ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год восемнадцатый

№ 2 (70)

апрель - июнь 2014 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 2 (70), 2014 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2014 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.06.2014 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (70), апрель – июнь 2014 г.

Содержание

1956-1965 гг. Подготовка второй "коренной" реформы советской школы: "перестройка" программ и "научное" обоснование ложных идей (статья четвёртая)

И. П. Костенко

В предыдущей статье [1, с. 14-36] проанализирован 25-летний период, в течение которого шёл быстрый рост качества знаний школьников. К концу этого периода качество-1 (процент отличных и хороших оценок выпускников школ) достигло 74%, качество-2 (процент отличных, хороших и удовлетворительных оценок) — 80%. Эти удивительные достижения объясняются внедрением в массовое обучение принципов, методов и опыта классической русской школы. А также профессионально грамотным и *ответственным* управлением делом образования и воспитания молодёжи.

В данной статье анализируется следующий, 10-летний период. Это период первого *резкого* падения качества знаний школьников. Причина падения связана с выведением из обучения классической методики и понятных учебников.

Прежде чем начать историю и анализ этого периода, следует вкратце очертить предысторию.

"*Нам нужно памятью вооружаться*"
Писатель А. Ларионов, 1988 г.

1. 1936-1940 гг. Идейные истоки реформы-70

Цель второго "коренного" реформирования под видом декларативного "поднятия нашей школы на высшую ступень" была поставлена определёнными силами в 1936 г. и записана в Резолюции Группы математики АН СССР от 21.12.1936 г. [2, с. 81]. В 1939-40 гг. программа подготовки реформы и её основные идеи публично сформулированы проф. А. Я. Хинчиным, причём, в тоне, не допускающем возражений:

1. "Самой категорической (?) необходимостью является введение в школьные программы оснований *анализа* бесконечно малых" [3 (1939, № 6), с.1];

2. "Программы должны быть построены так, чтобы идеи переменной величины и *функциональной зависимости*... как можно ранее усваивались учащимися и... становились основным стержнем всего школьного курса математики" [там же, с. 2].

3. Повысить *строгость* "отчётливых и точных определений, формулировок и рассуждений", соответствующих "современной науке" [3 (1939, № 4), с.4].

4. "*Исключить* из основного материала арифметики... *задачи*..., которые... представляют собой... алгебраические задачи на составление уравнений" [4 (1961, № 6), с. 35].

Попытки реализации этих идей (попытки замены учебников, программ), предпринятые инициативной "группой-36", тогда не увенчались успехом. Практика сразу же обнаружила их ложность и вредность. Подробный анализ этой "утробной" стадии вызревания "реформаторских" идей и нащупывания методов их реализации содержится в статье [5, с. 14 - 18].

2. 1943-1948 гг. Закладка идеологических Центров будущей “реформы”

1943 г. В декабре создаётся Академия педагогических наук РСФСР (АПН). Среди её членов-*учредителей* почему-то сразу оказываются два математика-“реформатора”: А. Я. Хинчин и В. Л. Гончаров. А. Я. Хинчин вошёл в руководство Академии, став членом Президиума и академиком-секретарём по частным методикам.

Первый президент АПН, нарком просвещения РСФСР В. П. Потёмкин видел задачу АПН так:

> “Академия педагогических наук призвана выполнять серьёзнейшую *творческую* научную работу. Не подлежит сомнению, что эту свою работу она построит на... лучших *традициях* национальной русской педагогики, которая уже внесла в сокровищницу мировой педагогической науки свой полновесный вклад. Самобытность и оригинальность р у с с к о й педагогики можно проследить с самого начала её зарождения. ... Её основные черты — *гуманизм, демократизм*, пламенная вера в творческую силу науки и просвещения, глубокий *патриотизм* и народность, *бережное (!) отношение к личности* ребёнка и стремление развить в нём лучшие черты, свойственные нашему великому народу, — трудолюбие, скромность, самоотверженную преданность Родине, любовь к свободе” [6, с. 206].

Однако, задача, которую ставил перед АПН В. П. Потёмкин, совершенно не интересовала педакадемиков-математиков, цель которых была противоположной — разрушение (“слом”) традиций русской педагогики.

> А. М. Маркушевич, ставший в 1958 г. заместителем министра просвещения РСФСР, официально объявил эти традиции “устаревшими” и призвал заменить “устаревшие методы преподавания, заимствованные нами по наследству из гимназий и реальных училищ” [3 (1961, № 4), с. 17]. Т.е. озвучил цель *уничтожения традиций русской школы* и придал ей официальный характер.

1944 г. На базе НИИ школ Наркомпроса[1] создан НИИ методов обучения АПН. “Реформатор” В. Л. Гончаров возглавил в этом НИИ кабинет методики. В этот кабинет сразу же был приглашен известный нам с 1918г. Я. С. Дубнов [2, с. 8-9]. Заметим, — “реформаторы” вывели этот НИИ из-под контроля Наркомпроса и переподчинили его АПН, где у них была власть. Вместе с тем они изменили название с “НИИ школ” на “НИИ методов обучения”[2] и, тем самым, переориентировали его задачи только на методику. Таким образом, взяли под контроль методику и стали под крылом АПН “научно-теоретически” разрабатывать свои методические идеи, которые намеревались внедрить в школу.

> Уже в 1946 г. выходят печатные Труды этого НИИ под редакцией В. Л. Гончарова и с предисловием А. Я. Хинчина. В этих Трудах представлено “теоретическое решение *выдвигаемых* (?) методических проблем” [7, с. 4]. Проблемы эти *выдвинуты* А. Я. Хинчиным в 1939 г.: проблема “настоящих” задач в арифметике (её решал И. В. Арнольд), проблема функциональной пропедевтики в арифметике (В. Л. Гончаров), проблема строгих дедуктивных рассуждений в геометрии семилетней школы (Я. С. Дубнов).
>
> А. И. Фетисов предложил нечто новенькое — “очерк своеобразного построения теории тригонометрических функций с привлечением векторов, операторов (преобразований векторов) и комплексных чисел” [там же]. И что же это, как не усложнение

[1] В этом НИИ А. Я. Хинчин возглавлял в 1938 г. Кабинет математики.

[2] В дальнейшем этот НИИ будет менять свои названия, в соответствии с меняющейся конъюнктурой (политехнизация и пр.) и новыми реформаторскими целями и всегда, вплоть до настоящего времени, работать в интересах “реформаторов”.

и "научное" запутывание уже решённых методических проблем? Этот метод вскоре станет ведущим для новой, рождающейся в стенах хинчиновского НИИ, "советской" методической "науки".

В предисловии А. Я. Хинчин отечески хвалит своих питомцев: их "исследования..., *несомненно*, составляют ценный вклад в методическую науку" [там же, с. 5]. И призывает "взяться за более ответственную тематику... глубокую научную проверку программ, выработку требований к учебникам математики" [там же]. Эта установка вскоре будет реализована его сотрудниками.

Напомним, стратегическая цель плана Хинчина-39 — введение в школьные программы анализа бесконечно малых. Пока же он благопристойно прикрывает её якобы "научной проверкой (что это значит? — И.К.) программ". Другая цель — ликвидация действующих учебников. А. Я. Хинчин теоретически подготавливает реализацию этой цели "выработкой требований". Ещё одна важнейшая функция хинчиновского НИИ, тоже намеченная им в 1939 г., — подготовка нужных для реформы кадров "научно апробированных" методистов.

В частности, хорошие наркомпросовские методисты 1930-х гг. Н. Н. Никитин и А. И. Фетисов, прошедшие перевоспитание у Хинчина, станут в 1950-х гг. авторами первых более "высокого уровня" учебников геометрии. Я. С. Дубнов развернёт активную миссионерскую деятельность в журнале "Математическое просвещение". Появится много других реформаторских кадров: И. М. Яглом, В. Г. Болтянский, В. Г. Ашкинузе, В. И. Левин, К. И. Нешков, А. Д. Семушин, и пр., и пр. С ними мы неоднократно встретимся в дальнейшем.

1945 г. На первых официальных выборах в АПН приняты ещё три математика-"реформатора": П. С. Александров, Н. Ф. Четверухин, А. И. Маркушевич. В 1947 г. на вторых дополнительных выборах академики-"реформаторы" выдвинули кандидатом своего главного идеолога Я. С. Дубнова, но почему-то при голосовании он был забаллотирован.

1947 г. Свежие педакадемики сразу взялись за конкретное дело, — на базе НИИ создали группу (А. И. Маркушевич, Н. Ф. Четверухин, В. Л. Гончаров, Я. С. Дубнов, И. В. Арнольд) и сочинили проект новой программы, "в котором главной целью ставилось сближение математики как учебного предмета с математикой-наукой (в её современном состоянии) и предусматривалось, в частности изучение элементов математического анализа и аналитической геометрии. Обсуждение этого проекта привело к тому, что он был отвергнут" [8, с. 170]. В 1948 г. была официально утверждена другая программа.

Итак, первый реформаторский проект программы "был отвергнут". Надо бы знать, почему. Мы можем найти часть ответа в статье опытного методиста С. И. Новосёлова, "К вопросу о введении элементов дифференциального и интегрального исчислений в курс средней школы" (1950г.).

Оцените его здравые аргументы:

"Те, весьма краткие сведения из дифференциального и интегрального исчислений, которые возможно дать в рамках курса математики средней школы, неизбежно будут носить поверхностный характер и ни в коей мере не смогут настолько вооружить учащихся, чтобы после окончания школы они смогли эффективно применять полученные знания в своей практической деятельности : общеобразовательное значение сведений из дифференциального и интегрального исчислений о б е с ц е н и т с я, если эти сведения будут преподаны на недостаточно высоком теоретическом и логическом уровне... развитие же хотя бы элементарного курса анализа с подобающей строгостью в пределах средней школы вряд ли возможно" [3 (1950, № 2), с. 38].

И ведь эти аргументы подтвердились жизнью[3].

1948 г. “Реформаторы” выделяют из Московского математического общества (ММО) секцию средней школы. Официально сформулированная

> “задача секции — содействовать повышению культуры преподавания математики в советской школе” [3 (1958, № 6), с. 88].

“Руководство секцией было поручено бюро под председательством А. И. Маркушевича, который бессменно *направляет* деятельность секции в продолжение всего десятилетия”, — пишет в юбилейном 1958 г. активист секции П. Я. Дорф[4] [там же].

Обратим внимание на неопределённо-абстрактную формулировку “задачи”. Не ясно, какой смысл придают они здесь слову “культура”. Резонно также спросить: имеют ли право учёные-математики, не имеющие опыта преподавания в школе, не знающие детской психологии, брать на себя миссию “повышения культуры преподавания”? За разъяснением реформаторской терминологии и выявлением истинных задач придётся обратиться, как всегда, к практике, к их действиям. Посмотрим, какие доклады делались на секции в 1950-х гг. [там же].

> 1948. А. Н. Колмогоров — “О пропедевтике начального курса геометрии”;
>
> В. И. Левин — “О требованиях, предъявляемых высшей технической школой к математической подготовке учащихся”;
>
> С. Я. Яновская[5] — “Об аксиоматическом методе в математике”;
>
> 1952. А. Я. Хинчин — “Задачи по теории вероятностей”; П. А. Ларичев — “Проект новой программы по математике”;
>
> 1953. Н. М. Бескин — “Аффинные преобразования”;
>
> 1955. П. С. Александров — “К вопросу об элементах высшей математики”;
>
> 1956. Я. С. Дубнов — “Тригонометрия в курсе средней школы”; И. М. Яглом — “Геометрические преобразования”;
>
> 1958. А. И. Маркушевич — “Функции и производная в курсе X класса”, и др.

Как видно из тематики докладов, обсуждались, в основном, вопросы введения в школу элементов высшей математики. Эти обсуждения, как увидим дальше, не были абстрактными разговорами, все они имели практическую цель обеспечить внедрение реформаторских идей в учебные программы, теоретически подготовить и оправдать намеченную реформу школы.

Доклад Я. С. Дубнова 1956 г. назван как-то неопределённо, — из названия нельзя понять идеи доклада. Его идея откроется немного позже, в 1957 г., и состоит она в ликвидации учебного предмета тригонометрии и распределении содержания этого предмета по курсам алгебры и геометрии [9, с. 144]. Цель такого предложения — расчистка в программах места для элементов высшей математики[6].

---

[3] В 1996 г. преподаватели МГУ пишут в открытом письме министру: “... школьник уже не сможет стать полноценным студентом, ... заведомо следовало бы исключить из программы темы,... относящиеся к высшей математике... Изучение этих тем часто происходит формально, и они остаются не понятыми школьником” [131 (1996, № 1), с. 2-3]. Академик Д. В. Аносов (в 2002 г. председатель комиссии АН по школьному образованию) заключает: “... по моему мнению, и, по мнению ряда моих коллег, *надо изъять элементы математического анализа* — этот эксперимент в массовой школе не удался” [157, с. 31]. Добавим, — хорош “эксперимент”, который продолжается вот уже сорок лет и жертвой которого стало несколько поколений детей.

[4] **П. Я. Дорф** работал в 1930-х гг. в НИИ средней школы и, вместе с **С. Н. Шредером**, пытался проводить там разрушительные идеи, в частности, настаивал на выведении из программ повторения — важнейшего элемента процесса обучения, который обеспечивает прочность знаний.

[5] *С. А. Яновская* — преподаватель МГУ, советский философ-марксист, специализировавшаяся на поле математической логики, но не имевшая на этом поле конкретных математических результатов.

[6] Эта проблема (расчистка места) будет постоянно заботить “реформаторов”. Установку для решения этой проблемы дал А. Я. Хинчин в 1939 г.: “*изгнать* из школьных программ все *архаизмы*” [3 (1939, № 6), с. 2]. Вот почему уже тогда П. Я. Дорф пытался “изгнать” из программ повторение.

С вопросами перестройки программ связан вопрос о новых учебниках для новых программ. Этим вопросом секция тоже серьёзно занималась:

> "Г. Болтянский, Н. Виленкин, И. Яглом составляют новый учебник алгебры, который имеет указанное направление" [3 (1958, № 6), с. 89]. Имеется в виду "направление, которое может подготовить школьника к изучению элементов высшей математики в X классе" и учебник, который "построен на идее функциональной зависимости" [там же].

Итак, теперь ясно, что фраза "содействовать повышению культуры преподавания" имела следующий конкретный смысл: разрабатывать и конкретизировать реформаторские идеи и, используя научный авторитет ММО, добиваться их реализации в школьных программах и учебниках.

3. 1949-1956 гг. Первые реформаторские "ласточки"

Этот период проходит под знаком задачи, поставленной А. И. Маркушевичем в докладе на сессии АПН в 1949 г.: "*повысить идейно-теоретический уровень преподавания математики в средней школе*" [3 (1950, № 1), с. 1]. Эта задача подменила задачу "улучшения качества обучения" и предопределила обратный процесс выведения из обучения классических принципов методики, разрушения выверенных длительным опытом программ и уничтожения понятных учебников.

Из доклада А. И. Маркушевича невозможно уяснить, что это такое — "идейно-теоретический уровень"? Тем более невозможно понять, почему этот неуловимый "уровень" необходимо "повышать". Звучал один эмоциональный мотив: программы и учебники Киселёва "устарели". В то же время докладчик признавал, что они выполняют свою главную функцию подготовки к обучению в высшей школе. Признавал "жизненность" существующей системы образования и одновременно утверждал, что она "устарела". Вот уровень аргументации, рассчитанной на эмоциональное впечатление! Приём называть одно и тоже одновременно и чёрным, и белым, будет использоваться "реформаторами" всегда.

1949 г. Процесс "реформирования" незаметно начат в том же 1949 г., когда в Объяснительную записку к программе было вставлено:

> "программа по арифметике, не исключая совершенно решение *типовых задач*, отводит им довольно *скромное* место, учитывая, что в дальнейшем типовые задачи более сложных видов учащиеся будут решать методом *составления уравнений*" [3 (1949, № 6), с. 5]. В VI классе в курсе алгебры "рекомендуется, начиная с первой (?!) темы "Буквенные обозначения", решать уравнения и задачи на составление уравнений" [там же, с. 6].

Эта "скромная" рекомендация положила начало разрушению классической методики обучения решению задач (сначала типовых арифметических) и блокировке развития мышления учащихся. Через десять лет, к началу 1960-х гг. учителя констатировали, что выпускники школ "*совершенно* не умеют решать арифметических задач, а прибегая к решению их алгебраическим путём, часто допускают ошибки в составлении уравнений" [3 (1964, № 1), с. 58].

Вторая идея, ведённая в Объяснительную записку:

> "Громадное (?) значение (общеобразовательное и практическое) придаёт программа ознакомлению (?) учащихся с *идеей функциональной зависимости*" [там же, с. 5-7].

Об опасности этой идеи предупреждал ещё в 1946 г. тот же С. И. Новосёлов:

> "... стремление поставить всё преподавание математики на службу развитию функционального мышления, чтобы все прочие разделы школьного курса оказались в подчинённом положении по отношению к учению о функциях, есть не прогрессивная, а *односторонняя, крайняя точка зрения.* Как всякая крайность, в сложном педагогическом процессе она не может дать положительных результатов" [3 (1946, № 5-6), с. 22].

Указанное "ознакомление" было ещё далеко до требования А. Я. Хинчина, чтобы понятие функции стало "основным стержнем всего школьного курса математики". Но путь в этом направлении был официально намечен и открыт в 1949 г. И когда в результате реформы-70 понятие функции стало "стержнем", учащиеся вообще перестали понимать, что такое функция и не могли строить графики простейших функций.Этот факт признали преподаватели высшей школы после вступительных экзаменов 1977-1978 гг. [3 (1980, № 3), с. 37-38].

Третья реформаторская идея:

> в IX классе "перед началом курса стереометрии рекомендуется дать понятие... об *аксиоматическом* построении курса геометрии" [3 (1949, № 6), с. 7].

Пока только "рекомендуется" и пока только "дать понятие". Конечная цель (аксиоматическое построение курса геометрии) будет реализована реформой-70[7]. Результат:

> "Абитуриенты не владеют основными понятиями и формулами *геометрии*, не умеют применять их при решении задач" [там же].

Подчеркнём, — все три идеи взяты из только что прозвучавшего на сессии АПН доклада А. И. Маркушевича. Каким же образом ему удалось изменить только что утверждённую программу 1948 г. и включить в неё эти идеи? Как удалось повлиять на опытного методиста П. А. Ларичева[8], ведающего в Министерстве школьными программами? Некоторый свет на эти вопросы прольём позже, а пока отметим, — вслед за принятием (1949) Ларичевым реформаторских тезисов последовало (1950) принятие его в члены АПН.

1954 г. Второе изменение программы. В 1954 г. А. И. Маркушевич возглавил Математическую комиссию при МП, и с этого года "реформаторы" начинают методично вносить в школьную программу добавки, заготовленные ими в Секторе методики математики НИИ АПН.

Следует иметь в виду, что изменение программ провоцировалось идеей политехнизации школы, вставленной в решения XIX съезда КПСС (1952). И "реформаторы" этим воспользовались, несмотря на то что их основная идея повышения теоретичности преподавания противоречила идее политехнизации.

Во исполнение решения партии, они в 1954 г. составили в своём НИИ новую программу, в которую наряду с "политехническими" элементами (логарифмическая линейка, вычислительные таблицы, измерительные работы на местности, экскурсии и пр.) включили, как первый шаг, свою производную. Дальнейшие шаги пойдут легче, ибо путь к переделке программ был открыт и обоснован свыше.

[7]И мы сегодня знаем, к чему это приведёт, — к отмене экзамена, к неспособности даже абитуриентов МГУ решить простую планиметрическую задачу и, в сущности, к уничтожению учебного предмета геометрии. В конечном счёте — к ликвидации всяких геометрических знаний учащихся (студенты не знают, чему равна площадь параллелограмма, путают формулу длины окружности с площадью круга).

[8]**П. А. Ларичев** (1892-1963) — педагог-математик, более 30 лет работал школьным учителем и преподавателем педвузов Москвы; с 1944 по 1961гг. — консультант-методист при Управлении школ Министерства просвещения РСФСР, автор задачника по алгебре (1948-1971).

4. 1956-1960. “Перестройка” программ и учебников

В 1956 г. “реформаторами” был сделан решающий шаг: из школы-семилетки выведены учебники Киселёва, а из 10-го класса учебник Рыбкина. И уже в следующем 1957 г. министерская проверка фиксирует заметное падение качества знаний [3 (1958, № 6), с. 91]. Новые малопонятные учащимся учебники, что отмечали все учителя [2 (1957, № 4), с. 41, 42, 47, 57; (1957, № 5), с.67-68], нарушили главное условие формирования качественных знаний — самостоятельную работу с книгой, *самостоятельное* осмысление знаний.

Между прочим, на заседании школьной секции Московского математического общества новые учебники безапелляционно и бездоказательно нахваливались профессорами. Присутствовавшие на заседании учителя на основании опыта своей практической работы с учебником говорят, что он “вызывает затруднения не только у учащихся” [4 (1957, вып. 1), с. 197], а А. И. Маркушевич “считает” (?), что учебник “доступен”. Его поддерживает председатель ММО и академик АПН П. С. Александров: по новым учебникам “можно будет работать лучше, чем по Киселёву. Нужно (?), чтобы было много (?) различных учебников”[9] [там же, с. 199]. Опять, — учителя говорят, что “работать нельзя”, а “реформатор”, ни дня не работавший в школе, заявляет, что “можно” и даже “лучше”. Вот, оказывается, какую “культуру преподавания” планировали ввести в школу профессора ММО.

Одновременно “реформаторы” начали разрушение классической организации урока. Они предложили учителям ликвидировать проверку домашней работы учащихся и потребовали, чтобы материал урока был усвоен учащимися на самом уроке. В результате, учащиеся перестали выполнять домашние задания, перестали самостоятельно работать дома, что закономерно вело к формализму неосмысленных знаний и ослаблению навыков.

1956-й год — это рубежный год — год первого заметного снижения качества знаний. Год, задавший долгосрочную т е н д е н ц и ю. Именно с этого года АПНовские “реформаторы” реально ступили в школу и начался процесс непрерывного падения качества математического образования страны[10].

В конце 1950-х гг. в Министерство стали поступать “жалобы вузов на недостатки знаний поступающих” [10, с. 38]. Заключение вузовских преподавателей: “хорошо подготовлена лишь пятая часть поступающих в вузы, процентов 40 имеют удовлетворительные знания, остальные не подготовлены” [3 (1961, № 4), с.15]. За пятилетие “перестройки”[11] **к 1960 г. качество-1 упало до 20%, в 3,5 раза**.

Т е н д е н ц и я снижения качества знаний после 1956 г. подтверждается разнообразными объективными данными:

> “отчёты о результатах приёмных экзаменов по Красноярскому педагогическому институту за 1958, 1959, 1960 годы... показывают, что уровень знаний абитуриентов по математике в *последние годы* снижается”. [3 (1961, № 4), с. 17].

Результаты массовой проверки школ страны, проведённой в марте 1961 г. Сектором обучения математики АПН привели к выводу:

> “Несмотря на *облегчение* текстов контрольных работ по сравнению с прошлым годом, число неверных решений увеличилось” [там же].

И что в такой ситуации должны были бы делать ответственные управленцы? Выявить причины падения качества знаний и устранить их. Вместо этого замминистра А. И. Маркушевич

[9] Ещё одна ложная идея, ложность которой тоже доказана практикой. Наверное, ни в одной стране никогда не было столько “много различных учебников”, как в современной РФ. Но где среди них учебник, хотя бы приближающийся по педагогическим достоинствам к учебникам А. П. Киселёва?

[10] Процесс этот привёл сегодня к предельной деградации (качество-1, по данным ЕГЭ-2013, — менее 1%).

[11] Именно так называл А. И. Маркушевич и другие “реформаторы” то, что они делали со школой в 1956-1960 гг. Напрашивается аналогия с пятилетней горбачёвской “перестройкой”.

голословно объявляет, что причиной являются "устаревшие (?) методы преподавания" [там же]. А руководители АПН ставят задачу "совершенствования (?) образования в соответствии (?) с современным уровнем развития науки, техники и культуры" [11, с. 245]. В чём же они видят "совершенствование"? В дальнейшей ломке программ.

1960 г. Принятие новой программы[12], новые принципы которой: изучать десятичные дроби до обыкновенных; разгрузить алгебру от сложных задач и примеров; упразднить отдельный курс тригонометрии; усилить "функциональную направленность курса алгебры"; внедрить высшую математику (производная и её приложения); усилить дедуктивность и строгость в геометрии [3 (1959, № 1), с. 41-51].

Против этой программы на страницах журнала "Математика в школе" аргументированно выступили очень многие учителя. Они предвидели все отрицательные результаты, которые не замедлила проявить жизнь. "Реформаторы", как всегда, проигнорировали профессиональную критику и провели в программу в с е свои идеи. Тем самым, поддержали тенденцию деградации качества, запущенную в 1956 г.

Результаты оценивают вузовские преподаватели:

> "Основные недочёты в знаниях: *формализм*, слабая *логическая* подготовка, отсутствие необходимых *навыков* в тождественных преобразованиях" [3 (1961, № 4), с.15].

А теперь сопоставим результаты с реформаторскими новациями: "реформаторы" перестроили арифметику, результат — падение вычислительных навыков. Упразднили цельный курс тригонометрии, — "неблагополучие" с тригонометрическими навыками. Усилили функциональную пропедевтику, — выпускники не знают элементарных функций, их свойств и графиков. Ввели производную, — "*никто* (!) не мог дать определения предела". Повысили теоретический уровень учебных предметов, — ученики перестали их понимать, усилился формализм знаний, ослабла логическая подготовка [там же, с. 19-29].

Следует помнить, что все идеи новой программы были заявлены "реформаторами" ещё в 1918 г., апробированы в школе 1918 - 1924гг. [9] и реанимированы в 1936 г. Напомним, какие установки дал в 1918 г. первый официальный советский "реформатор", не имевший высшего образования, — 23-летний О. А. Вольберг:

> "Совершенно неуместно (?) разделение математики на отдельные дисциплины... Идея *функциональной зависимости* — вот тот стержень, который должен придать прочность и единство всей математике... Вторая ступень... Здесь уместно привить юношам понятие о роли *аксиомы* и о *строго* математическом методе... Знакомство с основами математического *анализа*... положит прочный фундамент математического образования" [9, с. 7-8].

А вот фразы из программы 1921 г.:

> "При изучении дробей авторы отдают *предпочтение десятичным дробям...*, решительно высказываются *против задач*, противоречащих... жизненной правде... *Центральным* местом программы авторы считают... идею *функциональной* зависимости" [там же, с. 5].

В 1924 г. эта программа была заменена "комплексами". Но в 1936г. "реформаторские" идеи вновь возвращены и вложены в Резолюцию Группы математики АН СССР. Попытки реализации

[12]Интересна следующая хронология: в 1957 г. СССР запустил первый в мире искусственный спутник Земли; в этом же году американцы создали государственную комиссию, которая работала два года и пришла к выводу, что причина научно-технического прорыва СССР заключена в высшем качестве советского образования; в 1959 г. появляется проект новых программ Ашкинузе; в 1960 г. этот проект утверждается, несмотря на всю его очевидную вредоносность, вскрытую учителями.

этих идей (попытки замены учебников, программ, управленческих кадров), сразу же предпринятые инициативной “группой-36”, тогда не увенчались успехом. Деятельность “реформаторов”-36 кратко описана в статье [5, с. 14-17].

5. Идеологическая подготовка реформы

Пропаганду своих идей “реформаторы” вели всегда. Цель эта была обозначена в программе Хинчина так: “пропаганда и разъяснение новых программ”. Заметьте, не равноправное обсуждение с целью найти истину, как было раньше, а высокомерное “разъяснение” несмышлёнышам и “пропаганда”, т. е. настойчивое повторение и вдалбливание в массовое сознание идей реформы.

В 1958 г.[13] “реформаторы” завладели печатным органом, во многом определявшим реальную методическую политику, — журналом “Математика в школе”, и эффективность их пропаганды значительно усилилась.

С **1959 г.** начинает меняться структура, содержание, идейная направленность, стиль и тональность журнала. Первая новая особенность — регулярное появление в каждом номере передовиц, — высокопарных, бессмысленно трескучих, восхваляющих “перестройку” и дающих ложные реформаторские установки, апеллирующих к решениям партии и мудрым “запискам” товарища Н. С. Хрущёва.

Ближайшей тактической задачей нового главного редактора Р. С. Черкасова было оправдание и пропаганда реформаторской программы.

Р. С. Черкасов умело делал порученное ему дело. Он скоро ввёл в редакцию ряд “реформаторов” (А. Д. Семушин, Б. В. Гнеденко, З. А. Скопец). Постепенно переориентировал содержание журнала с элементарной математики на вопросы высшей математики, которые “реформаторы” намеревались ввести в школу, и, соответственно, изменил состав авторов журнала.

С **1966 г.**, когда подготовка реформы “вышла на финишную прямую”, в редакцию журнала влилась следующая порция “реформаторов” (А. Н. Колмогоров, В. Г. Болтянский, Г. Г. Маслова и др.) и содержание журнала запестрело фамилиями одних только “реформаторов”, а критика идей реформы, которая встречалась раньше, практически перестала существовать.

“Научная” перестройка методики. С 1959 г. в журнале началось искажение истинной методики. Эта линия отчётливо прослеживается при сравнении тематики и качества статей до и после 1959 г. Видно, как постепенно реализуется превращение методики из практической в теоретическую “науку”, как навязываются ей схоластические и заведомо ложные темы, призванные обосновывать и развивать реформаторские идеи. Приведём пример.

> Некто А. А. Столяр (в то время кандидат педагогических наук из Могилёва) стал притягивать к школе идеи математической логики. Он предложил “для лучшего (?) понимания учащимися сущности (?) уравнения... трактовать уравнение как понятие, аналогичное одному из понятий исчисления предложений: под уравнением $f(x) = \varphi(x)$ мы понимаем условную запись предложения (?) о равенстве численных значений функций $f(x)$ и $\varphi(x)$” [3 (1959, № 1), с. 71, 68].

Представьте, что будет чувствовать ученик, читая такое определение. Опять провокация формального обессмысленного заучивания. В сущности, оболванивание детей. Получается, что реформаторская антиметодика имеет цель — запутать мышление учащихся и подавить его. Под видом “повышения научного уровня преподавания”.

В начале 1960-х гг. А. И. Маркушевич, в качестве замминистра, начинает официальное давление на учителей, навязывая им псевдометодические идеи.

[13] В 1958 г. А. И. Маркушевич занял пост замминистра и поставил на должность главного редактора журнала “Математика в школе” мелкого министерского клерка Р. С. Черкасова.

Идея о “вредности решения задач арифметическим способом” была одной из основных разрушительных реформаторских идей. Настойчивым её реализатором был лично А. И. Маркушевич.

В **1949 г.**, выступая перед АПН с программным докладом о принципах далёкой реформы, он наметил:

> “в V классе при решении арифметических задач следует использовать... уравнения и системы” [11, с. 19].

В 1961 г., выступая на совещании-семинаре учителей, организованном Минпросом, он потребовал

> “критически пересмотреть традиционное отношение к арифметическим методам решения задач и остатки “культа” (?) этих методов изжить из нашей школы. Это будет одним из шагов на пути сближения школы с жизнью” (?) [там же, с. 42-43].

Симптоматична всегдашняя стилистика “реформаторов” — “изжить”, “изгнать”! Оцените и здесь уровень аргументации, — оказывается, арифметические методы решения задач “отдаляют школу от жизни”. В следующем 1962 году А. И. Маркушевич включил своё требование в приказ МП.

Антипедагогичность идеи была очевидна для учителей и серьёзных деятелей педагогики и вызвала активное сопротивление. Винницкий учитель Д. С. Людмилов напомнил академику АПН: задачи — “важное средство развития логического мышления” (3 (1963, № 1), с. 59). В одноимённой статье провинциальный учитель дал убедительную аргументированную отповедь “известным советским математикам” — апологетам алгебраизации арифметических задач (А. Я. Хинчин, Г. Щедровицкий, А. И. Маркушевич, Б. В. Гнеденко). Сравните аргументацию профессоров и учителя.

> Г. Щедровицкий: “Арифметические приёмы есть анахронизм. (?)... Исследования (какие? — И.К.) говорят, что алгебраический способ проще и усваивается легче. Более того, для целого ряда задач он является необходимым условием и предпосылкой арифметического решения” [там же].

Предпосылкой для кого? Для профессора или для ученика? Профессор, очевидно, бессознательно подменяет ученика собой. И, как всегда у “реформаторов”, бездоказательные, напористые, декларативные утверждения того, что нужно. Ответ учителя:

> “на практике (!) своей работы в школе я убедился, что пренебрежение арифметическим решением задач плохо сказывается на качестве знаний учащихся... Я убедился на своём многолетнем опыте работы в школе, что арифметика при умелом её использовании оказывает алгебре самую эффективную помощь”. При алгебраическом решении задач “для учащихся... появляются трудности, связанные с “обнаружением” в условии задачи величин, которые непосредственно не указываются” [там же, с. 59-60].

Оцените и здесь, как глубоко настоящий учитель проникает в психологию учащегося, видит его трудности и знает, как ему помочь. Знание, которого начисто лишены профессора математики и которое они компенсируют профессорским апломбом.

Выводы учителя:

> “1. *Арифметическое решение задач — самое эффективное средство развития логического мышления*, логической подготовки учащихся к усвоению дальнейшего курса математики и других дисциплин.

> 2. Всякое алгебраическое решение текстовой задачи (т. е. решение её путём составления уравнений) представляет собой последовательный процесс арифметического решения задачи, следовательно, арифметическое решение служит базой для алгебраических" [там же].

Д. С. Людмилова решительно поддержали и другие учителя. Они обратили внимание, что

> "выпускники последних двух-трёх лет совершенно не умеют решать арифметических задач, а, прибегая к решению их алгебраическим путём, часто допускают ошибки в составлении уравнений" [3 (1964, № 1), с. 58].

И делают обоснованный практикой вывод:

> "если кто не овладел основными приёмами решения наиболее распространённых типов арифметических задач, он не только не сможет решать различные нетиповые арифметические задачи, но и не в состоянии будет самостоятельно ориентироваться в решении задач с помощью уравнений" [там же].

Учителя говорят "реформаторам": "наблюдения показывают", "опыт (!) показывает, что учащиеся, хорошо владеющие разными способами решения арифметических задач, не испытывают затруднений в решении алгебраических и геометрических задач" [там же, с. 59].

Обратите внимание, — не только алгебраических, но и геометрических задач! Это ведь уже объективный показатель успешного развития собственно мышления, содержательного мышления, не привязанного к типам задач. Это сформированное обучением качество личности. И длительный массовый опыт отечественной школы доказал, что формируется это качество именно систематизированными примерами решения *типовых* арифметических задач.

Само возникновение типовых задач подсказано практикой. Объединение родственных задач в типы позволило тщательно разработать методику обучения их решению, облегчить учащимся ориентировку в массе задач и на посильном ограниченном материале осторожно развивать их мышление.

Но никакие аргументы "реформаторам" для их целей никогда не нужны, поэтому они и не слышат их. Они огульно объявляют их "малоубедительными". Они игнорируют даже свидетельства опыта, многолетней школьной практики.

Заметим, учителя точно фиксируют момент заметного *резкого* снижения решаемости выпускниками школы арифметических задач (как арифметическим, так и алгебраическим способами) — 1960 г. В этот год выпускались дети, начавшиеся учиться в 1950 г., когда в программе было "ограничено" употребление арифметического метода. Результат, — после десяти лет обучения они "*совершенно* не умеют решать задачи". Как видим, даже небольшое вроде бы искажение классических методов обучения сразу же даёт резко отрицательный практический результат.

6. Псевдонаучное обоснование установок будущей реформы

Ещё одним важным направлением деятельности А. И. Маркушевича стало внедрение реформаторских идей в "научно-исследовательскую" деятельность институтов и лабораторий АПН. В частности, была успешно внедрена идея обучения младших школьников перевёрнутым антипедагогическим принципом "от общего к частному", привязанным к задаче "математического развития".

"Математическое развитие". Такая задача была абстрактно и бессодержательно сформулирована Г. М. Фихтенгольцем ещё в 1936 г.:

> "... мы вправе ждать, что он (курс начальной арифметики. — И.К.) заложит и некоторые основы математического развития" [2, с. 56].

Но что это такое — “математическое развитие”? Что такое его “основы”? Через 25 лет, в 1961г., А. И. Маркушевич разъяснил это “научным работникам” так:

> “Вторая задача, стоящая перед нами и не менее важная, чем первая (“передача учащимся определённой суммы знаний и навыков”, — вставка моя. — И.К.), — это задача математического развития учащихся... если мы вместе с научными работниками (АПН? — И.К.) сумеем разработать целую систему или, может быть, программу математического воспитания, в которой будет установлено, какие цели на каждом возрастном этапе можно ставить, какими путями этих целей добиваться и как проверять результаты математического воспитания, то эффективность математического образования возрастёт” [10, с. 31, 33].

Заметьте, — естественный процесс созревания сил и способностей учащихся в процессе труда учения заменяется “научной” регламентацией.

> “Такое воспитание должно вестись с начальных классов. Именно в начальных классах заложены большие возможности для развития школьника, которые мы далеко не полностью ещё используем” [там же, с. 38].

Это указание Маркушевича было принято АПН к исполнению. Учёные педагоги (Скаткин – Краевский) обобщают его так:

> надо, “чтобы *каждый* учебный предмет имел чёткую программу собственно воспитательных воздействий, обусловленную желаемыми результатами обучения” [16]. И далее: “уже невозможно (?) делать главную ставку (?) на усвоение определённой суммы фактов... Учебный предмет... должен... привести их к пониманию теории — её логики, логической системы фактов, понятий и законов” [там же].

Обратим внимание на то, как в конечном итоге неопределённое “математическое развитие” подменяется “пониманием теории” и “её логической системы” (опять подмена!). Тем самым создаётся видимость “научного” обоснования главного принципа реформы — “повышения теоретического уровня обучения” (то, что мы назвали “принцип ВТУ”).

На основе “обобщающих идей”. А. И. Маркушевич подсказал “научным работникам” и путь решения поставленной задачи — “математическое развитие” на основе “обобщающих идей, принципов, понятий” [3 (1993, № 6), с. 75], т.е. “от общего к частному” — принцип, на котором он сам в это же время перестраивал школьную программу и повышал её “научный уровень”.

Эта подсказка очень сгодилась педработникам из лаборатории члена-корреспондента АПН РСФСР Д. Б. Эльконина. Для обоснования желания А. И. Маркушевича аспирант В. В. Давыдов, будущий академик РАО, придумал так называемую “теорию обобщения” и сделал из неё вывод:

> “... усвоение знаний общего и абстрактного характера предшествует знакомству с более частными и конкретными знаниями”[14] [13, с. 397].

Т.е. классический принцип обучения “от частного к общему” переворачивается с ног на голову. Принцип *завершающего* аксиоматически-дедуктивного построения научной теории переносится на обучение маленьких детей. Абсурд, освящённый именем Академии. То, что и нужно было “реформаторам”. И вот как новая педагогическая теория проявила себя в обучении первоклашек:

[14]Продолжение цитаты: “... последние должны быть выведены из первых, как из своей единственной основы — этот принцип вытекает (?) из установки (?) на выяснение происхождения понятий и соответствует требованию восхождения (?) от абстрактного к конкретному”. Одна эта фраза проявляет уровень языковой и логической культуры, уровень “научности” советских педакадемиков.

> "... согласно разработанному нами курсу, дети в первом полугодии *вообще не "встречают" чисел*... они осваивают сведения о величине" [там же, с. 385].

И каков результат? Свидетельствует академик РАО Ю. М. Колягин: после такого уродливого трёхлетнего обучения

> "... эти дети были переданы обычному учителю, который в течение одного года пытался обучить их обычной арифметике, начав с таблиц сложения и умножения" [8, с. 174]. Эксперимент, проводимый в начале 1960-х гг. Институтом психологии АПН РСФСР, был свёрнут.

Подробная, подлинно научная критика ложной методики проведена главным редактором журнала "Народное образование" А. Кушниром:

> "Содержание и инструментарий "развивающего обучения по Давыдову"... откровенно выстроены в логике левополушарного развития, ... фактически блокируют правополушарную линию развития, исключают из учебного процесса образно-интуитивные процессы" [14, с. 50].

Т.е. противоречат *законам* дидактики, законам понятного обучения. Его вывод: система Эльконина-Давыдова есть "инструмент разрушения природных матриц сознания" [15, с. 38]. Обратим внимание на смысл этого вывода, — *разрушение* природных, т. е. естественно присущих детскому уму свойств. А если сказать попросту, — *дебилизация* детей.

И тем не менее педакадемик М. Н. Скаткин, поддерживая своих коллег, возводит их декларации в ранг новых, открытых "советской педагогикой" "принципов дидактики" [16, с. 17]. И сам "развивает" идею А. И. Маркушевича так:

> "Группировка фактов вокруг ведущих идей, совершенствование структуры знаний облегчает (?) работу мышления и памяти учащихся, а это способствует устранению перегрузки" [там же].

Подмена обучения развитием. Другой педакадемик, Л. В. Занков, в это же время занялся проблемой "соотношения (?) обучения и развития" младших школьников и придумал для них свою систему обучения, поставив новую цель:

> "... учебный процесс... должен быть построен исходя из задачи развития школьников, а не ориентироваться исключительно на усвоение знаний и навыков... Центральной идеей экспериментальной системы является достижение возможно более высокой эффективности обучения для общего развития школьников" [17, с. 23, 31].

Но что это такое — "развитие школьника"? Что такое "общее развитие"? Л. В. Занков отвечает так:

> "под общим развитием подразумевается разностороннее развитие психической деятельности. Общее развитие... охватывает не только познавательные процессы, но также волю и чувства" [там же, с. 250].

Тавтология: под развитием подразумевается развитие (?!).

А что такое "развитие познавательных процессов", "развитие воли", "развитие чувств"? Как измерить эти "развития", чтобы установить достижение "эффективности развития"?

> А. Кушнир: "Декларируя в качестве главного предназначения школьника развитие, "развивающее обучение" не предложило в качестве меры успешности ученика оценку собственно развития — оценку изменения состояния" [14, с. 51].

И можно ли такое неопределённое качество ставить целью обучения — целью, достижение которой невозможно проверить? Тем самым подрывая достижение традиционной, конкретной, проверяемой цели — глубокого усвоения знаний и выработки прочных навыков.

Основные оригинальные принципы системы Занкова: 1) "обучение на высоком уровне трудности"; 2) "быстрым темпом"; 3) с "ведущей ролью теоретических знаний" [там же, с. 32, 34, 36].

Но что такое "уровень трудности"? Ответ академика:

> "... имеется в виду не любая трудность, а трудность, заключающаяся в познании сущности изучаемых явлений" [17, с. 32].

Но что тогда есть "высокий уровень трудности познания" для первоклассника? Опять неопределённо-бессмысленные выражения.

Следующее разъяснение:

> "... идти вперёд быстрым темпом... означает непрерывное обогащение школьников всё новыми и новыми знаниями, отказ... от однообразного повторения пройденного" [там же, с. 34].

Отказ от повторения? От главного условия, закрепляющего знания, делающего их долговременными и прочными? Что это, как не разрушение качественного обучения?

А что значит "*непрерывное* обогащение" при отсутствии закрепления? Это лишение учащихся времени для приведения знаний в систему. Это непрерывная *хаотизация* обучения, фрагментация лоскутных не осмысленных знаний и вымывание их из памяти. Отметим также использование лукавых слов-образов, ориентированных не на точное раскрытие смыслов, а на их сокрытие, на бездумное впечатление, — "обогащение", "*однообразное* повторение".

Первые два принципа можно было бы ограниченно и осторожно применять к обучению особо способных детей, а точнее детей, у которых высока скорость умственных процессов. Но в массовой школе это абсурд, чреватый разрушением эффективности процесса обучения.

Наконец, "ведущая роль теоретических знаний". А это что значит? Что такое "теоретическое знание" у первоклассника, а что — "не теоретическое"? Что значит словосочетание "ведущая роль"? Кого, куда и как эта "роль" "ведёт"?

Теоретическое знание — это знание, организованное в системе абстрактных понятий. Следовательно, смысл третьего принципа Занкова состоит в повышении абстрактности обучения. Но понятийное мышление противоречит возрастным особенностям детской психики. Дети 7-10 лет могут оперировать только конкретно-образными представлениями, — это знает каждый, кто общается с детьми, и это экспериментально подтверждено психологической наукой (Л. С. Выготский) [18, с. 47-48]. Понятийное мышление появляется у подростков 11-14 лет, причём очень несовершенное. Настоящие понятия формируются лишь в юношеском возрасте [19, с. 147].

И вот, несмотря на эти бесспорные научные данные, наши педакадемики смело утверждают:

> "... суждения о конкретности мышления учащихся младших классов неправильны... наглядно-образные представления нельзя признать ведущим компонентом мышления младших школьников". Эта "концепция (?)... устарела" [17, с. 36].

Устарел принцип наглядности обучения? Устарел *закон* природы?

В результате дальнейшей практической "проверки" новых "концепций" в 91-й экспериментальной школе Москвы Академия ПН выдала два инновационных метода обучения — "по системе Давыдова" и "по системе Занкова". И разве мог эксперимент, проводимый авторами, не подтвердить их "концепций"? Такого не случалось никогда с реформаторскими теориями.

Вот как расцветала и утверждалась новая "советская дидактика". Как свидетельствует академик РАО Ю. М. Колягин, "обе эти системы... не привели... к позитивным результатам" [8, с. 175]. И не могли привести, поскольку противоречили *законам* познания и обучения. И тем не менее учителям, соглашавшимся работать по этим "методикам", делалась прибавка к зарплате.

Внедрение в обучение младших школьников идеи "развития теоретического мышления" А. Кушнир квалифицирует как "педагогическое преступление". Другим таким "преступлением" он называет "дифференцированное" обучение, которое ведёт к выбраковке детей: "Классы "для дураков" и "элитные школы" ещё аукнутся нам такой люмпенизацией, что времена "неперспективных деревень" покажутся цветочками¿ [14, с. 51].

Эта идея тоже рождена "реформаторами", — вспомним хинчиновское 1939-го года требование "со всей серьёзностью рассмотреть вопрос о возможности некоторой специализации преподавания в старших классах нашей школы". Зачем? Специализация начинается в высшей школе, и переносить её в общеобразовательную — значит *смешивать* разнонаправленные цели и разрушать *систему* общего образования, нацеленного на базовые знания, необходимые для всех.

Ужатие арифметики. Фихтенгольцевская-36 идея "развития" младшеклассников позволила педакадемикам "научно" обосновать его предложение ужать начальный курс арифметики. Из того же Скаткина:

> "Эксперименты показали, что нацеленность дидактической системы на общее развитие младших школьников делает доступным (?) для них такое содержание обучения, которое прежде считалось трудным и для студентов. На практике доказана возможность усвоения детьми *за три года* обогащённого четырёхлетнего курса начального обучения. Переход начальной школы на трёхлетнее обучение — крупное достижение советской дидактики" [20, с. 3].

Но настоящая (а не теоретическая) практика докажет, что и это утверждение педакадемиков есть ложь. А значит, наука, которую они придумали, является *лженаукой*.

Литература

1. Костенко И.П. 1930-1956 гг. Возрождение и рост русской школы (статья третья) // Математическое образование. - 2013. - № 1-2(65-66).

2. Высшая школа. - 1937, - № 2.

3. Математика в школе. - 1939, № № 4, 6, - 1946, № № 5-6, - 1949, № 6, - 1950, № № 1, 2, - 1958, № 6, - 1958, № 6, - 1959, № 1, - 1961, № 4, - 1963, № 1, - 1964, № 1, - 1980, № 3.

4. Математическое просвещение. - 1957-1961.

5. Костенко И.П. Корни, ветви и "ягодки" реформы-1970 // Математическое образование. - 2009. - № 2(50).

6. Потёмкин В.П. Статьи и речи по вопросам народного образования. - М.: АПН, 1947.

7. Известия АПН РСФСР. - М.: АПН, 1946.

8. Колягин Ю.М. Русская школа и математическое образование. - М.: Просвещение, 2001.

9. Андронов И.К. Полвека развития математического образования в СССР. - М.: Просвещение, 1967.

10. На путях обновления школьного курса математики. - М.: Просвещение, 1978.

11. Каиров И.А. Очерки деятельности Академии педагогических наук РСФСР 1943/66. - М.: Педагогика, 1973.

12. Костенко И. П. Первая коренная реформа русской школы (статья вторая) // Математическое образование. - 2012, - № 4(64).

13. Давыдов В.В. Виды обобщений в обучении. - М.: Педагогика, 1972.

14. Кушнир А. Есть ли место тройкам-пятёркам в развивающем обучении? // Народное образование. - 1997. - № 8.

15. Кушнир А. Вперёд: к Выготскому // Народное образование. - 1997. - № 7.

16. Скаткин М.Н. Принципы обучения // Дидактика средней школы. - М.: Просвещение, 1982.

17. Занков Л.В. Дидактика и жизнь. - М.: Просвещение, 1968.

18. Покорный Ю.В. Унижение математикой? - Воронеж: ЦЧКИ, 2008.

19. Грановская Р.М. Элементы практической психологии. - Л.: ЛГУ, 1988.

20. Скаткин М. Содержание образования: проблемы и перспективы // Учительская газета. - 1978. - 9 февраля.

Костенко Игорь Петрович,
Ростовский государственный университет
путей сообщения (филиал в г. Краснодаре),
доцент, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail:kost@kubannet.ru

Об адаптированном курсе математики для кружковцев-химиков[1]

А. Я. Белов, Г. О. Шнайдер

В заметке изложена концепция и программа курса математики для участников химического кружка. В Приложении одна из тем описана более подробно. Некоторые доклады участников кружка будут опубликованы в следующем номере журнала.

Наш опыт преподавания математики кружковцам-химикам[2] перекликается с опытом И. С. Рубанова и С. Е. Рукшина. Основная идея в том, что в условиях (двух)семестрового кружка ничему нельзя научить, но можно показать силу красоты и как математическая красота связана с физическом смыслом, на одном примере. А далее человек сам ориентируется.

1. Введение

Важность развития математической культуры у специалистов самых разных отраслей несомненна. Однако современная школа зачастую прививает отвращение к математике. В школьном курсе внимание акцентируется на ошибках, на том, чего не следует делать (примером чему служат бесконечные «ОДЗ»), а само понятие математической строгости фетишизируется. Все это не вызывает энтузиазма у учащихся и мы получаем извращенное отношение к предмету — как к своду формальных правил, применяемых механически. Именно такое отношение прежде всего и вызывает разговоры об «отсутствии математических способностей», в то время как практика показывает, что особенностью многих (настоящих) отличников является не интеллект, а простой здравый смысл в отношении к предмету. Об этом подробнее писалось в работе [1], данная статья с ней перекликается. Нам созвучны мысли, изложенные в работах [4, 5, 6, 7]. О преодолении возникающих методических проблем в процессе преподавании индукции написано в замечательной статье И. С. Рубанова [3].

Потребность в преодолении такого отношения и вызвала к жизни *адаптивный курс математики*, разработанный в рамках сотрудничества лабораторий математики и коллоидной химии ДНТТМ.

2. Адаптивный курс математики

Основная концепция курса состоит в том, что хотя и невозможно дать сколь-нибудь систематические знания в рамках семестрового или даже двухсеместрового курса, но можно преодолеть школьное отношение к предмету и выработать правильное, повернуть сознание учащегося. Таким образом, целями и задачами курса являются:

- преодоление формализма в отношении к математике и привлечение здравого смысла учащегося к предмету;

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 14-01-00548

[2]Имеется в виду кружок в ДНТТМ — московском Доме научно-технического творчества молодежи, г. Москва, ул. Донская, 37 — *Прим. ред.*

- показ связи между математическим и физическим смыслами. Ученик должен понимать, что, написав математическую формулу, он сделал некоторую физическую гипотезу, и надо понять, какую именно;
- развитие эстетического чувства учащихся и общей культуры;
- сообщение учащимся знаний, поддерживающих курс коллоидной химии (теория вероятностей, понятие интеграла и производной и т.д.);
- приучение учащихся к физическому уровню строгости в математических рассуждениях.

2.1. Основные средства решения этих задач

- через разбор примеров, имеющих несомненное прикладное значение для учащегося, демонстрировать связь между физическим и математическим смыслами;
- исторический рассказ об изобретении некоторых математических понятий «практиками». При этом акцентируется внимание на физическом уровне строгости рассуждений и противопоставлении его школьному стилю (например, рассказ об изобретении логарифмов);
- рассказ эстетически значимых сюжетов, имеющих общекультурное и общефилософское значение (например, логические парадоксы).

2.2. Список основных тем, которые читались в разное время

- Логические парадоксы (2 часа).
- Понятия *скорости* и *производной* (4 часа).
- Процедура интегрирования (4 часа).
- Понятие *плотности* (2 часа).
- История создания логарифмов (4 часа).
- Техника счета пределов (4 часа).
- Техника дифференцирования (4 часа).
- Комбинаторика (4 часа).
- Понятие *вероятности* (2 часа).
- Биномиальное распределение (2 часа).
- Геометрические вероятности (2 часа).
- Пуассоновское распределение (2 часа).
- Случайные блуждания. Матожидание и дисперсия (4 часа).
- Оценка скорости диффузии (2 часа).
- О Гауссовом распределении (2 часа).
- Распределение Максвелла (2 часа).
- Оценка скорости химических реакций (2 часа).

3. Заключение

Сотрудничество лабораторий ДНТТМ продолжалось более 8 лет, велись совместные кружки, на основании опыта которых и возникла данная статья (Г. О. Шнайдер долгие годы работал заведующим лаборатории коллоидной химии).

За время работы были достигнуты определенные успехи. Некоторые кружковцы-химики заняли призовые места на математических и физических олимпиадах (районная, городская, международный Турнир городов), математические доклады учащихся были отмечены премиями на конференциях «Поиск» и на международной Конференции памяти Чижевского (г. Обнинск). (Доклады учащихся были посвящены оценкам скорости химических реакций и распределению Максвелла. См., например, [2].) Отметим, что успех на олимпиаде или на конференции сам по себе никогда не был нашей основной целью. Это лишь следствие изменившегося отношения к предмету. В дальнейшем предполагалось продолжить работу в рамках совместного проекта трех лабораторий (математики, коллоидной химии, вычислительной техники). Проект посвящен проблеме разделения эмульсии и может иметь непосредственное народнохозяйственное значение.

Приложение. Оценки скорости химических реакций и распределение Максвелла–Больцмана

Введение. Давайте удивимся. Когда температура у человека 38 градусов, он чувствует себя совсем по-другому, чем когда 37. Но в абсолютном выражении это 311 или 310 градусов Кельвина, т.е. средняя энергия молекулы отличается на 0,3%. Откуда такое влияние столь незначительного изменения? Чтобы это понять, надо разобраться с распределением молекул по скоростям. Химические реакции обеспечиваются быстрыми частицами и, оказывается, количество быстрых частиц изменится заметно; как именно — это тема данного курса.

1. Чтобы разобраться, как распределены молекулы по скоростям, нужна концепция *плотности вероятности*, ведь вероятность того, что скорость имеет данное значение, равна нулю! Обсуждаем концепции *плотности*, а также *плотности вероятности*.

2. Постулаты Максвелла: 1) Плотность вероятности не зависит от направления вектора скорости (изотропность пространства). 2) Компоненты скоростей (V_x, V_y, V_z) распределены независимо. Обсуждается подробно понятие *независимости событий* для классических вероятностей и для плотностей.

Формулируется итог: $\varphi(\vec{V}^2) = F(\vec{V}) = \phi(V_x^2)\phi(V_y^2)\phi(V_z^2) = \varphi(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)$. Обозначим $a = V_x^2$, $b = v_y^2$, $c = v_z^2$. Имеем:

$$\varphi(a+b+c) = \phi(a)\phi(b)\phi(c), \quad \ln(\varphi(a+b+c)) = \ln(\phi(a)) + \ln(\phi(b)) + \ln(\phi(c))$$

при любых a, b, c. Решаем функциональное уравнение. Попутно обсуждаем понятие *функции* как *закона соответствия*, который нужно найти (исторически понятие *функции* возникло, когда потребовалось решить функциональное уравнение, т.е. из множества законов соответствия выбрать один правильный).

В итоге имеем: $F(\vec{V}) = C_1 \exp(C_2 \vec{V}^2)$.

3. Находим константы C_1, C_2. $\int_{\vec{V}} F(\vec{V}) = 1$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C_2 \exp(C_1 V_x^2) dV_x \exp(C_1 V_y^2) dV_y \exp(C_1 V_z^2) dV_z = 1.$$

Понятие *интеграла*. Как известно, Байкал создан для нужд целлюлозно-бумажного комбината. Следует определить запасы пресной воды в озере. Пусть оно замерзло. Разобьем поверхность озера на прямоугольнички со сторонами dx и dy. Буровая установка делает прямоугольное отверстие, и льда достается $h(x,y)dxdy$ из каждого столбика. Общий запас воды равен $\sum_{(x,y)} h(x,y)dxdy$. При удлинении знака S (Summa onium) получается интеграл. Пересыхает

Аральское море. Уровень уменьшился на dh, а площадь поверхности $S(h)$. Объем высохшей воды равен $S(h)dh$, а общий объем $\int_h S(h)dh = \int\int h(x,y)dxdy$. Интеграл от плотности. Вопросы сходимости игнорируются ради наглядности. Интеграл от плотности есть масса. Приводятся примеры.

Интеграл Гаусса. $J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$. Тогда

$$J^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

Двумя способами вычисляется площадь под поверхностью $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$. С одной стороны это J^2, (разбиваем на слои вдоль оси $(0X)$, с другой стороны это $\int 2\pi re^{-r^2}dr$ в силу разбиения на цилиндрические слои.

В итоге имеем $J^2 = \pi$ или $J = \sqrt{\pi}$. Доказываем что $C_1 = -C < 0$, $C_2 = (C/\pi)^{3/2}$ из равенства единице интеграла от плотности вероятности. Итак,

$$F(\vec{V}) = (C/\pi)^{3/2}e^{-C\vec{V}^2}.$$

3. Определяем константу C исходя из средней энергии частицы, которая равна *температуре*. Энергия частицы со скоростью $\vec{V}$ равна $m\vec{V}^2/2$ а средняя энергия равна

$$m\int_{\vec{V}} \vec{V}^2/2(C/\pi)^{3/2}e^{-C\vec{V}^2}dV_xdV_ydV_z = m\int_{\vec{V}}(V_x^2+V_y^2+V_z^2)/2(C/\pi)^{3/2}e^{-C\vec{V}^2}dV_xdV_ydV_z =$$

$$= 3/2m(C/\pi)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty} V_x^2e^{-CV_x^2}dV_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-CV_y^2}dV_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-CV_z^2}dV_z =$$

$$= m\sqrt{C/\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} V_x^2e^{-CV_x^2}dV_x = \frac{3/2m}{C} = 3/2kT,$$

где k — *постоянная Больцмана.* Откуда $C = m/kT$.

4. Использование свойств распределения. Время пробега молекулы – порядка наносекунды, если нужной энергией обладают 10^9 молекул, то реакция проходит за время порядка секунды. Если же нужной энергией обладают 10^{12} молекул (если $e^{-\lambda} = 10^{-12}$, то $\lambda \sim 30$ то реакция проходит за время порядка 1000 секунд. В этом случае легко показать, что при увеличении средней энергии на 0.3% количество частиц с нужной энергией возрастет весьма значительно, примерно на 10%.

5. По ходу дела могут обсуждаться случайные блуждания, оцениваться длина пробега в зависимости от диффузии и т.д. Это зависит от времени и силы школьников.

Литература

[1] Белов А.Я., Явич Р. Проблемы одаренности и стадийность математического обучения // Математическое образование. - 2010. - № 1(53). - С. 2-5. Английский перевод: Kanel-Belov A., Yavich R. Staging of Mathematical Education // Athens Institute for Education and Research: ATINER's Conference Paper Series MAT2012-0176 (Athens, Greece, June 2012). - P. 5-9. URL: http://www.atiner.gr/papers/MAT2012-0176.pd

[2] Кулыгин А.К. (Рук. Белов А.Я.) Распределение Максвелла // Поиск- 93: материалы конференции, физика, математика, астрономия, экология. - Москва, ДНТТМ, 1993. - С. 23-29.

[3] Рубанов И.С. Как обучать методу математической индукции? // Математика в школе. - 1996. - № 1. - С. 14-20.

[4] Рукшин С.Е., Максимов Д.В. Структура интуиции у студентов-математиков и ее использование в решении задач: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. - СПб.: БАН, 2005. - С. 152-158.

[5] Рукшин С.Е., Максимов Д. В. Сравнительный анализ различных аспектов процесса решения задач как модели математического творчества – II // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: Матер. научн. конф. Герценовск. чтения, LIX (СПБ, РГПУ им. Герцена, 16–21 апреля 2007). - СПБ, 2007. - С. 239-245.

[6] Рукшин С.Е., Максимов Д.В. Сравнительный анализ различных аспектов процесса решения задач как модели математического творчества – I // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: Матер. научн. конф. Герценовск. чтения, LX (СПБ, РГПУ им. Герцена, 17–22 апреля 2007). - СПБ, 2006. - С. 168-172.

[7] Рукшин С.Е., Максимов Д.В. Сравнительный анализ различных аспектов процесса решения задач как модели математического творчества – III // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: Матер. научн. конф. Герценовск. чтения, $LXII$ (СПБ, РГПУ им. Герцена, 13–18 апреля 2009). - СПБ, 2009. - С. 196-199.

Белов Алексей Яковлевич,
профессор кафедры дискретной математики
ФИВТ МФТИ, доктор физ.-мат. наук.

E-mail: kanelster@gmail.com

Шнайдер Григорий Осипович
заведующий лабораторией коллоидной химии
ДНТТМ, доцент.

Математический анализ эффективности сортировки сложного железнодорожного состава

Н. Н. Григорьева, А. Ф. Ляхов

В статье рассмотрена математическая модель сортировки железнодорожных составов; эффективность сортировки оценивается длиной пути, проходимого при сортировке маневровым локомотивом. Описан программный комплекс для различных алгоритмов сортировки; проведена оценка эффективности алгоритма с учетом сложности состава и количества станций назначения.

Широкое использование сортировок реальных объектов в технологических процессах и использование сортировки математических объектов при обработке информации вызывает постоянный интерес к проблеме построения и оценке эффективности алгоритмов сортировки.

При сортировке реальных объектов её эффективность определяется, как правило, физическими требованиями технологического процесса, например, энергетическими затратами на её осуществление. Наиболее известным примером реальной сортировки служит сортировка железнодорожного состава.

Железнодорожная транспортная сеть России — одна из крупнейших железнодорожных сетей в мире. Эксплуатационная протяжённость сети железных дорог общего пользования составляет 86 тыс. км, электрифицировано 43033 км.

В настоящее время одной из важнейших проблем, стоящих перед железнодорожным транспортом [1], является недостаточная пропускная способность железных дорог и низкая скорость перевозок: средняя скорость движения груза с учетом погрузки, выгрузки, простоев на сортировочных станциях составляет около 9 км/ч. Разработка и использование эффективных методов сортировки железнодорожных составов позволит снизить время простоя вагонов, как на сортировочных станциях, так и на промежуточных, по мере следования по маршруту.

В статье проводится оценка пути, проходимого локомотивом при расформировании поезда на сортировочной станции в зависимости от сложности состава и параметров сортировочного узла, сравниваются два способа сортировки, а также оцениваются статистические характеристики, то есть математическое ожидание проходимого локомотивом пути и интервал разброса результатов. При исследовании использовался метод имитационного моделирования.

Проблема формирования железнодорожного состава

В процессе передачи вагонов с грузом с небольших промежуточных станций на основную железнодорожную магистраль происходит формирование поезда, в котором группы вагонов по станциям назначения расположены случайным образом. На сортировочной станции прибывший состав должен быть расформирован и далее снова сформирован в соответствии с маршрутом следования. То есть для доставки вагонов грузополучателям необходимо сформировать поезд, в котором вагоны расположены таким образом, что при его прохождении мимо станции, вагоны, предназначенные для данной станции, расположены в конце поезда, и их можно просто отцепить от состава.

Сортировка вагонов может осуществляться двумя способами: на сортировочной горке и на сортировочной станции. Сортировочная горка представляет возвышенность с оборудованным множеством путей и стрелок. Поезд подается на вершину горки. Последовательно отцепляемые и сталкиваемые вагоны скатываются под действием силы тяжести. На склоне горки они сортируются с помощью перевода стрелок на различные пути.

Второй способ сортировки осуществляется на плоских сортировочных станциях с помощью маневровых локомотивов.

Математическая модель железнодорожной сортировки

Приведём формальную математическую модель железнодорожного состава. Пусть железнодорожный состав состоит из N вагонов, k_1 вагонов должны быть отправлены на первую станцию, k_2 на вторую и т.д., причём $\sum_{i=1}^{M} k_i = N$, M — количество станций. Порядок расположения вагонов в составе произвольный.

На первом этапе сортировки состав должен быть расформирован, то есть вагоны каждой группы должны быть объединены в отдельные подгруппы. Затем эти группы формируются в новый состав, в котором их последовательность расположения соответствует маршруту следования таким образом, чтобы при проходе станции соответствующая группа вагонов оказалась в конце поезда и могла быть отцеплена без всякого дополнительного маневрирования.

Расформирование поезда осуществляется с помощью манёвров локомотива на сортировочной станции, который, переезжая с одного пути на другой и последовательно отцепляя вагоны, осуществляет сортировку состава.

На рис. 1 показана схема станции. Локомотив изображён чёрным прямоугольником, вагоны, соответственно, белыми прямоугольниками.

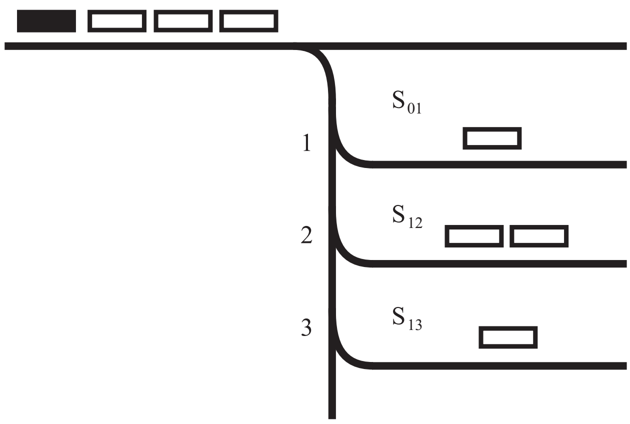


Рис.1

Начиная расформирование состава, локомотив, осаживая поезд, проезжает расстояние, равное сумме пути S_{01} и длины состава. После остановки отцепляются все вагоны первой группы, находящиеся в конце состава. Далее поезд возвращается на основную магистраль. При этом он проходит путь, равный длине состава без отцепленных вагонов.

Чтобы попасть на второй путь, состав должен пройти расстояние, равное сумме пути S_{12} и длины поезда без отцепленных вагонов. После остановки отцепляются хвостовые вагоны. Состав возвращается на основные рельсы. После этого проводится анализ, какого вида вагоны в конце поезда и принимается решение о дальнейшем маршруте поезда. По окончании расформирования поезда, в зависимости от маршрута следования, осуществляется формирование состава.

Очевидно, что эффективность сортировки можно оценить по пройденному локомотивом пути. Процесс расформирования поезда и его формирование является процессом сортировки мультимножества вагонов.

Сортировка множеств

При обработке научной и экономической информации широко используются различные алгоритмы сортировки математических объектов. В настоящее время существует более трёх десятков алгоритмов сортировок различного вида [2]. Качество математических сортировок оценивается по времени их выполнения, которое определяется количеством перестановок, необходимых для упорядочивания заданного множества. Заметим, что количество необходимых перестановок определяется сложностью исходного множества [3,4].

Задача сортировки может быть сформулирована следующим образом. Необходимо упорядочить набор A из n элементов $a_1, a_2, ..., a_n$. Будем считать, что с каждым элементом a_i связан ключ $k_i \in K$. На множестве ключей K задано отношение порядка — линейного упорядочивания, для которого выполнены следующие условия:

закон трихотомии: для любых $x, y \in K$ либо $x < y$, либо $x > y$, либо $x = y$;

закон транзитивности: для любых $x, y \in K$, если $x < y$, и $x < z$, то $x < z$.

Задачей сортировки по неубыванию является нахождение перестановки элементов $p(1), p(2),...,$ $p(n)$, при которой ключи располагаются в порядке неубывания:

$$k_{p(1)} \leq k_{p(2)} \leq ... \leq k_{p(n)}.$$

В результате работы алгоритма и применения перестановки получается отсортированный набор

$$a_{p(1)}, a_{p(2)}, ..., a_{p(n)}.$$

Заметим, что в рассматриваемой задаче формирования железнодорожного состава в качестве ключей для упорядочивания выступают номера станций назначения вагонов.

Основной параметр, характеризующий алгоритм сортировки, — это время его работы, зависящее от размера n множества A. Алгоритм считается хорошим, если для его реализации требуется $O(n \log n)$ перестановок, и алгоритм считается плохим, если количество перестановок $O(n^2)$.

Все сортировки, используемые в информационных технологиях, делятся на два вида: внутренние и внешние. Внутренние сортировки оперируют с данными, целиком помещающимися в оперативной памяти компьютера. Внешние сортировки используют внешние запоминающие устройства памяти с последовательным упорядочиванием файлов. Исследуемые сортировки железнодорожных поездов могут быть отнесены к классу внешних сортировок.

Поскольку в железнодорожном составе может находиться несколько вагонов с назначением на одну и ту же станцию, то для описания его структуры более подходит понятие мультимножества [5].

Мультимножество есть объединение не обязательно различных элементов. Например,

$$A = \left\{ \underset{k_1}{a_1, a_1, ..., a_1} \quad \underset{k_2}{a_2, a_2, ..., a_2} \quad \underset{k_M}{a_M, a_M, ..., a_M} \right\}$$

Эффективность сортировки определяется сложностью железнодорожного состава. Пусть состав состоит из вагонов, предназначенных для двух станций. Тогда состав может быть смоделирован как последовательность нулей и единиц, например: 0011100101.

Очевидно, что составы вида 000000 или 111111 вообще не требуют сортировки, а состав вида 000011 уже сформирован. Рассмотрим состав, имеющий более сложную структуру 001001. Для его расформирования потребуется семь раз проехать стрелки. Действительно, для того, чтобы отцепить последний вагон, поезд должен проехать стрелку на первом пути два раза – в одну сторону и обратно. Для того, чтобы отцепить два следующих вагона, поезд должен два раза проехать стрелку на пути, на котором формируются вагоны “0”, затем снова проехать два раза стрелку на первом пути и отцепить вагон “1”. С оставшимися вагонами он возвращается на путь формирования вагонов из “0”.

В качестве меры сложности состава удобно выбрать число переходов от нуля к единице и обратно [3], то есть сложность рассматриваемого состава 001001 $S = 3$. Заметим, что в этом случае однородный состав имеет нулевую сложность. Состав вида 000011 имеет сложность $S = 1$. В таблице 1 приведены виды составов и их сложности.

Таблица 1.

Состав	Сложность
00000, 11110	0
00011, 11000	1
10001, 01100,	2
10010, 01001, 00101	3
01010	4

Введем понятие сложности последовательности. Пусть имеется последовательность из нулей и единиц $n_1, n_2, ..., n_k$.

Определение: *Сложность последовательности чисел $n_1, n_2, ..., n_k$ есть сумма модулей разностей каждых двух соседних элементов этой последовательности.*

$$S = \sum_{i=1}^{k-1} |n_{i+1} - n_i|. \tag{1}$$

Заметим, что введенная таким образом мера сложности состава будет связана с количеством необходимого для расформирования состава проездов стрелок простым соотношении

$$K = 2S + 1. \tag{2}$$

Процедура расформирования состава состоит в последовательном уменьшении сложности исходного состава при прохождении стрелок. В результате на каждом из путей будет расположен состав с нулевой сложностью. Сформированный из них состав будет иметь сложность $S_0 = 1$.

Введённое понятие сложности позволяет определять сложность объединённых составов.

Пусть даны два состава $A_1(n_1, n_2, ..., n_k)$ и $A_2(m_1, m_2, ..., m_l)$ сложности S_1 и S_2 соответственно, тогда сложность состава $A_0(n_1, n_2, ..., n_k, m_1, m_2, ..., m_l)$, полученного последовательным соединением заданных составов:

$$S_0 = S_1 + S_2 + |n_k - m_1|.$$

Соответственно можно определить сложность составов, полученных из исходного состава путём его разделения.

Предложенное определение сложности позволяет определить диапазон его изменения.

$$0 \leq S \leq k - 1 \tag{3}$$

Рассмотрим сложность состава, состоящего из нескольких типов вагонов, например: 0012002120. Введём понятие сложности состава на различных уровнях. Для определения сложности первого уровня заменим исходную последовательность последовательностью первого уровня: все элементы исходной последовательности, которые больше нуля, заменим единицами. При этом получим последовательность 0011001110. Сложность этой последовательности $S_1 = 4$.

Для определения сложности второго уровня исключим нули из исходной последовательности и получим последовательность второго уровня 12212. Сложность этой последовательности $S_2 = 3$.

Полная сложность исходной последовательности равна сумме сложностей сортировок на различных уровнях $S_0 = S_1 + S_2, S_0 = 7$.

Определение: *Сложность последовательности* $A = \left\{ \underbrace{a_1, a_1, ..., a_1}_{k_1}, \underbrace{a_2, a_2, ..., a_2}_{k_2}, \underbrace{a_M, ..., a_M}_{k_M} \right\}$ *состоящей из различных элементов определяется как сумма сложностей* $M-1$ *уровней.*

Заметим, что данное определение сложности также связано с количеством проходов стрелок при расформировании состава соотношением (2).

Описание программного комплекса

Для анализа процесса сортировки железнодорожного состава была создана программа "Сортировка вагонов" (написана на языке Pascal в среде Delphi 7, исполняемый модуль "Сортировка вагонов.exe")

Программа "Сортировка вагонов"

Программа "Сортировка вагонов" работает как с конкретно заданным составом, так и в режиме статистического исследования. Изображение главного окна программы показано на рисунке 3.

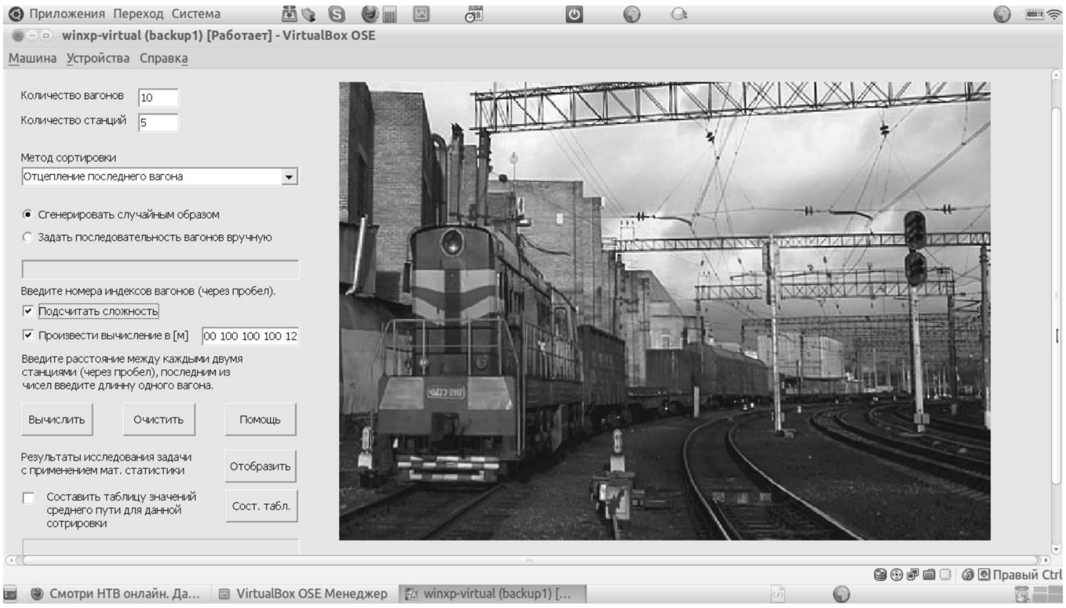


Рис.3

На главной форме программы вводятся основные параметры железнодорожного состава и манёвренной станции. Вводится количество вагонов в составе, количество станций назначения. Последовательность вагонов в составе может быть задана в ручном режиме или сгенерирована компьютером случайным образом, так же задаётся расстояние между стрелками и длина одного вагона.

В результате работы программы вычисляется путь, пройденный манёвренным локомотивом. Для численного определения пройденного пути в папке, содержащей программу, пользователем должен быть создан файл "Результаты.txt". Ответ выдаётся в символьном виде, показывающем, сколько раз пройдены отдельные участки пути, и в виде конечного числа. Все исходные данные и результаты также записываются в этот файл.

В программе предусмотрена возможность выбора метода сортировки. Первый метод сортировки железнодорожного состава — "Отцепление последнего вагона", второй, учитывающий количество вагонов, предназначенных для станций, и осуществляющий переименование номеров путей формирования t, — "Переименование номеров станций".

Метод сортировки “Отцепление последнего вагона”

Суть этого метода заключается в том, что поезд, разъезжая по станции, отцепляет нужное количество последних вагонов. При этом подсчет расстояния проводится с учетом длины поезда.

Рассмотрим конкретную задачу сортировки поезда, которая использовалась в качестве теста программы “Сортировка вагонов”.

Схема сортировочной станции приведена на Рис.4

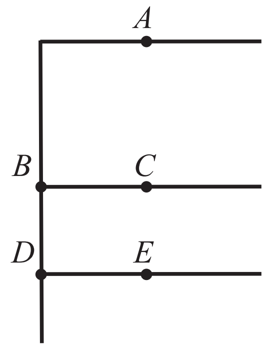


Рис.4

Здесь точка A — первоначальное положение поезда на основном пути, B и D — расположение стрелок. Требуется отсортировать поезд из 7 вагонов с лесом и углём таким образом, чтобы вагоны с лесом были за точкой E, а с углём — за точкой C. Последовательность вагонов имеет вид: уголь, лес, лес, уголь, уголь, уголь, лес. Длина одного вагона — 12 м, а расстояние между начальным положением поезда и станциями, соответственно, $AB = 500$ м и $BD = 750$ м.

Пусть вагоны с углём имеют индекс 0, а с лесом — индекс 1, тогда последовательность вагонов перепишется в следующей форме: 0110001.

Начав маневры, локомотив проедет путь AD, затем по прямой он пройдет еще некоторое расстояние, равное длине поезда $l_0 n$ ($7 \cdot 12$ м $= 84$ м). После переключения стрелки локомотив, осаживая поезд назад, поедет в направлении к точке E, отцепит один вагон и проедет в обратном направлении (72 м). Стрелка опять переводится на основные рельсы, и поезд снова хвостом вперед едет в направлении точки B. Стрелка переводится на побочную линию C. Поезд оставляет на этой станции три вагона, и едет к точке D. В результате пройденное расстояние, будет равно:

$$S = AB + BD + l_0 n + l_0 n + l_0(n-1) + l_0(n-1) + BD + BD + l_0(n-4) + l_0(n-4) +$$

$$+ l_0(n-6) + l_0(n-6) + BD$$

или

$$S = AB + 4BD + l_0(8n - 22).$$

Подставляя в это выражение заданные расстояния, получим: $S = 3908$м.

На рис. 5 приведена часть формы, на которой задаются параметры, а ниже — результат работы программы, выводимый в окно сообщения при нажатии на кнопку “Вычислить”.

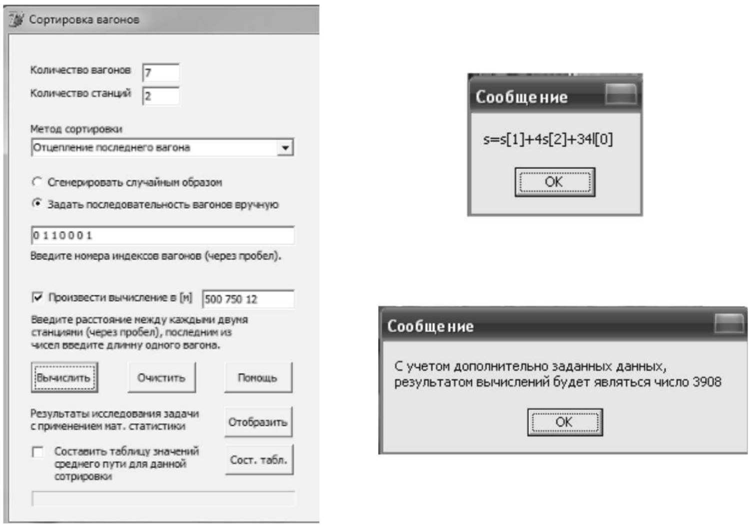


Рис.5

Заметим, что S – общий путь, $S\,[1]$ — расстояние AB, $S\,[2]$ — расстояние BD, $l\,[0]$ — длина одного вагона.

Метод сортировки “Переименование номеров станций”

Алгоритм сортировки “Переименование номеров станций” отличается от первого метода тем, что соответствие между станциями и ветками формирования (стрелками) устанавливается в зависимости от количества вагонов, предназначенных на станции:

- из чисел, соответствующих номерам индексов вагонов состава, выбирается наиболее часто встречаемое (т. е. выбирается мода числовой последовательности);
- номер станции, совпадающий с выбранным индексом, ставится в начало последовательности станций и соответствующие вагоны собираются на ближайшей первой ветке;
- из оставшихся чисел снова выбирается наиболее часто встречаемое, и его номер станции ставится вторым. Вагоны, предназначенные для этой станции, собираются на второй ветке. Эта процедура продолжается далее для всего состава.

Заметим, что этот алгоритм сортировки напоминает процедуру создания экономичного кода Фано.

Для того, чтобы сравнить эффективность методов сортировки, необходимо проделать большое число опытов. В программе **“Сортировка вагонов”** предусмотрена возможность проводить исследования с элементами математической статистики.

На главной форме имеется кнопка “отобразить”. При её нажатии будет сгенерировано случайным образом 1000 составов с заданным числом вагонов и числом станций. Для этих составов будет осуществлена сортировка и найдено среднее значение проходимого пути локомотивом (математическое ожидание) $S_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{N} S_i}{N}$, где N — число сгенерированных составов. Так же определяется разброс возможных значений пройденного пути, то есть дисперсия $D = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(S_i - S_{cp})^2}$.

На рис. 6 приведен результат такой работы для сортировки “Отцепление последнего вагона”. На диаграмме изображено математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение по коэффициентам, стоящим перед $S_1, S_2, S_3 ... S_n$.

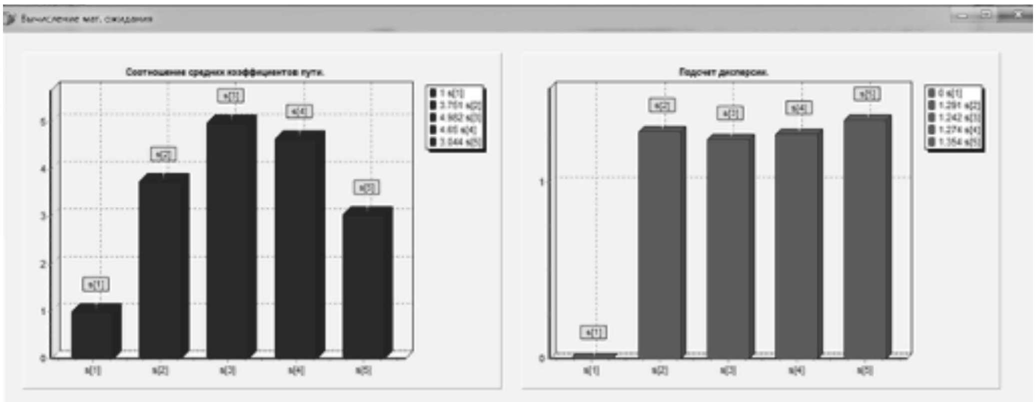


Рис. 6

Результаты работы также записываются в файл “Результаты.txt”. Они будут выглядеть следующим образом:

Результаты вычислений с использованием мат.статистики

Входные данные:

количество вагонов – 10

количество станций – 5

метод сортировки-“отцепление последнего вагона”

Выходные данные:

Мат.ожидание $= S[1] + 3,658S[2] + 4,956S[3] + 4,698S[4] + 3,07S[5]$.

Дисп.$=1,697S[2] + 1,271S[3] + 1,291S[4] + 1,318S[5]$

Численное значение мат.ожидания = 2,65984±003 м.

Для исследования сложности состава, то есть сложности числовых последовательностей, была создана программа **“Вычисление сложности”.** Скриншот программы представлен на рис.7

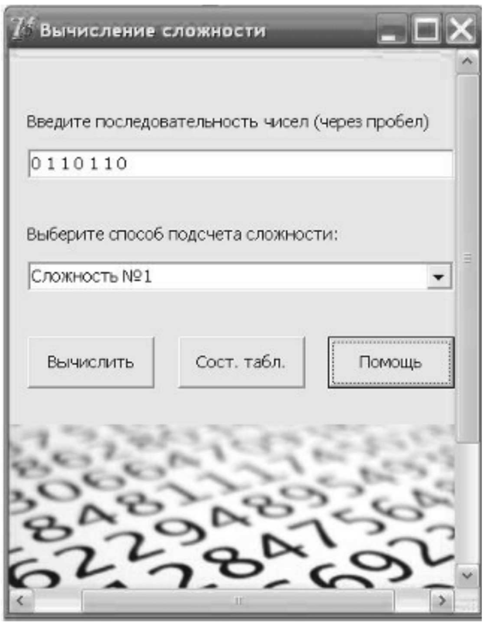


Рис.7

Данная программа может вызываться как из основной программы “Сортировка вагонов” — после нажатия кнопки “подсчитать сложность”, так и независимо по имени исполняемой программы “Вычисление сложности.exe”.

Программа может работать в двух режимах:

1. В режиме ручного ввода исследуемой последовательности чисел,

2. Анализировать множество последовательностей чисел, считывая их из файла.

При ручном вводе данных в первое поле вводится заданная последовательность, во втором поле выбирается способ подсчета сложности. Первый метод подсчёта сложностей применяется для последовательностей, состоящих из нулей и единиц, второй метод вычисляет сложность последовательностей общего вида. Программа вычисляет сложность заданной последовательности после нажатия кнопки "Вычислить".

Для работы с множеством последовательностей пользователь должен создать два файла data.txt, output.txt. В файле data.txt пользователем заносятся числовые последовательности, сложности которых надо определить; найденные сложности будут записаны в файл output.txt.

Для исследования зависимости пути, проходимого локомотивом, от сложности состава используются обе программы. В программе "Сортировка состава" вводятся основные параметры исследуемого состава. При нажатии кнопки "Сост.табл." программа в среде Excel создает файл с расширением.xls и записывает туда 100 случайно сгенерированных последовательностей и соответствующие расстояния, проходимые локомотивом при сортировке поездов с такими составами. Сгенерированное множество числовых последовательностей из этого файла копируется в файл data.txt. После нажатия на форме программы "Вычислить сложность" кнопки "Сост. табл." программа вычислит сложности последовательностей и запишет их в файл output.txt. Полученные значения можно связать с соответствующими расстояниями в файле с расширением .xls.

Исследования эффективности железнодорожных сортировок

Для сравнения эффективности сортировок проведём сравнение средних путей, проходимых локомотивом при многократной сортировке составов различной сложности и с различным количеством станций назначения.

В таблице 2 приведены результаты вычислений средних путей, проходимых локомотивом при сортировке первого вида. Таблица строилась для следующих параметров: количество станций изменялось от 2 до 10, количество вагонов t от 10 до 100 (с шагом в 10 вагонов), расстояние между каждыми двумя стрелками – 100м., а длина одного вагона - 20м.

Таблица 2

Кол. вагонов / Кол. станций	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
2	1815	5650.3	11351.18	19240.54	28930.8	40839.06	54296.9	70610.9	88062.06	107837.84
3	2507.06	7667.1	15484.48	26063.38	39251.54	54862.86	73370.08	94827.12	118986.18	144967.88
4	2980.46	9002.82	17976.04	30150.92	45023.56	62947.42	84561.82	108003.84	135196.78	164390.12
5	3437.68	10045.78	19898.54	33004	49314.8	68779.04	91179.46	117483.48	146264.82	178285.34
6	3800.04	10946.72	21449.16	35455.18	52473.2	73148.12	96907.9	124136.1	154571.7	188678.34
7	4186.26	11734.14	22962.98	37240.4	55411.06	76896.92	101517.56	129585.64	161181.2	196685.48
8	4543.44	12632.9	24191.26	39237.64	57870.42	80082.6	105871.6	134621.98	167605.54	203176.42
9	4901.66	13445.98	25416.38	41122.18	60121.32	83046.22	109409.84	139328.92	172496.94	209669.64
10	5200.6	14196.9	26572.74	42846.92	62352	85912.64	112819.6	143082.1	177576.04	215159.68

На рисунке 8 приведены графики изменения путей, проходимых локомотивом при первом методе сортировки. На горизонтальной оси отложено количество вагонов, а на вертикальной – пройденное расстояние. При этом определенный тип линии графика соответствует определенному количеству станций (чем выше располагается график, тем большее количество станций ему соответствует).

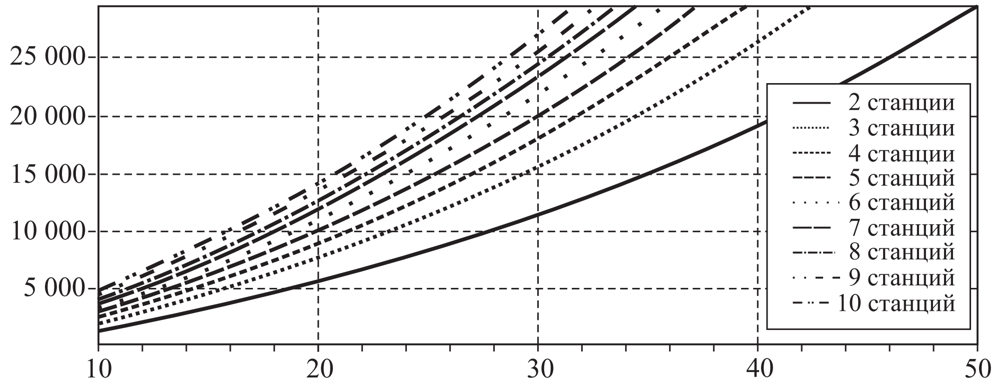


Рис. 8

Заметим, что пройденный путь, найденный при второй сортировке, незначительно отличается от пути, найденного при первой сортировке. При большом количестве станций вторая сортировка предпочтительней и может давать выигрыш ~500 метров.

Оценим временные затраты на сортировку больших поездов с большим числом станций назначения. Скорость движения локомотива при манёврах не превышает 25 км/час, то есть за восьмичасовую смену локомотив проходит не более 200 км. Из таблицы 2 можно видеть, что при расформировании поезда из 100 вагонов, предназначенных для 7 станций и более, локомотив должен пройти около 200 км. Следовательно, он может сформировать за смену один состав.

Это говорит о невозможности использования сортировки составов с большим числом станций назначения с помощью локомотивов. Для решения этой проблемы на железных дорогах СССР существовало множество промежуточных сортировочных станций, на которых осуществлялась досортировка составов. В настоящее время такие промежуточные станции отсутствуют, и железная дорога осуществляет перевозки больших оптовых грузов, в основном сырья (лес, нефть, бензин), на большие расстояния.

Проведём исследование зависимости пройденного локомотивом пути от сложности первоначально заданной последовательности вагонов. Из формулы (3) для оценки коэффициента сложности следует, что если число вагонов в составе увеличивается, то расширяется диапазон изменения этого коэффициента. При случайной генерации больших составов будут появляться составы с большой сложностью.

Рассмотрим следующие параметры сортировочной станции и состава: расстояние между стрелками 100 м, длина одного вагона 10 м, станций назначения — 2. Сгенерируем 100 раз последовательность вагонов в составе из 10, 20, 30, 40 и 50 вагонов. Подсчитаем сложность каждого из сгенерированных составов, а также расстояние, пройденное локомотивом при сортировке такого состава методом “отцепления последнего вагона”. Для каждого из значений подсчитанной сложности найдем среднее значение пути. Результаты вычислений приведены в таблице 3.

Таблица 3

Кол. вагонов / сложность	10	20	30	40	50
0	400				
1	580				
2	780				
3	968				
4	1146				
5	1356	2190			
6	1575	2334			
7	1740	2646	3740		
8	1970	2955			
9		3268	4293		
10		3532	4775		
11		3608	5100		
12		4141	5558		
13		4468	6043	7300	
14		4800	6298	8007	
15			6773	8413	
16			6931	8902	
17				9533	10580
18				9726	11360
19				10517	12980
20				11043	13456
21				11453	14337
22				12440	13523
23				12010	15225
24				12445	15760
25				13400	15806
26				14560	16237
27					17283
28				13980	18254
29					19110
30					18947
31					19960
32					21100

Зависимость пройденного пути от сложности для 20 вагонов представлена на рис. 9. На горизонтальной оси располагаются значения сложности последовательностей, а на вертикальной – среднее расстояние, соответствующее каждому из значений сложности.

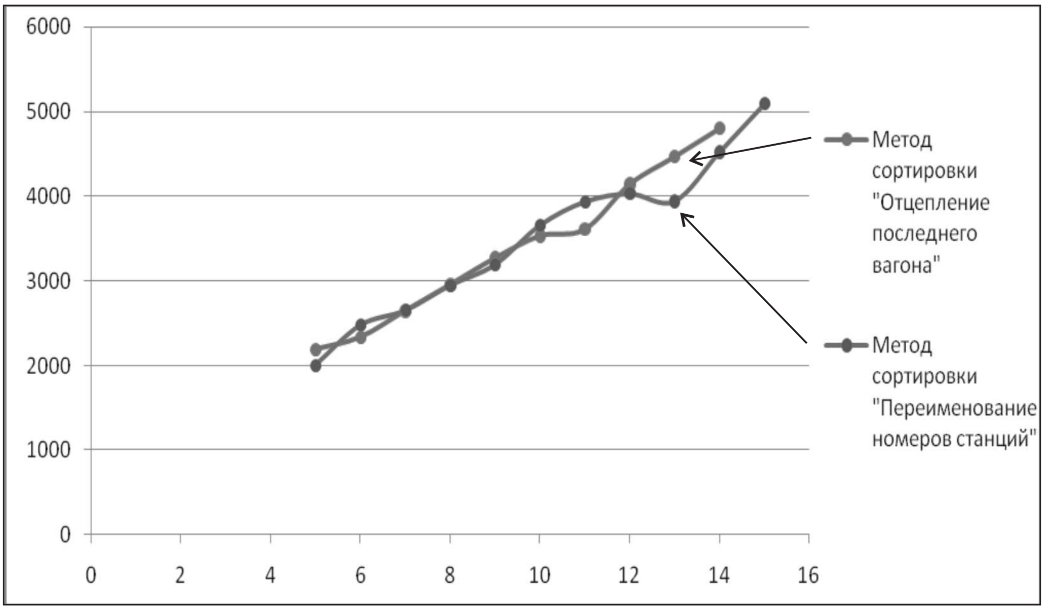


Рис. 9. Зависимость пути от сложности для 20 вагонов

На рисунке 10 показана зависимость пути от сложности при пяти станциях назначения.

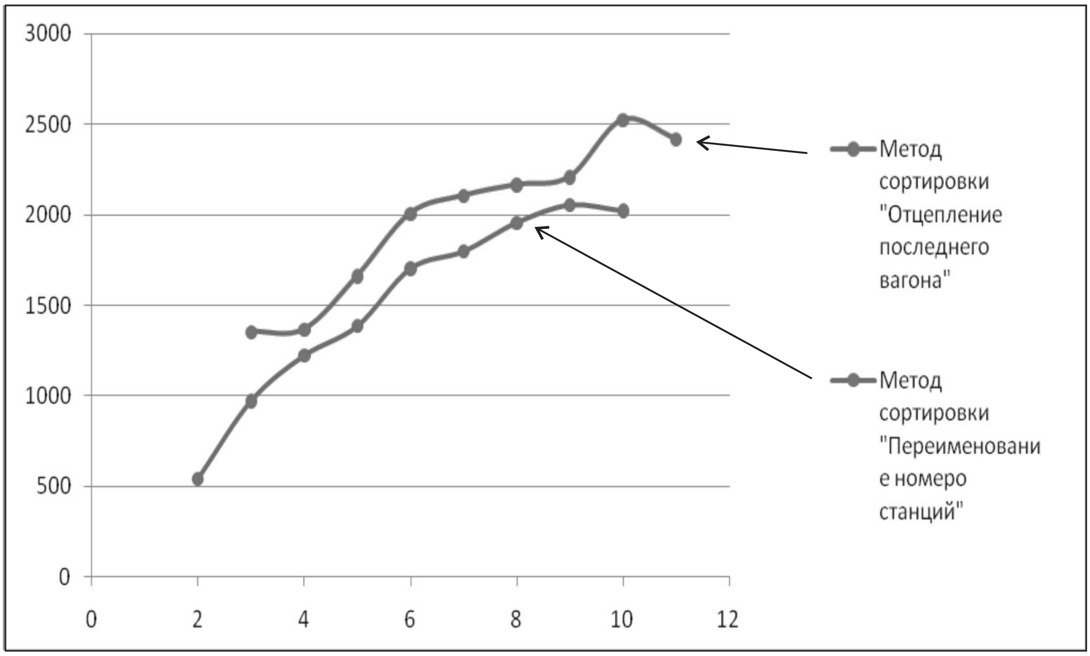


Рис. 10. График зависимости пути от сложности для 5 станций (8 вагонов).

Можно видеть, что в случае двух станций назначения обе сортировки практически одинаково эффективны (рис. 9). В том случае, когда имеется большое число станций назначения, например, пять, то вторая сортировка более эффективна (рис. 10).

В заключение заметим, что при проведении численных экспериментов генерировались составы с равномерным распределением вагонов. Следовательно, количество вагонов разного типа в среднем было одинаково, а в этом случае выигрыш второго метода сортировки отсутствует. На практике часто наблюдается неравномерное распределение вагонов и тогда второй метод сортировки более предпочтителен.

Литература

[1] "Красная книга" железнодорожного транспорта. URL:
http://redbook-railways.ru/nedostatochnaya-propusknaya-sposobnost-zhd-linij

[2] Кнут Д. Искусство программирования, том 3. - М.: ООО "И.Д.Вильямс", 2007. - 832 с.

[3] Арнольд В.И. Сложность конечных последовательностей нулей и единиц и геометрия конечных функциональных пространств. - 2005. - 14 с. URL:
http://elementy.ru/lib/430178

[4] Успенский В.А., Семенов А.Л., Шень А.Х. Может ли (индивидуальная) последовательность нулей и единиц быть случайной? // УМН. - 1990. - Т.45, № 1(271). - С. 105-162.

[5] Костюкова Н.И. Комбинаторные алгоритмы для программистов. URL:
www.intuit.ru

Ляхов Александр Федорович,
доцент кафедры теоретической механики
механико-математического факультета
Нижегородского государственного университета
им. Н. И. Лобачевского, канд. физ.-мат. наук.

Email: ALF19545@rambler.ru

Григорьева Надежда Николаевна
студентка физического факультета
Нижегородского государственного университета
им. Н. И. Лобачевского.

E-mail: grigoreva_nn_27@mail.ru

Измерение отрезков. Координатная прямая и свойства абсолютных величин[1]

М. Г. Морозкина, В. В. Цукерман

Использование координатной прямой в качестве модели действительных чисел позволяет сделать наглядным введение многих понятий, а также упростить доказательства, связанные с вводимыми понятиями. Возможность такого использования обусловлена наличием взаимно однозначного соответствия между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой. Статья посвящена установлению этого соответствия и демонстрации применения координатной прямой для вывода свойств абсолютных величин, решения уравнений и неравенств с модулем числа.

Построению координатной прямой необходимо предшествует рассмотрение вопроса об отрезках и их измерении.

1. Отрезки и их измерение

Отрезком называют часть прямой между двумя ее точками, включая и сами эти точки (концевые точки отрезка). Отрезок будем обозначать либо одной буквой, напечатанной полужирным шрифтом, либо указанием двух его концевых точек: $\mathbf{a} = AB = BA$, $A \neq B$.

Два отрезка называют *равными*, если их можно совместить движением. Это означает, что отрезок может покинуть свое первоначальное положение и быть отложен на любой прямой от произвольной точки в одном из двух возможных направлений. Оказывается целесообразным ввести и понятие *вырожденного (нулевого) отрезка*, когда $A = B$, т.е. точки, которая не привязана к какому-либо положению. Вырожденный отрезок будем обозначать буквой $\mathbf{o}$.

Сумма отрезков. Умножение отрезка на натуральное число

Суммой двух отрезков $\mathbf{a} = AB = BA$ и $\mathbf{b} = BC = CB$ называют отрезок, полученный откладыванием одного отрезка, скажем, отрезка $\mathbf{b}$, от конца отрезка $\mathbf{a}$, например, от точки B, на прямой, содержащей отрезок $\mathbf{a}$, в сторону, противоположную направлению от B к A (другого конца отрезка $\mathbf{a}$, см. рис. 1).

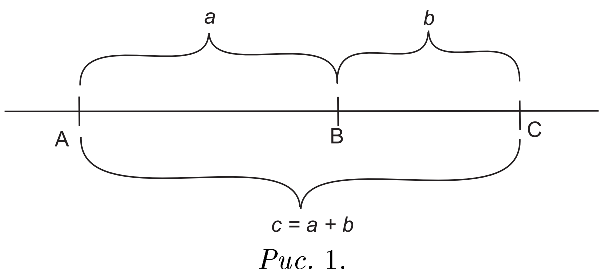


Рис. 1.

Ясно, что $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$. Впрочем, легко привести и формальное обоснование:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = AB + BC = AC = \mathbf{c} = CA = CB + BA = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

Последовательное откладывание отрезков $\mathbf{a}_1 = AM_1$, $\mathbf{a}_2 = M_1M_2$, $\mathbf{a}_3 = M_2M_3, \ldots$, $\mathbf{a}_{n-1} = M_{n-2}M_{n-1}$, $\mathbf{a}_n = M_{n-1}B$ (как это показано на рис. 2) определяет отрезок $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \ldots + \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n$ — *сумму* этих отрезков: $\mathbf{a} = AB = BA$.

[1] Теоретическая часть этого текста представляет собой переработку (с новыми доказательствами) части материала главы 3 книги [8] одного из авторов предлагаемой статьи.

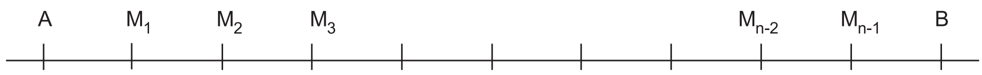


Рис. 2.

Сумма n ($n \in \mathbb{N}$) одинаковых отрезков $\mathbf{a}$ обозначается $n\mathbf{a}$ и называется *произведением* отрезка $\mathbf{a}$ на натуральное число n. Полагают также, что $0\mathbf{a} = \mathbf{o}$, т.е. умножение любого отрезка на число ноль дает вырожденный отрезок.

Сравнение отрезков. Разность отрезков

Отложим на прямой от одной точки (обозначим её O) в одну сторону отрезки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Другие концы отрезков $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначим соответственно A и B: $\mathbf{a} = OA, \mathbf{b} = OB$. Возможны два случая.

1) Точки A и B совпадают. Тогда отрезки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ также совпадают и, следовательно, равны.

2) $A \neq B$. Тогда один отрезок окажется внутри другого, не совпадая с ним. В этом случае говорят, что внутренний отрезок меньше отрезка, его содержащего. Так, на рис. 3 $\mathbf{a} < \mathbf{b}$.

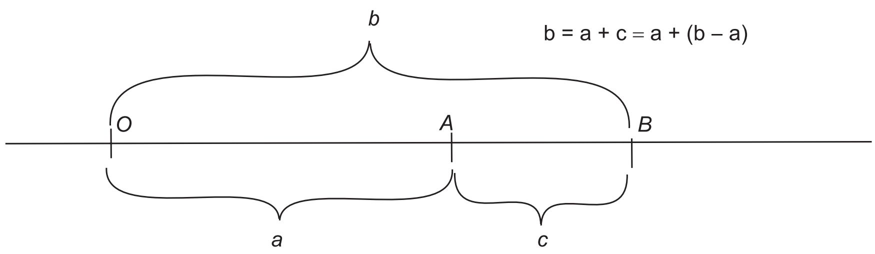


Рис. 3.

Отрезок $\mathbf{c} = AB$ называют разностью отрезков $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ и записывают: $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Ясно также, что в этом случае $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$ и все три последние равенства равносильны. Разность отрезков $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ определена в случае $\mathbf{b} \geq \mathbf{a}$. Если $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, то $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ есть нулевой отрезок $\mathbf{o}$.

Заметим также, что при $\mathbf{b} > \mathbf{a}$ выполнено равенство $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{b}' - \mathbf{a}'$, где $\mathbf{b}' = \mathbf{b} \pm \mathbf{s}$, $\mathbf{a}' = \mathbf{a} \pm \mathbf{s}$ (в случае знака «минус» $\mathbf{s} \leq \mathbf{a}$). Справедливость этих соотношений иллюстрируется рис 4.

Рис. 4.

При $\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \mathbf{s}$, $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{s}$ для отыскания разности отрезков $\mathbf{b}'$ и $\mathbf{a}'$ они откладываются от точки O_1, при $\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \mathbf{s}$, $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{s}$ — от точки O_2. В любом случае вторые концы отрезков $\mathbf{b}'$ и $\mathbf{a}'$ совпадают с точками A и B, а, следовательно, их разность, как и разность отрезков $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$, будет равна AB.

Деление отрезка на равные части. Умножение отрезка на положительное рациональное число

Теорема Фалеса позволяет провести деление отрезка на равные части. На рис. 5 показано деление отрезка на 5 равных частей. Будем считать возможным деление отрезка на любое число равных частей безо всяких ограничений. Это означает, что мы допускаем возможность мысленного деления на равные части любых, сколь угодно малых, отрезков.

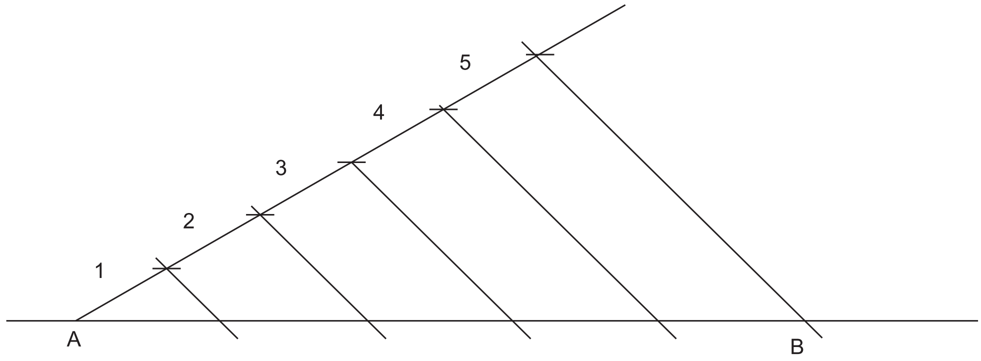


Рис. 5.

Если отрезок $\mathbf{a}$ разделен на n ($n \in N$) равных частей, то одну такую часть обозначают $\frac{\mathbf{a}}{n}$, т.е. $n\frac{\mathbf{a}}{n} = \mathbf{a}$ в соответствии с определением умножения отрезка на натуральное число. Здесь запись $\frac{\mathbf{a}}{n}$ понимается как цельный символ.

Далее определим произведение отрезка $\mathbf{a}$ на положительное рациональное число $r = \frac{p}{q}$, ($p, q \in \mathbb{N}$), обозначаемое $r\mathbf{a}$:

$$r\mathbf{a} = \frac{p}{q}\mathbf{a} = p\frac{\mathbf{a}}{q}.$$

При $p = 1$: $\frac{1}{q}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{q}$.

Легко устанавливается соотношение: $r_1\mathbf{a} + r_2\mathbf{a} = (r_1 + r_2)\mathbf{a}$. Действительно:

$$r_1\mathbf{a} + r_2\mathbf{a} = \frac{p_1}{q_1}\mathbf{a} + \frac{p_2}{q_2}\mathbf{a} = p_1\frac{\mathbf{a}}{q_1} + p_2\frac{\mathbf{a}}{q_2} = p_1q_2\frac{\mathbf{a}}{q_1q_2} + p_2q_1\frac{\mathbf{a}}{q_1q_2} =$$

$$= (p_1q_2 + p_2q_1)\frac{\mathbf{a}}{q_1q_2} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}\mathbf{a} = (r_1 + r_2)\mathbf{a}.$$

Понятие длины отрезка. Длина отрезка, соизмеримого с отрезком-эталоном единичной длины

Определение. *Измерение отрезка состоит в сопоставлении каждому отрезку* $\mathbf{a}$ *числа* $\ell(\mathbf{a})$ *— его длины. При этом должны выполняться следующие условия:*

1° *длина любого (не вырожденного) отрезка — положительное число:* $\ell(\mathbf{a}) > 0$*;*

2° *длины равных отрезков равны:* $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow \ell(\mathbf{a}) = \ell(\mathbf{b})$*;*

3° *длина суммы двух отрезков равна сумме длин этих отрезков:*

$$\ell(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \ell(\mathbf{a}) + \ell(\mathbf{b})$$

— аддитивное[2] *свойство длины отрезка;*

4° *длина некоторого отрезка* $\mathbf{e}$*, принятого за эталон, равна единице:* $\ell(\mathbf{e}) = 1$.

Данное определение длинны отрезка является дескриптивным (от англ. descriptive – описательный), т.е. определением через указание свойств. Такое определение предполагает доказательство существования и единственности определяемого объекта [3, с. 12, 13; 8, с. 64].

Из условия 3° и определения отношения порядка $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ ($\mathbf{b} = \mathbf{a}+\mathbf{c}, \mathbf{c} \neq 0$) следует монотонность функции $\ell(\mathbf{a})$:

$$\ell(\mathbf{b}) = \ell(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \ell(\mathbf{a}) + \ell(\mathbf{c}) > \ell(\mathbf{a}).$$

[2]Аддитивность (от лат. additivus – прибавляемый) (матем.) — свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям при любом разбиении объекта на части. Если отрезок $AC = \mathbf{c}$ разбит точкой B две части $AB = \mathbf{a}$ и $BC = \mathbf{b}$ (см. рис. 1), то длина всего отрезка равна сумме длин его частей: $\ell(\mathbf{c}) = \ell(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \ell(\mathbf{a}) + \ell(\mathbf{b})$.

Проще всего значение $\ell(\mathbf{a})$ находится для отрезков $\mathbf{a}$, соизмеримых с единичным отрезком $\mathbf{e}$, т.е. для отрезков вида $\mathbf{a} = r\mathbf{e}$[3].

Свойство 3° легко переносится на конечную сумму отрезков. Тогда $\ell(n\mathbf{a}) = n\ell(\mathbf{a})$.

При $q \in \mathbb{N}$ имеем:

$$1 = \ell(\mathbf{e}) = \ell\left(q\frac{\mathbf{e}}{q}\right) = q\ell\left(\frac{\mathbf{e}}{q}\right), \text{ т.е. } \ell\left(\frac{\mathbf{e}}{q}\right) = \frac{1}{q}.$$

Следовательно:

$$\ell(r\mathbf{e}) = \ell\left(\frac{p}{q}\mathbf{e}\right) = \ell(p\frac{\mathbf{e}}{q}) = p\ell\left(\frac{\mathbf{e}}{q}\right) = p\frac{1}{q} = \frac{p}{q} = r.$$

Итак, $\ell(r\mathbf{e}) = r$.

Для отрезков вида $\mathbf{a} = r\mathbf{e}$ выполнены все условия 1°–4°. В частности, если $\mathbf{a} = r_1\mathbf{e}$, $\mathbf{b} = r_2\mathbf{e}$ и $r_1 < r_2$, то $r_2 = r_1 + (r_2 - r_1)$ и $\mathbf{b} = r_2\mathbf{e} = [r_1 + (r_2 - r_1)]\mathbf{e} = r_1\mathbf{e} + (r_2 - r_1)\mathbf{e} = \mathbf{a} + (r_2 - r_1)\mathbf{e} > \mathbf{a}$. Из этого следует, что если отрезки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ этого вида равны, то $r_1 = r_2$ и тогда $\ell(\mathbf{a}) = \ell(\mathbf{b})$. Таким образом, выполнено условие 2°. Выполнение условий $1°, 3°, 4°$ очевидно. Этим единственным образом определена функция $\ell(\mathbf{a})$ на множестве отрезков, соизмеримых с единичным отрезком $\mathbf{e}$. Задача состоит в её распространении на множество всех отрезков.

Измерение произвольного отрезка. Архимедово свойство отрезков

Укажем, каким образом отрезку путём измерения ставится в соответствие число.

Пусть дан отрезок $\mathbf{a}$, длину которого необходимо измерить (рис. 6). Выберем в качестве единичного отрезок $\mathbf{e}$. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathbf{a} > \mathbf{e}$.

Определим, сколько раз единичный отрезок укладывается (содержится) в измеряемом. Для этого отложим отрезок $\mathbf{a}$ на прямой от произвольной точки O. Другой конец отрезка обозначим A. Итак, $OA = \mathbf{a}$.

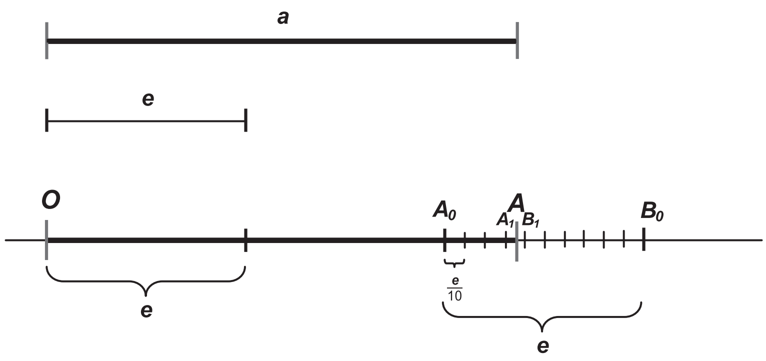


Рис. 6.

Затем от точки O по направлению к A начнём последовательно откладывать отрезки, равные $\mathbf{e}$, до тех пор, пока они не покроют отрезок $OA = \mathbf{a}$. Видим, что в отрезке $\mathbf{a}$ помещается 2 отрезка $\mathbf{e}$, 3 отрезка $\mathbf{e}$ уже превышают $\mathbf{a}$ ($2\mathbf{e} < \mathbf{a}$, но $3\mathbf{e} > \mathbf{a}$). Тогда 2 — это длина отрезка $\mathbf{a}$ с точностью до целых (с погрешностью, меньшей, чем $\mathbf{e}$).

Возникает вопрос: для каждого ли отрезка $\mathbf{a} > \mathbf{e}$ существует такое число $n \in \mathbb{N}$, что $n\mathbf{e} \le \mathbf{a}$, но $(n+1)\mathbf{e} > \mathbf{a}$? Утвердительный ответ на этот вопрос не может быть получен на основе уже рассмотренных нами сведений об отрезках. Он является следствием дополнительного свойства, постулируемого как присущее понятию отрезка.

Древнегреческий математик Евдокс (408 – ок. 355 до н.э.) высказал предположение, что для любых отрезков $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ($\mathbf{a} < \mathbf{b}$) существует натуральное число n, что $n\mathbf{a} > \mathbf{b}$. Работы самого Евдокса до нашего времени не дошли, но в сохранившейся работе Архимеда (287–212 до н.э.) упоминается об этом высказывании Евдокса. Указанное свойство отрезков называют *аксиомой*

[3]Если $r = \frac{p}{q}, (p, q \in \mathbb{N})$, то при $\mathbf{e}_0 = \frac{\mathbf{e}}{q}$ имеем: $\mathbf{e} = q\mathbf{e}_0$, $\mathbf{a} = r\mathbf{e} = \frac{p}{q}\mathbf{e} = p\frac{\mathbf{e}}{q} = p\mathbf{e}_0$. Таким образом, отрезок $\mathbf{e}_0$ укладывается в отрезках $\mathbf{e}$ и $\mathbf{a}$ целое число раз.

Архимеда (иногда аксиомой Евдокса). Основываясь на аксиоме Архимеда, предполагаем, что при некотором n ($n \in \mathbb{N}$) $n\mathbf{e} > \mathbf{a}$. Тогда, откладывая от точки O в направлении к A отрезки $\mathbf{e}, 2\mathbf{e}, 3\mathbf{e}, \ldots, (n-1)\mathbf{e}, n\mathbf{e}$, видим, что первый отрезок меньше, чем $\mathbf{a}$, а последний больше, чем $\mathbf{a}$ ($\mathbf{e} < \mathbf{a}$, но $n\mathbf{e} > \mathbf{a}$). Следовательно, среди чисел $1, 2, 3, \ldots, n-1$ найдется такое наибольшее (назовем его a_0), что $a_0\mathbf{e} \leq \mathbf{a}$, но $(a_0+1)\mathbf{e} = a_0'\mathbf{e} > \mathbf{a}$. Тогда a_0 — длина отрезка $\mathbf{a}$ с точностью до целых (с погрешностью, меньшей, чем $\mathbf{e}$).

В нашем случае (см. рис. 6) $a_0 = 2, a_0' = a_0 + 1 = 3$.

Для отрезков $a_0\mathbf{e}$ и $a_0'\mathbf{e}$ вводим обозначения $\mathbf{a}_0 = a_0\mathbf{e}, \mathbf{a}_0' = a_0'\mathbf{e}$ и откладываем их от точки O в направлении точки A (другого конца отрезка $\mathbf{a} = OA$). Ясно, что в общем случае отрезок $OA_0 = \mathbf{a}_0 = a_0\mathbf{e}$ не превышает отрезка $\mathbf{a}$, а отрезок $OB_0 = \mathbf{a}_0' = a_0'\mathbf{e}$ строго больше, чем $\mathbf{a}$.

Итак, $\mathbf{a}_0 \leq \mathbf{a} < \mathbf{a}_0'$.

Возможны 2 варианта:

1) Если $\mathbf{a}_0 = a_0\mathbf{e} = \mathbf{a}$, измерение закончено, и т.к. $\mathbf{a} = a_0\mathbf{e}$, то a_0 — длина отрезка $\mathbf{a}$: $\ell(\mathbf{a}) = a_0$.

2) Если же $\mathbf{a}_0 < \mathbf{a}$, то возникает остаток $\mathbf{k}_0 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 = OA - OA_0 = A_0A < \mathbf{e}$ и a_0 — лишь приближенное значение длины отрезка $\mathbf{a}$ по недостатку с точностью до целых. В этом случае процесс измерения можно продолжить.

У нас $\mathbf{a}_0 = 2\mathbf{e} = OA_0 < OA = \mathbf{a}$. Следовательно, мы можем измерить отрезок с большей точностью.

Чтобы измерить отрезок *с точностью до десятых*, нужно установить, сколько раз отрезок $\frac{\mathbf{e}}{10}$ укладывается в остатке $\mathbf{k}_0 = A_0A$.

Наибольшее число отрезков $\frac{\mathbf{e}}{10}$, помещающихся в $\mathbf{k}_0$, обозначим α_1 ($0 \leq \alpha_1 \leq 9$, т.к. $10\frac{\mathbf{e}}{10} = \mathbf{e}$).

Т.е. α_1 — одно из чисел от 0 до 9, которое удовлетворяет следующим условиям: $\alpha_1\frac{\mathbf{e}}{10} \leq \mathbf{k}_0$, но $(\alpha_1+1)\frac{\mathbf{e}}{10} > \mathbf{k}_0$.

В нашем случае (см. рис. 6) $\alpha_1 = 3$, т.к. в остатке $\mathbf{k}_0 = A_0A$ помещается 3 отрезка $\frac{\mathbf{e}}{10}$, 4 отрезка уже превышают $\mathbf{k}_0$ ($3\frac{\mathbf{e}}{10} < \mathbf{k}_0$, но $4\ \frac{\mathbf{e}}{10} > \mathbf{k}_0$).

Отложим от точки A_0 в направлении к A отрезки, равные $\alpha_1\frac{\mathbf{e}}{10}$ и $(\alpha_1+1)\frac{\mathbf{e}}{10}$; назовем их A_0A_1 и A_0B_1 соответственно.

Для отрезков OA_1 и OB_1 введем обозначения:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a_1} &= OA_1 = OA_0 + A_0A_1 = \mathbf{a_0} + \alpha_1\frac{\mathbf{e}}{10} = a_0\mathbf{e} + 0{,}\alpha_1\mathbf{e} = a_0{,}\alpha_1\mathbf{e},\\
\mathbf{a_1'} &= OB_1 = OA_0 + A_0B_1 = \mathbf{a_0} + (\alpha_1+1)\frac{\mathbf{e}}{10} = a_0\mathbf{e} + \alpha_1\frac{\mathbf{e}}{10} + \frac{\mathbf{e}}{10} =\\
&= a_0\mathbf{e} + 0{,}\alpha_1\mathbf{e} + \frac{\mathbf{e}}{10} = a_0{,}\alpha_1\mathbf{e} + \frac{\mathbf{e}}{10}.
\end{aligned}$$

Соответствующие числа обозначим a_1 и a_1':

$$a_1 = a_0{,}\alpha_1 \text{ и } a_1' = a_0{,}\alpha_1 + \frac{1}{10}.$$

Тогда

$$\mathbf{a_1} = a_1\mathbf{e}, \quad \mathbf{a_1'} = a_1'\mathbf{e}.$$

Ясно, что $\mathbf{a_1} = OA_1 \leq OA = \mathbf{a}$ и $\mathbf{a_1'} = OB_1 > OA = \mathbf{a}$.

Здесь также могут представиться два случая:

1) $\mathbf{a_1} = a_1\mathbf{e} = \mathbf{a}$;

2) $\mathbf{a_1} = a_1\mathbf{e} < \mathbf{a}$.

В первом случае, так как $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}$, a_1 — длина отрезка $\mathbf{a}$: $\ell(\mathbf{a}) = a_1$.

Если же имеет место второй случай, то a_1 — приближенное значение длины отрезка $\mathbf{a}$ по недостатку с точностью до десятых и измерение может быть продолжено.

В рассмотренном примере (см. рис. 6) $\mathbf{a_1} = 2{,}3\,\mathbf{e} = OA_1 < OA = \mathbf{a}$. Следовательно, 2,3 — лишь приближенное значение длины отрезка **a** по недостатку с точностью до десятых, и мы можем попытаться измерить отрезок с большей точностью.

Возникающая при дальнейшем измерении цифра α_2 (от 0 до 9) указывает, сколько раз отрезок $\frac{\mathbf{e}}{10^2}$ укладывается в остатке $\mathbf{k_1} = \mathbf{a} - \mathbf{a_1} = OA - OA_1 = A_1\ A < \frac{\mathbf{e}}{10}$.

Тогда

$$\mathbf{a_2} = \mathbf{a_1} + \alpha_2\frac{\mathbf{e}}{10^2} = a_1\mathbf{e} + 0{,}0\alpha_2\mathbf{e} = a_0{,}\alpha_1\mathbf{e} + 0{,}0\alpha_2\mathbf{e} = a_0{,}\alpha_1\alpha_2\mathbf{e},$$

$$\mathbf{a_2'} = \mathbf{a_1} + (\alpha_2+1)\frac{\mathbf{e}}{10^2} = a_1\mathbf{e} + \alpha_2\frac{\mathbf{e}}{10^2} + \frac{\mathbf{e}}{10^2} = a_0{,}\alpha_1\mathbf{e} + 0{,}0\alpha_2\mathbf{e} + \frac{\mathbf{e}}{10^2} = a_0{,}\alpha_1\alpha_2\mathbf{e} + \frac{\mathbf{e}}{10^2}.$$

Соответствующие числа обозначаются a_2 и a_2': $a_2 = a_0{,}\alpha_1\alpha_2$ и $a_2' = a_0{,}\alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{10^2}$. Тогда $\mathbf{a_2} = a_2\mathbf{e}$, $\mathbf{a_2'} = a_2'\mathbf{e}$.

Ясно, что $\mathbf{a_2} \le \mathbf{a}$ и $\mathbf{a_2'} > \mathbf{a}$.

По рисунку 6 уже затруднительно определить α_2 и тем более установить, имеет ли место соотношение $\mathbf{a_2} = \mathbf{a}$ или $\mathbf{a_2} < \mathbf{a}$, для решения вопроса о продолжении измерения. Возникшая при реальном измерении коллизия не мешает однако построению общей теории. Дело в том, что в математике рассматриваются идеальные (мыслимые) отрезки, как сколь угодно большие, так и сколь угодно малые, которые допускается делить на любое число равных частей и сравнивать их. При этом правила и свойства операций над отрезками считаются общими для всех отрезков независимо от их размеров. Таким образом, математическое понятие отрезка, исходящее от зрительного восприятия реальных объектов и действий над ними, абстрагируется от них, но одновременно обогащается всеми логическими следствиями определений и свойств основных операций над отрезками. Приведенный пример отрезка (см. рис. 6) позволяет сделать наглядными первые шаги общего абстрактного рассуждения.

Если на некотором этапе измерения получено число $a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, то это означает, что отрезок

$$\mathbf{a_n} = a_n\mathbf{e} = a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\mathbf{e} = a_0\mathbf{e} + \alpha_1\frac{\mathbf{e}}{10} + \alpha_2\frac{\mathbf{e}}{10^2} + \cdots + \alpha_n\frac{\mathbf{e}}{10^n} \le \mathbf{a},$$

но $\mathbf{a_n'} = \mathbf{a_n} + \frac{\mathbf{e}}{10^n} > \mathbf{a}$, $(a_n' = a_n + \frac{1}{10^n})$[4].

Как и в рассмотренных выше этапах измерения здесь две возможности:

1) Если $\mathbf{a_n} = a_n\mathbf{e} = \mathbf{a}$, то на этом измерение заканчивается и $\ell(\mathbf{a}) = a_n = a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$.

2) Если $\mathbf{a_n} = a_n\mathbf{e} < \mathbf{a}$, то a_n — приближенное значение длины отрезка **a** по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^n}$ и измерение можно продолжить.

Чтобы измерить отрезок с большей точностью, нужно выяснить, сколько раз в остатке $\mathbf{k_n} = \mathbf{a} - \mathbf{a_n} < \frac{\mathbf{e}}{10^n}$ укладывается отрезок $\frac{\mathbf{e}}{10^{n+1}}$. Этим мы определим цифру α_{n+1} в записи числа $a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}$ — значении длины отрезка **a** с точностью до $\frac{1}{10^{n+1}}$.

Т.е. $\mathbf{k_n} = \alpha_{n+1}\frac{\mathbf{e}}{10^{n+1}} + \mathbf{k_{n+1}}$, где $\mathbf{k_{n+1}}$ — остаток после следующего этапа измерения, удовлетворяющий условию: $0 \le \mathbf{k_{n+1}} < \frac{\mathbf{e}}{10^{n+1}}$.

В случае $\mathbf{k_{n+1}} = 0$ имеем

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_n} + \mathbf{k_n} = a_n\mathbf{e} + \alpha_{n+1}\frac{\mathbf{e}}{10^{n+1}} = a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\mathbf{e} + \alpha_{n+1}\frac{\mathbf{e}}{10^{n+1}} = \\ = a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\mathbf{e} = a_{n+1}\mathbf{e}.$$

Тогда измерение закончено: $\ell(\mathbf{a}) = a_{n+1} = a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}$.

Если же $0 < \mathbf{k_{n+1}} < \frac{\mathbf{e}}{10^{n+1}}$, то измерение может быть продолжено.

[4] Мы можем дойти до n-ого этапа измерения, если на всех этапах с номером $m < n$ $\mathbf{a}_m = a_m\mathbf{e} < \mathbf{a}$. В противном случае, если при некотором $m < n$ оказалось бы, что $\mathbf{a}_m = a_m\mathbf{e} = \mathbf{a}$, то дальнейшие этапы не нужны, так как $\ell(\mathbf{a}) = a_m$.

Архимедово свойство отрезков обеспечивает возможность измерения и отрезков $\mathbf{a} < \mathbf{e}$. В этом случае существует натуральное число n, что $n\mathbf{a} > \mathbf{e}$. Тогда из соотношения $n\mathbf{a} > n\frac{\mathbf{e}}{n}$ получаем, что $\frac{\mathbf{e}}{n} < \mathbf{a}$ и тем более $\frac{\mathbf{e}}{10^n} < \mathbf{a}$. Далее, рассматривая конечную убывающую последовательность отрезков

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}}{10^0}, \frac{\mathbf{e}}{10} = \frac{\mathbf{e}}{10^1}, \frac{\mathbf{e}}{10^2}, \ldots, \frac{\mathbf{e}}{10^{n-1}}, \frac{\mathbf{e}}{10^n},$$

видим, что первый из них больше, чем $\mathbf{a}$, а последний меньше, чем $\mathbf{a}$. Следовательно, среди этих отрезков найдется наибольший $\frac{\mathbf{e}}{10^m}$, не превосходящий $\mathbf{a}$ (т.е. $\frac{\mathbf{e}}{10^m} \leq \mathbf{a}$, но $\frac{\mathbf{e}}{10^{m-1}} > \mathbf{a}$). Он укладывается в отрезке $\mathbf{a}$ определенное число раз (от 1 до 9). Это число обозначим α_m. α_m — одно из чисел от 1 до 9, которое удовлетворяет следующим условиям: $\alpha_m \frac{\mathbf{e}}{10^m} \leq \mathbf{a}$, но $(\alpha_m + 1)\frac{\mathbf{e}}{10^m} > \mathbf{a}$. Тогда процесс измерения отрезка $\mathbf{a}$ приводит к дроби:

$$a_m = 0,\underbrace{00\ldots0}_{\substack{(m-1)\\ \text{нулей}}}\alpha_m\ldots.$$

Следующие цифры $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}$ и т.д. можно отыскать так же, как и в случае $\mathbf{a} > \mathbf{e}$.

Итак, теоретически процесс измерения отрезка приводит либо к конечной десятичной дроби $a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ (длине отрезка $\mathbf{a}$), либо к бесконечной $a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ $\mathbf{a_n} = a_n\mathbf{e} < \mathbf{a} < \mathbf{a'_n} = \mathbf{a_n} + \frac{\mathbf{e}}{10^n}$.[5]

В случае конечной десятичной дроби $a_k = a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$, где $a_k\mathbf{e} = \mathbf{a}$, удобно считать её бесконечной, приписывая «хвост» нулей. Это означает, что в случае $\mathbf{a_k} = a_k\mathbf{e} = \mathbf{a}$ при $n > k$ $\mathbf{a_n} = a_n\mathbf{e} = \mathbf{a_k}, \mathbf{a'_n} = a'_n\mathbf{e} = \mathbf{a_k} + \frac{\mathbf{e}}{10^n}$, где

$$a_n = a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\underbrace{0\ldots0}_{\substack{n-k\\ \text{нулей}}}, \qquad a'_n = a_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\underbrace{0\ldots0}_{\substack{n-k-1\\ \text{нулей}}}1.$$

При такой договорённости при любом $n \in \{0; 1; 2; \ldots\}$

$$\mathbf{a_n} = a_n\mathbf{e} \leq \mathbf{a}, \qquad \mathbf{a'_n} = a'_n\mathbf{e} > \mathbf{a} \tag{$*$}$$

и тогда $10^n a_n$, обозначаемое N_n^a, есть наибольшее число отрезков $\frac{\mathbf{e}}{10^n}$, сумма которых $\mathbf{a_n}$ не превосходит отрезка $\mathbf{a}$, а $10^n a'_n = 10^n a_n + 1$, обозначаемое $N_n'^a = N_n^a + 1$, есть наименьшее число отрезков $\frac{\mathbf{e}}{10^n}$, сумма которых строго больше, чем отрезок $\mathbf{a}$. Это с очевидностью следует из иначе записанных соотношений ($*$). Действительно,

$$\mathbf{a_n} = a_n\mathbf{e} = 10^n a_n\frac{\mathbf{e}}{10^n} = N_n^a\frac{\mathbf{e}}{10^n} \leq \mathbf{a},$$
$$\mathbf{a'_n} = a'_n\mathbf{e} = 10^n a'_n\frac{\mathbf{e}}{10^n} = N_n'^a\frac{\mathbf{e}}{10^n} = N_n^a\frac{\mathbf{e}}{10^n} + \frac{\mathbf{e}}{10^n} > \mathbf{a}.$$

Заметим, что число $a_n = a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ как результат измерения отрезка $\mathbf{a}$ с точностью до $\frac{1}{10^n}$ можно получить и другим способом: определить, сколько раз отрезок $\frac{\mathbf{e}}{10^n}$ укладывается в измеряемом (N_n^a), и полученное число разделить на 10^n.

Таким образом, аксиома Архимеда (Евдокса) позволяет теоретически сопоставить каждому невырожденному отрезку бесконечную десятичную дробь $a_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, не состоящую сплошь из нулей. В Приложении к статье (опять же на основе архимедова свойства отрезков) будет показано, что в этой бесконечной дроби «9» в периоде появиться не может, т.е. в процессе измерения возникает *действительное число* [1, с.10; 4, с. 169; 7, с. 4; 8, с. 39; 10, с. 52–53]. Таким образом, процесс измерения сопоставляет каждому невырожденному отрезку положительное

[5] То, что вторая возможность действительно имеет место, иллюстрируется примером отрезка $\mathbf{a} = \frac{10}{3}\mathbf{e}$. В этом случае $a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots = 3{,}33\ldots3\ldots = 3{,}(3)$. Доказательство предлагаем провести читателю, воспользовавшись свойством разложения рационального числа в бесконечную десятичную дробь и выражением длины отрезков, соизмеримых с эталоном $\mathbf{e}$.

действительное число, т.е. на множестве отрезков определяется функция $f(\mathbf{a})$, принимающая в качестве значений неотрицательные действительные числа (при дополнительном соглашении: $f(\mathbf{o}) = 0$). Очевидно, что одинаковым отрезкам этот процесс измерения сопоставляет одинаковые действительные числа.

На основании свойств: $N_n^a = 10^n a_n$ и $N_n^a + 1 = 10^n a'_n$ — в Приложении устанавливается, что функция $f(\mathbf{a})$ обладает свойством аддитивности:

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}).$$

Ясно, что $f(\mathbf{e}) = 1$.

Это доказывает, что функция $f(\mathbf{a})$ удовлетворяет требованиям 1°–4° для длины отрезка, т.е. $f(\mathbf{a}) = \ell(\mathbf{a})$. Кроме того, в Приложении доказывается, что функция $\ell(\mathbf{a})$, удовлетворяющая условиям 1°–4°, единственна.

Наконец, в Приложении при дополнительном постулировании свойства непрерывности прямой (аксиома Кантора) показывается, что для каждого положительного действительного числа a существует отрезок $\mathbf{a}$, длина которого равна a ($\ell(\mathbf{a}) = a$). Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством отрезков и множеством неотрицательных действительных чисел.

2. Координатная прямая

Проведённое выше рассмотрение вопроса об измерении отрезков позволяет легко и на строгой основе определить понятие координатной прямой.

Координатная прямая строится следующим образом: на произвольной прямой выбираются некоторая точка, обозначаемая O, направление, называемое *положительным* (противоположное направление называют *отрицательным*), и *эталонный отрезок* (отрезок единичной длины) (рис. 7).

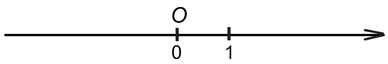


Рис. 7.

Тогда любой точке A этой прямой можно поставить в соответствие действительное число x (координату). Если точка A расположена в положительном направлении от точки O, тогда её координата — расстояние от A до точки O (условимся обозначать его $|OA|$): $x_A = |OA| = \ell(OA)$. Если же точка A расположена в отрицательном направлении от O, то её координата — расстояние от A до O, взятое со знаком «$-$»: $x_A = -|OA| = -\ell(OA)$. Координатой самой точки O считают число 0.

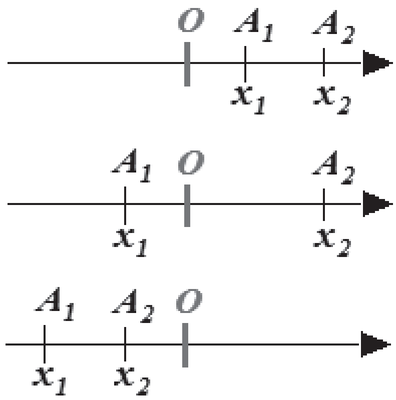
Очевидно, верно и обратное. Если координата x точки A положительна, то эта точка расположена в положительном направлении от точки O и $\ell(OA) = x$. Если $x < 0$, то точка A расположена в отрицательном направлении от O и $\ell(OA) = -x$.

По построению координатной прямой, различным точкам отвечают различные координаты, поскольку различные отрезки имеют различные длины, а координаты точек, симметричных относительно O, имеют противоположные знаки. И для любого действительного числа x найдется точка A, координатой которой является число x. В зависимости от знака числа x ($x > 0$ или $x < 0$) отрезок длиной x или $-x$ откладывается от точки O соответственно в положительном или отрицательном направлении.

Таким образом, каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число — её координата. И наоборот, каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой. Следовательно, между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой установлено взаимно однозначное соответствие. Это даёт право рассматривать координатную прямую в качестве *графической модели множества действительных чисел, где каждое число изображается точкой. Использование координатной прямой позволяет сделать многие доказательства наглядными, а потому более доступными для понимания.*

Из проведённого выше построения координатной прямой следует, что если x — координата точки A $(A \neq O)$, то независимо от знака числа x, положительное из чисел x и $-x$ есть расстояние от точки A до начала координат (точки O).

Если точки $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$ расположены таким образом, что направление от A_1 к A_2 является положительным, то $x_1 < x_2$ и $x_2 - x_1 = |A_1A_2|$ — расстояние между точками A_1 и A_2 (длина отрезка A_1A_2, т.е. $\ell(A_1A_2)$) в различных случаях расположения точек A_1 и A_2 по отношению к точке O (обоснование см. на рис. 8).



$|A_1A_2| = |OA_2| - |OA_1| = x_2 - x_1;$

$|A_1A_2| = |OA_1| + |OA_2| = -\ x_1 + x_2 = x_2 - x_1;$

$|A_1A_2| = |OA_1| - |OA_2| = -x_1 - (-x_2) = x_2 - x_1.$

Рис. 8.

Случай, когда одна из точек A_1 или A_2 совпадает с O, фактически рассмотрен выше, при определении координаты точки.

Если не фиксировать заранее направление от точки $A_1(x_1)$ к точке $A_2(x_2)$, то очевидно, что в общем случае одно из чисел $(x_2 - x_1)$ или $(x_1 - x_2)$, которое является положительным, выражает расстояние между точками A_1 и A_2, т.е. длину отрезка A_1A_2.

Построение координатной прямой, позволяющее определять расстояние между точками по их координатам, в свою очередь делает естественным и весьма полезным введение понятия "модуль числа" с выяснением на геометрической основе многих его свойств.

3. Свойства абсолютных величин

Модуль числа и его геометрический смысл

Модулем (абсолютной величиной) неотрицательного числа называют само это число, а модулем отрицательного числа — противоположное ему число.

Абсолютная величина числа a обозначается $|a|$. Например, $|5| = 5$, $|-7| = 7$; $|0| = 0$.

Устанавливая связь между самим числом и его модулем, определение абсолютной величины можно записать следующим образом:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Другим равносильным с $(*)$ определением модуля числа a является следующее:

$$|a| = \max\{a; -a\}. \qquad (**)$$

Действительно, используя правую часть равенства $(**)$, найдём:

$$a > 0 \Rightarrow \max\{a; -a\} = a,$$
$$a = 0 \Rightarrow \max\{0; -0\} = \{0; 0\} = 0,$$
$$a < 0 \Rightarrow \max\{a; -a\} = -a,$$

что соответствует определению $|a|$ с помощью равенства $(*)$.

Взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой позволяет придать понятию модуль *геометрический смысл.*

При построении координатной прямой мы видели, что если x является координатой точки A $(x \neq 0)$, то одно из чисел x или $-x$, большее нуля, является расстоянием от точки A до начала координат (точки O), т.е. $|x| = |OA|$. Если же $x = 0$, то точка A совпадает с началом координат.

Таким образом, $|x|$ — *расстояние от точки с координатой x до начала координат.*

Опора на геометрические представления позволяет легко обосновать многие свойства абсолютных величин.

Свойства абсолютных величин

I. $|a| \geq 0$. При этом $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Действительно, модуль числа — это расстояние от точки, которая соответствует данному числу на координатной прямой, до начала координат, а расстояние не может быть отрицательным. Впрочем, данное свойство вытекает из определения модуля.

II. $|a| = |-a|$

Действительно, точки с координатами a и $-a$ расположены на координатной прямой симметрично относительно точки O. Следовательно, расстояния от данных точек до начала координат одинаковы.

Со свойством II связан *геометрический смысл модуля разности двух чисел.*

При построении координатной прямой было установлено, что если $x_1 \neq x_2$, то одно из чисел $(x_2 - x_1)$ или $(x_1 - x_2) = -(x_2 - x_1)$, а именно положительное, является расстоянием между точками $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$, т.е. $|A_1A_2| = |A_2A_1|$. Тогда на основе любого из соотношений ($*$ или $**$), а также вышеуказанного свойства II получаем:

$$|x_2 - x_1| = |-(x_2 - x_1)| = |x_1 - x_2| = |A_1A_2| = |A_2A_1|.$$

То есть *модуль разности двух чисел выражает длину отрезка, концами которого являются точки с координатами, равными этим числам.*

III. Неравенство $|a| \leq b$ эквивалентно двойному неравенству $-b \leq a \leq b$, т.е.

$$|a| \leq b \ \Leftrightarrow \ -b \leq a \leq b \ (b > 0).$$

Соотношение $|a| \leq b$ означает, что точка с координатой a находится на расстоянии, не превосходящем b, слева или справа от начала координат (рис. 9).

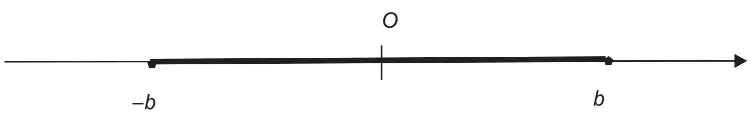


Рис. 9.

Аналогично получаем свойство:

III*. $|a| < b \ \Leftrightarrow \ -b < a < b \ (b > 0)$.

IV. $|a| \geq b \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} a \geq b, \\ a \leq -b, \end{array} \right. \quad (b > 0).$

Соотношение $|a| \geq b$ означает, что точка с координатой a находится на расстоянии, не меньшем, чем b, слева или справа от начала координат (рис. 10).

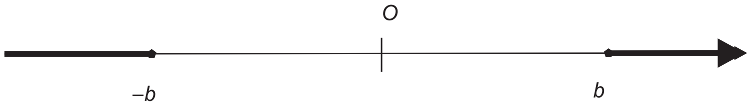


Рис. 10.

Аналогично получаем:

IV*. $|a| > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > b \\ a < -b \end{array}\right., (b > 0)\,.$

V. $a \le b \le c \ \Rightarrow |b| \le \max\{|a|; |c|\}$.

Если $a \le b \le c$, то точка $B(b)$ расположена на координатной прямой между точками $A(a)$ и $C(c)$, а поэтому расстояние от неё до начала координат не может превосходить наибольшего из расстояний от точек A и C до начала координат (см. рис. 11).

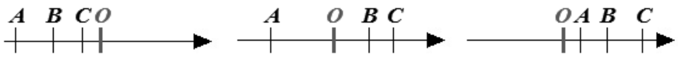


Рис. 11.

VI. $|a+b| \le |a| + |b|$

Модуль суммы двух чисел не превышает суммы модулей этих чисел.

Для доказательства рассмотрим точки $A(a)$, $B(b)$ и $B'(-b)$. В этом случае $|a+b| = |a-(-b)|$ выражает расстояние между точками A и B'.

Если a и b имеют *одинаковые знаки*, то точки A и B находятся по одну сторону от O, а точки A и B' — по разные стороны. Тогда расстояние между точками A и B' равно сумме расстояний от данных точек до O:

$$|a+b| = |a| + |b|\,.$$

Если же a и b имеют *разные знаки*, то точки A и B находятся по разные стороны от O, а точки A и B' — по одну сторону. В этом случае расстояние между A и B' меньше суммы расстояний от A и B' до точки O:

$$|a+b| < |a| + |b|\,.$$

Если хотя бы одно из чисел a или b равно нулю, очевидно, что выполняется равенство.

VII. $|a-b| \ge ||a| - |b||$.

Модуль разности двух чисел больше либо равен модулю разности модулей этих чисел.

$|a-b|$ — расстояние между точками с координатами a и b. Обозначим эти точки A и B.

Если a и b имеют *разные знаки*, то точки $A(a)$ и $B(b)$ находятся по разные стороны от O. Тогда расстояние между точками A и B равно сумме расстояний от A до O и от B до O:

$$|a-b| = |AB| = |a| + |b| > \max\{|a| - |b|; |b| - |a|\} = \big||a| - |b|\big|.$$

То есть в этом случае: $|a-b| > ||a| - |b||$.

Если же a и b имеют *одинаковые знаки*, то точки $A(a)$ и $B(b)$ лежат по одну сторону от O. В этом случае расстояние между ними есть $|a| - |b|$, если $|a| > |b|$, или $|b| - |a|$, если $|b| > |a|$. Получаем:

$$|a-b| = |AB| = \max\{|a| - |b|; |b| - |a|\} = \big||a| - |b|\big|.$$

Здесь: $|a-b| = \big||a| - |b|\big|$.

В целях общности приведём выражения для модуля произведения и частного двух чисел. Соответствующие формулы устанавливаются на основе определения и свойств операций умножения и деления чисел.

VIII. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Модуль произведения равен произведению модулей. Действительно, произведение двух чисел в общем случае может быть определено как $ab = -|a||b|$, если лишь одно из чисел, a или b, отрицательно, и $ab = |a||b|$ во всех остальных случаях, но $|-|a||b|| = ||a||b|| = |a||b|$.

IX. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$

Модуль частного равен отношению модулей делимого и делителя.

Сначала устанавливается, что $|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|}$. Действительно, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ $(a \ne 0)$. Тогда по свойству VIII $|a \cdot \frac{1}{a}| = |a| \cdot |\frac{1}{a}| = 1$. Это значит, что $|\frac{1}{a}|$ есть число обратное для $|a|$, т.е. $\frac{1}{|a|}$. Далее получаем $|\frac{a}{b}| = |a \cdot \frac{1}{b}| = |a| \cdot \frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$.

Свойства VIII и IX установлены аналитически. При этом не видна какая-либо геометрическая интерпретация для модуля произведения и частного, способная серьёзно обогатить содержание соответствующих соотношений.

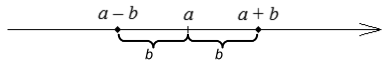
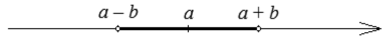
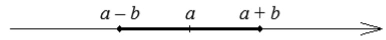
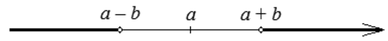
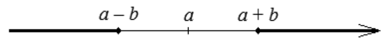
4. Задачи, содержащие переменную под знаком модуля

Геометрический смысл модуля числа позволяет использовать координатную прямую в качестве модели простого и наглядного решения нескольких типов уравнений и неравенств с модулем.

4.1. Уравнения и неравенства, приводимые к виду:

$$|\mathbf{x}-\mathbf{a}|=\mathbf{b};\quad |\mathbf{x}-\mathbf{a}|<\mathbf{b};\quad |\mathbf{x}-\mathbf{a}|\le\mathbf{b};\quad |\mathbf{x}-\mathbf{a}|>\mathbf{b};\quad |\mathbf{x}-\mathbf{a}|\ge\mathbf{b},$$

где a и b — действительные числа.

Задача	Графическая модель для решения задачи	Ответ
$\lvert x-a\rvert=b$		$x_1=a-b$; $x_2=a+b$
$\lvert x-a\rvert<b$		$x\in(a-b;a+b)$
$\lvert x-a\rvert\le b$		$x\in[a-b;a+b]$
$\lvert x-a\rvert>b$		$x\in(-\infty;a-b)\cup(a+b;+\infty)$
$\lvert x-a\rvert\ge b$		$x\in(-\infty;a-b]\cup[a+b;+\infty)$

Пример 1. $|2x+3|>8$
Неравенство $|2x+3|>8$ преобразуется к виду:

$$|2x+3|>8 \Leftrightarrow 2\left|x+\frac{3}{2}\right|>8 \Leftrightarrow \left|x+\frac{3}{2}\right|>4 \Leftrightarrow |x-(-1{,}5)|>4.$$

Тогда: $x\in(-\infty;-1,5-4)\cup(-1,5+4;+\infty)$.
Ответ: $x\in(-\infty;-5,5)\cup(2,5;+\infty)$.
Упражнения:
1.1. а) $|x-1|=2$; б) $|x-1|<2$; в) $|x-1|\le 2$; г) $|x-1|>2$; д) $|x-1|\ge 2$.
1.2. а) $|x+2|=5$; б) $|x+2|<5$; в) $|x+2|\le 5$; г) $|x+2|>5$; д) $|x+2|\ge 5$.
1.3. а) $|4-2x|=10$; б) $|4-2x|<10$; в) $|4-2x|\le 10$; г) $|4-2x|>10$; д) $|4-2x|\ge 10$.

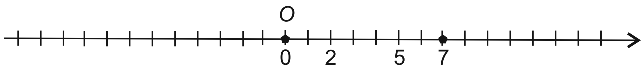
4.2. Уравнения и неравенства, приводимые к виду:

$$|\mathbf{x}-\mathbf{a}|+|\mathbf{x}-\mathbf{b}|=\mathbf{c};\quad |\mathbf{x}-\mathbf{a}|+|\mathbf{x}-\mathbf{b}|<\mathbf{c};\quad |\mathbf{x}-\mathbf{a}|+|\mathbf{x}-\mathbf{b}|\le\mathbf{c};$$
$$|\mathbf{x}-\mathbf{a}|+|\mathbf{x}-\mathbf{b}|>\mathbf{c};\quad |\mathbf{x}-\mathbf{a}|+|\mathbf{x}-\mathbf{b}|\ge\mathbf{c},\ \text{где}\ c>0.$$

Сумма $|x-a|+|x-b|$ геометрически означает сумму расстояний от точки x до точек a и b. Если точка x принадлежит отрезку $[a;b]$, то эта сумма равна длине отрезка $[a;b]$, т.е. $b-a$, если $a<b$. Если же точка x не принадлежит отрезку $[a;b]$, то эта сумма равна длине отрезка $[a;b]$ плюс удвоенное расстояние (обозначим его 2ℓ) от точки x до границы отрезка $[a;b]$. Действительно, ведь при удалении точки x от границы отрезка $[a;b]$ на ℓ расстояние от неё как до точки a, так и до точки b увеличивается на ℓ, и поэтому сумма расстояний от точки x до точек a и b увеличивается на 2ℓ.

Воспользуемся такими рассуждениями для решения задач этого типа.

Пример 2. $|x-2|+|x-5|=7$
Длина отрезка $[2;5]$ равна 3. Следовательно, удаление ℓ точки x от границы отрезка $[2;5]$должно составлять половину разности между числом 7 и длиной отрезка $[2;5]$, т.е. $\ell=\frac{1}{2}(7-3)=2$.

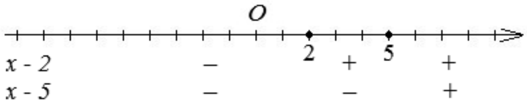


Итак, $x_1 = 2 - 2 = 0, x_2 = 5 + 2 = 7$.

Ясно, что $|x-2|+|x-5| \leq 7$ при $x \in [0;7]$, а $|x-2|+|x-5| \geq 7$ при $x \in (-\infty;0] \cup [7;+\infty)$.

Для сравнения решим уравнение $|x-2|+|x-5| = 7$ стандартным способом (путем раскрытия символа модуля числа).

Найдем нули подмодульных выражений и обозначим их на координатной прямой. Далее определим знаки этих выражений на каждом из интервалов.



Раскроем модули на каждом из промежутков и решим полученное уравнение.

$$\begin{cases} x < 2 \\ -(x-2)-(x-5) = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \leq x < 5 \\ x-2-(x-5) = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 5 \\ x-2+x-5 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ -x+2-x+5 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \leq x < 5 \\ x-2-x+5 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 5 \\ 2x = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ -2x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \leq x < 5 \\ 3 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 5 \\ x = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x = 0 \end{cases} \qquad x \in \varnothing \qquad x = 7$$

$x = 0$

Объединив ответы со всех промежутков, получаем: $x_1 = 0$, $x_2 = 7$.

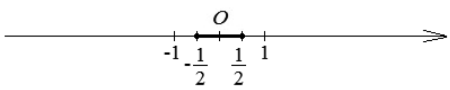
Решение оказалось куда более громоздким.

Пример 3.

$$\sqrt{4x^2+4x+1} + \sqrt{4x^2-4x+1} = 2. \quad \sqrt{(2x+1)^2} + \sqrt{(2x-1)^2} = 2;$$

$$|2x+1| + |2x-1| = 2; \quad 2\left|x+\frac{1}{2}\right| + 2\left|x-\frac{1}{2}\right| = 2;$$

$$\left|x+\frac{1}{2}\right| + \left|x-\frac{1}{2}\right| = 1.$$



Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Упражнения:

2.1. а) $|x-3|+|x+5| = 8$; б) $|x-3|+|x+5| < 8$; в) $|x-3|+|x+5| \leq 8$; г) $|x-3|+|x+5| > 8$; д) $|x-3|+|x+5| \geq 8$.

2.2. а) $|x-1|+|x-4| = 5$; б) $|x-1|+|x-4| < 5$; в) $|x-1|+|x-4| \leq 5$; г) $|x-1|+|x-4| > 5$; д) $|x-1|+|x-4| \geq 5$.

4.3. Уравнения и неравенства, приводимые к виду:

$$\mathbf{|x-a|-|x-b| = c}; \quad \mathbf{|x-a|-|x-b| < c}; \quad \mathbf{|x-a|-|x-b| \leq c};$$

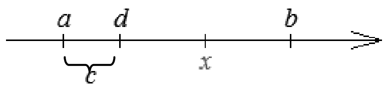
$$\mathbf{|x-a|-|x-b| > c}; \quad \mathbf{|x-a|-|x-b| \geq c}, \text{ где } c > 0.$$

Здесь следует иметь в виду, что вне интервала, концами которого являются точки a и b, значение разности $|x-a|-|x-b|$ есть длина отрезка $[a;b]$ со знаком плюс или со знаком минус. На самом же отрезке эта разность меняется от нуля до длины отрезка $[a;b]$ со знаком плюс или со знаком минус. Поэтому обычно в этих задачах c есть положительное число, меньшее длины отрезка $[a;b]$.

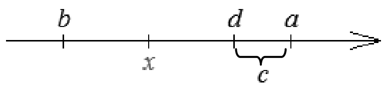
При $c<|a-b|$ корень уравнения $|x-a|-|x-b|=c$ принадлежит интервалу $(a;b)$. Как же разделить расстояние между точками a и b на 2 части, чтобы одна из частей была больше другой на c? Задание сходно с классической задачей для начальной школы: «У двух мальчиков 10 яблок. У одного из них на 2 яблока больше, чем у другого. Сколько яблок у каждого?»

Чтобы решить задачу, можно из 10 яблок вычесть 2 лишних, а затем оставшиеся яблоки поделить пополам — тем самым узнаем, сколько яблок у одного: $(10-2):2=4$. Далее узнаем, сколько у второго: $4+2=6$.

Аналогично можно найти искомую точку x для уравнения $|x-a|-|x-b|=c$, если $c<|a-b|$: отступим от точки a на расстояние, равное c — получим точку d. Середина отрезка $[b;d]$ является искомой.



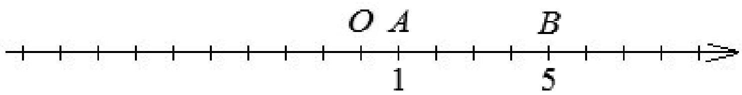
или



Если $a<b$ Если $b<a$

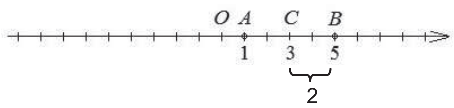
Пример 4. $|x-5|-|x-1|=2$

Чтобы решить уравнение, можно найти на координатной прямой точки, расстояние от которых до 5 на 2 единичных отрезка больше, чем до 1.

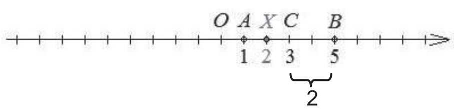


$2<|1-5|$, поэтому искомая точка принадлежит интервалу $(1;5)$.

1) Сначала сократим расстояние между точками A и B на 2 — получим при этом точку C:



2) А затем разделим остаток, интервал $(1;3)$, пополам — получим искомую точку $X(2)$:



Итак, $x=2$.

Если же мы выбираем точки x, лежащие правее 2, будет выполняться неравенство $|x-5|-$ $-|x-1|<2$. Поэтому:

$$|x-5|<|x-1|+2 \Rightarrow x\in(2;+\infty),$$
$$|x-5|\leq|x-1|+2 \Rightarrow x\in[2;+\infty).$$

Если же выбирать точки x, лежащие левее 2, будет иметь место неравенство $|x-5|-|x-1|>2$. Поэтому:

$$|x-5|>|x-1|+2 \Rightarrow x \in (-\infty; 2),$$
$$|x-5|\geq|x-1|+2 \Rightarrow x \in (-\infty; 2].$$

Упражнения:

3.1. а) $|x-4|-|x+3|=1$; б) $|x-4|-|x+3|<1$; в) $|x-4|-|x+3|\leq 1$; г) $|x-4|-|x+3|>1$; д) $|x-4|-|x+3|\geq 1$.

3.2. а) $|x+1|-|x-6|=3$; б) $|x+1|-|x-6|<3$; в) $|x+1|-|x-6|\leq 3$; г) $|x+1|-|x-6|>3$; д) $|x+1|-|x-6|\geq 3$.

3.3. а) $|x-3|-|x-7|=4$; б) $|x-3|-|x-7|<4$; в) $|x-3|-|x-7|\leq 4$; г) $|x-3|-|x-7|>4$; д) $|x-3|-|x-7|\geq 4$.

4.4. Уравнения и неравенства, приводимые к виду:

$$|\mathbf{x}-\mathbf{a}|=\mathbf{k}|\mathbf{x}-\mathbf{b}|; \quad |\mathbf{x}-\mathbf{a}|<\mathbf{k}|\mathbf{x}-\mathbf{b}|; \quad |\mathbf{x}-\mathbf{a}|>\mathbf{k}|\mathbf{x}-\mathbf{b}|, \text{ где } k>0.$$

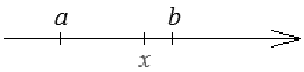
Переход к случаям «$\leq$» и «$\geq$» очевиден.

Можно ограничиться случаем, когда $k>1$, т.к. при $0<k<1$ уравнение $|x-a|=k|x-b|$можно заменить равносильным $|x-b|=\frac{1}{k}|x-a|$, где $\frac{1}{k}>1$, то есть a и b меняются ролями.

Для примера рассмотрим случай $|x-a|=k|x-b|$, $a<b$, $k>1$.

На луче $(-\infty; a]$ решений быть не может, т.к. тут $|x-a|<|x-b|$.

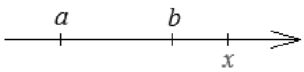
На интервале $(a;b)$ искомая точка x делит отрезок $[a;b]$ в отношении $k:1$.



$[a;x]=\frac{k}{k+1}[a;b]$, или $[x;b]=\frac{1}{k+1}[a;b]$

$x=a+k\frac{b-a}{k+1}$ или, что то же самое, $x=b-\frac{b-a}{k+1}$.

На луче $[b;+\infty)$ для получения значения x надо отступить от точки b отрезок длины ℓ, чтобы $\frac{(b-a)+\ell}{\ell}=k$, т.е. $b-a=k\ell-\ell \Leftrightarrow (k-1)\ell=b-a \Leftrightarrow \ell=\frac{b-a}{k-1}$.



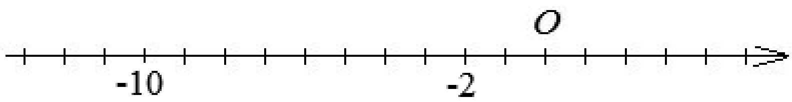
Здесь $x=b+\frac{b-a}{k-1}$.

Итак, $x_1=a+k\frac{b-a}{k+1}=b-\frac{b-a}{k+1}, x_2=b+\frac{b-a}{k-1}$.

Пример 5. $|x+10|=|3x+6|$

Преобразуем к виду: $|x+10|=3|x+2|$.

Расстояние от точки x до точки -10 в 3 раза больше, чем до точки -2.

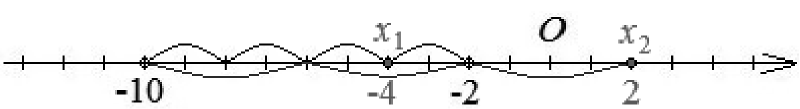


На $(-\infty;-10]$ решений быть не может, т.к. здесь $|x+10|<|x+2|$.

На $[-10;-2]$ искомая точка должна делить этот отрезок в отношении $3:1$.

$x_1=-10+3\frac{-2-(-10)}{4}=-2-\frac{-2-(-10)}{4}=-4$.

На $[-2;+\infty]$ $x_2=-2+\frac{-2-(-10)}{2}=2$



Ответ: $x_1=-4, x_2=2$.

Чтобы выполнялось неравенство $|x+10| > 3|x+2|$, точка $X_1(-4)$ сдвигается к -2 и точка $X_2(2)$ сдвигается к -2.

$$|x+10| > 3|x+2| \Rightarrow x \in (-4;-2) \cup (-2;2), \text{ фактически } x \in (-4;2).$$
$$|x+10| < 3|x+2| \Rightarrow x \in (-\infty;-4) \cup (2;+\infty).$$

Упражнения:
4.1. а) $|x-2| = 2|x+4|$, б) $|x-2| > 2|x+4|$, в) $|x-2| < 2|x+4|$.
4.2 а) $|x+14| = |4x-4|$, б) $|x+14| > |4x-4|$, в) $|x+14| < |4x-4|$.

4.5. Уравнения и неравенства, приводимые к виду:

$$\left.\begin{array}{l}|\mathbf{f(x)}| + |\mathbf{g(x)}| = |\mathbf{h(x)}| \\ |\mathbf{f(x)}| + |\mathbf{g(x)}| > |\mathbf{h(x)}|\end{array}\right\}, \text{ где } h(x) = f(x) + g(x)$$

Здесь используется свойство абсолютных величин: $|a| + |b| \geq |a+b|$, причём $|a| + |b| > > |a+b|$ тогда и только тогда, когда знаки a и b противоположны.

Следовательно, решение уравнения $|f(x)| + |g(x)| = |f(x) + g(x)|$ сводится к выяснению знаков подмодульных выражений $f(x)$ и $g(x)$ и выбору тех значений x, при которых эти знаки не разные (на множестве допустимых значений).

Пример 6. $|x^2+3x-10| + |x^2-x-12| = 4x+2$, $|x^2+3x-10| + |-x^2+x+12| = 4x+2$

Здесь $f(x) = x^2+3x-10$, $g(x) = -x^2+x+12$, $f(x)+g(x) = 4x+2 \Rightarrow$ соотношение верно при выполнении двух условий:

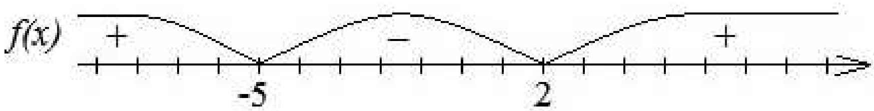
1) $|4x+2| = 4x+2$;

2) $f(x) = x^2+3x-10$ и $g(x) = -x^2+x+12$ одновременно не имеют разных знаков.

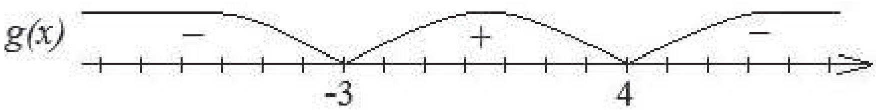
1) $|4x+2| = 4x+2$, если $4x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

2) Определим, при каких x функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют разных знаков. Для этого найдем нули обеих функций, обозначим их на координатной прямой. Нули разбивают область определения на промежутки, определим знаки функций на каждом из них.

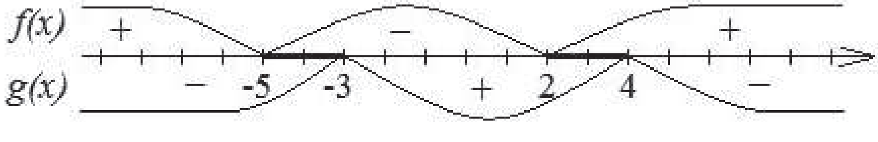
$$f(x) = x^2+3x-10 = (x+5)(x-2)$$



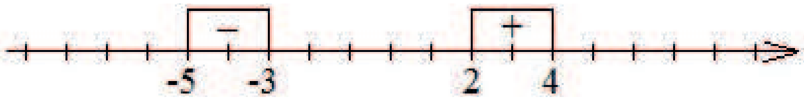
$$g(x) = -x^2+x+12 = -(x-4)(x+3)$$



Для удобства обозначим знаки функций на одном рисунке.



По рисунку видно, при каких x функции не имеют разных знаков. Итак, мы нашли два множества не противоположных знаков:



Условие $x \geq -\frac{1}{2}$ дает ответ $x \in [2;4]$.

Упражнения:

5.1. $|x^2+3x-10|+|x^2-x-12| = -4x-2$

5.2. $|x^2+3x-10|+2|2x+1| = x^2-x-12$

Ответы к упражнениям:

1.1. а) $-1; 3$, б) $(-1;3)$, в) $[-1;3]$, г) $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$, д) $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$

1.2. а) $-7; 3$, б) $(-7;3)$, в) $[-7;3]$, г) $(-\infty;-7)\cup(3;+\infty)$, д) $(-\infty;-7]\cup[3;+\infty)$

1.3. а) $-3; 7$, б) $(-3;7)$, в) $[-3;7]$, г) $(-\infty;-3)\cup(7;+\infty)$, д) $(-\infty;-3]\cup[7;+\infty)$

2.1. а) $[-5;3]$, б) решений нет, в) $[-5;3]$, г) $(-\infty;-5)\cup(3;+\infty)$, д) $(-\infty;+\infty)$

2.2. а) $0; 5$, б) $(0;5)$, в) $[0;5]$, г) $(-\infty;0)\cup(5;+\infty)$, д) $(-\infty;0]\cup[5;+\infty)$

3.1. а) 0, б) $(0;+\infty)$, в) $[0;+\infty)$, г) $(-\infty;0)$, д) $(-\infty;0]$

3.2. а) 4, б) $(-\infty;4)$, в) $(-\infty;4]$, г) $(4;+\infty)$, д) $[4;+\infty)$

3.3. а) $[7;+\infty)$, б) $(-\infty;7)$, в) $(-\infty;7]$, г) решений нет, д) решений нет

4.1. а) $-10; -2$, б) $(-10;-2)$, в) $(-\infty;-10)\cup(-2;+\infty)$

4.2. а) $-2; 6$, б) $(-2;6)$, в) $(-\infty;-2)\cup(6;+\infty)$

5.1. $[-5;-3]$

5.2. $(-\infty;-5]$

Приложение

1) В процессе измерения отрезка возникающая бесконечная десятичная дробь не может иметь «9» в периоде.

Пусть на каком-то этапе измерения отрезка возникает дробь $a_n = a_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$. Выясним условия появления цифры 9 в этой дроби на следующем этапе измерения, то есть того, что $\alpha_{n+1} = 9$. В этом случае отрезок $\frac{\mathbf{e}}{10^{n+1}}$ укладывается в отрезке $\mathbf{k_n}$ 9 раз ($\mathbf{k_n}$ — остаток после получения цифры α_n, $\mathbf{k_n} = \mathbf{a} - \mathbf{a_n} = \mathbf{a} - a_n\mathbf{e}$). Тогда выполняются соотношения:

$$9\frac{\mathbf{e}}{10^{n+1}} \leq \mathbf{k_n} < \frac{\mathbf{e}}{10^n} \text{ и} \tag{1}$$

$$\mathbf{k_n} = 9\frac{\mathbf{e}}{10^{n+1}} + \mathbf{k_{n+1}}, \tag{2}$$

$$0 \leq \mathbf{k_{n+1}} < \frac{\mathbf{e}}{10^{n+1}}.^6 \tag{3}$$

Введём в рассмотрение отрезки $\mathbf{p_n} = \mathbf{k_n}\cdot 10^n$, $\mathbf{p_{n+1}} = \mathbf{k_{n+1}}\cdot 10^{n+1}$ и назовём их приведёнными остатками после получения цифр α_n и α_{n+1} соответственно[7]. Тогда соотношения, написанные выше, примут следующий вид:

$$9\mathbf{e} \leq 10\mathbf{p_n} < 10\mathbf{e} \tag{1*}$$

$$10\mathbf{p_n} = 9\mathbf{e} + \mathbf{p_{n+1}} \tag{2*}$$

$$0 \leq \mathbf{p_{n+1}} < \mathbf{e} \tag{3*}$$

[6] Формулы (2) и (3) были рассмотрены выше на стр. 41.

[7] То, что здесь названо приведенными остатками, является аналогами остатков, полученных в алгоритме представления рационального числа бесконечной десятичной дробью. Например, $\frac{10}{3} = 3{,}333\ldots$. Здесь $k_0 = 10 - 3\cdot 3 = 1$; $k_1 = 10 - 3{,}3\cdot 3 = 0{,}1$; $k_2 = 10 - 3{,}33\cdot 3 = 0{,}01$; $\ldots$ $k_n = 10 - 3{,}\underbrace{33\ldots3}_{n \text{ цифр}}\cdot 3 = 0{,}\underbrace{00\ldots0}_{n-1 \text{ нулей}}1$, тогда как все остатки в алгоритме деления «столбиком» равны $1 = k_n\cdot 10^n$.

Преобразуем величину $10\mathbf{p_n}$:

$$10\mathbf{p_n} = 9\mathbf{e} + [10\mathbf{p_n} - 9\mathbf{e}] = 9\mathbf{e} + [(10\mathbf{p_n} + \mathbf{e}) - 10\mathbf{e}] = 9\mathbf{e} + [\mathbf{e} - (10\mathbf{e} - 10\mathbf{p_n})].$$

$$10\mathbf{p_n} = 9\mathbf{e} + [\underbrace{\mathbf{e} - 10(\mathbf{e} - \mathbf{p_n})}_{\mathbf{p_{n+1}}}]$$

Для того, чтобы выражение $\mathbf{e} - 10(\mathbf{e} - \mathbf{p_n})$ играло роль $\mathbf{p_{n+1}}$ в формуле (3∗), то есть чтобы $\alpha_{n+1} = 9$, необходимо и достаточно выполнение соотношения: $10(\mathbf{e} - \mathbf{p_n}) \leq \mathbf{e}$.

Так как $\mathbf{p_{n+1}} = \mathbf{e} - 10(\mathbf{e} - \mathbf{p_n})$, то $\mathbf{p_{n+1}} + 10(\mathbf{e} - \mathbf{p_n}) = \mathbf{e}$ и $\mathbf{e} - \mathbf{p_{n+1}} = 10(\mathbf{e} - \mathbf{p_n})$.

Для того чтобы и $a_{n+2} = 9$, должно выполняться условие:

$$10(\mathbf{e} - \mathbf{p_{n+1}}) \leq \mathbf{e}.$$

То есть

$$10(\mathbf{e} - \mathbf{p_{n+1}}) = 10 \cdot 10(\mathbf{e} - \mathbf{p_n}) = 10^2(\mathbf{e} - \mathbf{p_n}) \leq \mathbf{e}.$$

Из этого следует, что число девяток, стоящих подряд в дроби $a_0{,}\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ после цифры α_n конечно и равно некоторому натуральному числу z, при котором:

$$10^z(\mathbf{e} - \mathbf{p_n}) \leq \mathbf{e}, \text{ но } 10^{z+1}(\mathbf{e} - \mathbf{p_n}) > \mathbf{e}.$$

Существование такого числа z следует из аксиомы Архимеда.

2) Аддитивность длины отрезков

Надо доказать, что для произвольных невырожденных отрезков $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и их суммы $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ выполняется соотношение:

$$\ell(\mathbf{c}) = \ell(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \ell(\mathbf{a}) + \ell(\mathbf{b}).$$

Пусть $\ell(\mathbf{c}) = c = c_0{,}\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n \ldots$, $\ell(\mathbf{a}) = a = a_0{,}\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, $\ell(\mathbf{b}) = b = b_0{,}\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots$, где c, a, b — положительные действительные числа, выражающие длины отрезков $\mathbf{c}, \mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соответственно.

Тогда $N_n^c = 10^n c_n$ — наибольшее число отрезков $\frac{\mathbf{e}}{10^n}$, сумма которых $\mathbf{c_n}$ не превосходит отрезка $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, а $N_m'^c = 10^m c_m + 1$ — наименьшее число отрезков $\frac{\mathbf{e}}{10^m}$, сумма которых $\mathbf{c'_m}$ превышает отрезок $\mathbf{c}$. Аналогичный смысл имеют числа $N_n^a = 10^n a_n, N_m'^a = 10^m a_m + 1, N_n^b = 10^n b_n, N_m'^b = 10^m b_m + 1$ по отношению к отрезкам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

В $\mathbf{a}$ содержится N_n^a отрезков $\frac{\mathbf{e}}{10^n}$, в $\mathbf{b}$ — N_n^b отрезков $\frac{\mathbf{e}}{10^n}$. Тогда $(N_n^a + N_n^b)$ отрезков $\frac{\mathbf{e}}{10^n}$ поместится в отрезке $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Но ведь наибольшее число отрезков $\frac{\mathbf{e}}{10^n}$, помещающихся в $\mathbf{c}$, равно N_n^c. Поэтому $\left(N_n^a + N_n^b\right) \frac{\mathbf{e}}{10^n} \leq N_n^c \frac{\mathbf{e}}{10^n}$, то есть $\mathbf{a_n} + \mathbf{b_n} \leq \mathbf{c_n}$.

$N_m'^a$ — минимальное число отрезков $\frac{\mathbf{e}}{10^m}$, сумма которых $\mathbf{a'_m}$ превышает отрезок $\mathbf{a}$. $N_m'^b$ — минимальное число отрезков $\frac{\mathbf{e}}{10^m}$, сумма которых $\mathbf{b'_m}$ превышает отрезок $\mathbf{b}$. Тогда $\left(N_m'^a + N_m'^b\right)$ отрезков $\frac{\mathbf{e}}{10^m}$ превышают отрезок $\mathbf{c}$. Но $N_m'^c$ — минимальное число таких отрезков, сумма которых $\mathbf{c'_m}$ превышает отрезок $\mathbf{c}$. Поэтому $\left(N_m'^a + N_m'^b\right) \frac{\mathbf{e}}{10^m} \geq N_m'^c \frac{\mathbf{e}}{10^m}$, то есть $\mathbf{a'_m} + \mathbf{b'_m} \geq \mathbf{c'_m}$.

Таким образом, для произвольных натуральных чисел m и n выполняется соотношение:

$$\mathbf{a_n} + \mathbf{b_n} \leq \mathbf{c_n} \leq \mathbf{c} < \mathbf{c'_m} \leq \mathbf{a'_m} + \mathbf{b'_m}.$$

Поэтому $a_n + b_n \leq c < a'_m + b'_m$.

Таким образом, число c — длина отрезка $\mathbf{c}$, является разделяющим числом множеств $\{a_n + b_n\}$ и $\{a'_m + b'_m\}$, а таким единственным разделяющим числом этих множеств является сумма чисел $a + b$ [1, с. 19; 2, с. 20; 4, с. 169; 8, с. 51; 10, с. 353].

Соотношение $N_n^a + N_n^b \leq N_n^c < N_n'^c \leq N_n'^a + N_n'^b$ можно сделать более детальным, а именно:

если $k_n^a + k_n^b \geq \frac{e}{10^n}$, то $N_n^c = N_n^a + N_n^b + 1, N_n'^c = N_n'^a + N_n'^b$,

если же $k_n^a + k_n^b < \frac{e}{10^n}$, то $N_n^c = N_n^a + N_n^b$, $N_n'^c = N_n'^a + N_n'^b - 1$.

Доказательство этого факта предлагаем провести читателю.

3) Для любого положительного действительного числа a существует отрезок $\mathbf{a}$*, длина которого равна a: $\ell(\mathbf{a}) = a$.*

Используем представление числа a в виде бесконечной десятичной дроби без «9» в периоде: $a = a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$.

Будем рассматривать две последовательности десятичных приближений к числу a по недостатку и по избытку: (a_n), $a_n = a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ и (a'_m), $a'_m = a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m + \frac{1}{10^m}$.

Первая последовательность неубывающая: $a_{n+1} \geq a_n$ и $a_{n+1} = a_n$, если $\alpha_{n+1} = 0$. Вторая последовательность невозрастающая $a'_{m+1} \leq a'_m$, причем равенство имеет место при $\alpha_{m+1} = 9$.

Действительно:

$$a'_{m+1} = a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\alpha_{m+1} + \frac{1}{10^{m+1}} = a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m + \frac{\alpha_{m+1}}{10^{m+1}} + \frac{1}{10^{m+1}} =$$
$$= a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m + \frac{\alpha_{m+1}+1}{10^{m+1}} \leq a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m + \frac{1}{10^m} = a'_m,$$

равенство при $\alpha_{m+1} = 9$.

Но так как дробь $a = a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots$ не имеет «9» в периоде, то a'_m не может оставаться неизменной при неограниченном возрастании номера m, может только уменьшаться, и для любого номера m найдётся такой номер t $(t > m)$, что $a'_t < a'_m$ (если $\alpha_t < 9$).

Для произвольных натуральных n и m справедливо неравенство: $a_n \leq a < a'_m$. Действительно, если $t \geq \max\{n, m\}$, то $a_n \leq a_t \leq a < a'_t \leq a'_m$.

Рассмотрим точки A_n и B_n с координатами a_n и $a'_n = a_n + \frac{1}{10^n}$ (см. рис. 12). Получаем систему вложенных отрезков $A_nB_n = \frac{\mathbf{e}}{10^n}$.

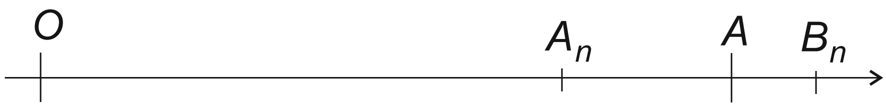


Рис. 12.

Не может существовать отрезка, содержащегося во всех этих отрезках. Если бы такой отрезок был (назовем его $\mathbf{c}$), то при любых n выполнялось бы соотношение $\mathbf{c} \leq A_nB_n = \frac{\mathbf{e}}{10^n}$. Но этого быть не может в силу аксиомы Архимеда, так как для достаточно больших n: $\frac{\mathbf{e}}{10^n} < \mathbf{c}$. Точка, общая всем этим отрезкам, может быть только одна. Существование такой точки не является следствием тех представлений о прямой, которые мы уже использовали, но оно постулируется как свойство, присущее понятию прямой, выражающее её непрерывность — аксиома Кантора: *для любой системы вложенных отрезков на прямой существует по крайней мере одна точка, общая всем отрезкам.* В нашем случае не существует общего отрезка и, следовательно, существующая точка единственна. Обозначим эту точку буквой A. Отрезок $\mathbf{a} = OA$ является искомым.

Если мы покажем, что для любого $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ $OA_n \leq OA < OB_n$, то это будет означать, что рассмотренный нами ранее стандартный процесс измерения отрезка OA приводит к бесконечной дроби $a_0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = a = \ell(\mathbf{a})$. Здесь требует обоснования только строгое неравенство $OA < OB_n$ (т.е. $A \neq B_n$ ни при каком n). Последнее следует из того, что ни при каком n точка B_n не может принадлежать всем вложенным отрезкам, т.е. не может совпасть с A. Действительно, для произвольного n найдётся $t > n$, такое что $\alpha_t \neq 9$. Тогда $OB_t < OB_n$, поэтому точка B_t будет лежать левее точки B_n. Таким образом, B_n оказывается вне отрезка A_tB_t (см. рис. 13).

Рис. 13.

4) Функция $\ell(\mathbf{a})$, удовлетворяющая требованиям 1°–4° для длины отрезка, единственна.

Предположим, что существует ещё одна функция $\tilde{\ell}(\mathbf{a})$, удовлетворяющая требованиям 1°–4°.

Следовательно, $\tilde{\ell}(a_n\mathbf{e}) \le \tilde{\ell}(\mathbf{a}) < \tilde{\ell}(a'_m\mathbf{e})$, $n, m \in \{0, 1, 2, ...\}$.

Поскольку $\ell\,(r\mathbf{e}) = r$, можем написать $a_n \le \tilde{\ell}(\mathbf{a}) < a'_m$.

Таким образом, $\tilde{\ell}\,(\mathbf{a})$ является разделяющим числом множеств $\{a_n\}$ и $\{a'_m\}$, но таким единственным разделяющим числом является $\ell(\mathbf{a})$ [5, с. 42–43; 6, с. 39; 8, с. 50]. Поэтому $\tilde{\ell}\,(\mathbf{a}) = \ell\,(\mathbf{a})$.

Отметим, что в построении координатной прямой со свойством взаимно однозначного соответствия между множеством её точек и множеством действительных чисел мы опирались на геометрическую теорему Фалеса, архимедово свойство отрезков (аксиома Архимеда, Евдокса) и свойство непрерывности прямой (аксиома Кантора).

Литература

[1] Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и математический анализ. 10 кл.: учеб. для углубл. изуч. математики в общеобразоват. учреждениях. - 13-е изд. - М.: 2006.

[2] Дадаян А.А. Математика: Учебник. - 2-е издание. - М.: 2007.

[3] Дубнов Я.С. Измерение отрезков. - М.: 1962.

[4] Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. и др. Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений. - 20-е изд. - М.: 2011.

[5] Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень). - М.: 2009.

[6] Мордкович А.Г., Солодовников А.С. Математический анализ: Учеб. для техникумов. - М.: 1990.

[7] Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни. - 8-е изд. - М.: 2009.

[8] Цукерман В.В. Действительные числа и основные элементарные функции. - М.: 2010.

[9] Цукерман В.В. К вопросу о профессиональной компетентности учителя математики // Математика (Первое сентября). - 2012. - № 1.

[10] Шабунин М.И., Прокофьев А.А. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 10 класса. - М.: 2007.

Морозкина Мария Геннадьевна,
аспирантка кафедры математики и физики
МГГУ имени М. А. Шолохова.

E-mail: muromel@mail.ru

Цукерман Виталий Владимирович,
Профессор кафедры Математики и физики
МГГУ им. М. А. Шолохова.

E-mail: tsuckerman@front.ru

К столетию Второго Всероссийского съезда преподавателей математики

Р. З. Гушель

В статье рассказано о ситуации в российском образовании начала XX века, вызвавшей необходимость проведения съездов учителей, в частности, учителей математики; об организации и проведении Второго Всероссийского съезда преподавателей математики. В приложениях приведены Положение о Втором съезде и обращение его Оргкомитета, а также речь председателя Оргкомитета Б. К. Млодзеевского.

Начало XX века во многих странах было ознаменовано стремлением к обновлению и усовершенствованию среднего образования. Классическая гимназия, существовавшая в течение многих десятилетий, изживала себя. Развитие промышленности требовало от выпускника средней школы достаточно серьёзной подготовки по естественным и прикладным наукам. Это привело к необходимости пересмотра учебных планов средних учебных заведений но многим предметам, в частности, или даже в первую очередь, по математике. В 1908 году на IV Международном математическом конгрессе в Риме была создана Международная комиссия по преподаванию математики (МКПМ) для координации и обмена опытом педагогов разных стран в деле постановки математического образования. Возглавил МКПМ выдающийся немецкий математик **Феликс Клейн** (1849-1925) — автор знаменитой Меранской программы в Германии (1905), ставившей во главу угла при обучении математике *"развитие пространственного восприятия и воспитание привычки к функциональному мышлению"*. В ближайшие после этого годы в разных странах (поначалу их было 18) стали создаваться национальные подкомиссии, в работе которых приняли участие такие известные учёные-математики, как Г. Кастельнуово и Ф. Энриквес (Италия), П. Аппель, Г. Дарбу и Э. Борель (Франция) и другие. Русскую национальную подкомиссию возглавил академик Н. Я. Сонин (1849-1915). МКПМ проводила регулярные съезды, в том числе, в Брюсселе (1910), Милане (1911), на V Международном математическом конгрессе в Кембридже (1912). Последний перед I мировой войной съезд МКПМ прошёл в апреле 1914 года в Париже.

Проведение этих съездов, в которых Россия активно участвовала, а также всё более осознаваемая необходимость реформ привели отечественных математиков-педагогов к мысли об организации Всероссийских съездов преподавателей математики. Первый такой съезд открылся в Санкт-Петербурге 27 декабря 1911 года (по старому стилю) и продолжался до 3 января 1912 года. Инициатором его проведения выступил Отдел математики Педагогического музея военно-учебных заведений. Ровно через два года в Москве прошёл Второй всероссийский съезд преподавателей математики, организацию которого, по поручению I съезда, взял на себя Московский математический кружок. Третий съезд не состоялся из-за войны.

В этом году исполняется 100 лет со времени проведения II Всероссийского съезда преподавателей математики. На наш взгляд, стоит вернуться к его материалам, чтобы убедиться, что многие проблемы, так же как и многие открытия последних лет в области школьного дела, не такие уж и новые. У педагогов прошлого есть чему поучиться.

Председатель Московского математического кружка, заслуженный профессор Московского университета **Б. К. Млодзеевский** возглавил Оргкомитет съезда. Его товарищами (заместителями) стали С. М. Зегер и профессор Московского университета А. К. Власов. В составе

Оргкомитета было ещё 30 человек, в том числе А.В.Васильев (СПб.), Ф. И. Егоров, В. Ф. Каган (Одесса), Л. К. Лахтин, К. Ф. Лебединцев. Д. М. Синцов (Харьков), С. П. Фиников. Заседания съезда проходили в помещении Московских Высших женских курсов на Девичьем поле (район современных Лужников). Председателем съезда был избран генерал-лейтенант **М. Г. Попруженко**.

Михаил Григорьевич Попруженко (1854-1917) окончил Михайловское артиллерийское училище и с середины 80-х годов служил по военно-учебному ведомству, преподавал математику. С 1898 по 1905 год он — директор Киевского кадетского корпуса, а в январе 1905 года его перевели в Главное управление военно-учебных заведений. В последующие годы именно там проходила его служба. М. Г. Попруженко — автор учебника по анализу бесконечно малых для кадетских корпусов.

На I Всероссийском съезде преподавателей математики в Санкт-Петербурге в 1912 году он был товарищем председателя Оргкомитета.

Положение о Втором съезде и обращение его Оргкомитета помещены в Приложении 1.

На съезде были организованы две секции А и В. Помимо секционных заседаний, проходили соединённые заседания двух секций, а также общие собрания; на них было сделано 7 докладов, по которым не проводились прения. В соединённых заседаниях было заслушано и обсуждено 14 докладов. Кроме того, состоялось 29 секционных докладов и сообщений [1].

В работе съезда участвовало более 1000 человек, среди которых были как учёные-математики, так и преподаватели средних учебных заведений разных городов Российской Империи. Москвичи, разумеется, доминировали. Но на съезд приехали делегаты не только из Санкт-Петербурга и близких к Москве городов (Владимира, Твери, Ярославля и др.), но и издалека. Среди участников съезда были педагоги Астрахани, Варшавы, Екатеринослава, Казани, Киева, Нижнего Новгорода, Омска, Перми, Риги, Саратова, Тифлиса и многих других городов.

Из докладчиков отметим С. Н. Бернштейна, В. В. Бобынина, А. К. Власова, Н. А. Извольского, А. Р. Кулишера, П. А. Некрасова, Д. М. Синцова, И. И. Чистякова (этот список далеко не полон).

Открылся съезд приветственной речью председателя Оргкомитета Б. К. Млодзеевского. Он, в частности, сказал: "Всякого, кто наблюдает русскую общественную жизнь, поразит то, какое значение получили в ней за последнее время съезды. Чтобы это видеть, достаточно отметить, что в настоящее время в Москве и в Петербурге работает одновременно не менее шести съездов разного рода, из которых три посвящены... вопросам научно-учебным и педагогическим..." Далее, говоря о математике, докладчик отметил: "...В последние десятилетия в математике сделаны такие открытия, которые не только изменили коренным образом наши воззрения по целому ряду основных вопросов, но и вызвали в связи с этим коренной переворот в методике математики... Сознание необходимости в коренном пересмотре всей постановки преподавания математики в средней школе вызвало в ряде стран движение в пользу такого пересмотра..." (Полный текст речи Б. К. Млодзеевского помещён в Приложении 2).

За речью председателя Оргкомитета последовали приветствия съезду Министерства народного просвещения (П. А. Некрасов), директора Московских высших женских курсов С. А. Чаплыгина, декана физико-математического факультета Московского университета профессора Л. К. Лахтина и представителей ряда других организаций.

В тот же день были сделаны два доклада: Д. М. Синцовым: "О деятельности Международной комиссии по реформе преподавания математики" и А. К. Власовым: "Какие стороны элементарной математики представляют ценность для общего образования"[1]. В журнале "Математическое образование" как органе Московского математического кружка, публиковались и

[1] Доклад А. К. Власова был перепечатан в журнале "Математическое образование", № 3 за 1997 год.

подготовительные материалы к съезду, и многие из сделанных там докладов. Немало материалов съезда было опубликовано в журнале “Вестник опытной физики и элементарной математики”, который в те годы редактировал В. Ф. Каган — впоследствии известный отечественный геометр, профессор Московского университета.

Не имея возможности обсудить все 50 сделанных на съезде сообщений, остановимся на некоторых из них. Три названные выше доклада были сделаны в общем собрании участников съезда. Остановимся подробнее ещё на одном — докладе приват-доцента (впоследствии — профессора) Московского университета **А. И. Бачинского** “Запросы преподавателя физики в области математики”.

Докладчик рассматривает “две ветви физики”, которые он называет физикой Фалеса и физикой Пифагора. Теперь мы их называем соответственно экспериментальной и теоретической физикой.

Для физики Фалеса, по мнению А. И. Бачинского, большое значение имеют приближённые вычисления, которых в школе того времени практически не было. Он отметил также: “...Весьма желательно, чтобы ученики в курсе математики возможно раньше освоились с идеей функциональной зависимости между двумя величинами, с методом графического изображения такой зависимости” [2]. Здесь речь идёт о физике Фалеса.

Переходя к другой ветви, автор пишет: “Введение основ анализа бесконечно малых в курс общеобразовательной средней школы есть дело назревшей необходимости. В самом деле, нельзя дать правильного определения скорости движения точки без того, чтобы не подойти вплотную к понятиям дифференциала и производной... Понятия дифференциала и производной так важны, так глубоки, и в то же время так просты, так жизненны... что лишенная их общеобразовательная школа в XX веке может не удивлять нас только в силу застарелой привычки. То же надо повторить, конечно, и о понятии интеграла...” [там же].

Предлагая исключить из курса математики некоторые устаревшие, по его мнению, разделы, автор рекомендует вместо них ввести элементы теории вероятностей.

Вообще, вопросам изучения в средних учебных заведениях элементов аналитической геометрии и анализа бесконечно малых на съезде уделялось большое внимание. В соединённых заседаниях секций этим вопросам были посвящены доклады М. Г. Попруженко, Д. М. Синцова и С. Н. Бернштейна. Остановимся на докладе **М. Г. Попруженко** “О курсе анализа в средней школе”. По нашим сведениям, целиком этот доклад нигде не публиковался, но в “Дневнике Второго всероссийского съезда преподавателей математики” [3] приведено изложение этого выступления. Укажем некоторые его фрагменты.

“Доклад имеет целью выяснение тех результатов, которые достигнуты в русской средней школе по изучению анализа за последние 6-7 лет. Материалом для этого выяснения служат как личные наблюдения докладчика, так и выводы из анкет, произведённых в кадетских корпусах, в реальных училищах (проф. К. А. Поссе) и в Кавказском учебном округе... Выясняется, что положение анализа в кадетских корпусах совершенно нормально... В реальных училищах основные методы анализа усваиваются не вполне удовлетворительно, а на первый план выдвигается дифференцирование и интегрирование. Такое положение анализа в реальных училищах объясняется: a) оторванностью анализа от общего курса математики реальных училищ; b) многопредметностью математического курса 7-го класса реальных училищ; c) несоответствием времени, назначенного на анализ, с объёмом этого курса... Другим существенно важным выводом из произведённых анкет является утверждение, что курс анализа не заключает в себе ни одной статьи, затрудняющей учеников или им не доступной. Не вполне благоприятные результаты изучения анализа объясняются не качествами его, а теми ненормальными условиями, в которые он поставлен...

Введение анализа в курс средней школы является высокоценным приобретением этой школы не только с математической, но и с общеобразовательной стороны, но для правильной культивировки нового отдела необходимы полное внимание и забота гг. преподавателей" [3, с. 173-174].

Большинство съезда согласилось с необходимостью введения элементов высшей математики в среднюю школу, что и было отмечено в резолюциях съезда (Резолюции и II, и I съездов преподавателей математики помещены в нашей статье [4, с.154-159].)

На одном из секционных заседаний выступил петербургский педагог А. Р. Кулишер. Тема его доклада "Идея движения в современной геометрии и область её применения в курсе средней школы".

Докладчик рассмотрел три подхода к понятию движения в геометрии: динамический, кинематический (названия автора) и групповой. Говоря о последнем из них, он сказал: "Мы переходим теперь к наиболее трудному вопросу, а именно к выяснению по отношению к средней школе возможности или невозможности применения движения, рассматриваемого явно или неявно с точки зрения теории группы преобразований" [5, с.299].

Опираясь, преимущественно, на французский учебник К. Бурле, написанный именно в таком ключе и предназначенный для средней школы, докладчик использовал суждения и других учёных и педагогов по этому вопросу.

По его мнению, этот раздел подходил лишь для старших классов средней школы, где он "может быть очень ценным завершением занятий по нашему предмету, но отсюда нисколько не следует, что такое как раз завершение (на основе "движения") сколько-нибудь обязательно" [5, с.316].

Построить же систематический курс геометрии в средней школе на основе идеи групп преобразований А. Р. Кулишер считал невозможным из-за его сложности для учащихся.

Помимо докладов, посвящённых введению в среднюю школу новых для неё разделов, обсуждалось на съезде и преподавание традиционных вопросов. Среди выступлений этого рода отметим следующие: **Воскресенский М.** О развитии представлений о соотношениях в пространстве; **Александров А.Г.** Глава об иррациональных числах в средней школе; **Волковский Д.Л.** Значение картинок для первоначального обучения арифметике; **Панков П.Г.** Измерительный метод при начальном курсе арифметики.

Д. Д. Галанин выступил с докладом, посвященным влиянию переводных экзаменов на успешность в математике, а **К. Ф. Лебединцев** посвятил своё сообщение вопросу о способах оценки и контроля познаний учащихся. В двух докладах (проф. **Н. Н. Салтыкова** и проф. **Д. М. Синцова)** обсуждались проблемы подготовки преподавателей математики.

Д. Д. Галанин в своём выступлении, в частности, сказал: "...Всё современное обучение по математике построено на контроле учителя начальником, ученика учителем. Истинно педагогические вопросы стоят на втором плане, о них мало кто думает. Главный же вопрос состоит в том, что весь учебный материал необходимо пересмотреть и распределить в курсе математики совершенно иначе. Пусть в основу будет положена самодеятельность ученика, его личный опыт, его интерес, и тогда без всяких экзаменов, без всяких особо принудительных мер ученики будут знать и много лучше, и много прочнее... Но для этого первое и главное условие, чтобы изучаемый ими материал был доступен им по возрасту" [5, с. 186].

Выше были отмечены далеко не все вопросы, обсуждавшиеся на съездах. Из его резолюций отметим только одну.

" 2) ...Съезд признаёт крайне желательным осуществление следующих мер:

а) чтобы педагогическим советам было предоставлено право разрешать преподавателям отступать от существующих программ под условием представления проектов изменений на утверждение совета;

б) чтобы осуществление пересмотра программ и плана преподавания математики в средней школе было произведено в целом, а не путём частичных изменений, при выработке такого плана необходимо не только внесение новых отделов, но и освобождение курса от отделов, утративших своё значение;

в) чтобы преподавание математики в женских гимназиях было организовано на одинаковых началах с мужскими;

г) чтобы к совместной работе по выработке плана и программы преподавания привлекались представители науки и преподаватели средней школы" [4, с. 158].

Материалы съезда (к сожалению, не все) были опубликованы в 1915 году. Издание называлось "Доклады, читанные на II Всероссийском съезде преподавателей математики в Москве" [5]. Кроме того, накануне съезда и в период его работы издавался "Дневник II Всероссийского съезда преподавателей математики" [3].

После 1917 года интерес к вопросам среднего образования принял совсем другое направление. История дореволюционной средней школы долгое время была вне поля зрения отечественных педагогов. Однако, и в советское время появлялись работы указанной тематики. Так, в Минске в 1968 году вышла книга Н. В. Метельского "Очерки истории методики математики", целиком посвященная I и II Всероссийским съездам преподавателей математики. Объём этого издания составляет 340 страниц, библиографический список содержит 245 названий.

Даже такой беглый обзор материалов II Всероссийского съезда преподавателей математики позволяет сделать вывод о том, что и сто лет назад педагоги пытались решать и решали многие из тех вопросов, которые актуальны для современной школы. Это касается и обновления содержания образования, и межпредметных связей математики с другими учебными дисциплинами и многих других вопросов. Изучение документов того времени может быть полезным для решения проблем сегодняшнего дня.

Приложение 1

От Организационного комитета 2-го Всероссийского съезда преподавателей математики [3, с.1-4]

На первом Всероссийском съезде преподавателей математики, состоявшемся в Санкт-Петербурге в декабре 1911 – январе 1912 года, было постановлено созвать 2-й Всероссийский съезд преподавателей математики во время рождественских вакаций 1913 – 1914 года, и выражено пожелание, чтобы организацию этого Съезда принял на себя Московский математический кружок. Во исполнение этого постановления, весною 1912 года, особо составленным Организационным Комитетом был разработан проект Положения о 2-м Всероссийском съезде преподавателей математики и возбуждено ходатайство о его разрешении пред Министерством Внутренних Дел. Прошение о разрешении Съезда подписали: заслуженный профессор Московского Университета К. А. Андреев; член от Мин. Нар. Просвещения в Московском губернском училищном совете, бывший директор Моск. учительского института Ф. И. Егоров; бывший окружной инспектор Моск. Учебного Округа С. М. Зегер; ординарный профессор, декан физико-математического факультета Моск. Университета Л. К. Лахтин и заслуженный профессор Б. К. Млодзеевский.

Осенью 1912 года последовало разрешение на устройство 2-го Съезда и одобрено Положение о нем, выработанное Организационным Комитетом.

Положение о 2-м Всероссийском съезде преподавателей математики

§ 1. 2-й Всероссийский съезд преподавателей математики созывается в Москве Организационным комитетом при ближайшем участии Московского математического кружка.

§ 2. Съезд открывается 27 декабря 1913 года и продолжается по 3 января 1914 года включительно.

§ 3. Съезд имеет целью:

1) обсуждение научных вопросов, имеющих отношение к элементарной математике;

2) рассмотрение современной постановки преподавания математики в учебных заведениях различных типов, преимущественно — в средних;

3) обсуждение вопросов о желательной постановке преподавания математических наук;

4) обсуждение вопросов о методах и приемах преподавания математики и соприкасающихся с нею наук и о способах проверки знаний учащихся;

5) обсуждение вопроса о подготовке преподавателей математики.

§ 4. Для непосредственного заведования делами съезда Организационный комитет избирает из своей среды председателя, товарищей председателя, секретарей и казначея. В случае надобности Организационный Комитет может пополнить свой состав новыми членами.

§ 5. Организационный комитет устраивает секции Съезда по отдельным группам вопросов и избирает из своей среды заведующих этими секциями.

§ 6. Членами Съезда могут быть профессора, преподаватели и преподавательницы математических наук; члены математических и педагогических обществ и кружков, а также лица, заявившие себя печатными трудами в области математики и общей педагогики. Все прочие лица, интересующиеся деятельностью Съезда, могут вступать в число его членов, но без права решающего голоса.

§ 7. Лица, желающие вступить в число членов Съезда, заявляют об этом Организационному комитету, прилагая членский взнос в размере трех рублей.

§ 8. При Съезде организуется выставка учебных и наглядных пособий по математике. Лица, не состоящие членами Съезда, допускаются к осмотру выставки за особую плату.

§ 9. Лица, желающие сделать доклады, заявляют об этом в Организационный комитет не позже 1-го декабря 1913 года с приложением или подлинных докладов, или краткого изложения их содержания. Не доставленные к этому сроку сообщения могут быть прочитаны только с особого разрешения Организационного комитета. Порядок и продолжительность докладов устанавливаются Организационным комитетом.

§ 10. Организационный комитет выпускает дневник Съезда. Для редактирования изданий Съезда Организационный комитет избирает особое лицо.

§ 11. Организационный комитет, на основании постановлений как общих, так и секционных собраний Съезда, вносит в заключительное общее собрание проекты резолюций по вопросам, обсуждавшимся на Съезде, для голосования. Соответствующие резолюции принимаются или отвергаются без прений простым большинством голосов.

В состав Организационного Комитета вошли следующие лица:

Алферова А.С.	Долгушин П.А. (Киев)	Млодзеевский Б.К.
Баранов П.А.	Егоров Ф.И.	Модестов А.Я.
Берг М.Ф.	Жегалкин И.И.	Мордухай-Болтовской Д.Д.
Бобынин В.В.	Зегер С.М.	Парфентьев Н.Н. (Казань)
Васильев А.В. (Спб.)	Извольский Н.А.	Писарев В.П.
Виноградов С.И.	Каган В.Ф. (Одесса)	Поляков А.П.
Власов А.К.	Лахтин Л.К.	Попруженко М.Г. (Спб.)
Волковский Д.Л.	Лебель Л.И.	Синцов Д.М. (Харьков)
Волков А.А.	Лебединцев К.Ф.	Фиников С.П.
Гусев Ф.В.	Мазинг К.К.	Чулицкий Н.Н.
Дмитровский А.А.	Макшеев З.А. (Спб.)	Эрн Ф.А. (Рига)

Для непосредственного заведования делом устройства Съезда Организационным комитетом избрано бюро Съезда в следующем составе:

Председатель: проф.	Б. К. Млодзеевский
Товарищи председателя:	С. М. Зегер, проф. А. К. Власов
Казначеи:	М. Ф. Берг, А. Я. Модестов
Секретари:	А. А. Волков, А. П. Поляков, С. П. Фиников, И. И. Чистяков

Адрес бюро Организационного комитета 2-го Всероссийского съезда преподавателей математики:
Москва, М. Знаменский пер., Реальное училище К. К. Мазинга.

Приложение 2

Речь Председателя Организационного комитета Б. К. Млодзеевского [3, с.25-29]

Как председатель Организационного комитета объявляю открытым Второй всероссийский съезд преподавателей математики. От имени Организационного комитета сердечно приветствую господ членов съезда и благодарю наших гостей, отозвавшихся на наши приглашения и почтивших своим присутствием настоящее собрание.

Ровно два года тому назад, 27-го декабря 1911 года в Петербурге открылся, Первый съезд преподавателей математики. Он был обязан своим созывом главным образом кружку педагогов и математиков, объединявшихся около Педагогического музея военно-учебных заведений. Успех съезда, как по числу участников, так и по результатам его занятий был блестящий, и тогда же на Московский математический кружок было возложено поручение организовать в Москве второй Съезд преподавателей математики в декабре 1913 года. Кружок немедленно выделил из своего состава Организационный комитет, который и является сегодня перед вами, исполнив возложенное на него поручение.

Организационный комитет считает долгом отметить с глубокою признательностью то сочувствие, которое он встретил со всех сторон. Как только положение о Съезде получило утверждение, Министерство Народного Просвещения разрешило подведомственным ему учебным заведениям командировать на Съезд своих преподавателей с назначением им денежных пособий. Министерство торговли и промышленности назначило Съезду пособие в 500 рублей. Такое же пособие постановила назначить Съезду Московская Городская Дума.

Благодаря сочувствию лиц, заведующих музеями и другими правительственными и общественными учреждениями, а также и многих частных лиц, явилась возможность широко организовать для членов съезда экскурсии, на которых они получат возможность познакомиться с некоторыми из образцовых школ Москвы, а также с самим городом и его достопримечательностями. Наконец, мы обязаны благодарностью тем начальникам учебных заведений, которые предоставили членам Съезда у себя помещения.

Всякого, кто наблюдает русскую общественную жизнь, поразит то, какое значение получили в ней за последнее время съезды. Чтобы это видеть, достаточно отметить, что в настоящее время в Москве, и в Петербурге работает одновременно не менее шести съездов разного рода, из которых три посвящены особенно близким нашему съезду вопросам научно-учебным и педагогическим. Быстрый рост съездов наблюдается не только у нас; он существует везде. Этот рост представляет естественное следствие значительного увеличения числа лиц, работающих в различных областях человеческой деятельности, для них съезды уже давно служат незаменимым средством более широкого и правильного общения на почве их профессиональных интересов. Достаточно припомнить колоссальный рост Британской Ассоциации, существующей уже более восьмидесяти лет, Съезды Общества германских естествоиспытателей и врачей с их 90-летним существованием и наши Съезды русских естествоиспытателей и врачей, возникшие в 1867 году.

Если таким образом во всех странах наблюдается рост съездов, то в России были для этого и особые причины. Обширность страны, сравнительно слабое развитие городской жизни и связанная с этими двумя условиями большая разъединенность культурных деятелей делает у нас съезды еще более важным фактором общественной жизни, чем у наших западных соседей, и нет ничего удивительного, что при том подъёме общественного самосознания, какой мы наблюдаем в последнее время, число съездов всякого рода достигло весьма значительных размеров.

Лицам, не стоящим близко к преподаванию математики, легко может показаться, что преподаватели математики всего менее нуждаются в общении.

Обыкновенно думают, что уже давно в геометрии едва ли не с Евклида, содержание элементарной математики определилось с такою ясностью и облеклось в такие точные и строгие формы, что преподавателям математики остается только вести своих учеников по прямой и ровной дороге к совершенно точно намеченной цели. К нашему величайшему счастью, на самом деле это далеко не так. К счастью потому, что если бы это было верно, то это значило бы, что математические науки, как учебный предмет, умерли, что изучение их в школах имело бы своим основанием не сознание их огромного и непрерывно растущего значения для духовных и материальных успехов человечества, а только почтительное уважение к их прошлому. Математики знают, что на самом деле это совсем не так. Именно, в последние десятилетия в математике сделаны такие открытия, которые не только изменили коренным образом наши воззрения по целому ряду основных вопросов, но и вызвали в связи с этим коренной переворот в методике математики. Вот несколько небольших примеров. В геометрии теперь, трудами главным образом итальянских и немецких ученых, вопрос о системе геометрических аксиом и о их взаимоотношениях можно считать окончательно выясненным. Вместе с этим встал на очередь и подвергся тщательному изучению вопрос о роли логики и интуиции в геометрии. С другой стороны, в области арифметики и анализа мы имеем такие грандиозные приобретения, как учение о трансфинитных числах и о бесконечных множествах, устанавливающие совершенно новые точки зрения на природу числа и величины. Вместе с тем идея преобразования, как основной операции, обнимающей не только математические, но и другие, более широкие отношения, проникла во все отделы нашей науки и сделалась важнейшим основанием систематизации. Все эти приобретения и многие другие, не менее значительные, на которых я не имею возможности здесь останавливаться, заставили пересмотреть многие положения, казавшиеся ранее совершенно общими и бесспорными. Так, мы теперь знаем, что часть не всегда меньше целого, а может быть и равной ему, что во всем пространстве столько же точек, сколько и на самом малом отрезке прямой, что возможна непрерывная кривая линия, занимающая собою целый квадрат и т. д. И надо заметить, что все эти невероятные вещи не суть проявления математического декадентства; напротив, они выражают собою крупные успехи в области математического умозрения, сравнимые с наиболее значительными приобретениями предшествующих времен.

Вполне естественно, что успехи в области основных вопросов математики отразились и на постановке её преподавания. Выяснилось, что точность и строгость выводов, считавшаяся особенностью геометрии, с одной стороны не обладает тою степенью совершенства, какая ей приписывалась; что основные положения этой науки требуют такого сложного анализа, какой совершенно не доступен учащимся; отсюда выяснилась необходимость того, что при преподавании геометрии интуиции должно быть отведено значительно большее место, чем это делалось до сих пор.

Наоборот, в области алгебры, явилась возможность изложить более строго основные вопросы учения о величинах, а также и многие другие главные отделы. Рядом с этим успехи естествознания и техники выдвинули вопрос о введении в среднюю школу вопросов, изучаемых теперь обыкновенно в высшей школе: стало очевидным, что в настоящее время основные понятия исчисления бесконечно малых, аналитической геометрии и теории вероятностей должны быть достоянием каждого образованного человека. Вместе с тем явилась необходимость пересмотреть сами объем и приёмы преподавания, чтобы воспользоваться новыми приобретениями науки, очистить программы от накопившегося за прежнее время, устаревшего и сделавшегося ненужным материала и заменить его более соответствующим современным условиям.

Так, в области геометрии вопросы о пропедевтическом курсе геометрии, о слиянии планиметрии со стереометрией стоят на очереди и ждут своего решения. Сознание необходимости в коренном пересмотре всей постановки преподавания математики в средней школе вызвало в ряде стран движение в пользу такого пересмотра. Особенно ярко выразилось это движение в Германии, где под влиянием знаменитого геттингенского профессора Клейна, так называемое Reformbewegung уже привело к положительным результатам. Программы и постановка преподавания математики в государствах германского союза постепенно изменяются в духе новых требований. Наконец нельзя не отметить учреждение на четвертом Съезде математиков в Риме международной комиссии по преподаванию математики, которой было поручено представить к следующему съезду в 1912 году доклад о современных течениях в преподавании математики в различных странах. Эта комиссия образовала подсекции в различных странах. В частности, такая подсекция работает и в России. У нас потребность общения математиков вызывается еще разобщением преподавателей между собой и с высшей школой, так что съезд в столичном городе поможет разобраться в массе может быть и простых обыденных вопросов, возникающих при преподавании и выяснении истин математики.

Из того, что было здесь сказано, можно видеть, что в вопросах школьной математики под тихою, на взгляд постороннего зрителя, поверхностью идет живая и горячая работа.

Настоящее собрание показывает, что среди наших преподавателей немало лиц, которые не остановились ни перед немалыми денежными затратами, ни даже перед отказом от отдыха, столь необходимого в трудном и ответственном деле, чтобы своим участием в трудах съезда помочь успеху преподавания математики в наших школах. Позвольте же мне закончить моё приветствие Съезду пожеланием полного успеха 2-му Всероссийскому съезду преподавателей математики, на пользу и благо нашей школы и дорогой нам всем науки!

Организационный комитет предложил избрать председателем Съезда товарища председателя 1-го Всероссийского съезда преподавателей математики Михаила Григорьевича Попруженко, так много потрудившегося для усовершенствования постановки преподавания математики в нашей школе.

В настоящее время М. Г. Попруженко находится в Москве, но не может присутствовать в настоящем собрании. В виду этого Организационный комитет предлагает избрать председателем настоящего собрания профессора Харьковского университета Николая Николаевича Салтыкова.

Это предложение было встречено собранием аплодисментами, и дальнейшее заседание происходило под председательством Н. Н. Салтыкова, который благодарил собрание за честь избрания и пожелал Съезду успеха в деле обсуждения вопросов преподавания.

Затем следовали приветствия открывшемуся Съезду:

Первым приветствовал Съезд представитель Министерства народного просвещения, член Совета министра нар. просв. П. А. Некрасов в следующих выражениях.

Г. Министр нар. просвещения выразил свое внимание 2-му Всероссийскому съезду преподавателей математики не только своим содействием, указанным в речи г. Председателя Орг. комитета и предположенным денежным пособием в 1000 руб. из остатков по смете Министерства, но и командированием представителя Министерства для участия в занятиях Съезда. Высокая честь этого представительства выпала на мою долю, и я имею удовольствие от лица Министерства приветствовать членов Съезда и пожелать их трудам успеха и плодотворных результатов, как в разработке докладов, так и в смысле подъема того настроения, которое необходимо преподавателям для трудной и многополезной работы на местах, в обстановке учебных заведений.

Директор Московских высших женских курсов С. А. Чаплыгин приветствовал Съезд от имени Совета и Попечительного совета Курсов.

От имени Совета и Попечительного совета Московских высших женских курсов горячо приветствую 2-й Всероссийский съезд преподавателей математики и от всего сердца желаю ему успеха в широких и важных задачах, стоящих перед ним. Считаю особым счастьем и особой для себя честью приветствовать Съезд в стенах нашего дорогого учреждения. Добро пожаловать, господа!

Декан физико-математического факультета Императорского московского университета проф. Л. К. Лахтин приветствует Съезд от имени физико-математического факультета:

От имени физико-математического факультета Императорского московского университета, как декан, считаю своим приятным и почетным долгом приветствовать 2-ой Всероссийский съезд преподавателей математики. Тесное единение высшей и средней школы есть залог плодотворной деятельности обеих. Особенно приятно видеть этот съезд в Москве, всегда ярко отражавшей мысли и чувства нашей родины. Пусть занятия съезда послужат началом дальнейшей дружной совместной работы русских преподавателей на благо обширной России!

Генерал Дм. Э. Теннер приветствует Съезд от Педагогического музея военно-учебных заведений.

3 года тому назад в стенах Педагогического музея возникла мысль о созыве I Всероссийского съезда преподавателей математики, конечно, возникла она не вполне самостоятельно, а под давлением того движения, которое тогда совершалось на западе.

Наш Педагогический музей кончает 50 летнюю годовщину своего существования. В течение всего этого периода времени главной задачей музея была разработка и усовершенствование методов преподавания всех предметов в средней школе, в том числе и математики. Естественно поэтому, что мысль о созыве I Всероссийского съезда преподавателей математики возникла в отделе математики музея.

I съезд собрался, и дело, начатое в музее, не заглохло, чему свидетельством служит нынешнее собрание.

Позвольте же мне, как представителю музея, приветствовать всех собравшихся на II съезде и пожелать успеха и плодотворной работы.

О. В. Клефнер приветствовал съезд от имени Одесского отделения Императорского русского технического общества.

Г. П. Кузнецов приветствовал Съезд от имени Новочеркасского математического кружка.

Затем Председатель Организационного комитета Б. К. Млодзеевский огласил приветственные телеграммы от Попечителя Московского учебного округа, от ректора Императорского московского университета, от и. д. Московского городского головы, от Директора Московского коммерческого института, от Совета Городского народного университета имени Шанявского, от члена Московской городской управы г. Пузыревского и от Математического кружка слушательниц Московских высших женских курсов.

По возобновлении заседания председатель Организационного комитета доложил письменное приветствие Съезду от председателя Организационного комитета 1-го Всероссийского съезда преподавателей математики З. А. Макшеева.

По предложению Организационного комитета посланы телеграммы:

1) генералу-лейтенанту З. А. Макшееву.

“2-й Всероссийский съезд преподавателей математики искренне приветствует глубокоуважаемого председателя Организационного комитета первого Съезда и крайне жалеет, что не видит Вас в своей среде”.

2) 1-му Всероссийскому съезду преподавателей физики в С.Петербурге.

“2-й Всероссийский съезд преподавателей математики приветствует своего дорогого собрата и желает ему полного успеха”...

Литература

[1] Чистяков И.И. $2^{\text{й}}$ Всероссийский съезд преподавателей математики // Математическое Образование. - 1914. - №1. - С.48-50.

[2] Бачинский А.И. Запросы преподавателя физики в области математики // Математическое Образование. - 1914. - №2. - С.86-87.

[3] Дневник II Всероссийского съезда преподавателей математики. М., 1913-1914.

[4] Гушель Р.З. По материалам Всероссийских съездов преподавателей математики 1911 и 1913 годов // Математическое Образование. - 1999. - №2-3. - С.150-164.

[5] Доклады, читанные на $2^{\text{м}}$ Всероссийском съезде преподавателей математики в Москве. - М., 1915.

Гушель Ревекка Залмановна,
г. Ярославль, научный сотрудник отдела
Истории математики и математического образования
Научно-практического центра
“Математическое просвещение”.

E-mail: gushelr@yandex.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.npcmapro.ru   Раздел: Партнеры, журнал “Математическое образование”.

Журнал в электронном виде размещается формате PDF в архиве по указанной ссылке.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2014 год (включая стоимость пересылки) – 80 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2014 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 70 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ) и Российском индексе научного цитирования (РИНЦ).

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >