении условий (критерия) интегрируемости:

$$\bar{a}_1 = a_1 - 1, \quad \bar{a}_2 = a_2 - \bar{a}_1, \quad \bar{a}_3 = a_3 - \bar{a}_2, \quad \ldots, \quad \bar{a}_{n-1} = a_{n-1} - \bar{a}_{n-2} = a_n$$

или

$$1 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n = 0. \tag{3}$$

Пусть выполнено (3). Тогда уравнение (2) допускает повторное интегрирование и принимает вид:

$$p(x)y^{(n-2)} + \bar{\bar{a}}_1p'(x)y^{(n-3)} + \cdots + \bar{\bar{a}}_{n-2}p^{(n-2)}(x)y = \int\int q(x)\,dx^2 \tag{4}$$

если

$$\bar{\bar{a}}_1 = \bar{a}_1 - 1, \quad \bar{\bar{a}}_2 = \bar{a}_2 - \bar{\bar{a}}_1, \quad ,\ldots, \quad \bar{\bar{a}}_{n-2} = \bar{a}_{n-1} - \bar{\bar{a}}_{n-1} = \bar{a}_{n-1}$$

или

$$n - (n-1)a_1 + (n-2)a_2 - \cdots + (-1)^n a_n = 0. \tag{5}$$

Введем обозначения:

- $p(x)$ — производящая функция для (1);
- $\varphi(x) = x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n$ — характеристическая функция для (1).

Последующая рекуррентная процедура приводит к таким выводам:

1. Критерии интегрируемости (3) и (5) показывают, что возможность прямого интегрирования (1), (2) не зависят от вида $p(x)$, а лишь от коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$;
2. С помощью функции $\varphi(x)$ критерии интегрируемости можно представить в виде:

$$\varphi(1) = \varphi(x)|_{x=1} = 0 \text{ — однократное интегрирование (1);}$$
$$\varphi(1) = \varphi'(1) = 0 \text{ — двукратное интегрирование (1)}$$

и т. д.

В частности, если уравнение (1) интегрируется n раз, т. е. выполнено $\varphi(1) = \varphi'(1) = \ldots = \varphi^{(n)}(1) = 0$, то левая часть (1) тривиальным образом переходит в формулу Лейбница $(p(x)y)^{(n)} = q(x)$, а коэффициенты a_i, $i = 1, \ldots, n$ — это коэффициенты бинома Ньютона: $a_i = C_n^i$.

2. Синтез класса вполне интегрируемых уравнений

Известно, что линейное дифференциальное уравнение первого порядка решаемо и представимо в интегральной форме. Впредь на этом останавливаться не будем.

Определение. Уравнение (1) называется *вполне интегрируемым*, если оно прямым интегрированием приводится к уравнению первого порядка.

Возникает вопрос: как построить класс (множество) уравнений Эйлера, удовлетворяющих данному определению. Рассмотрим семейство (кортеж) коэффициентов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ таких, что

$$\begin{cases} \varphi(1) = 0, \\ \varphi'(1) = 0, \\ \ldots \\ \varphi^{(n-2)}(1) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

но $\varphi^{(n-1)}(1) \neq 0$.

Имеем $\varphi^{(n-1)}(x) = n!x - \bar{a}_1(n-1)$, но $\bar{a}_1 \neq 0$, иначе $\varphi^{(n-1)}(x) = 0$ и имеем формулу Лейбница, т. е. единственное решение.

Решая систему уравнений (6), получим:

$$\begin{cases} \bar{a}_2 = -(C_n^2 - C_{n-1}^1 \bar{a}_1) \\ \bar{a}_3 = C_n^3 - C_{n-1}^2 \bar{a}_1 + C_{n-2}^1 \bar{a}_2 \\ \bar{a}_4 = -(C_n^4 - C_{n-1}^3 \bar{a}_1 + C_{n-2}^2 \bar{a}_2 - C_{n-3}^1 \bar{a}_3) \\ \ldots \\ \bar{a}_n = (-1)^{n+1}(C_n^n - C_{n-1}^{n-1}\bar{a}_1 + C_{n-2}^{n-2}\bar{a}_2 + \ldots + (-1)^n C_1^1 \bar{a}_{n-1}) \end{cases} \tag{7}$$

Из (7) видно, что, решая рекуррентно (7), получаем $\bar{a}_i = f_i(\bar{a}_1)$.

Процедура построения функции $\bar{a}_i = f_i(\bar{a}_1)$, $i = 1, \ldots, n$ в общем виде трудоемка, хотя и линейна. Приведем эти зависимости лишь для $n = 2, 3, 4, 5, 6$ (таблица 1).

Таблица 1.

n	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$
2	$\bar{a}_1 - 1$				
3	$2\bar{a}_1 - 3$	$\bar{a}_1 - 2$			
4	$3\bar{a}_1 - 6$	$3\bar{a}_1 - 8$	$\bar{a}_1 - 3$		
5	$4\bar{a}_1 - 10$	$6\bar{a}_1 - 20$	$4\bar{a}_1 - 15$	$\bar{a}_1 - 4$	
6	$5\bar{a}_1 - 15$	$10\bar{a}_1 - 40$	$10\bar{a}_1 - 45$	$5\bar{a}_1 - 24$	$\bar{a}_1 - 5$

При необходимости читатель может продолжить процесс для $n = 7, 8, \ldots$

Вывод: множество вполне интегрируемых обобщенных дифференциальных уравнений Эйлера имеет вид:

$$p(x)y^{(n)} + a_1 p'(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n p^{(n-1)} y = q(x), \tag{8}$$

где $\bar{a}_1 \neq n$, а коэффициенты $\bar{a}_i$ определяются из системы (7) или при $n = 2, 3, 4, 5, 6$ по таблице 1.

Конечное уравнение первого порядка, соответствующее (8), имеет вид

$$p(x)y' + (\bar{a}_1 - n + 1)p'(x)y = \int\int\cdots\int q(x)\,dx^{n-1}. \tag{9}$$

В уравнении (9) в правой части опущена сумма $\sum\limits_{i=0}^{n-2} c_i x^i$.

3. Аппроксимация обобщенного уравнения Эйлера

Рассмотрим теперь обобщенное уравнение (1), коэффициенты которого не удовлетворяют даже условию (3). И, следовательно, рассуждения п. 1 и п. 2 “ушли в песок”, то есть бесполезны?

Всякое дифференциальное уравнение есть приближенная математическая модель некоего физического или экономического процесса. Следовательно, его коэффициенты также приближенный набор некоторых характеристик процесса.

Рассмотрим два кортежа чисел:

- $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — коэффициенты уравнения (1);
- $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n)$ — коэффициенты множества вполне интегрируемых уравнений (табл. 1).

Применяя метод наименьших квадратов (МНК), рассмотрим расхождение вида:

$$Q(\bar{a}_1) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a}_i)^2 \ \rightarrow\ \min.$$

Необходимо, чтобы

$$\frac{dQ(\bar{a}_1)}{dx} = -2\sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar{a}_i)\frac{d\bar{a}_i}{dx} = 0. \tag{10}$$

В (10) все $\bar{a}_i = f(\bar{a}_1)$, $i = \overline{2, n}$.

Не утомляя читателя, приведем решения для уравнений при $n = 2, 3, 4, 5, 6$ (табл. 2), где приведены $\bar{a}_{1\,\text{опт}}$.

Таблица 2.

n	$\bar{a}_{1\,\text{опт}}$
2	$\dfrac{a_1 + a_2 + 1}{2}$
3	$\dfrac{a_1 + 3a_2 + a_3 + 8}{6}$
4	$\dfrac{a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4 + 45}{20}$
5	$\dfrac{a_1 + 4a_2 + 6a_3 + 4a_4 + a_5 + 224}{70}$
6	$\dfrac{a_1 + 5a_2 + 10a_3 + 10a_4 + 5a_5 + a_6 + 1050}{252}$

Пример. Пусть для уравнения третьего порядка $p(x) = \sin x$. Имеем:

$$\sin(x)y''' + 2\cos xy'' - 3\sin xy' + \cos(x)y = q(x). \qquad (*)$$

В $(*)$ коэффициенты $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_2 = -1$. Подробнее,

$$\sin(x)y''' + 2\cos xy'' + 3(-\sin x)y' - 1(-\cos(x))y = q(x).$$

В соответствии с таблицей 2 получим $\bar{a}_{1,\text{ОПТ}} = (2+6-1)/6 = 2,5$.

Для коэффициентов приближенного аналога-уравнения имеем (таблица 2): $\bar{a}_{1,\text{ОПТ}} = 2,5$, $\bar{a}_2 = 2$, $\bar{a}_3 = 0,5$.

Вообще говоря, коэффициенты $\bar{a}_2$ и $\bar{a}_3$ не нужны. Сразу выпишем уравнение первого порядка, к которому по МНК сведено уравнение $(*)$

$$\sin(x)y' + (2{,}5 - 3 + 1)\cos(x)y = \int\int q(x)\,dx^2$$

или

$$\sin(x)y' + 0{,}5\cos(x)y = \int\int q(x)\,dx^2 + c_1x^2 + c_2x + c_3.$$

Резюме для заинтересованного читателя:

1. Общая теория решения линейных дифференциальных уравнений n-го порядка со времен Эйлера и Лагранжа, в основном, заключается в нахождении общего решения соответствующего однородного уравнения и построения какого-либо частного решения неоднородного уравнения (метод Лагранжа или специальный вид правой части). Для класса обобщенных уравнений Эйлера предлагается метод прямого интегрирования с применением МНК.

2. Для класса (множества) обобщенных уравнений Эйлера (не рассматриваемых в общем виде), существует приближенный по МНК аналог, сводимый к уравнению первого порядка (8), где $\bar{a}_1 = \bar{a}_{1\,\text{ОПТ}}$ находится по таблице 2.

3. При сведении обобщенного уравнения Эйлера к уравнению первого порядка по МНК нет необходимости вычислять коэффициенты $\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, так как вся информация о них при каждом интегрировании сохраняется в предыдущих коэффициентах и в итоге содержит коэффициент $\bar{a}_{1\,\text{ОПТ}}$.

4. Важен следующий факт. Пусть исходное обобщенное уравнение Эйлера n-го порядка принадлежит классу вполне интегрируемых, то есть сводится к уравнению первого порядка (8), то есть коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям (6). Применим метод МНК, не проверяя условия (6). Оказывается, что метод МНК дает тождественный ответ $\bar{a}_i = a_i$ и, следовательно, расхождение $Q(\bar{a}_1) = 0$. Приятный факт.

5. Анализ таблицы 2 показывает, что:

   а. Сомножители $\bar{a}_{1\,\text{ОПТ}}$ уравнения n-го порядка есть биноминальные коэффициенты для бинома $(n-1)$-го порядка;

   б. Знаменатель для $\bar{a}_{1\,\text{ОПТ}}$ есть сумма квадратов коэффициентов бинома $(n-1)$-го порядка.

В заключение отметим: коэффициенты a_i, $i = \overline{1,n}$ приближенно отражают физическую или экономическую модель исследуемого процесса. При наличии информации о важности или достоверности этих коэффициентов возможно применение *взвешенного* МНК, то есть расхождения вида:

$$Q(\bar{a}_1) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (a_i - \bar{a}_i)^2,$$

где γ_i — веса коэффициентов a_i.

Литература

1. Ивлев В.В., Баранова М.В. Об одном классе линейных дифференциальных уравнений // Математическое образование. - 2012. - № 4(64).

2. Ивлев В.В., Архипова Е.М. Об одном решении эйлеровых уравнений // Вестник МФЮА. - Всероссийская конференция МИЕСЭКО, 2013. - № 1.

Ивлев Валерий Васильевич,
профессор кафедры Общих математических
и естественных дисциплин Московского
финансово-юридического университета
МФЮА, доктор технических наук.

E-mail: vvivlev@yandex.ru

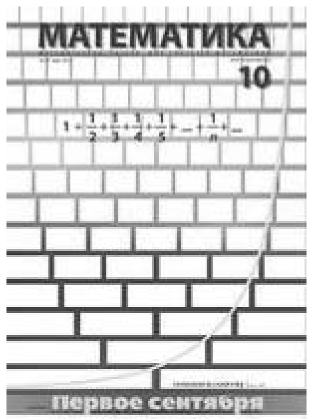
Буланова Анна Николаевна,
доцент кафедры Общих математических
и естественных дисциплин Московского
финансово-юридического университета
МФЮА, кандидат экономических наук.

E-mail: alina0405@mail.ru

Ряд Фарея и поиск простых чисел

О. Г. Лисин

В статье рассматривается ряд Фарея конечного порядка — множество несократимых дробей с знаменателем, не превосходящим данного. Изучены свойства этого ряда, показана связь с распределением простых чисел, рассмотрены геометрические закономерности развертки ряда Фарея на плоскость.



Так выглядит обложка книги одного школьного издательства. Хотя эта иллюстрация связана там с построением гармонического ряда, в данной статье она интерпретируется также как решение другой задачи, а именно, как деление отрезка фиксированной длины последовательно пополам, на три, на четыре и т. д. вплоть до n равных частей.

Если отрезок нормировать на единичную длину, то множество вертикальных штрихов на рисунке взаимно однозначно сопоставляется с множеством всех рациональных дробей между нулем и единицей со знаменателем не больше n. Числитель дроби определяется порядковым номером штриха, считая от левой границы, а знаменатель — высотой уровня или номером последнего штриха на правой границе выбранного уровня. Модель деления отрезка используется для приближения значений иррациональных чисел.

Не все штрихи рисунка в реальности приводят к появлению новой метки на отрезке, одномерном объекте. Каждому штриху соответствует своя пара натуральных чисел, т. е. числитель и знаменатель, но значение дроби как частного от деления одного числа на другое может быть одинаковым у геометрически разных штрихов. Метки наносятся на отрезок лишь как это частное, так что на плоскости каждой из них сопоставляется цепочка штрихов. Например, дроби $1/2$ сопоставим как единственную штрих-метку на нижней строке, так и по одному штриху в центре каждой четной строки (дроби $2/4$, $3/6$, $4/8$ и т. д.).

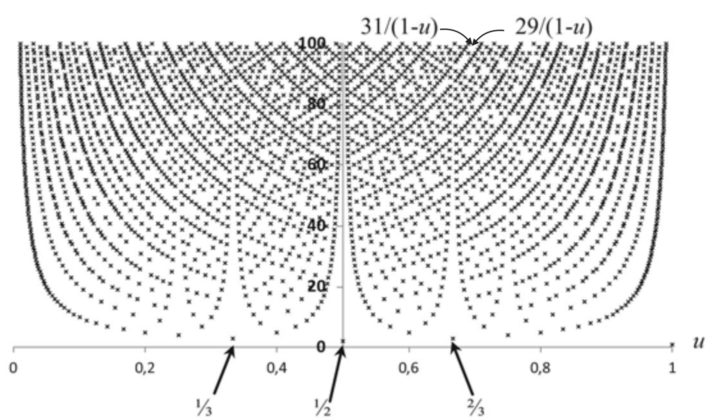
При последовательном переходе на следующий уровень от $n-1$ к n число новых меток, называемое функцией Эйлера $\phi(n)$, может достигнуть максимума $n-1$ только в том случае, когда n есть простое число. В случае же составного n часть новых меток обязательно совпадет с какими-либо из нанесенных ранее, т. е. нижерасположенными, так что реальное их число окажется меньше: $\phi(n) < n-1$. Конечное множество всех несократимых дробей, расположенных в возрастающем порядке, определяется как *ряд Фарея порядка* n. Если на вышеприведенном рисунке полное число штрихов по закону арифметической прогрессии составляет $(n-1)n/2$, то после исключения из них тех, которые соответствуют сократимым дробям, в остатке получим ряд Фарея, состоящий из $\sum\limits_{n'=1}^{n} \phi(n')$ членов (полагая $\phi(1) = 1$), т. е. всех несократимых дробей со знаменателем не больше n.

Геометрически ряд Фарея воспроизводится проецированием всех штрихов в вертикальном направлении вниз на горизонтальную ось. Штрихи каждой сократимой дроби располагаются точно над штрихом, соответствующим дроби, которая остается после сокращения на наиболее общий делитель числителя и знаменателя. По другому определению правильные дроби ряда Фарея формируются из взаимно простых числителя и знаменателя.

Одно из наиболее характерных свойств ряда Фарея — его существенная неравномерность. Так, если первый его член после нулевого равен $1/n$, а предпоследний перед единицей — это $(n-1)/n$, то следующие члены оказываются равными соответственно $1/(n-1)$ и $(n-2)/(n-1)$. Отсюда видно, что максимальный интервал между соседними членами ряда составляет $1/n$, а минимальный $1/(n^2-n)$, т.е. 2-го порядка малости, поэтому относительная неопределенность с увеличением n растет по порядку этой величины так же, как ее абсолютное значение. Для внутренних членов ряда ширина интервалов флюктуирует как бы произвольно между двумя полученными экстремальными значениями, создавая впечатление неупорядоченности. Тем не менее, имеется возможность представить структуру ряда Фарея сглаженной в определенном смысле, если на исходном изображении оставить реальные метки, а дублирующие штрихи отсеять. Иначе говоря, спроецированные метки на разделенном отрезке подвергают обратному проецированию, т.е. как бы восстанавливают на плоскости, но если они формируют цепочку штрихов, то оставляют только самый первый, нижний, а все расположенные выше, если они есть, отсеивают.

Для примера на Рис. 1 изображены в двумерном виде полученные метки, т.е. рациональные дроби, с любым знаменателем от 1 до 100. По оси абсцисс u откладываются координаты меток отрезка от 0/1 до 1/1, который делится на равные части вплоть до $n = 100$.

На каждом уровне $n' \leq n$ крестики отмечают координаты меток, а сам уровень n' откладывается по оси ординат. Как было отмечено выше, возможное число и сокращаемых, и несокращаемых рациональных дробей равно $100 \cdot (100-1)/2 = 4950$. При построении Рис. 1 эмпирически было получено, что все различные рациональные дроби составляют множество из более чем 3000 элементов. Известно асимптотическое приближение данного соотношения при $n \to \infty$.



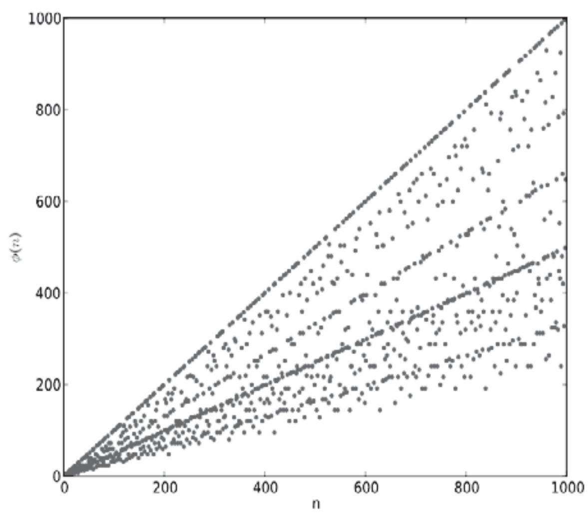
Развертка ряда Фарея $n = 100$

Наиболее заметны следующие особенности распределения.

- Вся картина группируется по различным семействам гипербол. Самая нижняя точка дроби $u = 1/n'$ или $u = (n'-1)/n'$ координирует положение общей вертикальной асимптоты каждого семейства. Над этой точкой других крестиков быть не может, потому что их рациональные дроби сокращаются.

- На абсциссе $u = 1/2$ локализована самая мощная «сингулярность», т.е. пустая область, содержащая единственную точку $\{1/2; 2\}$. По бокам от нее проявляются более слабые, по две слева и справа, но они быстро становятся практически неразличимыми. В пифагорейской гармонике им соответствуют консонансы: октава, квинты, кварты. Любопытно, что в статье Википедии «Функция Эйлера» приводится график первой тысячи значений $\phi(n)$, см. Рис. 2, на котором эти же консонансы выделяются, но не в виде пустых сингулярностей, а сконцентрированными вдоль соответствующих лучей.

- Все распределение меток оказывается зеркально симметричным относительно вертикальной оси с абсциссой $1/2$. Так и должно быть, потому что не важно, с какого конца отрезка считать метки, это физически очевидное следствие. Для строгого доказательства симметрии, которое проведем от противного, рассмотрим две симметрично расположенные метки дробей, сумма которых равна 1. Пусть известно, что первая дробь a/b несократимая. Может ли тогда вторая оказаться сократимой вида $m \cdot c/m \cdot d$? Но в этом случае их сумма, равная 1, записанная в виде $m \cdot d/(m \cdot d)$, позволяет представить первую дробь в форме $a/b = m \cdot (d - c)/(m \cdot d)$, что противоречит первоначальному предположению о несократимости этой дроби.



Функция Эйлера $\phi(n)$

Последнее свойство симметрии правильных рациональных дробей интерпретируется здесь как избыточность ряда Фарея, так что их анализ можно проводить, сократив вдвое этот ряд, например, до интервала $0 < a/b < 1/2$. Это следует из тождества $a/b + (b - a)/b = 1$, соответствующего геометрической симметрии обоих слагаемых в левой части.

Гиперболы имеют одну общую асимптоту вдоль оси абсцисс и другую, вертикальную, зависящую от той сингулярности, к которой приписано данное семейство. Каждая отдельная гипербола в семействе нумеруется числителем, одинаковым для всех ее дробей, обозначаемых метками данной гиперболы. При пересечении гиперболой «чужой» сингулярности в ней делается единичный пропуск, так как здесь дробь сокращается. Если ее номер оказался простым числом p, то гипербола прописывается группами меток по $p - 1$ штук, а затем делается пропуск. В среднем контраст вдоль такой гиперболы близок к 100%. Для других гипербол частота прописывания согласно разложению номера на множители оказывается меньше, контраст составляет 50%, 33%, 25% и т. д. По этому признаку с помощью Рис. 1 можно находить простые числа, решая ту же задачу, что и линейное решето Эратосфена. Преимущество данного способа заключается в его наглядности: они выделяются сразу визуально благодаря способности зрения различать контраст. Легче всего простые числа считаются по гиперболам с асимптотами на концах отрезка 0 или 1. Еще одна особенность выровненного ряда Фарея заключается в визуальном выделении простых чисел-близнецов в форме «колеи», см. отмеченные стрелками над рисунком два числа 29 и 31.

Имеется другой графический способ поиска простых чисел, так называемая скатерть Улама, который базируется на развертке чисел натурального ряда по спирали. При этом простые числа иногда группируются на плоскости в непрерывные участки различной длины с разрывами. Воспроизводимые скатертью узоры изменяются в зависимости как от формы спирали (квадратная, архимедова), так и от выбранного начала отсчета. Принципиальное отличие развертки ряда Фарея заключается, во-первых, в том, что она реализует сплошной выбор простых чисел, без пропусков, а также в его независимости ни от каких внешних параметров. Если отношение к скатерти Улама как к забаве может быть оправдано ее эмпиричностью и умозрительностью, то по своему детерминизму, отсутствию какой-либо случайности ряд Фарея эквивалентен таблице умножения.

Таким образом, ряды Фарея получают по Рис. 1, проецируя на горизонтальную ось все крестики на уровне n и расположенные ниже, чьи координаты суть взаимно простые числа. Это проецирование выглядит совершенно хаотично из-за нерегулярного распределения несократимых дробей. И наоборот, из каждой проекции-метки восстанавливается сначала несократимая дробь a/b, а над ней — цепочка сократимых $m \cdot a/(m \cdot b)$, где m — натуральное число 2, 3, 4,… Развертка ряда Фарея показывает, как во множестве всех рациональных дробей со знаменателем не больше n отсеиваются все возможные цепочки, т. е. сократимые дроби. Поскольку ряд Фарея можно представить как результат накопления φ-функции, то ее «сумасбродное поведение» ([1], стр. 164) переносится и на сам ряд. Однако сами по себе дроби как двумерное множество, еще до проецирования на числовую прямую, выглядят вполне регулярно. В таком смысле причина кажущегося хаоса заключается в сокращении размерности (двойки чисел при делении как бы сваливаются в кучу), а внутренние свойства ряда Фарея выявляются, если ряд развернуть на плоскость. Рис. 1 сглаживает локальные неоднородности, оставляя «глобальные», проявляющиеся в монотонном увеличении плотности дробей, которая вводится в пренебрежении их дискретностью.

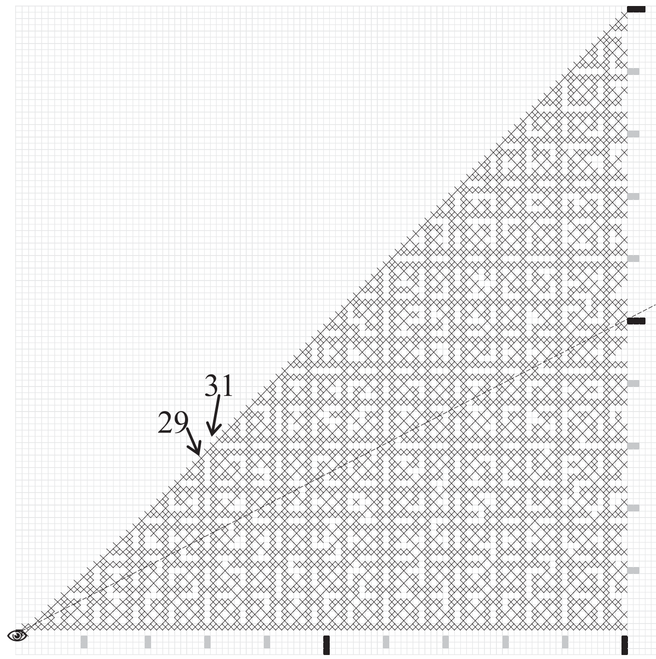
Рассмотренная модель деления отрезка при своей реализации не может быть использована для слишком больших значений n. Естественным ограничением при этом служит конечная ширина штрихов. Чтобы они не сливались при проецировании друг с другом, их ширина по порядку величины должна быть меньше n^{-2}, как следует из вышеприведенного минимального интервала между членами ряда Фарея.

В заключение можно было бы указать на внешнее сходство между Рис. 1 и бинарным деревом Штерна-Броко, графом для построения множества всех несократимых дробей. Все же граф отличается принципиально тем, что он не воспроизводит на каждом своем уровне строгое геометрическое распределение узлов, а лишь качественно размещает их, исходя из сопоставления с предыдущими уровнями по правилу «больше – меньше». Это приводит к быстрому увеличению числа узлов по показательному закону 2^n. Например, чтобы его изобразить до такого же уровня, как на Рис. 1, нужно учесть 2^{100} дробей, что довольно фантастично (по сравнению с вышеупомянутыми 3 тысячами). И хотя некоторые считают дерево Штерна-Броко «гораздо более интересным» ([1], стр. 143), геометрическое представление ряда Фарея, как будет показано далее, тоже оказывается довольно любопытным.

Интересное распределение, связанное с рядом Фарея, можно получить после нелинейного преобразования координат от развертки $\{u; n'\}$ к прямоугольной декартовой системе $\{x; y\}$:

$$\begin{cases} x = n', \\ y = u \cdot n'. \end{cases}$$

Это преобразование приводит к выпрямлению гипербол Рис. 1. Оно показано на Рис. 3 в виде сектора шириной $\pi/4$.



Выравнивание ряда Фарея $n = 100$

Здесь обе координаты размечены рисками с шагом 10 единиц. Начало координат условно обозначено глазом наблюдателя. Центр каждого крестика задается целочисленными координатами, соответствующими всем правильным рациональным дробям с взаимно простыми числителем и знаменателем от $0/100$ (левый нижний угол) до $100/100$ (правый верхний). Пунктиром обозначена прямая с уравнением $y = (1/2)x$.

Одно и то же подмножество правильных несократимых дробей воспроизводится крестиками и при параллельном проецировании на Рис. 1, и при центральном проецировании на Рис. 3. Если при центральном проецировании зарегистрировать следы проекций от крестиков на вертикальном единичном отрезке от точки $\{1; 0\}$ до $\{1; 1\}$, то получим такой же ряд Фарея, как на Рис. 1, только в уменьшенном масштабе. От пустых клеток, т. е. с сокращаемыми координатами, новых следов не образуется, поэтому все подмножество сокращаемых дробей следует отсеять. Поэтому Рис. 3 — это тоже развертка ряда Фарея.

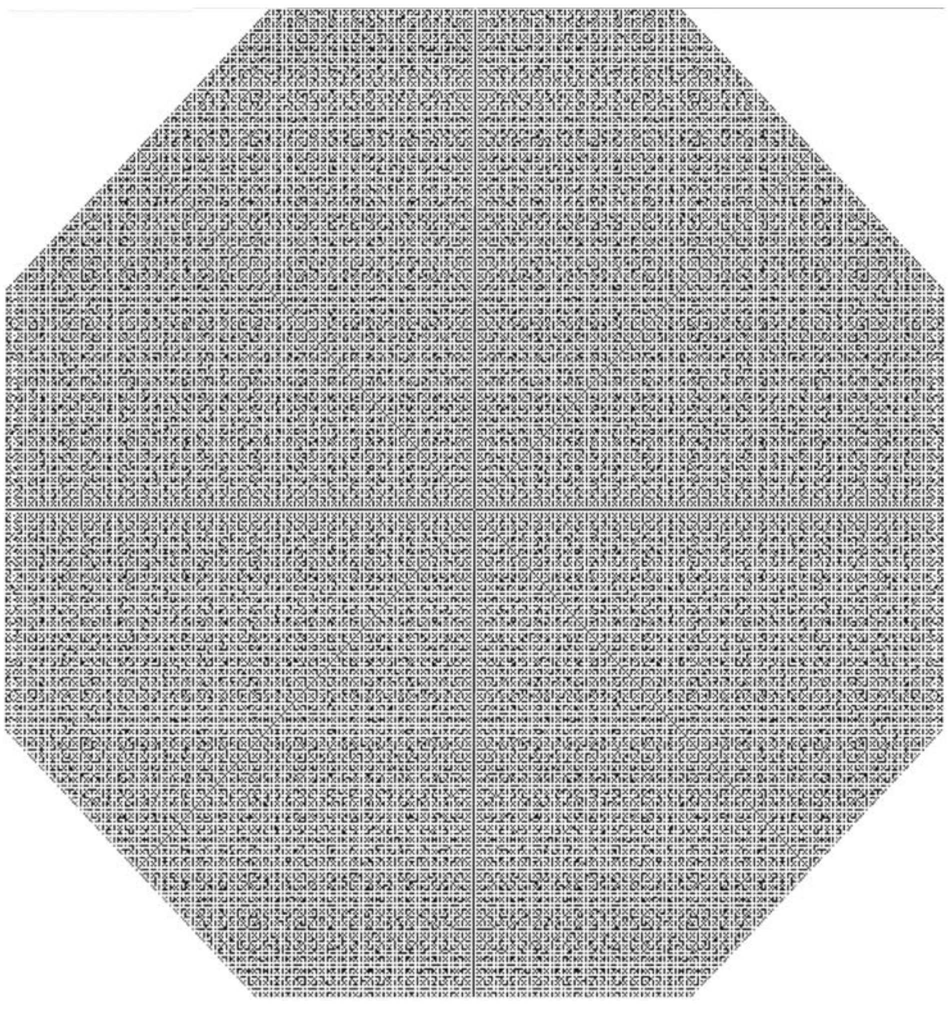
Рис. 3 показывает распределение видимых точек в целочисленной решетке в пределах сектора $\pi/4$. Обобщение на 2π приводит к другой задаче, формулируемой столь же элементарно, как деление отрезка. Пусть имеется лес деревьев, расположенных в узлах целочисленной решетки. Как распределены деревья, видимые изнутри леса? Или только скрытые деревья, которые расположены цепочкой за каждым видимым деревом? Конечно, в реальности угол обзора из-за конечного диаметра деревьев будет перекрыт полностью, поэтому будем предполагать достаточно малый диаметр.

Множество всех видимых точек-узлов $\boldsymbol{r}$ составляет на решете класс с отличительным признаком взаимной простоты их декартовых координат $\{x; y\}$, что означает условие на их наибольший общий делитель: $(x, y) = 1$. За каждой видимой точкой формируется цепочка скрытых точек $m\boldsymbol{r}$ с координатами $\{mx; my\}$, $m = 2, 3, 4, \ldots$ Длина каждой цепочки, т. е. максимальное значение m, ограничена только размером решета; если $m = 1$, то цепочки не образуется. Направление вектора $m\boldsymbol{r}$ совпадает с $\boldsymbol{r}$, а по длине он больше в m раз (но меньше быть не может). Эти цепочки, составляющие дополнительный класс, который характеризуется свойством декартовых координат $(x, y) > 1$, требуется отсеять аналогично тому, как отсеиваются составные числа в линейном решете. Такой алгоритм отсеивания не по кратности простому числу, а по кратности радиус-вектору видимой точки, резонно назвать плоским решетом Эратосфена.

Графическое построение обоих подмножеств показано на Рис. 4 для частного случая $n = 250$.

Скрытые узлы обозначены заливкой целочисленных точек, а видимые — пустые. На первый взгляд — полный хаос и удивительный узор. В таком случае предлагается наклонить рисунок вперед. Визуально сразу выявляются направления, указывающие, что числа имеют упорядоченную структуру. Видимые узлы выстраиваются в сквозные проходы через все решето, указывая на положение простых чисел. Их ряды параллельны координатным осям, а промежутки между ними заполнены скрытыми узлами, создающими квазиоднородный фон. А вращение рисунка в плоскости выявляет, что структура изменяется, моделируя некий числовой калейдоскоп.

Пренебрегая локальной дискретностью, можно было бы в континуальном пределе ввести понятие плотности скрытой материи (или дополняющей ее видимой), однако более интересными представляются мелкомасштабные дискретные структуры. По внешнему виду Рис. 4 изменения плотности в пределах до $n = 250$ не заметны.



Обзор скрытых точек

Сравнивая Рис. 3 и 4, заметим, что ограничение восьмой частью плоскости на Рис. 3 выглядит несколько искусственно. Внутренние свойства симметрии решета связывают различные ее участки между собой таким образом, что по ее $1/16$ части, примыкающей к оси абсцисс (половина треугольника Рис. 3 под пунктиром), можно восстановить его полностью. Для этого к его исходной части в секторе шириной $\pi/8$ (точнее, между осью абсцисс и лучом зрения под углом зрения $\mathrm{arctg}(1/2)$) следует сначала применить так называемое преобразование перекоса

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1}$$

которое переводит распределение в каждом вертикальном сечении зеркально симметрично относительно вышеуказанного луча зрения: каждой видимой точке, расположенной ниже или выше этой линии соответствует еще одна с той же абсциссой, но расположенной на том же расстоянии и по другую сторону, соответственно выше или ниже выбранного луча. Это свойство перекоса, являющееся следствием симметрии развертки ряда Фарея на Рис. 1, относится уже к удвоенному сектору всех правильных дробей шириной $\pi/4$. Далее этот сектор с помощью зеркального отражения вокруг биссектрисы $y = x$ еще удваивают до полного квадранта $\pi/2$, добавив неправильные дроби

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Преобразование (2) сводится к перестановке координатных осей, что, конечно, не может повлиять на распределение. В завершение последовательно используется зеркальное отражение вокруг оси ординат с расширением до полуплоскости (сектор шириной π):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3}$$

и зеркальное отражение вокруг оси абсцисс (вся плоскость решета):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Итак, распределение точек в решете остается инвариантным при поворотах вокруг двух пар ортогональных осей: биссектрис $y = \pm x$ и координатных осей x и y. То же самое относится и к сдвигам относительно осей $y = \pm(1/2)x$ и $y = \pm 2x$. Будучи примененными повторно к любой точке, все эти преобразования возвращают ее в исходное положение. Это проверяется по тому, что квадраты каждой матрицы в (1)–(4) переходят в единичную матрицу тождественного преобразования.

При определении стандартного ряда Фарея рассматривалась только часть множества дробей. Обобщение на всю плоскость решета с произвольным радиус-вектором его точек $\boldsymbol{r}$ требует введения расширенного ряда Фарея. Будем приписывать к сектору Рис. 3 по правилам симметрии такие же распределения в направлении против часовой стрелки, чтобы воспроизвести обзор по всей плоскости. Так, если стандартный ряд Фарея порядка 5 состоит из 10 членов

1	1	1	2	1	3	2	3	4	1
5	4	3	5	2	5	3	4	5	1

(горизонтальные скобки связывают симметричные члены), то расширенный ряд Фарея — из 80 по определению:

1	1	1	2	1	3	2	3	4	1	5	4	3	5	2	5	3	4	5	1	5	4	3	5	2	5	3	4	5	1	4	3	2	3	1	2	1	1	1
5	4	3	5	2	5	3	4	5	1	4	3	2	3	1	2	1	1	1	0	−1	−1	−1	−2	−1	−3	−2	−3	−4	−1	−5	−4	−3	−5	−2	−5	−3	−4	−5

→

0	−1	−1	−1	−2	−1	−3	−2	−3	−4	−1	−5	−4	−3	−5	−2	−5	−3	−4	−5	−1	−5	−4	−3	−5	−2	−5	−3	−4
−1	−5	−4	−3	−5	−2	−5	−3	−4	−5	−1	−4	−3	−2	−3	−1	−2	−1	−1	−1	0	1	1	1	2	1	3	2	3

→

−5	−1	−4	−3	−2	−3	− − 1	−2	−1	−1	−1	0
4	1	5	4	3	5	2	5	3	4	5	1

.

Здесь верхний ряд — это числители, а нижний — знаменатели дробей ряда, хотя числовые значения дробей теряют физический смысл, когда $x = 0$.

При таком обобщении подмножество всех видимых точек решета проецируется на стороны квадрата с центром в начале координат и четырьмя вершинами в точках $\{\pm 1; \pm 1\}$. Эти проекции и определяют расширенный ряд Фарея. Его развертка показывает, как распределены все видимые (или скрытые как дополнение) точки плоского решета Эратосфена.

Еще одно свойство распределения обнаруживается при рассмотрении сечения решета параллельно осям симметрии. Так, исходный сектор на Рис. 3 сдвигается на некоторое число m шагов по закону

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad m = \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4 \cdots \tag{5}$$

При таком сдвиге каждое сечение сектора переносится вверх или вниз с сохранением того же чередования видимых и скрытых точек сечения. Фиксированный шаг сдвига, означающий периодичность, равен расстоянию между осями симметрии, измеренному по вертикали. Аналогичная периодичность решета выявляется и при горизонтальном сдвиге. Однако в отличие от предыдущих преобразований повторный сдвиг уже не дает исходного распределения.

Преобразование сдвига (5) может быть связано с проблемой факторизации чисел. В частности, по сквозным проходам вдоль сечения, состоящим только из видимых точек и двух скрытых на границе, сразу идентифицируются все простые числа. Признак равномерности распределения скрытых точек характерен и для степеней простых чисел, когда на участке между осями симметрии, т. е. в одном периоде, обнаруживаются эти точки в количестве, равном показателю степени. При этом фиксированная координата сечения, если ее значение записать в каноническом представлении, будет содержать только один ненулевой член.

В общем случае каноническое представление любого числа может быть выполнено по спектру пространственных частот. Простое число и его степени можно назвать одночастотными. Но поиск простых чисел — это частность.

Если координата сечения решета разлагается на два или больше различных простых сомножителя, то в периоде решета будут встречаться смежные скрытые точки по 2 штуки, три и т. д., свидетельствуя о суперпозиции пространственных частот. Разработанный в теории колебаний аппарат спектрального анализа по пространственным частотам в распределении точек на решете вполне применим к факторизации чисел.

Следует указать, что периодичность решета проявляется не только по единичным сечениям, но и по полосам конечной ширины, например, в приосевой области. Если ширина не превышает нескольких единиц, то на решете обозримых размеров периодичность выявляется визуально, но с дальнейшим увеличением ширины длина периода возрастает по закону типа факториального, т. е. очень быстро, так что периодичность не обнаруживается.

Другой подход к анализу плоского решета Эратосфена связан с исследованием микроструктуры. Введем некоторые определения. Две скрытые точки считаются *соединенными*, если одна из их координат одинаковая, а другая отличается на 1. На обеих координатных осях расположены только скрытые соединенные точки, за исключением 4-х видимых, ближайших к наблюдателю: $\{\pm 1; 0\}$ и $\{0; \pm 1\}$. *Кластером* считается соединение двух или более отрезков, прямых или ломаных, со сливающимися точками, т. е. образующими участок 2×2 хотя бы с тремя скрытыми точками. Полное число входящих в кластер скрытых точек будем считать его «размером», хотя эта характеристика не полная, она может соответствовать кластерам различной формы. Два простейшие точки *касаются* друг друга, выстраиваясь в наклонную цепочку, если их координаты отличаются на 1 с одним и тем же знаком:

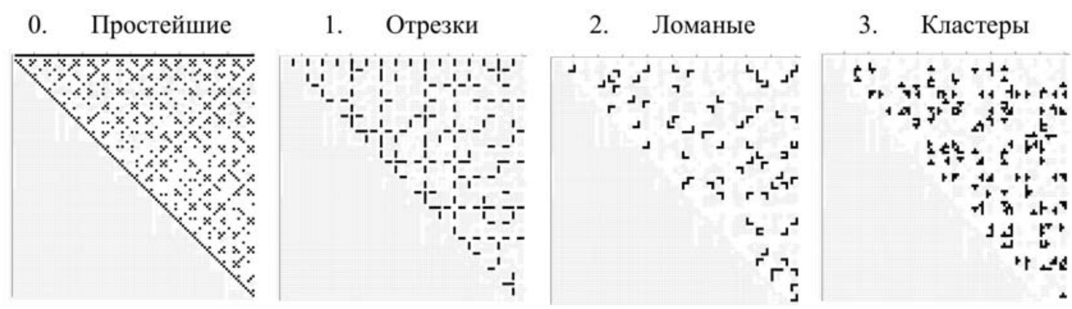
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \pm 1 \\ y_2 \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Две пары смежных с осями линий $x = \pm 1$ и $y = \pm 1$ состоят, формируя лучи, полностью из видимых точек. В то же время все точки на диагоналях решета, кроме 4-х ближайших, скрытые, т. е. «простейшие», касающиеся друг друга. А соседние с ними точки $x = y \pm 1$ — все видимые.

По Рис. 3 или 4 можно также заметить, что длина участков из видимых точек с удалением от наблюдателя увеличивается гораздо быстрее, чем скрытых. В грубом приближении можно сказать, что если видимые точки решета группируются в непрерывные отрезки, длина которых может быть любой вплоть до сопоставимой с расстоянием до наблюдателя, то скрытые точки формируют специфическую микроструктуру в виде филаментов сравнительно малой длины, внешне напоминающую двумерный QR-код. Однако принципиальное отличие QR-кода заключается в том, что он может быть любым в зависимости от кодируемой информации. Построение же микроструктур подчиняется специфическим правилам отбора, в частности, отбору по четности, см. ниже. Абсолютный детерминизм микроструктуры на самом деле проявляется хотя бы в ограниченном наборе тех форм, которые реализуют соединения из скрытых точек. Так, в секторе решета $\pi/4$ на Рис. 3 выявлено всего 12 форм:

Зоопарк скрытых микроструктур

В сформулированной вначале задаче распределения скрытого леса существенное значение имеет анализ этих форм. Для этой цели адекватным аппаратом представляются методы распознавания образов с помощью оптической фильтрации бинарных изображений. При обработке вручную Рис. 3 формы были рассортированы по 4 группам:



Сортировка скрытых точек

Скрытая точка $\{mx; my\}$ определяется как *простейшая* (атом), если 4 окружающие ее точки имеют взаимно простые координаты:

$$\begin{aligned} (mx \pm 1, my) &= 1, \\ (mx, my \pm 1) &= 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Чтобы скрытая точка была простейшим, она должна соответствовать рациональной дроби, числитель и знаменатель которой одновременно или четные $\{2k; 2l\}$, или нечетные $\{2k+1; 2l+1\}$. Действительно, в противном случае точка с координатами $\{2k; 2l+1\}$ или $\{2k+1; 2l\}$ при смещении на единицу соответственно вверх/вниз или влево/вправо приводит, как легко показать, к тому, что соседние с ней точки обязательно окажутся с четным и числителем, и знаменателем, что для видимых точек недопустимо.

1. Прямые отрезки. Соединение скрытых точек начинается с формирования прямых отрезков различной длины. Первые соединенные отрезки из 3 скрытых точек появляются, начиная с $n = 6$.

Как и в случае простейших, отрезок может касаться других соединений или быть полностью изолированным, т. е. окруженным $2L + 6$ видимыми точками (L — длина отрезка). Все отрезки между простыми числами-близнецами прямые и изолированные.

Правило отбора по четности устанавливает, что отрезок может быть только нечетной длины. Для доказательства выберем отрезок горизонтальным. Тогда для граничащей с ним слева видимой точки допустимы 3 варианта четности:

- «чет/нечет»: $\{2k;2l{+}1\}$;
- «нечет/чет»: $\{2k{+}1;2l\}$;
- «нечет/нечет»: $\{2k{+}1;2l{+}1\}$.

Но последний вариант можно сразу исключить, потому что тогда две видимых точки над левым концом отрезка или под ним будут иметь сокращаемые координаты $\{2k+2;2l\}$ или $\{2k+2;2l+2\}$. $\{2k;2l+1\}$ или $\{2k+1;2l+1\}$. Предположим, длина отрезка четная — $2L$. Тогда граничащая с ним справа видимая точка может иметь координаты соответственно первым двум вариантам $\{2k+2L+1;2l+1\}$ или $\{2k+2+2L;2l\}$. Второй случай вновь исключается из-за сократимости на 2. Оставшийся первый случай недопустим по той же причине, если рассмотреть новую видимую точку, соседнюю с правым концом отрезка выше или ниже: $\{2k+2L;2l\}$ или $\{2k+2L;2l+2\}$. Таким образом, прямые отрезки могут быть только нечетной длины. Этот вывод корректен и для вертикального отрезка, потому что правила отбора по четности всегда выполняются одинаково относительно перестановки координатных осей, или преобразования (2).

Чтобы определить максимальную длину отрезка L, следует обратиться к задаче поиска в натуральном ряду сплошного участка, гарантированно состоящего из составных чисел. Согласно имеющемуся в задачниках по теории чисел решению (например, [2], стр. 23) достаточно, чтобы этот отрезок отстоял от начала координат на

$$(L+1)!+2,\quad (L+1)!+3,\quad (L+1)!+4,\quad \ldots,\quad (L+1)!+L-1,\quad (L+1)!+L,\quad (L+1)!+L+1.$$

При этом с каждым приращением L на единицу новая последовательность сдвигается на расстояние $(L{+}1)!\cdot(L{+}1)$ относительно предыдущего начала. Чтобы воспроизвести на решете такое увеличение, размер решета необходимо увеличивать по факториальному закону. Для решета фиксированного размера это означает очень сильное замедление скорости роста L.

2. Ломаные. Эти фигуры можно определить как линейные структуры и характеризовать их длиной, т. е. числом составляющих их скрытых точек. Перечислим для примера координаты скрытых точек, из которых состоит «угольник», 3-я фигура Рис. 5:

$$\begin{array}{ccccc} \{4;10\} & \rightarrow & \{5;10\} & \rightarrow & \{6;10\} \\ & & & & \downarrow \\ & & & & \{6;9\} \\ & & & & \downarrow \\ & & & & \{6;8\} \end{array}$$

Как и в случае прямых отрезков, их размер не может превысить длину замыкающих отрезков.

3. Кластеры. По разнообразию форм можно судить об эволюции соединений с удалением их от наблюдателя. На Рис. 3 их нашлось 101. Хотя среди них есть повторяющиеся, но вообще-то чем дальше, тем они становятся уникальнее. Например, в прямоугольнике с диагональю от точки $\{185;152\}$ до $\{190;156\}$ кластер  состоит из 16 скрытых точек (эффект кучкования). Его размеры $6{\times}5$ ограничиваются там, где он расположен, длиной 9. Размеры прямоугольника, в который вписан кластер, могут достигать максимальной длины прямого отрезка, но не могут превысить ее. Поэтому хотя по абсолютной величине кластеры, эволюционируя, растут, но по относительной — все более мельчают. В асимптотике распределение оказывается квазиоднородным.

Преобразование перекоса (1) изменяет форму соединений. Например, квадрат с отростком из Рис. 5 принимает вид , т. е. он разделился на два кластера, касающихся друг друга. Перекос состоит в том, что каждое сечение исходного квадрата сдвигается на 1 шаг в сторону биссектрисы $x=y$ квадранта, в котором он расположен. Аналогично этому, прямой отрезок преобразуется в цепочку простейших. Однако преобразования симметрии (1)–(4) никак не влияют на форму соединений, а только повторяют их в другом месте решета.

4. Пересечение видимых структур. Правило четности регламентирует и видимые структуры, которые являются лишь дополнением скрытых до полного множества целочисленных точек решета. Их особенность в том, что они не могут включать в себя сплошные ячейки, как, например, 7-я структура на Рис. 6. Действительно, легко показать, что четверка 2×2 смежных дробей: «исходная» m/N, «правая» $(m+1)/N$, «верхняя» $m/(N+1)$, «диагональная» $(m+1)/(N+1)$, не может вся состоять из несократимых дробей. Первая дробь допускает в принципе 4 варианта четности: $2k/2l$, $(2k+1)/2l$, $2k/(2l+1)$, $(2k+1)/(2l+1)$, и один из них, в данном случае первый, приводит к сократимости, так что он исключается. Далее, если первая дробь имеет вид $(2k+1)/2l$, то сократимой оказывается «правая» дробь; если вид $2k/(2l+1)$, то сократимая «верхняя» дробь; если вид $(2k+1)/(2l+1)$, то сократимая «диагональная» дробь. Таким образом, четверки из видимых точек реализованы быть не могут: одна из четырех обязательно скрытая. По этой причине траектории из видимых точек могут пересекаться друг с другом только в одной точке, не образуя площадей.

Для сопоставления со скрытыми структурами покажем кластер, состоящий из 9 точек, с координатами $\{230; 54\} \sim \{232; 57\}$: . В целом же кластеры при удалении от наблюдателя имеют тенденцию к вытягиванию в одномерные нити.

Литература

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основания информатики. — М.: Мир, 1998.

2. Виноградов И.М. Основы теории чисел. — Москва-Ижевск: НИЦ: «Регулярная и хаотическая динамика», 2003.

Лисин Олег Георгиевич,
инженер Московского представительства
КАС КОРПОРЕЙШН Лтд,
кандидат физю-мат. наук.

E-mail: olgeo_lissin@mail.ru

О некоторых свойствах линии Жергонна в треугольнике

С. М. Тахаев

В статье рассмотрены свойства и особенности линии Жергонна (триполяра точки Ge) и тесно связанной с ней линии Содди. Показана возможность быстрого построения центров окружностей Содди. Проведен анализ построения трёх касательных окружностей между линией Жергонна и сторонами треугольника. Предложен способ построения окружностей, касательных к ним и к вписанной окружности исходного треугольника.

1. Общие положения и определения

Для определенности напомним некоторые положения и определения из элементарной геометрии треугольника, использованные в данной работе.

Чевиана — отрезок в треугольнике, один конец которого является вершиной, а другой конец лежит на противоположной этой вершине стороне. Медианы, высоты, биссектрисы — частные случаи чевиан. Название произошло от имени итальянского инженера Джованни Чевы, который доказал в 1678 г. хорошо известную теорему об этих отрезках и которая носит его имя. Чевианный треугольник — треугольник, тремя вершинами которого являются три основания чевиан исходного треугольника.

Точка Жергонна (Ge) — точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон и вписанной окружности.

Трилинейный поляр (триполяр) произвольной точки относительно данного треугольника — прямая, содержащая точки пересечения прямых, проходящих через стороны чевианного треугольника данной точки с прямыми через соответствующие стороны исходного треугольника.

Линия Жергонна — триполяр точки Жергонна, при этом ее чевианный треугольник образован точками касания сторон исходного треугольника и вписанной в него окружности.

Линия Содди — прямая линия, перпендикулярная линии Жергонна и проходящая через центр вписанной окружности треугольника и его точку Жергонна.

Две точки B,D *делят произвольный отрезок AC гармонически*, если они делят его внутренним (точка B) и внешним (точка D) образом в одном и том же отношении. Это означает, что $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$.

2. Анализ построения линии Жергонна

Пусть задан произвольный треугольник ABC (рис. 1). Введем обозначения: r — радиус вписанной окружности; $s-b=R_1$, $s-a=R_2$, $s-c=R_3$ — радиусы взаимнокасающихся окружностей с центрами в вершинах $\triangle ABC$, здесь $s=R_1+R_2+R_3$ — полупериметр; D,E,F — точки касания вписанной окружности. Примем, не нарушая общности полученных результатов, что $a>b>c$. Положим:

$$t_a = \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{s-a} = \frac{r}{R_2}; \quad t_b = \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{s-b} = \frac{r}{R_1}; \quad t_c = \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{s-c} = \frac{r}{R_3}. \tag{1}$$

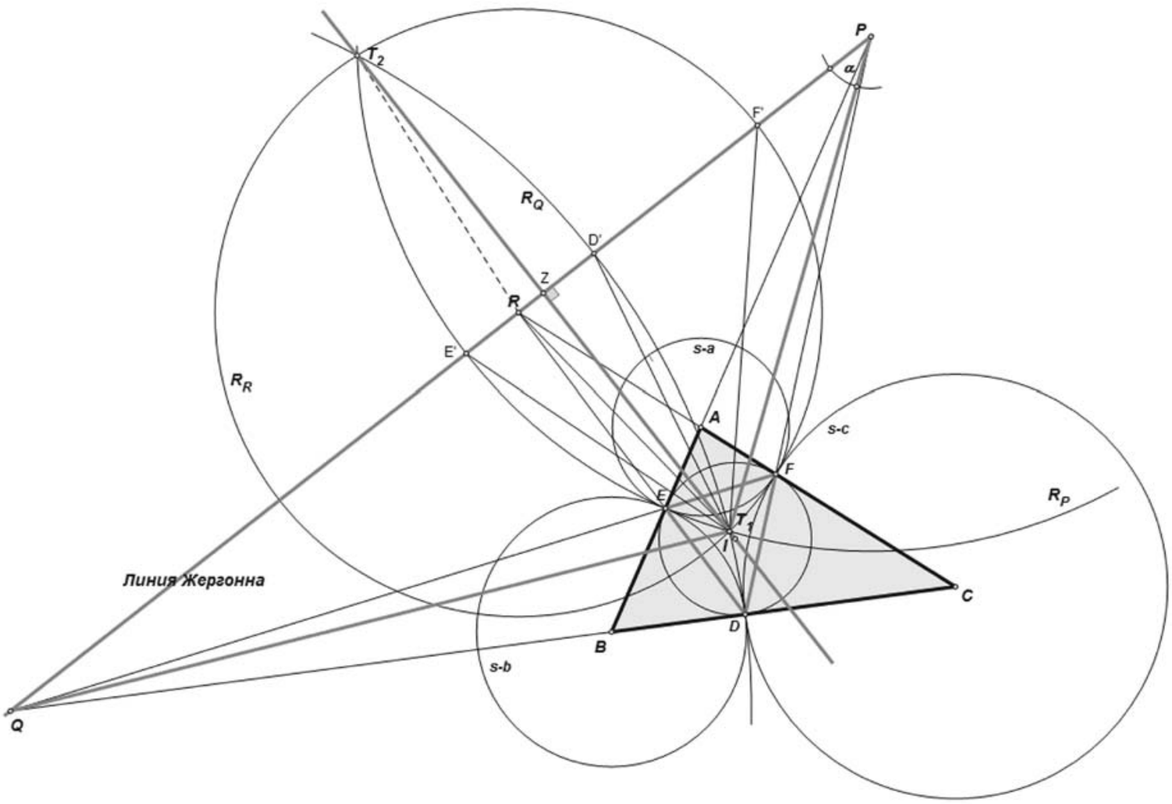


Рис. 1

В произвольном треугольнике $t_at_b+t_at_c+t_bt_c = 1$. Построим триполяр точки Жергонна ($\triangle DEF$ — чевианный треугольник точки Ge). В литературе он носит название "линия Жергонна" $\triangle ABC$ [1], при этом, как известно [2], точки Q, D; R, F; P, E делят гармонически отрезки BC, CA, AB соответственно. Обозначим: $QD = k$, $RF = m$, $PE = n$. Из точек Q, R, P как из центров проведем окружности R_Q, R_R, R_P радиусами k, m, n соответственно. Эти три окружности пересекаются в точках T_1, T_2 (центры лежат на одной прямой и радикальные оси совпадают). Следовательно, прямая T_1T_2 перпендикулярна прямой QP. Это хорошо известная *линия Содди*, и точки T_1, T_2 — это точки X_{3638}, X_{3639} в энциклопедии К. Кимберлинга [3].

Итак, рассмотрим гармоническую четверку точек — $CA(RF)$:

$$\frac{CF}{FA} = \frac{RC}{RA} = \frac{R_3}{R_2},$$

тогда

$$\frac{R_3 + m}{m - R_2} = \frac{R_3}{R_2}$$

откуда

$$m = \frac{2R_3R_2}{R_3 - R_2}. \tag{2a}$$

Аналогично вычисляем

$$k = \frac{2R_3R_1}{R_3 - R_1}; \tag{2b}$$

$$n = \frac{2R_1R_2}{R_1 - R_2}. \tag{2c}$$

В $\triangle RPT_1$ пусть $\angle RT_1P = x$. По теореме косинусов из $\triangle RPA$ имеем

$$RP^2 = RA^2 + PA^2 - 2RA \cdot PA \cdot \cos A;$$

Здесь

$$RA = m - R_2; \qquad PA = n - R_2.$$

Из $\triangle RT_1P$ получаем

$$RP^2 = RT_1^2 + PT_1^2 - 2RT_1 \cdot PT_1 \cdot \cos x.$$

Приравнивая выражения для RP^2, получим

$$(m - R_2)^2 + (n - R_2)^2 - 2(m - R_2)(n - R_2)\cos A = m^2 + n^2 - 2mn\cos x. \tag{3}$$

Известно, что в $\triangle ABC$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2(R_3R_2 + R_1R_2 - R_1R_3 + R_2^2)}{2((R_3 + R_2)(R_1 + R_2)}. \tag{3a}$$

После подстановки значений $m, n, \cos A$ в (3) и несложных преобразований получим

$$\cos x = \frac{2R_3R_1}{4R_3R_1} = \frac{1}{2},$$

тогда $x = \angle RT_1P = 60^\circ$. Из рассмотрения $\triangle QBP$ и $\triangle QPT_1$ после подобных вычислений получим $\angle QT_1P = 120^\circ$. Следовательно, в $\triangle QPT_1$ отрезок RT_1 — биссектриса.

Обозначим $\angle QPT_1 = \alpha$. В $\triangle RT_1P$ по теореме синусов

$$\frac{m}{\sin\alpha} = \frac{n}{\sin(120^\circ - \alpha)}.$$

Пусть

$$\frac{n}{m} = \tau \Rightarrow \frac{\sin(60^\circ + \alpha)}{\sin\alpha} = \tau,$$

тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\tau - 1}. \tag{4}$$

В $\triangle QPT_1$ имеем

$$\frac{k}{\sin\alpha} = \frac{n}{\sin(60^\circ - \alpha)}.$$

Пусть

$$\frac{n}{k} = \upsilon \Rightarrow \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin\alpha} = \upsilon$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\upsilon + 1}. \tag{4a}$$

Решая совместно (4) и (4а), получим

$$mk + mn - kn = 0. \tag{5a}$$

В зависимости от соотношения сторон (углов) $\triangle ABC$ величины отрезков m, n, k могут меняться, поэтому в общем виде это уравнение примет вид

$$\pm mk \pm mn \pm kn = 0. \tag{5}$$

Мы получили следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть в треугольнике построен трилинейный поляр произвольной точки. Если алгебраическая сумма произведений радиусов окружностей с центрами в ее полюсах, проходящих через точки касания вписанной в треугольник окружности, равна нулю, то этот триполяр — линия Жергонна данного треугольника.*

Построим отрезки, соединяющие точки (E', D', F') пересечения окружностей R_P, R_Q, R_F с линией Жергонна и точку T_1. Элементарные расчеты (рассмотрение равнобедренных $\triangle PE'T_1$, $\triangle QD'T_1$, $\triangle RF'T_1$) дают снова интересный результат: $\angle E'T_1D' = \angle F'T_1D' = 30°$. Читатель может убедиться в этом самостоятельно.

3. Расположение линий Жергонна и Содди относительно сторон треугольника

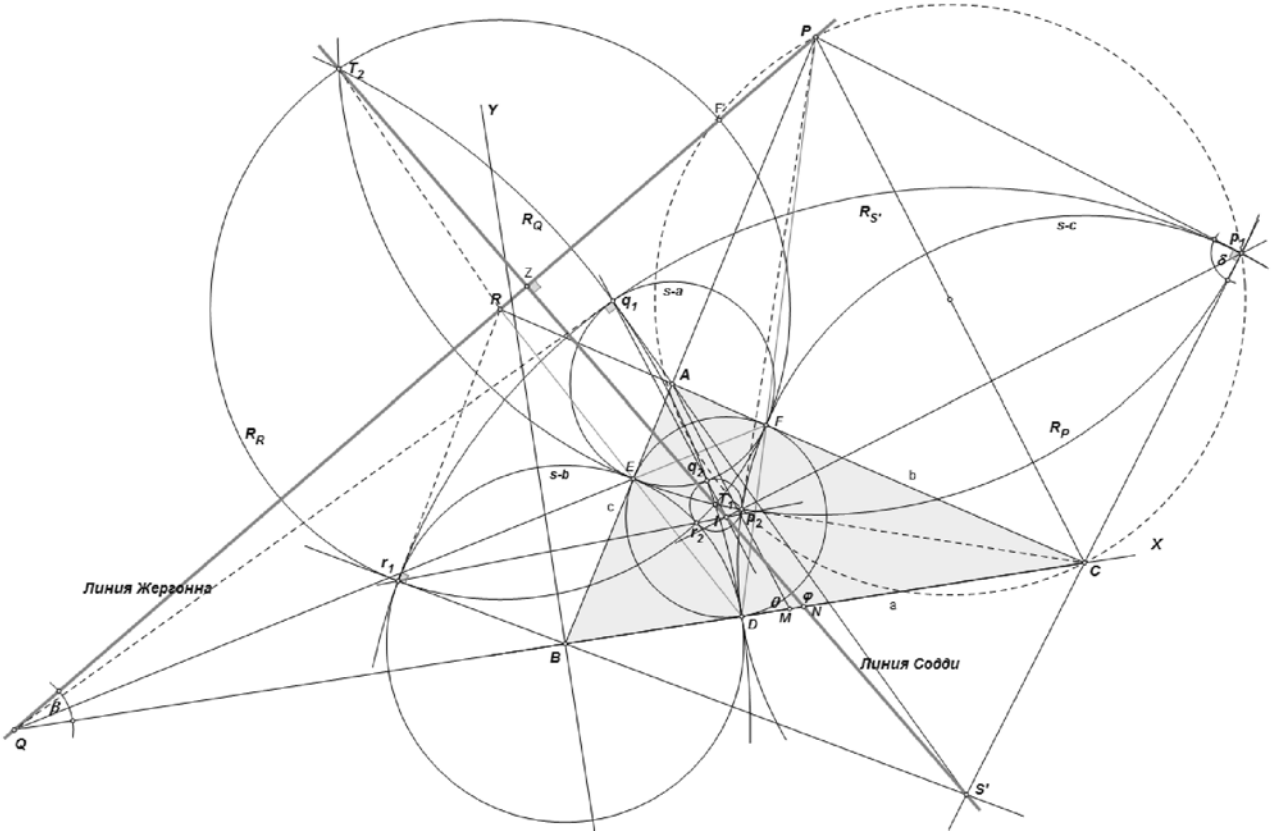


Рис. 2

Введем прямоугольную систему координат — $B(0;0)$; $C(a;0)$ (рис 2). Обозначим $\angle PQC = \beta$. Из $\triangle QBP$ имеем

$$\frac{BP}{\sin\beta} = \frac{QB}{\sin(B-\beta)}.$$

Пусть $\xi = \frac{QB}{BP}$. Тогда

$$\xi = \frac{\sin(B-\beta)}{\sin\beta} = \frac{\sin B\cos\beta - \cos B\sin\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin B - \cos B tg\beta}{\operatorname{tg}\beta},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin B}{\xi + \cos B}. \tag{6}$$

Найдем значение ξ. С учетом (1) и (2b)

$$QB = k - R_1 = \frac{R_1(R_3 + R_1)}{R_3 - R_1} = \frac{R_1(t_b + t_c)}{t_b - t_c}. \tag{7}$$

$$BP = n + R_1 = \frac{R_1(R_1 + R_2)}{R_1 - R_2} = \frac{R_1(t_a + t_b)}{t_a - t_b},$$

но $t_a = \dfrac{1 - t_b t_c}{t_b + t_c}$, тогда

$$BP = \frac{R_1(1 + t_b^2)}{1 - 2t_b t_c - t_b^2}. \tag{8}$$

Далее,

$$\xi = \frac{QB}{BP} = \frac{(t_b + t_c)(1 - 2t_b t_c - t_b^2)}{(t_b - t_c)(1 + t_b^2)}. \tag{9}$$

После подстановки (9) в (6) и проведения некоторых преобразований получим

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{t_b - t_c}{1 - (t_b^2 + t_b t_c + t_c^2)}. \tag{10}$$

Обозначим $K_{Ge} = \operatorname{tg}\beta$ — тангенс угла наклона линии Жергонна к оси абсцисс. Как известно, на линии Содди расположены центры (S, S') малой и большой окружностей Содди. Напомним, что это окружности, касающиеся внешним и внутренним образом трех взаимнокасающихся окружностей с радиусами $s - a, s - b, s - c$. Введем обозначения: ϕ — угол наклона линии Содди к оси абсцисс, $K_{SS'} = \operatorname{tg}\phi$. Так как линии Жергонна и Содди перпендикулярны, то из аналитической геометрии [4] известно, что $K_{Ge} \cdot K_{SS'} = -1$.

$$K_{SS'} = \operatorname{tg}\phi = -\frac{1 - (t_b^2 + t_b t_c + t_c^2)}{t_b - t_c} \tag{11}$$

и, если $t_b^2 + t_b t_c + t_c^2 = 1$, то $K_{SS'} = 0$ и линия Содди параллельна BC. Доказана

Теорема 2. *Линия Содди произвольного треугольника параллельна одной из его сторон, если и только если неполный квадрат суммы тангенсов половинных углов, прилежащих к этой стороне, равен 1.*

Верна и обратная теорема: пусть $K_{SS'} = 0$, тогда из (11) получаем: $t_b^2 + t_b t_c + t_c^2 = 1$.

Следствие 1. *Если треугольник равнобедренный ($t_b = t_c$) и $K_{Ge} = 0$, то линия Жергонна параллельна стороне треугольника, содержащей эти углы; при этом $K_{SS'} = \infty$, угол $\phi = 90^\circ$ и линия Содди совпадает с высотой треугольника, проведенной к этой стороне.*

4. Построение центров малой и большой окружностей Содди

Окружность R_Q пересекает окружность R_2 радиуса $(s - a)$ в точках q_1, q_2; окружность R_R пересекает окружность R_1 радиуса $(s - b)$ в точках r_1, r_2; окружность R_P пересекает окружность R_3 радиуса $(s - c)$ в точках p_1, p_2 (рис. 2). Обозначим $\angle P p_1 C = \delta$. Из $\triangle APC$ находим $PC^2 = PA^2 + CA^2 - 2PA \cdot CA \cos(180^\circ - A)$, где $PA = n - R_2; CA = R_3 + R_2$. Из $\triangle P p_1 C$ находим $PC^2 = (Pp_1)^2 + (Cp_1)^2 - 2Pp_1 \cdot Cp_1 \cdot \cos\delta$, где $Pp_1 = n; Cp_1 = R_3$. Приравнивая выражения для PC^2, получим

$$nR_3 \cos\delta = nR_2 - R_2^2 - R_3 R_2 - \frac{R_2 bc \cos A}{R_1 - R_2}.$$

После подстановки значений для «n»; «$\cos A$» и проведения несложных (как в разделе 1) преобразований получим: $\cos\delta = 0$ и угол $\delta = 90^\circ$. Следовательно, $\triangle P p_1 C$ — прямоугольный. Отрезки

$Pp_1(Pp_2)$ — касательные к окружности R_3 радиуса $(s-c)$. Точки $p_1(p_2)$ — точки касания окружностей Содди (большой и малой) и окружности R_3 радиуса $(s-c)$; линии $p_1C(p_2C)$ проходят через центры $S'(S)$ соответственно.

Аналогично доказывается, что угол $Rr_1B = 90°$, угол $Qq_1A = 90°$ и точки $r_1(r_2)$; $q_1(q_2)$ — точки касания окружностей Содди и окружностей $R_1(s-b)$ и $R_2(s-a)$.

Вышеизложенное позволяет строить центры окружностей Содди очень простым способом с помощью любой из доступных (на чертеже) точек (P,Q,R) линии Жергонна. Для этого достаточно построить линию Содди (точки $I;Ge$), одну из окружностей RP,RQ,RR Точки пересечения этих окружностей с соответствующими окружностями $s-a$, $s-b$, $s-c$ определяют их точки касания с большой и малой окружностями Содди. После этого провести прямую через соответствующие вершины $\triangle ABC$ и точку касания до пересечения с линией Жергонна. Следует отметить, что прямые, соединяющие точки касания — p_1p_2; q_1q_2; r_1r_2 — всегда пересекаются в центре вписанной окружности $\triangle ABC$.

5. Нахождение целочисленных треугольников, у которых $t_b^2+t_bt_c+t_c^2=1$

Представляет интерес нахождение целочисленных треугольников, имеющих линию Содди параллельную одной из сторон заданного треугольника. Заметим, что для целочисленных треугольников тангенсы их половинных углов должны быть рациональными числами. Итак,

$$t_b^2+t_bt_c+t_c^2=1 \;\;\Rightarrow\;\; t_b^2+t_bt_c+t_c^2-1=0;\; t_b=\frac{-t_c\pm\sqrt{4-3t_c^2}}{2}.$$

Для получения целочисленных треугольников обозначим подкоренное выражение $4-3t_c^2=p^2$ и после несложных преобразований получим

$$(2-p)(2+p)=3t_c^2 \quad \text{или} \quad \frac{2-p}{t_c}=\frac{3t_c}{2+p}=w,$$

где $w=\frac{m}{n}$, $(n>m>0)$ — рациональные коэффициенты. Теперь составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (2+p)w=3t_c;\\ 2-p=wt_c. \end{cases}$$

После решения получим следующие выражения

$$t_c=\frac{4w}{w^2+3}=\frac{4mn}{3n^2+m^2};\;\; t_b=\frac{3n^2-2mn-m^2}{3n^2+m^2};\;\; t_a=\frac{1-t_bt_c}{t_b+t_c};\;\; p=\frac{6n^2-2m^2}{3n^2+m^2}.$$

В данной работе мы ограничимся только нахождением t_a,t_b,t_c и в нижеследующей таблице приведем некоторые примеры.

№№	m	n	t_b	t_c	t_a
1	1	2	7/13	8/13	113/195
2	1	3	20/28	12/28	17/28
3	1	4	39/49	16/49	1777/2695
4	2	3	11/31	24/31	697/1085
5	2	5	51/79	40/79	4201/7189

6. Линия Жергонна и большая окружность Содди

На рис. 2 проведем прямую AM, которая делит исходный треугольник ABC на два субтреугольника с равными вписанными окружностями, ее угол наклона к стороне BC равен θ. В [5] показано, что если линия Содди параллельна прямой AM, то $\triangle ABC$ имеет вырожденную в прямую большую окружность Содди. Треугольники с вырожденной большой окружностью Содди в литературе называются треугольниками Содди (Soddian triangles). Предположим, что линия Содди параллельна прямой AM, тогда $180 - \phi = \theta$ и

$$-\operatorname{tg}\phi = \frac{1 - (t_b^2 + t_b t_c + t_c^2)}{t_b - t_c}. \tag{12}$$

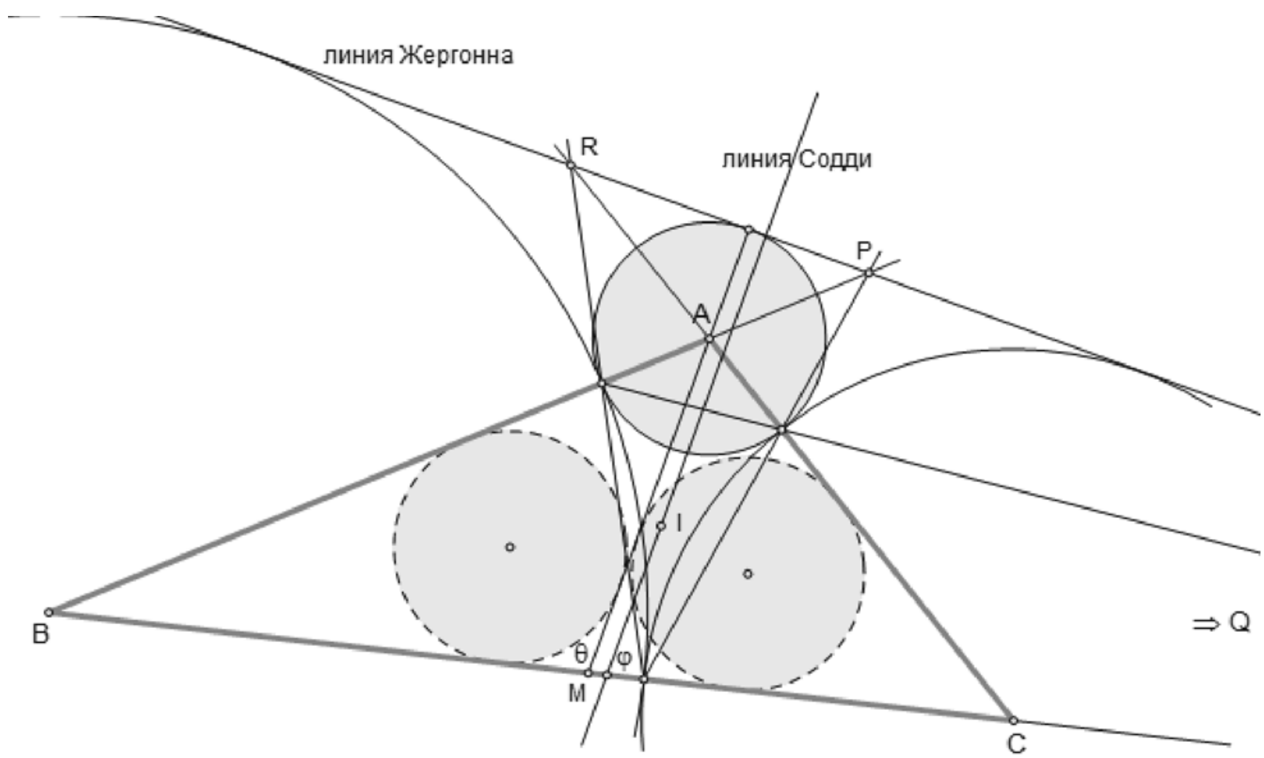


Рис. 3

Применим формулы из [5]:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2\operatorname{tg}\theta/2}{1 - \operatorname{tg}^2\theta/2} = \frac{2\sqrt{t_b t_c}}{t_b - t_c}. \tag{13}$$

Приравнивая (12) и (13) и упрощая, получим

$$1 - (t_b^2 + t_b t_c + t_c^2) = 2\sqrt{t_b t_c}$$

и далее после преобразований

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 + 2 = 4 - (1 + 2\sqrt{t_b t_c} + t_b t_c) + t_a^2 \quad \text{или} \quad (t_a + t_b + t_c)^2 = 4 - (1 + \sqrt{t_b t_c})^2 + t_a^2. \tag{14}$$

Рассмотрим внимательно выражение (14). Как известно [5], в треугольниках Содди $K = t_a + t_b + t_c = 2$ — сумма тангенсов половинных углов $\triangle ABC$. Кроме того, если $a > b > c$, то имеет место следующая формула

$$\frac{1}{\sqrt{s-a}} = \frac{1}{\sqrt{s-b}} + \frac{1}{\sqrt{s-c}}. \tag{15}$$

Домножим обе части (15) на $\sqrt{r}$ и, учитывая, что $t_a + t_b + t_c = 2$, получим

$$t_a = 1 + \sqrt{t_b t_c}. \tag{16}$$

Таким образом, с учетом (16) выражение (14) превращается в тождество:

$$(t_a + t_b + t_c)^2 = 4 \quad \mapsto \quad 2^2 = 4.$$

Итак, доказана следующая

Теорема 3. *Линия Жергонна произвольного треугольника совпадает с вырожденной в прямую линию большой окружностью Содди, если и только, если это треугольник Содди, имеющий сумму тангенсов половинных углов равную 2. При этом линия Содди всегда параллельна прямой, которая делит этот треугольник на два с равными вписанными окружностями (рис. 3).*

7. Линия Жергонна и теорема Кейси

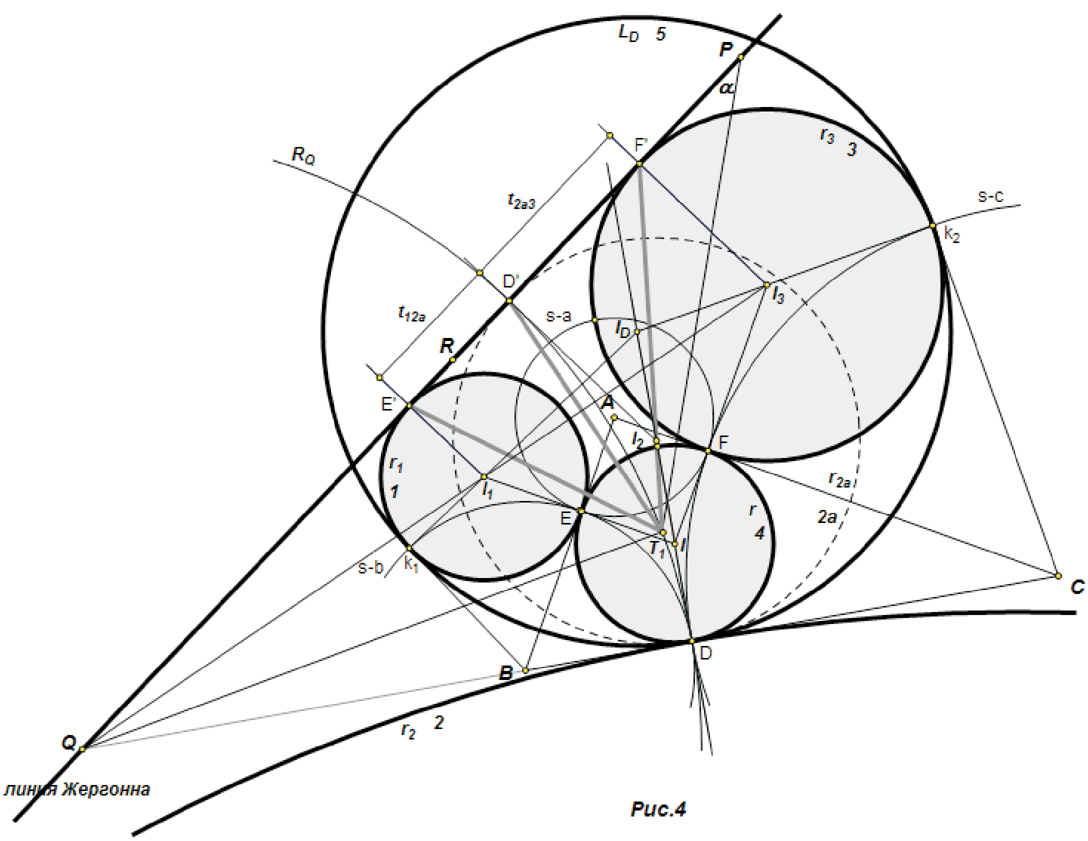


Рис. 4

В точках касания вписанной в произвольный треугольник окружности во внешнюю сторону построим окружности, которые касаются сторон треугольника и его линии Жергонна (рис. 4). Введем обозначения окружностей — $1(I_1; r_1)$ — касается снаружи стороны c в точке E; $2(I_2; r_2)$ — касается снаружи стороны a в точке D; $3(I_3; r_3)$ — касается снаружи стороны b в точке F; $4(I; r)$ — вписанная в $\triangle ABC$ (D, E, F — точки касания). Обозначения других углов и отрезков, как в разделе 1. Докажем, например, что существует окружность, касательная к этим четырём окружностям и проходящая через точку касания D. Для этого воспользуемся известной теоремой Кейси о пяти окружностях.

Напомним ее формулировку: шесть попарных касательных четырёх окружностей касаются одной общей пятой окружности, если выполняется следующее условие:

$$t_{12}t_{34} \pm t_{23}t_{14} \pm t_{13}t_{24} = 0,$$

где t_{ij} — длины соответствующих пар касательных четырёх окружностей [6].

Выбор знаков определяется конкретными конфигурациями треугольников. Для доказательства введем дополнительную окружность $2a$ (пунктирная), которая касается линии Жергонна и изнутри стороны a треугольника ABC в точке касания D. Понятно, что, если мы найдем пятую окружность, которая касается окружностей 1, 3, 4 и $2a$, тогда она же и будет искомой окружностью. Как показал Р. Джонсон в 1929 г., четыре окружности могут касаться пятой как с одной стороны, так и с разных сторон. При этом в теореме Кейси используются величины внешних (касание с одной стороны) или внутренних (касание с разных сторон) касательных каждой пары окружностей соответственно. В рассматриваемом случае все четыре окружности находятся внутри пятой окружности, поэтому мы будем оперировать только с внешними касательными. Теперь понятен смысл введения окружности $2a$. Обозначим t_{12a} — длина внешней касательной окружностей 1, $2a$. Аналогично и все другие длины касательных — $t_{2a3}, t_{13}, t_{34}, t_{14}, t_{24}$. $\triangle QD'T_1$ — равнобедренный, $\angle D'QT_1 = 60 - \alpha$, тогда

$$D'T_1 = 2QD\sin(30^\circ - \alpha/2), \quad R_Q = QD = k, \ \angle QD'T_1 = \frac{180^\circ - (60^\circ - \alpha)}{2} = 60^\circ + \alpha/2;$$

$\triangle PE'T_1$ — равнобедренный, $\angle PE'T_1 = 90^\circ - \alpha/2$, $\angle E"T_1F' = 60^\circ$ (раздел 1), тогда $\angle E'F'T_1 = {}$ $= 30^\circ + \alpha/2$.

Теперь рассмотрим $\triangle E'D'T_1$ и $\triangle F'D'T_1$. Углы при вершине T_1 этих треугольников равны 30° (раздел 1). Воспользуемся теоремой синусов для определения величин отрезков $E'D'$, $F'D'$.

$$(\triangle E'D'T_1): \quad \frac{E'D'}{\sin 30^\circ} = \frac{2k\sin(30^\circ - \alpha/2)}{\sin(90^\circ - \alpha/2)}; \ E'D' = \frac{k\sin(30^\circ - \alpha/2)}{\cos\alpha/2} = k\frac{1 - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha/2}{2}; \ E'D' = t_{12a}; \tag{17}$$

$$(\triangle F'D'T_1): \quad \frac{F'D'}{\sin 30^\circ} = \frac{2k\sin(30^\circ - \alpha/2)}{\sin(30^\circ + \alpha/2)}; \ F'D' = k\frac{1 - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha/2}{1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha/2}; \ F'D' = t_{2a3}. \tag{18}$$

Окружности 1 и 4; 3 и 4 касаются по условию. Для определения величины их внешних касательных обратимся к рис. 5, на котором показана хорошо известная методика построения общей внешней касательной к 2-м касающимся окружностям. Отметим, что в этом случае внутренняя касательная равна 0. Величина внешней касательной определяется по теореме Пифагора

$$t_{ab}^2 = (R_a + R_b)^2 - (R_a - R_b)^2.$$

Применительно к нашему построению

$$t_{14}^2 = (r_1 + r)^2 - (r_1 - r)^2 = 4r_1 r; \tag{19}$$

$$t_{34}^2 = (r_3 + r)^2 - (r_3 - r)^2 = 4r_3 r. \tag{20}$$

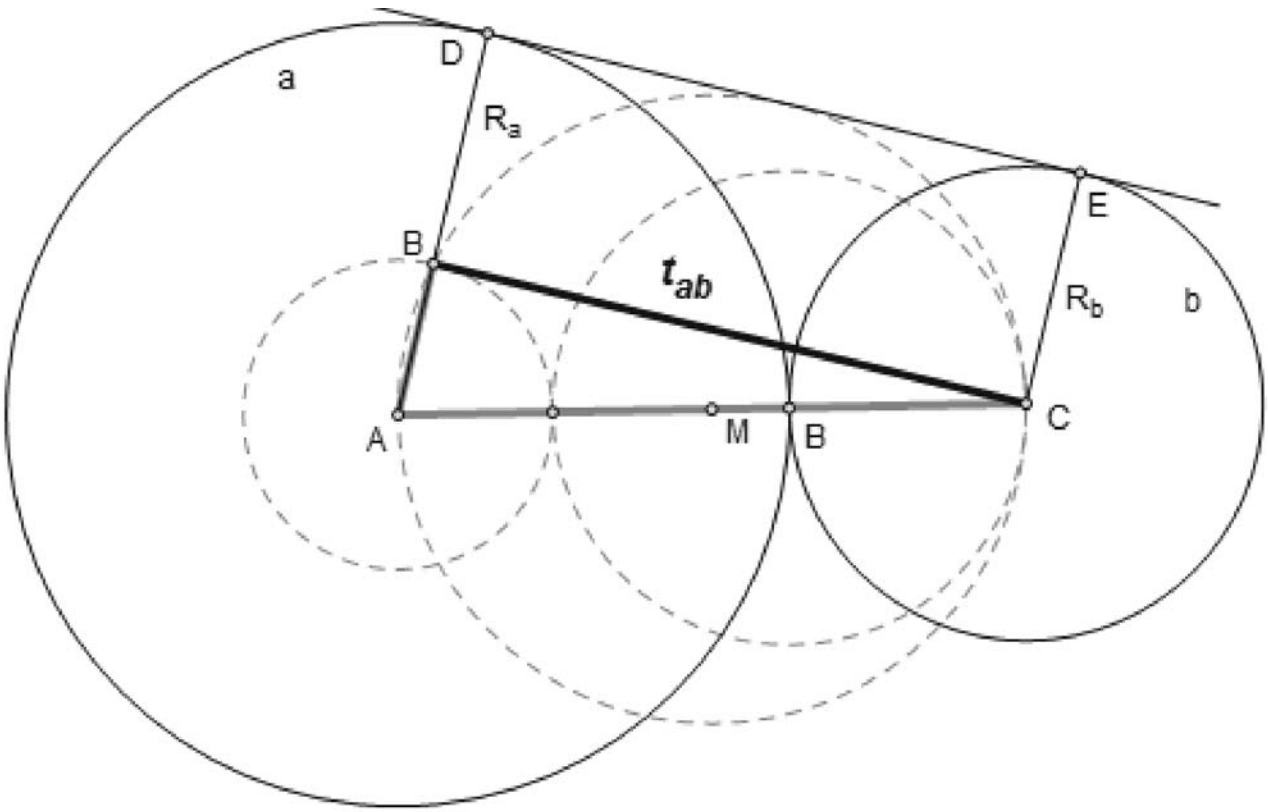


Рис. 5

Окружности $2a$ и 4 касаются в точке D, их центры I, I_{2a} лежат на одной прямой. Это означает, что

$$t_{24} = 0. \tag{21}$$

Итак, с учетом (21) условие Кейси будет в следующей форме:

$$t_{12a}t_{34} = t_{2a3}t_{14}; \tag{22}$$

$$\frac{t_{2a3}}{t_{12a}} = \frac{t_{34}}{t_{14}}; \Rightarrow \frac{t_{2a3}}{t_{12a}} = \frac{\sqrt{r_3}}{\sqrt{r_1}}. \tag{23}$$

Из подобия $\triangle QF'I_3$ и $\triangle QE'I_1$ получим

$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{QF'}{QE'} = \frac{R_Q + t_{2a3}}{R_Q - t_{12a}} = \frac{k(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha/2 + 1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha/2)2}{k(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha/2)(2-1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha/2)} = \frac{4}{(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha/2)^2}. \tag{24}$$

Найдем

$$\frac{t_{2a3}}{t_{12a}} = \frac{k(1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha/2)\cdot 2}{k(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha/2)(1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha/2)} = \frac{2}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha/2}. \tag{25}$$

Подставляя (24) и (25) в (23), получаем тождество. Следовательно, условие Кейси выполнено и окружности 1, $2a$, 3, 4 касаются пятой окружности $L_D(I_D; r_D)$. Целесообразно отметить, что точки касания пятой окружности (L_D) с окружностями $1(k_1)$ и $3(k_2)$ осуществляется в точках их пересечения с окружностями $s-b$, $s-c$. Это следует из того, что окружности L_d $r_1(r_3)$ ортогональны (пересекаются под прямым углом) в указанных точках с окружностями $s-b(s-c)$. Указанное предоставляет возможность оперативного построения пятой окружности по трём точкам — D, k_1, k_2. Итак, мы рассмотрели построение касательной окружности L_D к четырём окружностям и проходящей через точку D. Аналогично можно построить еще две подобные окружности $L_E(I_E; r_E)$ и $L_F(I_F; r_F)$, которые проходят через точки касания E, F соответственно.

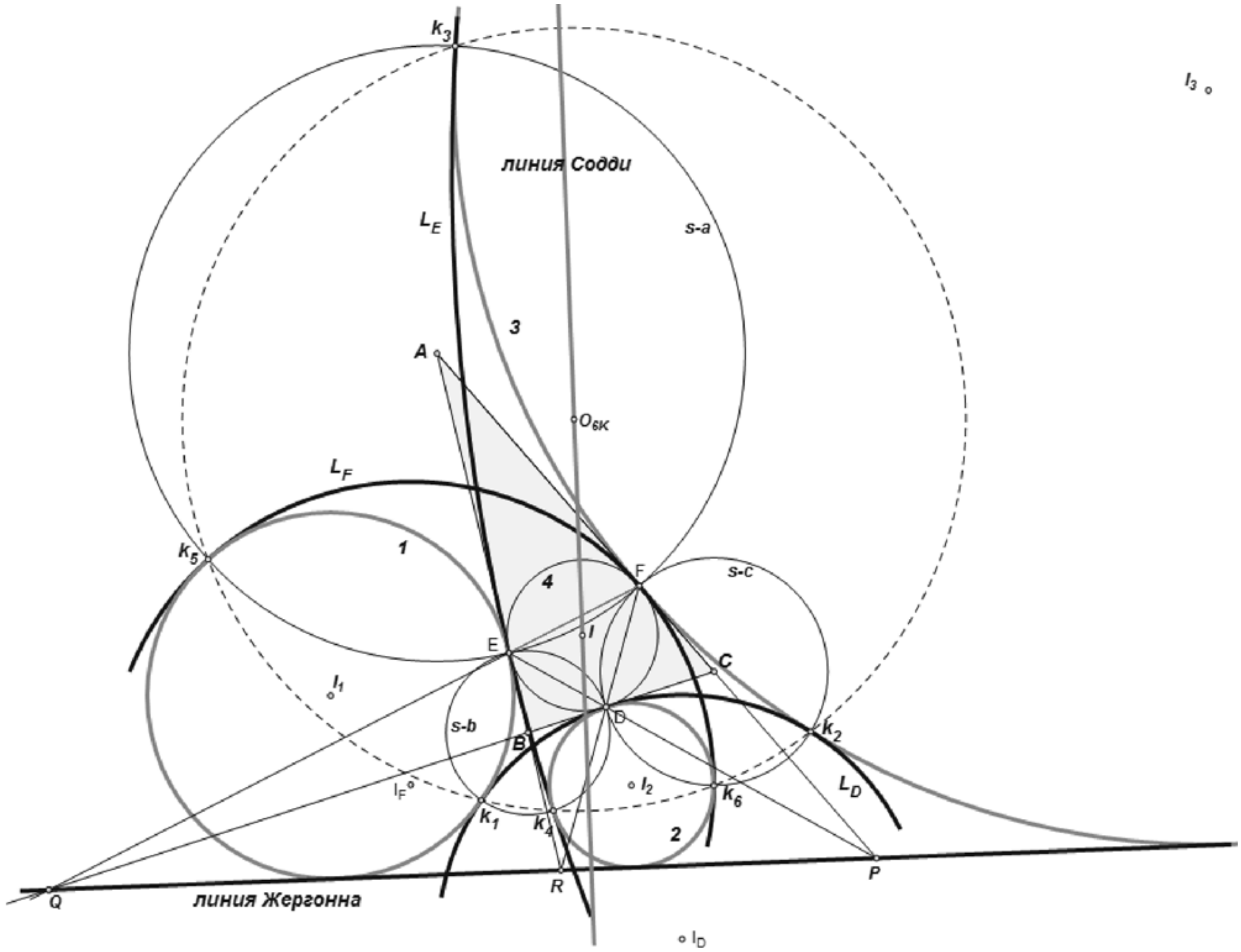


Рис. 6

Такое построение представлено на рис. 6. Отметим точки касания соответствующих окружностей $L_E - k_3, k_4$; $L_F - k_5, k_6$. Итого 6 точек касания окружностей, удовлетворяющих условию Кейси. Все эти точки лежат на одной окружности(пунктирной), тогда как прямые, их соединяющие, — k_1k_2, k_3k_4, k_5k_6 — пересекаются на линии Жергонна в полюсах Q, R, P соответственно. Доказана

Теорема 4. *Пусть в точках касания вписанной окружности произвольного треугольника во внешнюю сторону построены окружности, касающиеся его сторон и линии Жергонна, тогда существуют три окружности, касательные к ним и вписанной окружности. 6 точек их пересечения с окружностями $s-a$, $s-b$, $s-c$ лежат на одной окружности, центр которой лежит на линии Содди этого треугольника.*

8. Свойства триполяр

Пусть в произвольном треугольнике построена линия Жергонна и триполяры произвольных точек K, L — линии K, L (рис. 7). В каждой тройке точек P_K, Q_K, R_K; P_L, Q_L, R_L как из центров построены по 3 окружности радиусами в соответствующие точки касания D, E, F вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Указанные тройки окружностей пересекаются в двух точках, их радикальные оси всегда проходят через центр вписанной окружности $\triangle ABC$.

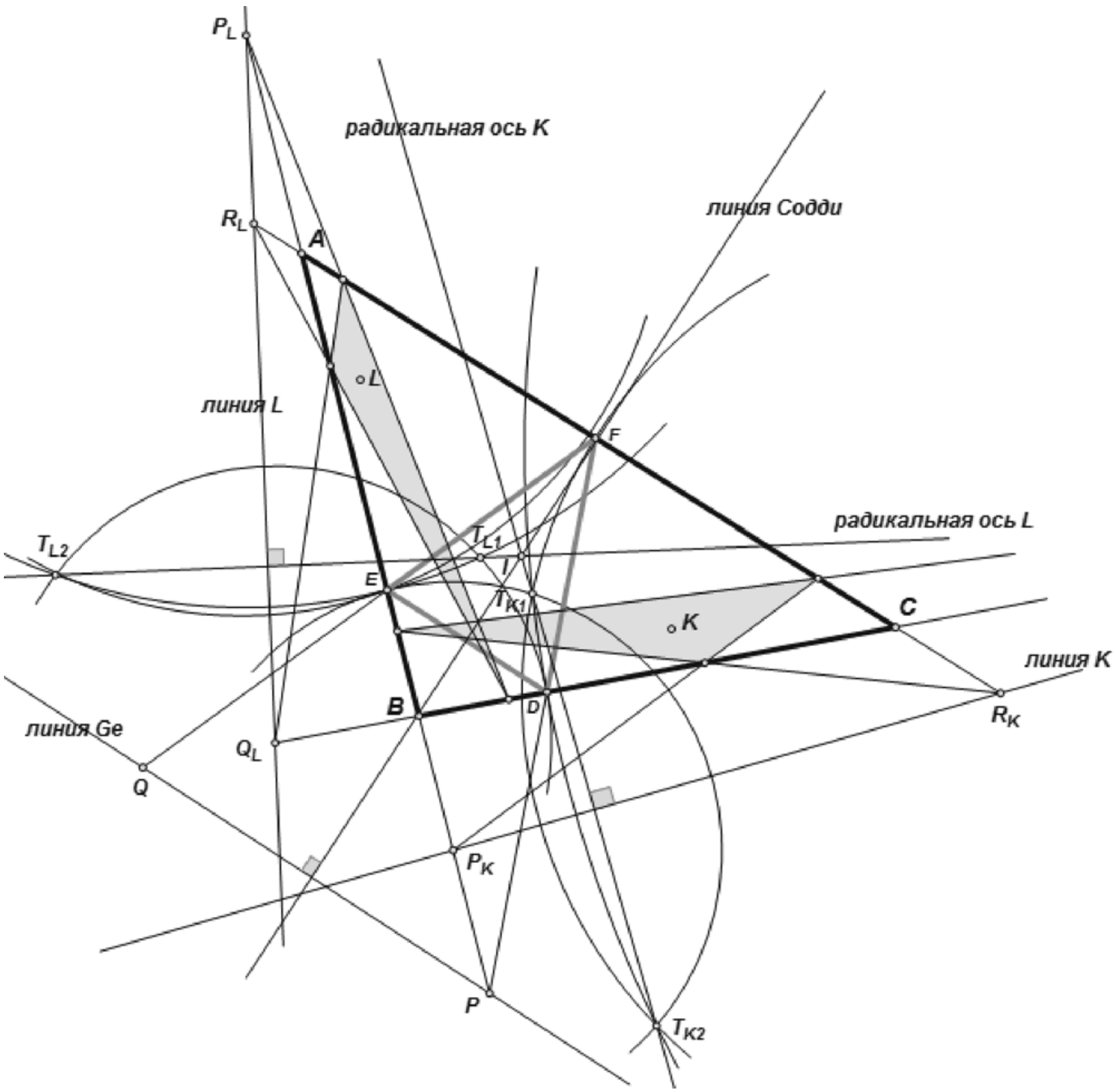


Рис. 7

9. Взаимное расположение некоторых важных линий в треугольнике

Для завершения анализа свойств линий Жергонна и Содди приведем их взаимное расположение и связь с другими линиями. Точки P, Q, R в обозначении на рис. 1, носят название точек Ноббса (Nobbs point). На рис. 8 показаны точки пересечения следующих линий:

– Жергонна и Содди — точка Флетчера (Fletcher point, X_{1323});

– Жергонна и Эйлера — точка Эванса (Evans point, X_{1375});

– Содди и Эйлера — точка Лонгчампса (Longchamps point, X_{20});

– Жергонна и ортоцентрической оси (orthic axis) — точка M (point X_{650});

– Эйлера и ортоцентрической оси — точка N (point X_{468}).

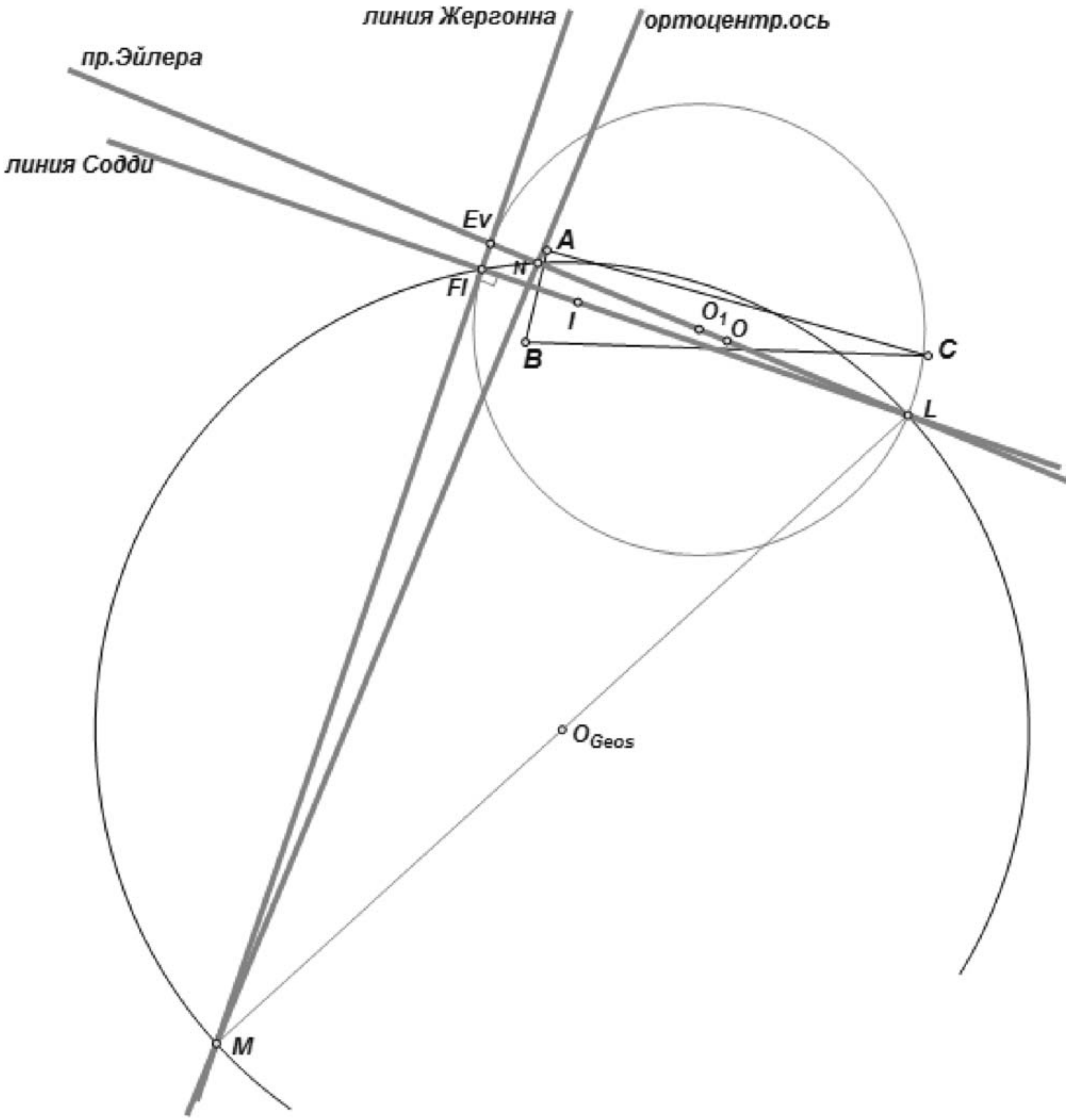


Рис. 8

Линии Жергонна и Содди; линии Эйлера и ортоцентрическая ось — перпендикулярны. Угол между линией Жергонна и ортоцентрической осью равен углу между линиями Содди и Эйлера. Окружность, проходящая через точки Fl, L,M, носит название Geos circle. Информация этого раздела позаимствована из [1, 3].

Литература

1. Wolfram Web Resource URL: http://mathworld.wolfram.com.Gergonne line.html(Geos circle.html)
2. P. Yiu Notes on Euclidean Geometry URL: http://math.fau.edu/Yiu/Geometry.html
3. C. Kimberling, Encyclopedia of Triangle Centers
URL: http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
4. Привалов И. Аналитическая геометрия. - Москва, 1964.
5. Jackson Frank M., Takhaev S. Heronian triangles // Forum Geom. - 15. - 2015.
6. Johnson R.A. Advanced Euclidean Geometry. - Dover, 1960.

Тахаев Сталислав Магометович,
Санкт-Петербург.

Email: stalislavt@mail.ru

Библиографические материалы к юбилейным датам 2017 года. II полугодие

Р. З. Гушель

Представляем последнюю публикацию Ревекки Залмановны Гушель, которая скончалась 11 февраля этого года (некролог напечатан в предыдущем номере журнала).

Это календарь юбилейных дат второй половины 2017 г., связанных с именами известных деятелей в области математики и математического образования, а также с важнейшими событиями в этой сфере. После краткой информации о человеке или событии приводится небольшой список литературы.

Р. З. Гушель была постоянным автором нашего журнала с 1999 года. В конце приводим полный список ее публикаций в журнале "Математическое образование".

9 июля — 100 лет со дня рождения известного специалиста в комплексном анализе и теории аналитических функций **Шабата Бориса Владимировича** (умер 23 июля 1987).

1. Витушкин А.Г. и др. Шабат Борис Владимирович (к 70-летию со дня рождения) // УМН. - 1987. - Т. 42. - Вып. 4. - С. 217-218.
2. Шабат Б.В. Геометрический смысл условия эллиптичности систем уравнений с частными производными // УМН. - 1957. - Т. 12 . - Вып. 6. - С. 181-188.
3. Шабат Б.В. Метод модулей в пространстве // ДАН. СССР. - Сер. матем. - 1960. - Т. 130. - Вып. 6. - С. 1210-1213.
4. Шабат Б.В. Обобщения и аналоги теории аналитических функций // Математика в СССР за 40 лет. - М., 1959. - Т. 1 - С. 481-494.
5. Шабат Б.В. Об обобщенных решениях одной системы уравнений в частных производных // МСк. - 1945. - Т. 17. - С. 193-210.
6. Шабат Б.В. Теория функций комплексного переменного в Московском университете за 50 лет // Вестн. МГУ. - Сер. матем. - 1967. Вып. 6. - С. 16-23.
7. Шабат Б.В., Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного. - М., 1951. - 607 с.; Изд. 3. - М., 1965. - 716 с.

15 июля — 100 лет со дня рождения советского математика, одного из создателей, вместе с М. А. Красносельским, школы функционального анализа в Воронеже, заслуженного деятеля науки РСФСР, профессора **Селима Григорьевича Крейна** (умер 16 августа 1999).

1. Березанский Ю.М. и др. Крейн Селим Григорьевич (к 60-летию со дня рождения) // УМН. - 1978. - Т. 33. - Вып. 2. - С. 217-224.
2. Воспоминания о Крейне. Сборник. / Отв. ред. Е.М. Семенов. - Воронеж, 2002. - 104 с.
3. С.Г. Крейн в воспоминаниях учеников и коллег. - Воронеж, 2008. - 154 с.
4. Крейн С.Г. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и их приложения в гидромеханике // УМН. - 1957. - Т. 12. - Вып. 1. - С. 208-211.
5. Крейн С.Г. О сингулярно возмущенных дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве // Диф. урав. - 1985. - Т. 21. - Вып. 10. - С. 1814-1817.

6. Крейн С.Г. Равномерная топология в пространстве отображений // МСк. - 1953. - Т. 33. - Вып. 3. - С. 627-638.

7. Крейн С.Г., Красносельский М.А. Итерационный процесс с минимальными невязками // МСк. - 1952. - Т. 31. - Вып. 2. - С. 315-334.

8. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. - М., 1978. - 400 с.

9. Крейн С.Г., Петунин Ю.И. Шкалы банаховых пространств // УМН. - 1966. - Т. 21. - Вып. 2. - С. 89-168.

19 июля — 200 лет со дня рождения французского математика, профессора Политехнической школы (1850-1872) и Сорбонны (с 1870), специалиста в области механики, математической физики, теории функций **Альбера Огюста Шарля Брио** (умер 20 сентября 1882).

1. Брио Ш.О.А. Учебник механической теории теплоты. В двух частях. / Пер. Г. Вебера. - СПб., 1876.

2. Брио Ш.О.А. Тригонометрия / Пер. и изд. Н. И. Мамонтова. - М., 1877.

26 июля — 80 лет со дня рождения отечественного математика, профессора кафедры алгебры МГУ (с 1990), лауреата премии Гумбольдта (1997), специалиста в области теории групп и алгебр Ли, алгебраической геометрии, главного редактора сборника “Математическое просвещение” (с 2006) **Эрнеста Борисовича Винберга**.

1. Алексеевский Д.В. и др. Эрнест Борисович Винберг (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. - 1997. - Т. 52. - Вып. 6. - С. 193-200.

2. Винберг Э.Б. Геометрические представления групп Коксетера // УМН. - 1970. - Т. 25. - Вып. 2. - С. 267-268.

3. Винберг Э.Б. Группа Вейля градуированной алгебры Ли // Изв. АН СССР. - Сер. матем. - 1976. - Т. 40. - Вып. 3. - С. 488-526.

4. Винберг Э.Б. Дискретные группы, порождённые отражениями, в пространствах Лобачевского // МСк. - 1967. - Т. 72. - № 3. - С. 471-488.

5. Винберг Э.Б. Калейдоскопы и группы отражений // МПр. - 2003. - Сер. 3. - Вып. 7. - С. 45-63.

6. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М., 2013. - Изд. 2. - 590 с.

7. Винберг Э.Б. Линейные представления групп. - М., 1985. - 144 с.

8. Винберг Э.Б. Объемы неевклидовых многогранников // УМН. - 1993. - Т. 48. - Вып. 2. - С. 17-46.

27 июля — 350 лет со дня рождения швейцарского математика, одного из создателей дифференциального и интегрального исчисления, значительно продвинувшего теорию дифференциальных уравнений, основоположника математической физики, учителя Г.Ф. Лопиталя и Л. Уйлера, **Иоганна I Бернулли** (умер 1 января 1748).

1. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. - М., 1960.

2. Виппер Ю.Ф. Семейства математиков Бернулли. - М., 1875.

3. Фрейман Л.С. Творцы высшей математики. - М., 1968.

4. Штыкан А.Б. Идея метода изоклин водной из работ И. Бернулли // Труды ИИЕТ. - 1960. - Т. 34. - С. 350-359.

5. Бернулли И. Избранные сочинения по механике. - М. - Л., 1937.

6. Бернулли И. Решение задачи, предлагавшейся Декарту достойнейшим Дебоном // ИМИ. - 1977. - Вып. 22. - С. 289-291.

7. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. - М., 1960.

27 июля — 110 лет со дня рождения отечественного математика, профессора Московского университета (с 1938), специалиста в области римановой геометрии, геометрии аффинной связности, теории групп Ли **Петра Константиновича Рашевского** (умер 12 июня 1983).

1. Ефимов Н.В. и др. Петр Константинович Рашевский // УМН. - 1968. - Т. 23. - Вып. 1. - С. 229-234.

2. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Рашевский Петр Константинович (к 70-летию со дня рождения) // УМН. - 1977. - Т. 32. - Вып. 5. - С. 205-209.

3. Норден А.П. и др. Петр Константинович Рашевский // УМН. - 1958. - Т. 13. - Вып. 1. - С. 225-231.

4. Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. - М. - Л., 1947. - 354 с.

5. Рашевский П.К. Геометрия и ее аксиоматика // МПр. - 1960. - Вып. 5. - С. 73-98.

6. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М., 1956. - Изд. 4. - 428 с.

7. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. - М., 1967. - Изд. 3. - 664 с.

8. Рашевский П.К. Скалярное поле в расслоенном пространстве // Труды сем. по вект. и тенз. анализу. - 1948. - Вып. 6. - С. 225-248.

9. Рашевский П.К. Теория спиноров // УМН. - 1955. - Т. 10. - Вып. 2. - С. 3-110.

5 августа — 125 лет со дня рождения отечественного педагога-математика, доктора педагогических наук (1954), профессора Казанского педагогического института (с 1959), автора ряда книг и статей по истории математики и математического образования **Бориса Владимировича Болгарского** (умер 3 апреля 1980).

1. Андропов И.К., Беспамятных Н.Д. Борис Владимирович Болгарский // МШ. - 1972. - № 4. - с. 91.

2. Лаптев Б.Л. и др. Борис Владимирович Болгарский // МШ. - 1977. - № 4. - С. 83.

3. Нагибин Ф.Ф., Черкасов Р.С. Борис Владимирович Болгарский // МШ. 1968. - № 1.

4. Болгарский Б.В. Идеи Н.И. Лобачевского в области методики математики // МШ. - 1952. - № 2. - С. 1-7.

5. Болгарский Б.В. Илья Николаевич Ульянов - педагог-математик // МШ. 1969. - № 3. - С. 2-11.

6. Болгарский Б.В. Казанская школа математического образования (в характеристиках ее главнейших деятелей). - Казань, 1966; 1969. - С. 1; 2.

7. Болгарский Б.В. Основные этапы развития тригонометрии и ознакомление с ними учащихся // МШ. - 1956. - № 1. - С. 21-27.

8. Болгарский Б.В. Очерки по истории математики / Под ред. В. Д. Чистякова. - Минск, 1974.

9. Болгарский Б.В. Элементы истории математики в советской средней школе. - Казань, 1944.

13 августа — 175 лет со дня рождения французского математика, академика Парижской АН (1884), чл. - корр. Петербургской АН (1895), профессора математики в Коллеж де Франс, специалиста в области дифференциальной геометрии и дифференциальных уравнений **Жана Гастона Дарбу** (умер 23 февраля 1917). В этом году исполняется сто лет со времени его кончины.

1. Гастон Дарбу (некролог) // ВОФЭМ. - 1917. - № 669-670.

2. Синцов Д.М. Г. Дарбу (некролог) // Зап. математ. об-ва. - Харьков, 1918. - Т. 16. - С. 1-8.

3. Дарбу Г. Приветственная речь на Парижском съезде Международной комиссии по преподаванию математики // ВОФЭМ. - 1914. - № 616. - С. 81-85.

4. Дарбу Г. Этюд о развитии геометрических методов. - Казань, 1911. - 37 с.

28 августа — 150 лет со дня рождения американского математика, профессора (с 1904) Гарвардского университета, президента Американского математического общества (1909-1910), члена Национальной Академии наук США **Максима Бохера** (умер 12 сентября 1918). Американское математическое общество учредило премию его имени.

1. Бохер М. Введение в высшую алгебру. - М.-Л., 1933.

30 августа — 100 лет со дня рождения известного отечественного математика и историка науки, ученика П.К. Рашевского, члена-корреспондента Международной академии истории наук **Бориса Абрамовича Розенфельда** (умер 5 апреля 2008).

1. Борис Абрамович Розенфельд (некролог) // ИМИ. - 2009. - Вып. 13 (48). - С. 8-11.

2. Лаптев Б.Л. и др. Борис Абрамович Розенфельд // МШ. - 1977. - № 4.

3. Розенфельд Б.А. Геометрические преобразования в работах Леонарда Эйлера // ИМИ. - 1957. - Вып. 10. - С. 371-424.

4. Розенфельд Б.А. История неевклидовой геометрии. Развитие понятия о геометрическом пространстве. - М., 1976. - 414 с.

5. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М., 1966. - 647 с.

6. Розенфельд Б.А. Неевклидова геометрия. - М., 1955. - 744 с.

7. Розенфельд Б.А., Матвиевская Г.П. Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды (VII-XVII в.). - М., 1983. - В трех книгах.

8. Розенфельд Б.А., Скопец З.А. Квадратичные кремоновы преобразования и комплексные числа // ДАН. - 1952. - № 83. - С. 801-804.

9. Розенфельд Б.А., Юшкевич А.П. Омар Хайям. - М., 1965.

10. Розенфельд Б.А., Юшкевич А.П. Теория параллельных линий на средневековом Востоке (IX-XIV в.). - М., 1983.

5 сентября — 350 лет со дня рождения итальянского математика и логика, преподавателя теологии и математики, пытавшегося доказать V постулат Евклида и получившего на этом пути ряд результатов, способствовавших созданию геометрии Лобачевского **Джироламо Саккери** (умер 25 октября 1733).

1. Бонола Р. Неевклидова геометрия. Критико-историческое исследование ее развития. - СПб., 1910. - С. 19-36.

2. Васильев А.В. Иезуит Саккери, итальянский предшественник Лобачевского // Изв. Физ.-мат. Об-ва при Казанском университете. - 1893. - 2-я серия. - Т.III. - С. 53-57.

3. Каган В.Ф. Основания геометрии. - М.-Л., 1949. - ч. I. - С. 145-148.

14 сентября — 180 лет со дня рождения известного отечественного математика, чл.-корр. Петербургской АН (с 1879), профессора Московского университета (с 1866), одного из основателей Московского математического общества и его президента (1891-1903) **Николая Васильевича Бугаева** (умер 11 июня 1903).

1. Демидов С.С. Н.В. Бугаев и возникновение московской школы теории функций действительного переменного // ИМИ. - 1985. - Вып. 29. - С. 113-124.

2. Лахтин Л.К. Николай Васильевич Бугаев (биографический очерк) // МСк. - 1905. - Т. 25. - Вып. 2. - С. 251-269.

3. Лопатин М. Философское мировоззрение Н.В. Бугаева // ВФП. - 1904. - Кн. 72. - С. 172-195.

4. Некрасов П.А. Московская философско-математическая школа и ее основатели. - М., 1904.

5. Бугаев Н.В. Геометрические приемы приближенной квадратуры и кубатуры // МСк. - 1898. - Т. 20. - С. 451-471.

6. Бугаев Н.В. Математика и научно-философское миросозерцание // ВФП. - 1898. - Т. 9. - Кн. 5 (45). - С. 697-717.

7. Бугаев Н.В. Математика как орудие научное и педагогическое // МСк. - 1868. - Т. 3. - Отд. 2. - С. 183-216.

8. Бугаев Н.В. Основные начала эволюционной монадологии // ВФП. - 1893. - Кн. 17. - С. 26-44.

9. Бугаев Н.В. Приближенное вычисление определенных интегралов // Изв. Каз. ФМО. - (2). - 1897. - Т. VII. - С. 95-117.

10. Бугаев Н.В. Руководство к арифметике. Арифметика целых чисел. - М., 1897. - Изд. 2. - 150 с.

16 октября — 170 лет со дня рождения профессора Петербургского университета, почетного члена Петербургской АН (с 1916), специалиста в области математического анализа и теории функций, автора известных учебников по высшей математике **Константина Александровича Поссе** (умер 24 августа 1928). Он был председателем русской национальной подкомиссии в Международной Комиссии по преподаванию математики, работавшей во главе с Ф. Клейном в начале XX века.

1. Сергеев А.А. Константин Александрович Поссе. - М., 1997. - 72 с.

2. Сергеев А.А. Научная биография К. А. Поссе // ИМИ. - 1994. - Вып. 35. - С. 64-96.

3. Поссе К.А. Заметка по вопросу о наибольших и наименьших значениях функции от двух независимых переменных // МСк. - 1890. - Т. 14. - Вып. 4. - С. 591-600.

4. Поссе К.А. К вопросу о предельных значениях интегралов или сумм // Сообщ. Харьк. мат. об-ва. - 1985. - Т. 1. - С. 35-58.

5. Поссе К.А. Международная комиссия по преподаванию математики. Конференция в Париже 1-4 апреля (Н. Ст.) 1914. - Одесса, 1914.

6. Поссе К.А. Об одном вопросе о наименьших величинах // Зап. Имн. Акад. наук. - 1880. - Т. 38. - С. 1-30.

7. Поссе К.А. О согласовании программ в средней и высшей школе // Труды I Всероссийского съезда преподавателей математики. - СПб., 1913. - Т. 1. - С. 452-458.

8. Поссе К.А. О функциях, подобных функциям Лежандра. СПб., 1873.

17 октября — 90 лет со дня рождения немецкого математика, иностранного члена РАН, основателя первого директора (до 1995 г.) Математического института Общества Макса Планка в Бонне, первого президента (1990-1994) Европейского математического общества, лауреата премии Вольфа (1988), премии им. Н. И. Лобачевского (1989), крупного специалиста по алгебраической геометрии и комплексному анализу **Фридриха Хирцебруха** (умер 27 мая 2012).

1. Фридрих Хирцебрух (к 85-летию со дня рождения) // УМН. - 2012. - Т. 67. - Вып. 5. - С. 179.

2. Хирцебрух Ф. Алгебраические поверхности с экстремальными числами Чженя (по диссертации Т. Хефера, Бонн, 1984) // УМН. - 1985. - Т. 40. - Вып. 4 - С. 121-129.

3. Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. - М., 1973. - 278 с.

4. Хирцебрух Ф. Эллиптические дифференциальные операторы на многообразиях // УМН. - 1968. - Т. 23. - Вып. 1. - С. 191-209.

27 октября — 90 лет со дня рождения отечественного математика, доктора физико-математических наук, лауреата Ленинской премии (1861), специалиста в области алгебраической топологии **Михаила Михайловича Постникова** (умер 27 мая 2004)

1. Болтянский В.Г. и др. Постников Михаил Михайлович (к 60-летию со дня рождения) // УМН. - 1989. - Т. 44. - Вып. 6. - С. 163-164.

2. Интервью с Михаилом Михайловичем Постниковым // Квант. - 1994. - № 1.

3. Постников М.М. Аналитическая геометрия. - М., 1973.

4. Постников М.М. Вариационная теория геодезических. - М., 1965. - 248 с.

5. Постников М.М. Введение в алгебраическую теорию чисел. - М., 1982.

6. Постников М.М. Локализация топологических пространств // УМН. - 1977. - Т. 32. - Вып. 6. - С. 117-181.

7. Постников М.М. Определение групп гомологий пространства с помощью гомотопических инвариантов // ДАН. - 1951. - Т. 76. - С. 359-362.

8. Постников М.М. Спектральные последовательности // УМН. - 1966. - Т. 21. - Вып. 5. - С. 141-148.

9. Постников М.М. Теория Галуа. - М., 1968.

7 ноября — 75 лет со дня рождения известного отечественного математика, академика РАН (с 2011), ученика И.Р. Шафаревича, занимающегося алгебраической геометрией и теорией чисел, заведующего отделом алгебры МИРАН, лауреата премии Гумбольдта (ФРГ, 1996), премии им. И.М. Виноградова РАН (2004); награжденного в 2012 году золотой медалью имени П.Л. Чебышева РАН **Алексея Николаевича Паршина**.

1. Алексей Николаевич Паршин (к семидесятилетию со дня рождения) // УМН. - 2013. - Т. 68. - Вып. 1. - С. 201-207.

2. Паршин А.Н. Алгебраические кривые над функциональными полями // ДАН СССР. - 1968. - Т. 183. - С. 524-526.

3. Паршин А.Н. Голоморфный вариант метода Тейта-Ивасава для неразветвленных L-функций // МСк. - 2014. - Т. 205. - Вып. 10. - С. 107-124.

4. Паршин А.Н. Давид Гильберт и теория инвариантов // ИМИ. - 1975. - вып. 20. - С. 171-197.

5. Паршин А.Н. Дополнительность и симметрия // Вопр. философии. - 2001. - № 4. - С. 84-104.

6. Паршин А.Н. Записки о формуле Пуассона // Алгебра и анализ. - 2011. - Т. 23. - Вып. 5. - С. 1-4.

7. Паршин А.Н. О применении разветвленных накрытий в теории диофантовых уравнений // МСк. - 1989. - Т. 180. - Вып. 2. - С. 244-259.

8. Паршин А.Н. Размышления над теоремой Геделя // ИМИ. - 2000. - Вып. 5 (40). - С. 26-55.

16 ноября — 300 лет со дня рождения французского математика, механика и философа, члена Французской АН (с 1754), специалиста в области теории дифференциальных уравнений, гидродинамики и небесной механики, почетного члена Петербургской АН (с 1764) **Жана Лерона Даламбера** (умер 29 октября 1783 г).

1. Бородин А.И. Жан Лерон Даламбер // МШ. - 1967. - № 5.

2. Демидов С.С. Дифференциальные уравнения с частными производными в работах Ж. Даламбера // ИМИ. - 1974. - Вып. 19. - С. 94-124.

3. Добровольский В.А. Даламбер. - М., 1968.

4. Коновалова Л.В. Даламбер и общая теория линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // ИМИ. - 1986. - Вып. 30. - С. 81-87.

5. Литвинова Е.Ф. Даламбер, его жизнь и деятельность. - СПб., 1891.

6. Юшкевич А.П. К истории спора о колеблющейся струне (Даламбер о применении <разрывных> функций) // ИМИ. - 1975. - Вып. 20. - С. 221-231.

7. Даламбер Ж. Динамика. - М. - Л., 1950.

16 ноября — 120 лет со дня рождения украинского советского математика, доктора физико-математических наук, академика АН УССР (с 1951), почетного члена Международной академии истории науки (с 1978), награжденного медалью А. Койре **Иосифа Захаровича Штокало** (умер 5 января 1987).

1. Еругин Н.П. и др. Иосиф Захарович Штокало (к 80-летию со дня рождения) // Диф. уравнения. - 1977. - Т. 11. - Вып. 11. - С. 2102-2104.

2. Иосиф Захарович Штокало (к 70-летию со дня рождения) // Диф. уравнения. - 1967. - Т. 3. - Вып. 10. - С. 1801-1809.

3. Штокало И.З. К вопросу об общении основной формулы символического исчисления // УМЖ. - 1949. - № 3. - С. 51-59.

4. Штокало И.З. Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квази-периодическими коэффициентами // МСк. - 1946. - Т. 19. - Вып. 2. - С. 263-286.

5. Штокало И.З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. - Киев, 1960. - 78 с.

6. Штокало И.З. Труды М.В. Остроградского по математической физике // УМЖ. - 1952. - Т. 4. - Вып. 1.

7. История математического образования в СССР / отв. ред. И.З. Штокало и А.Н. Боголюбов. - Киев, 1975.

8. История отечественной математики / отв. ред. И.З. Штокало. - Киев, 1968-1970. - Тт. 1-5.

21 ноября — 150 лет со дня рождения отечественного математика, профессора Харьковского университета (1903-1946), председателя Харьковского математического общества, академика АН УССР (с 1939), создателя харьковской геометрической школы, члена русской национальной подкомиссии по преподаванию математики, созданной в начале XX века **Дмитрия Матвеевича Синцова** (умер 28 января 1946).

1. Бернштейн С.Н., Гиршвальд Л.Я. Синцов Д.М. (некролог) // УМН. - 1947. - Т. 2. - Вып. 4. - С. 191-206.

2. Наумов И.А. Д.М. Синцов. Харьков, 1955. - 72 с.

3. Синцов Д.М. Доклад о Международной Комиссии по преподаванию математики // Моб. - 1914. - № 1. - С. 5-20.

4. Синцов Д.М. Исследования по теории пфаффовых многообразий // Зап. МО. - Харьков, 1940. - Т. 16. - С. 62-81.

5. Синцов Д.М. О преподавании аналитической геометрии в средней школе // МОб. - 1914. - № 3. - С. 113-120.

6. Синцов Д.М. О согласовании программ средней и высшей школы // ВОФЭМ. - 1912. - № 563-564.

7. Синцов Д.М. Работы по неголономной геометрии. - Киев, 1972.

8. Синцов Д.М. Рациональные интегралы линейных уравнений // Уч. зап. Каз. ун-та. - 1898. - Кн. 4-9.

9. Синцов Д.М. Современное состояние теории коннексов // Труды 1-го Всесоюзн. матем. съезда. - Харьков, 1930. - С. 309-317.

10. Синцов Д.М. Я. Штейнер как преподаватель // ВОФЭМ. - 1910. - № 510. - С. 137-140.

26 ноября — 125 лет со дня рождения отечественного математика, механика и истории науки, доктора физико-математических наук, профессора Московского Высшего технического училища им. Н.Э. Баумана (1921-1970), до этого несколько лет работавшего в ЦАГИ **Ивана Николаевича Веселовского** (умер 24 июня 1977 г.).

1. Житомирский С.В. О статье “Астрономия орфиков” и ее авторе // ВИЕТ. - 1982. - № 2. - С. 124-128.

2. Веселовский И.Н. “Арифметика” Диофанта Александрийского // ИМЕН. - 1978. - Вып. 20. - С. 38-48.

3. Веселовский И.Н. Архимед. - М., 1957 - 111 с.

4. Веселовский И.Н. Вавилонская математика // Труды ИИЕТ. - 1955. - Т. 5. - С. 241-303.

5. Веселовский И.Н. Векторная алгебра и ее приложения к аналитической геометрии и механике. - М., 1932.

6. Веселовский И.Н. Египетская наука и Греция // Труды ИИЕ. - 1948. - Т. 2. - С. 426-498.

7. Веселовский И.Н. Неевклидова геометрия в древности // ИМЕН. - 1971. - Вып. 11. - С. 152-160.

8. Веселовский И.Н. Очерки по истории теоретической механики. - М., 1974. - 287 с.

9. Веселовский И.Н. Христиан Гюйгенс. - М., 1959.

30 ноября — 130 лет со дня рождения известного отечественного математика и педагога, доктора физико-математических наук (1935), профессора московских вузов **Якова Семеновича Дубнова** (умер 13 декабря 1957).

1. Вагнер В.В., Лопшиц А.М. Яков Семенович Дубнов (1887-1957). Некролог // Труды сем. по вект. и тенз. анализу. - М., 1961. - Вып. 11. - С. 1-17.

2. Лопшиц А.М. Яков Семенович Дубнов — ученый, педагог, человек (1887-1957) // МПр. - 1960. - Вып. 5. - С. 3-16.

3. Яглом И.М. Яков Семенович Дубнов // МШ. - 1987. - № 6.

4. Дубнов Я.С. Беседы о преподавании математики. - М., 1965.

5. Дубнов Я.С. К дифференциальной геометрии сетей // ДАН. - 1935. - Вып. 4. - С. 7-10.

6. Дубнов Я.С. Основы векторного исчисления. - М. - Л., 1950, 1952. - Ч. 1,2.

7. Дубнов Я.С. Ошибки в геометрических доказательствах. - М., 1964.

8. Дубнов Я.С. Сети равных путей на поверхности // Уч. зап. МГУ. - 1946. - Вып. 100. - С. 212-216.

9. Дубнов Я.С. Содержание и методы преподавания элементов математического анализа и аналитической геометрии в средней школе // МПр. - 1960. - Вып. 5. - С. 17-56.

1 декабря — 225 лет со дня рождения выдающегося отечественного математика, профессора (с 1822) и ректора (1827-1946) Казанского университета, создателя неевклидовой геометрии, носящей его имя, **Николая Ивановича Лобачевского** (умер 24 февраля 1856).

1. Васильев А. Н.И. Лобачевский. - Казань, 1894.

1. Герасимова В.М. Указатель литературы по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. - М., 1952. - 192 с.

2. Гудков Д.А. Н.И. Лобачевский. Загадки биографии. - Н.-Новг., 1992. - 240 с.

3. Ефимов Н.В. Николай Иванович Лобачевский (к 100-летию со дня смерти) // УМН. - 1956. - Т. 11. - Вып. 1. - С. 3-15.

4. Каган В.Ф. Лобачевский. - М., 1948. - Изд. 2. - 508 с.

5. Лаптев Б.Л. Н.И. Лобачевский и его геометрия. - М., 1976.

6. Нагаева В.М. Педагогические взгляды и деятельность Н.И. Лобачевского // ИМИ. - 1950. - Вып. 3. - С. 76-153.

7. Норден А.П. Вопросы обоснования геометрии в работах Н.И. Лобачевского // ИМИ. - 1958. - Вып. 11. - С. 97-132.

8. Розенфельд Б.А. Интерпретации геометрии Лобачевского // ИМИ. - 1956. - Вып. 9. - С. 169-208.

9. Сто пятьдесят лет геометрии Лобачевского. - М., 1979.

10. Широков А.П. Развитие геометрических идей Лобачевского в Казанском университете // Всесоюзн. науч. конф. “150 лет геометрии Лобачевского”. Пленарные доклады. - М., 1977. - С. 22-32.

11. Лобачевский Н.И. Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма. - М., 1976.

12. Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. - М., 1946-1951. - Т. 1-5.

9 декабря — 100 лет со дня рождения отечественного математика, ученика акад. А.Н. Колмогорова, доктора физико-математических наук, профессора Московского университета **Сергея Васильевича Фомина** (умер 17 августа 1975).

1. Александров П.С. и др. Памяти Сергея Васильевича Фомина // УМН. - 1976. - Т. 31. - Вып. 4. - С. 199-212.

2. Сергей Васильевич Фомин (к 50-летию со дня рождения) // УМН. - 1967. - Т. 22. - Вып. 6.

3. Фомин Сергей Васильевич (1917-1975) // УМН. - Т. 30. - Вып. 5. - С. 2-3. - Некролог.

4. Фомин С.В. Об обобщенных собственных функциях динамических систем // УМН. - 1955. - Т. 10. - Вып. 1. - С. 173-178.

5. Фомин С.В. О динамических системах в пространстве функций // УМЖ. - 1950. - Т. 2. - С. 25-47.

6. Фомин С.В. О мерах, инвариантных относительно некоторой группы преобразований // Изв. АН СССР. - Сер. матем. - 1950. - Т. 14. - С. 261-274.

7. Фомин С.В. Расширение топологических пространств // ДАН. - 1941. - Т. 32. - С. 114-117.

8. Фомин С.В., Гельфанд И.М. Вариационное исчисление. - М., 1961. - 208 с.

9. Фомин С.В., Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа. - М., 1960. - Вып. 2. - 119 с.

13 декабря — 130 лет со дня рождения американского математика венгерского происхождения **Дьёрдя Пойя** (умер 7 сентября 1985 г.). Область его интересов — теория чисел, функциональный анализ, комбинаторика.

1. Яглом И.М. Дьёрдь Пойа // МШ. - 1988. - № 3. - С. 67-70.
2. Пойя Д. Как решать задачу. М., 1959.
3. Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения. - М., 1975.
4. Пойя Д. Мои знакомые математики // Наука и жизнь. - 1970. - № 6. - С. 48-51.

17 декабря — 175 лет со дня рождения замечательного норвежского математика, выпускника университета в Кристиании (1865), профессора этого университета (1872-1886) и университета в Лейпциге (1886-1898), одного из создателей теории групп и их инвариантов, лауреата премии им. Н.И. Лобачевского (1897), члена-корр. Петербургской АН (с 1896) и члена многих других академий наук **Мариуса Софуса Ли** (умер 18 февраля 1890).

1. Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике (к 150-летию со дня рождения Софуса Ли) // УМН. - 1992. - Т. 47. - Вып. 4. - С. 83-144.
2. Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. - М., 1949.
3. Клейн Ф. Лекция о развитии математики в XIX столетии. - М., 1989. - Т. 1.
4. Памяти Софуса Ли (лекции Дарбу и Клейна) // Изв. ФМО при Имп. Казан. ун-те. - Казань, 1899. - Приложение.
5. Полищук Е.М. Софус Ли. 1842-1899. - Л., 1983.
6. Яглом И.М. Феликс Клейн и Софус Ли. - М., 1977.
7. Ли С. Замечания на работу Гельмгольца "О фактах, лежащих в основании геометрии" // Об основаниях геометрии. - М., 1956. - С. 383-387.

22 декабря — 130 лет со дня рождения выдающегося индийского математика, не получившего специального образования и изучавшего математику по книгам, **Сриниваса Рамануджана** (умер 26 апреля 1920). Область его интересов — теория чисел. В возрасте 27 лет по приглашению переехал в Кембридж, где стал профессором университета. Был выбран в Лондонское Королевское общество, активно печатал свои труды.

1. Аски Р.С. Рамануджан. Гипергеометрические и базисные гипергеометрические ряды // УМН. - 1990. - Т. 45. - Вып. 1. - С. 33-76.
2. Гиндикин С.Г. Загадка Рамануджана // Квант. - 1987. - № 10.
3. Гайдук Ю.М. Сриниваса Рамануджан // МШ. - 1963. - № 3. - С. 66-69.
4. Левин В.И. Жизнь и творчество индийского математика С. Рамануджана // ИМИ. - 1960. - Вып. 13. - С. 335-378.
5. Левин В.И. Рамануджан — математический гений индии. - М., 1968.
6. Харди Г. Двенадцать лекций о Рамануджане. - М., 2002. - 336 с.

30 декабря — 75 лет со дня рождения замечательного отечественного историка, математика, доктора физико-математических наук, заведующего сектором истории математики Института истории естествознания и техники РАН (с 1987 г.), главного редактора "Историко-математических исследований", действительного члена Международной академии истории науки и ее вице-президента (1997-2005) **Сергея Сергеевича Демидова**.

1. Аносов Д.В. и др. Сергей Сергеевич Демидов (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. - 2003. - Т. 58. - Вып. 6 (354). - С. 189-192.
2. Демидов С.С. Н.В. Бугаев и возникновение московской школы теории функций действительного переменного // ИМИ. - 1985. - Вып. 29. - С. 113-124.

3. Демидов С.С. Возникновение теории дифференциальных уравнений с частными производными // ИМИ. - 1975. - Вып. 20. - С. 204-220.

4. Демидов С.С. К истории аксиометрического метода // ИМЕН. - 1973. - вып. 14. - С. 74-91.

5. Демидов С.С. "Математический сборник" в 1866-1935 гг. // ИМИ. - 1996. - Вып. 1 (36). - № 2. - С. 127-146.

6. Демидов С.С. О понятии решения дифференциальных уравнений с частными производными в споре о колебании струны в XVIII веке // ИМИ. - 1976. - Вып. 21. - С. 158-182.

7. Демидов С.С. Презентизм и антикваризм в историко-математическом исследовании // ВИЕТ. - 1994. - № 3. - С. 3-12.

8. Демидов С.С. Проблемы Гильберта. - М., 1969.

9. Демидов С.С. Профессор Московского университета Дмитрий Федорович Егоров и имяславие в России в первой трети XX столетия // ИМИ. - 1999. - № 4(39). С. 123-155.

10. Демидов С.С. Джузеппе Пеано и российское математическое сообщество его времени // ИМИ. - 2011. - Вып. 14 (49). С. 25-40.

11. Демидов С.С., Есаков В.Д. "Дело академика Лузина" в свете сталинской реформы советской науки // ИМИ. - 1999. - Вып. 4 (39). - С. 156-170.

12. Демидов С.С., Токарева Т.А. Адольф Павлович Юшкевич и Советская историко-математическая школа //ИМИ. - 2006. - Вып. 11 (46). - С. 48-84.

Юбилейные даты II полугодия 2017 года, сводная таблица

9 июля	100 лет со дня рождения Б.В. Шабата
15 июля	100 лет со дня рождения С.Г. Крейна
19 июля	200 лет со дня рождения А. О.Ш. Брио
26 июля	80 лет со дня рождения Э.Б. Винберга
27 июля	350 лет со дня рождения Иоганна I Бернулли
27 июля	110 лет со дня рождения П.К. Рашевского
5 августа	125 лет со дня рождения Б.В. Болгарского
13 августа	175 лет со дня рождения Ж.Г. Дарбу
28 августа	150 лет со дня рождения М. Бохера
30 августа	100 лет со дня рождения Б.А. Розенфельда
5 сентября	350 лет со дня рождения Дж. Саккери
14 сентября	180 лет со дня рождения Н.В. Бугаева
16 октября	170 лет со дня рождения К.А. Поссе
17 октября	90 лет со дня рождения Ф. Хирцебруха
27 октября	90 лет со дня рождения М.М. Постникова
7 ноября	75 лет со дня рождения А.Н. Паршина
16 ноября	300 лет со дня рождения Даламбера
16 ноября	120 лет со дня рождения И.З. Штокало
21 ноября	150 лет со дня рождения Д.М. Синцова
26 ноября	125 лет со дня рождения И.Н. Веселовского
30 ноября	130 лет со дня рождения Я.С. Дубнова
1 декабря	225 лет со дня рождения Н.И. Лобачевского
9 декабря	100 лет со дня рождения С.В. Фомина
13 декабря	130 лет со дня рождения Д. Пойя
17 декабря	175 лет со дня рождения М.С. Ли
22 декабря	130 лет со дня рождения С. Рамануджана
30 декабря	75 лет со дня рождения С.С. Демидова

Список сокращений

УМН — Успехи математических наук. Журнал.

МСк. — Математический сборник. Выходит с 1866 г.

ВФП — Вопросы философии и психологии. Журнал, выходивший в 1890-1918 гг.

МШ — Математика в школе. Журнал.

ВОФЭМ — Вестник опытной физики и элементарной математики. Журнал, выходил в Одессе в 1886-1917 гг.

МОб. — Математическое образование. Журнал.

ДАН — Доклады Академии наук. Журнал.

МПр. — Математическое просвещение. Журнал.

Труды ИИЕТ (Труды ИИЕ) — Труды Института истории естествознания и техники (до 1954 г. Институт истории естествознания).

ИМИ — Историко-математические исследования. Сборник статей.

ФМО — Физико-математическое общество ???

МО — Математическое общество.

ВИЕТ (Вопр. ИЕТ) — Вопросы истории естествознания и техники. Журнал. (До 1980 г. - одноименный сборник).

ИМЕН — История и методология естественных наук. Сборник статей.

УМЖ — Украинский математический журнал.

Список публикаций Р.З. Гушель в журнале "Математическое образование"

1. По материалам Всероссийских съездов преподавателей математики 1911 и 1913 годов, №2-3 (9-10), 1999 г.

2. К столетию московского совещания по вопросам о средней школе, №2(13), 2000 г

3. Вопросы высшей математики в русской школе до 1917 года, №4(15), 2000 г.

4. О деятельности международной комиссии по преподаванию математики в начале XX столетия, №3(18), 2001 г.

5. К 100-летию Меранской программы преподавания математики в Германии, №1(32), 2005 г.

6. Вопросы математики и математического образования на XIII съезде русских естествоиспытателей и врачей в Тифлисе в 1913 г., №3(67), 2013 г.

7. К 150-летию журнала "Педагогический сборник", №1(69), 2014 г.

8. Библиографические материалы к юбилейным датам 2014 года. I полугодие, №1(69), 2014 г.

9. К столетию второго Всероссийского съезда преподавателей математики, №2(70), 2014 г.

10. Библиографические материалы к юбилейным датам 2014 года. II полугодие, №3(71), 2014 г.

11. Библиографические материалы к юбилейным датам 2015 года. I полугодие, №4(72), 2014 г.

12. Библиографические материалы к юбилейным датам 2015 года. II полугодие, №2(74), 2015 г.

13. П.А. Некрасов и русская средняя школа конца XIX - начала XX века, №3(75), 2015 г.

14. Библиографические материалы к юбилейным датам 2016 года. I полугодие, №4(76), 2015 г.

15. Библиографические материалы к юбилейным датам 2016 года. II полугодие, №2(78), 2016 г.

16. Библиографические материалы к юбилейным датам 2017 года. I полугодие, №4(80), 2016 г.

17. Библиографические материалы к юбилейным датам 2017 года. II полугодие, №2(82), 2017 г.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.
Отдельные материалы имеются на www.lomonosovclub.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2017 год (включая стоимость пересылки) – 100 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2017 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.
Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 90 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах Word, PDF и т.п.

Внимание!
Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.
Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >