ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двенадцатый

№ 1 (45)

Январь-март 2008 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 1 (45), 2008 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2008 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 31.03.2008 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (45), январь – март 2008 г.

Содержание

Антиматроиды

А. Ю. Эвнин

Предлагаемая статья продолжает ряд публикаций А. Ю. Эвнина в нашем журнале, посвященных задачам комбинаторной оптимизации (№№ 2(33), 3(34), 4(35)). В ней рассмотрены антиматроиды — системы множеств, ведущие себя наихудшим образом при применении определенного алгоритма решения оптимизационной задачи.

1. Введение

Весьма общей является следующая задача дискретной оптимизации.

Пусть каждому элементу e непустого конечного множества E поставлено в соответствие неотрицательное число $w(e)$, называемое *весом* этого элемента. *Вес подмножества* $X \subset E$ определяется как сумма весов его элементов:

$$w(X) = \sum_{e \in X} w(e).$$

Рассматривается некоторая совокупность J подмножеств множества E. Требуется найти максимальное по включению множество $B \in J$ минимального веса.

Подобный вид имеют или сводятся к нему многие задачи: например, задача коммивояжёра, задача о рюкзаке, задача о минимальном стягивающем дереве и другие.

Жадный алгоритм решения описанной задачи состоит в последовательном, элемент за элементом, формировании искомого множества, причём на каждом шаге из всех элементов множества E, добавление которых к ранее выбранным возможно (то есть приводит к некоторому множеству из J), выбирается элемент наименьшего веса.

Как известно [1, 2], жадный алгоритм приводит к оптимальному решению в случае, когда $\langle E, J \rangle$ — матроид.

В общем случае это не так, однако широко распространено мнение, что жадная стратегия приводит к приемлемым с точки зрения практики результатам: получающиеся решения «значительно лучше» наихудших и могут служить в качестве начальных точек при поиске точных решений другими алгоритмами.

Это мнение подкреплено многочисленными экспериментальными результатами по «хорошему поведению» жадного алгоритма при решении евклидовой задачи коммивояжёра.

Однако уже в случае антисимметричной задачи коммивояжёра были найдены примеры графов, для которых жадный алгоритм приводит к наихудшему из возможных решений.

Подробно этот феномен был исследован английскими математиками Gregory Gutin и Anders Yeo в 2001–2005 гг. Мы изложим основные результаты их публикаций [4–6].

2. Антиматроиды и I-антиматроиды

Пусть E — непустое конечное множество, а J — совокупность некоторых его подмножеств, замкнутая по включению. *Антиматроид* — это упорядоченная пара $\langle E, J \rangle$, для которой существует весовая функция $w: E \to \mathbb{R}$ такая, что жадный алгоритм решения задачи на *минимум* находит подмножество *максимального* веса.

Обычно пара $\langle E, J \rangle$ порождается некоторой задачей дискретной оптимизации [1]. Соответствующую задачу мы также будем называть антиматроидом.

Приведём простейший пример. Рассмотрим задачу о назначениях[1], которая состоит в выделении совершенного паросочетания наименьшего веса в двудольном графе. В данном случае E — множество рёбер двудольного графа, а J — множество всех его паросочетаний. Жадный алгоритм на каждом шаге выбирает ребро наименьшего веса, не смежное с ранее выбранными рёбрами. Весовая функция задаётся матрицей весов рёбер графа. Пусть для графа $K_{3,3}$ матрица весов такова:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 5 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что жадный алгоритм последовательно выберет рёбра веса 4, 8 и 12, в результате чего формируется паросочетание веса 24. Легко проверить, что любое другое совершенное паросочетание имеет меньший вес. Таким образом, жадная стратегия привела к наихудшему из возможных решений.

G. Gutin и A. Yeo [5] нашли весьма общее условие, достаточное для того, чтобы пара $\langle E, J\rangle$ была антиматроидом.

Прежде, чем сформулировать их результат, необходимо ввести некоторые определения.

I-независимое семейство — это упорядоченная пара $\langle E, J\rangle$, где E — непустое конечное множество; J — совокупность подмножеств множества E (элементы J будем называть *независимыми множествами*), удовлетворяющая следующим условиям:

(J0) $\varnothing \in J$;

(J1) если $A \in J$ и $B \subset A$, то $B \in J$;

(J2) все *базисы* (максимальные по включению независимые множества) имеют одинаковую мощность.

Ясно, что любой матроид является I-независимым семейством.

Пусть S — независимое множество. Обозначим через $I(S)$ множество всех таких элементов из $E \setminus S$, добавление любого из которых к S даёт вновь независимое множество. Итак,

$$I(S) = \{x \in E \setminus S \mid S \cup x \in J\}.$$

I-независимое семейство $\langle E, J\rangle$ называется *I-антиматроидом*, если

(J3) существует такой базис $B' = \{x_1, \ldots, x_k\}$, что для любого другого базиса B выполнено условие

$$\sum_{j=0}^{k-1} |I(\{x_1, x_2, \ldots, x_j\}) \cap B| < \frac{k(k+1)}{2}. \qquad (*)$$

Заметим, что в условии $(*)$ важен порядок элементов множества B'. Мы будем считать, что элемент x_i появляется в множестве B' на i-м шаге работы жадного алгоритма.

Мощность базиса — *ранг* I-антиматроида. Если ранг не меньше 2, I-антиматроид — *нетривиальный*.

G. Gutin и A. Yeo установили, что *нетривиальный I-антиматроид является антиматроидом.*

Теорема 1. *Для любого нетривиального I-антиматроида $\langle E, J\rangle$ существует такая весовая функция $w : E \to \mathbb{N}$, что жадный алгоритм формирует наихудшее решение (т. е. решение наибольшего веса) задачи нахождения базиса наименьшего веса.*

Доказательство. Пусть $B' = \{x_1, \ldots, x_k\}$ — базис из условия (J3). Введём обозначение: $I_i = I(\{x_1, \ldots, x_i\})$. Очевидно, что $I_k = \varnothing$ и

$$I_{k-1} \subset I_{k-2} \subset \cdots \subset I_1 \subset I_0.$$

[1] Алгоритм решения этой задачи изложен в [3].

Определим функцию w следующим образом.

Пусть число M больше ранга I-антиматроида k. Для каждого j положим $w(x_j) = jM$. Если элемент x не входит в базис B', то для него найдётся индекс j такой, что $x \in I_{j-1} \setminus I_j$; в этом случае определим $w(x) = 1 + jM$.

Проанализируем, как при такой весовой функции будет работать жадный алгоритм. Поскольку наименьший вес имеет элемент x_1, то именно он будет выбран на первом шаге. Далее выбор ведётся среди элементов множества I_1. Если $x \in I_1 \setminus I_2$ и $x \neq x_2$, то $w(x) = 1+2M > 2M = w(x_2)$. Поэтому на втором шаге выбирается элемент x_2. Аналогичные рассуждения показывают, что для каждого j на j-м шаге выбирается элемент x_j.

Таким образом, действительно жадный алгоритм строит интересующий нас базис B'. Заметим, что

$$w(B') = \sum_{j=1}^{k} jM = \frac{k(k+1)}{2} \cdot M.$$

Пусть теперь $B = \{y_1, \ldots, y_k\}$ — произвольный базис, отличный от B'. Для каждого i найдётся такой единственный индекс a_i, что $y_i \in I_{a_i-1} \setminus I_{a_i}$. Пусть элементы базиса пронумерованы так, что $a_1 \leq \cdots \leq a_k$. При этом получается, что если $y_i = x_{a_i}$, то $w(y_i) = a_i M$; если же $y_i \neq x_{a_i}$, то $w(y_i) = a_i M + 1$. Отсюда

$$w(B) = \sum_{i=1}^{k} w(y_i) \leq \sum_{i=1}^{k} (a_i M + 1) \leq k + M \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

В силу того, что $y_i \in I_{a_i-1} \setminus I_{a_i}$, в сумме $\sum\limits_{j=0}^{k-1} |I_j \cap B|$ элемент y_i учитывается при $j = 0, 1, \ldots, a_i - 1$ — всего ровно a_i раз. Поэтому $\sum\limits_{j=0}^{k-1} |I_j \cap B| = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$ и

$$w(B) \leq k + M \sum_{i=1}^{k} a_i = k + M \sum_{j=0}^{k-1} |I_j \cap B| \leq k + M \left(\frac{k(k+1)}{2} - 1 \right) = k - M + w(B') < w(B').$$

Мы доказали, что вес любого базиса B, отличного от B', меньше веса B'. Значит, действительно, жадный алгоритм, выбирая на каждом шаге элемент наименьшего веса, строит (и при том единственное) решение наибольшего веса! □

Замечание. В случае матроида ранга k для любых двух базисов B и B' выполняется неравенство, противоположное неравенству $(*)$. Действительно, из аксиом матроида вытекает, что в базисе B найдётся $k-j$ элементов, которыми можно дополнить множество $\{x_1, \ldots, x_j\} \subset B'$ до базиса матроида. Каждый из этих $k-j$ элементов входит в множество I_j. Поэтому $|I_j \cap B| \geq k-j$ и

$$\sum_{j=0}^{k-1} |I_j \cap B| \geq k + (k-1) + \cdots + 1 = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Покажем, что неравенство $(*)$ из условия (J3) является точным в следующем смысле: *нельзя уменьшить его правую часть, оставив в силе утверждение о том, что I-антиматроид является антиматроидом.*

Рассмотрим векторный матроид с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_k$ и с основанием

$$E = \{e_1, e_2, \ldots e_k, 2e_1, 2e_2, \ldots, 2e_k\}.$$

Как известно из линейной алгебры, для любых двух различных базисов B и $B' = \{x_1, \ldots x_k\}$ выполняется равенство $|I_j \cap B| = k - j$ (при произвольном j). Действительно, если фиксированы j векторов $x_1, \ldots x_j$ в базисе B', то в базисе B найдётся ровно $k-j$ векторов, каждый из которых не попадает в линейную оболочку векторов $x_1, \ldots, x_j$, а значит входит в множество I_j. Стало быть, выполнено равенство

$$\sum_{j=0}^{k-1} |I_j \cap B| = k + (k-1) + \cdots + 1 = \frac{k(k+1)}{2}.$$

3. Примеры I-антиматроидов

В предыдущем параграфе было показано, что для задачи о назначениях (трёх работников на три работы) жадная стратегия может привести к наихудшему решению. Докажем более сильное утверждение

Теорема 2. *Задача о назначениях является I-антиматроидом.*

Доказательство. Как уже упоминалось, в задаче о назначениях в роли базисов выступают совершенные паросочетания. Выполнение условий (J0), (J1), (J2) очевидно. Докажем, что имеет место и (J3).

Рассмотрим два произвольных различных базиса B' и B. Пусть совершенное паросочетание B' состоит из рёбер $e_1 = x_1y_1, \ldots, e_k = x_ky_k$.Тогда множество $I_j \cap B$ составляют рёбра из паросочетания B, входящие в подграф исходного двудольного графа, порождённый вершинами $x_{j+1}, y_{j+1}, \ldots, x_k, y_k$. Очевидно, таких рёбер не более $k - j$ штук. Если для любого j указанных рёбер ровно $k - j$, то, перебирая значения j по убыванию от $k - 1$ до 1, последовательно получим: $e_k \in B, e_{k-1} \in B, \ldots, e_1 \in B$. Но тогда $B = B'$. Значит, при $B \neq B'$ найдётся такое число i, что $|I_i \cap B| < k - i$. Поэтому

$$\sum_{j=0}^{k-1} |I_j \cap B| < \sum_{j=0}^{k-1} (k - j) = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Неравенство $(*)$ выполнено. □

Как известно, *задача коммивояжёра* состоит в выделении в заданном графе гамильтонова цикла наименьшего веса. В самом общем случае граф является ориентированным и на веса его дуг не накладывается никаких ограничений. Такую задачу коммивояжёра будем называть *асимметричной.*

В задаче коммивояжёра в роли множества E выступает множество дуг (или рёбер) графа, а независимые множества образуют дуги (соответственно рёбра), которые можно дополнить до гамильтонова цикла. Выполнение условий (J0), (J1) и (J2) очевидно. Покажем, что имеет место и (J3).

Существует стандартная процедура сведения задачи коммивояжёра к задаче о назначениях с дополнительными ограничениями. Она состоит в следующем. По взвешенному ориентированному графу G без петель и кратных дуг[2] с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, k\}$ построим (неориентированный) двудольный граф G' с долями $V_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ и $V_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$. Каждая дуга ij исходного графа превращается в ребро x_iy_j двудольного графа с сохранением веса. Гамильтонов цикл переходит при этом в некоторое совершенное паросочетание. С другой стороны, всякое совершенное паросочетание в G' задаёт некоторую подстановку на множестве V. Если указанная подстановка представляет собой один цикл (в алгебраическом смысле), то имеем гамильтонов цикл в G. В противном случае совершенному сочетанию в G' отвечает несколько непересекающихся циклов, покрывающие все вершины графа G.

При переходе от асимметричной задачи коммивояжёра к задаче о назначениях (без дополнительных требований к структуре совершенного паросочетания) мощность множества $I_j \cap B$ не уменьшается. Поэтому из выполнения неравенства $(*)$ для задачи о назначениях вытекает его справедливость и в интересующем нас случае. Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3. *Асимметричная задача коммивояжёра — I-антиматроид.*

[2]В контексте задачи коммивояжёра это предположение не является ограничительным.

4. Симметричная задача коммивояжёра

Под *симметричной задаче коммивояжёра (СЗК)* понимают нахождение гамильтонова цикла наименьшего веса в полном неориентированном графе. В своих первых публикациях [5] и [4] G. Gutin и A. Yeo допустили ошибку, отнеся данную задачу к I-антиматроидам. В статье [6] ошибка была исправлена. Оказалось, что СЗК не I-антиматроид, но в некотором смысле *весьма близка* к нему, что позволило, слегка модифицировав доказательство теоремы 1, показать, что данная задача является антиматроидом.

Теорема 4. *Симметричная задача коммивояжёра (для графа с не менее чем 4 вершинами) не является I-антиматроидом.*

Доказательство. От противного: пусть базис $B' = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots, e_k\}$ из условия (J3) существует и состоит из рёбер гамильтонова цикла $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to \dots \to k \to 1$, взятых в естественном порядке. В качестве базиса B возьмём рёбра гамильтонова цикла $1 \to 3 \to 2 \to \to 4 \to 5 \to \dots \to k \to 1$.

Поскольку $e_1 \notin B$, имеем $I_1 \cap B = B$ и $|I_1 \cap B| = n$.

Далее заметим, что рёбра 13, 32 и 24 не входят в множество I_2 (так как ни одно из этих рёбер вместе с рёбрами 12 и 23 не образует подмножества гамильтонова цикла), а все остальные рёбра из B принадлежат I_2. Значит, $|I_2 \cap B| = k - 3$.

Очевидно также, что при $j \geq 3$ справедливо $I_j \cap B = B \setminus \{e_1, e_2. \dots .e_j\}$ и $|I_j \cap B| = k - j$.

Таким образом,

$$\sum_{j=0}^{k-1} |I_j \cap B| = k + k + (k-3) + (k-3) + (k-4) + \dots + 1 = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Стало быть, условие (J3) не выполняется. □

Теорема 5. *Симметричная задача коммивояжёра является антиматроидом.*

Доказательство. Пусть базис $B' = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots, e_k\}$ состоит из рёбер гамильтонова цикла $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to \dots \to k \to 1$, взятых в естественном порядке.

Определим функцию w следующим образом.

Пусть число M больше количества вершин графа k. Положим $w(e_1) = 2M$ и $w(e_j) = jM$ при $j > 1$. Если ребро e не входит в базис B', то для него найдётся индекс j такой, что $e \in I_{j-1} \setminus I_j$; в этом случае определим $w(e) = 1 + jM$. Заметим, что множество I_0 совпадает с множеством E всех рёбер графа, а $I_1 = E \setminus \{e_1\}$, поскольку в полном графе любые два различных ребра входят в некоторый гамильтонов цикл. Поэтому $I_0 \setminus I_1 = \{e_1\}$, откуда вытекает, что вес любого ребра, отличного от e_1 и e_2, больше $2M$.

Несложно видеть, что при такой весовой функции жадный алгоритм сформирует базис B'. Действительно, на первых двух шагах будут выбраны рёбра наименьшего веса e_1 и e_2. На j-м шаге выбор ведётся среди элементов множества I_{j-1}. При этом если $e \in I_{j-1}$, но $e \neq e_j$, то $w(e) > jM = w(e_j)$. Поэтому на j-м шаге выбирается ребро e_j.

Легко подсчитать вес гамильтонова цикла B':

$$w(B') = \frac{Mk(k+1)}{2} + M.$$

Для дальнейшего нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. Для любого гамильтонова цикла $B \neq B'$ справедливо:

$$\sum_{j=0}^{k-1} |I_j \cap B| \leq \begin{cases} \frac{k(k+1)}{2}, & \text{если } e_1 \notin B; \\ \frac{k(k+1)}{2} - 1, & \text{если } e_1 \in B. \end{cases} \qquad (**)$$

Доказательство. Оценим мощности множеств $I_j \cap B$. Если $e_1 \notin T$, то $|I_j \cap B| = k$.

Убедимся, что во всех остальных случаях $|I_j \cap B| \le k - j$. Для $j = 0, 1$ и $k - 1$ это очевидно. Поэтому будем считать, что $2 \le j < k-1$. Заметим, что ребро графа входит в I_j тогда и только тогда, когда оно отлично от ребра, соединяющего концевые вершины маршрута $1 \to 2 \to \ldots \to$ $\to j \to j+1$, образованного рёбрами $e_1, e_2, \ldots, e_j$, и не инцидентно ни одной из вершин множества $J = \{2, 3, \ldots, j\}$ внутренних вершин этого маршрута. Обозначим через Q_j множество рёбер из B, каждое из которых покрывает хотя бы одну вершину из множества J. Пусть m_j — количество рёбер в B, у которых оба конца входят в J. Тогда $|Q_j| = 2|J| - m_j$, поскольку каждая вершина графа покрывается ровно двумя рёбрами гамильтонова цикла B, и при таком подсчёте m_j рёбер подсчитывается дважды. Заметим, что $m_j < |J|$ (иначе подграф, образованный указанными m_j рёбрами, не будет лесом), откуда $|Q_j| > |J| = j - 1$, то есть $|Q_j| \ge j$. Поэтому

$$|I_j \cap B| \le k - |Q_j| \le n - j.$$

Пусть теперь a — наименьшее такое число, что ребро $e_a \notin B'$ (поскольку $B \ne B'$, такое число существует; при этом $1 \le a \le k-1$). Тогда начальная часть маршрута B выглядит следующим образом:

$$1 \to 2 \to \cdots \to a-1 \to a \to b \to \ldots,$$

где $a + 1 < b \le k$.

Если $a = 1$, то $|I_{b-1} \cap B| < k - (b-1)$, так как по доказанному выше в B имеется не менее $b - 1$ рёбер, инцидентных вершинам из Q_{b-1} и не входящих, стало быть, в I_{b-1}, а, сверх того, ребро $1b$ также не входит в I_{b-1}.

Если же $a > 1$, то $e_a \notin B$ и $m_{a+1} = (a+1) - 3$. Поэтому $|I_{a+1} \cap B| < k - (a+1)$.

Таким образом среди неравенств $|I_j \cap B| \le n - j$ найдётся хотя бы одно строгое.

Теперь при суммировании указанных неравенств (с учётом единственного исключения) возникают неравенства (∗∗). □

Продолжим доказательство теоремы. Возьмём произвольный гамильтонов цикл $B = \{f_1, \ldots, f_k\}$, отличный от B'. Далее рассуждения будут зависеть от того, входит ребро $e_1 = 12$ в базис B или нет.

I. Пусть $e_1 \notin B$. Для каждого i найдётся такой единственный индекс a_i, что $f_i \in I_{a_i - 1} \setminus I_{a_i}$. При этом $w(f_i) \le a_i M + 1$ (напомним, что e_1 не входит в B). Повторяя далее выкладки из доказательства теоремы 1, получаем:

$$w(B) = \sum_{i=1}^{k} w(f_i) \le \sum_{i=1}^{k} (a_i M + 1) \le k + M \sum_{i=1}^{k} a_i = k + M \sum_{j=0}^{k-1} |I_j \cap B|.$$

Теперь, используя лемму, имеем:

$$w(B) \le k + M \cdot \frac{k(k+1)}{2} < M + M \cdot \frac{k(k+1)}{2} = w(B').$$

II. Пусть $e_1 \in B$. В этом случае $a_1 = 2$ и $\sum\limits_{j=0}^{k-1} |I_j \cap B| = \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i - 1$. С учётом (∗∗) вновь имеем

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i = 1 + \sum_{j=0}^{k-1} |I_j \cap B| \le \frac{k(k+1)}{2}.$$

Поэтому, как и выше, $w(B) < w(B')$.

Мы доказали, что вес любого базиса B, отличного от B', меньше веса B'. □

Литература

[1] Пападимитриу Х., Стайглиц К. *Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность.* — М.: Мир, 1985. – 512 с.

[2] Эвнин А. Ю. *Элементарное введение в матроиды* // Математическое образование. — 2005. – № 2(33). – С. 2–33.

[3] Эвнин А. Ю. *Вокруг теоремы Холла* // Математическое образование. – 2005. – № 3(34). – С. 2–23. № 4(35). – С. 2–19.

[4] Bang-Jensen J., Gutin G., Yeo A. *When the greedy algorithm fails* // Discrete Optimization. – 2004. – № 1. – pp. 121–127.

[5] Gutin G., Yeo A. *Anti-matroids* // Oper. Res. Lett. – 2002. – vol. 30. – pp. 97–99.

[6] Gutin G., Yeo A. *The greedy algorithm for the symmetric TSP* // Oper. Res. Lett. – 2005. – vol. 33. – pp. 87–89.

Эвнин Александр Юрьевич,
кандидат педагогических наук,
доцент кафедры прикладной математики
Южно-Уральского Государственного Университета.

Email: evnin@prima.susu.ac.ru

Конфигурация равенства

А. Г. Мякишев

Новая элементарная конфигурация, введенная Дж. Конвеем и обобщенная автором, позволяет выявить много красивых и глубоких соотношений между замечательными точками и линиями (в том числе кривыми второго порядка), связанными с треугольником. Статья публикуется двумя частями, продолжение в следующем номере.

1. Конфигурация равенства

В 1998 году знаменитый математик Джон Конвей порадовал любителей элементарной геометрии[1] следующей любопытной конструкцией [9].

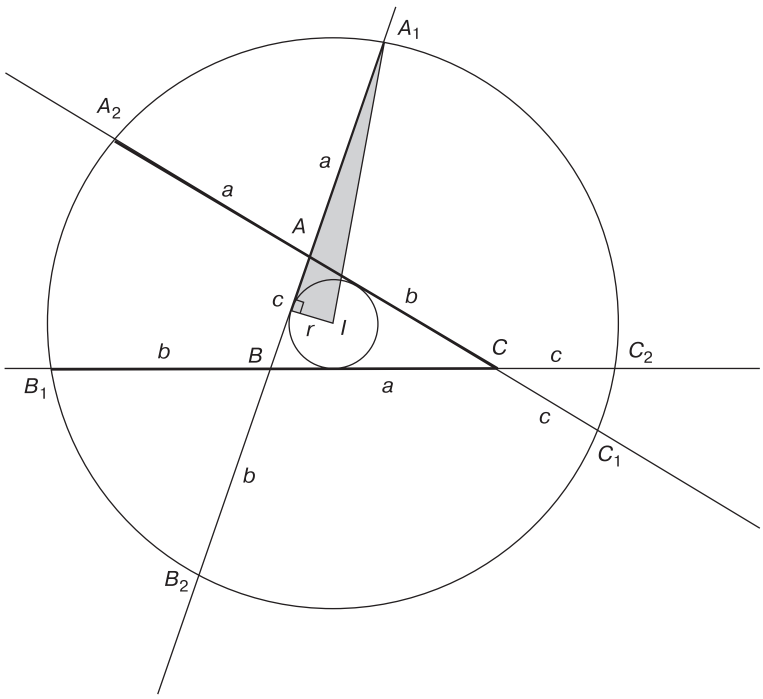


Рис. 1

В произвольном треугольнике ABC (рис. 1) на прямых AB и AC отложим (*вовне* относительно треугольника) от точки A отрезки, равные стороне BC. Концы этих отрезков, отличные от вершины, дают две новые точки A_1 и A_2. Аналогично построим точки B_1, B_2, C_1, C_2. Несложно показать[2], что все шесть построенных таким образом точек лежат на одной окружности, заслуженно названной *окружностью Конвея*. Центр ее совпадает с центром вписанной в треугольник окружности, а радиус равен $\sqrt{r^2+s^2}$, где r — радиус вписанной в треугольник окружности, а s — полупериметр[3].

[1]По нынешним временам, явление чрезвычайно редкое — когда математик-профессионал вносит свою лепту в Элементарную Математику. Конвей в этой области создал столько оригинальных шедевров, что рядом с ним (среди коллег его уровня), пожалуй, поставить некого.

[2]Но сложно было выдумать новую небанальную конструкцию.

[3]Происхождение английского обозначения s для полупериметра понятно — от слова “*semiperimeter*”. Отечественное же p вызывает вопросы: может быть, от слова “*poluperimeter*”?

“А что, если действовать подобным образом, но откладывать отрезки, скажем, равные стороне BC, не от вершины A, а от вершин B и C?” — подумалось однажды мне.

А именно:

В произвольном треугольнике ABC на прямых AB и AC отложим (*вовне* относительно треугольника) от точек B и C отрезки, равные стороне BC (рис. 2). Концы этих отрезков, отличные от вершины, дают две новые точки C_{a+} и B_{a+} соответственно. Аналогично построим еще четыре точки A_{b+}, C_{b+}, B_{c+}, A_{c+} (эти точки в дальнейшем будем называть *плюс-точками*)[4].

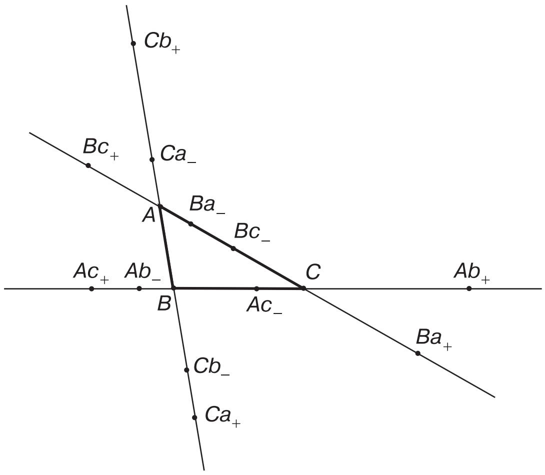


Рис. 2

Если же откладывать отрезки также и *вовнутрь*, получим шестерку *минус-точек*:

$$C_{a-}, \quad B_{a-}, \quad A_{b-}, \quad C_{b-}, \quad B_{c-}, \quad A_{c-}.$$

Построенную таким образом конструкцию назовем, для краткости, *конфигурацией равенства*. Изучению ее различных свойств и будет посвящена наша статья.

2. Плюс-точки: конкурентные свойства

Определение 2.1. Назовем *плюс-треугольником* треугольник, образованный прямыми (C_{a+}, B_{a+}), (A_{b+}, C_{b+}), (B_{c+}, A_{c+}). Обозначим его символом $+\Delta$.

Теорема 2.1. $+\Delta$ перспективен Δ_{ABC}, причем перспектором будет точка H' — ортоцентр треугольника Жергонна (треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами исходного треугольника).

Доказательство. Хотя и несложные, однако набившие оскомину вычисления с использованием барицентрических координат[5] быстро ведут к цели. (Подробную информацию о барицентрическом исчислении можно найти в [4], [7] — гл.14, [11]) Нужно только несколько раз посчитать определитель вида

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

в котором первая строка отвечает за координату, а вторые две — являются координатами некоторых точек (либо прямых). Тогда, раскрыв определитель, на выходе получим координаты прямой, проходящей через эти точки (соответственно, координаты точки пересечения этих прямых[6]).

[4]Как покажем в дальнейшем, плюс-точки, хотя и не лежат, как у Конвея, на одной окружности — но все-таки лежат на некоторой *конике* (т. е. коническом сечении).

[5]Увы, нормального геометрического решения автору отыскать не удалось.

Примечание к примечанию: Но мир, как говорится, не без добрых людей. Ознакомившись с черновиком этой статьи, *Арсений Акопян* такое решение обнаружил, а также выявил еще несколько интересных свойств плюс-точек — за что автор ему крайне благодарен. Подробнее о находках Арсения см. §15 — *Дополнение.*

[6]Это и есть Великий Принцип Двойственности проективной геометрии.

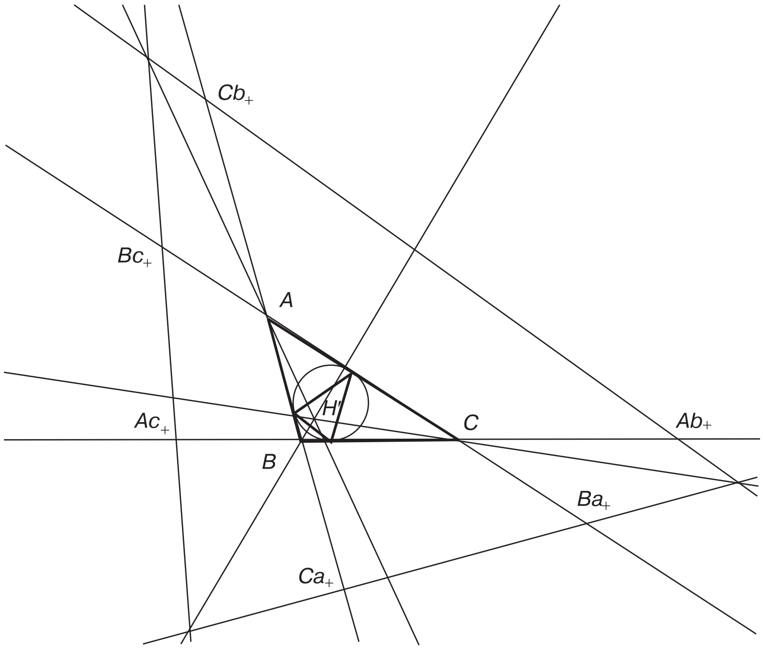


Рис. 3

В самом деле, понятно, что точка C_{a+} имеет координаты $(-a : a + c : 0)$, а точка B_{a+} — $(-a : 0 : a + b)$.

Раскрыв соответствующий определитель и умножив на общий множитель (если возникнет желание), найдем координаты прямой (C_{a+}, B_{a+}): $((a + b)(a + c) : a(a + b) : a(a + c))$.

Координаты двух других прямых получаются из координат первой прямой *циклическими сдвигами*, т. е. происходит сдвиг координат по схеме $p \to q \to r \to p$, а в каждой координате — еще и сдвиг сторон: $a \to b \to c \to a$.

Так, координаты прямой (A_{b+}, C_{b+}) примут вид $(b(b + a) : (b + c)(b + a) : b(b + c))$, а прямой (B_{c+}, A_{c+}) — $(c(c + a) : c(c + b) : (c + a)(c + b))$.

Пусть A_1 — точка пересечения прямых (A_{b+}, C_{b+}) и (B_{c+}, A_{c+}). Наш замечательный определитель вновь в работе, и вот он — результат:

$$A_1 = (-a(b + c)(a + b + c) : b(a + c)(a + b - c) : c(a + b)(a + c - b)).$$

Поскольку координаты вершины A — $(1 : 0 : 0)$, то, запустив определитель еще разок, найдем координаты прямой (AA_1): $(0 : c(a + b)(a + c - b) : b(a + c)(a + b - c))$.

Теперь надо бы вычислить координаты H' — но, оказывается, в этом нет необходимости (а если бы таковая возникла, мы справились бы с этим без труда — благодаря специальным *формулам перехода от одного базисного треугольника к другому* — см. [11]), потому что за нас это уже сделал Кимберлинг — ибо в Энциклопедии [10] сказано: H' суть точка $X65$ с координатами

$$\left(\frac{a(b + c)}{b + c - a} : \frac{b(c + a)}{c + a - b} : \frac{c(a + b)}{a + b - c}\right).$$

Подставив их в уравнение прямой (AA_1), получим: $bc(a + b)(a + c) - bc(a + b)(a + c) = 0$, т. е. $H' \in (AA_1)$.

Точно так же проверяется принадлежность этой точки двум другим прямым. □

Вспомним теперь, что довольно часто в геометрии треугольника встречаются объекты, имеющие близких родственников-*тройняшек*. Так, вписанная окружность семейными узами связана с тремя вневписанными, треугольник Жергонна — с тремя добавочными треугольниками Жергонна и т. д.

В конфигурации равенства тройняшки будут преследовать нас постоянно: каждой «плюс» -теореме всегда сопутствуют еще три ее аналога, если принять во внимание и минус-точки. Встретятся нам и «минус» -теоремы, также с неизменными тройняшками впридачу.

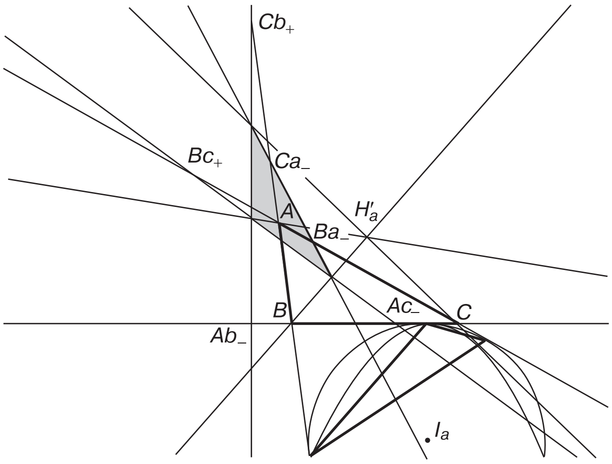


Рис. 4

Определение 2.1′. Треугольник, образованный прямыми (B_{a-}, C_{a-}), (C_{b+}, A_{b-}), (A_{c-}, B_{c+}), назовем *первым добавочным к плюс-треугольнику* и обозначим его символом $+\Delta_a$.

Переставляя в строке, описывающей прямые, порождающие этот треугольник, большие и малые буквы *циклически* (не забудем сдвиг пары, задающей прямую, на одну позицию), получим два других добавочных треугольника : $+\Delta_b$ и $+\Delta_c$.

Теорема 2.1′. $+\Delta_a$, $+\Delta_b$ и $+\Delta_c$ перспективны Δ_{ABC}, причем перспекторами являются ортоцентры соответствующих добавочных треугольников Жергонна[7].

Разумеется, обосновывать это утверждение мы не станем — поскольку тогда пришлось бы почти дословно повторить доказательство теоремы 2.1.

Определение 2.2. Пусть A_l, B_l, C_l — основания внутренних биссектрис треугольника ABC. Треугольник $A_lB_lC_l$ назовем *биссекторным* и обозначим Δ_l.

Теорема 2.2. Треугольник $+\Delta$ гомотетичен треугольнику Δ_l.

Центр этой гомотетии — точка Z с координатами $(a(b+c) : b(c+a) : c(a+b))$ (она же – точка $X37$ по Кимберлингу [10]). Геометрически (опять-таки, согласно Кимберлингу) эта точка есть точка пересечения прямых AG_a, BG_b, CG_c, где G_a, G_b, G_c — центроиды треугольников AB_lC_l, BC_lA_l, CA_lB_l соответственно. Коэффициент гомотетии $k = -\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ (имеется в виду гомотетия, переводящая Δ_l в $+\Delta$).

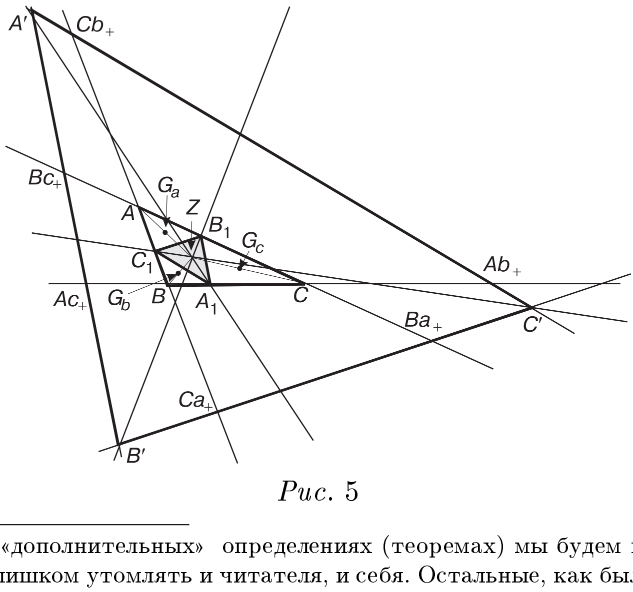


Рис. 5

[7]Далее в подобного рода «дополнительных» определениях (теоремах) мы будем всегда обсуждать лишь одно (одну) из трех — чтобы не слишком утомлять и читателя, и себя. Остальные, как было уже отмечено, получаются из первого (первой) циклическими сдвигами.

Доказательство. Сначала убедимся в том, что треугольники гомотетичны. Покажем, например, что прямые (B_lC_l) и $(C_{a+}B_{a+})$ параллельны. Это вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 2.1 *(о параллельных парах)*. Пусть дан треугольник ABC и на прямой AC выбраны точки B_1, B_2, а на прямой AC — C_1, C_2, таким образом, что $(BB_1)||(CC_2)$, $(CC_1)||(BB_2)$. Тогда $(B_1C_1)||(B_2C_2)$.

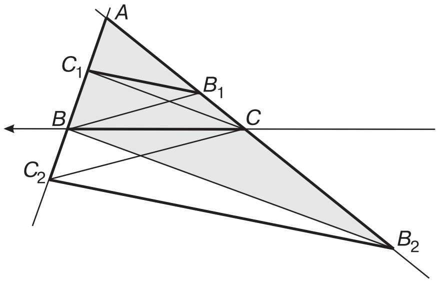


Рис. 6

Доказательство леммы. Из условия следует существование гомотетии $\mathrm{H}(A, k_1)$, такой, что $C_1 \to B$, $C \to B_2$ и гомотетии $\mathrm{H}(A, k_2)$, такой, что $B_1 \to C$, $B \to C_2$.

Тогда $[\mathrm{H}(A, k_2) \circ \mathrm{H}(A, k_1)](C_1) = C_2$ и $[\mathrm{H}(A, k_1) \circ \mathrm{H}(A, k_2)](B_1) = B_2$.

Но произведение гомотетий с общей вершиной — снова гомотетия, причем

$$\mathrm{H}(A, k_2) \circ \mathrm{H}(A, k_1) = \mathrm{H}(A, k_1) \circ \mathrm{H}(A, k_2)$$

— гомотетии с общей вершиной перестановочны. (Подробнее о свойствах гомотетии см. [2], [5] и [7] — гл. 19.) □

Лемма 2.2. Биссектриса BB_l параллельна прямой CC_{a+}, а биссектриса CC_l — прямой BB_{a+}.

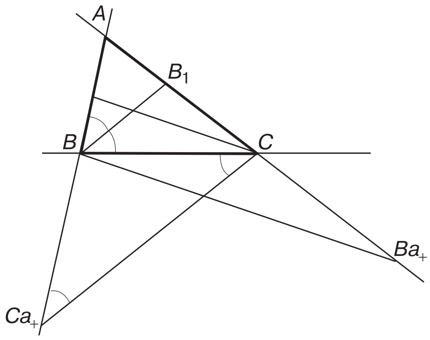


Рис. 7

Доказательство. Треугольник $C_{a+}BC$ — равнобедренный,

$$\Rightarrow \angle BC_{a+}C = \frac{\pi - (\pi - \angle B)}{2} = \angle\frac{B}{2} = \angle B_lBC, \quad \Rightarrow (BB_l)||(CC_{a+}).$$

И со второй парой тоже самое. □

Итак, параллельность соответствующих прямых установлена, а тем самым установлена и гомотетичность $+\Delta$ и Δ_l.

Замечание. Точно так же можно было показать, что $(B_{a-}C_{a-})||(B_LC_L)$, где B_L, C_L — основания соответствующих *внешних* биссектрис.

Далее, покажем, что точка $Z = (a(b+c) : b(c+a) : c(a+b))$ лежит на прямой $(A'A_l)$. Так как $A' = (-a(b+c)(a+b+c) : b(a+c)(a+b-c) : c(a+b)(a+c-b))$ и $A_l = (0 : b : c)$, несложно убедиться в том, что координаты прямой (A', A_l) имеют вид:

$$(A'A_l) = (bc(c-b) : -ac(b+c) : ab(b+c)).$$

Подставим в уравнение прямой координаты точки Z:

$$abc(b+c)((c-b)-(a+c)+(a+b))=0.$$

Аналогично доказывается, что точка Z лежит и на двух других прямых.

Наконец, сосчитаем коэффициент гомотетии. Для этого подберем постоянные множители μ и η таким образом, чтобы

$$\mu(0,b,c)+\eta(-a(b+c)(a+b+c),b(a+c)(a+b-c),c(a+b)(a+c-b))=$$
$$=(a(b+c),b(c+a),c(a+b)).$$

(Равенство здесь понимается как равенство векторов, т. е. *покоординатное.*)

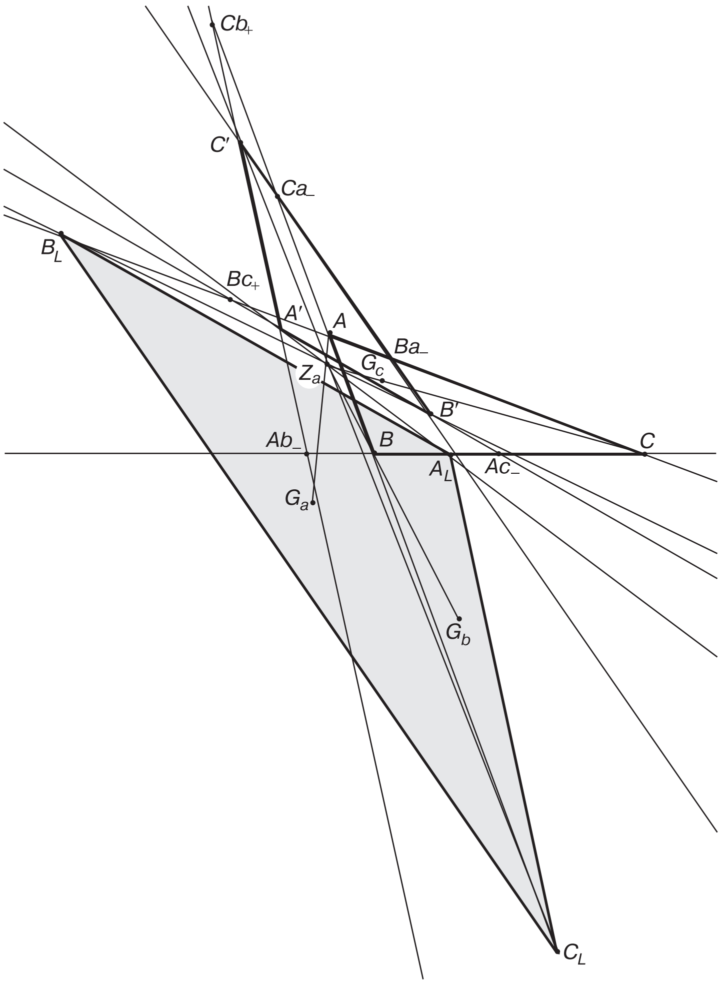


Рис. 8

Этим мы добьемся того, что система из двух материальных точек $\mu(b+c)A_l$ и $\eta(-a(b+c)(a+b+c)+b(a+c)(a+b-c)+c(a+b)(a+c-b))A'$ будет иметь своим центром масс точку Z. Тогда, по правилу рычага, *направленное* отношение $\frac{A_lZ}{ZA'}=\frac{\eta}{\mu}\cdot\frac{S'_A}{S_{A_l}}$ (вторая дробь — отношение соответствующих суммарных масс), причем, если знак дроби *положительный*, то Z лежит *внутри* отрезка A_lA', в противном случае — *вне*. Очевидно, подходят значения $\mu=\frac{2(a+b)(a+c)}{a+b+c}$, $\eta=-\frac{1}{a+b+c}$. Кроме того, $S_{A_l}=b+c$ и $S'_A=(-a(b+c)(a+b+c)+b(a+c)(a+b-c)+$ $+c(a+b)(a+c-b))=\ldots$ (после упрощений) $=-2abc$ (чтобы быстро получить последнее равенство, нужно представить $a+b-c$ как $a+b+c-2c$ и $a+c-b$ как $a+b+c-2b$, а затем у части слагаемых вынести $a+b+c$ за скобку). Таким образом, $\frac{A_lZ}{ZA'}=+\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$, т. е. точка Z находится внутри отрезка A_lA', а это значит, что коэффициент гомотетии *отрицателен.* □

Определение 2.2′. Пусть A_l, B_l, C_l — основания внутренних биссектрис треугольника ABC, а A_L, B_L, C_L — внешних. Треугольник $A_lB_LC_L$ назовем *первым добавочным к биссекторному* и обозначим Δ_l^a.

Имеет место

Теорема 2.2′. Треугольник $+\Delta_a$ гомотетичен треугольнику Δ_l^a. Центр этой гомотетии — точка Z_a с координатами $(a(b+c) : b(a-c) : c(a-b))$. Геометрически эта точка есть точка пересечения прямых AG_a, BG_b, CG_c, где G_a, G_b, G_c — центроиды треугольников AB_LC_L, BC_LA_l, CA_lB_L соответственно. Коэффициент подобия $k = \left|\frac{abc}{(a-b)(b+c)(c-a)}\right|$ (имеется ввиду гомотетия, переводящая Δ_l^a в $+\Delta_a$).

3. Минус-точки: коллинеарные свойства

Определение 3.1. Назовем *минус-тройкой* тройку следующих прямых: (C_{a-}, B_{a-}), (A_{b-}, C_{b-}), (B_{c-}, A_{c-}).

Теорема 3.1. Минус-тройка является тройкой параллельных прямых. Более того, эти прямые перпендикулярны прямой OI, проходящей через центры описанной и вписанной окружностей.

Доказательство. Показать, что прямые параллельны друг другу, несложно.

Первый способ доказательства параллельности.

Найдем координаты бесконечно удаленной точки прямой (C_{a-}, B_{a-}). Понятно, что точка C_{a-} имеет координаты $(a : c-a : 0)$, а точка B_{a-} — $(a : 0 : b-a)$. Тогда нехитрые вычисления дают следующие координаты (C_{a-}, B_{a-}):

$$((a-c)(a-b) : a(a-b) : a(a-c)).$$

Теперь нужно решить систему, второе уравнение которой есть уравнение бесконечно удаленной прямой:

$$\begin{cases} (a-c)(a-b)p + a(a-b)q + a(a-c)r = 0 \\ p+q+r = 0 \end{cases}$$

Поскольку нас интересуют решения с точностью до множителя, можем считать, для начала, что $r = 1$.

Окончательно получим $(C_{a-}, B_{a-})\infty = (a(b-c) : b(c-a) : c(a-b))$

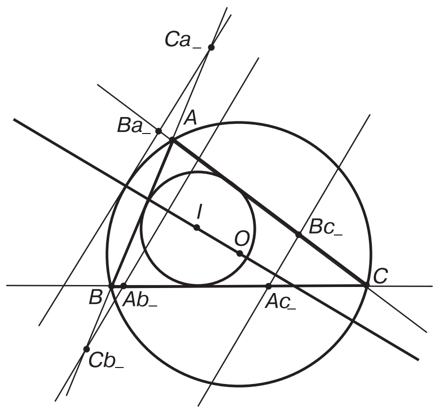


Рис. 9.

Аналогичные подсчеты, выполненные для двух других прямых, дадут ту же самую бесконечно удаленную точку. □

В Кимберлинге [10] она именуется точкой $X513$ и там же указан один диковинный способ ее построения:

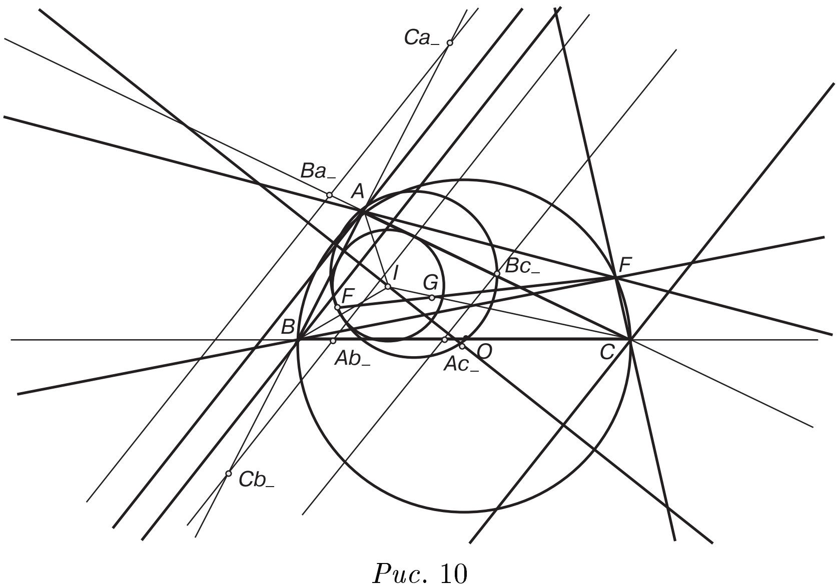


Рис. 10

Возьмем точку Фейербаха[8] F, подвергнем ее гомотетии $\mathrm{H}(G, -2)$ (переводящей окружность Эйлера в описанную). Получим точку F' на описанной окружности. Ее изогональный образ и есть $X513$.

На всякий случай напомним определение *изогонального сопряжения.*

Если рассмотреть точку P в плоскости треугольника ABC и ее *чевианы* (т. е. тройку прямых, соединяющие вершины треугольника с этой точкой) и сделать затем симметрию чевиан относительно соответствующих биссектрис, то новая тройка прямых пересечется в точке P_l, называемой точкой, изогонально сопряженной точке P.

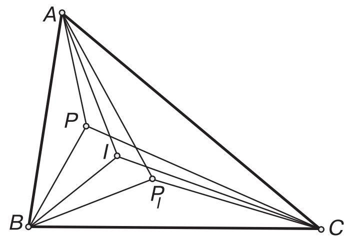


Рис. 11.

С точки зрения *проективной геометрии*, пучок параллельных прямых на обычной евклидовой плоскости пересекается в *бесконечно удаленной точке.* Все бесконечно удаленные точки образуют на проективной плоскости *бесконечно удаленную прямую.*

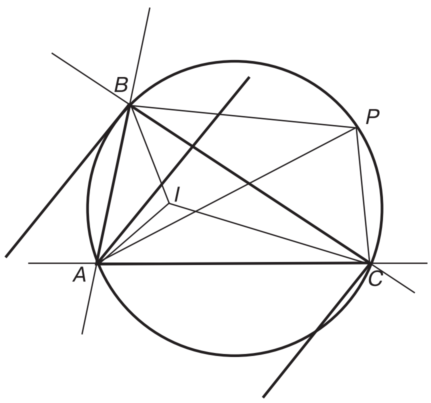


Рис. 12.

Оказывается, изогональное сопряжение переводит в бесконечно удаленную прямую описанную окружность (и наоборот) (см. [8], з. 421).

Второй способ доказательства параллельности.

Внешняя биссектриса делит основание внешним образом в отношении, равном отношению длин порождающих ее сторон (см. [7], з. 1.17а). Поэтому, по теореме Менелая (см. [7], з. 5.69, [8], з. 342), основания внешних биссектрис A_L, B_L, C_L лежат на одной прямой, а согласно замечанию к доказательству леммы 2.2, минус-прямые будут ей параллельны. Обозначим эту прямую так: L_{out}. □

Осталось показать, что $L_{out} \perp (OI)$.

Доказательство перпендикулярности.

Перпендикулярность будет вытекать из следующей цепочки лемм, каждая из которых — тот или иной классический результат элементарной геометрии.

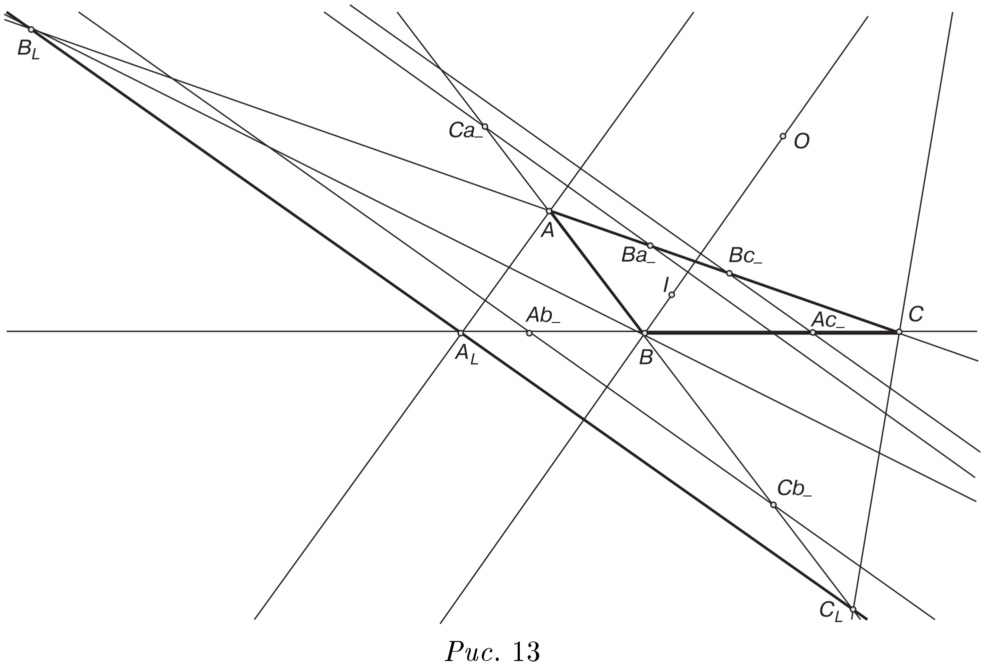


Рис. 13

[8]Одна из самых знаменитых в геометрии — точка касания вписанной окружности и окружности Эйлера, т. е. окружности, одновременно описанной около серединного треугольника и ортотреугольника. Подробнее о свойствах окружности Эйлера можно прочитать, например, в [5], § 6 и в [7], гл. 5, § 11.

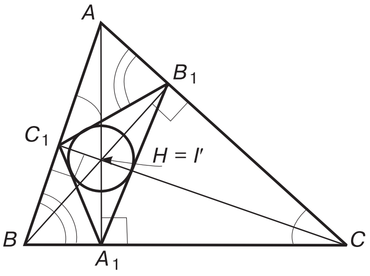


Рис. 14.

Лемма 3.1 (см. [7], з. 1.53, 1.57а)). Если $A_1B_1C_1$ — ортотреугольник *остроугольного* треугольника ABC, то центр I' вписанной в ортотреугольник окружности совпадает с ортоцентром H исходного треугольника. Кроме того, стороны ортотреугольника *антипараллельны* соответственным сторонам исходного треугольника, т. е. $\angle AC_1B_1 = \angle C$, $\angle AB_1C_1 = \angle C$ и т. д.

Лемма 3.2. *Радикальная ось* (см. [7], з. 3.54, 3.58).

Если прямая, проходящая через точку P, пересекает окружность в двух точках Q и R, то произведение $PQ \cdot PR$ не зависит от выбора прямой, содержащей P[9].

Это выражение, взятое со знаком «плюс» в случае внешней точки P и со знаком «минус» в противном случае — называется *степенью точки относительно окружности.*

Оказывается, для двух неконцентрических окружностей все точки, степени которых относительно окружностей равны, «заметают» некоторую *прямую, перпендикулярную линии центров.* Она называется *радикальной осью* двух окружностей.

Лемма 3.3. *Ортоцентрическая ось* (см. [7], з. 3.72а)).

Точки пересечения продолжения сторон ортотреугольника с соответствующими прямыми, содержащими стороны исходного треугольника, лежат на одной прямой — т. н. *ортоцентрической оси.* Ортоцентрическая ось *перпендикулярна прямой Эйлера*[10]. Действительно, пусть, например, $(B_1C_1) \cap (BC) = A_H$. Тогда треугольник A_HC_1B подобен треугольнику A_HCB_1 (т. к., в силу леммы 3.1, $\angle AHC_1 = \angle C$)[11]. Из подобия следует, что $A_HB \times AC = A_HC_1 \times A_HB_1$, т. е. (см. лемму 3.2) *степени точки* A_H относительно *описанной окружности и окружности Эйлера равны*, а значит, A_H лежит на радикальной оси этих окружностей, линия центров которых совпадает с прямой Эйлера.

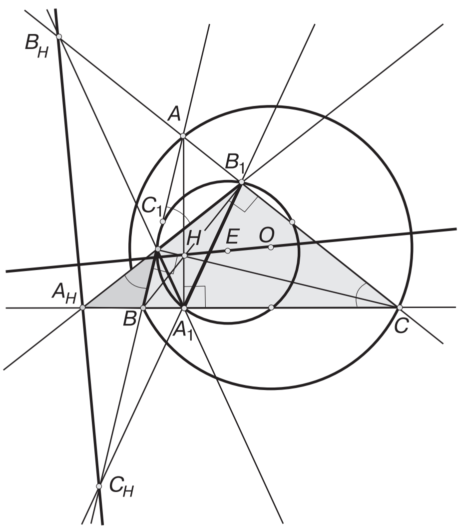


Рис. 15

Точно такие же рассуждения показывают, что и точки B_H, C_H лежат на радикальной оси.

Лемма 3.4 (см.[7], з. 5.2). Треугольник $I_aI_bI_c$, образованный центрами вневписанных окружностей — остроугольный, а исходный треугольник ABC — его ортотреугольник.

Лемма 3.5. Прямая OI является прямой Эйлера треугольника $I_aI_bI_c$, а также прямой Эйлера и треугольника Жергонна $A_2B_2C_2$ исходного треугольника ABC.

[9]Это утверждение — ни что иное, как объединенные в единое целое теоремы “о произведении хорд” и “о касательной и секущей”.

[10]На прямой Эйлера, в частности, расположены: центроид треугольника, его ортоцентр, центр описанной окружности и центр окружности Эйлера.

[11]И в случае тупоугольного треугольника аналогичное доказательство проходит.

В самом деле, во-первых, треугольник Жергонна гомотетичен треугольнику $I_aI_bI_c$. Ведь в силу лемм 3.1 и 3.5, $(AI) = (I_aI)\perp(I_bI_c)$. Понятно также, что и $(B_1C_1)\perp(AI) \Rightarrow$ $\Rightarrow (I_bI_c)||(B_2C_2)$.

А раз треугольники гомотетичны, то их прямые Эйлера либо параллельны, либо совпадают. Но центр вписанной окружности I является (лемма 3.1, лемма 3.4) ортоцентром треугольника $I_aI_bI_c$, и, очевидно, центром описанной около треугольника $A_2B_2C_2$ окружности — т. е. эта точка принадлежит и той и другой прямой Эйлера, поэтому они совпадают.

Наконец, очевидно, что центр описанной около ABC окружности O есть (по лемме 3.4) центр окружности Эйлера треугольника $I_aI_bI_c$, т. е. $(IO) = (H'E')$ — прямая Эйлера треугольника $I_aI_bI_c$[12].

Осталось только заметить, что прямая L_{out}, содержащая основания внешних биссектрис, и есть ортоцентрическая ось треугольника $I_aI_bI_c$. И, в силу леммы 3.3 и 3.5, теорема 3.1 полностью доказана. □

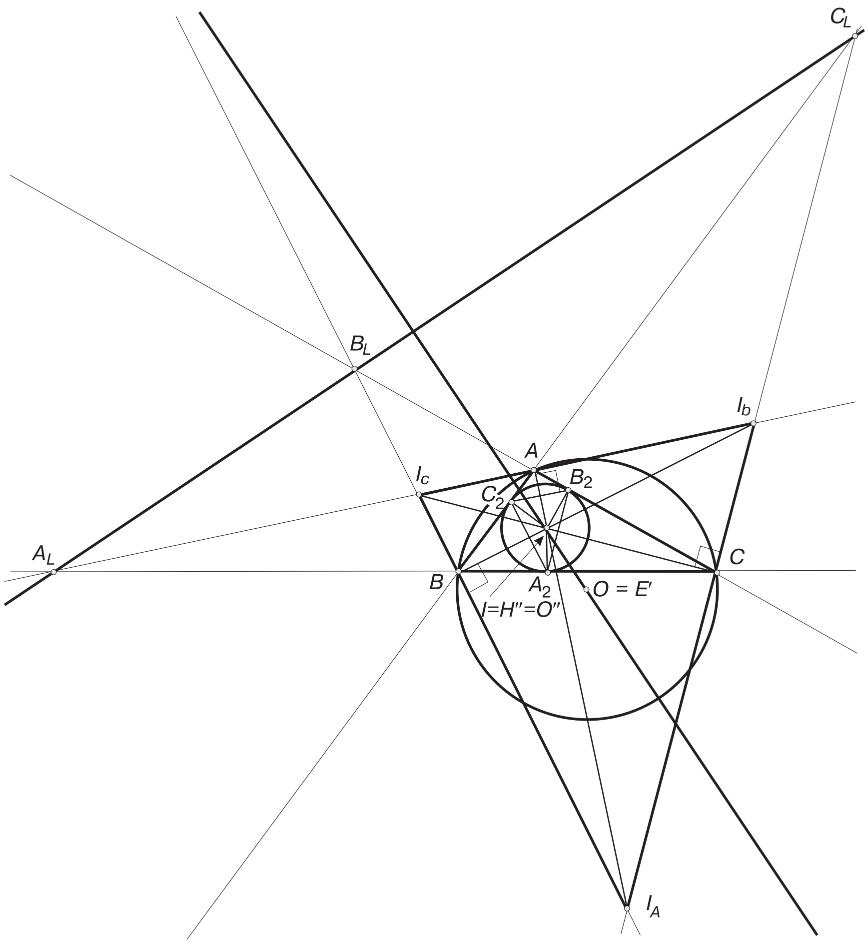


Рис. 16

Замечание. В частности, на основании только что доказанной теоремы, можно сконструировать следующую, хотя и просто формулируемую, но весьма заковыристую[13] олимпиадную задачу:

Имеется линейка, на которой отмечен отрезок, равный одной из сторон данного треугольника. Такой линейкой построить прямую, перпендикулярную прямой OI этого треугольника.

[12]Согласно этой лемме (3.5) точка H' (из теоремы 2.1) лежит на прямой OI

[13]Есть профессиональный термин в среде составителей олимпиадных задач: "*гроб*".

Определение 3.1′. Назовем *минус-«a» тройкой* тройку следующих прямых: (B_{a+}, C_{a+}), (C_{b-}, A_{b+}), (A_{c+}, B_{c-}).

Теорема 3.1′. Минус-«a» тройка является тройкой параллельных прямых. Более того, эти прямые перпендикулярны прямой OI_a, проходящей через центры описанной и соответствующей вписанной окружностей.

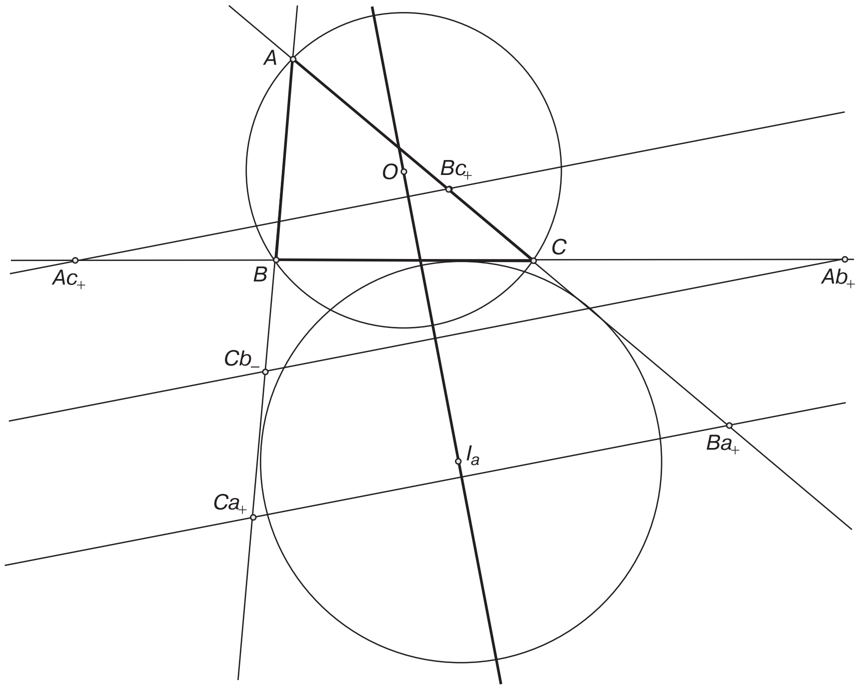


Рис. 17

4. Диагональные плюс-точки: конкурентность

Определение 4.1. Рассмотрим какие-нибудь две точки конфигурации, расположенные на двух различных прямых, проходящих через стороны треугольника. Соединим эти точки с противолежащими вершинами треугольника двумя прямыми и назовем их точку пересечения *диагональной точкой* конфигурации. Обозначать эти точки будем так, как показано на рис. 18. (Изображена точка $P_{[Ca+Ba-]}$). *Диагональными плюс-точками* назовем точки $P_{[Ca+Ba+]}$, $P_{[Ab+Cb+]}$, $P_{[Bc+Ac+]}$. (И обозначим их далее на рисунке по-простому: $A+, B+, C+$.)

Треугольник с вершинами в этих точках назовем *диагональным плюс-треугольником* и обозначим $+\delta\Delta$.

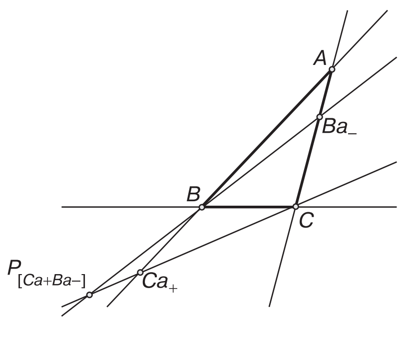


Рис. 18.

Теорема 4.1. $+\delta\Delta$ центрально симметричен Δ_{ABC} относительно точки Шпикера S — центра вписанной в серединный треугольник окружности. (По Кимберлингу ([10]), это $X10$ — точка с координатами $(b + c : c + a : a + b)$, она же — центр тяжести периметра исходного треугольника).

Приведем целых три доказательства этого утверждения. Первое из них, наиболее симпатичное, предложено Арсением Акопяном.

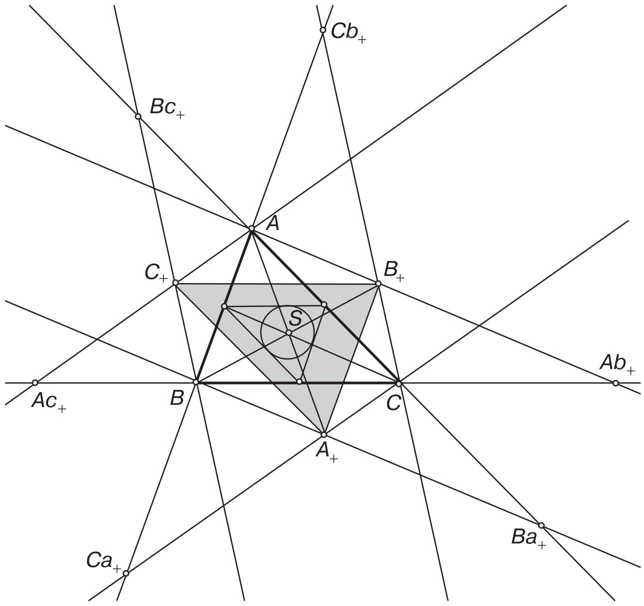


Рис. 19

Доказательство первое.

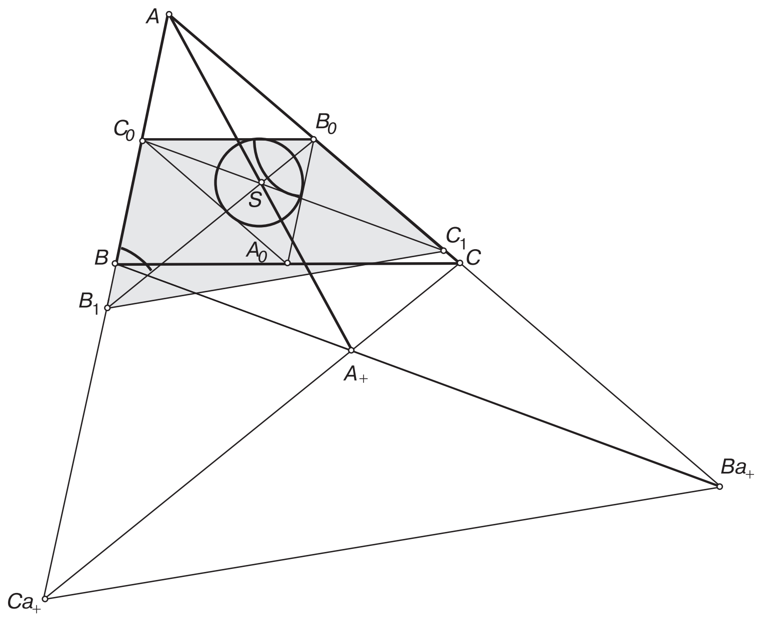


Рис. 20

Проведем в серединном треугольнике биссектрисы из вершин B_0, C_0 серединного треугольника $A_0B_0C_0$ и отметим точки B_1, C_1 их пересечения с прямыми (AB) и (AC) соответственно.

Имеем: $\angle AB_1B_0 = \angle B_1B_0A_0$ (поскольку $(AB)||(A_0B_0)$) $= \angle C_0B_0B_1$((B_0B_1) — биссектриса соответствующего угла серединного треугольника)$\Rightarrow C_0B_0 = C_0B_1$. Из тех же соображений, $C_0B_0 = B_0C_1$.

Рассмотрим гомотетию $\mathrm{H}(A, 2)$. Понятно, что $C_0 \to B$, $B_0 \to C$. Кроме того, равные отрезки должны переходить в равные, а по условию, $BC = BC_{a+} = CB_{a+}$. Поэтому четырехугольник $B_1C_0B_0C_1$ переходит в четырехугольник $C_{a+}BCB_{a+}$, и точка пересечения его диагоналей — в точку пересечения диагоналей, т. е. $S \to A+$. Это и означает, что S — середина отрезка $AA+$. Аналогично доказывается, что S — середина и двух других отрезков.

Замечание. Поскольку биссектрисы серединного треугольника параллельны соответствующим биссектрисам исходного треугольника, то подобие четырехугольников можно также доказать, сославшись на лемму 2.1 и лемму 2.2. □

Доказательство второе.

Заметим, что в силу леммы 2.2 четырехугольник $A+BIC$ (где I — точка пересечения биссектрис исходного треугольника) является параллелограммом, поэтому точка A_0 (середина отрезка BC) делит отрезок $IA+$ пополам.

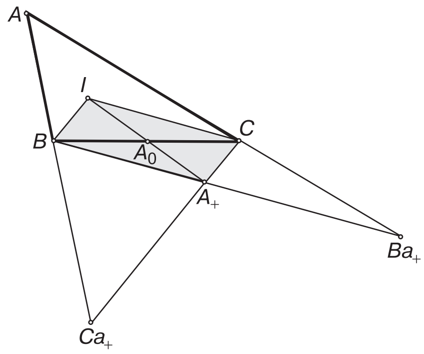


Рис. 21

Далее, пусть $p = a + b + c$. Рассмотрим систему материальных точек $p - aA$, $p - bB$, $p - cC$ с центром масс в точке Шпикера S. (см. [7], з. 14.13) Разобьем ее на три подсистемы:

$$pA; \qquad -aA,\ -bB,\ -cC; \qquad pB,\ pC.$$

Понятно, что это все эквивалентно системе pA, $-pI$, $2pA_0$. Так как A_0 — середина отрезка $IA+$, последнюю пару материальных точек можно заменить на $pA+$. Итак, исходная система с центром масс в S эквивалентна системе pA, $pA+$. А это и значит, что S — середина отрезка $AA+$.

Доказательство третье.

Гомотетия $\mathrm{H}(G, -\frac{1}{2})$ переводит треугольник в серединный, поэтому центроид G делит отрезок II_0 в отношении $2:1$. (Подробнее о свойствах гомотетии см. [2], [5] и [7] — гл. 19).

Рассмотрим далее композицию гомотетий $\mathrm{H}(G, -2) \circ H(I, \frac{1}{2})$. Согласно известной теореме о композиции гомотетий, в результате получится новая гомотетия с коэффициентом -1 (т. е. центральная симметрия) с центром, лежащим на прямой IG. Но, как видим, $\mathrm{H}(G, -2) \circ H(I, \frac{1}{2})(I_0) = I_0 \Rightarrow \mathrm{H}(G, -2) \circ H(I, \frac{1}{2}) = \mathrm{S}_{I_0}$.

Но $H(I, \frac{1}{2})(A+) = A_0$ (т. к. A_0 — середина отрезка $IA+$), и $\mathrm{H}(G, -2)(A_0) = A$.

То есть, $\mathrm{S}_{I_0}(A+) = A$, что и требовалось.

Замечание. Как следствие, имеем еще одну «убойную» олимпиадную задачу:

Имеется линейка, на которой отмечены два отрезка, равных каким-то двум сторонам данного треугольника. Такой линейкой построить центр окружности, вписанной в серединный треугольник[14].

Определение 4.1′. Треугольник с вершинами в точках $P_{[Ba-Ca-]}$, $P_{[Cb+Ab-]}$, $P_{[Ac-,Bc+]}$ назовем *первым добавочным к диагональному плюс-треугольнику* и обозначим $+\delta\Delta_a$.

Теорема 4.1′. $+\delta\Delta_a$ центрально-симметричен Δ_{ABC} относительно точки S_a — соответствующего центра вневписанной в серединный треугольник окружности.

[14] И действительно, эта задача попала в заочный тур IV геометрической олимпиады имени Шарыгина, но к моменту написания статьи результаты еще не были известны. Но как-то не верится, что с нею совладает большое количество народа. (Хотя и хотелось бы!)

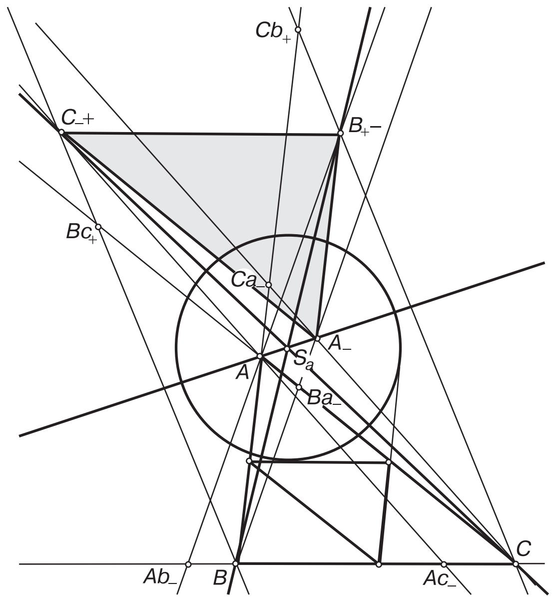


Рис. 22

5. Диагональные плюс-точки: ортологичность

Теорема 5.1. Центры вневписанных окружностей I_a, I_b, I_c являются, соответственно, ортоцентрами треугольников $BP_{[Ca+Ba+]}C$, $CP_{[Ab+Cb+]}A$, $AP_{[Bc+Ac+]}B$.

Ортоцентр треугольника $+\delta\Delta$ совпадает с точкой Бивена O' — центром окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках I_a, I_b, I_c. (По Кимберлингу [10], это $X40$ — точка, координаты которой мы здесь опускаем, ввиду их некоторой тяжеловесности.)

Доказательство. Первое утверждение достаточно очевидно.

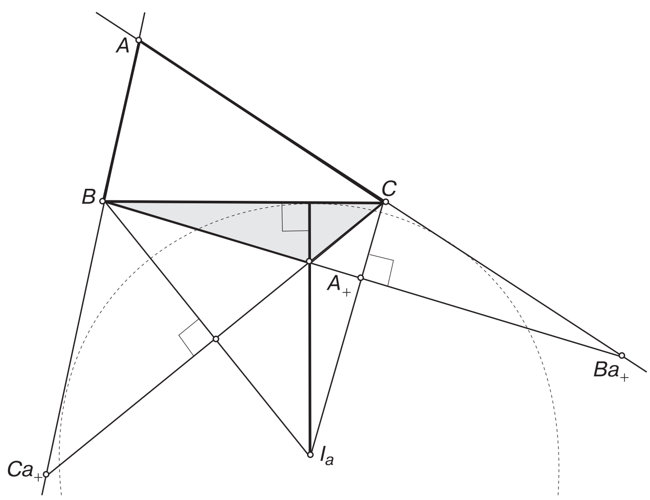


Рис. 23

В самом деле, треугольник $C_{a+}BC$ — равнобедренный, поэтому биссектриса, проведенная из вершины B этого треугольника (т. е. биссектриса *внешнего* угла исходного треугольника), является также и высотой. Аналогично, высотой является и биссектриса, проведенная из вершины C треугольника $B_{a+}CB$. (Она же — также и *внешняя* биссектриса). Обе биссектрисы пересекаются в центре вневписанной окружности I_a. Наконец, высоты треугольника $BP_{[Ca+Ba+]}C$ должны пересекаться в одной точке, т. е. в точке I_a.

Точно так же рассматриваются случаи двух других треугольников.

Второе утверждение следует из первого, из теоремы 4.1 (согласно которой прямая $P_{[Ab+Cb+]}P_{[Bc+Ac+]}$ параллельна прямой BC и т. д.), из леммы 3.4, а также из следующих двух классических результатов:

Лемма 5.1 (см. [7], з. 2.1). Ортоцентр H произвольного треугольника и его центр описанной окружности O — изогонально сопряжены.

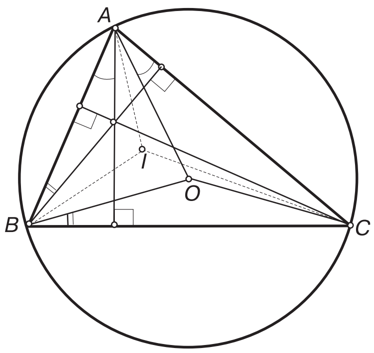


Рис. 24.

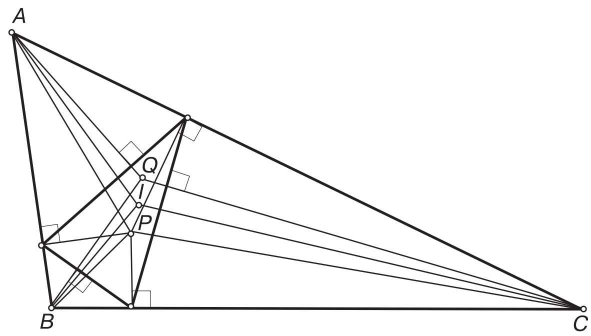
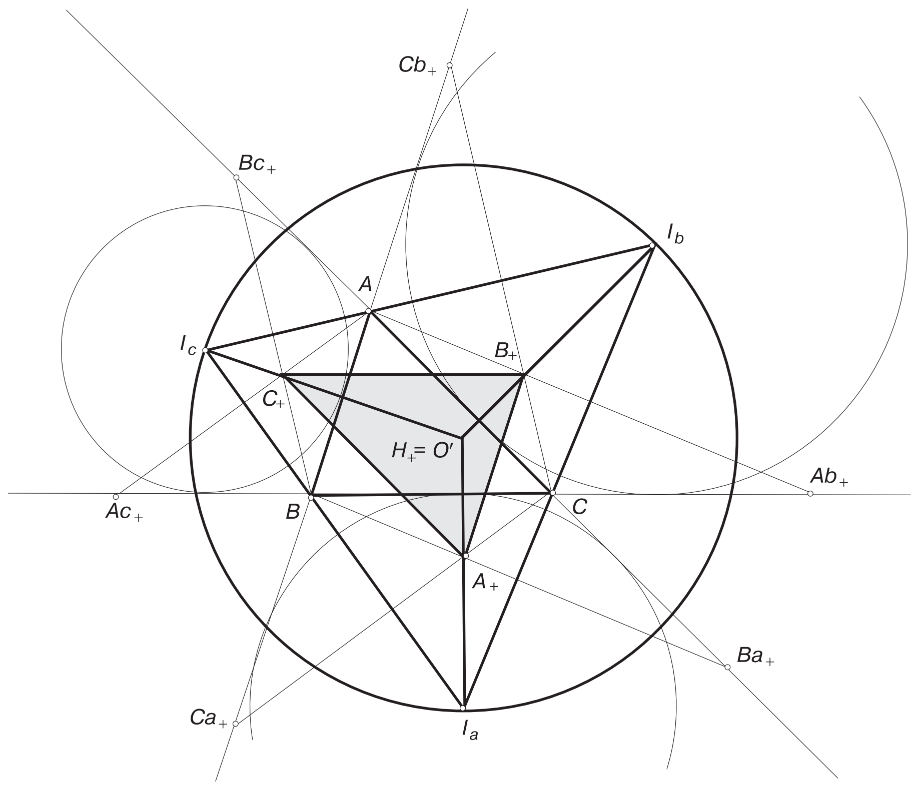


Рис. 25.

Лемма 5.2 (см. [7], з. 5.125в)). Если P и Q — пара изогонально сопряженных точек треугольника, то прямые, соединяющие вершины треугольника с точкой Q, *перпендикулярны* соответствующим сторонам *педального* треугольника точки P (т. е. треугольника, образованного основаниями перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые, содержащие стороны исходного треугольника). □

Рис. 26.



Из этой теоремы и теоремы 4.1 вытекает одно любопытное

Следствие 5.1. Точка Шпикера S является серединой отрезка с концами в ортоцентре H и точке Бивена O'.

Что касается «тройственной» теоремы, она формулируется так:

Теорема 5.1′. Центры вписанной и двух вневписанных окружностей I, I_b, I_c являются, соответственно, ортоцентрами треугольников $BP_{[Ba-Ca-]}C$, $CP_{[Cb+Ab-]}A$, $AP_{[Ac-,Bc+]}B$.

Ортоцентр треугольника $+\delta\Delta_a$ совпадает с точкой O'_a — центром окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках I, I_b, I_c.

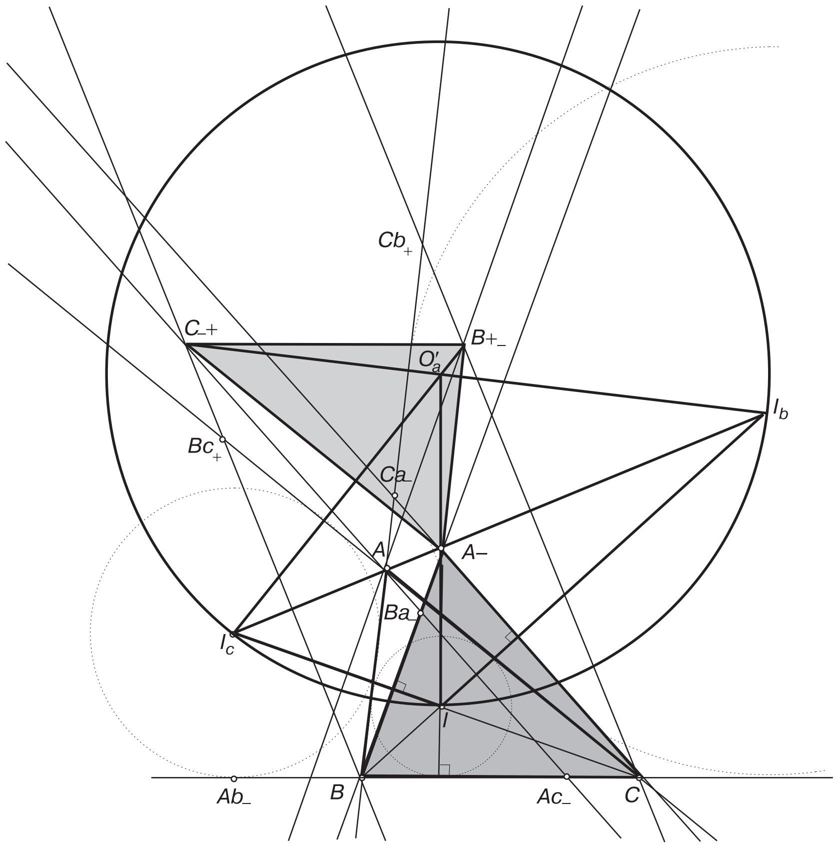


Рис. 27

6. Диагональные минус-точки: гипербола Фейербаха

В этом разделе нам понадобятся некоторые свойства конических сечений. Сформулируем их:

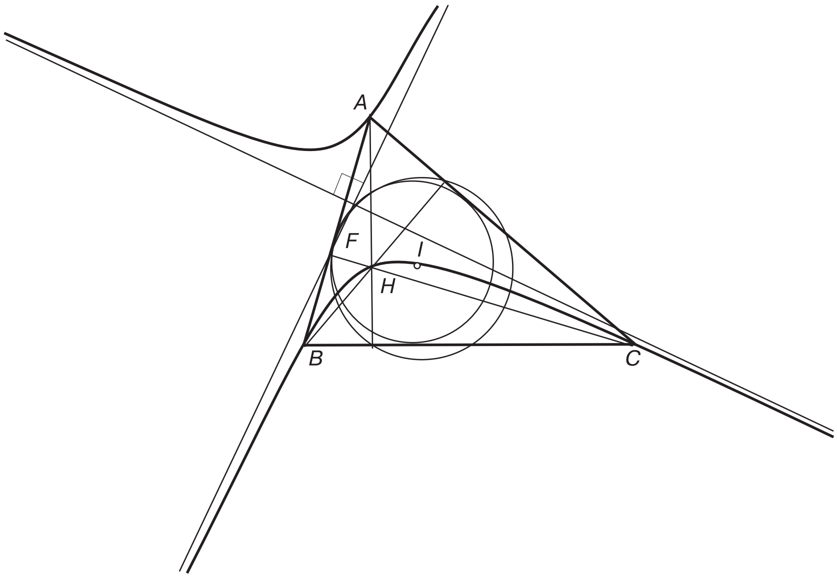
Свойство 6.1 (см. [6]). Любые *пять точек общего положения* (т. е. никакие три из которых не лежат на одной прямой) принадлежат некоторой конике. Этими точками коника определяется однозначно.

Свойство 6.2 (см. [1], [6]). Гипербола, описанная около треугольника[15], является *равносторонней* (т. е. имеет *перпендикулярные асимптоты*) тогда и только тогда, когда на гиперболе лежит *ортоцентр* H треугольника. *Центр* такой гиперболы расположен на *окружности Эйлера.*

Свойство 6.3 (см. [1], [2]). Описанная около треугольника гипербола, проходящая через центр описанной окружности I и ортоцентр H, называется *гиперболой Фейербаха.* Это — равносторонняя гипербола с центром в точке Фейербаха.

[15] Коника, содержащая вершины треугольника ABC, называется *описанной* около этого треугольника.

Рис. 28.



Гипербола Фейербаха имеет три добавочные, каждая из которых описана около треугольника, проходит через его ортоцентр и соответствующий центр вневписанной окружности.

Центрами гипербол будут являться *добавочные точки Фейербаха*: точки касания окружности Эйлера с вневписанными окружностями.

Теперь посмотрим, как точки нашей конфигурации связаны с гиперболами Фейербаха.

Определение 6.1. *Диагональными минус-точками* назовем точки $P_{[Ca-Ba-]}$, $P_{[Ab-Cb-]}$, $P_{[B-Ac-]}$. (И обозначим их далее на рисунке просто $A-$, $B-$, $C-$).

Теорема 6.1. Диагональные минус-точки лежат на гиперболе Фейербаха.

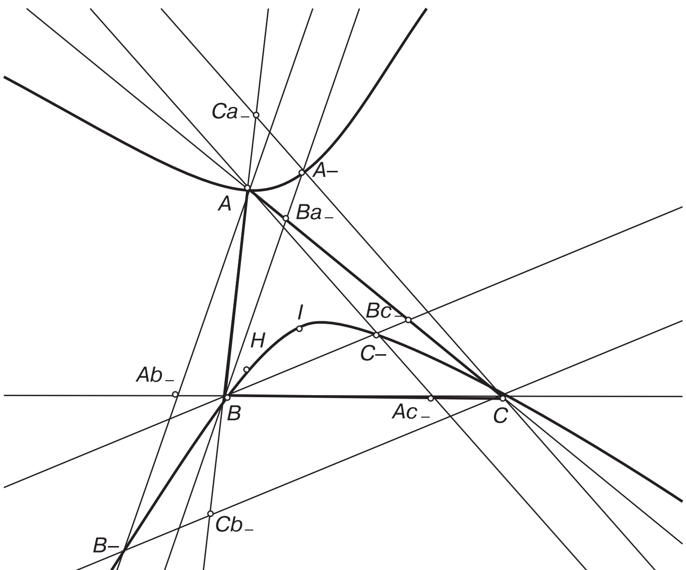


Рис. 29.

Доказательство. Проведем конику через точки A, B, C, I, $A-$ (это возможно в силу свойства 6.1).

Поскольку эта коника, описанная около треугольника ABC, содержит его *внутреннюю* точку I, то является *гиперболой*. Она также описана около треугольника A-BC.

Однако, согласно первой части теоремы 5.1′, центр вписанной окружности есть *ортоцентр* этого треугольника. Тогда из свойства 6.2 следует, что построенная гипербола — *равносторонняя*. Стало быть, также являясь описанной около треугольника ABC, она должна проходить через его ортоцентр H (опять же, по свойству 6.2).

Итак, оказалось, что наша гипербола описана около треугольника ABC и содержит точки H и I, т. е. совпадает с гиперболой Фейербаха (свойства 6.1, 6.3).

Точно так же доказывается, что на этой гиперболе лежат и две другие диагональные минус-точки. □

Определение 6.1′. *Диагональными минус-«a» точками* назовем точки $P_{[Ba+Ca+]}$, $P_{[Cb-Ab+]}$, $P_{[Ac+Bc-]}$.

Теорема 6.1′. Диагональные минус-«a» точки лежат на добавочной гиперболе Фейербаха.

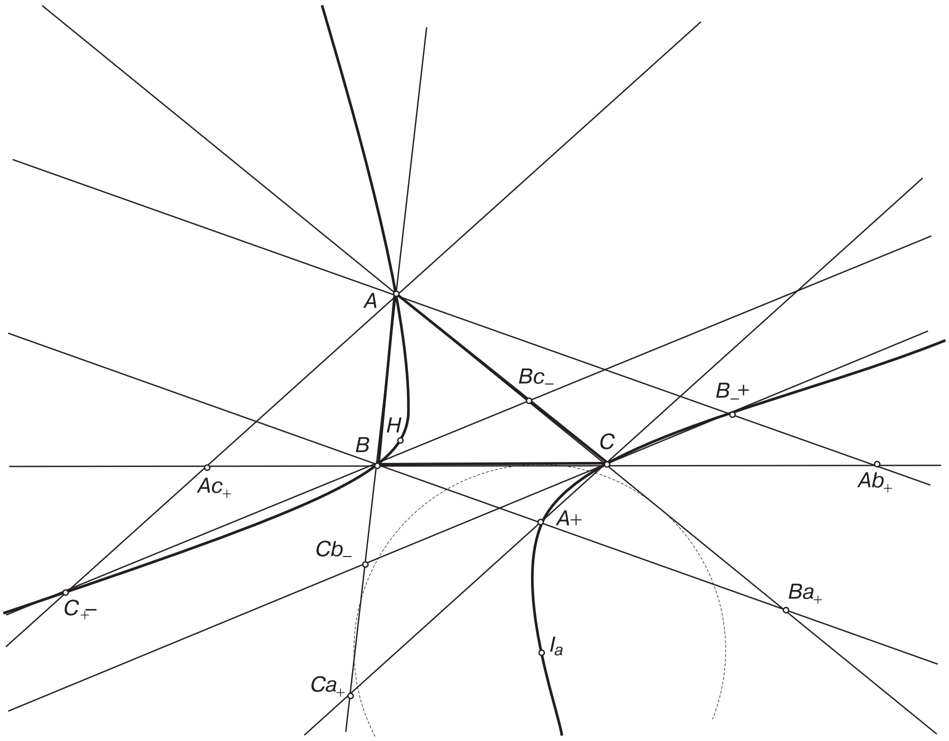


Рис. 30

Мякишев Алексей Геннадьевич,
преподаватель математики
Химического Лицея №1303, Москва.

Email: alex_geom@mtu-net.ru

"Десять средних" античной математики: их математическое, философское и эстетическое значение

А. И. Щетников

В статье реконструируется античный способ построения десяти средних, в число которых входят классические среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое, а также рассматриваются философские основания, на которые, вероятно опирался интерес математиков древности к построению средних.

1. Краткие сведения о "трёх средних"

Понятие о среднем — одно из важнейших в древнегреческом представлении об устройстве космоса. Среднее — это разумная мера, правильно выбранная грань между избытком и недостатком, точка равновесия, "золотая середина". Среднее — это опосредующая связь между двумя крайностями, и тем самым — основа гармонии.

В пифагорейской математике понятие о среднем — также одно из ключевых. Оно возникает сразу же в разных науках — в геометрии, в музыке, в арифметике. Определения трёх средних даёт пифагореец Архит Тарентский (начало IV в. до н. э.) в трактате *О музыке*:

> В музыке имеется три средних: первое — арифметическое, второе — геометрическое, третье — обращённое, называемое также гармоническим. Арифметическое — когда три члена превосходят друг друга по такому правилу: насколько первый больше второго, настолько второй больше третьего. В этой пропорции оказывается, что интервал между большими членами меньше, а между меньшими — больше. Геометрическое — когда первый относится ко второму так же, как второй к третьему. Причём получается, что интервал между большими равен интервалу между меньшими. Обращённое, называемое гармоническим — когда первый член больше второго на такую часть самого себя, на какую часть третьего члена средний больше третьего. В этой пропорции интервал между большими членами больше, а между меньшими — меньше (DK 47 B2).

Словом "среднее" ($\mu\acute{\varepsilon}\sigma o\nu$) в этом отрывке обозначается не только средний член связки из трёх членов, но также и сама эта связка; и зачастую его было бы вернее переводить на русский язык не как "среднее", а как "опосредование": "в музыке имеется три опосредования…". Для трёхчленных опосредований в более поздних текстах употребляется также слово $\mu\varepsilon\sigma\acute{o}\tau\eta\varsigma$.

Архит называет все три средних пропорциями ($\grave{\alpha}\nu\alpha\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$); авторы более поздних текстов обычно специально подчёркивают, что пропорцией в собственном смысле называется только геометрическое среднее, поскольку в нём равны между собой отношения ($\lambda\acute{o}\gamma o\iota$) между двумя большими и двумя меньшими членами. Архит говорит не об отношении между двумя членами, но об интервале ($\delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha$) между ними; этот термин имеет не арифметическое, но музыкальное происхождение (см. Szabó 1969).

Чтобы понять, почему гармоническое среднее исходно называлось обращённым ($\grave{\upsilon}\pi\varepsilon\nu\alpha\nu\tau\acute{\iota}\alpha$), рассмотрим его построение на следующем примере. Возьмём некоторое отношение, к примеру, двукратное, которое нам будет удобно выразить парой чисел $12 : 6$. Произведём арифметическое опосредование этих чисел: 12 9 6. Вставка 9 разбила исходный интервал на два интервала, выразимые отношениями $12 : 9 = 4 : 3$ и $9 : 6 = 3 : 2$. Обратим эти интервалы местами, чтобы интервал $3 : 2$ стал верхним, а $4 : 3$ — нижним. Общей границей обращённых интервалов будет число 8, поскольку 12 : 8 = 3 : 2 и 8 : 6 = 4 : 3. Получившееся опосредование 12 8 6 естественно назвать обращённым; а по его роли в построении музыкальной теории его стали называть гармоническим. Ямвлих в *Комментарии к Арифметике Никомаха* (100_{23}) сообщает, что обращённое опосредование было переименовано в гармоническое "последователями Архита и Гиппаса".

Из самого принципа построения среднего гармонического вытекает так называемая музыкальная пропорция: если между двумя крайними членами вставить их арифметическое и гармоническое средние, то больший член будет так относиться к среднему арифметическому, как среднее гармоническое — к меньшему члену: в нашем примере 12 : 9 = 8 : 6.

2. "Десять средних": исторические сведения

Неопифагореец Никомах Геразский (начало II в. н. э.) во *Введении в арифметику* (II 22.1) и некоторые другие, ещё более поздние авторы (Теон Смирнский, Папп, Ямвлих и др.) сообщают о том, что к трём средним, о которых учили "древние", позднее были добавлены ещё три, а потом — ещё четыре.

Никомах (II 28.6) говорит, что четвёртое, пятое и шестое средние пришли к нам "от комментаторов и последователей Аристотеля и Платона". Ямвлих в *Комментарии к Арифметике Никомаха* (101_2) пишет, что эти три средних были открыты "математиками из круга Евдокса". Также и Прокл в *Комментарии к первой книге Начал Евклида* (67_5) сообщает, что "Евдокс... к трём пропорциям прибавил ещё три другие".

Так называемое четвёртое среднее получается перестановкой разностей в гармоническом опосредовании, за что его называют "обратным гармоническому". К примеру, пусть имеется гармоническое опосредование 6 4 3. Здесь верхняя и нижняя разности равны соответственно 2 и 1. Если поменять эти разности (не интервалы!) местами, получится "четвёртое" опосредование 6 5 3. Сама эта операция интуитивно понятна, хотя непонятно, в какого рода задачах такое среднее может потребоваться. Что касается пятого и шестого средних, их определения будут даны ниже.

О прочих средних Никомах пишет, что "новыми авторами" к уже имевшимся шести средним их было добавлено ещё четыре, и что они "не содержатся в писаниях древних, которые полагали их излишними" (II 28.6). Ямвлих в *Комментарии к Арифметике Никомаха* (116_5) сообщает, что эти четыре средних были открыты некими пифагорейцами Мионидом и Эвфранором, — о которых, впрочем, ничего более не известно. Сообщение Ямвлиха выглядит достаточно странным, поскольку эти "пифагорейцы" должны были жить после Евдокса, то есть не ранее второй половины IV в. до н. э., что представляется явным анахронизмом, ибо пифагорейская школа к тому времени прекратила своё существование. Во всяком случае представляется правдоподобным, что "новые авторы", о которых пишет Никомах, — это отнюдь не современники Никомаха, а люди, жившие несколькими веками до него; "новыми" же их мог называть тот источник, которым Никомах пользуется. Ниже мы увидим, что таким источником мог служить *Платоник* Эратосфена, непосредственно или в одном из более поздних пересказов — сочинение автора, к которому сходятся многие нити учения о средних.

О четырёх новых средних, добавленных к уже шести имевшимся, пишет также Папп в *Математическом собрании* (III 18), ссылаясь при этом на Никомаха. Однако списки этих четырёх средних у Паппа и у Никомаха не совпадают, — причём различаются они не только по порядку, но и по содержанию. А именно, у Никомаха есть одно среднее, которого нет у Паппа; и у Паппа тоже есть одно среднее, которого нет у Никомаха.

Причина этого несоответствия легко объяснима (см. Heath 1921) — в той логике построений, которой пользовались и Папп, и Никомах, "новых" средних на самом деле должно получаться пять, а не четыре. Возможно, что одно из этих средних было отставлено из-за того, что десятке в пифагорейском мировоззрении отводилась особая роль самого совершенного числа; вот средних и бралось в общей совокупности десять, а не одиннадцать. Как пишет Никомах во *Введении в арифметику* (II 22.1),

> Первые три пропорции, упоминаемые всеми древними, Пифагором, Платоном и Аристотелем, суть арифметическая, геометрическая и гармоническая; а за ними

следуют ещё три, не имеющие особых названий и обычно называемые четвёртой, пятой и шестой средними; а нынешние учёные нашли ещё четыре, так что по числу их всего стало десять, а это число по мнению Пифагора является самым совершенным. Это согласуется с тем, что мы недавно наблюдали десять сопряжений, и с так называемыми десятью категориями, и с числом конечных разделений в сложении наших рук и ног, и с тысячей других вещей, о которых мы скажем в соответствующем месте.

3. "Десять средних": единый принцип построения

Построение десяти средних, в дополнение к уже имеющемуся среднему арифметическому, можно описать вполне единообразно. Пусть имеются три величины $a > b > c > 0$, между которыми образуются три разности: $a-b$, $b-c$, $a-c$. При построении среднего арифметического верхняя и нижняя разности приравниваются друг другу: $a-b = b-c$. При построении всех прочих средних составляется пропорция из четырёх членов, в которой отношение двух величин из первого набора приравнивается к отношению двух разностей из второго набора. При этом в паре разностей $a-b$ и $b-c$ большей может быть как верхняя, так и нижняя разность.

Так образуется таблица из 12 клеток. Однако две пропорции первого столбца дают одно и то же геометрическое среднее. Ещё одна пропорция приводит к вырождению, поскольку она сводится к уравнению $(a-b)c = 0$, и тем самым $a = b$ или $c = 0$. Так что реально по этой схеме составляются не двенадцать, а десять средних.

$\frac{a}{b}=\frac{a-b}{b-c}=\frac{b}{c}$ Геометрическое	$\frac{a}{b}=\frac{b-c}{a-b}$ Шестое среднее	$\frac{a}{b}=\frac{a-c}{a-b}$ Восьмое (П)	$\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-c}$ Здесь a=b или c=0
	$\frac{b}{c}=\frac{b-c}{a-b}$ Пятое среднее	$\frac{b}{c}=\frac{a-c}{a-b}$ Десятое (Н), седьмое (П)	$\frac{b}{c}=\frac{a-c}{b-c}$ Девятое (Н), десятое (П)
$\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$ Гармоническое	$\frac{a}{c}=\frac{b-c}{a-b}$ Четвертое среднее	$\frac{a}{c}=\frac{a-c}{a-b}$ Восьмое (Н), девятое (П)	$\frac{a}{c}=\frac{a-c}{b-c}$ Седьмое (Н)

Таблица 1

Средние в этой таблице именованы так, как их называли Никомах и Папп. То среднее, которое Никомах называет десятым, а Папп — седьмым, можно назвать "полувырожденным". Определяющее его уравнение сводится к виду $a = b + c$, и при $c > a/2$ оказывается $b < c$, что плохо согласуется с интуитивным представлением о среднем. (Если бы мне нужно было составить список из "десяти" средних, включая среднее арифметическое, то я бы не стал включать в этот список именно седьмое по Паппу среднее. Впрочем, у древних могли быть какие-то свои резоны на этот счёт.)

Несколько иное описание совокупности всех средних можно найти также у Теона Смирнского (106), который сначала описывает первые шесть общепринятых средних, тех же самых, что и у Никомаха и Паппа, а затем говорит, что к каждому из них можно построить обратное. Но поскольку Теон не строит этих обратных средних, смысл его слов остаётся непрояснённым, и мы не можем узнать, имел ли он в виду некое определённое построение или просто оговорился.

4. Разворачивание всех средних из отношения равенства

В этом параграфе сделана попытка восстановить какую-то часть учения о средних, которое Эратосфен Киренский изложил в своём сочинении *Платоник* (об этом сочинении см. Hiller

1870, Solmsen 1942). Я расширяю здесь выполненную ранее реконструкцию алгоритма разворачивания всех отношений и пропорций из отношения равенства, каковой алгоритм описан у Никомаха Геразского и Теона Смирнского (см. Щетников 2006). Принцип его действия состоит в следующем.

Чтобы построить двоичное дерево, в узлах которого по одному разу находятся все без исключения рациональные отношения большего к меньшему, в качестве корневого отношения берётся отношение равенства 1 : 1. Далее на каждом шаге из уже имеющегося отношения $m : n$ строятся два новых отношения: на левой ветви это отношение $m' : n'$, где $m' = m + n$, $n' = n$, а на правой ветви те же самые формулы применяются к обращённому исходному отношению. В результате выполнения этой процедуры возникает схема, верхняя часть которой изображена на рис. 1.

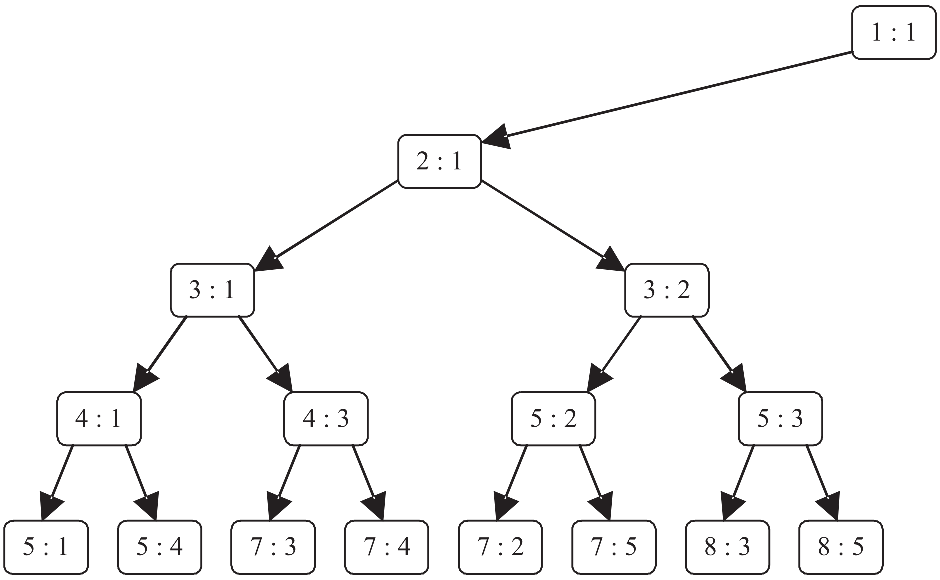


Рис. 1

Надо заметить, что сами Никомах и Теон об изображённом на рис. 1 дереве отношений ничего не говорят; приводимые ими описания посвящены построению аналогичного дерева, но уже не для отношений, а для трёхчленных геометрических средних. При этом базовому отношению $m : n$ первого дерева соответствует записанная в этом же узле второго дерева непрерывная пропорция $m^2 : mn : n^2$. Сам процесс разворачивания дерева геометрических пропорций из корневой тройки равенства 1 : 1 : 1 описан Никомахом и Теоном как процесс перехода от уже имеющейся тройки $a : b : c$ к двум новым тройкам по следующему правилу: на левой ветви тройка $a' : b' : c'$ строится по формулам $a' = a + 2b + c$, $b' = b + c$, $c' = c$, а на правой ветви в же формулы подставляются члены исходной тройки, только взятые в обратном порядке. Верхняя часть получающегося при этом дерева изображена на рис. 2.

После того, как изложены нужные нам предварительные сведения об алгоритме разворачивания всех отношений и пропорций из отношения равенства, мы можем перейти к анализу сохранившихся сведений о *Платонике* Эратосфена. Краткие сведения об этом сочинении, не дошедшем до наших дней, сохранились у Теона Смирнского. Рассказывая об описанном нами выше алгоритме разворачивания всех пропорций из отношения равенства, Теон несколько раз ссылается на Эратосфена. В первом из интересующих нас отрывков (к сожалению, несколько повреждённом) сказано следующее:

> Эратосфен говорит, что природным началом пропорции является отношение... которое служит причиной всякого небеспорядочного рождения. Пропорция исходит из отношения, а начало отношения — равенство (82_{22}–83_3).

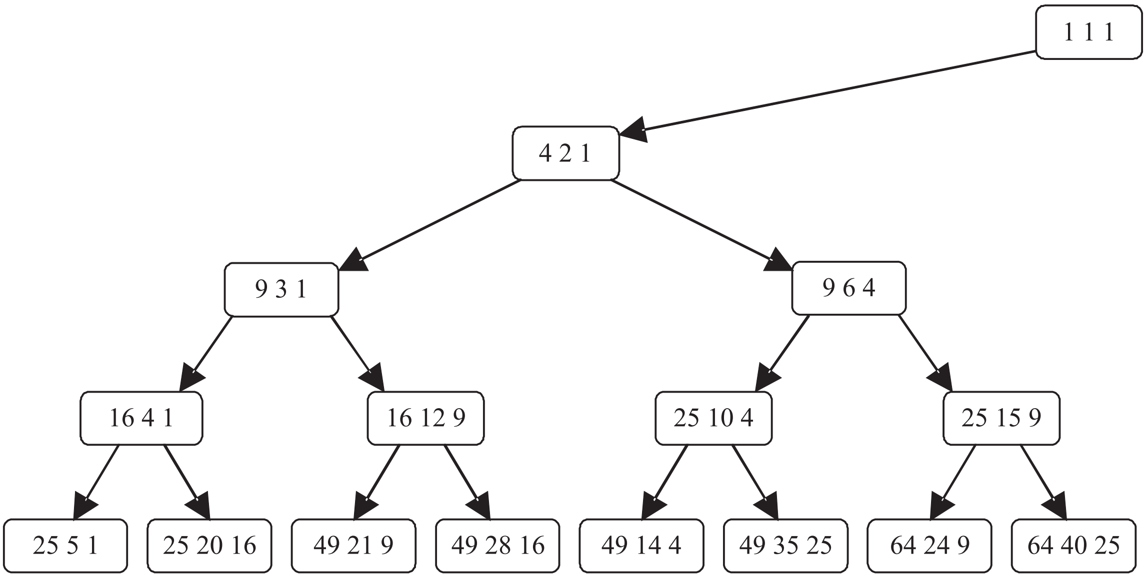


Рис. 2

Нечто похожее пишет также Папп в *Математическом собрании*, возводя это воззрение к самому Платону:

> Пропорция составляется из отношений. Началом же всех отношений является равенство. Геометрическое среднее сперва устанавливает из равенства самое себя, а потом — другие средние. Оно показывает, как говорит божественный Платон, что пропорция есть природная причина всех гармоний и всякого благоразумного и упорядоченного рождения. Ведь он говорит, что единственной связью всех математических наук (*σύνδεσμοςτοῶν μαθημάτων*), причиной порождения и вечной связью всего порождённого служит божественная природа пропорции (III 18).

О том, что Эратосфен называл пропорцию связью математических наук, свидетельствует также Прокл в *Комментарии к первой книге Начал Евклида* (43_{22}).

Б. Л. Ван дер Варден (1959, с. 318) замечает, что тех слов, которые Папп приписывает здесь Платону, в диалогах последнего не содержится. Поэтому он предполагает, что здесь цитируется не Платон, но *Платоник* Эратосфена. При этом он придерживается мнения о том, что *Платоник* представлял собой вымышленный диалог, героями которого были Платон, Архит, Евдокс и Менехм, обсуждавшие проблему удвоения куба (там же, с. 222–226). Впрочем, это мнение не представляется мне достаточно обоснованным.

Однако можно сделать и другое допущение, согласно которому весь этот пассаж в конечном счёте восходит всё-таки к Платону — только не к его диалогам, а к платоновской лекции *О благе*, текст которой в передаче Аристотеля или кого-то другого из учеников Платона был доступен Эратосфену (см. Щетников 2006).

Большой интерес для нашей темы представляет ещё одна отсылка к Эратосфену, которая идёт у Теона сразу после описания алгоритма разворачивания пропорций:

> Эратосфен доказывает, что все фигуры также составляются по некоей пропорции, и это составление также начинается с равенства и разрешается в равенство. Но об этом сейчас нет нужды говорить (111_{10-13}).

Б. Л. Ван дер Варден (там же, с. 321) замечает, что “если бы здесь слово “фигуры” было заменено словом “средние”, то всё было бы совершенно ясно”; далее он излагает свою гипотезу о том, что “под “фигурами” следует понимать конические сечения, заданные квадратными уравнениями в однородных координатах, и что Эратосфен хочет сказать, что все эти уравнения при помощи линейных подстановок могут быть приведены к виду $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A\Gamma}$ или $\mathrm{A} : \mathrm{B} = \mathrm{B} : \Gamma$”.

Думается, впрочем, что в столь далеко идущих предположениях нет нужды, поскольку словам Эратосфена может быть дано более простое объяснение. Идея этого объяснения состоит в том, чтобы на каждое рациональное отношение, как на общую основу, “навесить” все десять средних, приравняв к этому отношению отношения разностей и членов в пропорции, определяющей каждое среднее.

К примеру, пусть нужные члены и разности каждой пропорции состоят друг к другу в двукратном отношении 2 : 1. Тогда таблица средних из предыдущего параграфа заполняется следующими тройками взаимно простых чисел (здесь полужирным начертанием выделены те два числа в каждой тройке, отношение которых равно 2 : 1):

4 2 1	—	—	
4 **2 1**	5 **4 2**	3 **2 1**	3 **2 1**
6 4 **3**	**6** 5 **3**	**4** 3 **2**	**4** 3 **2**

Две клетки верхней строки остались пустыми, поскольку для существования шестого среднего с положительными членами должно выполняться условие $\frac{m}{n} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, для восьмого среднего (П) — несколько менее сильное ограничение $\frac{m}{n} < 2$. (Все необходимые выкладки читатель может здесь и далее проделать самостоятельно; я не стал включать их в текст статьи, чтобы не загромождать её излишними подробностями.)

Теперь мы можем построить соответствующие двоичные деревья для каждого из десяти средних нашей таблицы. В качестве первого примера рассмотрим двоичное дерево, по которому упорядочиваются гармонические опосредования (рис. 3). Здесь всякое отношение $m : n$ порождает тройку гармонически сопряжённых чисел $m(m+n) : 2mn : n(m+n)$. Соответственно процесс построения гармонических сопряжений описывается как процесс перехода от уже имеющейся тройки чисел $a : b : c$ к двум новым тройкам по следующему правилу: на левой ветви новая тройка $a' : b' : c'$ строится по формулам $a' = a + 2c$, $b' = 2c$, $c' = 2c - b/2$, а на правой ветви те же формулы прикладываются к тройке с обращённым порядком членов.

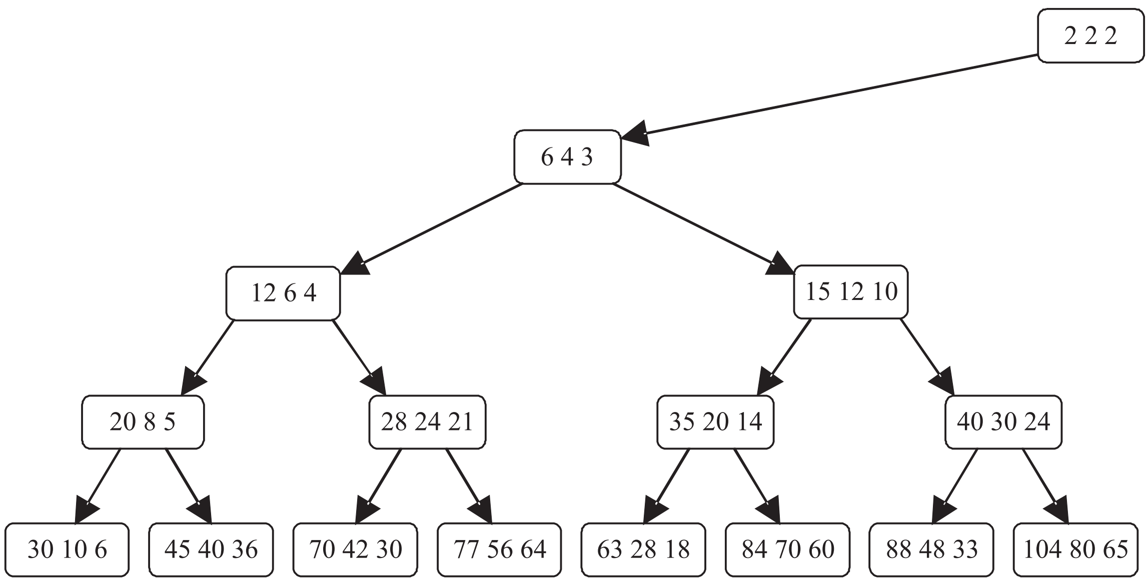


Рис. 3

Построим сходные двоичные деревья также для пятого (рис. 4) и шестого (рис. 5) средних. В пятом среднем базовое отношение $m : n$ порождает тройку сопряжённых чисел $(m^2+mn-n^2) : m^2 : mn$; в шестом — тройку $mn : n^2 : (-m^2+mn+n^2)$. Впрочем, мы уже знаем, что в шестом среднем далеко не все узлы двоичного дерева будут заполнены, поскольку третий член указанной тройки может оказаться отрицательным.

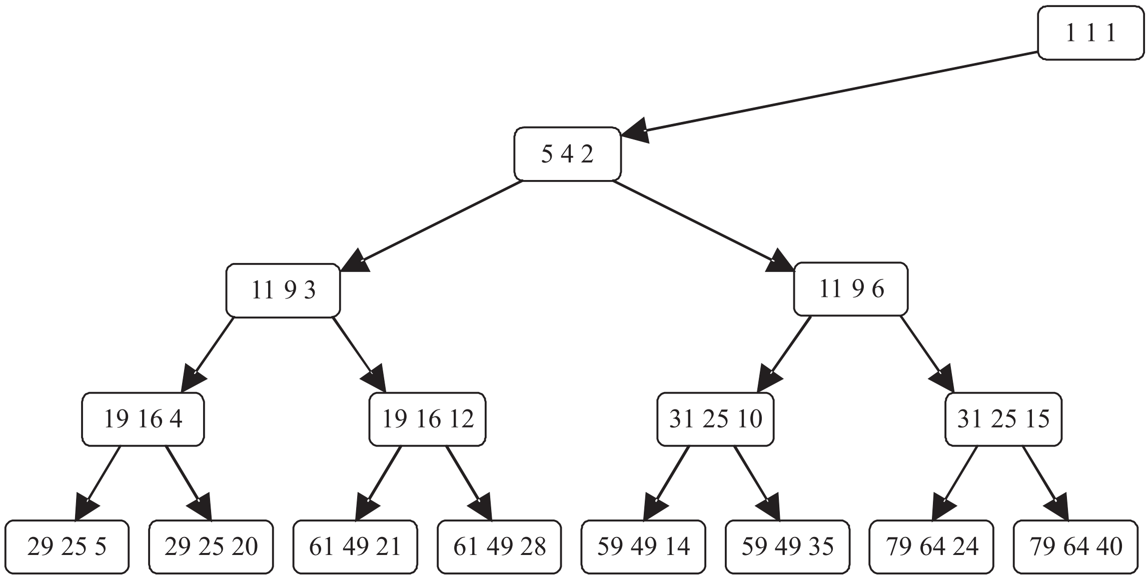


Рис. 4

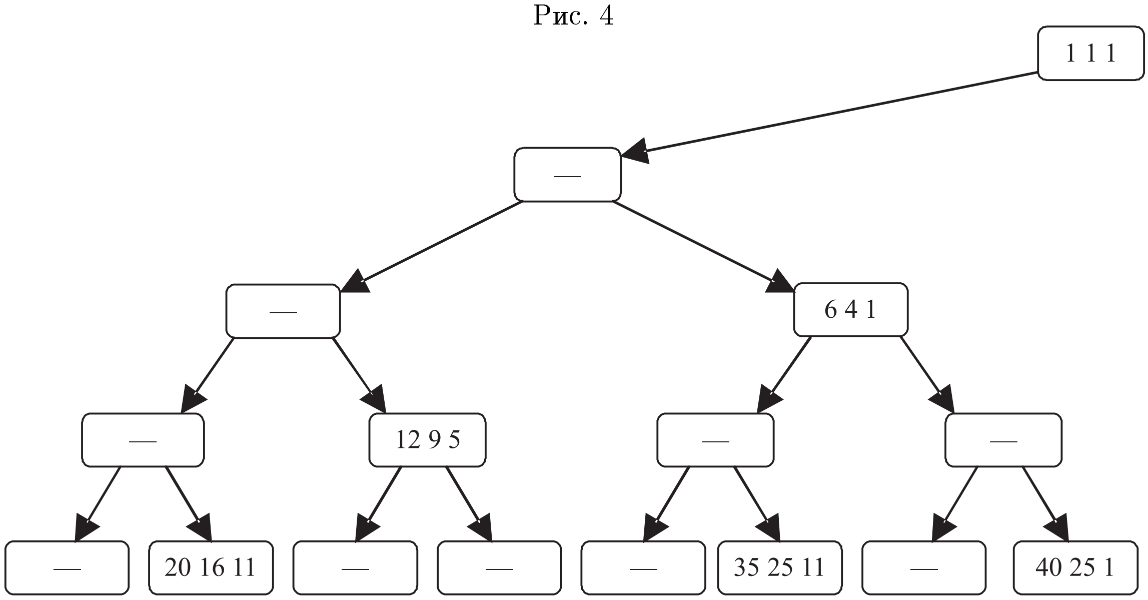


Рис. 5

Деревья для других “фигур” мы рисовать не будем, ограничившись тем, что выпишем формулы, по которым члены этих фигур выражаются через члены базового отношения $m : n$ (таблица 2), а также правила, по которым тройки каждой фигуры преобразуются друг в друга, исходя из корневого равенства (таблица 3).

<table>
<tr><td rowspan="2">m^2
mn
n^2</td><td>mn
n^2
$-m^2+mn+n^2$</td><td>mn
n^2
$-m^2+2mn$</td><td></td></tr>
<tr><td>m^2+mn-n^2
m^2
mn</td><td>$m+n$
m
n</td><td>m^2-mn+n^2
mn
n^2</td></tr>
<tr><td>m^2+mn
$2mn$
$mn+n^2$</td><td>m^2+mn
m^2+n^2
$mn+n^2$</td><td>m^2
m^2-mn+n^2
mn</td><td>m^2
$2mn-n^2$
mn</td></tr>
</table>

Таблица 2

<table>
<tr><td rowspan="2">$a' = a + 2b + c$
$b' = b + c$
$c' = c$</td><td>$a' = a + b$
$b' = b$
$c' = -2a + c$</td><td>$a' = a + b$
$b' = b$
$c' = c + 2b$</td><td></td></tr>
<tr><td>$a' = -a + 2b + 4c$
$b' = -a + 2b + 3c$
$c' = -a + b + 2c$</td><td>$a' = a + c$
$b' = a$
$c' = c$</td><td>$a' = a + 2b$
$b' = b + c$
$c' = c$</td></tr>
<tr><td>$a' = a + 2c$
$b' = 2c$
$c' = -b/2 + 2c$</td><td>$a' = a + 2c$
$b' = (a + b + 3c)/2$
$c' = (-a + b + 3c)/2$</td><td>$a' = b + 3c$
$b' = b + 2c$
$c' = -a + b + 2c$</td><td>$a' = a - b + 4c$
$b' = -b + 4c$
$c' = -b + 3c$</td></tr>
</table>

Таблица 3

5. Порождение всех средних из среднего геометрического у Паппа

Выше мы уже приводили цитату из Паппа, согласно которой “геометрическое среднее сперва устанавливает из равенства самое себя, а потом — другие средние”. Папп подробно описывает (III 19–23), как происходит это установление. Я привожу его описание в своём переложении, заменяя речевые формулы арифметическими знаками “+” и “–”.

Сначала речь идёт о том, как “геометрическое среднее устанавливает из равенства самое себя”. В этом установлении нетрудно опознать алгоритм разворачивания дерева геометрических средних, уже знакомый нам по подробным описаниям Никомаха и Теона.

> Пусть А В Г — три члена пропорции, и пусть А + 2В + Г = Δ, В + Г = Е, Г = Z. Я утверждаю, что Δ Е Z тоже будут тремя членами пропорции.
>
> Ведь А к В как В к Г; тем самым А + В к В, как В + Г к Г. И все предыдущие ко всем последующим будут в том же самом отношении, так что А + 2В + Г к В + Г, как В + Г к Г. Но А + 2В + Г = Δ, В + Г = Е, и Г = Z. И тогда Δ Е Z есть пропорция (в отношении А + В к В).
>
> Поэтому равные А В Г производят Δ Е Z в двукратной пропорции: ведь А + 2В + Г двукратно по отношению к В+Г, и В+Г двукратно по отношению к Г. И если А В Г будут в двукратной пропорции, причём среди них А — наибольшее, то Δ Е Z будут в трёхкратной пропорции; а если А — наименьшее, то в полуторной. Ведь А + В трёхкратно по отношению к В, когда А двукратно по отношению к В; и полуторно, когда А — половина В. Так в последовательных отношениях (ἀπό τῶν ἐξῆφ λόγων) отыскиваются следующие многократные и сверхчастные. И если А В Г будут единицами, то геометрическое среднее Δ Е Z в наименьших числах будет 4 2 1.

Нечто существенно новое в сравнении с другими известными нам описаниями алгоритма представляет собой идея получать из среднего геометрического все прочие средние, изложение которой содержится только у Паппа.

> **Гармоническое среднее** составляется из той же пропорции. Пусть А В Г — три члена пропорции, и пусть 2А + 3В + Г = Δ, 2В + Г = Е, В + Г = Z. Я утверждаю, что Δ Е Z производят гармоническое среднее.
>
> Ведь если А В Г — пропорция, то будет 2А + В к В, как 2В + Г к Г, и так же все ко всем, 2А + 3В + Г к В + Г, так что Δ к Z, как 2А + В к В. Но 2А + В = (2А + 3В + Г) – (2В + Г) = Δ – Е; и В = (2В + Г) – (В + Г) = Е – Z. Тем самым Δ к Z, как Δ – Е к Е – Z, и это гармоническое среднее. И если А В Г суть единицы, то это среднее в наименьших числах будет 6 3 2.
>
> **Обратное гармоническому среднее** составляется из той же пропорции. Пусть члены исходной пропорции суть А В Г, и пусть 2А + 3В + Г = Δ, 2А + 2В + Г = Е, В + Г = Z. Я утверждаю, что Δ Е Z производят названное среднее.

Схожим образом показывается, что Δ к Z, как 2A + B к B. Но 2A + B = (2A + 2B + Г) – (B + Г) = E – Z; и B = (2A + 3B + Г) – (2A + 2B + Г) = Δ – E. И вот Z к Δ, как Δ – E к E – Z, так что это противоположное гармоническому среднее. И если A B Г суть единицы, то это среднее в наименьших числах будет 6 5 2.

Пятое среднее составляется из той же пропорции. Пусть члены исходной пропорции суть A B Г, и пусть A + 3B + Г = Δ, A + 2B + Г = E, B + Г = Z. Я утверждаю, что Δ E Z составляют пятое среднее.

В самом деле, ведь сообразно пропорции будет A + B к B, как B + Г к Г, и так же все предыдущие A + 2B + Г ко всем последующим B + Г, так что E к Z, как A + B к B. Но A + B = (A + 2B + Г) – (B + Г) = E – Z; и B = (A + 3B + Г) – (A + 2B + Г) = Δ – E. И вот Z к E, как Δ – E к E – Z, так что это пятое среднее. И если A B Г суть единицы, то это среднее в наименьших числах будет 5 4 2.

Шестое среднее составляется из той же пропорции. Возьму те же члены пропорции A B Г, и пусть A + 3B + 2Г = Δ, A + 2B + Г = E, и Z = A + B – Г. Я утверждаю, что Δ E Z производят указанное среднее.

Ведь из пропорции следует, что A + 2B к A + B, как B + 2Г к B + Г, и все предыдущие ко всем последующим в том же отношении, то есть A + 3B + 2Г к A + 2B + Г, так что Δ к E, как B + 2Г к B + Г. Но B + 2Г = (A + 2B + Г) – (A + B – Г) = E – Z; и B + Г = (A + 3B + 2Г) – (A + 2B + Г) = Δ – E. И вот E к Δ, как Δ – E к E – Z, так что Δ E Z есть шестое среднее. И ясно, что если A B Г суть единицы, то это среднее в наименьших числах будет 6 4 1.

Восьмое среднее составляется из той же пропорции. Возьму те же три члена пропорции A B Г, и пусть 2A + 3B + Г = Δ, A + 2B + Г = E, 2B + Г = Z. Я утверждаю, что Δ E Z образуют восьмое среднее.

Ведь из пропорции следует, что 2A + B к A + B, как 2B + Г к B + Г, и так же все ко всем, то есть 2A + 3B + Г к A + 2B + Г, так что Δ к E, как 2A + B к A + B. Но 2A + B = (2A + 3B + Г) – (2B + Г) = Δ – Z; и A + B = (2A + 3B + Г) – (A + 2B + Г) = Δ – E. И вот Δ к E, как Δ – Z к Δ – E, так что это восьмое среднее. И если A B Г суть единицы, то это среднее в наименьших числах будет 6 4 3.

Девятое среднее составляется из той же пропорции. Пусть исходная пропорция есть A B Г, и пусть A + 2B + Г = Δ, A + B + Г = E, B + Г = Z. Я утверждаю, что Δ E Z охватывают девятое среднее.

В самом деле, ведь A + B к B, как B + Г к Г, и так же все ко всем, то есть A + 2B + Г к B + Г, так что Δ к Z, как A + B к B. Но A + B = (A + 2B + Г) – (B + Г) = Δ – Z; и B = (A + 2B + Г) – (A + B + Г) = Δ – E. И вот Δ к Z, как Δ – Z к Δ – E, так что это девятое среднее. И если A B Г суть единицы, то это среднее в наименьших числах будет 4 3 2.

Десятое среднее составляется из той же пропорции. Опять тремя членами пропорции будут A B Г, и пусть A + B + Г = Δ, B + Г = E, Г = Z. Я утверждаю, что Δ E Z образуют десятое среднее.

В самом деле, ведь B + Г к Г, то есть E к Z, как A + B к B. Но A + B = (A + B + Г) – Г = Δ – Z; и B = (B + Г) – Г = E – Z. И вот E к Z, как Δ – Z к E – Z, так что это десятое среднее. И если A B Г суть единицы, то это среднее в наименьших числах будет 3 2 1.

Мы сами можем сделать добавление к этому тексту в том же самом стиле, введя определение одиннадцатого среднего, отсутствующее у Паппа, и разработав для него соответствующее построение:

“Когда третье превышение относится ко второму, как первый член к третьему, среднее называется одиннадцатым.

Одиннадцатое среднее составляется из той же пропорции. Пусть исходная пропорция есть А В Г, и пусть А + 2В + Г = Δ, 2В + Г = Е, В + Г = Z. Я утверждаю, что Δ Е Z охватывают одиннадцатое среднее.

В самом деле, ведь А + В к В, как В + Г к Г, и так же все ко всем, то есть А + 2В + Г к В + Г, так что Δ к Z, как А + В к В. Но А + В = (А + 2В + Г) – (В + Г) = Δ – Z; и В = (2В + Г) – (В + Г) = Е – Z. И вот Δ к Z, как Δ – Z к Е – Z, так что это одиннадцатое среднее. И если А В Г суть единицы, то это среднее в наименьших числах будет 4 3 2".

При детальном анализе описанных Паппом линейных подстановок, преобразующих геометрическое опосредование в другие опосредования, обращает на себя внимание тот факт, что никакого особого единообразия в этих построениях не наблюдается. В переходе от геометрического опосредования, основанного на отношении $m : n$, к новым опосредованиям, основанным на отношении $(m + n) : n$, можно усмотреть некоторую логичность, поскольку этот переход идёт по стрелке к нижнему левому узлу. Однако, как показано в таблице 4, некоторые новые средние, получаемые с помощью указанных Паппом линейных подстановок, основаны на совсем других базовых отношениях.

Это означает, что для этих опосредований процесс их порождения из геометрических средних не является полным, так как для них некоторые тройки чисел окажутся пропущенными. Например, для гармонического среднего тройка 6 4 3, заданная отношением 2 : 1, не будет порождена ни из какого исходного геометрического среднего.

<table>
<tr><td rowspan="2">$(m+n):n$</td><td>$(m+2n):(m+n)$</td><td>$(m+2n):(m+n)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$(m+n):n$</td><td>—</td><td>$(m+n):n$</td></tr>
<tr><td>$(2m+n):n$</td><td>$(2m+n):n$</td><td>$(m+n):n$</td><td>$(m+n):n$</td></tr>
</table>

Таблица 4

А ведь для всех этих средних не составляло особого труда найти линейные подстановки, ведущие от среднего геометрического, основанного на отношении $m : n$, к новому среднему, основанному на отношении $(m + n) : n$. К примеру, для гармонического среднего получается такой вариант:

"Гармоническое среднее составляется из той же пропорции. Пусть исходная пропорция есть А В Г, и пусть А + 3В + 2Г = Δ, 2В + 2Г = Е, В + 2Г = Z. Я утверждаю, что Δ Е Z охватывают гармоническое среднее.

В самом деле, ведь А+В к В, как 2В + 2Г к 2Г, и так же все предшествующие ко всем последующим, то есть А + 3В + 2Г к В + 2Г, и тем самым Δ к Z, как А + В к В. Но А + В = (А + 3В + 2Г) – (В + 2Г) = Δ – Z; и В = (2В + 2Г) – (В + 2Г) = Е – Z. И вот Δ к Z, как Δ – Е к Е – Z, так что это гармоническое среднее. И они охватываются наименьшими числами 6 4 3, если А В Г так же суть единицы".

Впрочем, для "нестандартных" формул верхней строки может быть предложено осмысленное объяснение. А именно, чтобы выполнялось указанное выше условие $\frac{m+2n}{m+n} > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, должно быть $\frac{m}{n} < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618...$, но у нас всегда $\frac{m}{n} \geq 1$, так что и шестое, и тем более восьмое по Паппу средние при указанных линейных подстановках всегда будут построены. Однако для "нестандартных" формул нижней строки это объяснение уже не подходит.

6. Зачем были нужны десять средних?

На вопрос, вынесенный в заголовок этого параграфа, я склонен в настоящее время отвечать так: новые средние, которые были введены в древнегреческую математику помимо трёх изначальных, были нужны тем, кто их придумал, не столько для решения каких-то специальных математических задач, сколько "для полноты картины".

Мне представляется, что движение мысли носило здесь характер некоего "разворачивания до совершенной полноты". Если мы понимаем, что гармоническое и геометрическое средние определяются через пропорцию двух величин и двух разностей, то какие ещё пропорции двух величин и двух разностей мы можем составить, и какие средние будут этими пропорциями порождены? Как нам перечислить все целочисленные реализации каждой из этих пропорций, исходя из некоторого единого принципа? И как связаны такие реализации друг с другом?

Получившийся в результате осуществления этой программы раздел математики оказался не особенно богат содержанием. Как замечает всё тот же Ван дер Варден (с. 320), "нельзя сказать, чтобы всё это имело глубокий смысл, но, пожалуй, довольно красиво". Но тут надо сделать остановку и попробовать понять, что у математической теории может быть не только математический смысл, но и внематематический тоже.

Если в пифагорейско-платоновской традиции, наивысшим выражением которой служит диалог Платона *Тимей*, космос мыслился как связанный пропорциями, средними и другими математическими скрепами, то всякое знание о пропорциях и средних приобретало в этой традиции особый статус. И наблюдение за тем, как космос разнообразных средних упорядоченно разрастается из единого корня по простым и однообразным правилам, являлось для пифагорейцев скорее любованием, нежели исследованием. Ведь и книги Никомаха и Теона написаны для напоминания о том порядке, который царит в вечном и неизменном мире математических сущностей, воплощая в себе идею порядка как таковую. Может быть, по этой причине лучше будет сказать о рассматриваемом здесь предмете так: "всё это довольно красиво, а потому имеет глубокий смысл, не сводимый ни к чему другому, кроме самой этой красоты".

Сделанные здесь выводы конечно же не исключают возможности альтернативного подхода к анализу десяти средних, который мог мы состоять в реконструкции тех сугубо математических задач, которые к этим средним приводят. Основанием для такого подхода могут служить имеющиеся в VII книге Паппа, свидетельства о другой работе Эратосфена, которая называется *О средних* (*περὶ μεσοτήτων*). На с. 636 сказано, что "описанные Эратосфеном [геометрические] места к средним (*τόποι πρὸς μεσότηταζ*) относятся к уже упомянутым выше видам, но отличаются от них своеобразием гипотез". Анализируя прочие свидетельства Паппа (с. 662, 672), Б. Л. Ван дер Варден (1959, с. 332) делает вывод, что рассматриваемые Эратосфеном геометрические места были коническими сечениями, а "своеобразие гипотез" заключалось в том, что определялись эти места таким образом, чтобы расстояния от лежащих на них точек до трёх данных прямых давали одно из средних указанных выше видов.

Впрочем, интерес Эратосфена к задачам об отыскании геометрических мест к средним сам по себе ещё не объясняет, зачем ему нужно было строить процедуры разворачивания всех средних из исходного отношения равенства. Ведь первый круг задач — сугубо геометрический, даже если эти задачи решаются методом "геометрической алгебры". А процедуры разворачивания средних относятся к арифметике умозрительного толка. Так что геометрическое исследование *О средних* — это одно, а философско-математическая тематика *Платоника*, с обоснованием роли отношений, пропорций и средних в устройстве платоновского космоса — это всё-таки нечто другое.

Литература

[1] Ван дер Варден Б. Л. *Пробуждающаяся наука: Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции.* Пер. И. Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1959. (Репр.: М.: УРСС, 2007)

[2] Щетников А. И. Алгоритм разворачивания всех числовых отношений из отношения равенства и идеальные числа Платона. *Математическое образование*, 3(43), 2007, с. 56–67.

[3] Heath T. L. *A history of Greek mathematics*. 2 vols. Oxford: Clarendon Press, 1921. (Repr.: NY: Dover, 1981)

[4] Hiller E. Der Πλατωνικός des Eratosthenes. *Philologus*, **30**, 1870, p. 60–72.

[5] Muwafi A., Philippou A. N. An Arabic version of Eratosthenes writing on mean proportionals. *Journal for the History of Arabic Sciences,* **5**, 1981, p. 147–174.

[6] Szabó A. *Die Anfänge der griechischen Mathematik*. München: Oldenbourg, 1969.

[7] Solmsen F. Eratosthenes as Platonist and poet. *Transactions and Proceedings of the American Philological Association*, **73**, 1942, p. 192–213.

Щетников Андрей Иванович,
руководитель проекта "Школа Пифагора",
Центр образовательных проектов "Сигма",
Новосибирск.

Email: pythagor@ngs.ru

Оптимальная стратегия вылова рыбы и экономика

В. Ильичев, Д. Рохлин

В статье рассматривается математическая модель вылова рыбы, оптимизирующая прибыль и позволяющая сохранить популяцию, в условиях рыночной экономики с элементами государственного регулирования.

Главная проблема экологии человека —
бесконфликтное существование рядом с другими.
(В. А. Долинский. Невольник свободы)

Жесткая государственная структура управления промыслом включает в себя одновременно две функции: реализацию и контроль вылова. Практика, однако, показала, что при таком "совмещении" контроль выполняет чисто декоративную роль, а превалируют локальные экономические цели — максимизация прибыли от вылова (за короткий срок). Как правило, это порождает перелов рыбных популяций, и, в конечном счете, вызывает их исчезновение.

Приведем один из возможных рыночных способов эксплуатации рыбной популяции в рамках двухуровневой системы управления "государство — рыбаки". Так, государство (=собственник всей водной экосистемы) ежегодно назначает так называемую *внутреннюю* цену c (руб/кг) на единицу выловленной рыбы. В этом случае с объема вылова u (кг) рыбак должен заплатить государству налог в размере uc (руб). Соответственно, ежегодный доход $D(u)$ рыбака равен разности от продажи выловленной им рыбы по рыночной цене и отчисления налога.

Считаем, что рыбак (=арендатор экосистемы) ежегодно располагает информацией об общем количестве (x) рыбы в экосистеме и внутренней цене. Далее, он исходит из своих локальных экономических интересов, и поэтому его ежегодный вылов доставляет максимум $D(u)$. Здесь актуальна

Проблема 1. *В зависимости от текущей биомассы всей популяции рыб определить внутренние цены, чтобы приведенная схема налогообложения порождала оптимальную стратегию вылова.*

Обычно рыбаки преследуют лишь собственные интересы (максимизация своей прибыли в кратчайшие сроки), поэтому также интересна

Проблема 2. *Можно ли экономически "заставить" рыбаков-конкурентов придерживаться общей кооперативной стратегии вылова?*

Оптимальная стратегия вылова в нерыночной экономике

Пусть x_t — биомасса всей рыбной популяции в год t, тогда ее дискретная динамика описывается уравнением

$$x_{t+1} = F(x_t). \tag{1}$$

В моделях экологии встречаются разнообразные зависимости (r — константа):

$$F_1(x) = rx/(1+x), \quad F_2(x) = rxe^{-x} \quad \text{и другие.}$$

Ниже будем использовать самую простую нелинейную зависимость типа F_1. А именно, F — монотонно возрастающая и выпуклая вверх (=вогнутая) функция; $F(x)/x < 1$ для всех больших x; при условии $F(0) = 0$. Для непрерывных функций условие вогнутости означает, что выполняется неравенство:

$$F[\lambda x + \mu y] \geq \lambda F(x) + \mu F(y) \quad \text{для любых} \quad x, y \geq 0,$$

где $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ и $\lambda + \mu = 1$. Очевидно, если F, G — вогнуты и $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, тогда $\alpha F + \beta G$ тоже вогнута.

При $F'(0) > 1$ существует единственное положительное решение x^* уравнения $x^* = F(x^*)$. Величина x^* называется положительным равновесием. В модели (1) реализуются простые режимы: всякая положительная последовательность $\{x_t\}$ монотонно стремится к равновесию x^* (*докажите!*).

С учетом вылова (u) ежегодная динамика биомассы рыбной популяции представляется в дискретной форме

$$x_{t+1} = F(x_t - u_t), \tag{2}$$

где $0 \leq u_t \leq x_t$ для всех t. Такой набор выловов назовем допустимым.

Пусть $p(u)$ — функция полезности "рыбака" от продажи u кг рыбы. В экономике полагают: функция p — строго возрастает и вогнута; $p(0) = 0$. Например, $p(u) = u/(1+u)$, $p(u) = \ln(1+u)$ и т.п. Здесь средняя цена рыбы на рынке равняется $p(u)/u$. Данная функция убывает — это соответствует известной закономерности: рост предложения вызывает падение цены.

В дальнейшем предполагаем: обе функции F и p непрерывно дифференцируемы (т.е обе их производные — непрерывные функции). Из вогнутости следует, что $F'(x)$ и $p'(x)$ — убывающие непрерывные функции.

Без ограничения общности положим $p'(0) = 1$. С учетом предыдущего значение 1 является максимально возможной рыночной ценой единицы рыбы.

В экономических расчетах считают, что 1 рубль, полученный сегодня, ценнее, чем 1 рубль, полученный через год. В общем случае банк назначает число (дисконт) $0 < \gamma < 1$, с помощью которого оценивает "на сегодня (год=0)" будущую многолетнюю последовательность получения им доходов $\{d_0, d_1, ..., d_n\}$:

$$D = d_0 + \gamma d_1 + ... + \gamma^n d_n.$$

Обычно величина $(1/\gamma - 1)$ близка к банковской процентной ставке.

В этой связи, основная задача управления заключается в максимизации дисконтированного дохода за T шагов:

$$\sum\nolimits_0^T \gamma^t p(u_t) \tag{3}$$

по всем допустимым выловам $\{u_t\}$.

Отметим, что для низко продуктивной популяции с $F'(0) < 1/\gamma$ и, например, $p(u) = u$ оптимальной стратегией является вылов всей популяции в первый же год (*докажите!*). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только высоко продуктивные популяции с $F'(0) > 1/\gamma$.

Изложим решение проблемы (3) на основе идей *динамического программирования*, предложенных известным американским математиком Ричардом Беллманом. Пусть x (или x_0) — начальное значение биомассы популяции; через $B_T(x)$ обозначим максимум величины (3) по всем допустимым управлениям. Как построить эту функцию (функцию Беллмана)? Воспользуемся индукцией по T. Так, из (3) сразу находим

$$B_0(x) = p(x).$$

Теперь построим связь между $B_T(x)$ и $B_{T-1}(x)$. Рассмотрим оптимизацию на временном промежутке $[0, T]$. Пусть в начальный момент произведен вылов u, тогда происходят следующие процессы:

а) рыбак получит доход, равный $p(u)$;

б) на следующий год биомасса рыбы будет равна $x_1 = F(x-u)$. На более коротком промежутке $[1, T]$ рыбаку необходимо также действовать оптимально (кусок оптимальной траектории тоже оптимален!). Тогда дисконтированный доход рыбака (в пересчете на начальный год, равный 0) равен $\gamma B_{T-1}(x_1)$.

Последнее, для оптимальности на $[0, T]$ следует выбрать начальный вылов u, исходя из решения следующей задачи на экстремум:

$$p(u) + \gamma B_{T-1}(F(x-u)) \to \max,$$

по всем допустимым u. Поэтому имеет место основное рекуррентное соотношение

$$B_T(x) = \max[p(u) + \gamma B_{T-1}(F(x-u))] \quad \text{по всем} \quad u \quad \text{из} \quad [0, x]. \tag{4}$$

С помощью компьютера на основе формулы (4) можно последовательно строить функции $B_1(x),\ B_2(x), \ldots$ (см. рис. 1). Строго доказано (*В.Г. Ильичев, Д.Б. Рохлин, Г.А. Угольницкий.* Изв. АН. Теория и системы управления, 2000, №4), что все данные функции Беллмана являются непрерывными. Приведем их полезные свойства.

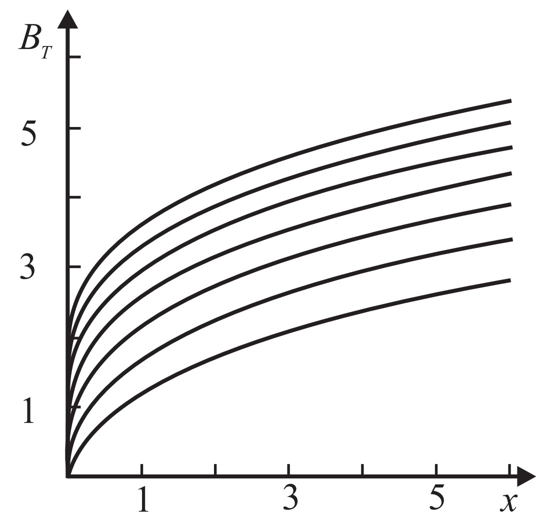


Рис. 1. Первые семь функций Беллмана $\{B_1(x), \ldots, B_7(x)\}$ при $F(x) = 4x/(1+x)$ и $p(u) = \ln(1+u)$.

A. Функция $B_T(x)$ *строго возрастает по* x. В самом деле, пусть $\{u_t\}$ — оптимальный набор выловов, соответствующий начальной биомассе рыбной популяции x. Для $x < y$ определим допустимую последовательность $\{v_t\}$, в которой $v_0 = y - x + u_0$ и $v_t = u_t$ для всех $t \geq 1$. Тогда, очевидно, имеет место

$$\sum\nolimits_0^T \gamma^t p(u_t) < \sum\nolimits_0^T \gamma^t p(v_t).$$

Значит, для оптимального набора выловов, соответствующего y, выполняется неравенство $B_T(x) < B_T(y)$.

B. Функция $B_T(x)$ *вогнута по* x. Применим индукцию по T. Для $T = 0$ имеем $B_0(x) = p(x)$ и, значит, $B_0(x)$ вогнута по x. Пусть B_{T-1} вогнута (в силу свойства монотонности, она и возрастает). Множество всех возрастающих и одновременно вогнутых функций замкнуто относительно операции композиции, поэтому $H = B_{T-1} \circ F$ — вогнута.

Пусть u и v — оптимальные выловы, соответствующие начальным x и y. Очевидно, вылов $w = \lambda x + \mu y$ является допустимым для начальной точки $z = \lambda x + \mu y$. С учетом вогнутости p, имеет место оценка

$$B_T(z) \geq p(w) + \gamma H(z-w) \geq \lambda p(u) + \mu p(v) + [\lambda H(x-u) + \mu H(y-v)]\gamma.$$

Отсюда получаем условие выпуклости $B_T(z) \geq \lambda B_T(x) + \mu B_T(y)$.

Таким образом, свойства монотонности и вогнутости исходных функций F и p "наследуются" функцией Беллмана.

C. Оптимальный набор вылов на участке $[0, T-1]$ является, очевидно, допустимым на отрезке $[0, T]$. Поэтому $B_{T-1}(x) \leq B_T(x)$ для всех $x \geq 0$.

При заданной функции B_{T-1} оптимальный вылов u_T доставляет максимум функции, стоящей в квадратных скобках (4). Эта функция непрерывна по обеим переменным и вогнута по u. Согласно монографии (*К. Ланкастер. Математическая экономика*) вылов u_T непрерывно зависит от x.

Отметим следующее печальное обстоятельство. Поскольку $u_0(x) = x$, то в последний год следует целиком выловить популяцию. Поэтому целесообразно рассмотреть задачу (3) при бесконечном периоде промысла ($T = \infty$). Обозначим через $B(x)$ предел последовательности $\{B_T(x)\}$ при $T \to \infty$. Оказывается, этот предел существует и является непрерывной, возрастающей и вогнутой функцией. Она удовлетворяет так называемому уравнению Беллмана

$$B(x) = \max[p(u) + \gamma B(F(x-u))] \quad \text{по всем } u \text{ из } [0, x]. \tag{5}$$

С экономической точки зрения, $B(x)$ — это максимально возможный доход, который можно получить от эксплуатации рыбной популяции. По сути, $B(x)$ — стоимость рыбной популяции, когда ее численность равна x. Как и ранее, $B'(0) = \infty$ и оптимальный вылов $u(x)$ является непрерывной функцией.

Утверждение 1. *Для оптимального вылова выполняется неравенство $u(x) < x$ при всех $x > 0$.*

Предположим противное: при некотором $x > 0$ оптимальный вылов $u(x) = x$. Поэтому

$$B(x) = p(x).$$

Рассмотрим допустимую последовательность выловов: $u_0 = x - \varepsilon$ и $u_1 = F(\varepsilon)$ при малом $\varepsilon > 0$; $u_t = 0$ для остальных $t \geq 2$. Здесь возникает доход

$$D(\varepsilon) = p(x-\varepsilon) + \gamma p(F(\varepsilon)).$$

Очевидно, $D(0) = p(x)$ и $D'(0) = \gamma F'(0) - p'(x)$. Поскольку $\gamma F'(0) > 1$ и $p'(x) < 1$, то $D'(0) > 0$. Значит, $D(\varepsilon) > B(x)$ при малых $\varepsilon > 0$, но это противоречит оптимальности приведенной ранее стратегии.

Таким образом, при оптимальном вылове, рассчитанном на бесконечный период, популяция не вымирает (по крайней мере за конечное время).

Утверждение 2. *Для положительного оптимального вылова $u=u(x)$ выполняется соотношение*

$$B'(x) = p'(u). \tag{6}$$

В самом деле, пусть u — положительное оптимальное управление в точке x. Тогда выполняется равенство

$$B(x) = p(u) + \gamma B(F(x-u)).$$

Рассмотрим соседнюю точку $x+\varepsilon$, где ε мало. Очевидно, $u+\varepsilon$ является допустимым управлением в данной точке. Поэтому имеет место неравенство

$$B(x+\varepsilon) \geq p(u+\varepsilon) + \gamma B(F(x-u)).$$

Отсюда получаем

$$B(x+\varepsilon) - B(x) \geq p(u+\varepsilon) - p(u).$$

Разделим данное выражение на малое число $\varepsilon > 0$ и устремим его к 0, тогда находим $B'(x) \geq p'(u)$. Если при $\varepsilon < 0$ действовать аналогично, то получаем $B'(x) \leq p'(u)$. Окончательно устанавливаем $B'(x) = p'(u)$.

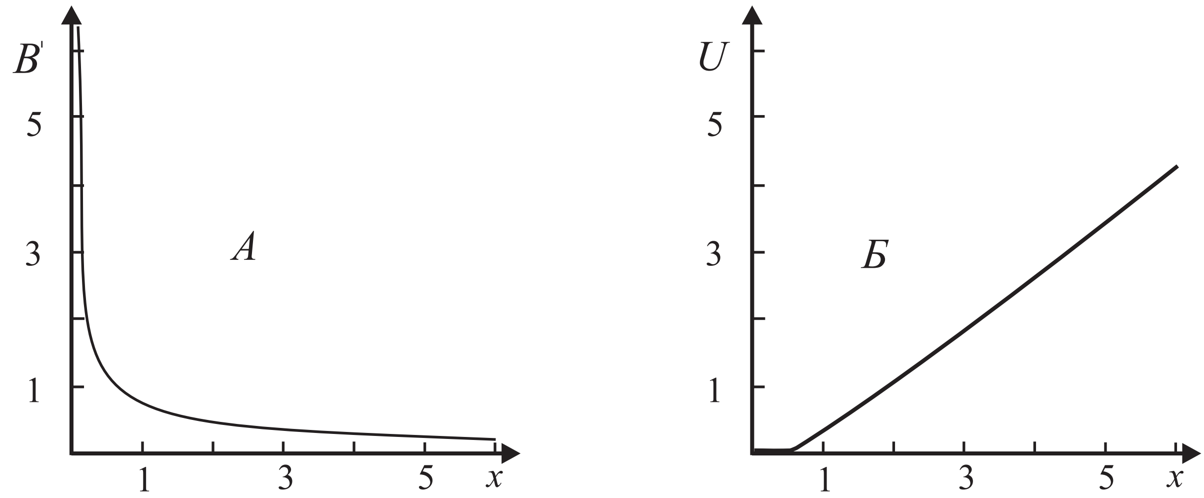


Рис. 2. Производная функции Беллмана (A) и оптимальный вылов ($Б$)

Обозначим через q функцию, обратную к p'. Очевидно, q убывает и, значит, $u(x) = qB'(x)$ возрастает. Поэтому в окрестности точки x_0, где вылов положителен, непрерывная функция $u(x)$ обязательно возрастает. В силу этого, $u(x)$ будет возрастать и при всех $x > x_0$. Отсюда получаем классический результат (см. рис. 2):

Утверждение 3. *Оптимальный вылов имеет вид:*

$$u(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \leq N \quad \text{и} \quad u(x)$$

— возрастает при $N < x$, где N — некоторая положительная константа ("неприкосновенный запас").

Достаточно показать, что при малых x оптимальный вылов равен нулю. Обозначим через $\{u_0, u_1, ...\}$ — набор оптимальных выловов, соответствующих начальной точке x_0. Если x_0 мало, то $F'(z) > 1/\gamma$ для всех z из $[0, x_0]$.

Построим вторую допустимую последовательность выловов:

$$v_0 = 0, \quad v_1 = u_1 + F(x_0) - F(x_0 - u_0) \ \text{ и } \ v_t = u_t \quad \text{для остальных} \quad t \geq 2.$$

Поскольку указанные выловы u_0, u_1, v_0, v_1 малы, то $p(u_t) \approx u_t$ и $p(v_t) \approx v_t$ для $t = 0, 1$. Пусть H — разность доходов от первой (=оптимальной) и второй стратегий. Тогда имеем

$$H \approx u_0 + u_1\gamma - v_0 - v_1\gamma = u_0 + [F(x_0 - u_0) - F(x_0)]\gamma.$$

Обсудим поведение H как функции переменной u_0. Очевидно, $H(0) = 0$ и

$$H'(u_0) = 1 - \gamma F'(x_0 - u_0) < 0$$

для u_0 всех из $[0, x_0]$. Поэтому H достигает максимума при $u_0 = 0$.

Следовательно, при малой численности рыб нецелесообразно производить промысел. На практике этим обстоятельством зачастую пренебрегают.

Вернемся к функции Беллмана $B(x)$. Оказывается, она непрерывно дифференцируема для всех положительных x и $B'(x) > B'(N) = 1$ при $x < N$. Справедлива простая теорема, обратная к утверждению 2.

Утверждение 4. *Если выполняется соотношение*

$$B'(x) = p'(u) < 1, \tag{7}$$

то $u = u(x)$ — положительный оптимальный вылов в точке x.

Рыночный механизм управления промыслом. Приведем механизм, основанный на идее внутренних цен (c). А именно, если в момент t рыбак выловил u рыбы, то он должен заплатить налог в размере uc_t, где $c_t = B'(x_t)$. А после ее продажи рыбак получит доход $p(u)$. Поэтому максимизация ежегодной прибыли рыбаком опирается на решение (локальной) задачи:

$$\max[p(u) - uc_t] \text{ по всем } u \text{ из } [0, x_t]. \tag{8}$$

Утверждение 5. *Оптимальный вылов в локальной задаче (8) совпадает с оптимальным выловом в глобальной задаче (5).*

Действительно, обозначим вспомогательную функцию $H(u) = p(u) - uB'(x)$. Она вогнута и дифференцируема, при этом $H(0) = 0$. На краях отрезка $[0, x]$оценим производные H. Так, с учетом $p'(0) = 1$ получаем

$$H'(0) = 1 - B'(x) \text{ и } \quad H'(x) = p'(x) - B'(x).$$

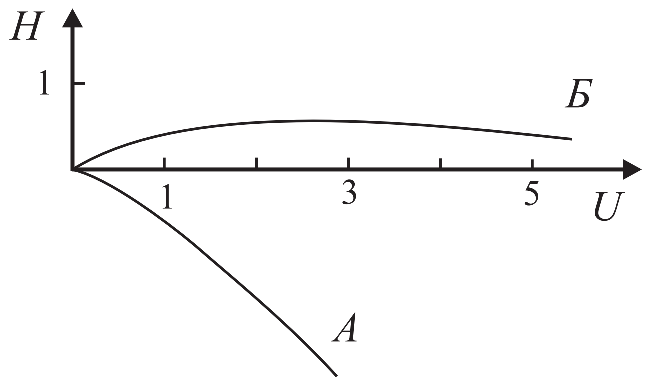


Рис. 3. График функции $H(u)$ при $B'(x) \geq 1$ (см. А) и при $B'(x) < 1$ (см. Б).

Теперь рассмотрим следующие два варианта (см. рис. 3).

1) При $0 < x \leq N$ (=неприкосновенный запас) имеем $B'(x) \geq 1$ и, значит, $H'(0) \leq 0$ и $H'(x) < 0$. Поэтому максимум H достигается при $u = 0$. Это совпадает с первой частью утверждения 3.

2) При $x > N$ имеем $B'(x) < 1$ и, значит, $H'(0) > 0$. С учетом утверждения 1 здесь имеют место соотношения $B'(x) = p'(u) > p'(x)$. Поэтому $H'(x) < 0$. Следовательно, максимум функции H достигается во внутренней точке ($\hat{u}$) отрезка $[0, x]$, и тогда $H'(\hat{u}) = 0$. Данное равенство эквивалентно условию $B'(x) = p'(\hat{u}) < 1$. Согласно утверждению 4 вылов $\hat{u}$ также является оптимальным для глобальной задачи (5).

Отметим, что в нерыночной экономике государство само занималось максимизацией целевой функции (3). А в рыночной экономике государство “поручает” реализацию промысла рыбаку (=государство “ловит рыбу чужими руками”). За это оно вынуждено поступиться частью своего дохода.

“Волшебная сила” внутренних цен: от конкуренции к кооперации.

Пусть два рыбака облавливают одну и ту же популяцию. Тогда ее динамика задается уравнением

$$x_{t+1} = F(x_t - u_t - v_t), \tag{9}$$

где выловы удовлетворяют допустимым ограничениям $u_t \geq 0$, $v_t \geq 0$, и $u_t + v_t \leq x_t$. Данные рыбаки имеют свои возрастающие и вогнутые функции полезности r и q с учетом прежних ограничений: $r(0) = q(0) = 0$ и $r'(0) = q'(0) = 1$. Доход каждого рыбака задается бесконечной дисконтированной суммой вида (3), соответственно. Очевидно, рыбаки конкурируют друг с другом. Поэтому здесь возникает проблема построения эффективного механизма, регулирующего их вылов.

Попробуем определить внутреннюю цену (=налог), исходя из кооперативных действий рыбаков (такая ситуация наиболее выгодна государству). Возможно, тогда собственные экономические интересы каждого рыбака не позволят ему уклониться от кооперативной стратегии (хотя они могут и не подозревать об этом!).

Перейдем к формализации этой задачи. При заданном начальном запасе (x) рыбы обозначим через $B(x)$ — максимальный суммарный доход от кооперации рыбаков :

$$\sum\nolimits_0^\infty \gamma^t [r(u_t) + q(v_t)]$$

по всем допустимым $\{u_t\}$ и $\{v_t\}$. В теоретическом плане данная задача сводима к ранее рассмотренной, если определить новую функцию

$$p(z) = \max[r(u) + q(v)] \text{ по всем } \quad u, v \geq 0 \text{ и } \quad u + v \leq z.$$

Нетрудно показать (*покажите!*), что p удовлетворяет прежним ограничениям, характерным для функций полезности. При $z > 0$ переменные u, v, на которых реализуется операция max, являются положительными и $u + v = z$.

Обозначим $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — оптимальные выловы в данной задаче. В силу предыдущего они имеют одинаковый знак. Аналогично утверждениям 2 и 4 устанавливается

Утверждение 6. *Для одновременно положительных оптимальных выловов $u = u(x)$ и $v = v(x)$ выполняются соотношения*

$$B'(x) = r'(u) = q'(v) < 1. \tag{11}$$

Обратно, если имеют место (11), то u и v — положительные оптимальные выловы в точке x.

Пусть в начале года t государство задало внутреннюю цену по формуле $c_t = B'(x_t)$. Это означает, что в этот года каждый рыбак должен выплатить налог в размере c_t за каждую единицу выловленной рыбы. Поэтому соответствующие локальные задачи рыбаков имеют вид :

1) $\max[q(u) - uc_t]$ по всем u из $[0, x_t]$.

2) $\max[r(v) - vc_t]$ по всем v из $[0, x_t]$.

Из соотношений (11) сразу вытекает

Утверждение 7. *Оптимальные выловы в локальных задачах совпадают с оптимальными выловами в глобальной задаче (7).*

Таким образом, данная налоговая политика заставляет рыбаков придерживаться кооперативной стратегии вылова. Разумеется, этот подход ориентирован на “разумных” рыбаков, которые строго преследуют свои экономическим интересам. Если же возникают сомнения в “разумности” действий некоторых рыбаков, то, вероятно, следует применять более жесткие налоговые схемы.

В. Ильичев,
доктор технических наук.

Д. Рохлин,
кандидат физ.-мат. наук.

Комплексные числа

В.Б.Дроздов

Завершаем публикацию учебного пособия по комплексным числам и их приложениям. Начало см. в № 4(44), 2007 г.

§ 7. Формула Эйлера и её приложения

В формуле Муавра $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ положим $\alpha = \frac{x}{n}$, тогда $\cos x + i\sin x = \left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n$. Возьмём предел от обеих частей последнего равенства при $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty}(\cos x + i\sin x) = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n,$$

т. е.

$$\cos x + i\sin x = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n$$

Справа получаем неопределенность вида 1^∞. Найдём

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n\ln\left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\cos\frac{x}{n}+i\sin\frac{x}{n}}\cdot\left(-\sin\frac{x}{n} + \cos\frac{x}{n}\right)\cdot\left(-\frac{x}{n}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(x\cdot\frac{-\sin\frac{x}{n} + i\cos\frac{x}{n}}{\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(x\left(-\sin\frac{x}{n} + i\cos\frac{x}{n}\right)\left(\cos\frac{x}{n} - i\sin\frac{x}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(xi\left(\cos^2\frac{x}{n} + \sin^2\frac{x}{n}\right)\right) =$$

$$= xi\lim_{n\to\infty}\left(\cos^2\frac{x}{n} + \sin^2\frac{x}{n}\right) = xi.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n = e^{ix}$, откуда получаем формулу Эйлера

$$\cos x + i\sin x = e^{ix}.$$

Предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n})^n$ можно вычислить иным путем, а именно:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \left(\cos\frac{x}{n} - 1 + i\sin\frac{x}{n}\right)\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \left(2i\sin\frac{x}{2n}\cos\frac{x}{2n} - 2\sin^2\frac{x}{2n}\right)\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + 2\sin\frac{x}{2n}\left(i\cos\frac{x}{2n} - \sin\frac{x}{2n}\right)\right)^{\frac{1}{2\sin\frac{x}{2n}\left(i\cos\frac{x}{2n} - \sin\frac{x}{2n}\right)}}\right]^{\left(2\sin\frac{x}{2n}\left(i\cos\frac{x}{2n} - \sin\frac{x}{2n}\right)\right)\cdot n} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{x}{2n}\left(i\cos\frac{x}{2n} - \sin\frac{x}{2n}\right)}{\frac{1}{n}}} = e^{i\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{x}{2n}}{\frac{1}{n}}} = e^{i\lim\limits_{n\to\infty}x\cdot\frac{\sin\frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}}} = e^{xi\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}}} = e^{ix}.$$

Из математического анализа известно, что функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ можно разложить в степенные ряды:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \cdots;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots,$$

тогда

$$\sin x + \cos x = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots .$$

Видим, что ряд для $\sin x + \cos x$ «похож» на ряд для e^x, различие в чередовании знаков «+» и «−». Были предприняты попытки найти связь между $\sin x$, $\cos x$, e^x, но безуспешно: в области действительных чисел такой связи не существует. Однако в поле комплексных чисел получить искомую связь не представляет труда: в разложении e^x в ряд формально заменим x на ix:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \cdots =$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) = \cos x + i \sin x.$$

Чтобы получить формулу Эйлера третьим способом, найдем e^{ix}, используя определение числа e: $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Тогда

$$e^{ix} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{ix} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)^{\frac{n}{ix}}\right)^{ix} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + n\cdot\frac{ix}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{ix}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{ix}{n}\right)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{ix}{n}\right)^4 + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{ix}{n}\right)^5 + \cdots\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + ix + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}(-x)^2 + \frac{1}{3!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}(-ix^3) + \frac{1}{4!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n^4}x^4 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^5}ix^5 + \cdots\right) =$$
$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \cdots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) = \cos x + i\sin x.$$

В формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ вместо x подставим $-x$:

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x.$$

Складывая и вычитая полученные равенства, имеем:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Легко проверить, что для определенных таким образом синуса и косинуса верны все соотношения тригонометрии, справедливые при «обычном» определении тригонометрических функций, например:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1; \;\; \sin' x = \frac{ie^{ix} - (-i)e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x;$$
$$2\sin x\cos x = 2\cdot\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\cdot\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} = \sin 2x.$$

Выражение тригонометрических функций через показательную функцию с чисто мнимым показателем даёт возможность стандартным способом вычислять тригонометрические суммы.

Например:

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\dots+\cos nx=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}+\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}+\dots+\frac{e^{nix}+e^{-nix}}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(e^{ix})^n-1}{e^{ix}-1}\cdot e^{ix}+\frac{(e^{-ix})^n-1}{e^{-ix}-1}\cdot e^{-ix}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{ixn}-e^{ix(n+1)}-1+e^{ix}+e^{-ixn}-1-e^{-ix(n+1)}+e^{-ix}}{1-e^{ix}-e^{-ix}+1}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{e^{ixn}+e^{-ixn}}{2}-\frac{e^{ix(n+1)}+e^{-ix(n+1)}}{2}+\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}-1}{1-\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos nx-\cos(n+1)x+\cos x-1}{1-\cos x}=$$
$$=\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)-2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Таким способом могут быть вычислены более сложные суммы, где поиски искусственных приёмов затруднительны.

Выразим с помощью формул Эйлера $\cos^n x$ в виде тригонометрического многочлена. Имеем:

$$\cos^n x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}\left(e^{ixn}+e^{-ixn}+C_n^1\left(e^{ix(n-2)}+e^{-ix(n-2)}\right)+C_n^2\left(e^{ix(n-4)}+e^{-ix(n-4)}\right)+\right.$$
$$\left.+C_n^3\left(e^{ix(n-6)}+e^{-ix(n-6)}\right)+\cdots\right)=$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\cos nx+C_n^1\cos(n-x)x+C_n^2\cos(n-4)x+C_n^3\cos(n-6)x+\cdots\right),$$

что совпадает с полученным ранее результатом.

Применение формул Эйлера даёт возможность брать некоторые интегралы, например, вычислим $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$.

Заменим по формуле Эйлера $\cos\beta x$ через $\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}$, имеем:

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{(\alpha+i\beta)x}\,dx+\frac{1}{2}\int e^{(\alpha-i\beta)x}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha+i\beta}e^{(\alpha+i\beta)x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha-i\beta}e^{(\alpha-i\beta)x}=$$
$$=\frac{e^{\alpha x}}{2}\cdot\frac{(\alpha-i\beta)e^{i\beta x}+(\alpha+i\beta)e^{-i\beta x}}{(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)}=\frac{e^{\alpha x}}{2(\alpha^2+\beta^2)}\cdot\left(\alpha e^{i\beta x}-i\beta e^{i\beta x}+\alpha e^{-i\beta x}+i\beta e^{-i\beta x}\right)=$$
$$=\frac{e^{\alpha x}}{(\alpha^2+\beta^2)}\cdot\left(\alpha\cdot\frac{e^{i\beta x}+\beta e^{-i\beta x}}{2}+\beta\cdot\frac{e^{i\beta x}-\beta e^{-i\beta x}}{2i}\right)=\frac{e^{\alpha x}}{(\alpha^2+\beta^2)}\cdot(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)\,.$$

Аналогично вычисляется $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$. Другим способом эти два интеграла можно вычислить, интегрируя по частям.

В формуле Эйлера $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ положим $x=\pi$, получим:

$$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$$

откуда $e^{i\pi}+1=0$. Полученную связь между числами e и π использовал немецкий математик Линдеманн, который в 1882 г. в работе «О числе π» доказал трансцендентность числа π, откуда следовала невозможность квадратуры круга.

§ 8. Приложения комплексных чисел в алгебре

Решение и исследование уравнений третьей степени даже с действительными коэффициентами может быть осуществлено только с использованием аппарата комплексных чисел.

Рассмотрим в общем виде уравнение третьей степени $y^3+ay^2+by+c=0$, где a, b, c — данные комплексные числа. Без ограничения общности считаем коэффициент при y^3 равным 1.

Сделаем для упрощения замену переменной $y = x + \alpha$, тогда

$$(x+\alpha)^3 + a(x+\alpha)^2 + b(x+\alpha) + c = 0$$

или

$$x^3 + (3x^2\alpha + ax^2) + (3x\alpha^2 + 2a\alpha x + bx) + (\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0.$$

Если положить $\alpha = -\frac{a}{3}$, то член, содержащий x^2, пропадёт, и уравнение примет вид:

$$x^3 + px + q = 0, \qquad \text{где} \qquad p, q \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Положим $x = u + v$ и подставим в (1), тогда имеем:

$$u^3 + v^3 = (u+v)(3uv+p) + q = 0.$$

Так как мы вместо одного неизвестного x ввели два неизвестных u и v, то одно из них произвольно, или, иначе, мы можем установить между ними произвольную зависимость. Естественно положить $3uv + p = 0$, или $uv = -\frac{p}{3}$, тогда $u^3 + v^3 = -q$ и $u^3v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$, откуда u^3 и v^3 — корни квадратного уравнения $t^2 + qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$. Находим:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad \text{и} \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Тогда

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

При вычислении корней уравнения $x^3 + px + q = 0$ по этой формуле надо иметь в виду, что u и v не независимы, а связаны соотношением $uv = -\frac{p}{3}$.

Полученная формула носит название формулы Кардано, она была получена в 1534 году.

Пусть u_1 — одно из трёх значений u, тогда два другие значения u — это $u_2 = u_1\varepsilon$ и $u_3 = u_1\varepsilon^2$, где $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ и $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$. $v_1 = -\frac{p}{3u_1}$ — соответствующее u_1 значение v_1.

$$v_2 = -\frac{p}{3u_2} = -\frac{p}{3u_1(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})} = v_1\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = v_1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$v_3 = -\frac{p}{3u_3} = -\frac{p}{3u_1(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})} = v_1\left(\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = v_1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Окончательно:

$$\begin{aligned}
x_1 &= u_1 + v_1;\\
x_2 &= u_1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + v_1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{u_1+v_1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1);\\
x_3 &= u_1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + v_1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{u_1+v_1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1).
\end{aligned}$$

Выражение $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ называют дискриминантом уравнения (1). Исследуем полученный результат.

I. Если $\Delta \neq 0$, то уравнение (1) имеет три различных корня.

Для доказательства предположим противное: пусть уравнение (1) имеет два корня $x_1 = x_2 = \alpha$ и $x_3 = \beta$. Тогда по формулам Виета

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 2\alpha + \beta = 0,\\
&x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta = p,\\
&x_1x_2x_3 = \alpha^2\beta = -q.
\end{aligned}$$

Отсюда $\beta = -2\alpha$ и $p = \alpha^2 - 4\alpha^2 = -3\alpha^2$ и $q = -\alpha^2(-2\alpha) = 2\alpha^3$. Тогда $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \alpha^6 - \alpha^6 = 0$, что противоречит условию $\Delta \neq 0$.

II. Если $\Delta = 0$, то уравнение (1) при $p \neq 0$ и $q \neq 0$ имеет один простой корень x_1 и один двукратный корень $x_2 = x_3$. Эти корни можно найти по формулам $x_1 = \frac{3q}{p}$, $x_2 = x_3 = -\frac{3q}{2p}$, не прибегая к извлечению корней второй и третьей степени.

Действительно, если $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, то

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = -\frac{q}{2\sqrt[3]{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

В качестве одного из значений u возьмём $u_1 = \frac{3q}{2p}$, тогда соответствующие значения

$$\begin{aligned}
v_1 &= -\frac{p}{3u_1} = -\frac{2p^2}{9q} = \frac{6\left(-\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)}{pq} = \frac{6\left(\frac{q}{2}\right)^2}{pq} = \frac{3q}{2p} = u_1;\\
x_1 &= u_1 + v_1 = \frac{3q}{p};\\
x_2 &= -\frac{2u_1}{2} = -u_1 = -\frac{3q}{2p};\\
x_3 &= -\frac{2u_1}{2} = -u_1 = -\frac{3q}{2p},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Перейдём к рассмотрению кубических уравнений с действительными коэффициентами p и q $x^3 + px + q = 0$.

I. $\Delta = 0$: все три корня вещественны, причём два из них равны, так как в случае $\Delta = 0$ корни уравнения $x^3 + px + q = 0$ рационально выражаются через p и q:

$$x_1 = \frac{3q}{p}, \qquad x_2 = x_3 = -\frac{3q}{2p}.$$

II. $\Delta > 0$: один корень вещественный, а два другие — комплексно-сопряжённые.

Действительно, возьмём для u_1 вещественное значение $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}$, тогда $v_1 = \frac{-p/3}{u_1}$ — тоже вещественное число. Так как

$$\begin{aligned}
x_1 &= u_1 + v_1,\\
x_2 &= -\frac{u_1 + v_1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1),\\
x_3 &= -\frac{u_1 + v_1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1),
\end{aligned}$$

то x_1 — вещественное число, а x_2 и x_3 — комплексно-сопряжённые.

III. $\Delta < 0$: все три корня вещественны.

Действительно, $u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}$ — мнимое число, тогда v_1 — сопряжённое ему мнимое число, так как $u_1 \cdot v_1 = \frac{p}{3}$ — действительное число.

Пусть $u_1 = a + bi$, тогда $v_1 = a - bi$. Имеем: $x_1 = 2a$, $x_{2,3} = -a \pm \sqrt{3}b$, т. е. x_1, x_2, x_3 — вещественные числа, что и требовалось доказать.

Попытаемся вычислить x_1, x_2, x_3. Для этого придётся извлекать кубический корень из комплексного числа.

Так как $\Delta < 0$, то $\Delta = -\alpha^2$, где $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \alpha i}$. Найдём модуль и аргумент подкоренного выражения:

$$r = \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \alpha^2} = \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}.$$

(Если $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, то $p < 0$ и $-\frac{p^3}{27} > 0$.)

$$\cos\varphi = \frac{-q/2}{r} = -\frac{q}{2r}, \qquad \sin\varphi = \frac{\alpha}{r} > 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
u &= \sqrt[3]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{3}\right),\\
u_1 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right),\\
u_2 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right),\\
u_3 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Теперь необходимо найти соответствующие значения v_1, v_2, v_3.

$$|u| = \sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}} = \sqrt{\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}} = \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Известно, что $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. Тогда $|u|^2 = u \cdot \bar{u} = -\frac{p}{3}$. С другой стороны, $u \cdot v = -\frac{p}{3}$, откуда $v = \bar{u}$, т. е.

$$\begin{aligned}
v_1 &= \bar{u}_1 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right),\\
v_2 &= \bar{u}_2 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3} - i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right),\\
v_3 &= \bar{u}_3 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3} - i\sin\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Окончательно,

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3},\\
x_2 &= 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3},\\
x_3 &= 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3},
\end{aligned}$$

r и $\cos\varphi = -\frac{q}{2r}$ выражаются через p и q.

Попробуем выразить $\cos\frac{\varphi}{3}$, а значит и $\sin\frac{\varphi}{3}$, $\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$ через $\cos\varphi = -\frac{q}{2r}$, тогда x_1, x_2, x_3 будут выражены через p и q.

Известно, что

$$\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3} = -\frac{q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}} = -\frac{q}{2\left|\frac{p}{3}\right|\sqrt{-\frac{p}{3}}} = \frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}}.$$

Имеем: $4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3} - \frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}} = 0$, или

$$-8 \cdot \frac{1}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos^3\frac{\varphi}{3} + 2p\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3} + q = 0.$$

Положим $2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3} = t$, тогда $t^3 = -\frac{8}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos^3\frac{\varphi}{3}$, и получаем исходное уравнение $t^3 + pt + q = 0$, т. е. получился порочный круг.

В этом случае формула Кардано не приводит к записи ответа при помощи радикалов от действительных чисел, однако корни можно вычислить приближённо: по тригонометрическим таблицам найти $\varphi = \arccos\left(-\frac{q}{2r}\right)$, затем $\frac{\varphi}{3}$ и $\cos\frac{\varphi}{3}$, $\cos\frac{\varphi+2\pi}{3}$, $\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}$.

Для Кардано и его современников случай отрицательного Δ казался парадоксальным, так как в то время понятие комплексного числа ещё не имело конкретного истолкования и операции извлечения квадратного корня из отрицательных чисел и извлечение кубического корня из комплексных чисел считались невозможными. Для математиков того времени было удивительным то обстоятельство, что в случае $\Delta < 0$ получались с помощью этих невозможных операций действительные числа.

Были предприняты многочисленные попытки освободиться от мнимостей в формуле Кардано, но эти попытки окончились неудачей.

Можно показать, что корни уравнения $x^3 + px + q = 0$ с действительными коэффициентами в случае $\Delta < 0$ никаким способом нельзя выразить через радикалы с действительными подкоренными выражениями. В силу этого обстоятельства случай $\Delta < 0$ получил наименование «неприводимого случая».

Другой недостаток формулы Кардано состоит в том, что она часто представляет рациональные корни в иррациональном виде. Например, $x^3 - x - 6 = 0$. Корень этого уравнения $x_1 = 2$. По формуле Кардано

$$u_1 = \sqrt[3]{3 + \frac{11}{9}\sqrt{6}}, \qquad v_1 = \sqrt[3]{3 - \frac{11}{9}\sqrt{6}},$$

т. е.

$$x_1 = \sqrt[3]{3 + \frac{11}{9}\sqrt{6}} + \sqrt[3]{3 - \frac{11}{9}\sqrt{6}}.$$

Уравнение четвёртой степени $y^4 + a'y^3 + b'y^2 + c'y + d' = 0$ может быть приведено подстановкой $y = x - \frac{a'}{4}$ к виду

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Представим $x^4 + ax^2 + bx + c$ в виде разности двух квадратов:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + d)^2 - (ex + f)^2 = (x^2 + ex + f + d)(x^2 - ex - f + d) =$$
$$= x^4 + (2d - e^2)x^2 - 2efx + (d^2 - f^2).$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов d, e, f из условия равенства двух многочленов получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2d - e^2 = a, \\ 2ef = -b, \\ d^2 - f^2 = c, \end{cases}$$

откуда $f = -\frac{b}{2e}$, тогда $d^2 - \frac{b^2}{4e^2} = c$, но $e^2 = 2d - a$, тогда $d^2 - \frac{b^2}{4(2d-a)} = c$. Получилось кубическое уравнение относительно d, так называемая кубическая резольвента. Найдя одно значение $d = d_1$, получим соответствующие значения e и f такие, что $2ef = -b$:

$$e_1 = \sqrt{2d_1 - a}, \qquad f_1 = -\frac{b}{2\sqrt{2d_1 - a}}.$$

Существует ряд способов решения уравнения четвёртой степени: способы Феррари (вышеизложенный), Декарта, Эйлера. Характерно то, что при решении уравнения четвёртой степени любым способом приходим к одной и той же кубической резольвенте $8d^3 - 4ad - 8cd - (b^2 - 4ac) = 0$. Этого уравнения нельзя вообще избежать при решении уравнения четвёртой степени.

Можно решить уравнение $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ подстановкой $x = ky + h$, сведя его к возвратному уравнению четвёртой степени.

§ 9. Приложения комплексных чисел в геометрии

Рассмотрим вопрос о построении стороны правильного n-угольника, вписанного в единичный круг. Проще всего справиться с этой проблемой, если прибегнуть к комплексным числам. Мы знаем, что вершины правильного n-угольника служат корнями уравнения $z^n-1=0$, причём координаты x и y каждой вершины являются действительной и мнимой частями комплексного числа $z=x+iy$. Один из корней уравнения $z^n-1=0$ есть $z=1$, а остальные удовлетворяют уравнению

$$\frac{z^n-1}{z-1}=z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z+1=0.$$

Если корни последнего уравнения можно построить с помощью циркуля и линейки (т. е. можно построить соответствующие действительные и мнимые части корней этого уравнения x и y), то можно построить правильный n-угольник.

В общем виде задача довольно сложна и была решена Гауссом в 1801 г. Им была доказана

Теорема. Деление окружности циркулем и линейкой на n равных частей возможно тогда и только тогда, когда $n=2^k\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_m$, где $k=0,1,2,3,\ldots$, а p_t — различные простые числа вида $2^{2^t}+1$.

Сейчас неизвестно, бесконечно ли множество простых чисел вида $2^{2^t}+1$.

При $t=0$ $p_0=3$, при $t=1$ $p_1=5$, при $t=2$ $p_2=17$, при $t=3$ $p_3=257$ — все числа — простые. При $t=4$ также получается простое число $2^{16}+1=65\,537$. При других t получаются как простые, так и составные числа.

Очевидно, что задача о делении окружности на n равных частей и задача о построении правильного n-угольника эквивалентны.

Рассмотрим уравнение: $z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z+1=0$ для некоторых n, т. е. задачу о возможности построения правильных n-угольников для $n=3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17$.

$$n=3:\qquad z^2+z+1=0;\qquad z_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$n=4:\qquad z^3+z^2+z+1=0;\qquad z_1=-1;\ z_{2,3}=\pm i.$$

$$n=5:\qquad z^4+z^3+z^2+z+1=0;\qquad z_1=-1.$$

Корни последнего уравнения были найдены в § 7:

$$z_{1,2}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\pm i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\qquad\text{и}\qquad z_{3,4}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

$$n=6:\qquad z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0;$$

$$z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=(z+1)(z^4+z^2+1)=0;$$

$$z_1=-1;\qquad z^2=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_{2,3}=\sqrt{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\pm\left(\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}\right)=\pm\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$z_{4,5}=\sqrt{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\pm\left(\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}\right)=\pm\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$n=7:\qquad z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0.$$

Делим это уравнение на z^3 $(z\neq 0)$:

$$z^3+\frac{1}{z^3}+z^2+\frac{1}{z^2}+z+\frac{1}{z}+1=0.$$

Так как $z^2+\frac{1}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2$ и

$$z^3+\frac{1}{z^3}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-\left(z+\frac{1}{z}\right)=\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

то имеем:

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^3+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0.$$

Положив $z+\frac{1}{z}=y$, приходим к уравнению третьей степени

$$y^3+y^2-2y+1=0.$$

Известно, что корень седьмой степени из 1 даётся формулой

$$z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7},$$

где $\frac{2\pi}{7}$ — угол, под которым из центра круга видна сторона правильного семиугольника.

$$\frac{1}{z}=\frac{\cos 0+i\sin 0}{\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}}=\cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)=\cos\frac{2\pi}{7}-i\sin\frac{2\pi}{7}.$$

Значит, $z+\frac{1}{z}=2\cos\frac{2\pi}{7}$.

Если мы сумеем построить y, то сумеем построить и $\cos\frac{2\pi}{7}$, а значит и угол $\frac{2\pi}{7}$, т. е. правильный семиугольник. Уравнение $y^3+y^2-2y+1=0$ не имеет рациональных корней. Поэтому его корень построить с помощью циркуля и линейки нельзя, в силу теоремы:

Уравнение третьей степени с рациональными коэффициентами тогда и только тогда разрешимо в квадратных радикалах, когда оно имеет хотя бы один рациональный корень.

$$n=8:\quad z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0.$$

$$z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=(z+1)(z^6+z^4+z^2+1)=0;$$

$$z_1=-1;\qquad (z^2+1)(z^4+1)=0,\quad \text{откуда } z_{2,3}=\pm i;$$

$$z^4+1=z^4+2z^2+1-2z^2=(z^2+1)^2-(\sqrt{2}z)^2=(z^2+\sqrt{2}z+1)(z^2-\sqrt{2}z+1)=0,$$

$$\text{откуда}\qquad z_{4,5}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad z_{6,7}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$n=9:\quad z^8+z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0.$$

$$z^6(z^2+z+1)+z^3(z^2+z+1)+z^2+z+1=0;$$

$$(z^2+z+1)(z^6+z^3+1)=0;$$

$z_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $z_0=1+0i$ — вершины правильного треугольника: могут быть построены с помощью циркуля и линейки.

Поделим все члены уравнения $z^6+z^3+1=0$ на $z^3\neq 0$:

$$z^3+\frac{1}{z^3}+1=0;\qquad z^3=\frac{1}{z^3}=(z+\frac{1}{z})^3-3(z+\frac{1}{z});$$

обозначив $z+\frac{1}{z}$ через y, имеем уравнение $y^3-3y+1=0$, корни которого $y_1=2\cos\frac{2\pi}{9}$, $y_2=2\cos\frac{4\pi}{9}$, $y_3=2\cos\frac{8\pi}{9}$ не могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Значит, невозможно построить правильный 9-угольник с помощью циркуля и линейки.

К этой задаче можно подойти с иной точки зрения: правильный 9-угольник можно построить, если разделить окружность на три равные части, а затем каждую треть снова разделить на три равные части. Следовательно, данная задача свелась к задаче о трисекции угла в $120°$, которая неразрешима с помощью циркуля и линейки.

$$n=10:\quad z^9+z^8+z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0.$$
$$z^9+z^8+z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=(z+1)(z^8+z^6+z^4+z^2+1)=0;$$
$$z_1=-1.$$

Осталось решить уравнение $z^8+z^6+z^4+z^2+1=0$. Обозначив $z^2=t$, перейдём к ранее решённому уравнению $t^4+t^3+t+1=0$ с корнями

$$t_{1,2}=\frac{-1-\sqrt5}{4}\pm i\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}\qquad\text{и}\qquad t_{3,4}=\frac{\sqrt5-1}{4}\pm i\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}.$$

Видим, что корни данного уравнения выражаются в квадратных радикалах, т. е. правильный 10-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки.

$$n=11:\qquad z^{10}+z^9+z^8+z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0;$$
$$\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)+\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)+\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0.$$

Положив $z+\frac1z=y$, приведём данное уравнение к виду

$$y^5+y^4-4y^3-3y^2+3y+1=0.$$

Последнее уравнение невозможно исследовать элементарными методами. Из теоремы Гаусса следует невозможность построения правильного 11-угольника с помощью циркуля и линейки.

$$n=12:\qquad z^{11}+z^{10}+z^9+z^8+z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0;$$
$$(z^2+z+1)(z^9+z^6+z^3+1)=0;$$
$$z_{1,2}=-\frac12\pm i\frac{\sqrt3}{2};\qquad z^6(z^3+1)+(z^3+1)=0;\qquad (z^3+1)(z^6+1)=0,$$
$$\text{откуда}\qquad (z+1)(z^2-z+1)=0\quad\text{или}\quad (z^2+1)(z^4-z^2+1)=0.$$

Видим, что все корни выражаются в квадратных радикалах, значит правильный 12-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки.

$$n=13:\qquad z^{12}+z^{11}+z^{10}+z^9+z^8+z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0;$$
$$\left(z^6+\frac{1}{z^6}\right)+\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)+\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)+\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0.$$

Положив $z+\frac1z=y$, приведём данное уравнение к виду

$$y^6+y^5-5y^4-4y^3+6y^2+3y-1=0.$$

Последнее уравнение невозможно исследовать элементарными методами. Из теоремы Гаусса следует невозможность построения правильного 13-угольника с помощью циркуля и линейки.

$n=14$. Чтобы построить правильный 14-угольник, надо выразить в квадратных радикалах $\cos\frac{2\pi}{14}$, но $\cos\frac{\pi}{7}=\sqrt{\frac{1+\cos^2\frac{2\pi}{7}}{2}}$. Однако $\cos\frac{2\pi}{7}$ не выражается в квадратных радикалах, т. е. угол $\frac{2\pi}{14}$ нельзя построить с помощью циркуля и линейки, откуда следует невозможность построения правильного 14-угольника.

$$n = 15\colon \qquad z^{14} + z^{13} + z^{12} + z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0;$$
$$z^{12}(z^2 + z + 1) + z^9(z^2 + z + 1) + z^6(z^2 + z + 1) + z^3(z^2 + z + 1) + +(z^2 + z + 1) = 0;$$
$$z^2 + z + 1 = 0\colon \qquad z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Осталось решить уравнение

$$z^{12} + z^9 + z^6 + z^3 + 1 = 0.$$

Положим $z^3 = y$, тогда имеем уравнение $y^4 + y^3 + y^2 + 1 = 0$. Это уравнение имеет корни:

$$y_{1,2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \pm i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \qquad \text{и} \qquad y_{3,4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Но

$$y_{1,2} = \cos\frac{4\pi}{5} \pm i\sin\frac{4\pi}{5}, \qquad y_{3,4} = \cos\frac{2\pi}{5} \pm i\sin\frac{2\pi}{5}.$$

При нахождении z нам встретятся вещественные числа $\cos\frac{2\pi}{15}$, $\sin\frac{2\pi}{15}$, $\cos\frac{4\pi}{15}$, $\sin\frac{4\pi}{15}$, которые выражаются в квадратных радикалах.

В самом деле: $\sin\frac{2\pi}{15} = \sin 24^\circ$.

Известно, что $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Тогда $\sin 12^\circ = \sin(30^\circ - 18^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \cos 18^\circ - \sin 18^\circ \cos 30^\circ$ выражается в квадратных радикалах. Следовательно и $\sin 24^\circ = 2\sin 12^\circ \cos 12^\circ$ выражается в квадратных радикалах. Значит и $\cos 24^\circ$, а также $\cos 48^\circ$ и $\sin 48^\circ$ выражается в квадратных радикалах. Поэтому правильный 15-угольник можно построить циркулем и линейкой.

$$n = 16\colon \qquad z^{15} + z^{14} + z^{13} + z^{12} + z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0;$$
$$(z^3 + z^2 + z + 1)(z^{12} + z^8 + z^4 + 1) = 0;$$
$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0\colon \qquad (z+1)(z^2+1) = 0.$$

Корни z_1, z_2, z_3 последнего уравнения выражаются в квадратных радикалах.

$$z^{12} + z^8 + z^4 + 1\colon \qquad (z^4+1)(z^8+1) = 0.$$

Корни уравнения $z^4 + 1 = 0$ выражаются в квадратных радикалах (см. правильный 8-угольник).

$$z^8 + 1 = (z^4+1)^2 - 2z^4 = (z^4 - \sqrt{2}z^2 + 1)(z^4 + \sqrt{2}z^2 + 1).$$

Поэтому корни уравнения $z^8 + 1 = 0$ выражаются в квадратных радикалах.

Таким образом, все корни исходного уравнения выражаются в квадратных радикалах и правильный 16-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки.

Замечание 1. Совершенно ясно, что если мы можем построить с помощью циркуля и линейки правильный n-угольник, то можем построить и $(n \cdot 2^k)$-угольник, деля соответствующий центральный угол, под которым видна сторона n-угольника k раз пополам.

Замечание 2. Необходимость рассмотрения уравнения $z^n = 1$ для построения правильного n-угольника вытекает из того, что это уравнение имеет корни $z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, где $k = 0; 1; 2; \ldots; n-1$, а для построения угла в $\frac{2\pi}{n}$ радиан необходимо знать какую-либо тригонометрическую функцию этого угла, например, $\cos\frac{2\pi}{n}$. Значения $\cos\frac{2\pi k}{n}$ и $\sin\frac{2\pi k}{n}$ можно определить из уравнения $z^n = 1$, которое называется уравнением деления окружности.

Замечание 3. Значение тригонометрических функций $\cos\frac{2\pi}{n}$ или $\sin\frac{2\pi}{n}$ могут быть определены из уравнений $\cos nx = 1$ или $\sin nx = 1$.

Если можем построить правильные многоугольники с m и n сторонами, где m и n — взаимно простые числа, то мы можем построить правильный многоугольник с mn сторонами.

Действительно, стороны двух известных многоугольников составляют дуги, соответственно равные $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$ части окружности. Откладывая x раз подряд первую лугу и отнимая y раз вторую, получаем дугу, стягиваемую стороной искомого многоугольника, если целые числа x и y удовлетворяют равенству $\frac{x}{m} - \frac{y}{n} = \frac{1}{mn}$ или $nx - my = 1$.

Последнее равенство невозможно, если m и n имеют общий делитель, но если m и n — числа взаимно простые, то всегда можно найти два целых числа x и y которые ему удовлетворяют.

Особое место в решении задач о построении правильных n-угольников занимает задача построения с помощью циркуля и линейки правильного 17-угольника, впервые решённая Гауссом в 1796 году. Решение этой задачи положило конец колебаниям Гаусса между математикой и филологией в пользу математики.

Задача зависит от решения уравнения $z^{17} - 1 = 0$, которое, как будет показано, разрешимо в квадратных радикалах.

Если положить $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$, то корнями семнадцатой степени из единицы будут $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{16}$, или также $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^8, \varepsilon^{-8}, \varepsilon^{-7}, \ldots, \varepsilon^{-1}$, так как $\varepsilon^{17-k} = \varepsilon^{-k}$.

Сума корней уравнения $z^{17} - 1 = 0$, очевидно, равна 0, поэтому

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \cdots + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-8} + \varepsilon^{-7} + \cdots + \varepsilon^{-1} = -1.$$

Обозначим:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-8} & \text{через } \eta, \text{ а} \\ \varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-7} & \text{через } \eta_1. \end{array}$$

Оба равенства вместе содержат все комплексные корни 17-ой степени из единицы. Левые части равенств следуют тому закону, что каждый из их членов есть квадрат предшествующего.

$$\eta + \eta_1 = 1;$$

$$\begin{aligned} \eta\eta_1 &= \left(\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-8}\right)\left(\varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-7}\right) = \\ &= 4\left(\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-8} + \varepsilon^{-7} + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-1}\right) = \\ &= 4 \cdot (-1) = -4. \end{aligned}$$

Следовательно, η и η_1 — корни уравнения $x^2 + x - 4 = 0$, т. е.

$$\eta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17} \qquad \text{и} \qquad \eta_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$$

Теперь положим:

$$\begin{aligned} &\varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4} = z; \\ &\varepsilon^2 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-8} = z_1; \\ &\varepsilon^3 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^5 = z_2; \\ &\varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^{-7} = z_3. \end{aligned}$$

Эти четыре равенства содержат все комплексные корни 17-ой степени из единицы, и в любом из этих равенств каждый из членов есть четвертая степень предшествующего.

$$z + z_1 = \eta$$

согласно обозначению η.

$$z \cdot z_1 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-8} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-7} + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^2 + \varepsilon^{-4} + \varepsilon + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^4 + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^5 = -1.$$

Значит, z_1 и z_2 — корни уравнения $x^2 - \eta x - 1 = 0$. Аналогично, $z_2 + z_3 = \eta_1$ и $z_2 \cdot z_3 = -1$, так что z_2 и z_3 суть корни уравнения $x^2 - \eta_1 x - 1 = 0$.

Итак, z, z_1, z_2, z_3 — выражаются в квадратных радикалах. Положим, наконец, $\varepsilon^1 + \varepsilon^{-1} = y$, $\varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = y_1$, откуда $y + y_1 = z$, где $z > 0$ и $yy_1 = \varepsilon^5 + \varepsilon^{-3} = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-5} = z_2$, где $z_2 > 0$. Следовательно, y и y_1 будут корнями уравнения $x^2 - zx + z_2 = 0$.

Если, наконец, подставить значение y в уравнение $\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y$, то получится уравнение, из которого можно вычислить значение ε:

$$\varepsilon = \frac{y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - 4}.$$

Этим доказано, что корни 17-ой степени из 1 могут быть выражены с помощью квадратных радикалов.

Пусть y_1 — меньший корень уравнения $x^2 - zx + z_2 = 0$.

$$y_1 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = \left(\cos\frac{8\pi}{17} + i\sin\frac{8\pi}{17}\right) + \left(\cos\frac{8\pi}{17} - i\sin\frac{8\pi}{17}\right) = 2\cos\frac{8\pi}{17} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{8\pi}{17}\right) = 2\sin\frac{\pi}{34}$$

— сторона вписанного правильного 34-угольника (в окружность единичного радиуса)

$$y = \varepsilon^1 + \varepsilon^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{17},$$

следовательно, $\frac{y}{2} = \cos\frac{2\pi}{17}$ есть расстояние от центра той хорды, которая соединяет две вершины 17-угольника, разделённые одной из его вершин.

Геометрическая интерпретация комплексного числа в декартовой и полярной системе координат позволяет при решении планиметрической задачи использовать аппарат комплексных чисел, что в ряде случаев упрощает решение задачи.

Число $Z = a + bi$ назовём комплексной координатой точки $Z(a, b)$ или вектора $\overrightarrow{OZ}$, где O — начало декартовой системы координат. Очевидно, что при сложении векторов их комплексные координаты складываются, а при вычитании — вычитаются.

Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OZ}$, то естественно считать комплексные координаты этих векторов равными; так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OZ}$, то $\overrightarrow{AB} = (a, b)$.

Рассмотрим в заключение несколько примеров применения тождеств, связывающих комплексные числа, и свойств абсолютной величины комплексного числа к установлению некоторых интересных геометрических соотношений.

Для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3, z_4 верно тождество:

$$(z_2 - z_1)(z_4 - z_3) + (z_3 - z_2)(z_4 - z_1) = (z_4 - z_2)(z_3 - z_1).$$

Опираясь на свойства модулей комплексных чисел, получим:

$$|z_4 - z_2| \cdot |z_3 - z_1| \leq |z_2 - z_1| \cdot |z_4 - z_3| + |z_3 - z_2| \cdot |z_4 - z_1|,$$

т. е. всегда

$$|A_1A_3| \cdot |A_2A_4| \leq |A_1A_2| \cdot |A_3A_4| + |A_2A_3| \cdot |A_1A_4|.$$

Доказано интересное дополнение к теореме Птолемея: в каждом четырехугольнике произведение диагоналей не больше суммы произведений его противоположных сторон.

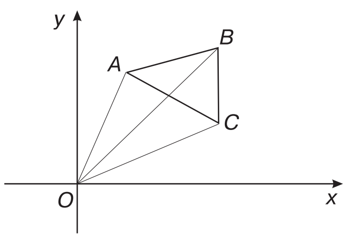


Рис. 1.

Легко проверить, что для любых чисел a, b, c справедливо тождество:

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = -(b - c)(c - a)(a - b).$$

Пусть комплексные числа a, b, c изображают вершины A, B, C треугольника соответственно (рис. 1). Из данного тождества следует, что

$$|b - c| \cdot |c - a| \cdot |a - b| \leq |a^2| \cdot |b - c| + |b^2| \cdot |c - a| + |c^2| \cdot |a - b|.$$

или

$$|BC| \cdot |CA| \cdot |AB| \leq |OA|^2 \cdot |BC| + |OB|^2 \cdot |AC| + |OC|^2 \cdot |AB|.$$

Следствие 1. Если O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, то имеем:

$$|AB| \cdot |BC| \cdot |CA| \leq R^2(|AB| + |BC| + |AC|), \qquad \text{или} \qquad \frac{|AB| \cdot |BC| \cdot |CA|}{|AB| + |BC| + |AC|} \leq R^2.$$

Следствие 2. Если ABC — равносторонний треугольник, $|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 \geq d^2$, где d — длина стороны треугольника.

Рассмотрим тождество:

$$(m-a)(m-b)(a-b) + (m-b)(m-c)(b-c) + (m-c)(m-a)(c-a) = (a-b)(b-c)(c-a).$$

Пусть комплексные числа a, b, c, m изображают на плоскости XOY точки A, B, C, M соответственно. Имеем:

$$|(m-a)(m-b)(a-b) + (m-b)(m-c)(b-c) + (m-c)(m-a)(c-a)| = |a-b| \cdot |b-c| \cdot |c-a|;$$

$$|m-a| \cdot |m-b| \cdot ||a-b| + |m-b| \cdot |m-c| \cdot |b-c| + |m-c| \cdot |m-a| \cdot |c-a| \geq$$
$$\geq |a-b| \cdot |b-c| \cdot |c-a|,$$

или

$$|AB| \cdot |AM| \cdot |BM| + |BC| \cdot |BM| \cdot |CM| + |CA| \cdot |CM| \cdot |MA| \geq |AB| \cdot |BC| \cdot |CA|,$$

что верно для произвольных четырёх точек A, B, C, M.

Аналогично могут быть решены следующие задачи:

Задача 1. Вывести из тождества

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{c}{(c-d)(c-a)(c-b)} + \frac{d}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0$$

неравенство

$$|OA| \cdot |BC| \cdot |BD| \cdot |CD| + |OB| \cdot |CA| \cdot |CD| \cdot |AD| + |OC| \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot |BD| \geq |OD| \cdot ||AB| \cdot |BC| \cdot |CA|$$

где O, A, B, C, D — произвольные (различные) точки плоскости.

Задача 2. Вывести из тождества $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ неравенство $2|OM| \cdot |AB| \geq |OA|^2 - |OB|^2$, где M — середина $|AB|$, O — начало координат; a и b — числа, соответствующие точкам A и B. Выяснить, когда имеет место знак равенства.

Задача 3*. Вывести из тождества

$$a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = -(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

неравенство $|OH| \leq \frac{R^2}{2r}$, где O — центр окружности, описанной около треугольника, R — радиус этой окружности, H — точка пересечения высот треугольника, r — радиус вписанной окружности.

§ 10. Приложения комплексных чисел к физике

Теория комплексных чисел и теория функций комплексного переменного широко применяется в различных областях физики и технических дисциплинах: в специальной теории относительности, теоретической механике, электродинамике, в гидро- и аэромеханике, в сопротивлении материалов, электротехнике и картографии.

Однако комплексные числа можно использовать и в школьном курсе физики.

В теории колебаний встречается дифференциальное уравнение вида $x'' + \omega^2 x = 0$, которое описывает различные колебательные системы. Оно описывает и движение тела под действием квазиупругой силы.

К данному уравнению приводятся следующие задачи:

а) малые колебания ареометра;

б) малые колебания столба жидкости в сообщающихся сосудах;

в) математический маятник;

г) физический маятник;

д) малые движения материальной точки в сферической полости около положения равновесия;

е) малые колебания груза на пружине;

ж) движение тела в сквозном туннеле, прорытом в сферической однородной планете;

з) колебания поршня в сосуде, наполненном газом;

к) колебательный контур LC (индуктивность-емкость).

Рассмотрим уравнение $x'' + \omega^2 x = 0$. Зададим начальные условия: $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$. Ищем x в виде: $x = e^{\lambda t}$, тогда $x' = \lambda e^{\lambda t}$, $x'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$. Подставим x и x'' наше уравнение:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0, \qquad \text{откуда} \qquad e^{\lambda t}(\lambda^2 + \omega^2) = 0.$$

Так как $e^{\lambda t} \neq 0$, то $\lambda^2 = -\omega^2$ и $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определятся из начальных условий:

$$C_1 + C_2 = x_0 \tag{а}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = x' = C_1 i\omega e^{i\omega t} - C_2 i\omega e^{-i\omega t} = i\omega\left(C_1 e^{i\omega t} - C_2 e^{-i\omega t}\right) \Rightarrow i\omega(C_1 - C_2) = v_0 \tag{б}$$

Из (а) и (б) имеем систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0, \\ C_1 - C_2 = v_0 : (i\omega). \end{cases}$$

C_1 и C_2 определяются элементарно. Следовательно,

$$x = \frac{x_0 - i\frac{v_0}{\omega}}{2} e^{i\omega t} + \frac{x_0 + i\frac{v_0}{\omega}}{2} e^{-i\omega t} = \frac{x_0\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)}{2} - i \cdot \frac{v_0}{\omega} \cdot \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} =$$
$$= x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega} \cdot \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{x_0}{v_0/\omega} = \frac{\omega x_0}{v_0}$.

Решение можно записать и через косинус:

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}\cos(\omega t - \varphi_0),$$

где $\operatorname{ctg}\varphi_0 = \frac{\omega x_0}{v_0}$.

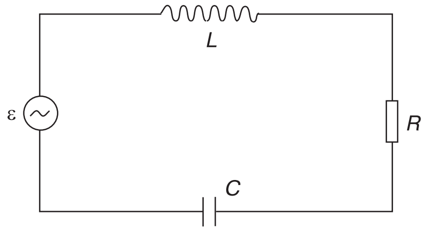


Рис. 2.

Исследуем с помощью комплексных чисел колебательный контур RLC, изображённый на рис. 2, где C — ёмкость, L — индуктивность, R — активное омическое сопротивление, ε — внешняя ЭДС (электродвижущая сила), меняющаяся по синусоидальному или косинусоидальному закону с круговой частотой ω.

По 2-му закону Кирхгофа $U_L + U + R + U_C = \varepsilon$, где U_L, U_R, U_C — напряжения на индуктивности, активном сопротивлении и ёмкости соответственно:

$$U_L = L \cdot \frac{dJ}{dt}, \qquad U_R = RJ, \qquad U_C = \frac{q}{C}.$$

Имеем:

$$L\frac{dJ}{dt} + RJ + \frac{q}{C} = \varepsilon.$$

Дифференцируя по t, учитывая, что $J = \frac{dq}{dt}$:

$$L\frac{d^2J}{dt^2} + R\frac{dJ}{dt} + \frac{J}{C} = \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Получили неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, которое не рассматривается в средней школе. Однако его можно решить, используя формулу Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Вместо того, чтобы брать ЭДС в виде $\varepsilon_0 \cos \omega t$ или $\varepsilon_0 \sin \omega t$ формально объединим эти две возможности в комплексной записи:

$$\varepsilon = \varepsilon_0(\cos \omega t + i \sin \omega t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t},$$

где действительное число $\varepsilon_0 > 0$ обозначает амплитуду ЭДС: $|\varepsilon| = \varepsilon_0$.

Реальная вещественная ЭДС является действительной частью комплексной ЭДС. Поэтому в полученном решении возьмём действительную часть комплексной силы тока.

Введение $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ оправдано тем, что с показательной функцией легче оперировать, чем с тригонометрическими функциями.

Исходя из гипотезы, что сила тока есть тоже гармоническое колебание с круговой частотой ω ищем ток в виде: $J' = \alpha(\cos \omega t + i \sin \omega t) = \alpha e^{i\omega t}$. Находим $\frac{dJ'}{dt}$, $\frac{d^2J'}{dt^2}$ и подставляем в наше уравнение:

$$\frac{dJ'}{dt} = i\omega\alpha e^{i\omega t}, \qquad \frac{d^2J'}{dt^2} = -\omega^2 \alpha e^{i\omega t},$$
$$\alpha e^{i\omega t}\left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}\right) = i\omega\varepsilon_0 e^{i\omega t}.$$

Так как $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \neq 0 + 0i$, то

$$\alpha\left(\omega R + i\left(\omega^2 L + \frac{1}{C}\right)\right) = \omega\varepsilon_0, \qquad \text{откуда} \qquad \alpha = \frac{\varepsilon_0}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Тогда

$$J' = \frac{\varepsilon_0 e^{i\omega t}}{R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\varepsilon_0(\cos \omega t + i \sin \omega t)}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\varepsilon_0\left(R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)(\cos \omega t + i \sin \omega t)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} =$$
$$= \frac{\varepsilon_0}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\left(R\cos \omega t + iR \sin \omega t - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos \omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\sin \omega t\right) =$$
$$= \frac{\varepsilon_0}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\left(\left(\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\sin \omega t + R\cos \omega t\right) + i\left(R \sin \omega t - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos \omega t\right)\right)$$

Действительный ток

$$J = \mathrm{Re} J' = \frac{\varepsilon_0}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\left(\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\sin \omega t + R\cos \omega t\right) =$$
$$= \frac{\varepsilon_0\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\sin(\omega t + \varphi)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\sin(\omega t + \varphi) = J_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}$, $J_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$ — амплитудное значение силы тока.

В ряде физических задач, приводящих к квадратным уравнениям, необходимо использовать вещественность дискриминанта: ведь физическая величина не может быть мнимой! Неравенство $b^2 - 4ac \geq 0$ даёт нам новое соотношение между физическими величинами, фигурирующими в задаче. В качестве примера рассмотрим задачу о движении тела, брошенного под углом к горизонту.

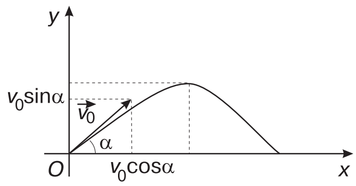


Рис. 3.

Пусть материальная точка брошена с начальной скоростью $\overrightarrow{v_0}$ под углом α к горизонтальной оси OX: (рис. 3)

Уравнения движения материальной точки:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t; \\ y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Исключая из этих уравнений время, получим уравнение траектории

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\frac{gx^2}{2v_0^2},$$

откуда ясно, что эта траектория — парабола, проходящая через начало координат. Рассмотрим баллистическую задачу: под каким углом к горизонту надо расположить орудие, чтоб попасть в цель, находящуюся на расстоянии S по горизонтали и на высоте h по вертикали (рис. 4).

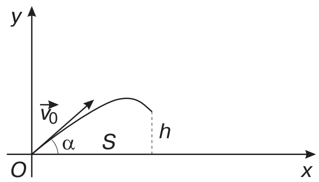


Рис. 4.

Чтобы ответить на этот вопрос, потребуем, чтобы траектория, описываемая уравнением

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\frac{gx^2}{2v_0^2},$$

проходила через точку с координатами $x = S$, $y = h$:

$$h = S \operatorname{tg}\alpha - (1 - \operatorname{tg}^2\alpha)\frac{gS^2}{2v_0}.$$

Решая это квадратное относительно $\operatorname{tg}\alpha$ уравнение, имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{gS}(v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gS^2 + 2v_0v_0^2h)}).$$

Так как $\operatorname{tg}\alpha$ — вещественное число, то дискриминант

$$G = v_0^4 - g(gS^2 + 2v_0^2h) \geq 0.$$

Если $D > 0$, то в цель можно попасть, стреляя под двумя углами, т. е. по навесной и настильной траектории.

Если $D = 0$, то в цель можно попасть стреляя под углом α_0, таким, что $\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{v_0^2}{gS}$.

Если $D < 0$ то $\operatorname{tg}\alpha$ — мнимое число, чего не может быть. В этом случае при данной скорости вылета снаряда в цель попасть невозможно. Равенство нулю дискриминанта определяет ту минимальную начальную скорость, при которой ещё можно попасть в данную цель:

$$v_{0\,min}^2 = g(h + \sqrt{h^2 + S^2}).$$

С другой стороны, при заданном значении v_0 равенство нулю дискриминанта определяет координаты наиболее удалённых целей, в которые ещё можно попасть, т. е. границу области, простреливаемой из данного орудия. Выражаем h из уравнения

$$v_0^4 - g(gS^2 + 2v_0^2h) = 0: \qquad h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gS^2}{2v_0^2};$$

эта формула определяет наибольшую высоту цели, находящейся на расстоянии S от орудия по горизонтали, в которую ещё можно попасть при данном v_0. Заменим координаты определённой наиболее удаленной цели S и h на переменные величины x и y — координаты точек искомой границы:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Это уравнение параболы с вершиной в точке $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{v_0^2}{2g}$. Её ветви направлены вниз и пересекают ось OX в точках $x = \pm\frac{v_0^2}{2g}$. Парабола, ограничивающая простреливаемую область, называется параболой безопасности. Данным материалом можно дополнить излагаемый в курсе механики 9 класса вопрос о движении тела, брошенного под углом к горизонту.

§ 11. Система упражнений по теме «Комплексные числа»

1. Доказать, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливы равенства:

$$(z_1 + z_2)^n = z_1^n + C_n^1 z_1^{n-1} z_2 + C_n^2 z_1^{n-2} z_2^2 + \dots + C_n^k z_1^{n-k} z_k + \dots + z_2^n,$$
$$z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2)(z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_2 + \dots + z_1 z_2^{n-2} + z_2^{n-1}).$$

2. Можно ли извлечь кубический корень из чисто мнимого числа в алгебраической форме?

3. Доказать формулу

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\,\mathrm{sign}\,b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

используя формулу корня n-ой степени из комплексного числа.

4. Решить уравнения:

a) $\bar{z} = z^{n-1}$;

b) $z|z| + 2z + i = 0$;

c) $z^{16} + z^{15} + \dots + z + 1 = 0$;

d) $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \cos\varphi + i\sin\varphi$;

e) $(x+i)^n + (x-i)^n = 0$.

5. Найти целые решения уравнений:

a) $(1-i)^x = 2^x$; b) $(1+i)^x = (1-i)^x$.

6. Решить в комплексных числах системы уравнений:

a) $\begin{cases} z^3 + \bar{W}^7 = 0; \\ z^5 \cdot W^{11} = 1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} z^3 + W^5 = 0; \\ z^2 \cdot \bar{W}^4 = 1. \end{cases}$ c) $\begin{cases} z^{13} + W^{19} = 0; \\ z^5 \cdot W^7 = 1; \\ z^2 + W^2 = -2. \end{cases}$

7. Доказать, что

$$\left(\frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\varphi}\right)^n = \frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,n\varphi}{1 - i\,\mathrm{tg}\,n\varphi},$$

где n — целое число.

8. Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме:
a) $1 + \sin\alpha - i\cos\alpha$, где $0 < \alpha < \pi$;

b) $\operatorname{tg}\alpha + i$, где $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
c) $z^2 - z$, если $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

9. Доказать, что если $z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi$, то $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi$.

10. Упростить: $(1+\omega)^n$, где $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

11. Найти сумму p-х степеней корней уравнения $x^n = 1$.

12. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, $x_n = 1$ — корни уравнения $x^n = 1$. Вычислить:

$$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_{n-1}).$$

13*. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни уравнения $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = 0$. Вычислить

$$\frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1} + \cdots + \frac{1}{x_n-1}.$$

14. Доказать, что если многочлен с действительными коэффициентами имеет корень $a+bi$, то он имеет и корень $a-bi$.

15. $\varepsilon^n = 1$. Доказать, что

$$1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \cdots + n\varepsilon^{n-1} = \frac{n}{\varepsilon - 1};\ \ 1 + 4\varepsilon + 9\varepsilon^2 + \cdots n^2\varepsilon n - 1 = -\frac{n^2(1-\varepsilon) + 2n}{(1-\varepsilon)^2}.$$

16. Доказать, что произведение корня степени n из 1 на корень степени m из 1, есть корень степени mn из 1.

17*. Доказать, что если $\cos\alpha + i\sin\alpha$ есть решение уравнения $x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_n = 0$, то $p_1\sin\alpha + p_2\sin 2\alpha + \cdots + p_n\sin n\alpha = 0$ ($p_1, p_2, \ldots, p_n$ — вещественные числа).

18. Среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z - 5i| \le 4$, найти число, имеющее наименьший положительный аргумент.

19. Выяснить, где находятся точки плоскости, изображающие комплексные числа $z = x + iy$, для которых выполнены соотношения:

a) $\log_{\frac{1}{3}}\left|\frac{z+i}{z-i}\right| \ge 0$; b) $\begin{cases} \log_{0,5}|z-1| > 0; \\ \arg z = \frac{\pi}{6}; \end{cases}$ c) $\log_{\frac{1}{2}}|z-2| > \log_{\frac{1}{2}}|z|$;
d) $\begin{cases} 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}; \\ |z - 6i| = \sqrt{3}; \end{cases}$
e) $\arg(z-1) - \arg(z+1) = \frac{\pi}{2}$; f) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} > 1$; g) $\log_{\sqrt{3}}\frac{|z|^2-|z|+1}{|z|+2} < 2$;
h) $\left|\frac{z-3+2i}{1-3z-2iz}\right| > 1$.

20. Во что переходит при преобразовании $\omega = \frac{1+z}{1-z}$:
a) мнимая ось;
b) полуплоскость, расположенная справа от мнимой оси?

21. Во что перейдут при преобразовании $\omega = z^2$ области, изображённые на рис. 5?

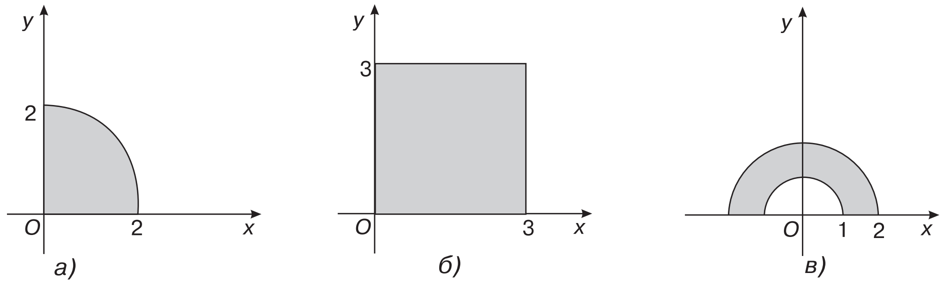


Рис. 5

22. В какую линию переходят при преобразованиях
a) $\omega_1 = \frac{1}{z}$, b) $\omega_2 = \frac{az+b}{cz+d}$ $(ad - bc \neq 0)$
прямая линия и окружность?

23. Записать в виде $\omega = f(z)$ формулу преобразования комплексной плоскости, переводящую круг $|z| < 1$ в полуплоскость, ограниченную мнимой осью и расположенную
a) справа от неё, b) слева от нее.

24. Доказать, что при любом положительном значении $k \neq 1$, уравнение $\frac{z-z_1}{z-z_2} = k$ является уравнением окружности, а также найти центр этой окружности и её радиус.

25. Доказать, что три попарно различные точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой в том и только в том случае, когда величина $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ действительна.

26. Пусть точки z_1, z_2, z_3 лежат на окружности с центром в точке O. Доказать, что треугольник с вершинами в точках z_1, z_2, z_3 является равносторонним в том и только в том случае, когда $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

27. Даны три вершины параллелограмма z_1, z_2, z_3, записанные в порядке следования при обходе границы параллелограмма. Найти его четвертую вершину z_4.

28. Доказать формулы:
a) $x^{2n} - 1 = (x^2 - 1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi k}{n} + 1\right)$;
b) $x^{2n+1} + 1 = (x + 1)\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x^2 + 2x\cos\frac{2\pi k}{2n+1} + 1\right)$;
c) $x^{2n+1} - 1 = (x - 1)\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{2n+1} + 1\right)$;
d) $x^{2n} + 1 = \prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k+1}{2n}\pi + 1\right)$.

29. Найти суммы:
a) $\cos x + C_n^1\cos 2x + \cdots + C_n^n\cos(n+1)x$;
b) $\sin x + C_n^1\sin 2x + \cdots + C_n^n\sin(n+1)x$;
c) $\cos x - C_n^1\cos 2x + C_n^2\cos 3x - \cdots + (-1)^n C_n^n\cos(n+1)x$;
d) $\sin x - C_n^1\sin 2x + C_n^2\sin 3x - \cdots + (-1)^n C_n^n\sin(n+1)x$;
e) $\cos^3 x + \cos^3 2x + \cdots + \cos^3 nx$; f) $\sin^3 x + \sin^3 2x + \cdots + \sin^3 nx$;
g) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k\sin kx$; h) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k\cos kx$; i) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} kp^k\sin kx$; j) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} kp^k\cos kx$;

30. Доказать формулы:
a) $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(a + kh) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}\cos\left(a + \frac{nh}{2}\right)$;
b) $\sum\limits_{k=0}^{n}\sin(a + kh) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}\sin\left(a + \frac{nh}{2}\right)$,

не используя формулы Муавра. Сравнить с доказательством, опирающимся на формулу Муавра.

31. Доказать формулы:
a) $\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - \cdots;$
b) $\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + \cdots$
методом математической индукции и сравнить доказательство с доказательством, опирающимся на формулу Муавра.

32. Можно ли доказать формулы
a) $\cos nz = \cos^n z - C_n^2 \cos^{n-2} z \sin^2 z + C_n^4 \cos^{n-4} z \sin^4 z - \cdots;$
b) $\sin nz = C_n^1 \cos^{n-1} z \sin z - C_n^3 \cos^{n-3} z \sin^3 z + C_n^5 \cos^{n-5} z \sin^5 z - \cdots$
из формулы $(\cos z + i\sin z)^n = \cos nz + i \sin nz$?

33. Исходя из формулы $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$, получить формулу $(\cos z + i \sin z)^n = = \cos nz + i \sin nz$.

34. Выразить $\frac{\sin mx}{\sin x}$ через $\cos x$.

35*. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x + \cdots + \frac{1}{2^n}\cos nx\right)$.

36*. Доказать, что

$$2\cos mx = (2\cos x)^m - \frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\cdot 2}(2\cos x)^{m-4} - \cdots$$
$$\cdots - (-1)^p \frac{m(m-p-1)(m-p-2)\cdots(m-2p+1)}{p!}(2\cos x)^{m-2p} + \cdots$$

37*. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n$, представив комплексное число $1 + \frac{i\varphi}{n}$ в тригонометрический форме.

38. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{a^n}$.

39*. Доказать, что
a) $2^{2m} \cos^{2m} x = 2\sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos(m-k)x + C_{2m}^m;$
b) $2^{2m} \cos^{2m+1} x = 2\sum\limits_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos(2m-2k+1)x;$
c) $2^{2m} \sin^{2m} x = 2\sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} C_{2m}^k \cos(m-k)x + C_{2m}^m;$
d) $2^{2m} \sin^{2m+1} x = 2\sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} C_{2m+1}^k \sin(2m-2k+1)x.$

40. Вычислить суммы:
a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots;$ b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \cdots;$
c) $C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - -\frac{1}{27}C_n^7 + \cdots.$

41*. Доказать, что:
a) $1 + C_n^4 + C_n^8 + \cdots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}\right);$ b) $C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 \cdots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi n}{4}\right);$
c) $C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} \cdots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}\right);$ d) $C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} \cdots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi n}{4}\right).$

42*. Доказать формулы
a) $\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = \cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 \cdots \cos\alpha_n [p_1 - p_3 + p_5 - \cdots];$

b) $\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 \cdots \cos\alpha_n [p_1 - p_2 + p_4 - \cdots]$, где

$$\begin{aligned}
&p_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \dots + \operatorname{tg}\alpha_n;\\
&p_2 = \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3 + \dots + \operatorname{tg}\alpha_{n-1} \operatorname{tg}\alpha_n;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&p_k = \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \cdots \operatorname{tg}\alpha_k + \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3 \cdots \operatorname{tg}\alpha_{k+1} + \cdots
\end{aligned}$$

— сумма всевозможных произведений тангенсов, взятых по k.

43. Доказать формулы, представляющие $\cos^n x$ и $\sin^n x$ в виде тригонометрических многочленов методом математической индукции и сравнить с доказательством, использующим формулу Эйлера.

44*. Применяя формулы Эйлера, вычислить интегралы:
a) $\int xe^x \sin x\,dx$; b) $\int xe^x \cos x\,dx$; c) $\int x^2e^x \sin x\,dx$; d) $\int x^2e^x \cos x\,dx$.

45. Вычислить интегралы
a) $\int e^{\alpha x} \cos\beta x\,dx$, b) $\int e^{\alpha x} \sin\beta x\,dx$,
интегрируя по частям. Сравнить с вычислением этих же интегралов с помощью формул Эйлера.

46*. Доказать, что
a) $\int\limits_0^\pi \cos nx \cos^n x\,dx = \frac{\pi}{2^n}$; b) $\int\limits_0^\pi \sin nx \sin^n x\,dx = \frac{\pi}{2^n} \sin\frac{\pi n}{2}$;
c) $\int\limits_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x\,dx = \frac{1-e^{-2\pi a}}{2^{2n}a} \left[C_{2n}^n + 2\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right]$.

47*. Доказать, что если $p(x)$ — многочлен степени n, то

$$\int p(x)e^{ax}\,dx = e^{ax}\left[\frac{p(x)}{a} - \frac{p'(x)}{a^2} + \dots + (-1)^n \frac{p^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right] + C.$$

Опираясь на эту формулу, доказать следующие формулы:

a) $\int p(x)\cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left[p(x) - \frac{p''(x)}{a^2} + \frac{p^{iv}(x)}{a^4} - \cdots\right] + \frac{\cos ax}{x}\left[p'(x) - \frac{p'''(x)}{a^2} + \frac{p^{v}(x)}{a^4} - \cdots\right] + C$;

b) $\int p(x)\sin ax\,dx = \frac{\cos ax}{a}\left[p(x) - \frac{p''(x)}{a^2} + \frac{p^{iv}(x)}{a^4} - \cdots\right] + \frac{\sin ax}{a}\left[p'(x) - \frac{p'''(x)}{a^2} + \frac{p^{v}(x)}{a^4} - \cdots\right] + C$.

48. Вычислить a) $\int \sin^n x\,dx$ и b) $\int \cos^n x\,dx$ в явном виде.

49. Привести уравнение $y^n + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \dots + a_{n-1}y + a_n = 0$ к виду, не содержащему y^{n-1}.

50. Записать явно решение уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

51. Решить кубическое уравнение $x^3 + px + q = 0$ подстановкой: $x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(y - \frac{1}{y}\right)$ при $p > 0$ и $x = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(y + \frac{1}{y}\right)$ при $p < 0$. Сравнить результат с формулой Кардано.

52. Применив формулу Кардано, решить следующие уравнения:
a) $x^3 + 6x - 1 = 0$; b) $x^3 + 3x - 4 = 0$; c) $x^3 - 7x - 6 = 0$.

53. Показать, что если уравнения

$$x^3 + p_1x + q_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad x^3 + p_2x + q_2 = 0$$

имеют общий корень то $(p_1q_2 - q_2p_1)(p_1 - p_2)^2 = (q_1 - q_2)^3$.

54. Пользуясь формулой Кардано, доказать, что

$$(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 = 4p^3 - 27q^2,$$

где x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$.

55*. Решить уравнение $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ подстановкой $x = ky + h$, сведя его к возвратному уравнению четвёртой степени.

56*. Решить уравнение $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$, представив его левую часть в виде

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + px + q)(x^2 + p_1x + q_1)$$

(способ Декарта).

57*. Решить уравнение $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, записав его в виде: $x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$ (способ Феррари).

58*. Показать, что при различных способах решения уравнения 4-ой степени получается одна и та же кубическая резольвента.

59*. Пусть r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей треугольника ABC. Доказать, что a) $r_a + r_b + r_c = 4R + r$; b) $r_ar_b + r_ar_c + r_br_c = p^2$; c) $r_ar_br_c = pS$.
Записать кубическое уравнение, которому удовлетворяют r_a, r_b, r_c и из условия действительности корней этого уравнения получить неравенство $R \geq 2r$, верное для любого треугольника. Для какого треугольника $R = 2r$?

60*. Составить простейшее алгебраическое уравнение, корнем которого является длина стороны правильного 14-угольника, вписанного в круг радиуса 1.

61. Доказать, что задача о трисекции угла неразрешима с помощью циркуля и линейки. (Для каких конкретных углов трисекция возможна?)

62. Доказать, что значения всех тригонометрических функций углов, градусная мера которых кратна 3, выражаются в квадратных радикалах. Какие вывод можно сделать отсюда?

63. Представить $\cos 5x = f(\cos x) = f(y)$, где $y = \cos x$. Найти хотя бы один корень уравнения $f(y) = 1$.

64. Почему каждая задача, приводящая к уравнениям, неразрешимым в квадратных радикалах, не может быть решена с помощью циркуля и линейки?

65. Пусть r_1, r_2, r_3, r_4 — рациональные числа и $r_1 + r_2\sqrt{2} = r_3 + r_4\sqrt{2}$. Доказать, что $r_1 = r_3$ и $r_2 = r_4$. Изменится ли результат, если вместо $\sqrt{2}$ взять корень любой степени n из рационального числа, которое не является точной степенью n какого-либо рационального числа?

66. Используя алгоритм построения правильного 17-угольника, показать, что:

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{6}\left(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right) + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}}.$$

Ответы

2. Да, извлеките, например, $\sqrt[3]{i}$. **4.** a) $z = 0$ и $z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$; b) $z = (1-\sqrt{2})i$; c) $z_k = \cos\frac{2k\pi}{17} + i\sin\frac{2k\pi}{17}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, 16$; d) $x_k = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi+2k\pi}{2n}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$; e) $x_k = \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. **5.** a) $x = 0$; b) $x = 4n$, $n \in \mathbb{Z}$. **6.** a) $\begin{cases} z_1 = -i, \\ \omega_1 = -i; \end{cases}$ $\begin{cases} z_2 = i, \\ \omega_2 = i; \end{cases}$

b) $\begin{cases} z_1 = 1, \\ \omega_1 = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} z_2 = -1, \\ \omega_2 = 1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} z_1 = i, \\ \omega_1 = i; \end{cases}$ $\begin{cases} z_2 = -i, \\ \omega_2 = -i. \end{cases}$ **8.** a) $2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$; b) $\frac{1}{\cos\alpha}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$; c) $\varphi = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ аргумент не определён; $4k\pi < \varphi <$ $< (4k+2)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z^2 - z = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi+3\varphi}{2} + i\sin\frac{\pi+3\varphi}{2}\right)$; $(4k+2)\pi < \varphi < (4k+4)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow z^2 - z = -2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{3\pi+3\varphi}{2} + i\sin\frac{3\pi+3\varphi}{2}\right)$; **10.** $\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$. **11.** n, если p делится на n; 0, если p не делится на n. **12.** n. **13.** $-\frac{n}{2}$. **18.** $z = 12 + 16i$. **19.** a) полуплоскость $y \le 0$; b) отрезок, соединяющий точки $(0;0)$ и $(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$; c) полуплоскость $x > 1$; d) пустое множество; e) окружность радиуса 1 с центром в начале координат; f) вне окружности радиуса 10 с центром в точке $(1;0)$; g) внутри окружности радиуса 5 с центром в начале координат; h) внутри окружности радиуса 1 с центром в начале координат. **20.** a) пара прямых $u = \pm 1$, параллельных мнимой оси; b) вся плоскость за исключением полосы между параллельными прямыми $u = 1$ и $u = -1$. **21.** a) полукруг радиуса 4: $u^2 + v^2 = 16$, расположенный в верхней полуплоскости; b) область, ограниченная линиями $v = 0$, $u = 9 - \frac{v^2}{36}$, $u = \frac{v^2}{36} - 9$ при $0 \le v \le 18$, $-9 \le u \le 9$; u — действительная ось, v — мнимая ось; c) кольцо между концентрическими кругами с центрами в начале координат и радиусами 1 и 4. **22.** a) прямая — в прямую или окружность, окружность — в окружность или прямую; b) прямая — в прямую или окружность, окружность — в окружность или прямую. **23.** a) $W = \frac{z - z_0}{z + z_0}$, где $\operatorname{Re} z_0 > 0$; b) $W = \frac{z - z_0}{z + z_0}$, где $\operatorname{Re} z_0 < 0$. **27.** $z_4 = z_1 - z_2 + z_3$.
29. a) $2^n \cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{(n+2)x}{2}$; b) $2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{(n+2)x}{2}$; c) $2^n\sin^n\frac{x}{2}\cos\frac{n\pi - (n+2)x}{2}$; d) $2^n\sin^n\frac{x}{2}\sin\frac{(n+2)x - n\pi}{2}$; e) $\frac{3\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{4\sin\frac{x}{2}} + \frac{\cos\frac{3(n+1)x}{\sin}\frac{3nx}{2}}{4\sin\frac{3x}{2}}$; f) $\frac{3\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{4\sin\frac{x}{2}} - \frac{\sin\frac{3(n+1)x}{\sin}\frac{3nx}{2}}{4\sin\frac{3x}{2}}$; g) $\frac{n\sin(n-1)x - (n-1)\sin nx}{4\sin^2\frac{x}{2}}$; h) $\frac{n\cos(n-1)x - (n-1)\cos nx - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$; i) $\frac{p^{n+1}\sin(n-1)x - p^n\sin nx + p\sin x}{p^2 - 2p\cos x + 1}$; j) $\frac{p^{n+1}\cos(n-1)x - p^n\cos nx - p\cos x + 1}{p^2 - 2p\cos x + 1}$. **32.** Нет.
34. $(2\cos x)^{m-1} - C^1_{m-2}(2\cos x)^{m-3} + C^2_{m-3}(2\cos x)^{m-5} - \dots + (-10^p C^p_{m-p-1}(2\cos x)^{m-2p-1} + \dots$
35. $\frac{2(2 - \cos x)}{5 - 4\cos x}$. **37.** $\cos\varphi + i\sin\varphi$. **38.** $\frac{a\cos x - 1}{a^2 - 2a\cos x + 1}$. **40.** a) $2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$; b) $2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$; c) $\frac{2^n}{3^{\frac{n-1}{2}}}\sin\frac{n\pi}{6}$.
44. a) $\frac{e^x}{2}(x(\sin x - \cos x) + \cos x) + C$; b) $\frac{e^x}{2}(x^2(\sin x - \cos x) + 2x\cos x - (\sin x + \cos x)) + C$; c) $\frac{e^x}{2}(x(\sin x + \cos x) - \sin x) + C$; d) $\frac{e^x}{2}(x^2(\sin x + \cos x) + 2x\sin x + \sin x - \cos x) + C$.
45. a) $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x) + C$; b) $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x) + C$. **48.** a) при $n = 2k$: $\int\sin^{2k}x\,dx = \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}\left(\frac{\sin 2kx}{2k} - C^1_{2k}\cdot\frac{\sin(2k-2)x}{2k-2} + C^2_{2k}\cdot\frac{\sin(2k-4)x}{2k-4} - \dots\right) + C$; при $n = 2k+1$: $\int\sin^{2k+1}x\,dx = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\left(-\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} + C^1_{2k+1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{2k-1} + C^2_{2k+1}\cdot\frac{\cos(2k-3)x}{2k-3} + \dots\right) + C$; b) $\int\cos^n\,dx =$ $= \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{\sin nx}{n} + C^1_n\cdot\frac{\sin(n-2)x}{n-2} + C^2_n\cdot\frac{\sin(n-4)x}{n-4} + \dots\right) + C$. **49.** Подстановка $y = x - \frac{a_1}{n}$.
50. $x_1 = u_1 + v_1 - \frac{a}{3}$, $x_2 = -\frac{u_1 + v_1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) - \frac{a}{3}$, $x_3 = -\frac{u_1 + v_1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1) - \frac{a}{3}$, где $u_1 v_1 = \frac{a^2}{9} - \frac{b}{3}$ и $u^3 = -\left(\frac{a^3}{27} - \frac{ab}{6} + \frac{c}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{a^3}{27} - \frac{ab}{6} + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3} - \frac{a^2}{9}\right)^3}$. **52.** a) $x_1 = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$, $x_{2,3} = \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}}{2} \pm i\left(\frac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})}{2}\right)$; b) $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}$; c) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$. **59.** $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2 x - pS = 0$; для равностороннего треугольника. **60.** $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$. **61.** Например, $90°$, $120°$, $180°$. **62.** С помощью циркуля и линейки можно построить любой угол вида $3° \cdot n$, где n — натуральное число. **63.** $f(y) = 16y^5 - 20y^3 + 5y$; $y = 1$. **64.** С помощью циркуля и линейки могут быть построены только квадратные иррациональности. **65.** Не изменится.

§ 12. Заключение

Поле комплексных чисел обладает свойством, которым не обладает поле действительных и поле рациональных чисел, а именно, оно является алгебраически замкнутым, т. е. любой многочлен $f(z)$ степени $n \ge 1$ с комплексными коэффициентами имеет в поле комплексных чисел по меньшей мере один корень. Это утверждение носит название основной теоремы алгебры и было впервые доказано Гауссом в 1797 году. Сейчас известно много доказательств этой теоремы, опирающихся на различные идеи. В свое время эта теорема считалась краеугольным камнем всей алгебры. В настоящее время в связи с весьма интенсивным развитием таких разделов, как теория групп, теория колец и теория полей, эту теорему следует рассматривать только как основную теорему алгебры комплексных чисел.

На базе комплексных чисел в XIX в. возник важный и интенсивно развивающийся раздел математического анализа — теория функций комплексного переменного, имеющий широкое применение в различных разделах математики и физики.

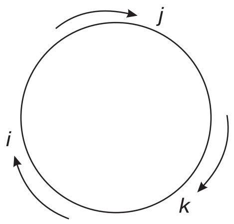


Рис. 6.

Однако были сделаны попытки далее расширить систему комплексных чисел. Возникло обобщение комплексных чисел — гиперкомплексные числа, имеющие вид $a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k + \dots + a_n l$, где i, j, k, ..., l — мнимые единицы.

Действия над гиперкомплексными числами определяются действиями над мнимыми единицами.

Из гиперкомплексных чисел выделяются кватернионы: $a + bi + cj + dk$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ и $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$.

Мы видим, что для кватернионов отсутствует коммутативность умножения. Правило умножения минных единиц i, j, k имеет интересную геометрическую иллюстрацию (рис. 6).

В системе кватернионов возможно деление. Вообще же, гиперкомплексные системы, в которых возможно деление, составляют большую редкость. Так, из чисел вида $a + bi + cj$ построить систему с делением невозможно.

Кроме кватернионов рассматриваются так называемые октавы Кэли — гиперкомплексные числа вида $a_0 + \sum_{k=1}^{7} a_k i_k$.

С гиперкомплексными числами связано решение интересной задачи, окончательно решённой только в конце XIX века:

> Для каких натуральных n произведение суммы n квадратов на сумму n квадратов есть снова сумма n квадратов?

Очевидно, что $a_1^2 \cdot b_1^2 = (a_1 b_1)^2$ $(n = 1)$.
Из свойства модулей комплексных чисел $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 z_2|$ следует, что

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 \qquad (n = 2).$$

Позже были найдены аналогичные тождества для $n = 4$ и $n = 8$. Оказалось, что других n, кроме 1, 2, 4, 8, удовлетворяющих этой задаче, не существует.

На примере кватернионов видно, что дальнейшее расширение системы комплексных чисел с сохранением всех её свойств невозможно.

Наряду с комплексными числами $a + bi$ $(i^2 = -1)$ существуют двойные числа: $a + bE$ $(E^2 = 1)$ и дуальные числа: $a + b\Omega$ $(\Omega^2 = 0)$.

Дуальные и двойные числа имеют разнообразные геометрические применения, позволяют доказывать многочисленные теоремы, относящиеся к точкам, прямым и окружностям. Интересно, что обыкновенные комплексные числа можно интерпретировать на плоскости Лобачевского. Заметим, не уточняя этого положения, что класс всех комплексных чисел в некотором отношении является уже максимальным. Невозможно расширить его дальше без существенных потерь в тех свойствах, набор которых делает каждый из рассматриваемых числовых классов (натуральные, целые, рациональные, вещественные, комплексные числа) столь ценным и совершенным орудием.

Дроздов Виктор Борисович,
г. Рязань.

Учебники не при чём?

И. П. Костенко

Комментарий редакции. Обращаем внимание читателей на то, что в отклике С. Г. Кальнея (МО, 2007, № 2 (42), с.58-59) на статью И. П. Костенко (МО, 2006, № 1 (36), с.10-37) имеются фактические неточности. В частности, курсивом высказывается предположение, что истинная цель статьи И. П. Костенко "Коренная проблема втузовского учебника математики" "в том, что мы все должны осознать, что единственный, кто может в настоящее время написать не ВТУ-учебник, спасти математическое образование, - это г-н Костенко И.П." Приводится следующее обоснование этого предположения: "Но что предлагает Костенко И.П.? Он даже не предлагает переиздать неоднократно отмечаемые им как пример (образец) не ВТУ-учебника замечательные книги Лузина Н.Н. ... , а указывает лишь один достойный пример "анти-ВТУ" учебника: книгу "Введение в вероятностное прогнозирование", изданную издательством РХД в 2004 году. Автор этой книги, как нетрудно предположить, Костенко И.П." В действительности, в статье И. П. Костенко (с. 35, 2-й абзац) сказано относительно Лузина следующее: "Таковы лучшие старые книги — Лузина, Власова, Киселёва. Их следовало бы переиздать (и широко распространить среди преподавателей) для воссоздания отечественной педагогической культуры". Далее, в тексте статьи И. П. Костенко не существует ссылки автора на упомянутую его книгу, а есть сноска редакции журнала (с. 35) следующего содержания: "Как пример (удачный или нет — покажет время) учебной анти-ВТУ книги, ориентированной на понимание, укажем пособие [39], вышедшее недавно в издательстве РХД (Журнальный вариант см. "Математическое образование", №№ 21-29) — *Прим. ред.*". Кроме того, к вопросу: "Но что предлагает Костенко И.П?" можно напомнить, например, такие предложения: "математикам — признайте ложность принципа ВТУ"; "управленцам — введите в процедуру отбора учебных книг механизм оценки их студентами". Редакция выражает сожаление, что не достаточно внимательно отнеслась к тексту С. Г. Кальнея и приносит свои извинения И. П. Костенко за пропущенные фактические искажения.

В номере 2 за 2007 год журнала "Математическое образование" (стр. 58-59) опубликован отклик московского доцента Кальнея С.Г. на мою статью "Коренная проблема втузовского учебника математики", помещённую в этом же журнале в номере 1 за 2006 год. В моей статье проводится исторический анализ (начиная с 30-х годов XX в.) методов и результатов внедрения в наше математическое образование и в учебники антидидактического принципа "высокого теоретического уровня" обучения (принцип ВТУ). И делается вывод: "Принцип ВТУ — главная, коренная, исходная причина катастрофического падения качества образования (и школьного, и вузовского). Он изгнал из учебников педагогику и методику, изгнал Ученика. Он ответственен за деградацию мышления, а значит, и личности учащихся. Именно он привёл учащихся к массовому отвращению от учёбы. Он породил государственную ложь (так называемую Прокофьевскую "процентоманию"), которая заблокировала все возможности исправления ситуации." Вывод этот не есть личное "мнение", а именно вывод из большого количества взаимосвязанных фактов, приведённых в статье.

С. Г. Кальней не согласен с таким выводом. Он приводит другие возможные причины, падения качества образования, которые звучат "в печати, в дискуссиях на конференциях", и среди них отдаёт предпочтение недостатку финансирования. Цитирую: "часто выделяется недостаток финансирования, как основополагающая причина, что, по-видимому, справедливо". Уточняю, — причина эта действует последние полтора десятилетия, а качество падает вот уже более сорока лет, начиная с реформы-60. Далее С. Г. Кальней предлагает проанализировать ещё две причины: всеобщее высшее образование и падение культуры чтения. По первой причине С. Г. Кальней высказывает мнение, что вряд ли нужно уменьшать приём в вузы, “когда различные исследования показывают полезность для развития общества увеличения срока обучения молодёжи”. Получается, что увеличение срока массового охвата молодёжи системой высшего образования полезнее для нашего общества, нежели повышение качества обучения и качества знаний. По второй причине С. Г. Кальней утверждает: “По-видимому, в связи с развитием информационных технологий, Интернета, всеобщей компьютеризацией уже не удастся воспитывать у школьников прежнюю культуру работы с книгой.” И заключает: “Поэтому, по-моему мнению, одной из основных задач средней и высшей школы является разработка методики преподавания различных дисциплин с использованием информационных технологий, компьютера.” И опять С. Г. Кальней попадает в противоречие самому себе. Чуть выше он констатирует, что “при применении информационных компьютерных технологий учащийся часто пытается привлечь всё больше источников информации, не выполняя элементарного анализа найденного.” Т.е. эти самые “технологии” эффективно формируют и закрепляют у молодёжи неспособность анализировать информацию. И после этого предлагает разрабатывать эти технологии для обучения, т. е. для дальнейшего отупления молодёжи.

Полезно напомнить, что “падение культуры чтения” явилось непосредственным результатом ВТУ-реформы 60-х гг. В моей статье приведены экспериментальные данные 70-х годов, когда ещё не было компьютеров: “90,3% учащихся не имеют навыков смыслового чтения... Среди причин — “непривлекательность” учебников, неприученность студентов систематически работать с книгой”.

На этом можно было бы закончить ответ С. Г. Кальнею. Однако, его отклик и его предложения гораздо более знаменательны, нежели это может показаться с первого взгляда. Я ответил на ту часть отклика, которую он сам обозначил, как “главную”. К “не главной” он отнёс первые два абзаца. В этих первых абзацах С. Г. Кальней пытается опорочить автора статьи, приписывая ему скрытые эгоистические мотивы. Причём, в обоснование своих предположений он с риском использует прямую и легко доказуемую ложь, приписывая автору утверждения, которых нет в его тексте (см. редакционный комментарий к отклику С. Г. Кальней). Между прочим, сразу возникают два объясняющих предположения. Подобное может сделать или крайне “невнимательный” человек, или тот, кто не читал статьи, а подписал отклик, составленный кем-то другим. Я не стану отвечать на инсинуации, а поставлю вопрос: зачем понадобилось С. Г. Кальнею порочить автора статьи? Обдумывая этот вопрос, мы придём к очень важным выводам. Чтобы понять, — зачем?, нужно прочесть статью “Коренная проблема втузовского учебника математики”. В ней детально и фактологически прослежен длительный процесс внедрения в наше образование принципа ВТУ. Этот процесс настойчиво осуществляли конкретные люди. Несмотря на его очевидную и широко признаваемую порочность (акад. В. И. Арнольд: “выхолощенное и схоластическое преподавание математики на всех уровнях сделалось, к несчастью, системой”), принцип ВТУ направляет наше образование по сей день, — через учебники, грифованные и рекомендованные. Эту ситуацию по сей день поддерживают и закрепляют конкретные люди. А теперь ответьте сами, как могут прореагировать на статью эти люди? Но самое важное, всё-таки, не это, — не их реакция на какую-то статью, проявленная в отклике, подписанным С. Г. Кальнеем. Как должны действовать эти люди, чтобы не допустить признания их ошибок (ошибок-ли?) и исправления ситуации? Для ответа на этот вопрос надо ещё раз просмотреть отклик. В первом его абзаце смысл моей статьи подаётся так: “опус г-на Костенко И.П. ... , в котором он “разделывает под орех” все современные учебники математики для вузов... Критику подобного рода (?) можно, очевидно, просто проигнорировать.” Чуть далее: “многое из критики Костенко И.П. ... можно признать справедливым”. Но ведь к учебникам все “имеют замечания (?)”.

Обращаю внимание на главное — на подмену смысла. В моей статье нет “критики учебников”. В ней анализируется “коренная проблема” — идеология, под влиянием которой составляются современные учебники. И доказывается вредоносность этой ВТУ-идеологии. Зачем понадобилась подмена? Очевидно, чтобы “проигнорировать” коренную проблему. И после этого сделать другую подмену — перевести внимание на “более глубокие и разнообразные” “причины падения уровня математического образования” (недостаток финансирования, массовость, культура чтения и пр.). Использован классический приём перевода на "ложные цели". В самом конце отклика нам даётся установка считать главной задачей "разработку методики преподавания различных дисциплин с использованием информационных технологий, компьютера". Вот она — главная "ложная цель"! И эта цель, эта компьютерная идеология не просто звучит "в печати, в дискуссиях на конференциях", она провозглашается на самом высшем уровне, она становится новой образовательной политикой и жёстко внедряется с использованием "административного ресурса". Её внедряют конкретные люди: защищаются диссертации, создаются лаборатории, формируется клан, лично эгоистически заинтересованный в процветании этой идеологии, а вовсе не в поднятии качества образования. А учебники? — "Не там ищете. Ко всем, ведь, можно сделать "замечания". Не надо обращать внимание на пустяки. Тем более, что всё равно ничего не изменить, — ведь, сегодня новое, компьютерное время". А в это "новое" время качество образования продолжает падать, падать...

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167. E-mail: matob@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2008 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2008 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents