ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год шестнадцатый

№ 3 (63)

июль - сентябрь 2012 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 3 (63), 2012 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2012 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.09.2012 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 4,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (63), июль – сентябрь 2012 г.

Содержание

О ненасильственном обучении

А. Я. Канель-Белов, Р. Явич

Работа представляет собой заметки дискуссионного характера, затрагивающие некоторые мировоззренческие вопросы преподавания, в частности, математики, а именно, свобода воли и свобода выбора, этические аспекты преподавания, либерализация обучения и степень принуждения, такие разновидности обоснования, как ссылка на авторитет и т.п.

Каждый думает, что он разбирается в образовании, политике и особенно в философии. Слабость имунной системы приводит, с одной стороны, к коррупции сообщества, с другой стороны — к компрометации соответствующих наук у представителей точных профессий. Между тем, философские или надстратегические рассуждения все же способны принести пользу, а в ряде случаев могут иметь не только стратегическое, но и конкретное преломление.

Одним из центральных мировоззренческих и этических вопросов является вопрос о свободе воли. Этическая оценка может быть применена только к поступку, который человек может и не совершить. Наличие свободы воли позволяет говорить о добре и зле. Одно из теологических объяснений существования зла: Бог, будучи творцом, наделил существа свободой воли (иначе они были бы автоматами). А это означает в том числе этическую свободу, т.е. свободу этического выбора.

На первый взгляд, эти абстракции не имеют значения в конкретных вопросах преподавания.

Прежде всего, если Творец ограничивает свое вмешательство, то мы тем более должны это делать. Заставляя других что-то делать, стоит задумываться над вопросом: а по какому праву? Обычно обоснование вмешательства идет в плоскости "лучше-хуже", но есть и иная плоскость — "вправе – не вправе".

Но какое все это имеет значение при получении конкретного педагогического результата?

Центральным вопросом обучения является вопрос заинтересованности ученика, его активности. Учеба по-настоящему возможна только при заинтересованности и активности самого ученика, что предполагает его собственное волеизъявление. Поэтому говорить об ученике в этом случае только в страдательном залоге неправильно — важно видеть его личность.

Итак, настоящая учеба возможна только при наличии интереса ученика, его активности. Добиться того, чтобы ученикам было интересно — это самое важное.

Интерес же ученика представляет его собственное волеизъявление, его личное отношение к предмету (даже не вполне осознанное) его активность как субъекта, проявление его собственной воли.

Творчество без проявления свободы воли невозможно. Тем самым, настоящее обучение предполагает наличие возможности выбора как у учителя, так и у ученика, без чего невозможно творчество с обеих сторон. В этом принципиальное отличие обучения в школе и на кружке. Один из школьников сказал, что на кружок он приходит сам, а школьный учитель ему навязан. Кружок начинается с того, чем обычно кончается школа — с создания заинтересованности в обучении. Наличие выбора: "выбираю я — выбирают меня" — обеспечивает хорошие отношения между учителем и учениками, иначе они расстаются. Это важно и с точки зрения преподавателя — качество занятий зависит от его отношения к ученикам, он более свободен в общении с ними. То, что можно позволить себе на кружке, нельзя позволить в школе. По-настоящему хорошо только то занятие, которое нравится самому проводящему. Если оно ему не нравится, он не проводит урок.

Наоборот в школе, в случае навязанного общения, отношения могут оказаться хуже, ученики — более агрессивны, нагрузка и требования к личности преподавателя — больше. Зачастую сильный учитель если и не превращается в Цербера, то приобретает его черты. Отрицательные эмоции учителя вызывают соответствующий ответ и наоборот.

Кроме психологической стороны, есть еще сторона содержательная: школьный учитель ограничен программой школы (или, в лучшем случае, необходимостью подготовить в вуз и научить технике работы, которая бывает не всегда приятной.) При этом, однако, легко достичь взаимопонимания с учащимися о целях занятий в смысле внешней необходимости.

Руководитель кружка свободен в выборе занятий, он может выбирать из обширного материала самое красивое. Одна из целей кружка — воспитание эстетики и культуры общения.

Учитель может использовать гуманитарные отступления, цель которых — показать красоту идеи, предмета.

Пример. Почему артикль “a” с множественным числом не употребляется?

Посмотрим откуда он произошел? “A ball” — мяч. Теперь найдем слово, начинающееся с “a”. Например слово “apple”: произнесем “a apple” — не звучно; и так: “an apple”. Что напоминает “an”? (в русском языке и во многих других). Очевидно, “one” — “один”. Итак, “an”, а также “a” произошли от числительного “один”. Теперь ясно, почему нельзя сказать “an apples”.

Мысль можно продолжить: слово “any” (любой) тоже произошло от “one”. Кстати, квантор всеобщности ($\forall$) — перевернутая буква A (а квантор существования $\exists$ — есть перевернутая буква E (Exists)).

А что обычно говорит школьный учитель? “Дети, артикль “a” с множественным числом не употребляется, а если вы это все же сделаете, я вам снижу оценку.”

Здесь принуждение и механичность сигнализируют о недостатке понимания. Одна из проблем изучения языка состоит в том, что мы изучаем временной срез, в то время как язык сформировался в результате некоторого процесса, о котором стоит иметь представление.

Один мой знакомый математик преподавал некоторой народности (я не уточняю детали из соображений политической корректности). Психологической особенностью этой народности было то, что они могли довольно точно текстуально воспроизвести стостраничную книгу после первого прочтения (довольно быстрого). Я ему сказал что его преподавание таким людям имеет мало смысла, и он согласился — воспроизведение было, проку не было. Хорошо, что человеческая психика сопротивляется запоминанию бессмысленного материала (мнемоника представляет собой обман психики через искусственные связи). Достичь объемного механического запоминания можно, но хорошо что это очень трудно сделать. Сопротивление учебе говорит о содержательных вещах. Отсюда важность избегать принуждения.

Несколько лучшая ситуация в матшколах: ученик как правило сам выбирает школу, а зачастую и основного учителя, но выбор делается один раз, да и программные ограничения есть, пусть меньшие, чем в обычной школе. Обучение можно проводить более свободно, чем в обычной школе.

М. А. Бузинер заметил, что сразу переходить к свободе нельзя, так как действуют школьные привычки. Поэтому либерализация и приучение к самостоятельности должны быть постепенными.

Это важно не столько из-за любви к свободе как таковой, сколько для того, чтобы научить людей самих организовывать свою жизнь. Многие школьники гаснут из-за того, что остаются вне компании. Умению самостоятельно жить надо учить, но делать это постепенно. Тогда в не тепличной обстановке они смогут заниматься сами и сами добиваться успехов.

Отметим, что концепция ненасильственного обучения имеет индийское происхождение (вспоминается деятельность махатмы Ганди).

Еще раз отметим, кроме психологической стороны, содержательную сторону: свобода выбора материала позволяет выбирать самое красивое и тем самым воспитывать *научную эстетику.*

В специальной школе ситуация промежуточная между обычной школой и кружком : школьник выбирает школу и зачастую основного учителя, но выбор меньше и больше обязательных требований программы. Многие ученики после спецшколы имеют проблемы социальной адаптации во втузах, что можно связать не только с резкой сменой окружения, слабостью окружающих студентов но и с относительно большей жесткостью в плане выбора ситуации а также тем, что выбор вуза был вызван не внутренними а привходящими обстоятельствами.

В заключение необходимо подчеркнуть, что мы не отрицаем необходимости принуждения; обучать надо теми средствами, которыми умеем, и не собираемся поддерживать так называемую "non-frustration system". Однако за необходимостью прибегать к принуждению иногда стоит недостаточное понимание ситуации. Лучше ее понять и уменьшить принуждение. В то же время ситуации недостаточного понимания неизбежны, и хотя надо стремиться ограничивать принуждение, те или иные его формы являются печальной необходимостью.

Несколько замечаний о логике истины и логике ортодоксии. Здесь представляется уместным затронуть проблемы интеллектуальной свободы, примыкающие к вопросам обучения. Перед тем, как приходить к тому или иному ответственному выводу, следует задуматься над вопросом о средствах получения результата, об обосновании, о том, что считать доказательством, обоснованием, иллюстрацией. Обычные средства обоснования относятся к логике, авторитету или откровению (об откровении говорят мало и мы здесь тоже не затрагиваем эту тему). В действительности основу мышления составляют неосознаваемые средства, и если анализировать только только то, что осознаваемо, мы можем потерять реальное представление о получении выводов. Тем не менее, постараемся обсудить некоторые сознательные средства, а именно, — ссылку на авторитет.

Несмотря на кажущуюся простоту этого понятия, оно довольно коварное. Под апелляцией к авторитету может пониматься разное — от ссылки на уже достигнутые и многократно перепроверенные результаты (шарообразность Земли, существование атомов) до чисто "полицейских вещей" (например, ссылки на на священные тексты, выполняющие роль ограничителей мысли).

Ссылка на авторитет также может быть иллюстрацией или служить целям диагностики. Полезно обратить внимание на появление таких ссылок, они могут сигнализировать о сложности или громоздкости рассуждений. Однако наиболее часто авторитет выполняет полицейскую и одновременно программирующую функцию. Моя собственное критическое мышление — это как бы моя "таможня", а ссылка на авторитет зачастую "провозит контрабанду по дипломатическим каналам". Я не могу относится к подобным мотивам с уважением даже тогда, когда оказывается, что это был груз истины, а провоз его в качестве контрабанды был нужен ради "блага". Все это суть неуважительные причины. Это разговор из серии "вправе – не вправе".

Исходно Евангелия содержат реакцию на формализм (суббота для человека или человек для субботы). Другое дело, что формализм проник и в христианскую религию.

Г. В. Кондаков говорил мне о том, чем верующий отличается от фанатика. Тем, что у верующего сохранятеся чувство ответственности. Подобным образом и бред в психиатрии характеризуется не ложностью (если бредовые убеждения истинны, окружающие их не замечают), а именно механичностью.

С рассуждениями, воспринимаемыми как "логические", тоже не так все просто. Слишком часто они означают просто рационализацию или логическое "обоснование" того, что хочется априори. Примерами такого рода пестрят политические статьи, особенно этим грешит либеральная интеллигенция.

Канель-Белов Алексей Яковлевич,
Московский институт открытого образования,
доктор физ.-мат. наук.

Явич Р.
Ariel University center

Парадоксы первого замечательного предела

И. И. Астахова, В. А. Иванов

Статья представляет собой полемические заметки о строгости математических рассуждений в преподавании математики. Показано, что тем авторам вузовских учебников, которые приводят вывод первого замечательного предела, если они хотят сделать это честно, не следует апеллировать к школьным знаниям, например, формуле площади сектора, поскольку это приводит к порочному логическому кругу. Статья адресована преподавателям и студентам математических специальностей вузов, в основном, педагогических.

В преподавании классического математического анализа важную роль играет всем прекрасно известный так называемый "первый замечательный предел":

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Здесь речь идет о синусе числа x как синусе угла в x радиан, который определяется при помощи процедуры поворота точки $(1;0)$ единичной окружности на указанный угол; правда, само понятие радианной меры угла апеллирует к понятию длины дуги, которое в школьном курсе математики строго не определяется.

На основе первого замечательного предела выводятся формулы для производных тригонометрических функций, которые играют важную роль в дифференциальном и интегральном исчислении. Поскольку это соотношение является одним из основополагающих при построении курса, имеет смысл привести доказательство в интерпретации классических пособий по математическому анализу полностью.

"Доказательство" (кавычки будут объяснены позже), см. [2], с. 116-117.

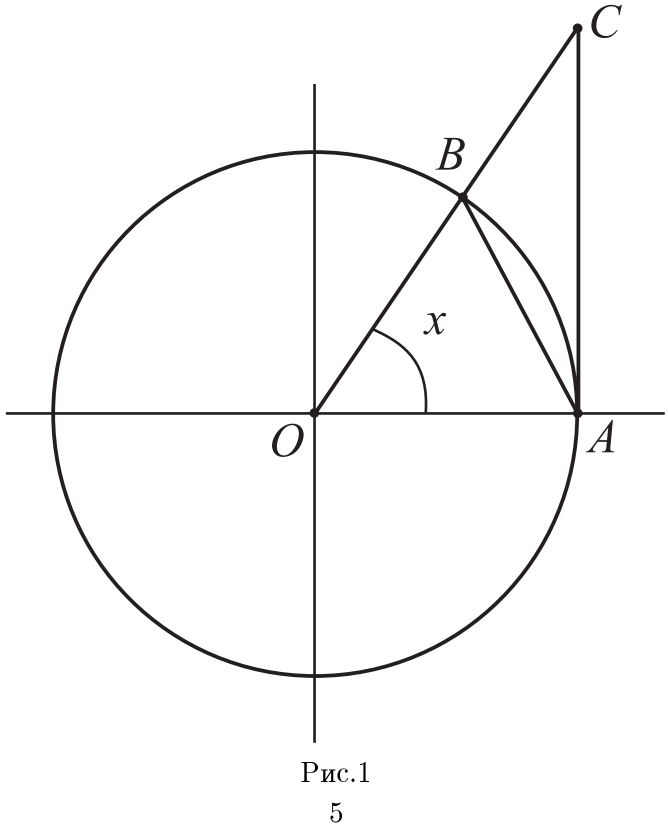


Рис.1

Очевидно, что треугольник $OAB \subset$ сектор $OAB \subset$ треугольник OAC, поэтому их *площади* удовлетворяют цепочке неравенств:

площадь треугольника $OAB <$ площади сектора $OAB <$ площади треугольника OAC.

Если положить длину отрезка OA равной 1, а через x обозначить *радианную меру* угла AOB, так что *длина дуги* AB будет равной x, то цепочка неравенств для площадей примет вид:

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Если разделить эти неравенства на $\frac{1}{2}\sin x$, то получится

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \text{ или } 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x,$$

откуда в силу теоремы о переходе к пределу в неравенствах и *непрерывности* функции $\cos x$ в нуле следует требуемое утверждение.

Опускаем здесь комментарии к выделенным курсивом терминам, которые апеллируют к очевидности геометрического чертежа, еще никак не определенным понятиям площади и длины кривой, о соотношениях площадей вложенных фигур, а также непрерывности функции $y = \cos x$. Разумеется, это неприятно, но, по существу, мелочи.

Не будем пока разбирать и сложный методологический вопрос относительно соответствия действительных чисел и геометрических отрезков, а обратим внимание на более существенный момент.

Итак, *площадь сектора* AOB единичного круга с центральным углом x равна $\frac{1}{2}x$, что равносильно тому, что *площадь круга* радиуса R равна πR^2 (это с учетом того, что все окружности в евклидовой геометрии подобны, что в школьном курсе, разумеется, тоже не доказывается; ни строго, ни вообще каким-либо образом, даже намеком. Например, в геометрии Лобачевского вообще не существует подобных фигур, а площадь круга радиуса R равна[1] $4\pi(sh)^2(\frac{R}{2})$.) Понятно, что в курсе анализа евклидову формулу для площади круга при доказательстве первого замечательного предела обычно тоже не доказывают, апеллируя к школьному курсу (и к Архимеду). У Архимеда же никакой современной теории пределов еще не существует, а *метод исчерпывания*, который приписали ему историки математики, был изобретен лишь в XVII веке Кеплером, и с точки зрения современной науки, разумеется, не является строгим.

Приходится анализировать школьные "доказательства". И вот тут нас как раз и ожидает много "открытий чудных".

Понятно, что основная масса школьных учебников приводит рассуждение типа: "при вписывании правильных n-угольников в круг и при *достаточно большом* n периметр p многоугольника отличается *сколь угодно мало* от *длины окружности*, а $\cos\alpha$ *сколь угодно мало* отличается от единицы, поэтому площади многоугольников *сколь угодно мало* отличаются от величины длины окружности. Согласно определению площади произвольной фигуры это означает, что площадь круга равна πR^2. Теорема "доказана". См. [5], с. 188-189.

Разумеется, подобное "доказательство" рассматривать как строгое доказательство невозможно; тем более, бессмысленно использовать его при доказательстве первого замечательного предела.

В восьмом классе общеобразовательной средней школы сообщается, см. [6], что сумма площадей всех треугольников S' *весьма близка* к площади круга S. Сумма оснований всех треугольников *весьма близка* к длине окружности C, а высота h каждого треугольника *весьма близка* к радиусу r круга.

Авторы учебника оправдываются словами: *в формуле поставлен знак точного, а не приближенного равенства,* ***но в старших классах средней школы будет строго доказано,*** *что равенство — точное*, см. [6], с. 149.

[1]Здесь применяется функция *синус гиперболический*: $sh(x) = (e^x - e^{-x})/2$. — *Прим. ред.*

Ну что ж, обращаемся к каноническому школьному учебнику Погорелова для старших классов, считающемуся сегодня эталоном школьной строгости и где, как нам обещали еще в восьмом классе, все будет доказано строго. Вот это "доказательство" в кратком изложении:

"Вывод" формулы площади круга.

Пусть S — площадь данного круга, S_n — площадь правильного многоугольника $A_1A_2...A_n$, вписанного в круг. Перпендикуляр, опущенный из центра к его стороне, равен $r_n = R\cos\frac{180^\circ}{n}$. При $n \to \infty$ $\cos\frac{180^\circ}{n} \to 1$, поэтому $r_n \to R$, $S_n = \frac{1}{2}r_nP_n$, где P_n — периметр многоугольника. Учитывая, что $P_n \to 2\pi R$ (?), получаем $S = \frac{1}{2}2\pi R\cdot R = \pi R^2$. Конец "доказательства", см. [5], с. 188-189.

Увы, по сути, это всё то же "рассуждение" общими ничего не значащими словами, что и приведенные выше. Но, если все-таки расписать их в виде формул, то получится весьма любопытный результат: сторона правильного n-угольника $a_n = 2R\sin\frac{\pi}{n}$, периметр $P_n = n\,a_n = 2Rn\sin\frac{\pi}{n}$, и для того, чтобы $2Rn\sin\frac{\pi}{n}$ стремилось к $2\pi R$, нужно, чтобы $\frac{\sin\pi/n}{\pi/n} \to 1$, а это в точности (!) первый замечательный предел, который не только еще не доказан, но который будет доказываться в фундаментальных курсах на основании именно этого утверждения!

Полученная ситуация в науке называется "порочный круг" и, что самое печальное, никто не пытается его разорвать или, по крайней мере, хотя бы продемонстрировать. А ведь преподавание математики, в частности, для гуманитариев, как раз сопровождается словами, что это необходимо прежде всего для развития логического мышления.

Но не все так плохо, конечно. Многие авторы учебников понимают, что в приведенном рассуждении имеется подвох в виде порочного круга и пытаются его разорвать. Но способы, которыми они при этом пользуются, часто катастрофичны: они фактически просто *постулируют* первый замечательный предел, не говоря об этом явно и прямо.

Это относится прежде всего к самому определению функции $\sin x$, где x — произвольное действительное число.

Первый способ, самый простой — определять эту функцию в виде степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \dots ,$$

который сходится для всех действительных x.

Понятно, что в этом случае первый замечательный предел просто заложен в определение и обсуждать тут нечего.

Другой способ — задавать функцию $y = \sin x$ как решение дифференциального уравнения с соответствующими начальными условиями:

$$y''(x) + y(x) = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \tag{2}$$

$$y'(0) = 1. \tag{3}$$

Очевидно, что условие (3) — это тоже в точности первый замечательный предел, так что и этот способ никуда не годится. Кстати, если, например, заменить условие (3) на

$$y'(0) = 2 \tag{4}$$

и обозначить полученную функцию $y = \mathrm{Sin}\,x$ $(= 2\sin x)$, то для нее "первый замечательный предел" будет выглядеть как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Sin\,x}}{x} = 2.$$

Еще один вариант использован в классических учебниках по математическому анализу Ильина-Позняка [3] и Шилова [1], а также Ильина, Садовничего и Сендова [4], которые справедливо отмечают, что "без строгой теории действительных чисел невозможно установить существование важнейшего первого замечательного предела” и предлагают определять функцию с помощью специальных функциональных соотношений. А именно, утверждается, что существует и притом единственная, пара функций $f(x)$ и $g(x)$, определенных для всех значений вещественного аргумента x и удовлетворяющих условиям:

$$f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y),\ g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y),\ f^2(x) + g^2(x) = 1, \tag{5}$$

$$f(0) = 0,\ g(0) = 1,\ f(\frac{\pi}{2}) = 1,\ g(\frac{\pi}{2}) = 0, \tag{6}$$

$$\text{если } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \text{ то } 0 < f(x) < x < \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{7}$$

Ясно, что третье условие равносильно первому замечательному пределу и, значит, тоже закладывается в определение функции $f(x) = \sin x$. Мы опускаем вопрос, что понимается под числом π в последнем определении — это тоже, на самом деле, сложный методический вопрос. Если число π определять исходя из геометрических соображений, то снова попадаем в тот же самый порочный круг с площадью и длиной окружности, а если с помощью рядов, то прямо или косвенно все равно приходится использовать определение функции $f(x) = \sin x$.

Таким образом, вопрос с первым замечательным пределом не так прост, как его представляют в традиционных курсах преподавания математики в вузах и требует более аккуратного методического изложения.

Выдавать же за “доказательство” заранее заложенный в определение результат современной математике явно не к лицу.

На самом деле, существуют достаточно простые выходы из ситуации. Приведем один из вариантов, не вдаваясь в детали.

Дело в том, что если кривая $\vec{r} = \vec{r}(t)$ является гладкой, то $|\frac{d\vec{r}}{ds}| = 1$, где ds — дифференциал длины кривой. Поэтому достаточно доказать, что окружность $x^2 + y^2 = 1$ является гладкой кривой, то есть имеет дифференцируемую параметризацию, без использования тригонометрических функций. Самый простой способ[2]:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \pm\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

Длина дуги AB на рис. 1 находится по формуле:

$$\int\limits_x^1 \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}}dt = \int\limits_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}dt,$$

а длина хорды AB равна $\sqrt{2-2x}$. Тогда первый замечательный предел сводится к соотношению[3]

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{2-2x}}{\int\limits_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}dt} = \lim_{x\to1} \frac{\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}}{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}} = 1.$$

Здесь первый переход выполнен на основе правила Лопиталя. Конечно, это доказательство нуждается в использовании определения длины кривой, а также теории дифференцирования и интегрирования, поэтому и должно приводиться в курсе классического математического анализа лишь после изучения соответствующих тем.

А теперь самое главное.

[2]Строго говоря, задана гладкая параметризация верхней и нижней полуокружностей за исключением концевых точек $t = \pm1$, в которых производная $y'(t)$ обращается в бесконечность — *Прим. ред.*

[3]Вычисляется предел отношения длины дуги к длине стягивающей ее хорды, который эквивалентен первому замечательному пределу — *Прим. ред.*

Возникший парадокс связан с тем, что определение функции синус с помощью геометрических соображений основано на радианной мере угла x, то есть на длине кривой, а длина кривой, в свою очередь, определяется с помощью предела длин вписанных ломаных! Таким образом, длина дуги окружности величиной s определяется как

$$s := \lim_{n\to\infty} 2n \sin\frac{s}{2n},$$

откуда, обозначая $x = \frac{s}{2n}$, сразу получаем, что *по определению*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} := 1.$$

Так что первый замечательный предел, по сути, заложен в определение функции $f(x) = \sin x$ как при аналитической форме задания, так и при геометрической.

Литература

[1] Шилов Г.Е. Математический анализ (функции одного переменного). Части 1-2, М.: 1969.

[2] Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, М.: Высшая школа, 1973.

[3] Ильин В.А, Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.I, М.: Наука, 1982.

[4] Ильин В.А., Садовничий В.А, Сендов Бл.Х. Математический анализ. Начальный курс, М.: МГУ, 1985.

[5] Погорелов А.В. Геометрия. Учебник для 7-9 классов общеобразовательных учреждений, М.: Просвещение, 2001, с. 188-189.

[6] Никитин Н.Н. Геометрия. Учебник для VI-VIII классов, М.: Учпедгиз, 1963.

Астахова Ирина Ивановна,
доцент Национального исследовательского
ядерного университета (МИФИ).

Иванов Владимир Анатольевич,
доцент Института Бизнеса и Права (Москва),
заведующий кафедрой.

E-mail: admist@mail.ru

О некоторых окружностях, связанных с треугольником (продолжение)

Алексей Мякишев

Продолжение статьи, начатой в предыдущем номере журнала. Примечания к основному тексту вынесены в конец — в отдельный раздел. Окончание статьи будет опубликовано в следующем номере.

§5. Ничто не ново под луной

5.1. Окружности Дроз-Фарни и Гаврилюка

Заботы авторов (созидателей)**[1]** чего-либо о собственных *приоритетах* выглядят порою, мягко говоря, *забавно***[2]** и не всегда понятны стороннему и далекому от этих дел наблюдателю**[3]**.

Тем не менее, им, авторам, подобное поведение отчего-то свойственно. Ну, и я, со своим, хоть и незначительным, но всё же, как ни крути, открытием, исключения не составил — и попытался навести соответствующие справки. Результаты получились самые поначалу радужные и оптимистические. Во-первых, найденной мною окружности не обнаружилось ни в каких известных мне книжках по элементарной геометрии (не буду «*оглашать весь список*» — но только замечу, что собрал, за пару десятилетий, довольно обширную и неплохую *планиметрическую* библиотеку). Во-вторых, новизну всей конструкции подтвердили такие отечественные эксперты, как *А. В. Акопян, А. А. Заславский, Е. Д. Куланин, Д. П. Мавло* и *Д. В. Прокопенко.*

Было ещё «и в третьих» — некое «косвенное» свидетельство**[4]** в пользу оригинальности обнаруженной окружности. Распространюсь об этом подробнее, поскольку не следует лишать читателя возможности ознакомиться с замечательной теоремой, в нашей литературе вроде бы отсутствующей.

Осенью прошлого года Д. П. Мавло поведал мне об одной задаче с *Международной Математической Олимпиады-2008*, проходившей в Мадриде. Вот её формулировка:

Пусть H — ортоцентр остроугольного[5] *треугольника ABC. Окружность Γ_A с центром в середине отрезка BC и проходящая через H, пересекает прямую BC в точках A_1, A_2. Точки B_1, B_2, C_1, C_2 определяются аналогично. Докажите, что точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной окружности. (Андрей Гаврилюк, Россия).*

Информация эта, что греха таить, пришлась мне не очень-то по душе — ведь из неё как будто бы следовало, что сотворение новых окружностей**[6]** — событие не такое уж и примечательное, вполне себе заурядное. Своеобразная, что ли, *ревность* взыграла**[7]**, если не хуже — *гордыня.*

К тому же не оставляло сразу возникшее ощущение *дежавю* — где-то мне уже что-то подобное встречалось!

Спустя некоторое время удалось вспомнить, где именно: в превосходной книжке Хонсбергера [8]. В одной из её глав как раз рассказывается об *окружностях Дроз-Фарни,* частным случаем которых и является «олимпиадная» окружность**[8]**.

Теорема Дроз-Фарни об окружностях.

Пусть P, P_l — пара изогонально сопряженных точек относительно треугольника ABC, и $P_aP_bP_c$, $P_{l_a}P_{l_b}P_{l_c}$ — педальные треугольники**[9]**, отвечающие этим точкам. Рассмотрим три окружности с центрами в вершинах педального треугольника точки P (т. е. в точках P_a, P_b, P_c) и проходящие через P_l и отметим точки пересечения этих окружностей со сторонами BC, CA, AB соответственно: $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$. Тогда всё эти шесть точек лежат на одной окружности с центром в точке P. Аналогично, если поменять ролями точки $P \leftrightarrow P_l$ — получим шесть точек $A_{1l}, A_{2l}, B_{1l}, B_{2l}, C_{1l}, C_{2l}$, расположенных на окружности с центром в точке P_l. При этом обе окружности *одинаковы*, т. е. имеют один и тот же радиус**[10]**, рис. 1.

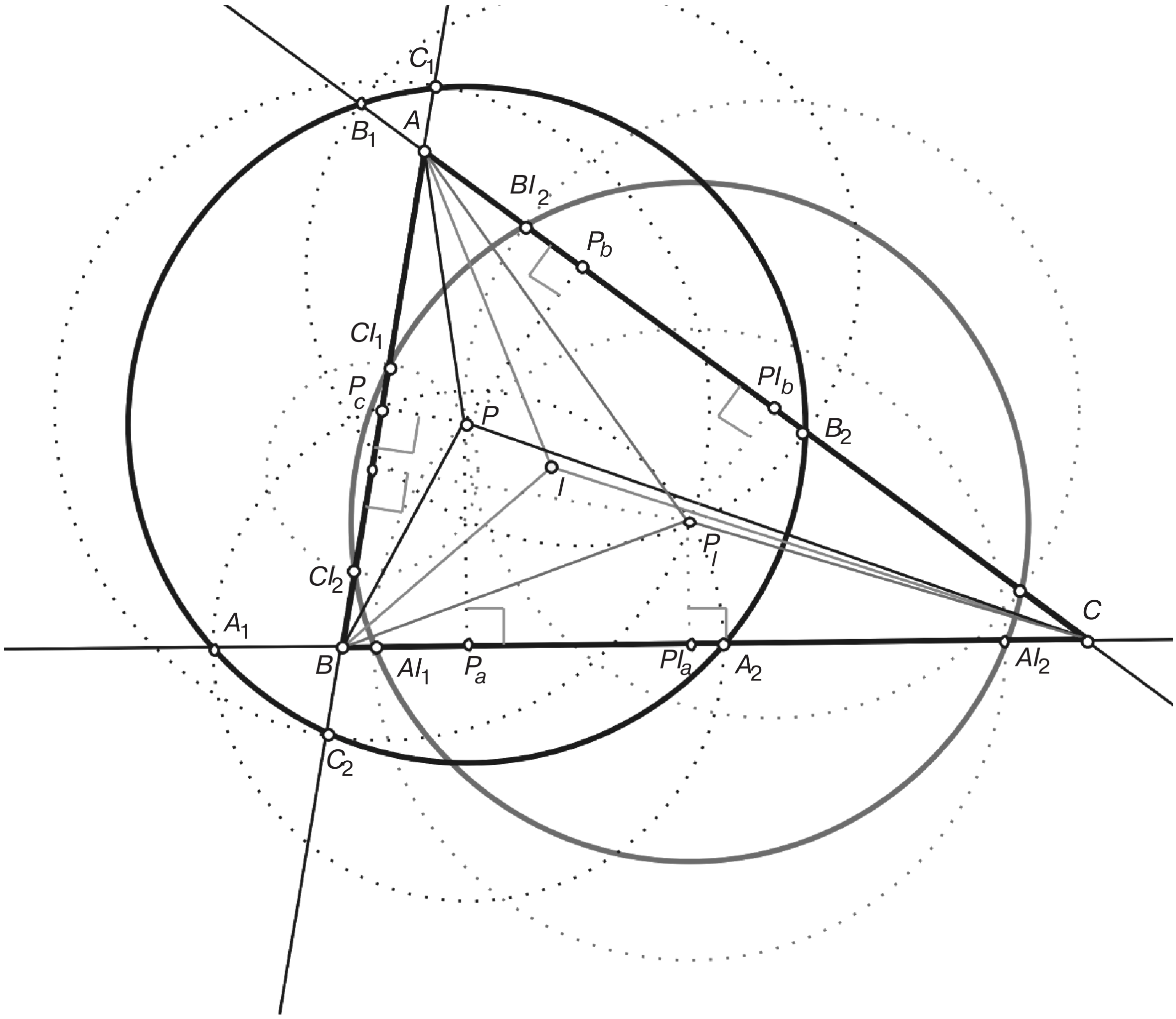


Рис. 1

Поскольку точки O и H *изогонально сопряжены* (см. [1],[2] [3] – задача 2.1), то, как видим, окружность Гаврилюка есть не что иное как одна из окружностей Дроз-Фарни для этой пары точек (ведь педальный треугольник центра описанной окружности O в точности и есть серединный треугольник $A_0B_0C_0$ треугольника ABC), рис. 2.

Доказательство теоремы Дроз-Фарни подкупает свой нежданной простотой, и потому мы не можем здесь его не привести.

Понадобится, впрочем, пара вспомогательных утверждений.

Лемма 1 (*об общей окружности, описанной около педальных треугольников изогонально сопряженных точек* (см.[3], задача 5.125 а)), рис. 3.

Пусть P, P_l — пара изогонально сопряженных точек относительно треугольника ABC, и $P_aP_bP_c$, $P_{l_a}P_{l_b}P_{l_c}$ — педальные треугольники, отвечающие этим точкам. Тогда все шесть вершин $P_a, P_b, P_c, P_{l_a}, P_{l_b}, P_{l_c}$ лежат на одной окружности, центр которой O' является серединой отрезка PP_l.

Замечание. В случае принадлежности точки P описанной около ABC окружности можно считать общей окружностью педальных треугольников соответствующей пары изогонально сопряженных точек прямую Симсона точки P. Дело в том, что в этом случае изогонально сопряженной точкой P_l будет точка *бесконечно удаленная,* причем в направлении, *перпендикулярном* прямой Симсона точки P ([2], [3] — задачи 5.113, 5.115). Можно далее показать, что при удалении точки P' вдоль этого направления, окружность, описанная около педального треугольника P', стремится «выродиться» в прямую Симсона точки P, рис. 4.

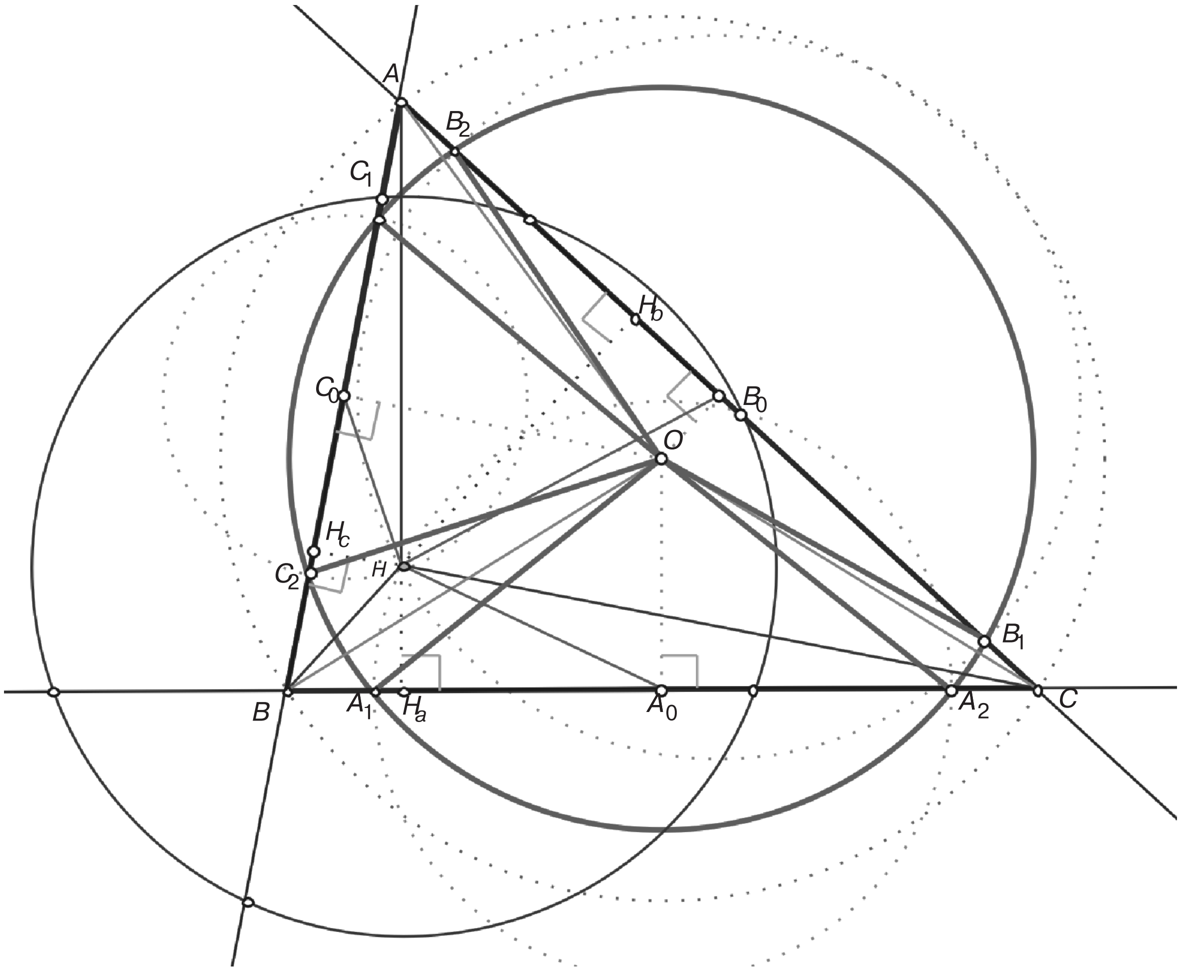

A
B2
C1
Hb
C0
B0
O
Hc
C2
H
B1
B
A1
Ha
A0
A2
C

Рис. 2

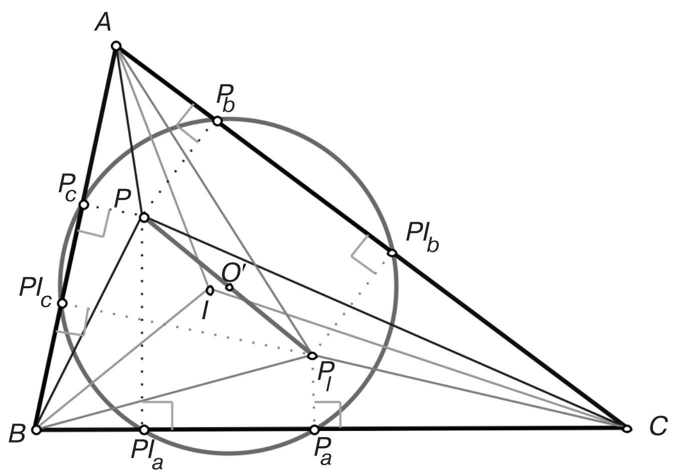

A
Pb
Pc
P
PIb
PIc
O'
I
PI
B
PIa
Pa
C

Рис. 3

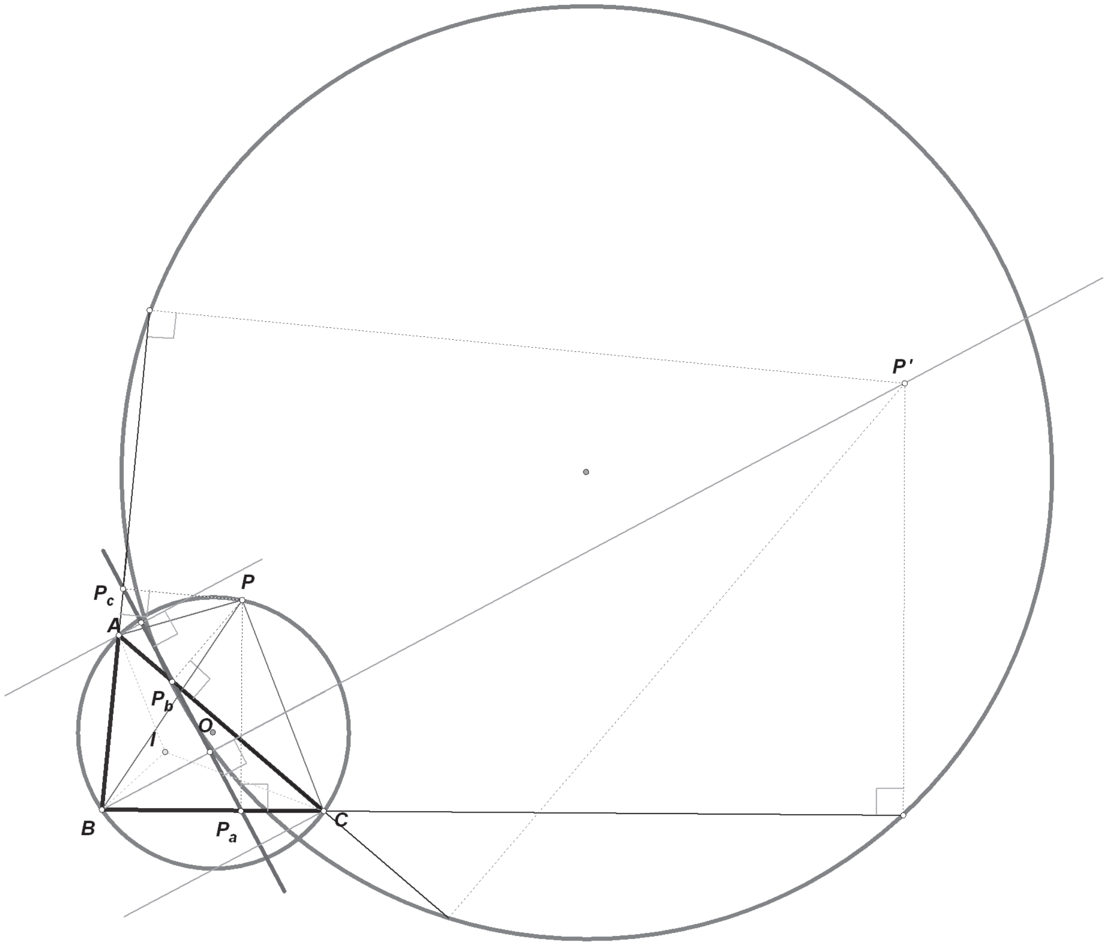


Рис. 4

Лемма 2 (формула длины медианы). Медиана AA_1, проведенная (например) к стороне BC треугольника ABC, вычисляется по формуле $4m_a^2 = 2b^2+2c^2-a^2$ (легко доказывается с помощью теоремы косинусов, которую следует применить дважды: к треугольникам AA_1B и AA_1C, а затем из полученных равенств исключить $\cos\angle AA_1B = -\cos\angle AA_1C$).

Доказательство теоремы Дроз-Фарни.

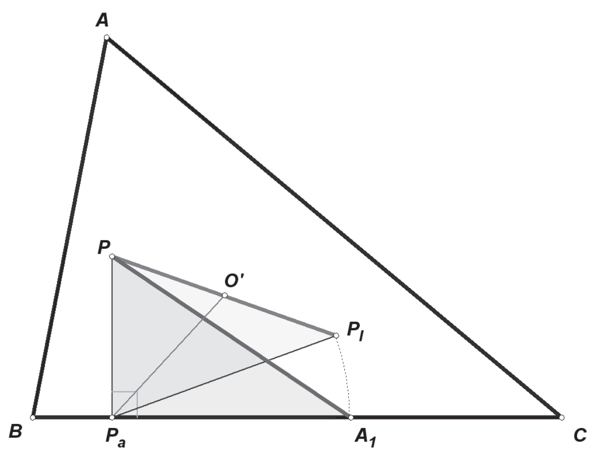


Рис. 5

Пусть $d = PP_l$ — расстояние между изогонально сопряженными точками, рис. 5, а $\rho =$

$O'P_a$ — радиус окружности, описанной около педальных треугольников этих точек (см. лемму 1).

По условию, $P_aP_l = P_aA_1$. По теореме Пифагора, примененной к прямоугольному треугольнику PP_aA_1, тогда имеем: $PA_1^2 = PP_a^2 + P_aA_1^2 = PP_a^2 + P_aP_l^2$. Однако, по формуле длины медианы (для треугольника P_aPP_l и его медианы P_aO'), получаем, что $\rho^2 = P_aO'^2 = (2PP_a^2 + 2P_aP_l^2 - PP_l^2)/4 \Rightarrow 2\rho^2 = PP_a^2 + P_aP_l^2 - \frac{1}{2}PP_l^2 \Rightarrow 2\rho = PA_1^2 - \frac{d^2}{2} \Rightarrow PA_1 = \sqrt{2\rho^2 + \frac{1}{2}d^2} = \text{const}$. Понятно, что если бы вместо точки A_1 стояла любая из точек A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 — результат бы не изменился, все эти точки оказались бы удалены от точки P на то же самое расстояние. Тем самым доказана принадлежность точек $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ окружности с центром в точке P и радиуса $R' = \sqrt{2\rho^2 + \frac{1}{2}d^2}$. Совершенно аналогично доказывается, что и точки $A_{1l}, A_{2l}, B_{1l}, B_{2l}, C_{1l}, C_{2l}$ принадлежат одной окружности с центром в точке P_l и того же радиуса.

5.2. В поисках утраченной геометрии

Итак, обнаруженная мною окружность, судя по всему, оказалась действительно *новой.* Но шибко веселиться и впадать в разную прочую эйфорию по этому поводу мешали два обстоятельства.

Во — первых, *единственное замечательное свойство* этого объекта пока что**11** заключалось исключительно в его *существовании.* Конечно, «*спасибо, что ты есть*», как говорится — но всё же, для того, чтобы попасть на страницы будущих учебников и задачников по геометрии, одного этого обстоятельства не достаточно, как это ни прискорбно.

Во-вторых (собственно, всё то же самое «во-первых»), с точки зрения *истинного любителя и ценителя* элементарной геометрии, никуда не годилось и *доказательство существования*, исключительно *вычислительное* по своей природе — а стало быть, никак не вскрывающего *геометрической сути* происходящего.

Около месяца ушло на попытки, в общем-то, бесплодные — постичь эту самую *геометрию задачи.*

Единственное, что удалось, — разбавить сплошные вычисления слабым геометрическим раствором. Опишу вкратце, как именно.

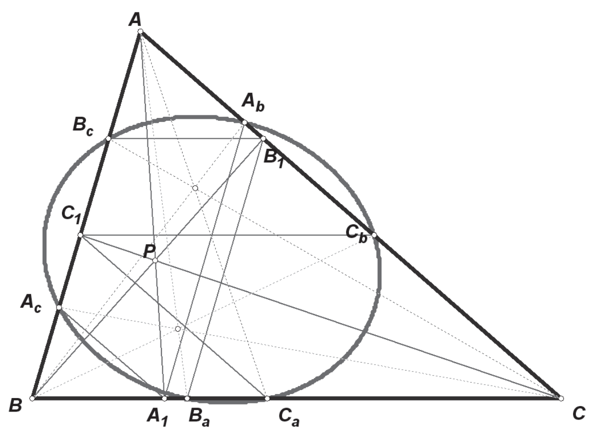


Рис. 6

Вернемся ненадолго в §2 и рассмотрим *три четверки точек:* C_b, A_b, B_c, A_c; B_c, A_c, B_a, C_a и B_a, C_a, C_b, A_b, рис. 6. Оказывается, все шесть точек $C_b, A_b, B_c, A_c, B_a, C_a$ лежат на одной окружности в том, и только в том случае, когда все *три четырехугольника* с вершинами в указанных четверках являются *вписанными в окружности.*

Необходимость очевидна, а достаточность вытекает из следующих соображений.

Каждая пара окружностей (из трех, заданных по условию) имеет общую хорду, расположенную на прямой, содержащей соответствующую сторону исходного треугольника ABC. То есть, прямые, содержащие стороны треугольника, являются *радикальными осями* (см. [3], задачи 3.58, 3.59) соответствующих пар окружностей. Однако известно, что *радикальные оси трех попарно неконцентрических окружностей пересекаются в одной точке* (или параллельны, если центры окружностей коллинеарны — т. е. всё равно пересекаются, но в бесконечно удалённой точке) — т.н. *радикальном центре трех окружностей* (см. [3], задача 3.60). Поскольку прямые, проходящие через стороны треугольника, заведомо в одной точке не пересекаются и не параллельны — отсюда следует, что хотя бы одна пара окружностей концентрична, т. е. имеет общий центр. А поскольку у этой пары есть общие точки (целых две), то окружности в этой паре простонапросто *совпадают*. Значит, совпадают и все три, и точки $C_b, A_b, B_c, A_c, B_a, C_a$ — *коцикличны*. Вот и вся геометрия, которую мне удалось здесь «нарыть».

А далее, в одну сторону, остается доказать вписанность хотя бы одного из четырехугольников, порожденных точкой X_{194} (так как для двух других, в силу *симметрии* конструкции относительно сторон и вершин треугольника ABC, пройдут точно такие же рассуждения). И обратно, как-то ещё желательно пояснить, почему других точек с таким свойством нету.

Механическим счетом «пробить» всё это, опять же, не составляет ни малейших затруднений — причём при таком подходе уже не требуется специальных «тайных» знаний, доступных только узкому кругу *посвященных* лиц: вроде уравнений коники или окружности в барицентрических координатах. Действительно, с учетом того, что входящие в любой школьный курс планиметрии теоремы о произведении хорд и о касательной и секущей[12] (в совокупности приводящие к понятию *степени точки относительно окружности* — см. [3], задачи 3.54–3.56) допускают естественное *обращение* (доказательство использует признак подобия треугольника по углу и отношению соответствующих сторон, а затем — известные достаточные условия вписанности четырехугольника: по равенству углов, опирающихся на один отрезок и с вершинами, расположенными в одной относительно него полуплоскости, или дополняющих друг друга до развернутого, если вершины попадают в разные полуплоскости) — сразу получим систему уравнений, отвечающих за «вырождение» коники в окружность:

$$\begin{cases} AA_c \cdot AB_c = AA_b \cdot AC_b \\ CC_b \cdot CA_b = CC_a \cdot CB_a \\ BB_a \cdot BC_a = BB_c \cdot BA_c \end{cases}$$

Фигурирующие в этой системе отрезки легко выражаются через отношения, в котором точки $C_b, A_b, B_c, A_c, B_a, C_a$ делят соответствующие стороны треугольника — и, стало быть, через барицентрические координаты точки P (и стороны треугольника).

В результате без особых хлопот получаем уже знакомую нам по §3 (утверждение 3.4) цепочку равенств :

$$\frac{(p+r)\,(p+q)}{a^2} = \frac{(q+p)\,(q+r)}{b^2} = \frac{(p+r)\,(q+r)}{c^2}$$

(проверьте!) .

В конце концов, отчаявшись выявить геометрическую суть (читай «*душу*»!)[13] объекта собственными силами, я решился *«воззвать к народу»* , т. е. обратиться за помощью к знатокам. И *«. . . произошли тогда изумительные происшествия. А какие — тому следуют пункты. . . »* [14].

5.3. Вот это сюрприз!

Сперва (по совету А. В. Акопяна) «*запостился*» я на сайте *Art of Problem Solving* (см. [11][15], *Geometry Unsolved Problems*, послание от 08.11.2011), описав конструкцию, ведущую к новой («as I hope») окружности и посетовав на то, что никак не удается отыскать чисто геометрического доказательства.

Ответа не последовало — хотя само сообщение и было просмотрено посетителями сайта более 150-ти раз[16].

Тогда весточка ровно такого же содержания была отослана *Гиацинтам*[17] (см. [10] — message # 20303).

Тут-то и стряслось страшное: Поль Ю (Paul Yiu), главный редактор превосходного электронного журнала *Forum Geometricorum* (см. [12]), *любезно сообщил*, что окружность, о которой упоминается в моем письме, была открыта ещё в 2002 году французским геометром Бернардом Жибером (Bernard Gibert) — см. [10] — messages #20310, #5710.

Чуть позже откликнулся и сам Жибер, указав ещё, что данная окружность также рассматривается в одной из его работ (см. [10] — message #20311, [14])[18].

Подводя итоги (для меня — *безрадостные), Жан-Пьер Эрманн*, не без юмора[19], заметил:

«Dear Paul, Bernard, Alexei and other Hyacinthists, a good advice: before posting a message, we must read carefully the complete works of Bernard. Friendly. Jean-Pierre»

([10] — message #20312)

А Поль Ю поставил последнюю точку (вбил последний гвоздик):

«Sound advice from Pope[20].» ([10] — message #20313).

Да, то был удар сокрушительный и чрезвычайно болезненный[21]! Какие-то, стыдно сказать, *"патриотические"* строчки замелькали даже тогда в голове:

— Скажи-ка, дядя, ведь не даром
Москва, спаленная пожаром,
Французу отдана?

Ну, и т.п. [22].

5.4. Окружность Долгирева – Ю

Но прежде чем окончательно погрузиться в депрессию[23], по инерции послал я запрос относительно ещё одной окружности, на сей раз не моей (см. [10], message # 20316) — но обнаруженной, буквально на моих глазах, в конце прошлого лета *Павлом Долгиревым* (в настоящее время Павел — студент *физтеха*).

Так вот, сперва Долгиреву удалось выявить некое семейство коник — а именно, оказалась справедливой такая теорема (о кониках *Долгирева*):

Пусть K *— произвольная коника в плоскости данного треугольника ABC. Проведем из вершины A пару касательных к конике*[24]*, пересекающих прямую BC в точках A_1, A_2. Точки B_1, B_2, C_1, C_2 определяются аналогично.*

Тогда точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной конике, рис. 7. Доказывается этот факт с помощью теорем Брианшона, Чевы и Карно — детали см. в [13].

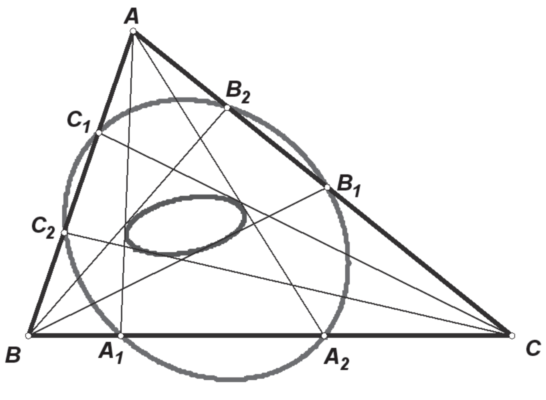


Рис. 7

А затем, руководствуясь исключительно эстетическими соображениями (*чувством гармонии* или *прекрасного;* если угодно, *симметрии* в самом широком — неформальном — смысле), Павел заподозрил, что его конструкция *могла бы* породить окружность[25] при следующих условиях:

Пусть $A'B'C'$ — треугольник Жергонна исходного треугольника ABC (т. е. треугольник с вершинами в точках касания вписанной в ABC окружности). Впишем в этот треугольник окружность и проведем из вершин треугольника ABC касательные до пересечения *с соответствующими противолежащими сторонами. Тогда все шесть точек пересечения* $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ *лежат на одной окружности.*

Надлежащий чертежик в «Живой Геометрии» эти предположения подтвердил, рис.8.

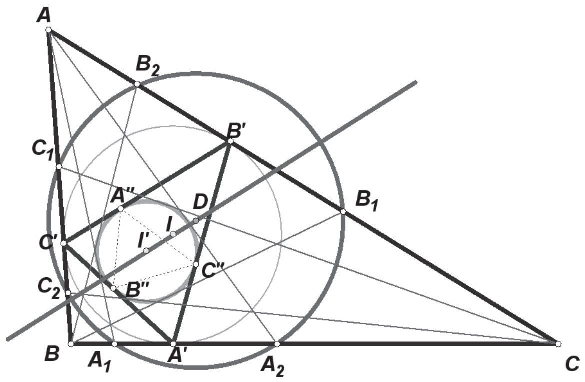


Рис. 8

А экспресс-опрос некоторых наших крупных специалистов[26] показал (как получилось и в моём случае — но только месяцем раньше), что, если эта окружность и не является произведением совершенно *оригинальным* — то, *по-любому*, очень близка к тому, чтобы оказаться таковым.

Итак, именно о ней я и написал в Гиацинты. Почти сразу отозвался уже упомянутый ранее Поль Ю. Он указал (см. [10], message ## 20318, 20319), что центр этой окружности[27] лежит на прямой $O'I'$ (проходящей через центры вписанной (I') и описанной ($O' = I$) около $A'B'C'$ окружности, и являющейся (см. [3], задача 5.136) *прямой Эйлера* треугольника Жергонна $A''B''C''$ — для треугольника $A'B'C'$), причем делит отрезок $O'I'$ *внешним образом* в отношении $\frac{O'D}{I'O} = \left(\frac{r}{r+r'}\right)^2 = \left(\frac{R'}{R'+r'}\right)^2$, где $r = R'$ — радиус описанной около $A'B'C'$ окружности (и он же — вписанной в ABC), а r' — вписанной в $A'B'C'$ [28].

И, хотя никаких ссылок на какие-либо источники американский геометр и не привёл[29], из содержания и тона его сообщений вроде бы выходило, что затронутая тема для него давно уже не откровение.

А в послании #20321 (см. [10]) неугомонный Ж.-П.Эрманн и сюда привнёс свою лепту, приведя соотношение, выражающее радиус ρ окружности Долгирева – Ю через $r = R'$ и r':

$$\rho = \frac{R'^2\sqrt{(R'+r')^2 + r'^2}}{r'\,(2R'+r')}.$$

В рассмотренных только что формулах, наверняка, кроются и подходы к геометрическому доказательству теоремы, не обещающему быть суперсложным — и, во всяком случае, на порядки менее затратному, чем барицентрически-вычислительное[30] (в отличие от конструкции Жибера — где всё происходит с точностью до наоборот). Заинтересованный читатель может попробовать свои силы, доказав соотношения Ю и использовав всякие возникающие здесь гомотетии.

5.5. Добавочные окружности Долгирева – Ю

Окружность Долгирева–Ю можно смело отнести к т.н. *слабым* (*weak*) объектам[31] — это когда основной объект задается параметрами, *симметрично* зависимыми от сторон и углов треугольника — генератора (при этом барицентрические координаты, его описывающие, получаются друг из друга *циклическими перестановками* по типу $a \to b \to$ $\to c \to a$) и плюс к тому имеет, по крайне мере, три родственные ипостаси, в которых симметрия нарушается в пользу одной из сторон (углов). Классический пример доставляет вписанная окружность и её центр $I\,(a:b:c)$ вкупе с сопутствующей тройкой вневписанных окружностей (касающихся одной из сторон треугольника и двух продолжений) и их центров $I_a\,(-a:b:c)$, $I_b\,(a:-b:c)$, $I_c\,(a:b:-c)$.

В случае окружности Долгирева – Ю имеем аж *девять*(!) её *вариаций*[32] — см. рисунки 10 – 12 ниже (без особых комментариев — разве только отметим, что первая тройка реализуется не для всех треугольников, см. рис. 9).

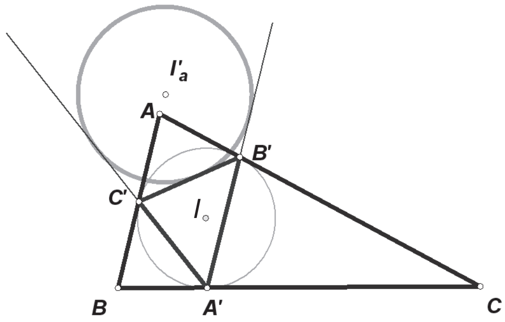


Рис. 9

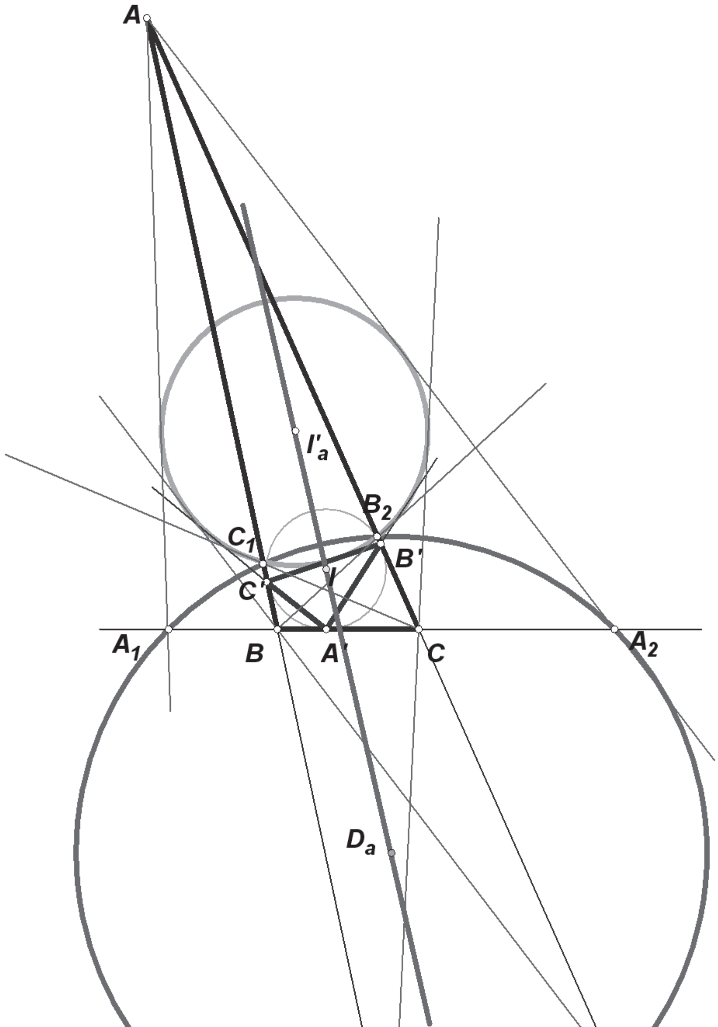


Рис. 10

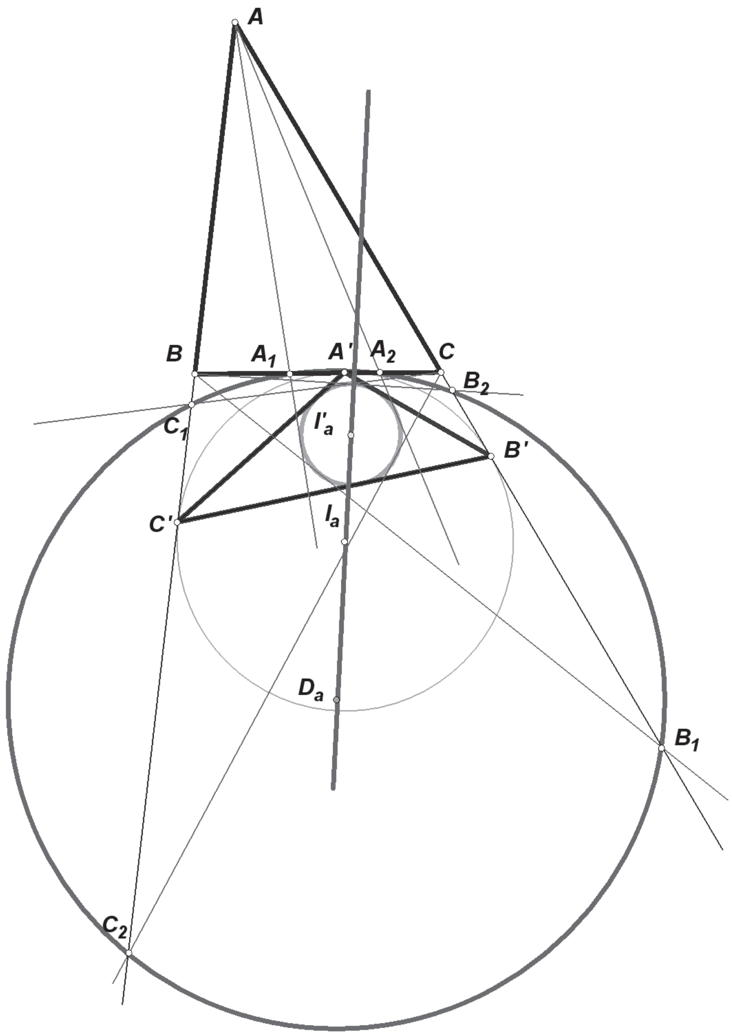


Рис. 11

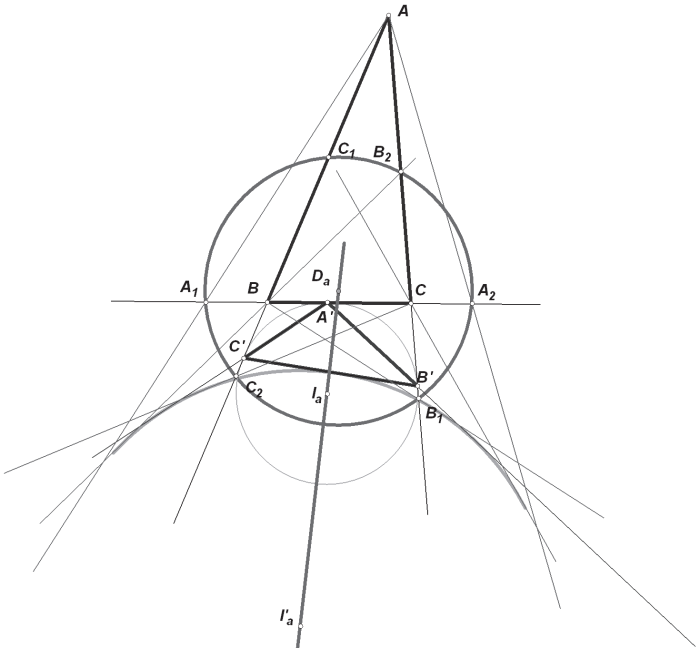


Рис. 12

§6. Чаянная радость: конструкция вторая

В общем, после всех этих бурных перипетий, ожидаемо и совершенно неотвратимо, взяли меня в оборот хандра, сплин, зеленая тоска и пр. и пр. Прямо как в одной душевной песне[33] поется, одолели упадочные настроения. Однако, спустя какое-то время, удалось всё же взять себя в руки[34].

К великому счастью, обнаружилось, что запас *параллельных конструкций* был исчерпан не полностью — нашлась-таки среди них ещё одна «*разрешимая*»!

А что будет, если попробовать рассмотреть конструкцию, схожую с описанной в §1 (1.2), которая приводит к окружности Тейлора — с той только разницей, что в её определении поменять соответствующие чевианы местами? Т.е. если сначала мы считали, что C_a — точка пересечения BC и прямой, проходящей через C_1 параллельно чевиане AA_1, то теперь положим в роли C_a — точку пересечения BC и прямой, проходящей через C_1 параллельно чевиане BB_1 — и т.д.

Идея оказалась довольно плодотворной — поскольку на выходе получились не одна, а целых три окружности! Но обо всем по порядку.

Итак, теперь за основу мы берем такую конструкцию:

Пусть P — произвольная точка в плоскости треугольника ABC, но не лежащая на прямых, содержащих его стороны. Пусть, далее, $A_1 \in (BC), B_1 \in (CA), C_1 \in (AB)$ - основания чевиан этой точки. Через точку A_1 проведем прямые, параллельные чевианам CC_1 и BB_1 — и отметим точки A_b, A_c пересечения этих прямых с прямыми, содержащими стороны AC и AB соответственно. Точки B_a, B_c, C_a, C_b определяются аналогично.

Утверждение 6.1. Точки A_b, A_c,B_a, B_c, C_a, C_b всегда принадлежат одной конике, рис. 13.

Доказательство. Выпишем левую часть условия *Карно* и заменим входящие в него отношения по подобию:

$$\left(\frac{BB_a}{CB_a}\cdot\frac{BC_a}{CC_a}\right)\cdot\left(\frac{CC_b}{AC_b}\cdot\frac{CA_b}{AA_b}\right)\cdot\left(\frac{AB_c}{BB_c}\cdot\frac{AA_c}{BA_c}\right)= \\ =\left(\frac{BB_1}{PB_1}\cdot\frac{PC_1}{CC_1}\right)\cdot\left(\frac{CC_1}{PC_1}\cdot\frac{PA_1}{AA_1}\right)\cdot\left(\frac{PB_1}{BB_1}\cdot\frac{AA_1}{PA_1}\right)=1.$$

Утверждение 6.2. Пусть $P = (p : q : r)$ [35]. Тогда барицентрические координаты рассматриваемых шести точек имеют вид:

$$B_a = (0 : -q : s)\,, B_c = (s : -q : 0)\,, C_a = (0 : s : -r)\,, \\ C_b = (s : 0 : -r)\,, A_b = (- : 0 : s)\,, A_c = (-p : s : 0)\,,$$

где $s = p + q + r$ — суммарная масса точки P.

Доказательство. Ясно, что $\frac{BB_a}{CB_a} = \frac{BB_c}{AB_c} = \frac{BB_1}{B_1P}$. Но, по правилу группировки, точка P является центром масс системы материальных точек $qB, (p + r)\,B_1$. Поэтому из правила рычага вытекает, что $\frac{BP}{B_1P} = \frac{p+r}{q}$. Значит, $\frac{BB_1}{B_1P} = \frac{BP+B_1P}{B_1P} = 1 + \frac{p+r}{q} = \frac{p+q+r}{q} = \frac{s}{q} \Rightarrow B_a = (0 : -q : s)\,, B_c = (s : -q : 0)$. (Знак «минус» в случае рассматриваемого расположения точек берется потому, что отрезки BC и BA делятся точками B_a и B_c в соответствующих отношениях *внешним образом.* Но и во всех остальных вариантах все равно получаются такие же координаты). Для остальных точек рассуждения аналогичны.

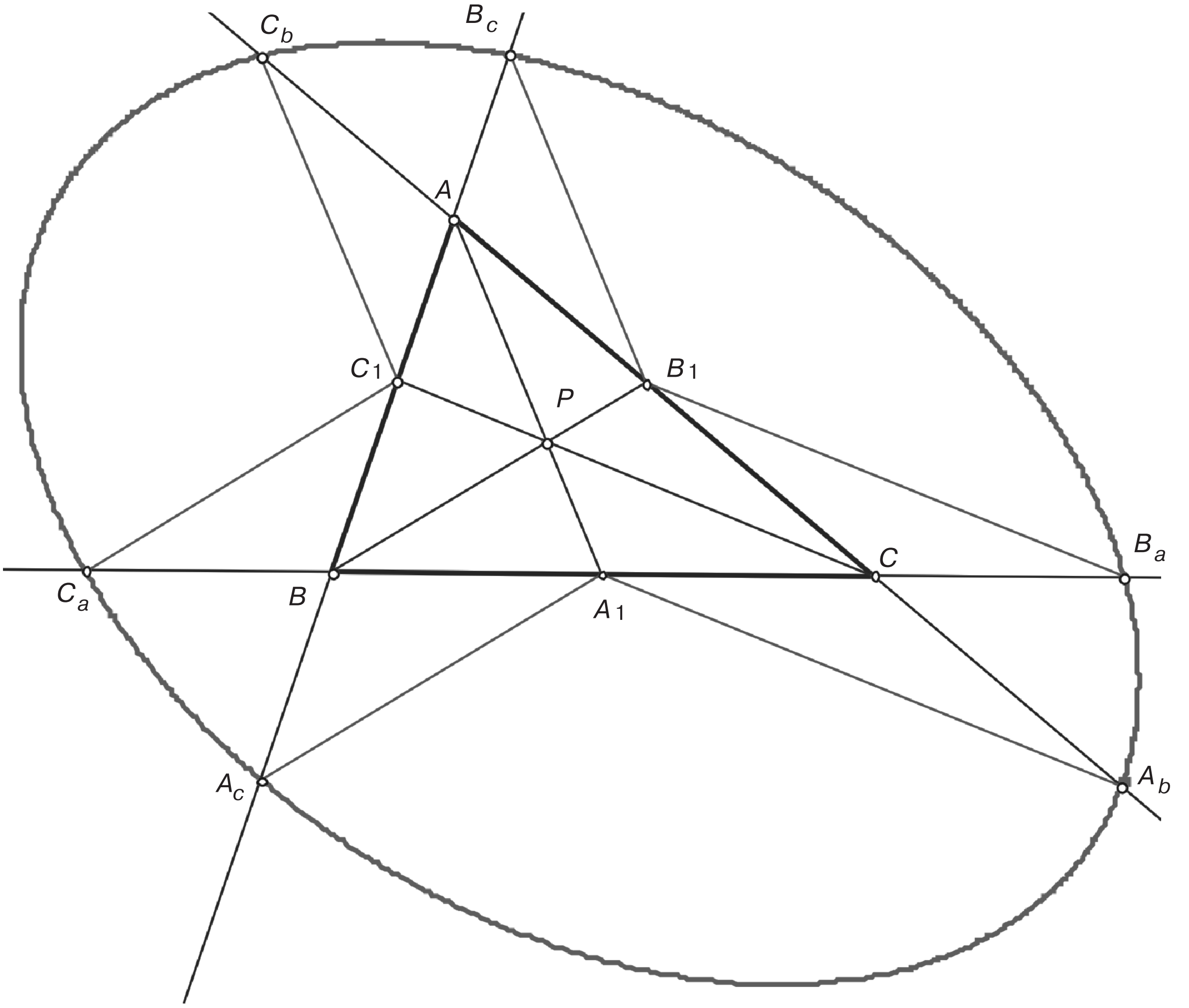


Рис. 13

Далее действуем по схеме, апробированной в §3.

Вначале выведем уравнение коники, проходящей через эти точки, пользуясь тем, что в барицентрических координатах уравнение коники имеет вид[36]:

$$ux^2 + vy^2 + \omega z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0.$$

([6], [9])

Утверждение 6.3. Коэффициенты коники, проходящей через точки $B_a = (0 : -q : s)$, $B_c = (s : -q : 0)\,, C_a = (0 : s : -r)\,, C_b = (s : 0 : -r)\,, A_b = (-p : 0 : s)\,, A_c = (-p : s : 0)$, (где $s = p + q + r$ — *суммарная масса точки* P) могут быть представлены в виде:

$$u = 2rqs;\ v = 2prs;\ w = 2qps;\ f = p(s^2 + qr);\ g = q(s^2 + pr);\ h = r(s^2 + pq).$$

Доказательство. Подставив координаты точек в уравнение коники, придем к системе из 6-ти уравнений[37]:

$$\begin{cases} B_a : vq^2 + ws^2 - 2fqs = 0 & (1) \\ C_a : vs^2 + wr^2 - 2frs = 0 & (2) \\ C_b : us^2 + wr^2 - 2grs = 0 & (3) \\ A_b : up^2 + ws^2 - 2gps = 0 & (4) \\ A_c : up^2 + vs^2 - 2hps = 0 & (5) \\ B_c : us^2 + vq^2 - 2hqs = 0 & (6) \end{cases}$$

Из первых двух имеем:

$$v\left(q-\frac{s^2}{r}\right)=\omega\left(r-\frac{s^2}{q}\right)\Leftrightarrow\frac{v}{r}\left(s^2-qr\right)=\frac{w}{q}\left(s^2-qr\right).$$

Таким образом, или $\frac{v}{r}=\frac{w}{q}$, или $s^2-qr=0$. Третье и четвертое уравнение ведет к ветвлению $\frac{w}{p}=\frac{u}{r}$ или $s^2-rp=0$. И, наконец, пятое и шестое — $\frac{u}{q}=\frac{v}{p}$или $s^2-pq=0$.

Будем пока считать, что «правые» альтернативы не имеют места. (Равенства правых частей нулю будут рассмотрены в §7).

Далее, в силу однородности уравнения коники, можно положить $h=1$.**[38]**. Тогда, подставив выражение $v=\frac{p}{q}u$ в (5), получим: $us^2+\frac{p}{q}q^2u-2sq=0\Rightarrow u=\frac{2qs}{pq+s^2}$. Значит, $w=\frac{p}{r}\cdot u=\frac{2pqs}{r(pq+s^2)}$; $v=\frac{r}{q}w=\frac{2ps}{pq+s^2}$. Наконец, отыщем f и g.

Подстановки в (3) и (1) быстро ведут к цели:

$$\frac{2qsr\cdot p^2+2pqs\cdot s^2}{(pq+s^2)r}=2gps\Rightarrow\frac{qp}{qp+s^2}+\frac{qs^2}{r\left(pq+s^2\right)}=g\Rightarrow g=\frac{q}{r}\frac{rp+s^2}{pq+s^2}$$

и аналогично

$$f=\frac{p}{r}\frac{qr+s^2}{pq+s^2}.$$

Чтобы получить теперь искомые формулы для коэффициентов, остается домножить их все на величину $k=pq+s^2$.

Согласно [6], коника вырождается в окружность, если и только если выполняются следующие равенства: $\frac{v+w-2f}{a^2}=\frac{w+u-2g}{b^2}=\frac{u+v-2h}{c^2}=\lambda\,(\neq 0)$ **[39]**.

Утверждение 6.4. В данной конструкции уравнения вырождения коники (порожденной точкой с барицентрическими координатами $P=(p:q:r)$) в окружность имеют вид:

$$\frac{p}{(s-p)\,a^2}=\frac{q}{(s-q)\,b^2}=\frac{r}{(s-r)\,c^2},\quad\text{где}\quad s=p+q+r.$$

(Назовем эти уравнения *ключевыми.*)

Их можно записать также и в виде $\frac{p}{(q+r)a^2}=\frac{q}{(r+p)b^2}=\frac{r}{(p+q)c^2}$.

В *абсолютных* же барицентрических координатах (т. е. таких, что**[40]** $s=p+q+r=1$) ключевые уравнения, понятно, должны удовлетворять соотношениям**[41]** $\frac{p}{(1-p)a^2}=\frac{q}{(1-q)b^2}=\frac{r}{(1-r)c^2}$.

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned}v+w-2f=2prs+2qps-2p\left(qr+s^2\right)=2p\left(rs+qs-qr-s^2\right)=2p\left(s\left(r+q-s\right)-qr\right)=\\ =2p\left(-sp-qr\right)=-2p\left(qr+p^2+qp+rp\right)=\\ =-2p\left(q\left(r+p\right)+p\left(r+p\right)\right)=-2p\left(q+p\right)\left(r+p\right),\end{aligned}$$

и остальные числители выражаются аналогично, то условие вырождения коники в окружность запишется в виде:

$$\frac{-2p\left(q+p\right)\left(r+p\right)}{a^2}=\frac{-2q\left(r+q\right)\left(p+q\right)}{b^2}=\frac{-2r\left(p+r\right)\left(q+r\right)}{c^2}.$$

Или, поделив все равенства на $k=-2\left(q+r\right)\left(r+p\right)\left(p+q\right)$,

$$\frac{p}{(q+r)\,a^2}=\frac{q}{(r+p)\,b^2}=\frac{r}{(p+q)\,c^2}.$$

Утверждение 6.5. Рассматриваемое семейство коник содержит, если исходный треугольник ABC является *неравносторонним* (т.е. таким, в котором нет даже пары равных сторон), целых три различных *окружности* $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, порождаемых (*отсутствующими в ETC* ([7])) точками P_1, P_2, P_3, абсолютные барицентрические координаты которых вычисляются по следующим формулам (как обычно, здесь a, b, c — длины сторон треугольника ABC): при $k = 1, 2, 3$

$$P_k = \left(p_k = \frac{1}{1+p'_k} : q_k = \frac{1}{1+q'_k} : r_k = \frac{1}{1+r'_k}\right),$$

где

$$p'_k = \frac{C}{a^2}\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi\,(k-1)}{3}\right), \quad q'_k = \frac{C}{b^2}\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi\,(k-1)}{3}\right),$$
$$r'_k = \frac{C}{c^2}\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi\,(k-1)}{3}\right)$$

и

$$C = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$
$$\varphi = \arcsin\left(-8a^2b^2c^2C^{-3}\right) = \arcsin\left(-3\sqrt{3}\frac{a^2b^2c^2}{\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}\right).$$

При этом точки P_1, P_3 всегда расположены *вне* треугольника ABC, а точка P_2 — *внутри*.

В случае *равностороннего* треугольника точка P_2 (совпадающая с центроидом правильного треугольника) порождает окружность ω_2, концентрическую описанной около ABC окружности, причем её радиус выражается через радиус описанной окружности по формуле $R_2 = \frac{\sqrt{13}}{2}R$, а точки P_1, P_3 не определены.

В случае *равнобедренного* треугольника две точки (в число которых обязательно попадает P_2) принадлежат прямой, содержащей ось симметрии треугольника, третья же вырождается в бесконечно удаленную точку основания[42].

Доказательство. Рассмотрим ключевые уравнения, записанные в абсолютных координатах:

$$\left\{\quad \frac{p}{(1-p)\,a^2} = \frac{q}{(1-q)\,b^2} = \frac{r}{(1-r)\,c^2}, \quad p + q + r = 1.\right.$$

Разделив в каждой из дробей числитель и знаменатель соответственно на p, q, r и осуществив замены $p' = \frac{1}{p} - 1, q' = \frac{1}{q} - 1, r' = \frac{1}{r} - 1 \Leftrightarrow \left(p = \frac{1}{1+p'}, q = \frac{1}{1+q'}, r = \frac{1}{1+r'}\right)$, придем к системе

$$\begin{cases} \frac{1}{p'a^2} = \frac{1}{q'b^2} = \frac{1}{r'c^2}, \\ \frac{1}{1+p'} + \frac{1}{1+q'} + \frac{1}{1+r'} = 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} q' = \frac{a^2}{b^2}p' \\ r' = \frac{a^2}{c^2}p' \\ (1+p')\,(1+q')\,(1+r') = (1+q')\,(1+r') + (1+p')\,(1+r') + (1+p')\,(1+q'). \end{cases}$$

Далее, подставив первые два равенства в третье и аккуратно проделав все надлежащие преобразования[43], придем к тому, что p' удовлетворяет *кубическому* уравнению[44]

$$p'^3 - p'\left(\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^4}\right) - \frac{2b^2c^2}{a^4} = 0.$$

Хорошо известно (см., например, [4]), что количество действительных корней *приведенного* кубического уравнения[45] $t^3 + dt + l = 0$ определяется знаком его дискриминанта $\Delta = \frac{d^3}{27} + \frac{l^2}{4}$, а именно:

- если $\Delta < 0$, то уравнение имеет три различных действительных корня;
- если $\Delta = 0$, то уравнение имеет два различных корня кратности один и два соответственно (т. е. при разложении кубического трехчлена линейный множитель, отвечающий корню кратности два, встречается дважды);
- если $\Delta > 0$ — один действительный корень (кратности один).

В нашем случае $\Delta = \frac{-4d^3+27l^2}{27\cdot 4} = \left(27\cdot 4\cdot \frac{b^4c^4}{a^8} - \frac{4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^3}{a^{12}}\right)/(27\cdot 4)$ и его знак определяется знаком выражения $\Delta' = 27a^4b^4c^4 - \left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^3$.

Но, если воспользоваться классическим неравенством Коши между средним геометрическим и средним арифметическим для трех положительных чисел $x = a^2b^2, y = b^2c^2, z = c^2a^2$, то $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3} \Leftrightarrow 27xyz \le (x+y+z)^3 \Leftrightarrow \Delta' = 27a^4b^4c^4 - \left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^3 \le 0$, причем равенство нулю возможно, если и только если $x = y = z \Leftrightarrow a^2b^2 = b^2c^2 = c^2a^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 = c^2 \Leftrightarrow a = b = c$, т. е. тогда и только тогда, когда исходный треугольник ABC — равносторонний, рис. 14.

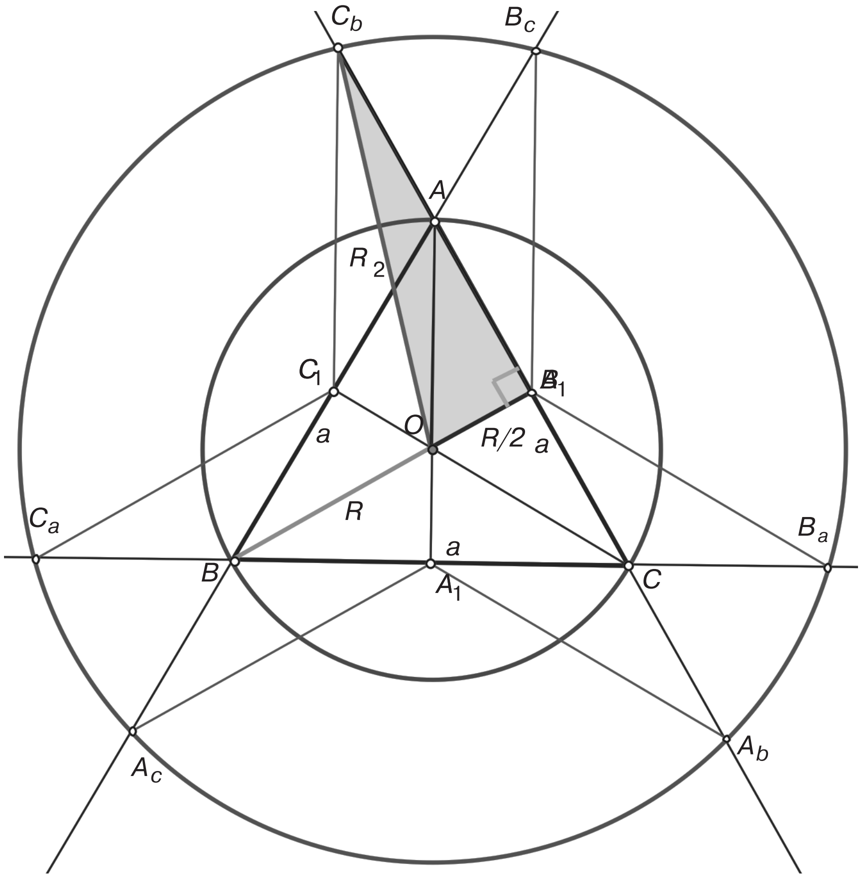


Рис. 14

В этом случае уравнение $p'^3 - p'\left(\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^4}\right) - \frac{2b^2c^2}{a^4} = 0$ запишется в виде

$$p'^3 - 3p' - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(p'-2\right)\left(p'+1\right)^2 = 0,$$

а соотношения

$$\begin{cases} q' = \frac{a^2}{b^2}p' \\ r' = \frac{a^2}{c^2}p' \end{cases} \quad —$$

просто как

$$\begin{cases} q' = p' \\ r' = p' \end{cases}$$

Это означает, что случаю $p' = q' = r' = -1$ будет соответствовать «дважды» неопределенная точка, а случаю $p' = q' = r'$ — точка P с координатами $\left(\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}\right)$, т. е. центр(оид) правильного треугольника. Радиус получившейся при этом окружности легко посчитать по теореме Пифагора:

$$\rho^2 = a^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}R\right)^2 + \frac{R^2}{4} = \frac{13}{4}R^2.$$

Перейдем теперь к рассмотрению наиболее содержательной возможности, т. е. когда $\Delta < 0$. Кубическое уравнение должно здесь иметь три действительных корня.

Прежде всего посмотрим, что будет, если один из знаменателей в формулах для координат найденных точек P $\left(p = \frac{1}{1+p'}, q = \frac{1}{1+q'}, r = \frac{1}{1+r'}\right)$ обращается в нуль.

Пусть, например, $p' = -1$. Подставив это значение в уравнение

$$p'^3 - p'\left(\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^4}\right) - \frac{2b^2c^2}{a^4} = 0,$$

получим:

$$-1 + \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^4} - 2\frac{b^2c^2}{a^4} = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{c^2}{a^2} - 2\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{c^2}{a^2} = 0.$$

Положим $u = \frac{b^2}{a^2}, v = \frac{c^2}{a^2}$. Тогда $-1+u+uv+v-2uv = 0 \Leftrightarrow uv-u-v+1 = 0 \Leftrightarrow u(v-1)-(v-1) = 0 \Leftrightarrow (v-1)(u-1) = 0$.

Значит, либо $a = b$, либо $a = c$. Итак, обращение знаменателя в нуль соответствует случаю равнобедренности. Верно и обратное. Допустим, что $a = b$. (Но треугольник не равносторонний). Тогда, во-первых, $q' = \frac{a^2}{b^2}p' = p'$, т. е. точки, отвечающие решению уравнения, будут лежать на оси симметрии равнобедренного треугольника. А во-вторых, после подстановки в уравнение, получим

$$p'^3 - p\left(1 + 2\frac{c^2}{a^2}\right) - 2\frac{c^2}{a^2} = 0 \Leftrightarrow (p'+1)\left(p^2 - p - 2\frac{c^2}{a^2}\right) = 0.$$

Квадратное уравнение, соответствующее второй скобке, имеет положительный дискриминант и как раз будет определять две «обычные» точки P', P'', расположенные на оси симметрии (кстати отметим, что их можно, в отличие от общего случая, строить циркулем и линейкой — как и всякое решение квадратного уравнения). Если же $p' = q' = -1$, точка P, соответствующая этим значениям, имеет, условно говоря, координаты $\left(\frac{1}{0} : \frac{1}{0} : \frac{1}{1-\frac{a^2}{c^2}}\right)$. На нуль делить нельзя, и нужно что-то с этим делать — например, попробовать избавиться от нулей в знаменателях при помощи предельного перехода. Только проделанного должным образом! Речь идет вот о чем: одно дело, если имеем тройку $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x} : \frac{1}{c}\right)$. Тогда, домножив на x, и перейдя к пределу при $x \to 0$, получим тройку $(1:1:0)$. Другое же — если тройка имеет вид $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{-x} : \frac{1}{c}\right)$. Тогда ответом будет $(1:-1:0)$. Иными словами, надо понять, какая из двух возможностей реализуется при $p' \to -1, q' \to -1$. Покажем, что имеет место именно второй случай (и это-то будет означать бесконечную удаленность третьей точки вдоль основания треугольника — ведь сумма координат равна нулю).

Для этого вернемся к набившему оскомину уравнению, только теперь выпишем еще и аналогичное уравнение для q':

$$p'^3 - p'\left(\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^4}\right) - \frac{2b^2c^2}{a^4} = 0 \text{ и } \quad q'^3 - q'\left(\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{b^4}\right) - \frac{2a^2c^2}{b^4} = 0.$$

Или, после соответствующего деления,

$$p'^3 - p'\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) - 2\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{c^2}{a^2} = 0 \text{ и } \quad q'^3 - q'\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{c^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2}\right) - 2\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{c^2}{b^2} = 0.$$

Напрашивается далее ввести функцию $f(x) = x^3 - x(u + v + uv) - 2uv$. Тогда первому уравнению соответствуют $u_p = \frac{b^2}{a^2}, v_p = \frac{c^2}{a^2}$, а второму — $u_q = \frac{a^2}{b^2}, v_q = \frac{c^2}{b^2}$. Понятно, что $f(-1) = u + v - 1 - uv = (u-1)(1-v)$. Очевидно также, что вблизи -1 выражения $1 - v_p$ и $1 - v_q$ принимают одинаковые знаки (и не стремятся к нулю, т.к. $c \neq a$). Тогда $p' \to -1 \Leftrightarrow u_p \to 1$ и $q' \to -1 \Leftrightarrow u_q \to 1$. Но если $u_p \to 1$ таким образом, что $u_p > 1$(т.е. $\frac{b^2}{a^2} > 1$,т.е. $b > a$) то u_q ничего не остается, кроме как стремится к 1 «снизу», т.е. при $u_q \to 1$ тогда обязательно $u_q = \frac{a^2}{b^2} < 1$. Из этих рассуждений вытекает, что если $p' \to -1$ «сверху», то $q' \to -1$ «снизу», и наоборот. А это и означает, что имеет место именно вторая возможность, ведущая к появлению бесконечно удаленной точки, рис. 15.

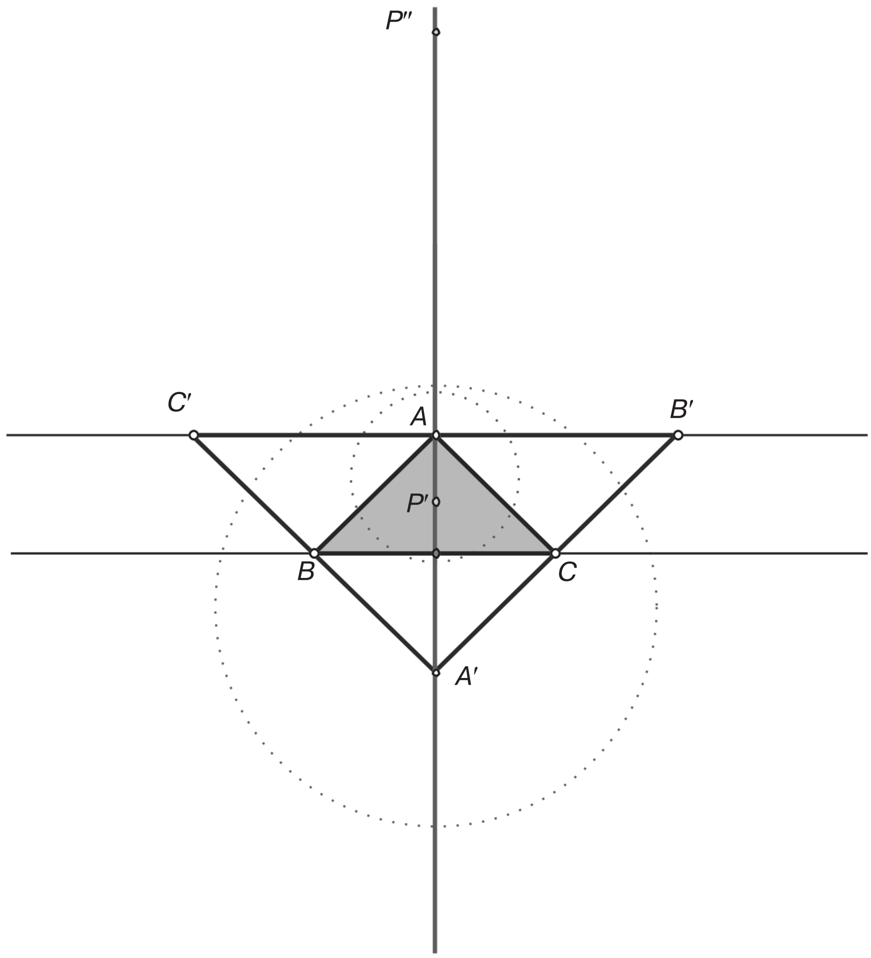


Рис. 15

Исследовав, таким образом, все особые случаи, далее будем считать треугольник разносторонним. Тогда выписанные в условии координаты точек P_k получим, аккуратно подставив соответствующие коэффициенты в следующие формулы решения кубического уравнения с отрицательным дискриминантом:

Если $t^3 + dt + l = 0$ и $\Delta < 0$, то

$$t = \sqrt{-\frac{4d}{3}}\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi(k-1)}{3}\right), k = 1, 2, 3, \quad \text{где} \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{9l}{4d^2}\sqrt{-\frac{4d}{3}}\right)$$

(см. [4]). Наконец, разберемся с положением наших точек относительно треугольника. Вернемся для этого к основным формулам.

$$P_k = \left(p_k = \frac{1}{1+p'_k} : q_k = \frac{1}{1+q'_k} : r_k = \frac{1}{1+r'_k}\right),$$

где

$$p'_k = \frac{C}{a^2}\sin\left(\frac{\varphi+2\pi\,(k-1)}{3}\right),\quad q'_k = \frac{C}{b^2}\sin\left(\frac{\varphi+2\pi\,(k-1)}{3}\right),$$

$$r'_k = \frac{C}{c^2}\sin\left(\frac{\varphi+2\pi\,(k-1)}{3}\right),\quad k=1,2,3$$

и

$$C = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},$$

$$\varphi = \arcsin\left(-8a^2b^2c^2C^{-3}\right) = \arcsin\left(-3\sqrt{3}\frac{a^2b^2c^2}{\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}\right).$$

Грубая оценка для углов и их синусов, входящих в координаты точек, выглядит следующим образом:

$$\varphi_1 \in \left(-\frac{\pi}{6}, 0\right) \Rightarrow \sin\varphi_1 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right),\qquad \varphi_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \sin\varphi_2 \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right),$$

$$\varphi_3 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \sin\varphi_3 \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Сразу теперь видно, что все координаты P_2 положительны, т. е. эта точка расположена внутри треугольника.

Далее заметим, что сумма всех координат равна 1 — а это означает, что целиком отрицательной тройки координат быть не может. Значит, для того, чтобы доказать, что точки P_1 и P_3 находятся за пределами треугольника, достаточно указать для каждой из них хотя бы одну заведомо отрицательную координату (тем самым исключив случай целиком положительной тройки, а все остальные варианты ведут к «заграничным» точкам).

Поскольку треугольник разносторонний, упорядочим стороны в порядке возрастания их длин. Пусть, например, $a < b < c$.

Займемся сначала точкой P_1. Ввиду отрицательности соответствующего синуса, целиком отрицательной будет и тройка p'_1, q'_1, r'_1. Еще отметим, что $p_1 + q_1 = 1 - \frac{1}{1+r'_1} = \frac{r'_1}{1+r'_1}$. Здесь остается показать, что $r'_1 > -1$ — ведь тогда $p_1 + q_1 = \frac{r'_1}{1+r'_1} < 0$ и среди этих двух координат какая-нибудь одна должна быть заведомо отрицательной.

Однако $r'_1 = \frac{C}{c^2}\sin\varphi_1, C = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \Rightarrow \frac{C}{c^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{a^2}{c^2}}$. Поскольку каждая дробь, входящая в подкоренное выражение, *меньше* 1, то $\frac{C}{c^2} < 2$. А так как $-\sin\varphi_1 < \frac{1}{2}$, то, перемножив оба неравенства, получим, что $-r'_1 < 1 \Leftrightarrow r'_1 > -1$.

И, напоследок, разберемся с P_3. Оказывается, в этом случае $p'_3 < -1$ и искомой отрицательной координатой будет $p_3 = \frac{1}{p'_3+1}$. Ну, в самом деле: $p'_3 = \frac{C}{a^2}\sin\varphi_3$, $\frac{C}{a^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}}$. Здесь, в отличие от предыдущего случая, каждая дробь подкоренного выражения *больше* 1. Следовательно, $\frac{C}{a^2} > 2$. А поскольку $-\sin\varphi_3 > \frac{1}{2}$, то $-p'_3 > 1 \Leftrightarrow p'_3 < 1$.

Замечание. В случае равностороннего треугольника, как видим, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ и наши формулы дают *три совпадающие точки:* $P_1 = P_2 = P_3 = G\,(1:1:1)$. Между тем, при непосредственном исследовании случая равносторонности мы получили ранее центроид и две неопределенные точки. Можно ли трактовать их следующим образом: если треугольник близок к равностороннему, то координаты двух неопределенных точек близки к тройке $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x} : \frac{1}{x}\right)$, где x- мало? Ведь если так, то, умножив всю тройку на x, в пределе получим центроид $G\,(1 : 1 : 1)$. Так-то, конечно, оно так, но тогда нарушается непрерывность — при ничтожном «шевелении» треугольника этот центроид расщепляется на две *внешние* точки.

Так что предпочтительнее всё же выделять случай равносторонности в особый, где общая формула для трех корней не вполне применима.

В равнобедренном случае наши формулы должны оставаться в силе ($\Delta < 0$ для равнобедренных, но не равносторонних треугольников!). В бесконечность может отправиться, согласно компьютеру, как точка P_1, так и точка P_3 (но всегда что-нибудь одно!), в зависимости от длин сторон или углов треугольника[46]. А вот точка P_2 всегда конечна, поскольку все ее координаты положительны, рис. 16 – 17.

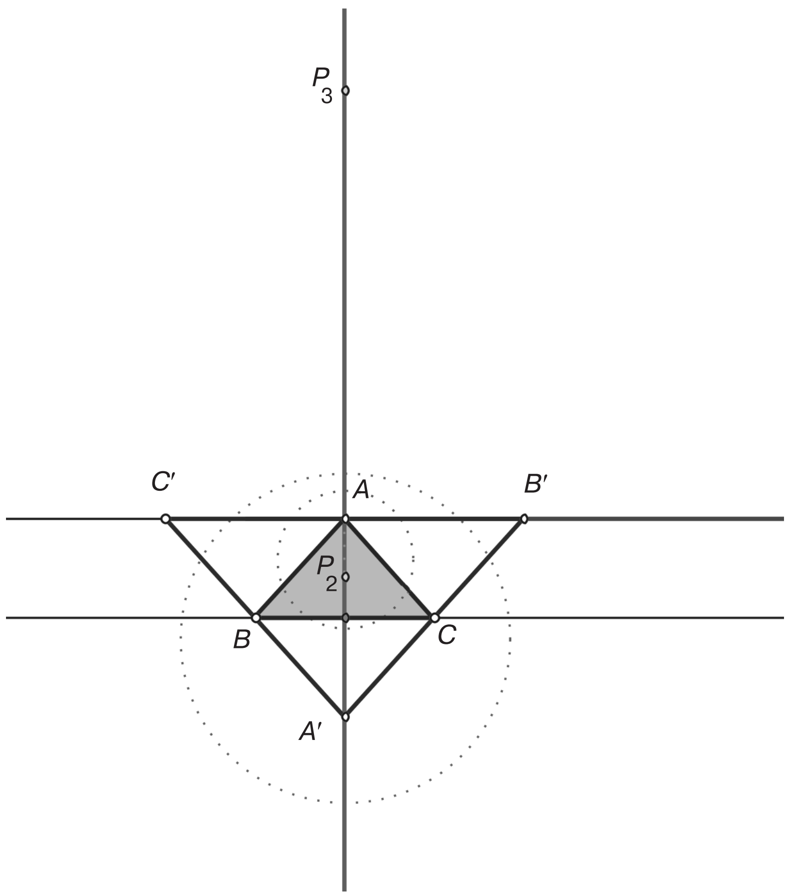


Рис. 16

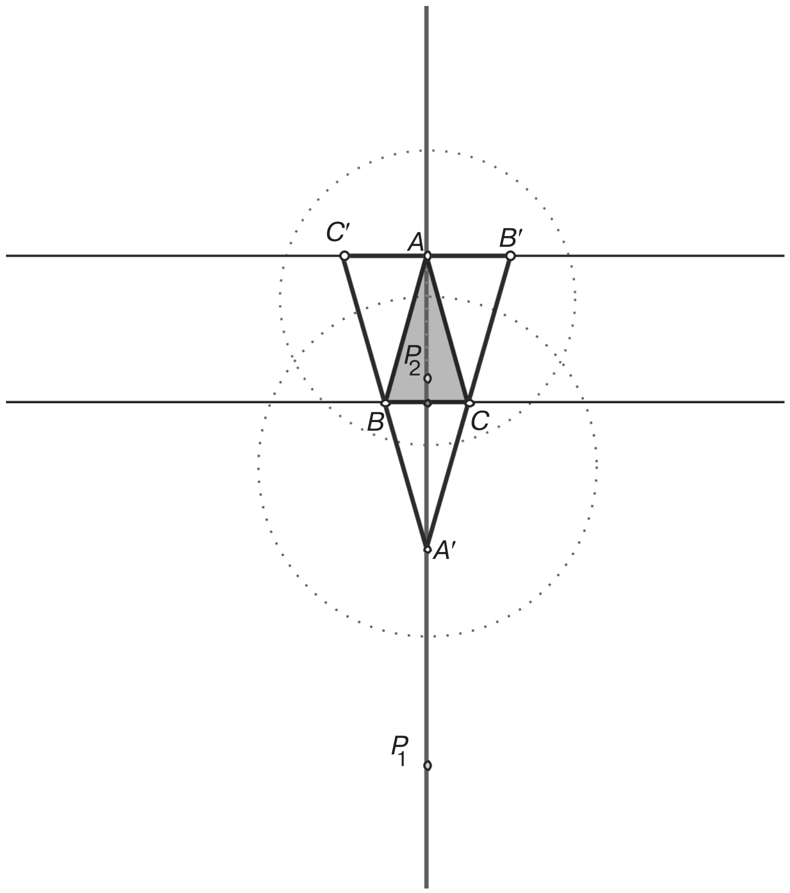


Рис. 17

Представим теперь, можно сказать, фотопортреты главных персонажей: *Соло* — рисунки 18 – 20.

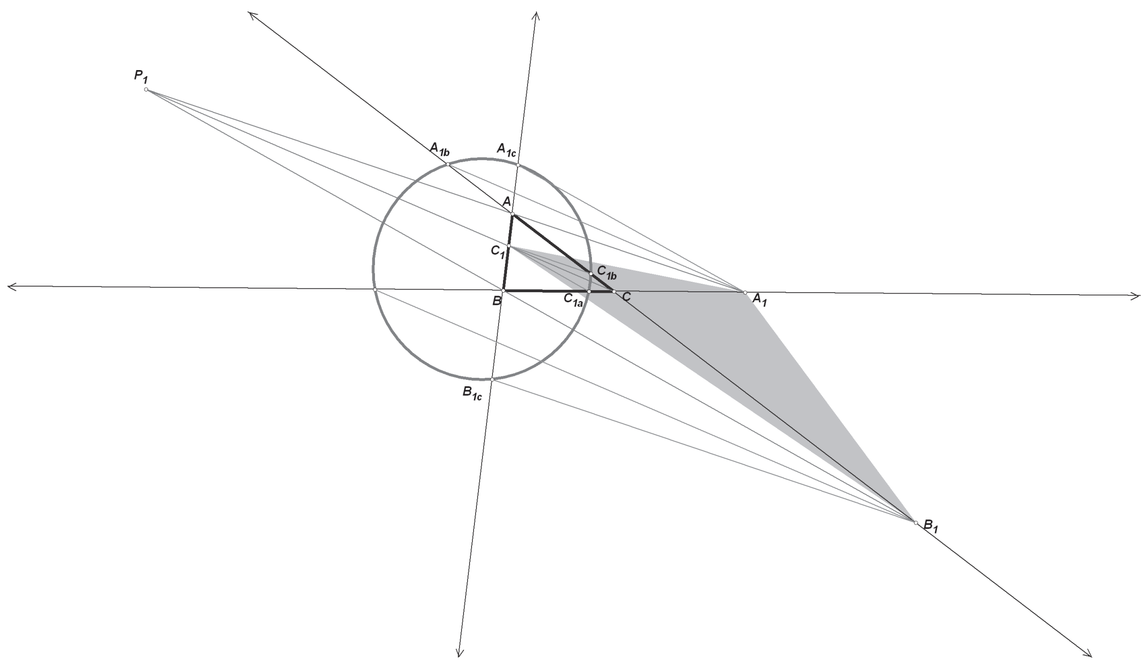


Рис. 18

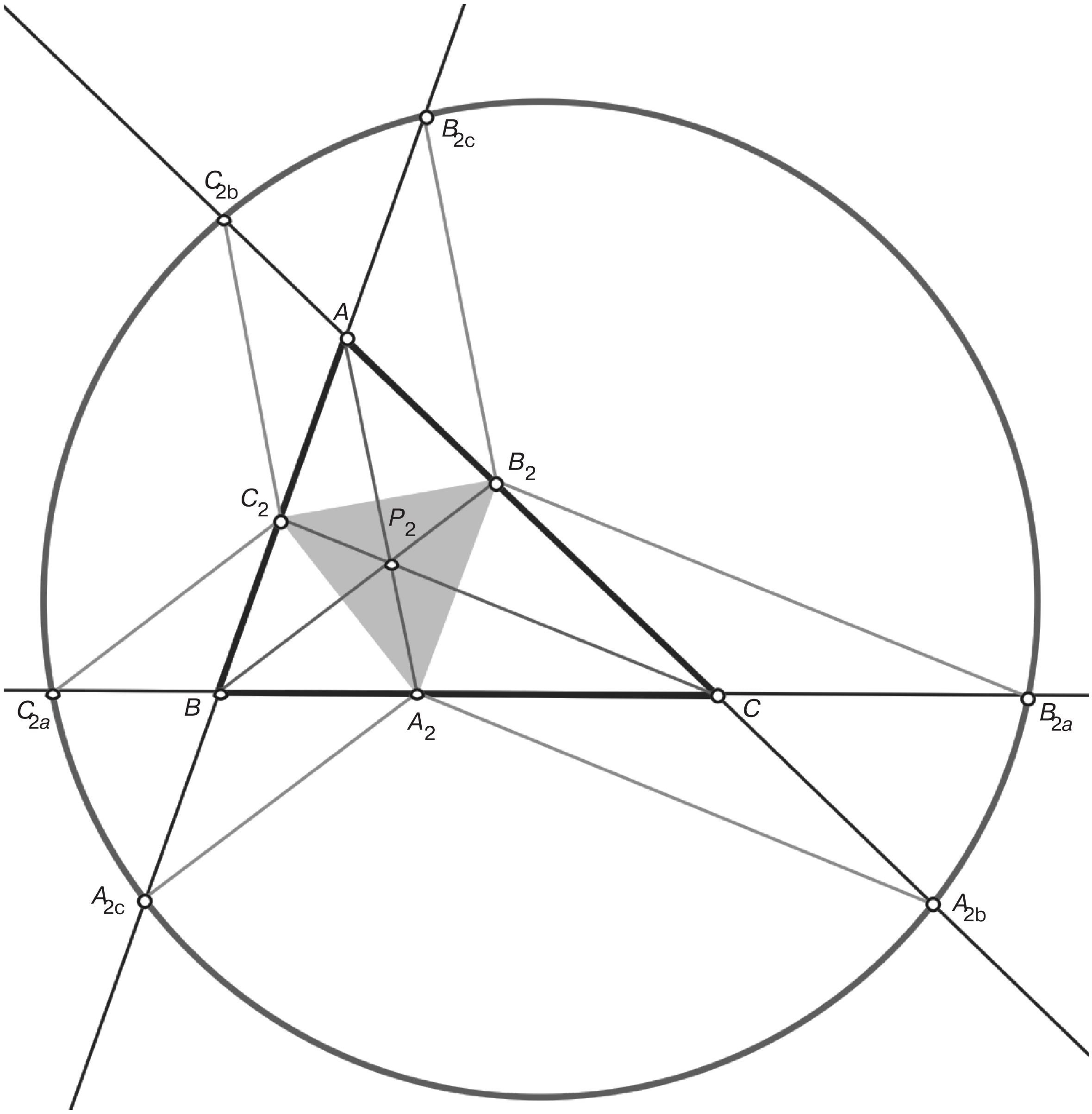


Рис. 19

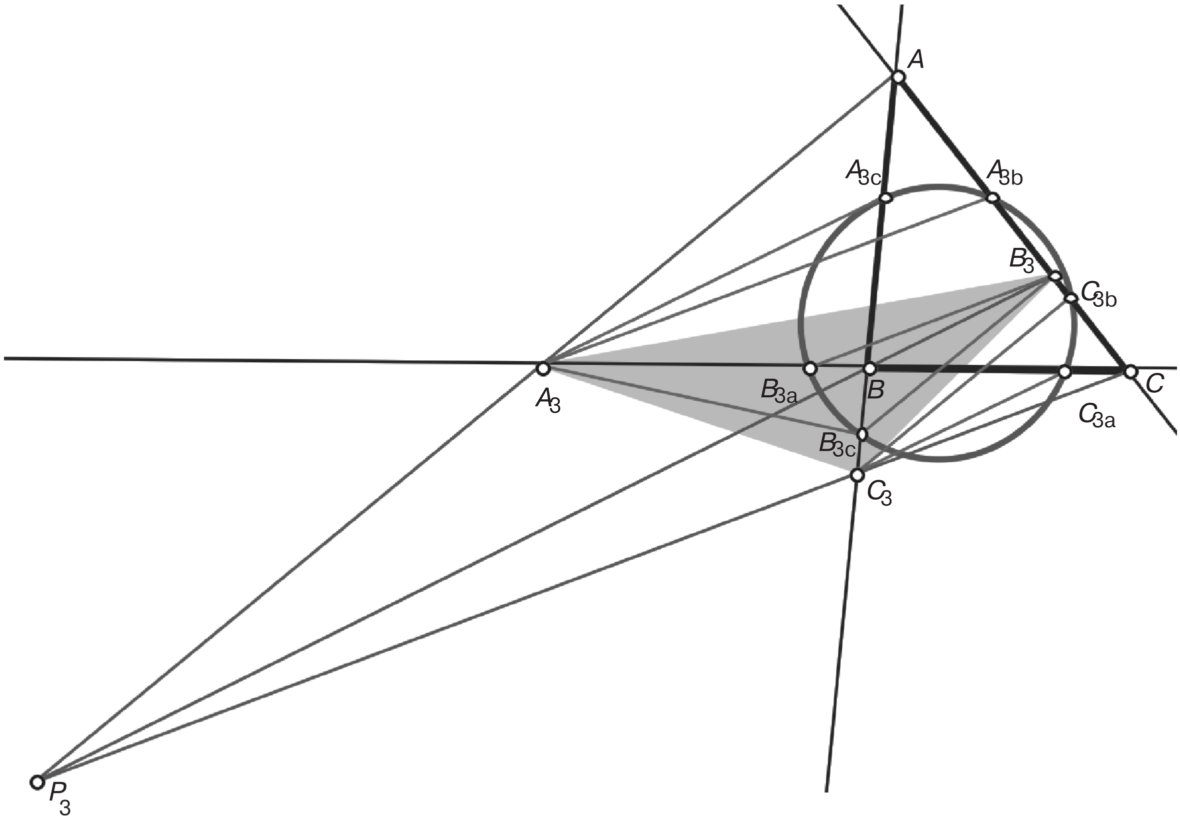


Рис. 20

Семейный портрет в интерьере — рисунок 21.

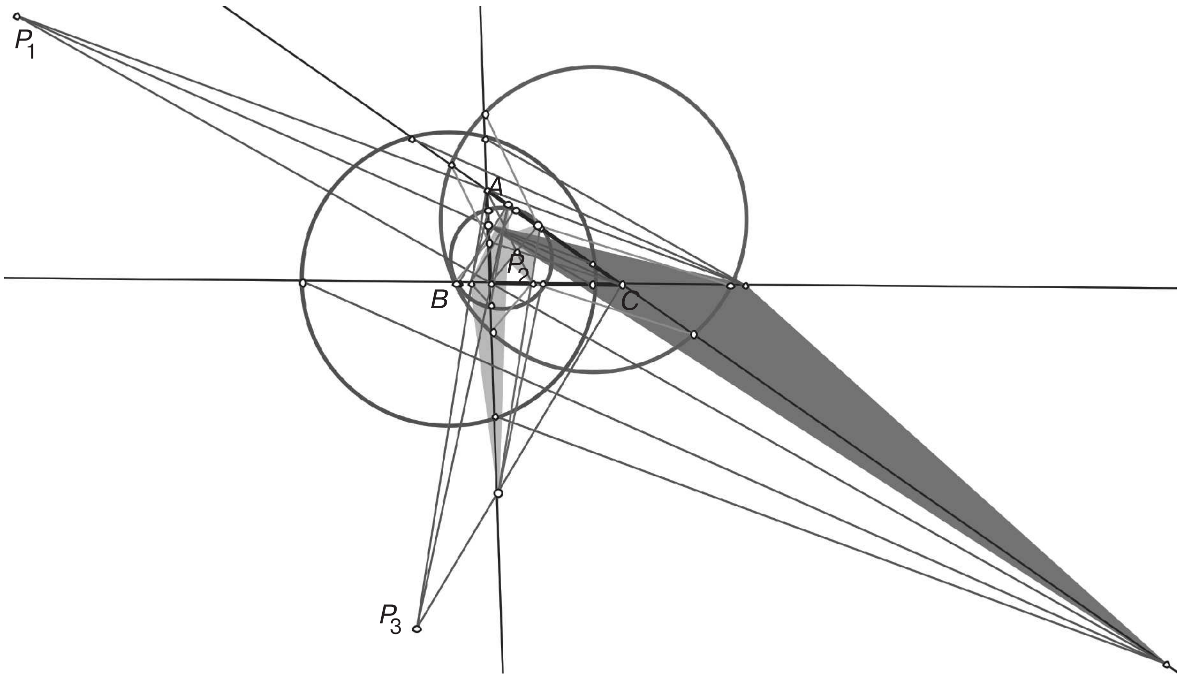


Рис. 21

Завершим же этот параграф одним любопытным наблюдением.

Утверждение 6.7. Коника рассматриваемого семейства, порожденная центроидом G, есть эллипс, гомотетичный описанному эллипсу Штейнера[47]. Центр гомотетии совпадает с точкой G, а коэффициент $k = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Доказательство. Вернемся к случаю правильного треугольника, разобранного в предыдущем разделе. Аффинным преобразованием правильный треугольник можно перевести в произвольный, рис. 22. А поскольку аффинное преобразование (см. [1] и [3], глава 29) сохраняет параллельность прямых и отношения длин отрезков, лежащих на одной (или параллельных) прямой — центр правильного треугольника перейдет в центроид данного, описанная окружность — в описанный эллипс Штейнера, а окружность нашего семейства, отвечающая правильному треугольнику — в конику, порожденную центроидом. При этом, понятно, коника окажется гомотетична (как в условии) описанному эллипсу Штейнера[48]. □

Заметим еще, что получившийся эллипс задается довольно симпатичным уравнением. В самом деле, подставив единицы в уравнение коники, получим:

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 10yz + 10zx + 10xy = 0 \Leftrightarrow 4\,(yz + zx + xy) + 3\,(x + y + z)^2 = 0.$$

Впрочем, уравнение описанного эллипса Штейнера, конечно, посимпатичнее будет: $xy+yz+zx = 0$, см. [10][49].

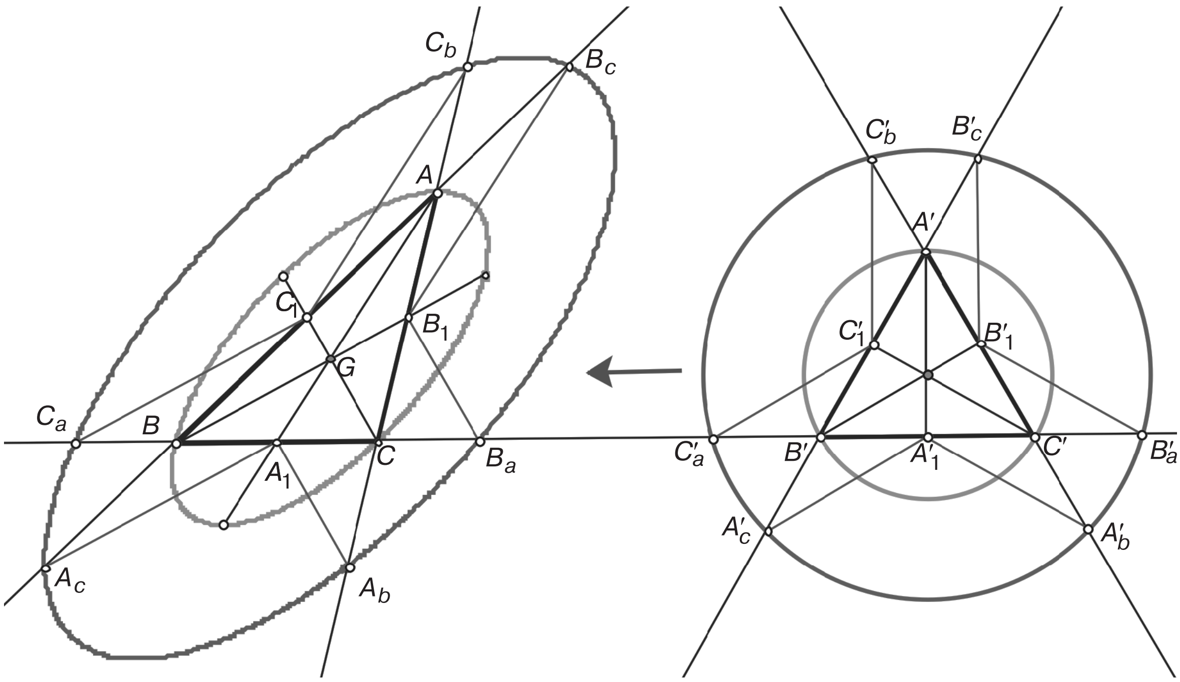


Рис. 22

Примечания

[1] *Тщетно, художник, ты мнишь, что творений своих ты создатель!*
Вечно носились они над землею, незримые оку.
(Алексей К. Толстой.)

[2] Один только, по словам В. И. Арнольда, *«безобразный спор, разгоревшийся между Ньютоном и Лейбницем»* чего стоит! (весьма нелицеприятные подробности см. в [18]).

[3] *И облик каждой складкой говорит,*
Чем он живёт. А для чего в итоге?
Из-за Гекубы!
Что он Гекубе? Что ему Гекуба?
А он рыдает.
(Вильям Шекспир. Гамлет, принц датский. Перевод Б. Пастернака.)

[4] В духе так называемого *парадокса Гемпеля.*

— *По мнению изобретателя парадокса профессора Карла Гемпеля, рыжая корова увеличивает вероятность того, что все вороны черные* (см. [19]).

[5] Так в тексте. Но это — для простоты. Утверждение остается справедливым, как увидим далее, и для произвольного треугольника.

[6] Известно, что задачи, предлагаемые на международные олимпиады, проходят строгий отбор. Компетентное и профессиональное жюри предварительно оценивает их сложность, эстетическую составляющую и *новизну.*

[7] *«Новый Гоголь явился!» — закричал Некрасов, входя к нему с «Бедными людьми». — «У вас Гоголи-то как грибы растут», — строго заметил ему Белинский, но рукопись взял.*

(Федор Достоевский. Дневник писателя.)

[8] Перелистывая на днях очень часто цитируемую в зарубежных статьях книжку [17], я наткнулся на них и там.

На самом деле тот факт, что в случае с так называемой *окружностью Гаврилюка* жюри ММО слегка оплошало (*и на эксперта бывает проруха!* И ни один из сочинителей геометрических задач не застрахован от невольных повторений ранее уже известных вещей — ибо тезис Козьмы Пруткова *«нельзя объять необъятное!»* никто не отменял) — должен был бы насторожить (прозвенев тревожным звоночком), а не дать повода (как оно, к сожалению, тогда и вышло) к пустому бахвальству. Помнится, замелькали даже злорадные какие-то мысли в голове, навроде: *Окружности придумывать — это вам не огурцы солить!* (Перефразируя однажды услышанный от И. Ф. Шарыгина афоризм *«Рецензии писать — не огурцы солить»* — как было сказано в ответ на робкую просьбу отписать чего-нибудь *позитивное* в издательство насчет рукописи моего давнего опуса *"Знакомство с теорией вероятностей"*. Который, кстати сказать, совсем недавно наконец-то был опубликован издательством "Илекса" — правда, волею редактора под более помпезным заголовком "Теория вероятностей".) А вспоминать-то надо было другое: *"Не судите, да не судимы будете!"*. Но ничего, вскоре всё равно пришлось.

[9] *Педальным* (*подерным*) треугольником точки P относительно треугольника ABC называют треугольник $P_aP_bP_c$, образованный основаниями перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA, AB соответственно. При этом педальный треугольник вырождается в отрезок (и лежит на так называемой *прямой Симсона* — см [3], задача 5.105.) тогда и только тогда, когда точка P расположена на описанной около треугольника ABC окружности.

[10] Мы предполагаем, что эта пара не содержит бесконечно удаленную точку (или, другими словами, точку, лежащую на описанной около ABC окружности). А читателя призываем поразмыслить над тем, как следует переформулировать теорему в «бесконечном» случае. Есть мнение, что, если точка P стремится «примоститься» на описанную окружность, её окружность Дроз-Фарни «распремляется» в соответствующую точке P прямую Симсона. Окружность же, соответствующая P_l, трансформируется в бесконечно удаленную прямую.

[11] Единственным оно остается и по сей день — и потому наша окружность явно уступает большинству своих именитых коллег (см. §1). (Почти все из них обладают многими другими интересными свойствами, помимо «голого» факта существования.) Не говоря уже о несколько тяжеловесном описании самой конструкции. Например, даже хорошо успевающему по геометрии среднему школьнику не объяснишь так сразу, *с полоборота,* в чем состоит геометрическая суть точки X_{194} — потребуется какое-то время.

[12] Иначе выражаясь — теоремы о постоянстве произведения отрезков хорды или секущей и её внешней части, проходящих через фиксированную точку.

[13] К тому моменту мне стало ясно, что геометрическое доказательство существования окружности должно быть и сложным и трудно находимым. По существу, всё упирается в геометрию точки, изотомически сопряженной точке Лемуана. В доступной мне литературе эта точка вообще нигде не упоминается. А вообще-то, ситуации, когда барицентрическое доказательство много проще и короче чисто геометрического, встречаются. К примеру, если существование *прямой*

Эйлера легко и красиво доказывается геометрически, посредством гомотетии, переводящей исходный треугольник в серединный (см. [3] — задача 5.128; [5] — задача 489), то доказательство с помощью геометрии масс (см. [2], [9]) — значительно более громоздко. И ровно наоборот дело обстоит с *прямой Нагеля.* Хотя геометрическое обоснование (использующее всю ту же гомотетию — см. [5], задача 489) суперсложным не назовёшь, но всё-таки оно «потяжелее» будет, чем лаконическое барицентрическое (см. [2], [8], [9]).

[14] Михаил Булгаков. Похождения Чичикова.

[15] Посещаемого, по слухам, многими *олимпиадниками* — прошлыми, настоящими, и, надо полагать, будущими.

[16] 170 по состоянию на 15.03.12 — если быть точным.

[17] *Hyacinthos* — сайт, объединяющий любителей и знатоков Элементарной Геометрии по всему миру. Сюда-то и следовало обратиться с самого начала, если уж степень известности (неизвестности) конструкции так беспокоила. Но, должно быть, подсознательная боязнь «разоблачения» удерживала, до поры, от этого шага.

— И эти-то надоевшие фокусы я лишь сегодня распознал, до одури навозившись с тем субъектом. А субъект всё стоял, прислонясь к стене, по-прежнему полагая себя пройдохой, и довольство собою румянило его щеки.

— Вы разгаданы! — крикнул я и даже легонько хлопнул его по плечу.

. . . А потом вздохнул с облегчением и, выпрямившись во весь рост, вошел в гостиную.

(Франц Кафка. Разоблаченный проходимец.)

[18] Впрочем, геометрического доказательства никто так всё же и не привёл, так что вопрос этот остаётся открытым.

Зацепки, возможно, имеются в сообщении (опять!) французского (sic!) геометра Жана-Пьера Эрманна (Jean-Pierre Ehrmann) — см. [10], [11] — messages # 20306, #20308. Сам Жибер, как и я, пользовался барицентрическими координатами — см. [10] — message #20322. Там же он выразил уверенность в том, что старым мастерам окружность была известна: «*I'm pretty sure one can find it in older literature*», если дословно.

[19] Дело в том, что Бернард Жибер исключительно плодовит, как автор содержательных геометрических произведений — см. [15].

[20] Полушутливое обращение «*Папа*» (в смысле «*Римский*») отражает те, полностью заслуженные, почёт и уважение, которыми пользуется в кругу людей, знающих толк в предмете, совершенно *блистательный геометр Жан-Пьер Эрманн* — безо всяких ложных преувеличений, *геометрический маг и волшебник, чародей и кудесник.*»

[21] По чересчур раздутым авторским самолюбию и тщеславию, в первую очередь. Но не в них одних тут «собака порылась», думается. Однако одними словами здесь трудно передать «всю полноту чувств», всю эту *бурю в стакане воды.* Личный опыт необходим! Грубо говоря, переживания из тех, которые на собственной шкуре только хорошо постигаются!

[22] *Пора бы исключить (если этого ещё не проделано) из школьных программ подобные, с позволения сказать, произведения — от которых за версту шибает* имперским духом. *Как будто нам нечего предложить взамен нашей молодежи!*

(Сдается, что примерно так мыслят отдельные представители нашей либеральной общественности.)

[23] Почти двухнедельную. Перефразируя первого чемпиона мира по шахматам Вильгельма Стейница, хочется воскликнуть (с горечью): *«геометрия — не для слабых духом!»*

[24] Естественно, предполагается такой выбор коники, что из каждой вершины треугольника касательные к ней можно провести.

[25] И потому, замечу, конструкция эта прекрасно соответствует заявленной в нашей статье тематике.

[26] См. §5, самое начало.

[27] Который мы на рисунке всё же обозначили буквой D — и то сказать, не в Америке ведь живём!

[28] Правда, Поль Ю рассматривает ситуацию под немного другим углом: треугольник $A'B'C'$ (в наших обозначениях) он считает исходным, а треугольник ABC — «производным» от него *тангенциальным* (т. е. образованным касательными к описанной около $A'B'C'$ окружности). Но сути дела это, конечно же, не меняет.

[29] Вотще я этого от него домогался (пускай и довольно косноязычно — ибо депрессия уже на тот момент начинала сказываться) — см. message #20320, оставшееся безответным.

[30] П. Долгирев попробовал, но так и не сумел довести выкладки до победного конца. Уж очень громоздкие «крокодилы» повылезали.

[31] Термин, вошедший в повседневный геометрический *сленг* с легкой руки выдающегося математика Джона Конвея.

[32] *Проверено электроникой!* — т. е. Живой Геометрией. Между прочим, богатая получилась, в целом, конфигурация — много окружностей, их центров и касательных. Непременно должны наличествовать разнообразные внутренние связи — возможно, любопытные. Словом, широкое поле деятельности открывается для нынче популярной так называемой *проектной деятельности учащихся* — от *успешности* которой (наряду с такими значимыми факторами, как результаты ЕГЭ и математических олимпиад) *напрямую* зависит финансирование образовательного учреждения.

[33] *Бывают дни, когда опустишь руки,*
И нет ни слов, ни музыки, ни сил.
В такие дни я был с собой в разлуке,
И никого помочь мне не просил.
И я хотел идти, куда попало,
Закрыть свой дом и не найти ключа…
(А. Макаревича.)

[34] Как в той же самой песенке получилось, которая, несмотря на столь скорбный зачин, оканчивалась сравнительно бодрым стишком:
Но верил я — не всё ещё пропало:
Пока не меркнет свет, пока горит свеча…
И пусть сегодня дней осталось мало,
И выпал снег, и кровь не горяча.
Я в сотый раз опять начну сначала:
Пока не меркнет свет, пока горит свеча.
Именно так я и поступил, последовав неукоснительно мудрым бардовским рекомендациям: *начал в сотый раз сначала.*

[35] Как и прежде, тройка координат точки P не содержит нулей.

[36] И является *однородным* как относительно коэффициентов, так и относительно переменных, т. е. не меняется (переходит в равносильное), если все коэффициенты (или все переменные) умножить одновременно на любой постоянный ненулевой множитель.

[37] Одно из которых, ясное дело, является следствием остальных. Всё же выпишем их все.

[38] И в этом случае легко проверить, что случай $f = g = h = 0$ не проходит.

[39] Эти соотношения легко вывести, располагая уравнением коники и уравнением окружности $a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + x)\,(u_0x + v_0y + z_0x){=}0$ (см. [6], [9]).

[40] Чего всегда можно добиться, разделив исходные барицентрические координаты точки на суммарную массу точки.

[41] Естественно, все три формы записи ключевых уравнений равносильны друг дружке.

[42] Это имеет кое-какой геометрический смысл: двигаясь вдоль любой прямой, параллельной основанию и уходя всё дальше и дальше, «в бесконечность»— будем получать коники, всё более и более «похожие» на окружность.

[43] Признаемся, здесь мы вновь воспользовались услугами *Mathematica 5.1*, сэкономив на вычислениях немножко времени. Конечно, раскрытие всяких скобок и приведение разнообразных подобных в данном случае еще вполне по силам человеческому интеллекту.

[44] Отметим тот радостный факт, что возникшее кубическое уравнение уже имеет *приведенный вид*, т. е. коэффициент при второй степени — *нулевой*, поэтому нет надобности в соответствующей линейной замене. А вот если бы мы с самого начала стремились получить уравнение относительно p, то также пришли бы к некоему кубическому — но коэффициент при квадрате еще пришлось бы потом «занулять».

[45] Конечно, общепринятые обозначения коэффициентов p и q лучше. Но, увы, эти буквы уже заняты.

[46] Пытливому читателю оставляем этот вопрос (выявить явную форму зависимости) в качестве увлекательного упражнения. Гипотеза такова: Пусть $b = c$. Тогда, если $\angle A < \frac{\pi}{3}$, то бесконечно удаленной будет точка P_3, а если $\angle A > \frac{\pi}{3}$ — то P_1. Доказательство должно использовать рассуждения, сходные приведенным в §8.

[47] Так называют описанный около треугольника эллипс с центром в G. Естественно, описанный эллипс Штейнера и вписанный гомотетичны: центр гомотетии совпадает с центрами эллипсов, а коэффициент равен 2.

[48] Счётное (*«левополушарное»*) доказательство также, конечно, имеется. И основано оно на следующей формуле, описывающей гомотетию с центром в G в барицентрических координатах: $H_G^k(x:y:z) = (x' = 3kx + (1-k)s : y' = 3ky + (1-k)s : z' = 3kz + (1-k)s), s = x + y + z$.

Вывод этой формулы аналогичен выводу *леммы* из утверждения 3.5 §3.

[49] И если описанная окружность является геометрическим местом точек, которые под действием изогонального сопряжения переходят в бесконечно удаленные — то аналогичную роль описанный эллипс Штейнера играет для изотомического сопряжения.

Литература

[1] А. Акопян, А. Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.,МЦНМО, 2011.

[2] А. Мякишев. Элементы геометрии треугольника. М., МЦНМО, 2009.

[3] В. Прасолов. Задачи по планиметрии. М., МЦНМО, 2007.

[4] С. Табачников, Д. Фукс. Математический дивертисмент: 30 лекций по классической математике. М., МЦНМО, 2011.

[5] И. Шарыгин. Геометрия. Планиметрия. (Задачник 9-11). М., Дрофа, 2001.

[6] C. Bradley. The Algebra of Geometry. Cartesian, Areal and Projective Coordinates. UK, Bath, Highperception Ltd, 2007.

[7] C. Kimberling. Encyclopedia of Triangle Centers. http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/

[8] R. Honsberger. Episodes in Nineteenth and Twenties Century Euclidean Geometry. (New Mathematical Library, issue 37). The Mathematical Association of America, 1995.

[9] P. Yiu. Introduction to the Geometry of the Triangle.
http://math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf

[10] Hyacinthos messages. http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

[11] Art of Problem Solving. http://www.artofproblemsolving.com/
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=444143

[12] Forum Geometricorum. http://forumgeom.fau.edu/

[13] П.Долгирев. О касании коник и прямых, Математическое Образование, 3-4 (59-60), 2011.

[14] B. Gibert. Tucker Cubics and Bicentric Cubics. http://bernard.gibert.pagesperso-orange.fr/files/Resources/cubTucker.pdf

[15] Bernard Gibert's site Cubics in the Triangle Plane http://bernard.gibert.pagesperso-orange.fr/index.html

[16] J.-P. Ehrmann, F.J. Garcia Capitan, A. Myakishev, Construction of Circles Trough Intercepts of Parallels to Cevians, Forum Geom., 30 (2011) 261-268. http://forumgeom.fau.edu/
http://forumgeom.fau.edu/FG2011volume11/FG201130index.html

[17] R. Johnson. Advanced Euclidian Geometry. Dover Publications, New York, 2007.

[18] В. Арнольд. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М., Наука, 1989.

[19] М. Гарднер. А ну-ка, догадайся! М., Мир, 1984.

Мякишев Алексей Геннадьевич,
преподаватель математики
Химического Лицея №1303, г. Москва.

Email: myakishev62@mail.ru

Учащимся и учителям средней школы

Введение в теорию комбинаторных игр. Простейшие комбинаторные игры

И. Фролов

Статья представляет собой введение в теорию комбинаторных игр, на примере игры "ним" и аналогичных игр, математическая теория которых достаточно полно разработана. Доступна учащимся старших профильных физико-математических классов.

Игра ним — Что такое комбинаторная игра — P-позиции и N-позиции — Игры вычитания — Ним-значения — Ним мизер — Приложения — Задачи

В сюрреалистическом фильме "*В прошлом году в Мариенбаде*"[1] один персонаж (мистер М) объясняет окружающим (в том числе некоему мистеру X) правила одной простой игры. М раскладывает на столе карты в четыре ряда в треугольном порядке:

```
      |
    | | |
  | | | | |
| | | | | | |
```

Правила таковы: игроки (их двое) по очереди берут любое ненулевое количество карт, но обязательно из одного только ряда. Тот, кто берет последнюю карту, проигрывает. М по-джентльменски уступает право первого хода X, но выигрывает. То же повторяется и во второй раз (со спичками вместо карт). В третьей партии М ходит первым, но все равно выигрывает[2].

Эта игра называется *ним*.

1. Игра *ним*

Ним — одна из старейших комбинаторных игр; кроме того, *ним* — фундамент, на котором воздвигается математическая теория комбинаторных игр. Название "*ним*" и исчерпывающую теорию этой игры дал Чарльз Л. Баутон (C. L. Bouton), математик из Гарвардского университета, более 100 лет назад [4][3].

Два игрока поочередно берут предметы (карты, спички, камешки, монеты — словом, фишки) из кучек (рядов, коробок). Число кучек и число предметов может быть произвольным, и выкладываются они заранее, до начала игры. Взять разрешается любое число предметов из любой кучки: даже всю кучку целиком, но хотя бы один предмет взять обязательно, и брать предметы можно только из одной кучки. Игрок, взявший последний предмет, выигрывает игру[4].

---

[1] Фильм режиссера Алена Рене "L'Année dernière à Marienbad" ("Last Year at Marienbad") получил на Международном кинофестивале в Венеции в 1961 г. премию "Золотой лев".

[2] Ходы игроков во всех трех играх указаны в приложении 1 к параграфу.

[3] В некоторых публикациях, например, в [3], эта игра называется "*фан-тан*". См. по этому поводу приложение 2.

[4] Именно такое правило — победителем объявляется игрок, делающий последний ход — считается стандартным (или нормальным), в отличие от игры в фильме Рене.

Существуют различные модификации правил игры, о которых речь будет идти ниже, — они приводят к различным версиям нима. Менее приятно наличие расхождений в терминологии. Так, большинство авторов называют позицию выигрышной, если игрок, делающий в ней ход, может форсировать выигрыш. Харди и Райт в своем классическом учебнике теории чисел [1], напротив, называют такую позицию проигрышной, объясняя название тем, что игрок проигрывает, если своим ходом пойдет в эту позицию. К настоящему времени установилась традиция называть подобную позицию N-позицией, т.е. дающей преимущество следующему (next) игроку, в отличие от P-позиций, дающих преимущество предыдущему (previous) игроку. Баутон, а затем Витгофф [7] называли P-позицию безопасной (safe), так как в нее ходить безопасно; а N-позицию — небезопасной: в нее ходить опасно [5].

Позиция в ниме записывается путем перечисления размеров имеющихся кучек, например, (a, b, c) — позиция, в которой есть три кучки, в первой a предметов, во второй b, а в третьей — c.

Назовем позицию **выигрышной**, если в ней очередь хода принадлежит игроку, который может довести игру до выигрыша, играя наилучшим образом[6]. Любую другую позицию назовем **проигрышной**. Какой бы ход игрок в проигрышной позиции ни сделал, его противник сможет выиграть, если будет делать рациональные ходы. Рациональный (т.е. наилучший) ход в выигрышной позиции состоит в том, что игрок должен оставить своему противнику проигрышную позицию.

Пример 1. Следующие позиции проигрышные:

$$|| \; || \qquad\qquad | \; || \; ||| \qquad\qquad \text{т.е. } (2,2), \quad (1,2,3).$$

Начавшись в последней позиции, игра может развиваться таким образом:

$$(1,2,3) \xrightarrow{\text{I}} (1,2,2) \xrightarrow[\text{II}]{} (2,2) \xrightarrow{\text{I}} (1,2) \xrightarrow[\text{II}]{} (1,1) \xrightarrow{\text{I}} (1) \xrightarrow[\text{II}]{} (0)$$

— игрок I, делавший первый ход, проигрывает.

Если в игре остается одна непустая кучка, то игрок при своем ходе берет из нее все предметы и выигрывает. Так что позиция (m), $m > 0$ — выигрышная.

Предложение 1. В игре *ним* позиция (m, n) выигрышная, если $m \neq n$, и проигрышная, если $m = n$.

Доказательство. Если в игре две кучки одинаковых размеров, то игрок, делающий ход, проигрывает, потому что второй игрок имеет возможность копировать действия первого игрока, уравнивая размеры кучек. Если размеры кучек разные, то первый игрок, забирая из большей кучки необходимое число предметов, оставляет второму игроку проигрышную позицию. □

Предложение 2. Если в игре *ним* кучки содержат по одному предмету каждая, то позиция выигрышная при нечетном числе предметов и проигрышная при четном.

Назовем **четной** позицией такую позицию, в которой, если количество предметов в каждой кучке записать в двоичной системе счисления и расположить числа столбиком, то при суммировании каждого столбца цифр получится четное число. В противном случае позиция — **нечетная**.

Пример 2.

[5] См. также главу 14 книги Мартина Гарднера [2].

[6] В следующем ниже кратком разборе игры *ним* мы следуем Харди и Райту [1, п. 9.8]; однако изменяем терминологию на диаметрально противоположную, поскольку она, по нашему мнению, более соответствует смыслу используемых слов.

$$\begin{array}{rrrr} 2{,}2 & 1{,}2{,}3 & 1{,}3{,}4 & 2{,}3{,}6{,}7 \\ 10 & 01 & 01 & 10 \\ \underline{10} & 10 & 11 & 11 \\ 20 & \underline{11} & \underline{100} & 110 \\ & 22 & 112 & \underline{111} \\ & & & 242 \end{array}$$

Позиции (2,2), (1,2,3) и (2,3,6,7) — четные, (1,3,4) — нечетная.

Теорема 1. В игре *ним* позиция является проигрышной тогда и только тогда, когда она четная.

Доказательство. (1) Предположим, что игрок делает ход в четной позиции; тогда одно из чисел, записанных в столбик, обязательно заменится меньшим, а в двоичной записи чисел в каком-то разряде одна из единиц заменится нулем. Как следствие, четность сменится хотя бы в одном столбце, т.е. позиция станет нечетной.

(2) Если позиция нечетная, то одно из чисел всегда можно заменить на меньшее таким образом, чтобы сделать суммы единиц в колонках четными (например, если четность сумм в колонках **ччнчнч**, то строка $\mathtt{01\underline{1}1\underline{0}1}$ может быть заменена на меньшую $\mathtt{01\underline{0}1\underline{1}1}$ — меняются только подчеркнутые цифры, что соответствует нечетным суммам в колонках.) Следовательно, в нечетной позиции игрок всегда может найти ход, ведущий в четную позицию.

(3) если игрок своим ходом достигает четной позиции, его противник вынужден перевести ее в нечетную (хочет он этого или не хочет), после чего игрок может сделать ход, вновь приводящий к четной позиции. Этот процесс будет продолжаться, и игрок, начавший игру в нечетной позиции, сможет переводить ее в четную снова и снова до тех пор, пока не сделает последний ход, взяв все оставшиеся (в одной, последней кучке) предметы [7]. □

При игре важно уметь распознавать проигрышные позиции, поскольку, чтобы выиграть, игрок должен оставлять противнику именно такие позиции. Проигрышными являются, например, позиции (n, n), $(1, 2n, 2n + 1)$, $(n, 7 - n, 7)$, $(2, 3, 4, 5)$. Комбинация двух проигрышных позиций — также проигрышная; т.е. если (a, b, c) и (a', b', c') — проигрышные позиции, то такой же будет и (a, b, c, a', b', c')

Если в игре всего три кучи, а число предметов в каждой из них не превышает семи, то список всех проигрышных позиций состоит из: $(0, n, n)$, где $0 \leq n \leq 7$, а также $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 5)$, $(1, 6, 7)$, $(2, 4, 6)$, $(2, 5, 7)$, $(3, 4, 7)$, $(3, 5, 6)$.

Пример 3. Найдем выигрывающий ход в позиции (1,3,4). Как мы выяснили выше, эта позиция нечетная, а, следовательно, выигрышная. Чтобы выиграть, игрок должен перевести эту позицию в проигрышную (четную) позицию (1,3,2). Легко видеть, что это единственный выигрывающий ход.

2. Что такое комбинаторная игра

Определим аккуратно основной предмет нашего исследования — понятие комбинаторной игры. Это игра, в которой имеется:

(1) два игрока;

(2) множество возможных позиций игры, обычно конечное;

(3) правила игры, определяющие для каждой позиции и каждого игрока, какие ходы разрешены.

[7] Данный алгоритм правильной игры можно легко запрограммировать, и в середине XX века были созданы специализированные машины-автоматы, реализующие его. Одна из таких машин была выставлена после второй мировой войны в Берлине на английской выставке и с успехом конкурировала с находящимся рядом бесплатным пивным залом. Знаменитый английский математик Алан Тьюринг, создатель первых счетных машин в Великобритании, вспоминал о том, как популярность той машины значительно поднялась после победы над тогдашним бундесминистром экономики Л. Эрхардом.

Далее,

(4) игроки ходят по очереди;

(5) оба игрока знают все ходы, сделанные в игре;

(6) игра заканчивается, когда достигнута позиция, в которой нет возможных ходов для игрока, чья очередь ходить, — во всех таких позициях определено, кто из игроков становится победителем.

Следующие правила применяются, но не всегда:

(7) выигрывает игрок, сделавший последний ход;

(8) игра заканчивается за конечное число ходов;

(9) правила игры не делают различия между игроками.

Несомненно, на память сразу приходят игры, которые не удовлетворяют данным правилам. *Крестики-нолики* — в них игрок, не способный сделать ход, не обязательно проигрывает, а игрок, сделавший последний возможный ход, не обязательно выигрывает, так как возможна ничья. *Шахматы* содержат позиции, ничейные ввиду пата (т.е. позиции, в которой невозможен ход, — в них игрок не проигрывает), а также имеется другая разновидность ничьей — бесконечная, никогда не заканчивающаяся партия (повторение ходов, вечный шах и т.п.). *Нарды (трик-трак)* — содержат случайные ходы, так как используют игральные кости. *Морской бой, морра, камень–ножницы–бумага* — игры без случайных ходов, но игроки в них не имеют полной информации о диспозиции противника или конфигурации его пальцев (тайные, одновременные ходы). *Монополия* не подходит по нескольким пунктам. В ней имеются случайные ходы, игроков может быть более двух; игроки не владеют полной информацией об игре, и игра может, теоретически, продолжаться бесконечно. Игра *Жизнь* Конвея — никогда не завершающаяся игра с нулевым числом игроков. К *покеру* (и другим карточным играм) интерес вызывается несовершенством информации, случайными ходами и возможностью образования *коалиций* (при участии более чем 2 игроков). В частности, в карточной игре *бридж* игроков двое — это команды из двух игроков каждая, и “игрок” не владеет даже всей информацией о “своих” картах. Наконец, *теннис, волейбол, футбол, хоккей* — также игры “двух лиц”, но в них затруднительно определить “позиции” и “ходы”.

Вернемся к нашему определению.

Мы будем изучать исключительно игры с двумя игроками. Теория таких игр детально разработана и не требует привлечения идей из других областей математической теории игр — кооперативных игр, стратегических игр и т.д. Один игрок выигрывает, другой проигрывает. Нет места для переговоров между игроками, объединения игроков в коалиции, мести со стороны одного игрока другому и т.п. Тем не менее, не редкость комбинаторные игры, в которых участвует другое число игроков, большее двух, или меньшее. К последнему виду игр условно могут быть отнесены пасьянсы и различные головоломки[8].

Множество позиций игры обычно конечное, но нам здесь не обойтись без игр с бесконечным числом позиций. Чаще всего без особых пояснений бывает понятно, о конечном или бесконечном множестве идет речь, но мы всегда будем оговаривать, когда будем переходить от рассмотрения игр с конечным множеством позиций к играм с бесконечным числом позиций и наоборот. Иногда отдельно выделяется начальная позиция игры. О конечных позициях речь будет идти ниже.

Относительно условий (4)–(6). Эти условия исключают игры со *случайными* ходами (*игры в кости* или *карточные игры*). Не разрешаются в комбинаторных играх *одновременные* ходы (*камень–ножницы–бумага*) и *тайные* ходы (*морской бой*). Не допускается и ничья за конечное число ходов (*крестики-нолики*) [9].

---

[8] Особо следует отметить игры с компьютером, когда последний исполняет роль одного из игроков. В том случае, когда алгоритм выбора ходов компьютером известен, можно интерпретировать данную ситуацию как игру одного игрока. Сколько участников в игре *компьютер — компьютер*?

[9] Игры с ничьей совершенно исключить из числа комбинаторных нельзя, но мы не будем рассматривать такие игры, разве что только в особых случаях. Причина этому — та же, что и ограничение числа игроков двумя, или же ограничение во многих книгах по математической логике двузначной логикой.

Комбинаторная игра — это игра *с совершенной информацией*: каждый игрок полностью владеет всей информацией о текущей позиции игры, о всех предыдущих позициях, о всех сделанных ходах.

Если считается, что

(7) выигрывает игрок, сделавший последний ход,

то говорят, что это **нормальная** (или **стандартная**) игра, т.е. игра *с нормальным правилом* определения победителя; в такой игре игрок, у которого нет ходов, проигрывает [10]. Если игрок, сделавший последний ход, считается проигравшим, то говорят, что в игре используется правило **мизер** (**misère**); будем называть подобную игру мизерной игрой, или мизерной версией игры[11]. Всегда, когда не оговаривается противное, речь будет идти о нормальных играх.

Если игра никогда не заканчивается, фиксируется ничья. Это возможно, если ходы повторяются, игра входит в бесконечный цикл, или же если в игре существует бесконечная цепочка различных ходов (и позиций)[12]. Однако мы почти всегда принимаем следующее **условие окончания игры**, исключающее подобные ситуации:

(8) игра заканчивается за конечное число ходов.

Правила игры точно определяют, какие ходы может сделать тот или иной игрок в каждой позиции. Ходы представляют собой переходы из одной позиции в другую. Те позиции, в которые можно перейти из данной позиции, называются **опциями** данной позиции. Если

(9) правила игры не делают различия между игроками,

а точнее, если в каждой позиции оба игрока имеют одинаковые опции, игра называется **беспристрастной (impartial)**, в противном случае игра называется **пристрастной (partizan)**[13]. В частности, пристрастными играми являются игры, в которых один игрок управляет объектами одного класса, а другой — объектами другого класса, например, белыми фигурами и черными фигурами соответственно. Согласно данному определению, *ним* — беспристрастная игра, а *шахматы* — пристрастная игра.

3. P-позиции и N-позиции

Рассмотрим комбинаторную беспристрастную нормальную игру. Будем предполагать, что множество позиций игры конечно и в ней нет ничьих. Изучать такие игры существенно проще, чем пристрастные игры, мизерные игры, бесконечные игры и игры с ничьей, поэтому прежде всего на них и сосредоточим свое внимание. Теория беспристрастных игр берет свое начало в трудах Роланда П. Шпрага (Roland P. Sprague) 1936 г. [6] и П. М. Гранди (P.M. Grundy) 1939 г. [5].

Назовем позицию **терминальной** (T**-позицией**), если в ней нет возможных ходов; P**-позицией**, если она выигрышна для предыдущего игрока (Previous), т.е. только что сделавшего ход; N**-позицией**, если она выигрышна для следующего (Next) игрока, т.е. того, кто в данной позиции будет ходить. Позиция выигрышна для конкретного игрока, если тот в состоянии форсировать выигрыш, т.е. довести игру до победы независимо от того, что предпринимает его противник. Если в игре фиксирована начальная позиция, то об игре можно говорить как о N-игре или P-игре. Напомним, что **опциями** называются позиции, в которые можно перейти из текущей позиции в один ход.

[10] Нормальными игры названы так потому, что большинство игр следуют данному соглашению. Логичнее считать игрока проигравшим, если у того нет ходов. (Если у вас нет хорошего хода, вы проиграли. Если у вас вообще нет ходов, вы проиграли.)

[11] Известно выражение “игра в поддавки”.

[12] При исследовании игр с ничьей различают два вида ничьих: 1) *статическая* ничья (tie) — это терминальная позиция, не являющаяся ни проигрышной, ни выигрышной (например, в крестиках-ноликах); 2) *динамическая* ничья (draw) — это нетерминальная позиция, в которой ни один игрок не может форсировать выигрыш, но всегда есть непроигрывающий ход (например, вечный шах в шахматах).

[13] Используются и другие термины — симметричные и несимметричные игры, равноправные и неравноправные игры.

Предложение 3. Всякая позиция игры является P-позицией или N-позицией.

Доказательство. Назовем первым игроком того, кто делает ход в данной позиции. Используем в доказательстве индукцию. Если позиция терминальная, то первый игрок проигрывает, поскольку у него нет ходов. Предположим, что позиция нетерминальная; тогда данная позиция имеет опции и по предположению индукции все они являются P- или N-позициями. Если все опции — N-позиции, первый игрок проигрывает, поскольку, какой ход он ни делает, второй игрок форсирует выигрыш. Стало быть, рассматриваемая позиция — P-позиция (рис.1,а). В противном случае найдется P-опция, и ход в нее позволяет первому игроку добиться победы. В этой ситуации исходная позиция — N-позиция (рис.1,б). □

Рис. 1: Опции P- и N-позиций

Таким образом, множество всех позиций игры разбивается на два класса, P и N [14]. Будем говорить, что имеется P/N-разбиение игры. Если игра начинается в N-позиции, то выигрывает первый игрок, если в P-позиции, то выигрывает второй игрок.

Предложение 4. P-позиции и N-позиции характеризуются следующими тремя свойствами:
1) все терминальные позиции суть P-позиции;
2) из всякой N-позиции существует по крайней мере один ход в P-позицию;
3) из всякой P-позиции любой ход ведет в N-позицию.□

(Для игр с правилом misère в 1-м условии должно быть сказано, что все терминальные позиции суть N-позиции.)

С помощью следующего алгоритма можно все позиции разметить как P- или N-позиции.

Алгоритм Эратосфена[15].
Шаг 1°: пометим все терминальные позиции как P-позиции;

2°: пометим все позиции, из которых можно достичь помеченной P-позиции в один ход, как N-позиции;

3°: найдем позиции, из которых в один ход можно достичь только помеченных N-позиций, и пометим их как P-позиции;

4°: если не найдено новых P-позиций на шаге 3°, стоп; иначе вернуться к шагу 2°.

Теперь пора перейти к примерам.

4. Игры вычитания

Игры вычитания — это класс комбинаторных игр, в которых задано положительное целое n и множество S положительных целых чисел. Двое игроков ходят поочередно. Ход состоит в вычитании из первоначально равного n числа какого-то числа $s \in S$. Последний, кто делает ход, выигрывает. Можно иначе интерпретировать правила: имеется кучка из n предметов (например, спичек), и игроки по очереди забирают из нее несколько предметов. Сколько — это определяется числами из заданного множества[16].

[14] Для конкретной позиции x фраза "x есть P-позиция" может быть выражена символьно: $x \in P$. Аналогично, $x \in N$ означает, что "x есть N-позиция".

[15] В названии алгоритма используется аналогия с известным из теории чисел "решетом Эратосфена".

[16] Английское название игр вычитания — *take-away games*.

Пример 4. Пусть $S = \{1, 2, 3\}$, $n = 21$; тогда P-позиции: $0, 4, 8, 12, 16, 20$, а остальные — это N-позиции. Метод рассуждения, применимый в данном случае, называется **обратной индукцией**. Если $n = 1, 2$ или 3, игрок, чья очередь ходить, забирает все сразу и выигрывает. Предположим, что $n = 4$. Тогда игроку, чья очередь ходить, придется оставить 1,2 или 3 предмета и его противник сможет выиграть. Значит, число 4 — проигрывающее для следующего игрока и выигрывающее для предыдущего игрока. При $n = 5, 6$ или 7 игрок может вычесть число соответственно 1, 2 или 3 и прийти к 4, что для его противника означает проигрыш. И так далее.

P/N-разбиение игры отражено в следующей таблице. Для каждого n метку (P или N) соответствующей позиции будем обозначать $o(n)$[17].

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20...
$o(n)$	P	N	N	N	P	N	N	N	P	N	N	N	P	N	N	N	P	N	N	N	P...

Теперь пусть к той же игре применяется правило мизер. Игрок, оставшись с $n = 1$ предметом, должен его взять и проигрывает. Если же $n = 2, 3$ или 4, игрок, чья очередь ходить, может оставить второму игроку 1 предмет и выигрывает. При $n = 5$ игрок не способен выиграть, так что это P-позиция. Если $n = 6, 7$ или 8, то игроку в качестве выигрывающих ходов следует вычитать числа соответственно 1, 2 или 3, чтобы прийти к 5. И так далее.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20...
$o(n)$	N	P	N	N	N	P	N	N	N	P	N	N	N	P	N	N	N	P	N	N	N...

Игра вычитания при $S = \{1, 2, \ldots, k\}$ и с заданным числом n также иногда называется *ним*, но всегда играется с одной кучей предметов[18]. Совершенно аналогично можно найти условия, которым удовлетворяют P-позиции данной игры. Второй игрок выигрывает, если $n \equiv 0 \pmod{k+1}$ в нормальной игре и $n \equiv 1 \pmod{k+1}$ в игре мизер.

Пример 5. Игра "*вычитание квадратов*". Это игра вычитания с множеством $S = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$. Начертим таблицу и расставим в ней метки P и N, соответственно тому, является ли позиция x P- или N-позицией. Это можно сделать с помощью алгоритма Эратосфена.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20...
$o(x)$	P	N	P	N	N	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?...

Определим функцию удаленности $r(x)$, задав ее с помощью правил:

1) $r(x) = 0$, если x — терминальная позиция;
2) $r(x) = 1 + \min r(z)$ среди всех возможных P-опций z, если x — N-позиция;
3) $r(x) = 1 + \max r(z)$ среди всех возможных опций z, если x — P-позиция.

Удаленность полезна при поиске стратегии игры в проигрышной позиции, максимизирующей число ходов при правильной игре противника, и тем самым увеличивающей вероятность его ошибки.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20...
$o(x)$	P	N	P	N	N	P	N	P	N	N	P	N	P	N	N	P	N	P	N	N	P...
$r(x)$	0	1	2	3	1	2	3	4	5	1	4	3	6	7	3	4	1	8	3	5	6...

Например, в позиции $x = 14$ у игрока имеется три опции: 13, 10 и 5 (вычитается 1, 4, 9 соответственно); из них P-опциями являются 10 и 5. Таким образом, $r(14) = 1+\min(r(10), r(5)) = 3$. Это означает, что игрок, делая ход при $x = 14$, может объявить, что выиграет в 3 хода Позиция $x = 17$ является P-позицией. Все ее опции: 16, 13 и 8 — суть N-позиции, $r(17) =$

[17] $o(n)$ — от английского слова output — результат (игры).

[18] Игра вычитания была уже в 1612 г. описана Баше де Мезирьяком в виде головоломки и поэтому иногда также называется игрой Баше.

$1 + \max(r(16), r(13), r(8)) = 8$. Игрок, чья очередь хода, должен проиграть, но, делая ход он рассчитывает продлить игру до 8 ходов и тем самым максимально отсрочить свое поражение.

5. Ним-значения

При анализе позиций игры *ним* полезной оказывается операция $\oplus$ (побитовое XOR, исключающее или). В двузначной логике эта операция задается таблицей

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Другое ее название — *циклическое сложение*, или *сложение по модулю* 2. Мы будем применять циклическое сложение поразрядно, к двоичным разрядам.

Вернемся к примеру 2.

Позиции (2,2), (1,2,3) и (2,3,6,7) — P-позиции, (1,3,4) — N-позиция.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 2{,}2 & 1{,}2{,}3 & 1{,}3{,}4 & 2{,}3{,}6{,}7 \\[4pt]
 & 10 & 01 & 01 & 10 \\
\oplus & \underline{10} & 10 & 11 & 11 \\
 & 00 & \underline{11} & \underline{100} & 110 \\
 & & 00 & 110 & \underline{111} \\
 & & & & 000
\end{array}
$$

В десятичной записи, $2 \oplus 2 = 0$, $1 \oplus 2 \oplus 3 = 0$, но $1 \oplus 3 \oplus 4 = 6\,(= 110_2)$.

Будем называть **ним-значением** позиции (a, b, c) число $a \oplus b \oplus c$.

Предложение 5. В игре *ним* позиция является P-позицией тогда и только тогда, когда ее ним-значение равно 0.

Доказательство. Следует из теоремы 1. □

6. Ним мизер

Когда *ним* разыгрывается как игра мизер, выигрывающая стратегия отличается от нормального случая, если при ходе игрок может оставить лишь кучи размера 1; т.е. в позиции $(a, 1, 1, \ldots, 1)$, $a > 1$. Правильный ход в данной позиции — взять из первой кучи $a-1$ или a предметов, чтобы осталось нечетное число куч (в нормальной игре в той же позиции правильный ход — оставить четное число куч). Дальше игра идет форсированно: каждый ход предопределен — игрок берет один предмет, уменьшая тем самым число куч на единицу. До позиции $(a, 1, 1, \ldots, 1)$ выигрывающие стратегии игры мизер и нормальной игры одинаковы; указанная позиция при $a > 1$ является выигрышной, как легко видеть, в соответствии с правилом Баутона в нормальной игре. Таким образом, чтобы к ней прийти, следует пользоваться уже известной нам нормальной стратегией.

Пример 6. Пусть исходная позиция $(3, 4, 5)$.

$$(3,4,5) \xrightarrow{\mathrm{I}} (1,4,5) \xrightarrow[\mathrm{II}]{} (1,4,3) \xrightarrow{\mathrm{I}} (1,2,3) \xrightarrow[\mathrm{II}]{} (1,2,2) \xrightarrow{\mathrm{I}}$$

$$(2,2) \xrightarrow[\mathrm{II}]{} (2,1) \xrightarrow{\mathrm{I}} (1) \xrightarrow[\mathrm{II}]{} (0)$$

Второй игрок вынужден взять последний предмет и проигрывает. В позиции $(2, 1)$ первый игрок берет оба предмета из первой кучи, делая выигрывающий ход; но в нормальной игре следовало бы оставить четное число куч, т.е. перейти к позиции $(1, 1)$.

Приложение 1. Игра *ним* в кинофильме “*В прошлом году в Мариенбаде*”

— Лучше я предложу вам другую игру. Я знаю одну игру, в которую всегда выигрываю.

— Если вы не можете проиграть, это не игра.

— Я могу проиграть, но я всегда выигрываю.

— Ну что ж, попробуем.

— Играют двое. Карты располагаются вот так .... Семь, пять, три, одна. Каждый игрок по очереди берет карты, сколько захочет, но с условием — всякий раз брать карты только из одного ряда. Кто возьмет последнюю карту, тот проиграл. Извольте начинать. Прошу вас.

Первая игра (с картами)	
1 3 5 7	ходит игрок I
1 3 5 6	ходит игрок II
1 3 4 6	ходит игрок I
1 3 4	ходит игрок II
1 3 2	ходит игрок I
1 3 1	ходит игрок II
1 1 1	ходит игрок I
1 1	ходит игрок II
1	игрок I проиграл

Вторая игра (со спичками)	
1 3 5 7	ходит игрок I
1 2 5 7	ходит игрок II
2 5 7	ходит игрок I
2 5 6	ходит игрок II
2 4 6	ходит игрок I
2 3 6	ходит игрок II
2 3 5	ходит игрок I
1 3 5	ходит игрок II
1 3 2	ходит игрок I
1 2 2	ходит игрок II
2 2	ходит игрок I
1 2	ходит игрок II
1	игрок I проиграл

Третья игра (теперь первым ходит м-р М)	
1 3 5 7	ходит игрок I
3 5 7	ходит игрок II
2 5 7	ходит игрок I
2 4 7	ходит игрок II
1 4 7	ходит игрок I
1 4 5	ходит игрок II
4 5	ходит игрок I
4 4	ходит игрок II
4 3	ходит игрок I
3 3	ходит игрок II
3 2	ходит игрок I
2 2	ходит игрок II
2 1	ходит игрок I
1	игрок II проиграл

Приложение 2. Исторические замечания по поводу названия игры *ним*

Баутон в своей статье [4] никак не объяснил выбранное им название "*ним*", поэтому о его происхождении можно только догадываться. Возможно, оно связано с немецким глаголом *nehmen* ("брать"), имеющим в повелительном наклонении, единственном числе, форму *nimm* ("бери!"), или с устаревшей формой английского глагола *nim* ("брать"), который и сейчас употребляется в жаргонном значении "украсть". Шекспир в своей пьесе "Виндзорские насмешницы" нарек одного из слуг, склонного к воровству, капралом Нимом, обыграв значение слова *nim*.

Скорее всего простым совпадением следует считать тот факт, что китайский иероглиф 拈 'nian' (означающий "брать пальцами, играть"), на гуаньчжоуском диалекте читается как 'nim'.

Ним чрезвычайно похож на некоторые древние игры, но неясно, применялись ли современные правила до исследования Баутона[19].

В первом абзаце своей статьи Баутон утверждает, что в некоторые разновидности интересующей его игры, по-видимому, играли в ряде американских колледжей и на некоторых американских увеселительных ярмарках. Игра называлась фан-тан, но, чтобы не спутать ее с китайской игрой, имеющей то же название[20], вместо него Баутоном предложено название "ним".

Тем не менее, миф о китайском происхождении игры *ним* жив и по сей день.

А как вам нравится следующее рассуждение: если перевернуть слово NIM на 180°, то получится WIN — "выиграть"!

Задачи

1. Проанализировать и найти P- и N-позиции для игр вычитания с множеством вычитаемых
(1) $S = \{1, 3, 4\}$;
(2) $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
(3) $S = \{1, 3, 5, 7\}$;
(4) $S = \{1, 3, 6\}$;
(5) $S = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ = все степени 2.
Во всех этих играх (1-5):
(a) если начальное число 100, кто выигрывает, первый или второй игрок?

[19] Вероятно ли, чтобы Баутон сам придумал правила, подогнав их под изящное математическое решение?

[20] Несмотря на написание латиницей *fan-tan*, правильная русская транскрипция — *фань-тань*. *Фань-тань* — это азартная игра, популярная в Китае и юго-восточной Азии. Вот описание игры в казино. "Крупье-дама погружает руку в огромную деревянную чашу, зачерпывает пригоршню черных деревянных же кружков, медлительно и без излишней торопливости принимается раскладывать их перед собой рядами по четыре. Цель игры — наперед угадать, сколько дисков окажется в последнем ряду — один, два, три или все четыре. Крупье выставляет каждую пригоршню минуты по три, не меньше. Восточный человек обожает *фань-тань* за "восхитительную агонию", которую испытываешь, пока кружки один за другим укладываются на стол неспешным дразнящим темпом." Смысл иероглифов 'fan' и 'tan' 番 攤 — "поочередно раскладывать".

(b) для начального числа 31 найдите все выигрышные ходы (если они есть).

2. Определить, P- или N-позициями являются следующие позиции в игре *ним*.
(1) $(2, 4, 6)$;
(2) $(1, 5, 6)$;
(3) $(1, 8, 9)$;
(4) $(2, 3, 4, 5)$;
(5) $(1, 3, 5, 7)$;
(6) $(1, 2, 4, 7)$;
(7) $(25, 43, 50)$;
(8) $(10, 20, 30, 40)$;
(9) $(12, 27, 39, 48)$.

3. Доказать следующие утверждения об игре *ним*.
(1) $(1, n, n+1)$ — N-позиция тогда и только тогда, когда n нечетно.
(2) $(n, 7-n, 7)$ — P-позиция $(n \leq 7)$.
(3) Если (a, b, c) — P-позиция, то таковы же и $(2a, 2b, 2c)$ и $(2a+1, 2b+1, 2c)$.
(4) Все P-позиции вида (a, b, c) суть $(0, n, n)$, где $0 \leq n \leq 7$, а также $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 5)$, $(1, 6, 7)$, $(2, 4, 6)$, $(2, 5, 7)$, $(3, 4, 7)$, $(3, 5, 6)$.

4. *Ним-сумма*. Найдите x: 1) $x = 27 \oplus 17$; 2) $38 \oplus x = 25$.

5. В игре *ним* найти все выигрывающие ходы в позициях:
(1) (10,17,25);
(2) (12,19,27);
(3) (25,43,50);
(4) (29,29,18);
(5) (93,29,74);
(6) (47,99,181);
(7) (13,17,19,23).

6. Найдите *ним*-значения для позиций игры *ним*:
(1) $(1, 2, \ldots, n)$;
(2) $(1, 3, 5, \ldots, 2n+1)$;
(3) $(2, 4, 6, \ldots, 2n)$;
(4) $(1, 5, 9, 13, \ldots, 4n+1)$;
(5) $(1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n)$.

7. Найдите функцию удаленности для игры вычитания с множеством $S = \{1, 2, 3\}$.

8. *Игры вычитания с параметром*. Найдите P- и N-позиции для игр *вычитания* с множеством S, зависящим от параметра:
(1) $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ $(n > 0)$;
(2) $S = \{1, 2, n\}$ $(n > 2)$.

9. *Игра "Тридцать одно"* (Geoffrey Mott-Smith, 1954). Из колоды карт выбираются туз, двойка, тройка, четверка, пятерка и шестерка каждой масти. Эти 24 карты выкладываются лицом вверх на столе. Туз считается за единицу. Игроки по очереди переворачивают карты (одну за ход) и в процессе игры подсчитывают сумму перевернутых карт. Игрок, у которого сумма впервые превзойдет 31, проигрывает. Эта игра похожа на игру вычитания с вычитаемыми 1, 2, 3, 4, 5, 6 и начальной позицией 31. Однако между ними есть существенное различие.

(1) Найдите выигрывающую стратегию для игры вычитания с $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, начиная в позиции 31.

(2) Определите различие между игрой "Тридцать одно" и упомянутой игрой вычитания.

(3) Что произойдет, если 1-й игрок будет придерживаться стратегии, найденной вами в (1), а его противник будет всегда выбирать 4?

(4) Тем не менее, 1-й игрок может выиграть. Найдите выигрывающую стратегию для игры "Тридцать одно".

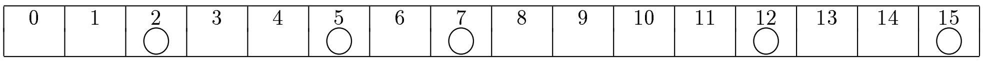
10. *Мизер-вариант игры вычитания*, $S = \{1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots\}$. Последний игрок, делающий ход, проигрывает. Цель — вынудить противника взять последний предмет. Проанализируйте игру. Найдите P-позиции.

11. *"Опустошай и разделяй"* (Ferguson, 1998). В двух коробках находятся предметы, в первой — m, во второй — n. Обозначим начальную позицию (m, n), где $m > 0$, $n > 0$. Двое игроков ходят поочередно. Ход заключается в опустошении одной из коробок и разделении содержимого другой между двумя коробками так, чтобы в каждой оказался хотя бы один предмет. Последний игрок, сделавший ход, выигрывает. Имеется единственная терминальная позиция (1,1). Найдите все P-позиции.

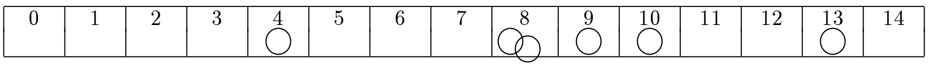
12. *Нимбл.* На ленте, расчерченной на клетки с метками 0, 1, 2, 3,..., есть несколько монет. Каждая монета находится в определенной клетке, причем в клетке может быть более одной монеты. Ход — передвижение любой монеты в любую клетку влево. Можно перепрыгивать через другие монеты, и можно ходить в клетку, в которой уже есть монеты. Игроки ходят по очереди, и игра заканчивается, когда все монеты соберутся в самой левой клетке (0). Последний игрок, сделавший ход, выигрывает.

Показать, что данная игра есть замаскированный ним Определить, кто выиграет в следующих позициях? Если 1-й игрок, то найти выигрывающий ход.

(1)



(2)



13. *Ним-мизер.* Метод Баутона игры в ним-мизер таков. Играйте, как в нормальный ним, пока имеются хотя бы две кучи размером > 1. Когда ваш противник ходит так, что остается в точности одна куча размером > 1, уменьшите эту кучу до 0 или 1, чтобы осталось *нечетное* число куч размером $= 1$. Такой алгоритм работает, так как оптимальная стратегия игры в нормальный ним никогда не требует от вас оставлять в точности одну кучу размером > 1 (ним-сумма должна быть равна 0), а ваш противник не может перейти от двух куч размером > 1 к позиции, в которой нет куч размером > 1. Поэтому в конце концов игра приходит к ситуации, в которой имеется в точности одна куча размером > 1 и ваша очередь хода.

Найдите выигрывающие ходы в позициях:
(1) $(1, 1, 12)$; (2) $(1, 5, 12)$; (3) $(12, 19, 27)$.

14. Игра *ним Витгоффа.* Имеется позиция — пара неотрицательных целых чисел (m, n). Ход заключается в том, что можно

(a) вычесть из одного числа положительное целое число;

(b) вычесть из обоих чисел одно и то же положительное целое число.

Покажите, что эта игра эквивалентна игре "*раненый ферзь*": на шахматной доске ферзь из позиции (m, n) может ходить вниз, влево или по диагонали влево-вниз. Выигрывает тот, кто поставит его на поле $(0, 0)$.

Найдите P-позиции для доски 8×8. (Используйте алгоритм Эратосфена.)

15. Игры *динамического вычитания.* Класс игр вычитания может быть расширен, если допустить зависимость множества S от последнего хода противника.

Пример: Имеется одна куча из n предметов. Первый игрок может взять любое число предметов из кучи, хотя бы один предмет, но не всю кучу. Затем игроки ходят поочередно, и каждый игрок не может взять больше предметов, чем его противник на предыдущем ходе.

(1) Найдите наилучший ход в позиции $n = 44$;

(2) Найдите P-позиции.

Решения

1.

(1)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$o(n)$	P	N	P	N	N	N	N	P	N	P	N	N	N	N

Период функции $o(n)$, т.е. соответствующей данной игре P/N-последовательности, равен 7. Так как $100 \mod 7 = 2$, $o(100) = o(2) = P$; т.е. выигрывает второй игрок; $o(31) = o(31 \mod 7) = o(3) = N$, выигрывающие ходы: $31 \to 30$ и $31 \to 28$.

(2)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$o(n)$	P	N	N	N	N	N	P	N	N	N	N	N

Период функции $o(n)$ равен 6; $o(100) = o(4) = N$; $o(31) = o(1) = N$, выигрывающий ход: $31 \to 30$.

(3)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$o(n)$	P	N	P	N	P	N	P	N	P	N	P

Период функции $o(n)$ равен 2; $o(100) = P$; $o(31) = N$, любой ход выигрывает.

(4)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$o(n)$	P	N	P	N	P	N	N	N	N	P	N	P	N	P	N	N	N	N

Период функции $o(n)$ равен 9; $o(100) = o(1) = N$; $o(31) = o(4) = P$.

(5)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$o(n)$	P	N	N	P	N	N	P	N	N	P	N	N

Период функции $o(n)$ равен 3; $o(100) = o(1) = N$; $o(31) = N$, выигрывающие ходы — взять 1, 4 или 16.

2. (1) P; (2) N; (3) P; (4) P; (5) P; (6) P; (7) P; (8) N; (9) P.

3.

(1) $n = 2k$: $1 \oplus 2k = 2k + 1$; $n = 2k + 1$: $1 \oplus (2k + 1) = 2k$.

(2) $7 = 0 + 7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$, ним-сумма слагаемых тоже равна 7.

(3) Используются равенства: $2a \oplus 2b \oplus 2c = 2(a \oplus b \oplus c)$, $(x + 1) \oplus (y + 1) = x \oplus y$.

(4) Проверяется непосредственно.

4.

(1) 10; (2) 63.

5.

(1) $(10, 17, 25) \to (8, 17, 25)$; (2) $(12, 19, 27) \to (8, 19, 27)$; (3) $(25, 43, 50)$ — P-позиция; (4) $(29, 29, 18) \to (15, 29, 18)$ или $(29, 29, 0)$; (5) $(93, 29, 74) \to (87, 29, 74)$ или $(93, 23, 74)$ или $(93, 29, 64)$; (6) $(47, 99, 181) \to (47, 99, 76)$; (7) Три выигрывающих хода: последние три кучи $(17, 19, 23)$ можно уменьшить на 8, т.е. $17 \to 9$, $19 \to 11$ или $23 \to 15$.

6.

(1)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\oplus$	0	1	3	0	4	1	7	0	8	1	11	0	12

$$1 \oplus 2 \oplus \ldots \oplus n = \begin{cases} n & , n \mod 4 = 0 \\ 1 & , n \mod 4 = 1 \\ n+1 & , n \mod 4 = 2 \\ 0 & , n \mod 4 = 3 \end{cases}$$

(2)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$2n+1$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
$\oplus$	1	2	7	0	9	2	15	0	17	2	23	0	25

$$1 \oplus 3 \oplus \ldots \oplus (2n+1) = \begin{cases} 2n+1 & , n \mod 4 = 0 \\ 2 & , n \mod 4 = 1 \\ 2n+3 & , n \mod 4 = 2 \\ 0 & , n \mod 4 = 3 \end{cases}$$

(3) $2 \oplus 4 \oplus \ldots \oplus 2n = 2(1 \oplus 2 \oplus \ldots \oplus n) = \begin{cases} 2n & , n \mod 4 = 0 \\ 2 & , n \mod 4 = 1 \\ 2n+2 & , n \mod 4 = 2 \\ 0 & , n \mod 4 = 3 \end{cases}$

(4)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$4n+1$	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49
$\oplus$	1	4	13	0	17	4	29	0	33	4	45	0	49

$$1 \oplus 5 \oplus 9 \oplus \ldots \oplus (4n+1) = \begin{cases} 4n+1 & , n \mod 4 = 0 \\ 4 & , n \mod 4 = 1 \\ 4n+5 & , n \mod 4 = 2 \\ 0 & , n \mod 4 = 3 \end{cases}$$

(5) $1 \oplus 2 \oplus 4 \oplus \ldots \oplus 2^n = 2^{n+1} - 1$.

7.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$o(x)$	P	N	N	N	P	N	N	N	P	N	N	N	P
$r(x)$	0	1	1	1	2	3	3	3	4	5	5	5	6

$$r(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{если } 4|x, \\ 2\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + 1, & \text{если } 4 \not| x. \end{cases}$$

8.

(1) $o(x) = P \iff (n+1)|x$; характеристический цикл: $P\ \overbrace{N\ N\ N\ \ldots\ N}^{n}$.

(2) характеристический цикл: $P\ N\ N$ при $3 \nmid n$; $\overbrace{P\ N\ N\ P\ N\ N\ \ldots\ P\ N\ N\ N}^{n+1}$ при $3 \mid n$.

9.

(1) Выигрывающая стратегия — всегда ходить в позицию, кратную 7, т.е. $31 \to 28$, потом в 21, в 14, в 7 и в 0.

(2) В игре "Тридцать одно" число карт ограничено — 4 карты каждого достоинства; теперь все тройки закончились, и первый игрок не может сделать ход в 0; таким образом, он проиграет.

(4)

x	27	28	29	30	31
$o(x)$	N	P	P	N	N

Из 30 или 31 игрок должен делать ход в 29; тогда ход второго игрока в 28 будет проигрышным, поскольку у него не хватит тузов аналогично тому, как в (3) не хватило троек.

10.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$o(n)$	N	P	N	N	P	N	N	P	N	N	P	N	N

$$o(n) = \begin{cases} P, & \text{если } n \mod 3 = 1, \\ N, & \text{если } n \mod 3 \neq 1. \end{cases}$$

11.

P-позициями являются (m, n), где m и n — нечетные числа.

Действительно, если это нетерминальная позиция, то из P-позиции можно сделать ход только в позицию (m', n'), где $m' + n'$ равно нечетному числу, и, следовательно, одно из чисел m' и n' четно. С другой стороны, из любой позиции (m, n), в которой одно из чисел, скажем, m четно (и больше 0), можно сделать ход в P-позицию (m', n'), где $m' + n' = m$ и оба числа m' и n' нечетны. (Например, можно положить $m' = m - 1$, $n' = 1$.)

12.

Согласно правилам, ход состоит в перемещении монеты из клетки $n > 0$ в клетку n', $0 \leq n' < n$. Это равносильно той ситуации в игре *ним*, когда игрок берет $x = n - n' > 0$ предметов из кучи, содержащей n предметов. (По правилам, заметьте, монеты друг другу не мешают!)

(1) Здесь ситуация аналогична позиции $(2, 5, 7, 12, 15)$ в игре *ним*. Ним-значение $2 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 12 \oplus 15 = 3 > 0$, следовательно, это N-позиция. Выигрывающие ходы: $2 \to 1$, $7 \to 4$ или $15 \to 12$.

(2) Соответствующая ним-позиция $(4, 8, 8, 9, 10, 13)$ имеет ним-значение 10. Выигрывающие ходы: $10 \to 0$ и $13 \to 7$.

13.

(1) $12 \to 1$; (2) $12 \to 4$; (3) $12 \to 8$.

14.

Вот все P-позиции: (0,0), (1,2), (2,1), (3,5), (5,3), (4,7), (7,4).

15.

(1) $44 \to 33$ (или сразу $44 \to 1$, так как $n = 1$ — терминальная позиция). (2) Исход игры зависит от размера кучи n и предыдущего сделанного хода x (числа взятых предметов). Таким образом, позиция игры — это на самом деле пара чисел (n, x). Данная позиция является P-позицией, если $2^k \mid (n-1)$, где $k > 0$, 2^k — наименьшая степень 2, большая x (т.е. $k = \lfloor \log_2 x \rfloor + 1$).

Литература

[1] Hardy G.H., Wright E.M. An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford University Press, 4th edition. (1975).

[2] Гарднер М. Крестики–нолики. — М.: Мир, 1988.

[3] Куммер Б. Игры на графах. — М.: Мир, 1982.

[4] Bouton C.L. Nim, a game with a complete mathematical theory// Annals of Mathematics. Princeton, Series 2, Vol. 3, pp. 35–39 (1902). (`http://arxiv.org/abs/math/0612234v1`)

[5] Grundy P.M. Mathematics and Games // Eureka, Vol. 2, pp. 6–8 (1939).

[6] Sprague R.P. Über mathematische Kampfspiele // Tôhoku Mathematical Journal, Vol. 41, pp. 438–444 (1936).

[7] Wythoff W.A. A Modification of the Game of Nim // Nieuw Archief voor Wiskunde, Vol. 7, pp. 199-202 (1907).

Фролов Илья Сергеевич,
доцент кафедры алгебры и геометрии
Самарского государственного университета,
кандидат физ.-мат. наук.

Email: xity@yandex.ru

Экспериментальная математика

А. В. Жуков

Продолжаем публикацию лекции, в которой автор подчеркивает экспериментальный аспект математики, приглашая, при помощи специально разработанных программ, наблюдать, формулировать и пытаться доказывать математические закономерности. Окончание лекции будет опубликовано в следующем номере.

Замечание о программах

Программы ("Демонстрация спирали Улама" и "Dance"), используемые в этой части лекции, находятся в свободном доступе на странице math.child.ru/podumai/labor/

Они имеют интуитивно понятный интерфейс. Каждый раз, когда в лекции написано "Эксперимент", это означает запуск соответствующей программы; указано, какие параметры следует ввести. После значка процента идет комментарий к вводу параметра или к работе программы. Когда параметры введены, для запуска программы надо последовательно нажать кнопки ПРИМЕНИТЬ, ПУСК. После окончания работы программы пользователь наблюдает полученное изображение (или видит динамическую картинку во время работы программы).

Доказательство второе[1]. Отображения натурального ряда на плоскость

Скажите пожалуйста, представляет ли строй военнослужащих, показанный на рис. 1, вид сверху, **шеренгу**?

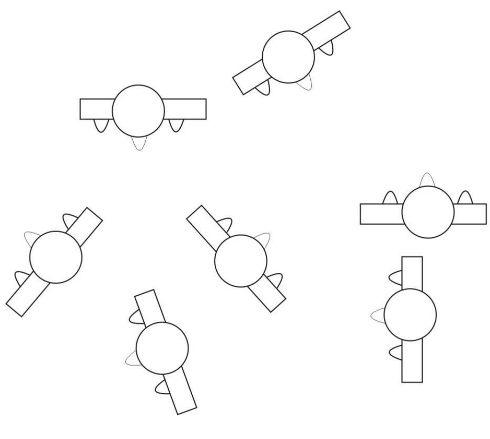


Рис. 1

Что? Не очень похоже? "Разброд и шатания"? Ну, тогда давайте обратимся к компетентным справочным руководствам. В "Строевом Уставе" Вооружённых сил РФ написано: "шеренга — это строй, в котором военнослужащие размещены на одной линии один возле другого". (Кстати, в стремлении всему давать определения чувствуется нетленное влияние "Начал" Евклида — кроме военных Евклиду подражал Бенедикт Спиноза, излагая свою "Этику" "на геометрический манер" и многие другие известные авторы известных трудов).

Некоторая хаотичность в расположении военнослужащих не должна вас смущать. Они действительно расположены один возле другого на одной линии, что демонстрирует нам следующий рисунок 2.

[1]Имеется в виду обоснование утверждения, что математика является экспериментальной наукой. — *Прим. ред.*

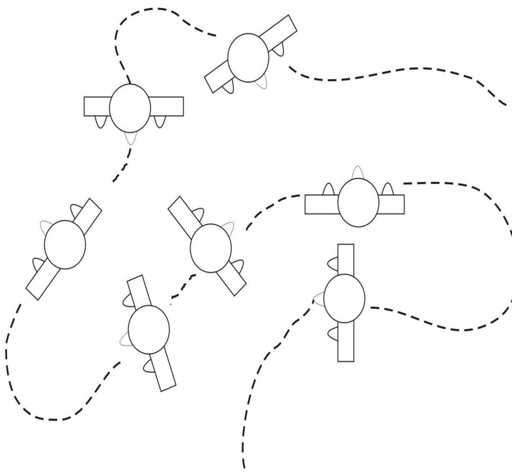


Рис. 2

После сказанного легко прийти к общему выводу: если мы вознамеримся отобразить каким-то художественным образом натуральный ряд на плоскость, то есть числа, расположенные **на одномерной числовой** оси, на — подчеркну — **имеющую два измерения** плоскость, то это можно сделать БЕСКОНЕЧНЫМ количеством способов. Дальше я более-менее подробно остановлюсь только на трёх таких отображениях: это всего лишь ТРИ странички романа, содержащего бесконечное количество страниц. Другие страницы ещё не написаны, и написать их можете вы.

Итак, рассмотрим ТРИ простейшие отображения.

1. **Спираль Станислава Улама**. Запустить программу Ulam Spiral. Посмотреть её демонстрацию и закрыть.

Здесь приведена фотография Станислава Улама с бэйджика Лос-Аламовской лаборатории, где велись исследования по изготовлению атомной бомбы).

2. **Диагональный алгоритм Георга Кантора**, рис 4.

3. **Алгоритм писателя-читателя**, рис. 5.

Вы с ним хорошо знакомы, поскольку повсеместно применяете его на практике. Фотографию изобретателя этого способа я не привожу по известным причинам.

Теперь проведём некоторые эксперименты.

Эксперименты со спиралью Улама

Начнём с уже знакомой нам спирали Улама: посмотрим, как на ней располагаются ПРОСТЫЕ числа.

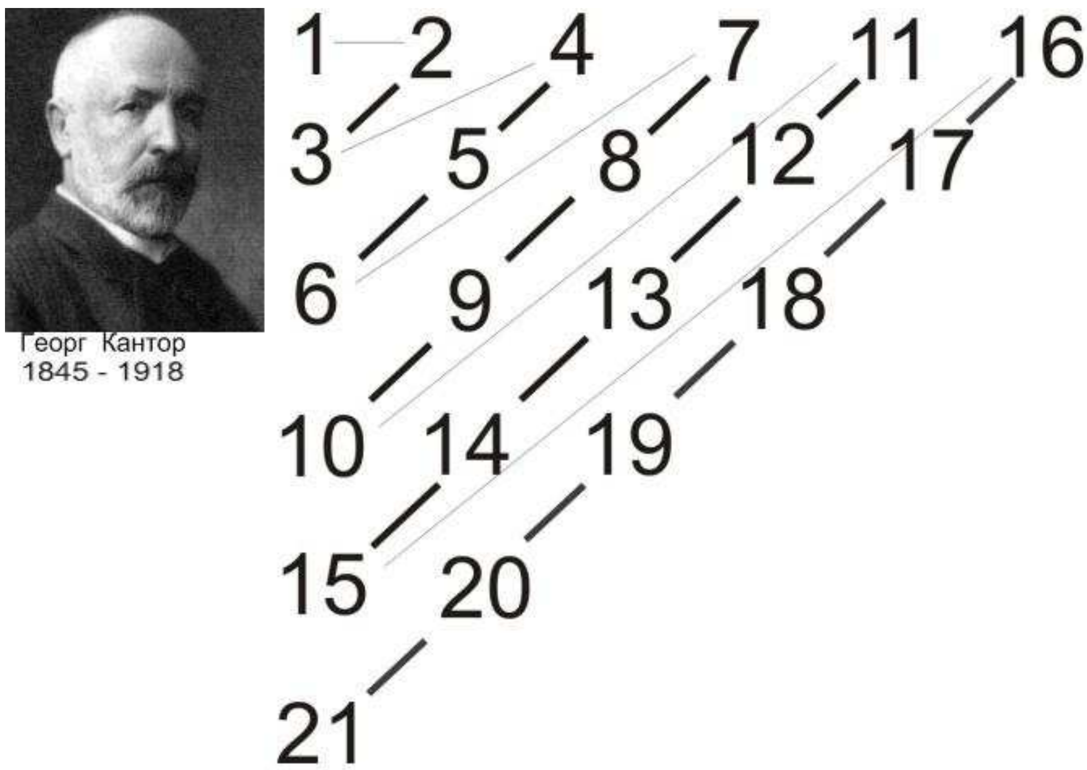


Рис. 4

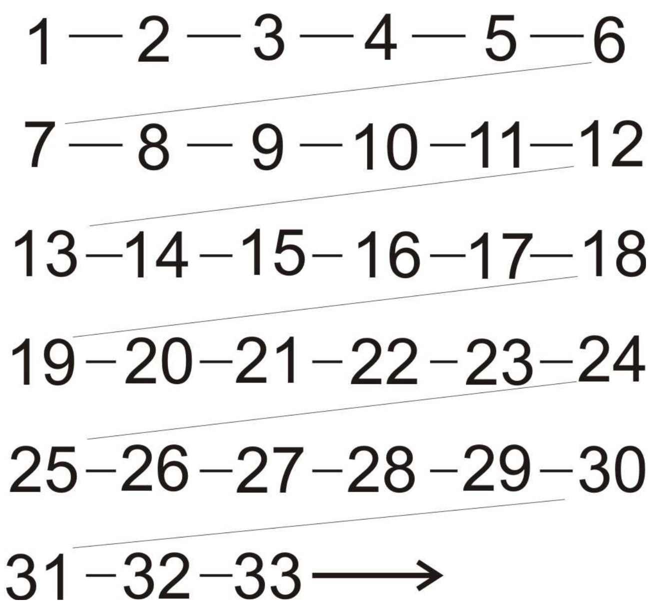


Рис. 5

Эксперимент. Запустить программу Dance. Настройки — по умолчанию, однако установить

Цвет: опция:
РУЧНОЙ (ручная настройка)
fg - **БЕЛЫЙ**,
bg - **СИНИЙ**.
Последовательно нажать кнопки ПРИМЕНИТЬ, ПУСК.

А теперь посмотрим, как на спираль Улама ложатся КВАДРАТЫ (1, 4, 9, 16, и т.д.).

Эксперимент. Свойства: КВАДРАТ.

То, что вы сейчас увидели, профессор Александр Александрович Зенкин (о нём будет речь вестись позже) называл **теоремой**: чисто зрительно, одними глазами мы обнаруживаем некоторую ЧЁТКУЮ структуру. Увидев **теорему**:

квадраты на спирали Улама располагаются вдоль двух лучей, исходящих из центра, чётные — вверху, нечётные — внизу,

мы теперь можем попытаться её доказать. (Сделайте это самостоятельно).

Подчеркну: компьютер помог нам эту теорему УВИДЕТЬ. Кстати, слова: “теорема”, “теория”, “театр” имеют общий древнегреческий корень: “рассматриваю”. В этом кроется глубокий смысл!

Сейчас мы понаблюдаем, каким чудным образом на спирали Улама располагаются так называемые фигурные числа.

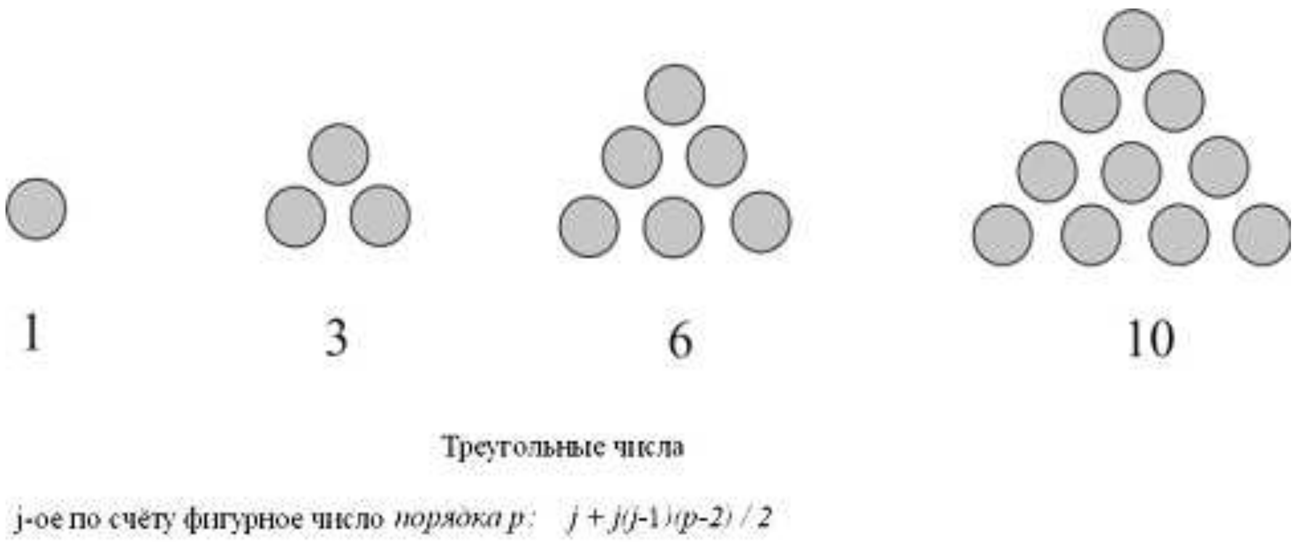


Рис. 6

Обратите внимание на общую формулу фигурного числа порядка p: число с номером j равно $j + j(j-1)(p-2)/2$. Если порядок равен $p = 3$, то получаются так называемые треугольные числа, см. рис. 6.

Сначала — ТРЕУГОЛЬНЫЕ числа.

Эксперимент. Свойства: ФИГУРНОЕ.

Почему здесь появились 17 “рукавов” закручивающегося в центре “циклона” — я не знаю. Почему они закручиваются ПО ЧАСОВОЙ стрелке — тоже не знаю.

Вопросы для исследования:

Зная порядок фигурных чисел, попробуйте научиться отвечать на следующие вопросы, касающихся отображений фигурных чисел на плоскость с помощью спирали Улама:

1) Будет ли наблюдаться спиралевидная структура при заданном порядке?

2) Если ответ на предыдущий вопрос “да”, то сколько будет наблюдаться рукавов?

3) По часовой или против часовой стрелки будут закручиваться рукава?

Проведём другие эксперименты.

Эксперимент. Порядок: p = 4.

Получили уже известную картинку. Иначе и быть не могло: фигурные числа порядка 4 — это просто квадраты, а про них мы уже кое-что знаем.

Эксперименты.
Порядок: p = 28: "Морская звезда", закрученная ПО часовой стрелке.
Порядок: p = 48: "Морская звезда", закрученная ПРОТИВ часовой стрелки.

Эксперименты.
Порядок: p = 21: "Инь и Янь", закрученные ПО часовой стрелке.
Порядок: p = 19: "Инь и Янь", закрученные ПРОТИВ часовой стрелки.

Эксперименты.

p = 9: один "рукав", закрученный ПРОТИВ часовой стрелки.

Любопытно, что вдали от центра наблюдается сетка из двух семейств линий, но эта сетка "портится" в центре.

p = 32: то же самое, но в центре хорошо видна парабола, которая переходит в квадраты.

Мы уже знаем, что при p = 4 получаются два идущие в противоположных направлениях луча. Оказывается, лучи возникают и в других случаях.

Эксперименты.

Порядки: p = 10; 20; 34.

Гипотеза: *если порядок представляется формулой вида* $2(k^2+1)$, *то фигурные числа с достаточно большими номерами такого порядка на спирали Улама располагаются вдоль прямых линий.*

Эксперименты.
Порядок: p = 16: "Сегнерово колесо" — 3 рукава, закрученные ПРОТИВ часовой стрелки.
Порядок: p = 46: "Сегнерово колесо", закрученное ПО часовой стрелке.

"Сегнерово колесо" — двигатель, основанный на реактивном действии вытекающей воды. Первая в истории гидравлическая турбина, придуманная немецким учёным Иоганном Зегнером (1704-1777).

А сейчас мы посмотрим на некоторые *квадратичные числа*, то есть на числа вида $an^2 + bn + c$.

Эксперимент. Свойства: **КВАДРАТИЧН**; a = 7;

Получилось то же "Сегнерово колесо", закрученное против часовой стрелки, которое выходило у нас в случае фигурных чисел при p = 16. Это не удивительно, поскольку фигурные числа — это некоторое подмножество квадратичных чисел.

Но что же это за "Сегнерово колесо", которое не вращается? Давайте-ка заставим его немножко "поработать на публику"!

Эксперимент.
MAX кол. столбцов = 191;
миллисекунды = 500.
ИЗМЕНЯТЬ: $\surd$ (поставить галочку)

При изменении параметра b колесо вращается против часовой стрелки.

Следующая динамическая композиция называется "Паучья нога" — видимо, так паук плетёт паутину.

Эксперимент.
миллисекунды = 300
a = 4
b = 0.

В заключение серии экспериментов со спиралью Улама я вам покажу "ИСКОПАЕМЫЕ ОСТАНКИ ПАРАБОЛ".

Эксперимент.
MAX кол. столбцов = 291;
Свойства: СУММЫ ЦИФР;
сумма: 20;
отключить: ИЗМЕНЯТЬ
fg: КРАСНЫЙ
bg: ЧЁРНЫЙ

Здесь на спирали Улама красным цветом отмечаются числа, сумма цифр которых равна 20.

ЭКСПЕРИМЕНТЫ С ОТОБРАЖЕНИЕМ КАНТОРА

Начнём с ПРОСТЫХ чисел.

Эксперимент.
Отображение: **КАНТОРА**
Свойства: **ПРОСТОЕ**
fg: **СВЕТЛО-ЖЁЛТЫЙ**

Чётко видны загадочные "лесополосы" — диагональные и горизонтальные.

Эксперимент.
Свойства: **КВАДРАТ** % Это не НЕ "квадратичн"

Здесь наблюдаются два семейства линий, как в подсолнухе — какой-то непонятный "филотаксис".

Эксперимент.
Свойства: **КВАДРАТИЧН**
a = 2
b = 0.

Вот опять мы ОДНИМИ ГЛАЗАМИ открыли свойство, которое не грех сформулировать и на привычном математическом языке:

Все удвоенные квадраты натуральных чисел при отображении Кантора располагаются на прямой линии рядом с главной диагональю параллельно ей.

Зная это свойство, несложно ответить, например, на такой вопрос: на пересечении какой строки и какого столбца при отображении Кантора располагается число 2^{2011}?

СЕРИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОРНАМЕНТОВ

Эксперимент.
Свойства: КВАДРАТИЧН
a = 1
b = 1
c = 150
Эту композицию можно назвать: "КОЛЬЦА САТУРНА".

А как это смотрится при отображении Улама?

Эксперимент. Отображение: УЛАМА % "ножки паука"

Вот ещё несколько параболических орнаментов.

Как при отображении Кантора представляются числа, делящиеся на 33?

Эксперимент.
Отображение: Кантора
Свойство: ЛИНЕЙН

a = 33
b = 0.
То же самое — при отображении Улама:

Эксперимент.
Отображение Улама.

Откуда здесь взялись “параболки”? — Загадка...

Вариации: Сейчас мы сделаем более зримыми *подковы*:

Эксперимент.
Отображение: Кантора
a = 41
b = 20 - орнамент “Подковы”.

Эксперимент.
Отображение: Улама.

А вот квадраты, которые при делении на 3 дают в остатке 1:

Эксперимент.
Свойства: $n \wedge 2 = b$ **(mod a)**
a = 3
b = 1

“Каёмка” по сторонам квадрата — это погрешности вычислений. Чтобы убедиться в этом, проведём ещё один эксперимент, результат которого априори прогнозируем. Мы знаем, что не существует квадратов, при делении на 3 дающих остаток 2. А у нас что получится?

Эксперимент. b = 2.

Должно быть пустое место, а видна каёмочка. Эта каёмочка — “зазеркалье”, фантомы. Дело в том, что в Delphi, на которой писалась эта программа, сделано так. Компьютер при “зашкаливании” чисел, то есть при выходе их за предельно допустимые размеры 2^{31} не останавливается, а продолжает производить вычисления дальше в “очень странной арифметике”, например, в ней $2^{16}*2^{16} = 0$, а если к самому большому целому числу прибавим 1, то получим самой маленькое целое отрицательное число. (Кстати, изучение этой арифметики - весьма интересное направление исследований! В Delphi отрезок числовой оси $[-2^{31}; 2^{31} - 1]$, с которым производятся вычисления на 32-разрядных компьютерах, “завёрнут в обычное кольцо”, то есть при прибавлении к числу $2^{31} - 1$ единицы (то есть справа отрезка числовой оси), мы скачком попадаем в число слева: (-2^{31}). Вот если бы этот отрезок числовой оси удалось завернуть в ленту Мёбиуса, то, наверное, получилась бы более “мягкая” арифметика, без резких каёмочек, как у нас).

Для корректной же работы программы “по эту сторону зеркала”, конечно же, нужны специальные алгоритмы.

Чтобы пуще убедиться в искажении привычной арифметики, проведём ещё один более яркий эксперимент. Будем рассматривать КУБЫ чисел, которые при делении на 3 дают остаток 1. Кубы растут гораздо быстрее квадратов!

Эксперимент.
Свойства: $n \wedge 3 = b$ **(mod a)**

Получился красивый муаровый узор, но это — картина из Зазеркалья! Конечно, художники могут сказать: “какая разница, что Зазеркалье — всё равно ведь красиво!”. И ведь с ними придётся согласиться...

Перейдём теперь к рассмотрению бесхитростного с виду отображения “писателя-читателя” (опять вспомним алгоритм “Стежок” — он тоже ведь был бесхитростным!).

ЭКСПЕРИМЕНТЫ С ОТОБРАЖЕНИЕМ ПИСАТЕЛЯ-ЧИТАТЕЛЯ

По традиции начнём с простых чисел.

Эксперимент.
ЦВЕТ: fg = БЕЛЫЙ
bg = СИНИЙ
Отображение Писателя-Читателя
Свойства: ПРОСТОЕ
MAX кол. столбцов = 90 — "ДОЖДЬ" ИЗ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ.

Здесь штиль, ветра нет, "струи дождя" падают сверху.

Это некое числовое послание к нам, записанное "азбукой Морзе". Посмотрите: клеточка 1 — синяя, 2 — белая, 3 — белая, и т.д. Почему из 5 ничего не "льётся", а из 7, из 11 и т.д. льются струи дождя? — И 5, и 6 являются делителями количества столбцов $n = 90$, поэтому в столбец с номером 5 попадают числа, кратные 5, а в столбец 6 — числа, кратные 6 — в этих столбцах "струй" не будет. В частности, в этом кроется разгадка тайны "лесополос" при отображениях Улама и Кантора.

А вот "ветер" подул справа:

Эксперимент.
MAX кол. столбцов = 91.

А вот - слева:
Эксперимент .
MAX кол. столбцов = 89.

Здесь, как и ранее, из чисел 7, 11 и т.д. льются струи дождя, но наклонённые в сторону. Любопытно — а как же поведут себя КВАДРАТЫ при отображении писателя-читателя?

Эксперимент.
MAX кол. столбцов = 291
Свойства: КВАДРАТ

Здесь видны какие-то отдельные параболы. К этим параболам мы ещё вернёмся в дальнейшем, а сейчас сделаем небольшой "финт".

ОТОБРАЖЕНИЕ ПО АЛГОРИТМУ ПИСАТЕЛЯ-ЧИТАТЕЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Идея лежит на поверхности: давайте по алгоритму писателя-читателя отображать не все числа натурального ряда, а только некоторое их подмножество, обладающее определённым свойством. Например, квадраты. Это означает, что в таблице слева направо и сверху вниз вместо 1, 2, 3, 4, и т.д. будут располагаться квадраты: 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, и т.д. Если какое-то число из этого ряда обладает некоторым ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ свойством, то мы его, как и ранее, выделим особым цветом.

Эксперимент.
MAX кол. столбцов = 18
Настройка цвета: АВТО
Сетка: $\surd$
Отображение: КВАДРАТЫ
Свойства: ОСТАТКИ
Модуль: 9
Остаток: 0

% пощёлкать ПУСК, чтобы подобрать хороший контраст цвета

В данном случае цветом выделяются числа, делящиеся на 9 (3^2, 6^2, 9^2 и т.д.). Таким образом, мы обнаруживаем простое, в общем-то, свойство:

если в разложении числа на простые множители имеется тройка, то квадрат такого числа делится на 9.

Давайте теперь "поиграем" с ТАБЛИЦЕЙ УМНОЖЕНИЯ, в которой на пересечении i-ой строки и j-ого столбца размещается ПРОИЗВЕДЕНИЕ чисел i и j. Можете ли вы, например, сразу, "навскидку" сказать, каким свойством обладает последовательность, образованная почленным перемножением двух арифметических прогрессий: с разностью 1: 1, 2, 3, 4, 5, ... и с разностью 4: 4, 8, 12, 16, 20, ... ?

Эксперимент.
MAX кол. столбцов = 41
Сетка: убрать
Нумерация столбцов: с нуля 0
Отображение ПРОИЗВЕДЕНИЯ
Свойства: КВАДРАТ

% см. побочную чёткую диагональ, рядом с главной диагональю

Посмотрим вот на эту прямую. Квадратики на ней по вертикали идут с шагом 1, а по горизонтали — с шагом 4, то есть они как раз представляют почленные произведения двух вышеуказанных прогрессий, и ВЫДЕЛЕНЫ ЦВЕТОМ, которым в данном случае обозначаются КВАДРАТЫ. Значит, в результате мы получим последовательность КВАДРАТОВ: 4, 16, 36, 64, 100, ... (все члены данной последовательности — квадраты, но, разумеется, не все квадраты — члены данной последовательности).

Эксперимент.
MAX кол. столбцов = 101
Свойства: СУММЫ ЦИФР
Суммы = 18

Перед вами — портрет теоремы, которая воплотилась в задачу, опубликованную в рубрике «"Квант" для младших школьников», "Квант", №4, 2002, стр. 25, автор В. Замков:

Мама и папа записали по одному натуральному числу, не показывая их друг другу. При этом папа утверждает, что, какое бы число ни задумала мама, сумма цифр произведения записанных ими чисел равна 18. Какое число задумал папа?

Посмотрите на выделенные правую крайнюю и нижнюю линии, которые соответствуют множителю 99. Они выделены, значит, изображают свойство: "Сумма цифр произведения равна 18". Они сплошные, значит, это свойство справедливо для всех чисел a, являющихся сомножителями в произведении $99 \cdot a$. Итак, нами обнаружена ещё одна теорема:

Сумма цифр произведения $99 \cdot a$ *для двузначного числа* a *не зависит от* a *и равна 18.*

На самом деле на экране компьютера изображён не только портрет указанной теоремы, здесь много и других теорем. Обратите внимание, например, на тёмные (% с помощью кнопки ПУСК добиться тёмного фона) гиперболы. Вообще, таблица умножения (или как её ещё называют на обложках ученических тетрадей — таблица Пифагора) — настоящий кладезь гипербол. Вот ещё один пример, иллюстрирующий это:

Эксперимент.
MAX кол. столбцов = 50
Свойство: особое % см. всплывающую подсказку на кнопке "Особое"

Числа вида: $N-$ Сумма цифр (N), являющиеся числами Фибоначчи, существуют и в таблице Пифагора располагаются на одной гиперболе.

В этом нет ничего удивительного, так как на гиперболе размещаются точки, произведение координат которых является числом постоянным. Константа для показанной гиперболы равна

144, а 144 — это двенадцатое число последовательности Фибоначчи. На последовательности Фибоначчи я подробнее остановлюсь чуть позже.

А теперь мы все вместе попробуем найти некую закономерность.

Эксперимент.
MAX кол. столбцов = 60
Установить ЦВЕТ: fg = БЕЛЫЙ
bg = СИНИЙ
Свойства: ОСТАТКИ
модуль: 15
остаток: 0

Здесь в таблице умножения отмечены числа, делящиеся на 15. Строки и столбцы с номерами 0, 15, 30, 45 и 60 всецело белые, так как количество столбцов 60 делится на 15. Обратим внимание, что внутри выделенных квадратов 15×15 располагаются какие-то узоры.

Давайте будем менять модуль, наблюдая за тем, когда появляются внутри больших квадратов узоры. А вы попытайтесь найти закономерность.

Эксперименты.
модуль = 15, 16, 17, 18, 19, ...

Если модуль выражается простым числом, то внутри квадратиков узоров нет, если же составным — есть. Мы сейчас ОДНИМИ ГЛАЗАМИ ОТКРЫЛИ ТЕОРЕМУ, которая в теории чисел формулируется так:

Кольцо вычетов по простому модулю является кольцом вычетов без делителей нуля, а по составному модулю — с делителями нуля.

А сейчас мы с вами попытаемся открыть ещё одно теоретико-числовое свойство, чуть посложнее. Но я верю в силу коллективного интеллекта.

Эксперименты.
Отображение: СУММЫ КВАДРАТОВ
модуль: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

Я буду менять модуль, последовательно перебирая простые числа. А вы наблюдайте за квадратами, 4 белые вершины которых задаются увеличивающейся решёткой — появляются ли внутри них узоры, и попытайтесь обнаружить закономерность.

Общая закономерность: *если простой модуль представим в виде $4n+1$, то узор есть, а если в виде $4n+3$ — нет.*

Мы сейчас с вами вплотную приблизились к открытию одной из известных теорем Пьера Ферма. Посмотрите, что получается: в случае $p = 4n+3$, когда решётка пустая, то есть белым отмечены только узлы решётки:

Эксперимент.
модуль: 11

— мы не наблюдаем простых чисел, выражающихся суммой двух квадратов, поскольку все числа в узлах — составные, полученные в результате сложения квадратов, каждый из которых делится на p. А никакие другие клеточки не выделены.

Сама собой появляется очень правдоподобная гипотеза:

Не существует простых чисел вида $4n+3$, представимых в виде суммы двух квадратов.

А как быть с простыми числами вида $4n+1$? Если мы будем исследовать все имеющиеся в нашем распоряжении картинки, например

Эксперимент.
MAX кол. столбцов = 20
модуль: 13

Сетка $\sqrt{}$,

а именно, — левый верхний квадрат, причём, в этом квадрате — левую верхнюю четвертинку, то в случае простого вида $4n+1$ всегда обнаружим в этой четвертинке простое число p (в нашем случае $p = 13 = 2^2 + 3^2$). Можно провести также другой

Эксперимент:
СВОЙСТВА: ПРОСТОЕ
2 Варианта: сначала $4n-1$ **;**
потом $4n+1$**;**
MAX кол. столбцов = 291.

В первом из них картина пустая — нужных чисел нет, во втором — заполненная, чисел имеется огромное множество.

Мы сейчас с вами ГЛАЗАМИ открыли так называемую “Рождественскую теорему Ферма” — о ней была увлекательная статья Яна Стюарта в 9-м номере журнала “Квант” за 1991 год, стр. 12-19:

Все простые числа вида $4n+1$ *и только они представимы в виде суммы двух квадратов.* (Конечно, сюда надо добавить также и исключительное простое число $2 = 1^2 + 1^2$.)

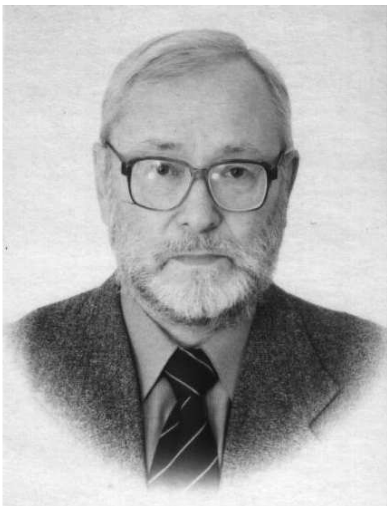
По версии Яна Стюарта, Пьер Ферма обнаружил эту теорему как раз под Новый год, почти как и мы с вами[2] (но, в отличие от нас, он её ДОКАЗАЛ).

Конечно, наши эксперименты не позволяют сделать вывод, что ВСЕ простые числа вида $4n+1$, И ТОЛЬКО ОНИ, представимы в виде суммы двух квадратов, но УВИДЕТЬ, то есть ОТКРЫТЬ это свойство они нам прекрасно ПОМОГЛИ.

Дальше я не буду требовать от вас совершать открытия, можете немножко отдохнуть.

ВОЗВРАЩАЕМСЯ К БАЗОВОМУ ОТОБРАЖЕНИЮ ПИСАТЕЛЯ-ЧИТАТЕЛЯ

Сейчас я вам расскажу об одном эксперименте, который провёл замечательный учёный, ведущий научный сотрудник ВЦ АН, к сожалению, недавно ушедший от нас, профессор Александр Александрович Зенкин.



Сан Саныч предложил изменять количество столбцов таблицы при отображении писателя-читателя и наблюдать за возникающими при этом динамическими объектами.

Эксперимент.
Отображение: Писателя-Читателя

[2]Лекция прочитана 4 декабря 2010 г. — *Прим. ред.*

Свойства: КВАДРАТ
миллисекунды = 200
УВЕЛИЧИВАТЬ КОЛИЧЕСТВО СТОЛБЦОВ: $\surd$ % см. сразу под таблицей
УБРАТЬ СЕТКУ

Мы наблюдаем так называемые *виртуальные параболы* Зенкина. Сан Саныч выделял два типа парабол. Одни из них он называл “кометами” — они постоянно возникают в числовом “космосе”, прилетая справа налево, другие “солитонами”[3] - эти параболы, подобно одиночным волнам, гордо и неотвратимо, как цунами, опускаются по вертикали. % показать, нажимая СТОП.

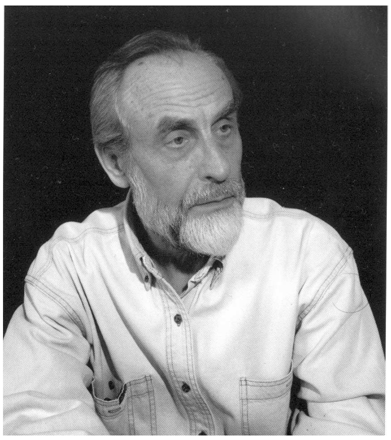
Сан Саныч утверждал, что эти параболы вполне мог бы наблюдать Пифагор, если бы в его распоряжении были современные компьютеры. В честь Пифагора свои изображения с квадратиками на экране компьютера Сан Саныч называл ПИФОГРАММАМИ. Пифограммы А. А. Зенкин применял в исследованиях теоретико-числовой проблемы Варинга. Заинтересовавшихся я отсылаю к его книге “Когнитивная компьютерная графика”, которая вышла в издательстве “Наука” в 1991 году, и в которой он увлекательно рассказал о визуализациях научных абстракций. А. А. Зенкину принадлежит замечательный комментарий ко всем экспериментам, которые мы сейчас с вами наблюдаем:

“Посмотрите — это интересно, всегда неожиданно и просто красиво”.

Сейчас я вам покажу обнаруженную мною параболу, инвариантную относительно преобразования Зенкина.

Эксперимент.
MAX кол. столбцов = 100
Свойства: фигурные
порядок = 3
миллисекунды = 100
ИЗМЕНЯТЬ: $\surd$ % дополнительно к изменению столбцов!
— два динамических преобразования одновременно.

При достижении количеством столбцов предельного значения парабола “взрывается” и наблюдаются какие-то интересные “созвездия”, непонятные отрезки — какой-то загадочный виртуальный мир.



Очаровавшись этим миром, московский художник Александр Фёдорович Панкин (он, кстати, присутствует здесь на лекции и вы после её окончания можете к нему подойти и задать свои вопросы), провёл удивительный эксперимент. Не будучи по профессии математиком, он, тем не менее, обнаружил замечательный математический факт, который в конечном итоге воплотился в его художественной картине “Треугольник из ряда Фибоначчи” (см. рис. 9).

[3] “Солитон” означает “уединенная волна”. — *Прим. ред.*”

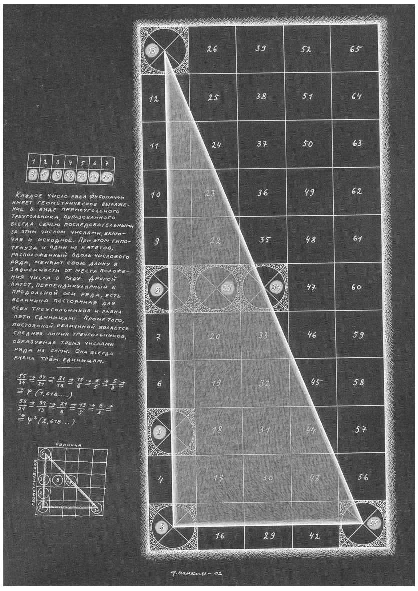


Рис. 9

Эта картина периодически экспонируется в художественных салонах города Москвы.

Числами Фибоначчи называются числа последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ..., в которой каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, а два первые равны 1. Эта последовательность возникла в задаче о кроликах итальянского математика Леонардо Фибоначчи (ок. 1170 – после 1228), которую он разместил в своём научно-популярном бестселлере “Книга об абаке”, она вышла в 1202 году.

Суть открытия А. Ф. Панкина мы сейчас увидим в следующем эксперименте.

Эксперимент.
Цвет: АВТО
MAX кол. столбцов = 5 % важно - число Фибоначчи!
Свойства: ОЧФиб : 1. % числа Фибоначчи
НЕ увеличивать количество столбцов % - Убрать!
НЕ ИЗМЕНЯТЬ
Нумерация столбцов: с 1

Я задал количество столбцов таблицы равное числу Фибоначчи 5. Здесь цветом выделены 7 первых чисел последовательности Фибоначчи: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Числа 1, 5, 21 располагаются в вершинах прямоугольного треугольника, а три числа 3, 8, 13 - на его средней линии. Оказывается, подобная конфигурация возникает всякий раз, когда количество столбцов таблицы равно какому-то числу Фибоначчи.

Эксперименты.
MAX кол. столбцов = 8; 13; 21.

А. Ф. Панкин эту закономерность обнаружил, рисуя разноцветные квадратики на листах бумаги. Когда он её увидел, то, удивлённый, пошёл к своему другу А. А. Зенкину. Тот подтвердил: “Да, Александр Фёдорович, ты сделал маленькое математическое открытие”. А. А. Зенкин впоследствии математически обосновал найденную художником закономерность. За математическими подробностями я отсылаю к статье И. Ф. Акулича “На вернисаже как-то раз:” во 2-м номере журнала “Математика для школьников” за 2010 год, стр. 56-63.

Кроме треугольника Панкина при отображении писателя-читателя возникают и другие замечательные объекты. “Треугольник с наконечником”, в который выстраиваются числа Фибоначчи, обнаружили химик Валерий Александрович Никаноров и математик Камиль Ибрагимович Бахтияров. Этот треугольник возникает в том случае, когда количество столбцов таблицы равно удвоенному числу Фибоначчи, например,

Эксперименты.
MAX кол. столбцов = 10; 16; 26; 42. % показать треугольники с наконечниками

На самом деле здесь мы здесь тоже обнаруживаем настоящий кладезь замечательных геометрических объектов. Довольно часто возникают отрезки из трёх чисел Фибоначчи, которые я называю "ВЁСЛАМИ". Например, в последней конфигурации таких вёсел 5, причём среднее число в каждой тройке чисел одного весла располагается ровно посередине. % показать 5 троек. При динамическом изменении количества столбцов таблицы возникает ощущение, что кто-то невидимый мчится в венецианской гондоле, размахивая вёслами.

Эксперимент.
MAX кол. столбцов = 111
миллисекунды = 100
УВЕЛИЧИВАТЬ КОЛИЧЕСТВО СТОЛБЦОВ
Убрать СЕТКУ
Цвет: fg = ЧЁРНЫЙ
bg = СВЕТЛО-ГОЛУБОЙ (I ряд)

Не исключено, что здесь можно обнаружить и какие-то другие геометрические объекты: важно, что экспериментировать здесь может каждый, даже не будучи математиком!

Ещё одно маленькое лирико-философское отступление.

Эксперимент.
MAX кол. столбцов = 60
миллисекунды = 2000
СВОЙСТВО: КВАДРАТ
нажать: ПРИМЕНИТЬ, ПУСК — и сразу СТОП!

Представим себе таблицу из одного столбца, простирающуюся бесконечно далеко вниз: знакомый нам натуральный ряд, повёрнутый на 90^o. В этом столбце располагаются ВСЕ числа — это колыбель "цивилизации чисел". "Вдохнём в неё жизнь":

нажать: ПУСК

числа начали перераспределяться в два столбца, в три и т.д: Если мы представим себе бесконечно расширяющуюся таблицу, то рано или поздно, по мере увеличения количества столбцов, каждый чёрный квадратик в этой таблице попадёт в первую строку — привычный нам ряд натуральных чисел. Эта строка — "кладбище" всех чисел. Когда все числа попадут туда, жизнь замрёт, остановится, вся таблица, кроме первой строки, опустеет.

Любопытно, что переходы "Небытие" – "Жизнь" и "Жизнь" – "Небытие" не симметричны: первый из них мы можем себе хорошо представить и даже смоделировать на компьютере. Второй же переход ("Жизнь" – "Небытие") — нет.

В заключение этой темы я покажу вам несколько математико-художественных композиций. Все они - КРАСИВЫЕ ТЕОРЕМЫ.

Эксперимент: "ИЛЛЮЗИЯ ВЫПУКЛОСТИ":
УБРАТЬ: Увеличивать кол-во столбцов - НЕ увеличивать!
MAX кол. столбцов = 291
ЦВЕТ:
bg = СЕРЫЙ (в нижней строке палитры)
ОТОБРАЖЕНИЕ: УЛАМ & sqrt
СВОЙСТВА: КВАДРАТ

Валерий Александрович Никаноров заметил, что если повернуть голову на 90^o, то иллюзия выпуклости в восприятии этого рисунка исчезает.

Эксперимент: "ЗМЕИ":
ЦВЕТ:
fg = КРАСНЫЙ
bg = ЧЁРНЫЙ
Отображение: Кантора-Мебиуса
Свойства: ЛИНЕЙН
a = 41
b = 20

Эксперимент: "БРАТСКАЯ МОГИЛА ПАРАБОЛ" — здесь много "плит", на которых нарисованы красные "параболки":
Отображение: СУММА КУБОВ

Эксперимент: "ПАРЧА":
Отображение: СУММА КВАДРАТОВ

Эксперимент: "СОЛНЦЕ":
ЦВЕТ: fg = ЯРКО ЖЁЛТЫЙ
bg = КРАСНЫЙ
Свойства: $n \wedge 2 = b\ (mod\ a)$

В правом нижнем углу — особенности машинной арифметики.

Эксперимент: "МАРГАРИТКИ":
ЦВЕТ: fg = БЕЛЫЙ
bg = ЗЕЛЁНЫЙ (4 ряд, 3 столбец)
СВОЙСТВА: СУММЫ ЦИФР
Сумма: 23

Эксперимент: "БЛЁСТКИ НА ВОЛНАХ":
ЦВЕТ: bg = СИНИЙ
ОТОБРАЖЕНИЕ: КВАДРАТЫ

Внизу — опять "привет из Зазеркалья", особенности машинной арифметики.

Возникает вопрос: а надо ли пытаться эти все красивые теоремы доказывать? Не достаточно ли ими просто любоваться?

<u>Информация</u>

От редакции

Об изменении состава редакционной коллегии

По итогам голосования членов редакционной коллегии журнала “Математическое образования” в состав редколлегии избран Канель-Белов Алексей Яковлевич, профессор Московского института открытого образования, доктор физ.-мат. наук. Поздравляем и желаем плодотворной работы!

Замеченные опечатки в № 1(61), 2012 г.

Стр. 41, 16-я строка снизу:

Напечатано курсивом: *показывает, однако, что с данным определением не все в порядке, и принятие его невозможно без не украшающих формулировку (и обычно запоздалых) ограничений и оговорок*

Должно быть без курсива: показывает, однако, что с данным определением не все в порядке, и принятие его невозможно без не украшающих формулировку (и обычно запоздалых) ограничений и оговорок

Стр. 41, 8-я строка снизу:

Напечатано: $f(x)_0$

Должно быть: $f(x_0)$

Стр. 42, 7-я строка сверху:

Напечатано: $x_0 \to x_0$

Должно быть: $\{x_n\} \to x_0$

14-я строка сверху:

Напечатано: $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon|$

Должно быть: $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

15-я строка снизу:

Напечатано: $(fx_0)!$

Должно быть: $f(x_0)$

8-я строка снизу:

Напечатано:

$$f(x)\,\{$$

Должно быть:

$$f(x) = \{$$

Стр. 45, 4-я строка сверху:

Напечатано курсивом: *Если* $f(x) = x^3$, *то для любой точки* x_0 *(действительной оси или комплексной плоскости) и произвольно взятого приращения* Δx:

Должно быть без курсива: Если $f(x) = x^3$, то для любой точки x_0 (действительной оси или комплексной плоскости) и произвольно взятого приращения Δx:

Стр. 45, 17-я строка сверху:
Напечатано: $(f''x_0)$
Должно быть: $f''(x_0)$

Стр. 45, 15-я строка снизу:
Напечатано:

$$y''(t_0) = f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0))^2 + f'(\varphi(t_0))\varphi''(t_0)(\Delta t)^2.$$

Должно быть:

$$y''(t_0) = f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0))^2 + f'(\varphi(t_0))\varphi''(t_0).$$

Последняя строка стр. 45 и две первые строки стр. 46:
Напечатано:

$$d^2y = \varphi''(t)dt^2 + \varphi'(t)d^2t + f''(\varphi(\psi(\tau)))(\varphi'(\psi(\tau))\psi'(\tau)\Delta\tau)^2 + +f'(\varphi(\psi(\tau)))(\varphi''(\psi(\tau))\psi'(\tau)\Delta\tau)^2 +$$
$$+\varphi'(\psi(\tau))\psi''(\tau)(\Delta\tau)^2) = f''(\varphi(t))(\varphi'(t)dt)^2 + f'(\varphi(t))(\varphi''(t)\Delta t^2 + \varphi'(t)d^2t) =$$
$$f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Должно быть:

$$\begin{aligned} d^2y = y''(\tau)(\Delta\tau)^2 = f''(\varphi(\psi(\tau)))(\varphi'(\psi(\tau))\psi'(\tau)\,\Delta\tau)^2 + \\ + f'(\varphi(\psi(\tau)))\big(\varphi''(\psi(\tau))(\psi'(\tau)\,\Delta\tau)^2 + \varphi'(\psi(\tau))\psi''(\tau)(\Delta\tau)^2\big) = \\ = f''(\varphi(t))(\varphi'(t)\,dt)^2 + f'(\varphi(t))\big(\varphi''(t)\,dt^2 + \varphi'(t)d^2t\big) = f''(x)\,dx^2 + f'(x)d^2x. \end{aligned}$$

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.npcmapro.ru   Раздел: Партнеры, журнал "Математическое образование".

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2012 год (включая стоимость пересылки) – 80 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2012 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 70 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Предполагается вывешивать статьи в формате PDF в архиве на странице журнала.

Просим авторов предоставляемых статей сообщать, согласны ли они на это.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776