ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год десятый

№4 (39)

Октябрь-декабрь 2006 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 4 (39), 2006 г.

Москва

Математическое образование
Журнал Фонда математического образования и просвещения
№ 4 (39), октябрь – декабрь 2006 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2006 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 29.12.2006 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 4,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

К 85-летию Академика П. М. Эрдниева. Творческий путь и научно-методические достижения

15 октября 2006 года исполнилось 85 лет Академику РАО, профессору, доктору педагогических наук Пюрве Мучкаевичу Эрдниеву — создателю системы укрупнения дидактических единиц (УДЕ). Система изложена в многочисленных публикациях, хорошим введением может служить книга для учителя "Обучение математике в школе. Укрупнение дидактических единиц" (авторы П. М. Эрдниев, Б. П. Эрдниев), вышедшая в московском издательстве "Столетие" в 1996 г. Мы публикуем краткую творческую биографию П. М. Эрдниева, а также, с некоторыми сокращениями, предисловие к указанной книге, из которого читатель может получить первое представление об идее укрупнения дидактических единиц.

Пюрвя Мучкаевич Эрдниев — заведующий кафедрой алгебры, геометрии и методики математики Калмыцкого государственного университета, действительный член АПН СССР, профессор. Родился 15 октября 1921 г. Вся его жизнь непосредственно связана со школой. Еще юношей в конце 30-х гг. П. М. Эрдниев стал учителем начальной школы, и, видимо, уже тогда определился круг его педагогических интересов к постановке преподавания всего комплекса учебных дисциплин, к развитию личности ребенка, к поиску путей пробуждения интереса к учебе, к развитию творческого мышления начиная уже с 1 класса.

Но путь к этим идеям, как и вообще к научному творчеству, оказался непростым и негладким. С первых дней Великой Отечественной войны и почти до конца ее он был на фронте, участвовал в тяжелых боях на Украине летом 1941 г., в наступлении в Восточной Пруссии в 1945 г. Дважды был тяжело ранен.

Мужественный солдат разделил горестную судьбу своего народа. После демобилизации вместо родной Калмыкии П. М. Эрдниев вынужден был уехать на Алтай. Но, несмотря на невзгоды, он с удивительным упорством и настойчивостью взялся за учебу, работая учителем математики и физики в сельской школе. И отметим сразу, та сила воли, твердость и непреклонность, с которыми он преодолевал естественные и искусственные трудности, остались характернейшими чертами и сегодняшнего Эрдниева — свои идеи, методы, планы он проводит в жизнь с той же верой в свою правоту, вызывая восхищение у сторонников и уважение у оппонентов, благо тех и других у него немало.

Восстановление справедливости по отношению к репрессированному народу Калмыкии позволило П. М. Эрдниеву возвратиться на родину.

Работа в университете заставила П. М. Эрдниева уделить серьезное внимание проблеме, хорошо знакомой работникам высшей педагогической школы. Кого мы готовим? Учителей, которые могут преподавать математику, или математиков, которые могут работать учителями? Конечно, этот вопрос схоластичен. Мы должны готовить хороших математиков, которые умеют хорошо преподавать, но жизнь все время бросает нас то в одну, то в другую крайность. Обращение университета к школе не только на словах, но и на деле, на уровне учебных планов, программ, специализации по методике преподавания и т.п. — одна из многочисленных сфер творческой и общественной деятельности П. М. Эрдниева. Но главная тема и основная цель творчества ученого — разработка, пропаганда и введение в практику идей, связанных с так называемым укрупнением дидактических единиц. И первые шаги в этом направлении были сделаны сельским учителем Эрдниевым на Алтае, когда он критически осмысливал свой еще небольшой опыт преподавания. В 1953 г. в журнале “Математика в школе” были опубликованы две его статьи. Одна из них была посвящена организации проверки решения математических упражнений, другая — некоторым сторонам преподавания геометрии. Это были статьи учителя-практика, но уже тогда автор подчеркивал своеобразную двусторонность некоторых моментов обучения: решение — проверка, прямая теорема — обратная и т.п.

С того же времени П. М. Эрдниев выходит на одно из стратегических направлений дидактики — разрешение противоречия между объемом подлежащего освоению знания и объемом индивидуальной памяти (проблема “узости сознания”).

Традиционное обучение нередко “разводит” во времени прямые и обратные операции, соответствующие понятия и т.п. (сложение – вычитание, умножение – деление, показательная функция – логарифмическая функция, дифференцирование – интегрирование). П. М. Эрдниев сводит подобные операции, понятия, отношения в пары, беря каждую как проявление одной и той же дидактической единицы. Такой прием как раз и приносит желаемый эффект повышения информационной емкости знания, поскольку при образовании, например, пары “умножение – деление” происходит не просто суммирование количества информации, которое несет каждая из составляющих пару операций, а именно приращение информационного содержания.

Для стиля работы П. М. Эрдниев характерны настойчивость и энергия, стремление довести результаты исследований до школьного учителя, до внедрения в практику современной школы, а сами исследования — до частных советов и указаний, в которых автор нередко проявляет настоящую изобретательность.

Идея укрупнения, естественно, заинтересовала не только математиков, но и физиков, химиков, биологов, лингвистов, представителей ряда других наук. Эта идея явилась основой докторской диссертации П. М. Эрдниева “Проблемы интенсификации обучения математике” (1973), многочисленных статей и книг, опубликованных в нашей стране и за рубежом (Болгария, Венгрия, Германия, Монголия, Польша, Румыния, США, Франция, Япония).

Л. Ф. Пичурин, профессор Томского Педагогического института; А. К. Сухотин, доктор филологических наук, профессор, действительный член АПН СССР; Н. И. Шкиль, ректор Киевского педагогического института, доктор физико-математических наук, иностранный член РАО; Р. С. Черкасов, главный редактор журнала “Математика в школе”.

Предисловие к книге “Обучение математике в школе. Укрупнение дидактических единиц”

> *Я предпочитаю лучше заслужить упрек в дилетантском отношении к соседним научным областям, чем вовсе от них отмежевываться, так как я в течение всей своей научной деятельности был глубоко убежден, что именно работа в промежуточных областях может обогатить нас наиболее плодотворными общими идеями*
>
> Н. К. Кольцов

Все согласны с тем, что нет “царского пути в математику”. Много труда и терпения, настойчивости и внимания требуется от учителя и школьника, чтобы последний смог освоить программный минимум знаний по этому предмету.

Мы привыкли сейчас к открытиям, одно поразительнее другого: изобретены лазеры и голография, расшифрован код наследственности, синтезирован ген, научились выращивать копии животных...

Недалеко, видимо, то время, когда и в психологии и педагогике будут найдены такие средства обучения, эффективность которых трудно сейчас представить.

Н. Е. Жуковский имел основания считать, что методы обучения математике можно сделать столь совершенными, что ее будет понимать “всякий желающий из публики”.

Добиться того, чтобы человек за меньшее, чем прежде, время овладел большим объемом основательных и действенных знаний, — такова одна из главных забот современной педагогики.

Данная книга посвящена итогам исследования, в основу которого положена идея **укрупнения дидактических единиц**, и перспективам внедрения этой методической системы в широкую школьную практику.

Становление любой педагогической идеи (в частности, и данной) имеет две стороны: практическую и теоретическую.

Нам удалось осуществить “первым заходом” в условиях массовой школы с положительным в целом исходом проверку этой концепции, организовав в 1960–1994 гг. экспериментальное обучение по своим пробным учебникам от I до VI класса включительно.

Реализация дидактической идеи в “главной книге школы” — учебнике — представляется венцом педагогического поиска: по нему есть что испытывать и улучшать!

Учебник может быть проверен на деле каждым учителем, который в конечном счете является “верховным судьей” методической идее.

Испытание учебников — дело долгое и нелегкое, во многом противоречивое. Как известно, при сортоиспытании растений не всегда оправдываются радужные ожидания селекционеров.

Нередко структуру учебника математики определяют лишь формально-логическими связями самой науки математики, вне учета закономерностей усвоения математических знаний.

Между тем, средства формальной логики ограничены, они упорядочивают отвлеченные результаты мышления, но никак не сам процесс мышления, к этим результатам приводящий. Формально-логические соображения не только не являются единственными, но и не являются главными при решении вопросов методики[1]: дело в том, что категории формальной логики не учитывают фактора времени, учет которого является важнейшим элементом для совершенствования процесса обучения.

В настоящее время важнейшие открытия делаются, как правило, на стыках наук.

Понятно отсюда, почему так важно методисту и дидакту смотреть на свои сочинения с позиций, “отдаленных” от явления обучения, т.е. с учетом современных представлений о мышлении в философии, психологии, физиологии, логике и информатике.

Как при изобретении новых механизмов, так и при конструировании новых методов обучения исходным толчком к удачным находкам и обобщениям могут стать соображения, связанные с любой из указанных наук. Это человек для удобства создал разные науки, а “природа не знает деления на науки”[2].

Укрупненная дидактическая единица — это клеточка учебного процесса, состоящая из логически различных элементов, обладающих в то же время информационной общностью. Укрупненная дидактическая единица обладает качествами системности и целостности, устойчивостью во времени и быстрым проявлением в памяти.

Понятие укрупнения единицы усвоения достаточно общо, оно вбирает следующие взаимосвязанные конкретные подходы к обучению:

---

[1]Трудно не согласиться с тем, что “всякие попытки педагогической оценки математического материала, исходя из самой математики, заведомо обречены на провал и способны только дискредитировать методику” (Потоцкий М.В. Преподавание высшей математики в педагогическом институте. М., Просвещение, 1975, с. 25).

В последние годы были изданы различные варианты пробных учебников математики для средней школы. Однако авторы таких сочинений предпочитают издать учебник, но не решаются теоретически обосновать его новизну, разъяснить то, **в чем заключаются дидактические преимущества предлагаемого варианта по сравнению с ранее изданными**. Так, во всех известных нам пособиях по алгебре для восьмилетней школы излагают умножение многочленов и разложение их на множители в двух отдельных разделах, в то время как мы уже в 1975 г. описали более эффективную систему совместного (на одних и тех же уроках!) изучения этих тем, аналогично тому, как совместное изучение сложения и вычитания, умножения и деления стало теперь нормой для I–V классов. (А ведь взаимно обратные операции излагались не так давно обязательно в различных главах учебника).

Ныне стало необходимостью критическое обсуждение в печати материалов испытания уже изданных вариантов учебников, памятуя о том, что и отрицательный опыт тоже ценен для принятия правильных решений, если только выявлены причины неудачи той или иной структуры учебника.

[2]Семенов Н.Н. Где истина. — Неделя, 1974, №19.

1) совместное и одновременное изучение взаимосвязанных действий, операций, функций, теорем и т.п. (в частности, взаимно обратных);

2) обеспечение единства процессов составления и решения задач (уравнений, неравенств и т.п.);

3) рассмотрение во взаимопереходах определенных и неопределенных заданий (в частности, деформированных упражнений);

4) обращение структуры упражнения, что создает условия для противопоставления исходного и преобразованного заданий;

5) выявление сложной природы математического знания, достижение системности знаний;

6) реализация принципа дополнительности в системе упражнений (понимание достигается в результате межкодовых переходов между образным и логическим в мышлении, между его сознательным и подсознательным компонентами).

Почему совокупное применение указанных методов действительно оказывается более результативным по сравнению с "измельчением без меры" учебного материала? Потому что при этом создаются условия для проявления фундаментальных закономерностей мышления (вкупе оптимизирующие познавательный процесс), а именно:

1) закона **единства и борьбы** противоположностей;

2) перемежающегося **противопоставления** контрастных раздражителей (И. П. Павлов);

3) принципа **обратных связей**, системности и цикличности процессов (П. К. Анохин), обратимости операций (Ж. Пиаже);

4) перехода к **сверхсимволам**, т.е. оперирования более длинными последовательностями символов (кибернетический аспект).

Общность выводов теоретического анализа позволяет предвидеть и выгоды переноса указанной методической системы с младших классов на старшие, с математики на другие учебные предметы, от школьной практики в вузовскую дидактику.

Единую психологическую суть указанных выше конкретных путей укрупнения единицы усвоения мы видим в следующем: в ткани развивающихся системных знаний предыдущие и последующие во времени звенья должны иметь, как правило, больше общих носителей информации, начиная с возможно более низшего кода.

Фактором, обеспечивающим высокое качество укрупненного знания, может выступить общий графическая образ, общность символов для группы формул, наличие одних и тех же слов или словосочетаний в сравниваемых высказываниях, в цепи доказательств и т.п.

Поясним сказанное на простейшем (информационном) уровне.

Две или несколько взаимосвязанных мыслей обретают внутреннее единство, а тем самым и импульс к дальнейшему развитию, если они:

а) составлены только (или почти только!) из одних и тех же букв, знаков, цифр, как например, в следующих парах равенств: $2+3=5$ и $5-3=2$; $\left(x^2+C\right)'=2x$ и $\int 2xdx=x^2+C$;

б) содержат возможно больше общих слов, как например в паре правил: "От перестановки $\frac{\textit{слагаемых}}{\textit{сомножетелей}}$ $\frac{\textit{сумма}}{\textit{произведение}}$ не изменяется";

в) содержат общие понятия или суждения, различающиеся разве что порядком включения их в цепь силлогизмов спаренного доказательства, например, на рисунке 1 показано доказательство прямой теоремы (двойными стрелками).

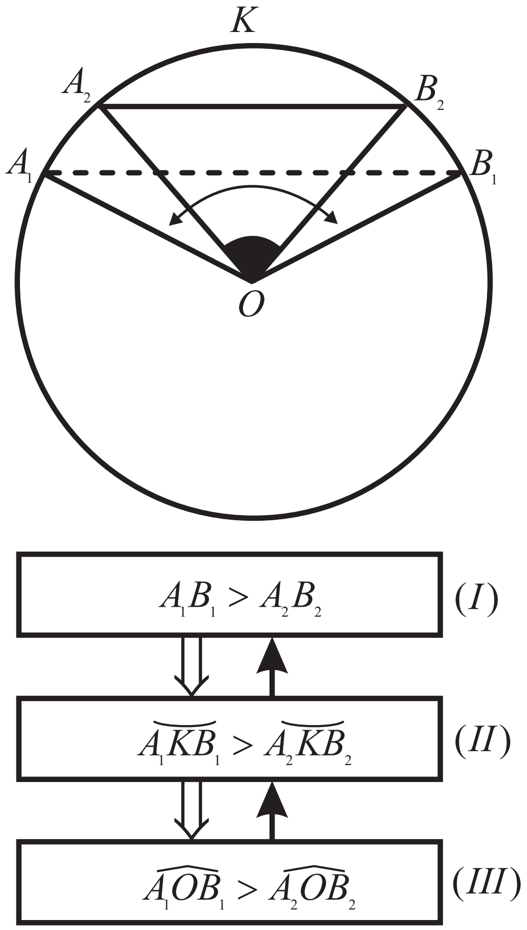

Рис. 1

1-я посылка. Бо́льшая хорда стягивает бо́льшую дугу.

2-я посылка. Бо́льшая дуга соответствует бо́льшему центральному углу.

Заключение. Бо́льшая хорда соответствует бо́льшему центральному углу.

Одинарные стрелки противоположного направления характеризуют доказательство обратной теоремы.

Опыт показывает: если на освоение доказательства прямой теоремы ушло, скажем, 10 единиц времени, то на освоение обратной теоремы, изучаемой совместно с ней, будет истрачено не более 2—3 единиц времени. Почему это происходит?

Согласно современным представлениям физиологов и психологов (П. К. Анохин, А. Н. Леонтьев), центральным явлением психической жизни человека выступает образование функциональных систем, т.е. ансамблей нейронов, “специализирующихся” на решении сходных в чем-либо познавательных задач.

Функциональные системы обретают способность непосредственного схватывания пространственных, количественных и логических отношений.

При существующей практике обучения математике, в которой преобладают аналитические методы, функциональные системы для укрупненного, целостного овладения знаниями вовсе не возникают или возникают с большим трудом, с запозданием.

В развитие идеи укрупнения единиц усвоения сотрудники кафедры алгебры, геометрии и методики математики Калмыцкого университета в последнее время успешно применяли в обучении найденные ими новые формы упражнений, получившие названия “матричные схемы”, граф-схемы доказательств, навеянные представлениями об этажной переработке информации и визуальном мышлении[3].

[3]Эрдниев Б.П. Упражнения с матрицами при изучении функций. — В сборнике “Активизация обучения математике в сельской школе.” М.: Просвещение, 1975.

Переработка информации мозгом человека осуществляется параллельно на низших и высших кодах (на кодах знаков, звуков, слов, фраз и смысла), т.е. на подсознательном и сознательном уровнях одновременно.

В данной связи интересны последние исследования интеллекта животных.

"Самый удивительный факт, с которым мы сталкиваемся, — пишет проф. Крушинский, — это способность животных безо всякого предварительного обучения, уже при первом предъявлении им задачи, в структуре которой лежит определенная логическая связь, решать эту задачу с помощью своего элементарного разума"[4].

Мысли, получившие словесную реализацию и логическую форму, — это как бы лишь видимая, надводная часть айсберга. Путь к основательным знаниям лежит через усиление первосигнальных компонентов знания, ближайших проводников действительности.

Человеческий мозг, по-видимому, унаследовал некоторые механизмы симультанного мышления, ускоренной переработки информации, которые мы называем подсознательными, от нервных систем предшественников на эволюционной лестнице органического мира.

При укрупнении дидактических единиц как раз используются эти скрытые резервы мышления, существенно повышающие результативность процесса обучения в целом.

Основные методические положения настоящей книги создавались и проверялись в ходе многолетних исследований (1960—1984).

Экспериментальное обучение по предлагаемой методике проводилось многими учителями в школах г. Ставрополя (1959—1963), в школах Калмыцкой АССР (1964—1978), студентами старших курсов Ставропольского пединститута (1957—1963) и Калмыцкого университета (1964—1984), а также другими учителями нашей страны; со многими из них авторы имели возможность обсуждать лично результаты практического внедрения отдельных положений излагаемой системы обучения.

Круг вопросов, связанных с содержанием книги, обсуждался в последние годы в печати, на научных конференциях[5].

Значительную помощь в разработке темы книги оказали добровольные корреспонденты, учителя-активисты. В похвальном стремлении самостоятельно разобраться в ценности тех или иных рекомендаций они перепроверяли наши выводы в весьма разнообразных условиях городских и сельских школ[6].

Многолетние наблюдения по внедрению в школу описанной в книге методики позволяют утверждать следующее: многое из того, что при первом знакомстве "противоречит привычным взглядам учителя", на деле оказывается вполне осуществимым и эффективным.

Авторы надеются, что данная книга будет содействовать детальной разработке системы обучения посредством укрупнения дидактических единиц (УДЕ) усилиями широкого круга педагогов и психологов и поможет последовательному внедрению этой системы в школьную практику. Практика экспериментальной работы с каждым годом расширяет предполагавшиеся нами ранее "границы" приложимости идеи укрупнения.

Надо особо отметить важность учета фактора времени в психолого-дидактических исследованиях вообще.

Выгода от раннего внедрения эффективного метода обучения подчиняется как бы "закону сложных процентов": алгоритм укрупнения дидактической единицы, обладая силой общности, тем больше облегчает усвоение знаний школьникам, чем раньше учитель возьмет его на вооружение.

Итоги и перспективы нашего исследования можно выразить кратко так: они являются подступами к решению глобальной задачи построения теории учебного предмета математики и созданию цикла учебников, реализующих на деле новую закономерность экономного и высококачественного обучения посредством укрупнения учебной информации.

---

[4]Крушинский Л.В. Возможный механизм рассудка. — Природа, 1974, №5, с. 24.

[5]В Элисте проведены три научно-практические конференции по проблеме укрупнения единиц усвоения (1967, 1976, 1982).

[6]Отметим, что отдельные наши работы по данной теме были опубликованы в ГДР, Франции, Венгрии, Румынии, Польше, Болгарии, Монголии, США, Англии.

Система Шаталова: взгляд из современности

С. Н. Виноградов

В двух заметках, посвященных системе Василия Федоровича Шаталова, автор анализирует влияние передовой системы преподавания на дальнейший жизненный путь ученика, а также рассматривает некоторые теоретические положения, лежащие в основе системы.

Учитель и карьера учеников

Какова роль школьного учителя в карьере ученика? Есть ли шкала, которой можно замерить это? Писатели и журналисты ведут поиск "с конца". Рассказывая о знаменитых людях, находят истоки — первую учительницу, тренера и т.п. Будущие знаменитости и их родители ищут "с начала", так как хотят учиться у Мастера. Ушлые менеджеры, чиновники тоже в поиске — надо выстраивать "рейтинги" и распределять премии. Жизнь кипит, но наука пока не располагает такой шкалой.

Причин тому много, как объективных, так и субъективных. Сложно формализовать и "измерить" процесс обучения, учесть массу переменных величин, получить надежную статистику и др. Учителю бывает трудно признавать свою вину при неудовлетворительных результатах учебного процесса (вроде есть у него и отличники, а в двойках сами виноваты). В такой воде хорошо чиновнику: только успевай осваивать деньги на реформы да рапортуй об успехах.

Проблема оценки эффективности труда педагога трудная, но не безнадежная. Представляется перспективным исследование практики педагогов, чьи результаты проверены, признаны, воспроизведены. Здесь есть и высокие достижения, и отточенная методика, и обширная статистика. Беда в том, что методики В. Шаталова, С. Лысенковой, Е. Ильина и других новаторов почему-то забываются. Возможно, поэтому "новые велосипеды" в образовании и ездят хуже, и стоят дороже.

Обратимся к системе Виктора Федоровича Шаталова. Как это принято, послушаем экспертов, эксплуатационников, посмотрим результаты, статистику отказов, тиражи и др.

Итак, некоторые мнения. "Есть специалисты, глубоко знающие западную педагогику. Могут ли они назвать какую-нибудь систему хоть отдаленно сравнимую по идеям и результатам с системой В. Шаталова?" С. Соловейчик, педагог, писатель, журналист.

"Он делает то, чего никто не может". Б. Никитин, воспитатель детей-вундеркиндов.

"Методика Шаталова обеспечивает отличную подготовку ребят по всем предметам средней школы". Л. Москалина, директор школы, США, Чикаго.

Некоторые результаты. "В 1970 г.по приказу тогдашнего Министерства просвещения УССР в средней школе №13 Донецка начал работать по экспериментальной программе 8 класс. За все предшествующие годы в этом классе никогда не было ни одного отличника. Только девять ребят закончили 7-ой класс без троек, и, кроме того, за весь учебный год ни одному из учащихся ни по алгебре, ни по геометрии не было выставлено ни одной отличной оценки.

Весной 1971 г. 16 учеников этого класса закончили восьмилетку только на четверки и пятерки. Отличников еще не было.

К концу 9 класса было завершено изучение всей программы по математике и физике за 10 класс. Две комиссии из Москвы и Киева провели итоговые экзамены за курс средней школы по алгебре, тригонометрии, геометрии и физике. По каждому из этих учебных предметов девятиклассники получили 22 пятерки, 8 четверок, и только 3 раза были поставлены тройки.

Через год 24 ученика имели в аттестатах об окончании средней школы только четверки и пятерки по всем предметам, а пятеро из них получили аттестаты без единой четверки. Три ученика закончили школу с золотыми медалями. А по математике, физике, астрономии и электротехнике 28 учеников получили грамоты за отличные успехи. И все это в обстановке непрерывного контроля, недоверия и откровенной обструкции педагогической науки.

Все 33 человека стали студентами высших учебных заведений, и 17 из них все годы обучения получали повышенные стипендии. Эту традицию продолжили все без исключения выпускники с 1969 г. по 1990 г. В дальнейшем, помимо десятков мастеров спорта, из них вышли 64 кандидата наук, 12 докторов (физики, философии, медицины, педагогики).

В настоящее время уже за 5 дней он дает годовой курс алгебры или геометрии, тригонометрии или физики. Уроки записаны на видео и могут быть подвергнуты любой экспертизе от лингвистов до министров. Выдающиеся результаты достигнуты благодаря его знаменитым "опорным сигналам", позволяющим надежно усваивать большой объем информации, особой методике повторения и оценивания знаний, оригинальной системе решения задач и эффективному инспектированию учебного процесса. Многолетняя апробация новых методических идей с успехом прошла не только в школах, но и в вузах, военных училищах, академиях.

До 1992 г. Донецкая лаборатория интенсивных методов обучения Академии педагогических наук СССР НИИ содержания и методов обучения, которой руководил В. Шаталов, финансировалась из Москвы, но в силу известных обстоятельств финансирование эксперимента было прекращено.

Тиражи. В. Ф. Шаталов — автор 36 книг, издавался в 17 странах общим тиражом более миллиона экземпляров. (Интересно, у многих ли школьных реформаторов такой список?)

Титулы, награды. Народный учитель СССР, заслуженный учитель Украины, Почетный президент итальянской литературно-исторической ассоциации Данте Алигьери, кавалер ордена Николая Чудотворца за приумножение добра на земле, лауреат нескольких международных премий и т.д.

Казалось бы, хватит статистики. Ее действительно много. Виктор Федорович бережно хранит все школьные ведомости и тетради с опорными конспектами учеников (!!!), переписывается со многими учениками, ежегодно выпускники собираются на его дне рождения. И все-таки приведем некоторые высказывания.

Тарханян Рузанна, Москва. Училась 4 дня в марте 2004 г., дипломант двух конкурсов молодых исполнителей в Праге в 2005 г. "Я ничего не понимала. Меня уже не вызывали к доске. Уроки геометрии произвели огромные перемены в жизни. Учительница была потрясена моими знаниями. После каникул на контрольной и самостоятельной получила 5 и 5".

Винников Л. Я., доктор наук, институт физики твердого тела РАН (Черноголовка), работал в крупнейших мировых научных центрах. "Я учился у Шаталова в 1956-57 учебном году в 6-ой школе Донецка. Роль Виктора Федоровича считаю в своей карьере определяющей. Школьный курс физики помню лучше, чем институтский".

Дальская С. Н., горный инженер-технолог. Училась у Шаталова в 68-69 учебном году. Работала преподавателем, строила завод в Пакистане, с 1987 года проживает в Москве. Имеет свой бизнес. Ее фирма участвовала в строительстве Храма Христа Спасителя. В 2005 году закончила Православный Свято-Тихоновский Богословский Институт. "Метод Шаталова развивает чувство уверенности в себе, четкость и аккуратность мышления, смекалку и предприимчивость. Его ученики могут найти себя в любой области. По Шаталову я изучала и гуманитарные курсы, сама преподавала. Мой брат учился у Виктора Федоровича только год, а 10-ый класс заканчивал в Киеве. Там на всех контрольных работах учителя говорили: "Рыбников, выходи из класса". Дело в том, что он сразу успевал решать все варианты и, конечно, помогал товарищам... Как только мы узнали о занятиях Шаталова в Москве, привели на учебу своих детей и родственников".

Когда ученые все-таки создадут весы, на которых будут взвешивать роль учителя в карьере учеников, можно будет оценить значение методики Шаталова и его личности. А пока на предложение поддержать экспериментальную работу В. Ф. Шаталова чиновник, планирующий государственную политику в образовании, отвечает: "На основании запроса в Российскую академию образования от 10 июня 2005 г. №01-114/5/5 высказывается точка зрения о невозможности создания подобного научного подразделения". Вероятно, в этой академии возобладала теория, согласно которой образование спасут более точные экзамены и баллы, а не успешные методики. Скорее, дело в финансировании: хорошая методика экономит и повышает качество, а это не всех устраивает. Вряд ли академики не знают, что прежде чем поставить оценку, надо чему-то научить. Здесь не спасет и высокая зарплата. Один профессор оговорился: “Если все ученики будут отличниками, кто будет мести улицы?”. Хотелось бы его успокоить — до тех пор, пока у руля педагогической науки будут такие “светила”, дефицит дворников нам не грозит, а вот хороших врачей, инженеров, ученых будет меньше.

Другой вопрос: при открытии железнодорожного транспорта что будет с ямщиками (читай, репетиторами и слабыми учителями)? Да гужевой транспорт никогда не отменяли! Мы вправе выбирать, с какой скоростью двигаться к успеху. В педагогике уже тридцать лет летают надежные и доступные самолеты. Жаль, что покупать их придется в Италии, Китае или Америке. Видимо, в этом и заключается (недоступная налогоплательщику) мудрость департамента государственной политики в образовании Министерства образования и науки Российской Федерации.

Уроки Шаталова

Голова ученика — не сосуд, который нужно заполнить, а факел, который нужно зажечь.
Плутарх

Не наполнишь, не зажжешь.
Шаталов

В 70-е годы имя Виктора Федоровича Шаталова в средствах массовой информации упоминалось наряду с именами Гавриила Абрамовича Илизарова и Святослава Николаевича Федорова, олицетворяющих гордость нашей науки.

Вероятно, гигантов в период застоя было больше, но Илизаров, Федоров, Шаталов заметно выделялись. Каждый двигал свое дело. Один — в Кургане, другой — в Чебоксарах, третий — в Донецке. Как бы отчаянно ни складывались обстоятельства, они сумели отстоять свое детище, создали научные школы, способные развиваться самостоятельно.

Если у хирурга результат эксперимента заметен после реабилитации больного (это измеряется неделями), то педагогический эксперимент растягивается на годы. Пришло признание и к Шаталову. Он — Народный учитель СССР, заслуженный учитель Украины, Почетный президент итальянской литературно-исторической ассоциации Данте Алигьери, кавалер ордена Николая Чудотворца за приумножение добра на земле, лауреат нескольких международных премий, автор 36 книг, изданных в 17 странах. Несмотря на это будущее системы обучения под вопросом, поскольку нет организационного ядра, способного ее поддерживать и развивать. А развивать есть что, и не только для рекордов.

Этим можно гордиться

- Донецк был педагогической Меккой. На каждом уроке Шаталова присутствовало до 80 учителей. За все годы эксперимента его ребята не проиграли ни одной сопоставительной контрольной работы. Результаты иногда достигали соотношения 22:1.

- Все без исключений выпускники Шаталова с 1969 по 1990 г.г. стали студентами высших учебных заведений. Из них выросло 12 докторов наук (физики, медицины, педагогики, философии), 64 кандидата наук.

- Сегодня годовой курс геометрии или физики, алгебры или тригонометрии преподается за 4-6 дней.

- По видеоурокам Шаталова с московскими школьниками, по его учебникам учатся в Европе и Америке. Они доступны любой семье [11-15].

- Система Шаталова дает **возможность завершить среднее образование уже в 9-м классе, без какого-либо искусственного отбора учащихся**, при двух выходных днях (четверг и воскресенье) и 30-ти учебных часах в неделю. О перегрузках не может быть речи, авторитетные комиссии и это не один раз проверяли.

После такой рекламной заставки следует сказать, что никто не покушается на традиционную школу, призывая учить детей “по Шаталову”, как никто не заставляет лечить все болезни глаз по методикам Федорова. Но пока наиболее перспективное направление совершенствования обучения связано с освоением методики В. Ф. Шаталова, поскольку она опирается на фундаментальные закономерности усвоения информации.

О главном — коротко

Сам Шаталов короткого изложения своей методической системы избегает — ему дорог каждый элемент — и, конечно, ее в объем рекламного ролика не уложить. Попробуем сделать это, порекомендовав ознакомиться с трудами автора, — оригинальный текст лучше, чем заметки комментатора или популяризатора.

Исследователь по натуре, Шаталов пробовал различные формы подачи материала и однажды увидел, что из детских головок выходят приличные знания, причем из головок, на которых многие учителя поставили клеймо “неуд”.

Логично предположить, что учитель, используя некие приемы, настроился на механизм, посредством которого учеником обрабатывается речевая, текстовая информация, и эмпирически определил ее оптимальные формы, дозы, последовательность подачи, способы закрепления и активации. Случилось чудо, как у Илизарова, который вырастил кость взрослого человека.

Чудо Шаталова в том, что и сильные, и слабые идут по учебному курсу семимильными шагами и не испытывают перегрузок, а самые сильные ученики обычных классов, как говорится, глотают пыль от убегающих вперед шаталовских ребят.

Объяснение чуда следует искать не только в личности учителя (он Мастер), а в том, какие естественные резервы школьников раскрывает педагог, чтобы успех можно было повторить. Шаталов помогает ученику сделать то, что сильный делает медленно, а слабый не делает вовсе, — и, конечно, в голове не остается ничего. Причем учитель и ученик не всегда осознают, что же затрудняет процесс обучения. Чаще всего спасаются повторением, но оно может быть не только матерью учения, но и мачехой — зубрежкой.

Трудности понимания порождают порочное деление учеников на “физиков” и “лириков” (“лириками” часто считают неспособных к точным наукам), несправедливость и ложность которого опровергает Шаталов всей своей практикой. Для эксперимента ему старались отдавать детей из классов “Г” и “Д”, а они уже к девятому классу заканчивали школьный курс.

Да, дети приходят к пониманию не строем, но у Шаталова все идут с гордо поднятой головой. “Я — могу”. Как разные типы самолетов, если проектировались по законам физики и собирались без нарушения технологии, могут летать. Обучение требует того же. Конечно, проектирование детей проходит по другому ведомству, а технология сборки знаний — дело учителя.

Любое сравнение “хромает”, но начать стоит с этого. Представьте картину В. Сурикова “Боярыня Морозова”, разрезанную на множество страниц и сшитую в тетрадь. Дайте эту тетрадь ученику, и пусть он ее полистает, запомнит, перескажет и вообще поймет, о чем идет речь. Как скоро он сложит в голове всю картину, сказать трудно.

Шаталов поступает следующим образом. Он определяет композиционный центр картины — учебного материала (а если автор учебника не чувствует классических пропорций, перерисовывает сам). Затем раскрывает учебную картину не с формальной первой страницы, которая может оказаться правым нижним углом, т.е. периферией картины, а с композиционного центра, нанося эскизные линии до рамок картины и постепенно заполняя ее красками, неоднократно возвращаясь к главному фрагменту.

И как же легко повторять пройденный материал! Ученики не листают заново весь учебник, а легко пробегают по ядру, зная, что все остальное всплывет само собой. **Способность восстанавливаться из отдельных фрагментов, — неотъемлемое свойство образа, целого**.

Как рождается целое? Картина рождается из замысла, сотен эскизов и всего того, что на завершающем этапе обретает классические пропорции (“золотая середина” имеет даже весьма строгое математическое выражение). Тексты также рождаются, растут не мгновенно.

Возникает вопрос: если процесс рождения и оформления целого мучителен и долог у профессионала, то у обучаемого, которому автор передает конечный продукт творчества, мучений должно быть не меньше? Повторять этот путь вовсе не обязательно. При передаче целого предпочтительнее движение “по спирали” в силу естественных психологических ограничений объема одномоментного (симультанного, целостного) восприятия. Именно оно является **строительной площадкой нового знания.**

Ограниченность одномоментного восприятия проявляется с первого слова и становится труднопреодолимой на уровне фраз, абзацев, разделов, курса в целом. Если ее не учитывать, то механизм понимания начинает “захлебываться”, не “искрит” или, как говорят, в одно ухо влетает, в другое вылетает.

Шаталов впервые в мировой практике обучения создал систему, эффективно обеспечивающую работу механизма понимания текста, получив при этом огромный выигрыш во времени и в качестве усвоения учебного материала.

Для обоснования этого утверждения приведем и научную аргументацию.

Вначале коротко рассмотрим общефилософские выводы о взаимосвязи части и целого, ее проявлении в обучении, отметим психолингвистический аспект понимания, уточним роль наглядных средств (опорных конспектов), затем сформулируем некоторые рекомендации для создания опорных конспектов.

Контур целого должен предшествовать частям

Эта мысль Канта справедлива не только для обучения [1, с. 5]. В самом широком плане целостный, всесторонний охват ситуации необходим человеку для адекватной реакции при взаимодействии со средой. Поскольку исходных данных бывает недостаточно в силу ограниченности знаний, опыта, времени, то мозг всегда вынужден “достраивать” неизвестное для принятия решения. Любая деятельность начинается с гипотезы — верной или не верной.

Первоначальное представление о предмете можно назвать неразвитым целым, в терминологии Гегеля — **механическим целым**. По мере накопления фактов, изучения предмета механическое целое сменяется **органическим целым**, т.е. способным к саморазвитию, получению недостающих элементов и следствий.

На первом этапе познание относительно пассивно. Получение новых данных зачастую носит случайный характер, как во всем известной телеигре “Поле чудес”. Первые буквы просто угадываются. На втором этапе познание активно в силу имеющегося представления о целом, которое порождается гипотезой. Понимание можно отнести ко второму этапу познавательной деятельности. Каждый ученый и каждый следователь мечтает начать работу с единственно верной гипотезы, это дает огромный выигрыш во времени. Печально, но до научного открытия, до раскрытия преступления доходят далеко не все.

В речевосприятии происходит то же самое: хотя здесь нет противодействия со стороны природы или преступника, но остается давление времени. И даже добрый ведущий “Поля чудес” включает часы и не подсказывает игрокам ни буквы. Кому-то достаточно угадать одну букву, а кому-то пять, прежде чем в голове вспыхнет ответ, и игрок начнет быстро выдавать недостающие буквы. Вот когда он кричит “эврика”, понял. А как быть ученику, если не понял сегодня, а завтра другая тема?

Сформировать в сознании ученика достаточно целостную систему не просто в силу объективно существующего противоречия части и целого при передаче знаний.

Процесс разрешения противоречия части и целого при восприятии учебного материала можно считать процессом понимания, важнейшим условием эффективного приращения знаний.

Внесем уточнения относительно содержания термина “понимание”. В каких значениях употребляется термин?

Во-первых, понимание предполагает наличие конвенции о знаках и понятиях между членами коммуникативного акта в пределах какой-либо задачи.

Во-вторых, понимание означает установление смыслового единства элементов текста (при достаточной конвенции) на всех уровнях целого: слова, предложения, абзаца, параграфа и т.д. В силу неоднозначности слов они, в зависимости от контекста, меняют смысл. Это психолингвистический аспект понимания.

В-третьих, понимание в научном познании означает уяснение места исследуемых явлений в том целом, частью которого они являются.

В-четвертых, физиологический механизм понимания — временная нервная связь или ассоциация, новое знание. Этот механизм открыт И. П. Павловым.

В-пятых, дидактический аспект понимания предполагает надежность всех предшествующих звеньев.

Во всех случаях понимание является не столько результатом, сколько процессом, потому что по мере познания изменяется содержание понятий и отчасти их обозначения, вводятся новые понятия и термины. Отмеченные аспекты тесно связаны между собой.

Как обеспечиваются условия для понимания в учебном процессе? Учитель, зная уровень подготовки обучаемых, в пределах учебного времени стремится представить материал с необходимой степенью детализации, создать оптимальное соотношение сложного и простого, известного и неизвестного, чтобы ученик смог включить новые знания в уже имеющиеся, а значит, и понять их. Ведь наличные знания всегда обладают известной целостностью (вероятно, уже на генетическом уровне).

Краткое общее изложение материала педагогом поможет обучаемому быстрее увидеть место "кирпичиков" знания в системе и укладывать их осмысленно. Предварительная подача краткого содержания занятия будет схемой, сухой абстракцией, но она — необходимая предпосылка целостного усвоения знаний. Шаталов называет их опорными конспектами, сигналами.

Диалектика части и целого порождает много методических проблем, среди которых, пожалуй, самая серьезная — определение границ относительной самостоятельности и целостности разделов курса, выделение элементов, необходимых для понимания целого, и их смысловая субординация.

Последовательность изложения тоже немаловажное условие, но только логическая структура — еще недостаточное условие для понимания, даже в математике. Д. Пойа (D. Polia) писал: "Математик, проверивший детали доказательства шаг за шагом и нашедший каждый шаг в порядке, все же может быть не убежден. Для убежденности ему нужно нечто большее, чем правильность каждой детали. Что же? Он хочет **понять** доказательство. После того как пробился через доказательство, шаг за шагом, исследователь берет на себя большой труд: он пересматривает, перерабатывает, переформулирует и перераспределяет эти шаги до тех пор, пока ему не удается сгруппировать детали в доступное пониманию целое" [7, с. 434].

Форма контура может быть как вербальной, так и графической. Выяснить же оптимальные параметры схемы посредством философии не представляется возможным.

Размер подскажет психолингвистика

Процесс понимания в речевосприятии является частным случаем диалектики части и целого. В обучении речь является и средством передачи знаний, и тем результатом, по которому педагог может определить качество усвоения учебного материала.

Познание в обучении нельзя сводить только к пониманию текстов — мышление человека гораздо сложнее. И, тем не менее, поскольку школьные знания представлены в основном текстами или математическими записями (тот же текст, но в других знаках), отражающими реальные явления, то, понимая текст, мы можем понять действительные отношения вещей.

Будем исходить из того, что конечным продуктом мысли является слово, **текст — устное или письменное сообщение, обладающее известной цельностью и завершенностью**. Текстом может быть книга, лекция, урок и т.п.

Мысль всегда является личной, субъективной. Субъективную сторону мысли обозначают термином "**смысл**", противопоставляя его другому термину "**значение**", отражающему объективные связи явлений, которые сформировались в процессе общественного развития языка и закрепились в речевой практике. Переход к развернутому высказыванию связан с превращением смыслов в значения, доступные для передачи. Смыслы и значения не всегда совпадают.

Процесс перехода мысли к развернутому высказыванию начинается в голове с общей схемы высказывания и затем переходит к поиску нужных лексических единиц и оформлению речи. Восприятие речи идет в обратном порядке: по значению отдельных слов необходимо выделить смысл сообщения, целого.

Значения могут меняться в зависимости от контекста, необходимо сопоставлять далеко отстоящие друг от друга элементы текста, чтобы вычленить общую мысль. А значит, приходится удерживать в сознании одновременно все элементы сообщения. Цену этой работы знают авиадиспетчеры.

Анализ психолингвистической литературы, эксперимент дают возможность установить, что **механизм понимания всех уровней целого в речи включает в себя два процесса — это прогнозирование и перекодирование текста. Оба функционируют одновременно и в пределах объема одномоментного восприятия**. Первый направлен вперед, на разведку пути, а второй — назад, на сортировку и упаковку воспринятой информации. Тем самым они помогают и дополняют друг друга, обеспечивают связь элементов. Хороший прогноз невозможен без упорядоченных фактов, а упорядочивание вновь открывающихся фактов эффективно при наличии хорошего прогноза.

Объем одномоментного восприятия характеризуется так называемым магическим числом 7 $\pm$ 2. Выводы Дж. Миллера (G. Miller) широко известны, но в дидактике не получили должного применения. Напомним, что в сложной деятельности, не допуская чрезмерных перегрузок для внимания, оперативной памяти и не снижая точности абсолютной оценки, человеческий мозг может одновременно осуществлять лишь одну сложную операцию, где количество однопорядковых элементов не более семи [5, с. 192-226].

Поскольку объем одномоментного восприятия — величина устойчивая и не безграничная, слушающий (читающий) вынужден постоянно перекодировать очередную порцию информации в более емкие невербальные формы.

При перекодировании во внутренней речи текст сжимается. Наиболее эффективна группировка в пределах 4-5 единиц: букв, слов, элементов, мыслей, когда можно оформить их в сознании как новый ряд и дать ему обозначение, которое может иметь и не словесную форму.

Эта закономерность применима не только к словам, но и к следующему уровню речевого целого — предложению. Говорящий, конечно, не знает, сколько единиц составляет объем оперативной памяти, но при ее перегрузке не знает, как закончить фразу, т.к. забывает начало. Говоруны по “бумажке” могут произнести текст любой длины. Поэтому их трудно слушать.

До “строгих” исследований текста размером больше предложения — абзаца, параграфа — психолингвисты еще не добрались, поэтому обратимся к стилистам. В. Пропп, известный советский филолог, изучая морфологию сказки, обнаружил устойчивую тенденцию: число действующих лиц в них не превышает семи [8]. Функции действующих лиц образуют составные части сказки. Вряд ли наши бабушки сознательно стремились к такому шаблону. Просто рассказчик при перегрузке одномоментного восприятия начинал путаться в повествовании, к тому же усложнялось и восприятие сказки слушателями.

В научных текстах смысловая иерархия заметна по рубрикации. Количество однопорядковых элементов, судя по оглавлениям классических трудов, в основном не превышает “магического числа”.

До этой кондиции речевая практика шлифует “тонны словесной руды”: “метрополитен” по мере частоты употребления превращается в “метро”, а грамматические и синтаксические средства связи в предложении позволяют почти автоматически “понимать” фразу даже в том случае, если она абсолютно бессмысленна. Примером может служить известный опыт Л. Щербы: “Глокая куздра штеко кудланула бокра и кудлачит бокренка”. Скорее всего, это объясняется тем, что текст размером с фразу более древен по сравнению с текстами большого объема. Средства связи в предложении вырабатывались тысячелетиями.

Между предложениями и более высокими элементами текста (абзацами, разделами и т.д.) связь обеспечивается не всегда явно, а больше по контексту. Давно ли люди начали общаться текстами большого объема на площадях и в аудиториях? При этом на долю учеников приходится в среднем всего 2-3 минуты в день [9. с. 20].

Пока нет рецептов, позволяющих педагогам оказывать ученикам эффективную помощь в усвоении текстов большого объема, так как и прогнозирование, и перекодирование “недостаточно изучено” и носит во многом случайный, “индивидуальный характер”. В переводе с научного языка на язык “родных осин” это означает, что на самом сложном этапе усвоения текста помощи от учителя ждать трудно. Спасайся, кто может. Дети и взрослые спасаются.

Посмотрим, как это делают самые сообразительные, прежде чем нанимать репетиторов. Чаще всего хорошие ученики берут в руки карандаш и заново перечитывают, подчеркивают, подзубривают, рисуют, то есть выстраивают самостоятельно контекстные связи. Но это труд дилетантский — нужный, но малоэффективный при недостатке навыков и времени. Поэтому Шаталов не рекомендует такое сложное дело, как составление опорных конспектов, отдавать на откуп ученикам. Его пакеты знаний всегда строго упакованы по 5-7 блоков опорного конспекта и выверены до буквы. Поддерживает их в активном состоянии особая система повторения, заслуживающая специального исследования. В ней запоминают не слова, а смысл.

"Демосфенами" ученики Шаталова становятся по мере развития навыков блоковой компоновки материала и умения его воспроизводить. Нейролингвистика объясняет это явление тем, что внешняя опора поддерживает наиболее слабое звено в понимании — выделение контекстных связей — и способствует расширению симультанного восприятия [4, с. 72,73,133].

Открытыми остаются следующие вопросы: какая схема лучше? Есть ли критерий эффективности схем в процессе понимания?

Форма может быть наглядной

Схемы, рисунки, макеты и другие так называемые средства наглядности давно и успешно используются в обучении. Это закреплено в известном дидактическом принципе наглядности обучения.

Со времен Яна Амоса Коменского вопроса о том, какой должна быть наглядность, не возникало. Проблему поставила теоретическая физика, вскоре на нее обратили внимание философы и психологи. Не всех удовлетворила аргументация классика педагогики: "Если кто сомневается в том, что посредством созерцания может быть воспринято все, даже духовные и не находящиеся перед глазами предметы, тот пусть вспомнит, что все устроено свыше для гармонии" [2, с. 286].

Нельзя упрекать великого педагога в том, что он не дал более конкретного объяснения принципу наглядности. Этого не позволял уровень современных ему знаний, тем более, что последующие попытки объяснений оказывались еще менее продуктивными.

По-видимому, ответ надо искать не столько в возможностях зрительного анализатора, сколько в ограниченности все того же одномоментного восприятия. По крайней мере, такой подход несет меньше противоречий и объясняет больший объем фактов, связанных с процессом усвоения знаний, проблемой наглядности, теорией формализации и развития знаковых систем.

Выбор направлений исследования наглядности не очень велик. Первое: приближать изучаемый объект (события, предметы, понятия) к ученику. Второе: облегчать ученику понимание текста (описывающего события, предметы, понятия). При кажущейся простоте выбора в пользу первого он менее перспективен. Приведем в качестве примера историю или физику.

Изучать историю посредством картин вплоть до натуралистических сюжетов, фильмов или перенесением в машине времени сомнительно не только по техническим причинам. Даже превращение обучаемого в современника Ивана Васильевича (Грозного) вряд ли поможет понять историю лучше, чем труды В. Ключевского или Л. Гумилева. Нельзя изучить город, исходивши все его улицы. Это относится и к изучению двигателя внутреннего сгорания.

Но наибольшие споры вызывают попытки "онагляживания" принципиально невидимых объектов, т.к. нет объективного критерия эффективности подобных методических приемов. Попытки его найти неизбежно приводят к исследованию понимания текстов, т.е. второму направлению. Ведь определение эффективности предполагает измерения на "входе" и "выходе", учет возможных переменных величин, могущих повлиять на процесс усвоения знаний.

Для этого стоит вернуться к уже принятому допущению, что знания существуют в виде образов и знаков. Первое — идеально, существует только в голове, второе — материально, его можно выразить. Образами можно мыслить, передавать же свой собственный образ, знания, минуя речь, невозможно. Какой бы хорошей ни была мысль, она не может быть средством обучения. Только речь — устная или письменная — завершает и представляет продукт мышления в достаточно однозначном и логически непротиворечивом виде.

Воспринимая текст, человек вынужден переводить его в идеальные образы, индивидуальные по своим ассоциативным связям. Значит, у каждого существует свой "алфавит" внутренней речи для кодирования блоков. Стоит ли изобретать велосипед? Нельзя ли помочь ученику, предложив успешные, проверенные практикой варианты кодировки? В его кладовой знаний будет больше порядка, и они будут занимать меньший объем. К тому же легче повторять и проводить ревизию знаний. Тут-то и освободится время для творчества и спорта, как у Шаталова. Одним словом, потребность в Кирилле и Мефодии для кодирования внутренней речи назрела.

Наглядность всегда используется именно в качестве средства понимания, упаковки. Противоречие между растущим объемом информации и возможностью эффективного оперирования ею проявляется в утомлении, увеличении продолжительности времени для получения результата, возрастании ошибок. Еще Лейбниц писал, что короткие обозначения удобны для открытий, поскольку при рассуждении нельзя отчетливо обозревать умом весь объект исследования [3, с. 501]. Что мешает непосредственно оперировать словами "пять умножить на пять"? Сотни лет считали "в уме", потом стали записывать и, наконец, арабские цифры вытеснили своих предшественников.

По мере усложнения общественно-исторической практики отставание психологических возможностей человека в быстром и точном оперировании все большим объемом информации обусловливало поиск приемов, разрешающих это противоречие.

В индивидуальной практике человека, в обучении использование приемов графической формализации текста является пока "незаконной" формализацией, поскольку обозначения в этом случае не имеют общепринятого характера и специальных правил интерпретации. Однако применение таких приемов оправдано тем, что облегчается блоковая компоновка смысла текста во внутренней речи.

Эту гипотезу подтверждают и опросы преподавателей, ученых. Им предъявлялись одинаковые по содержанию, но разные по форме схемы, используемые в учебном процессе. После того как выбор был сделан, предлагалось указать критерий выбора. Характерно, что критерии "точность", "понятность" и "наглядность" фигурировали независимо от того, какой из схем отдавалось предпочтение. По этим же признакам отклонялись другие схемы. По ответам ученых невозможно определить, что в конечном счете повлияло на выбор. Однако во всех группах интервьюируемых соотношение количества "голосов", поданных за одни и те же схемы, всегда совпадало.

Вероятнее всего, выбор определялся интуитивным ощущением удобства схемы для механизма понимания. Можно утверждать, что эффективность схемы как средства понимания, прямо пропорциональна количеству тезисов-идей и обратно-пропорциональна количеству блоков-символов, их выражающих. При этом числитель не должен превышать "миллерова числа". Сравнительный коэффициент эффективности выражается формулой:

$$K_{\text{эф}} = \frac{T \leq 7 \pm 2}{Б}$$

где T — количество тезисов-идей, а $Б$ — количество блоков-символов. Эффективность схемы тем выше, чем больше идей можно развернуть на основе представленных символов.

Субъективный выбор экспертов устойчиво коррелирует с **объективным** сравнительным критерием эффективности схемы как средства понимания.

Наиболее распространенные схемы (два-три слова в кругах или квадратах) имеют коэффициент 1. Семь блоков — семь идей. Некоторые достигают более высоких значений за счет высокой информативности символа. Превышение размера числителя ведет к снижению эффективности, т.к. "лишние" тезисы не берутся в расчет в числителе, но сохраняются в знаменателе.

Удачный наглядный образ, где символ (знаменатель) несет не один тезис — редкая находка. Даже Э. Резерфорд (E. Rutherford) заявил, что понял, как устроен атом, не после того, как стало возможным его математическое описание, а когда ассоциировал его с планетарным образом. Однако это не означает, что выдающийся физик не видел несоответствий модели расчетам. Специалисты никогда не считали атом уменьшенной копией солнечной системы. Планетарная модель является лишь аналогией существенных связей объектов микромира. Потребность в ней объяснима только психологическим удобством, поскольку математические описания, хотя и более точны, но громоздки для одномоментного восприятия. Эта модель вошла в научный и педагогический оборот, вытеснив другие, менее удобные.

Многие помнят по телевыступлению В. Ф. Шаталова в Останкино рассказ о Куликовской битве. В опорном сигнале знаменитый маневр князя Дмитрия выглядит как зигзаг с цифрой “1380”. У него высокий сравнительный коэффициент. Числитель легко наращивается информацией, а знаменатель может быть неизменен — зигзаг. На этом зигзаге выращено не одно поколение учеников, и, что самое интересное, никто этот урок не забыл. Правда, учителю потребовалось нарисовать свою картину события, что вполне допустимо — ведь школьные учебники пишут не Суриковы. Историки могут и не согласиться с трактовкой события учителем математики, но описать событие “точно” не смог бы и Мамай. А Шаталов преподает 54 года и знает, что может остаться в голове при минимальном времени на изучение темы — зигзаг. Но этот зигзаг, после объяснений учителя, поможет сформулировать ученический ответ, соответствующий отличной оценке.

“Измерение” идей, тезисов с высокой степенью точности не представляется возможным, поскольку единицы исчисления неравнозначны — тезис тезису рознь. Тем не менее, при таком подходе в результате коллективного обсуждения можно определить наилучший вариант, а правильность выбора подтвердит педагогическая практика.

Посмотрим, каким образом учитель может создавать собственные схемы, и какие проблемы возникают на пути графической формализации текста.

Ищите свой путь

Чтобы текстовую учебную информацию сделать более понятной, ее необходимо сделать обозримой, сжатой.

Зная уровень подготовки учеников, учитель в состоянии найти такую степень сокращения текста, чтобы обучаемый мог самостоятельно “достроить” опущенные элементы. Эта работа облегчается и наличием развернутого текста лекции или учебника.

К приемам лексического свертывания относится использование аббревиатур, метафор, сравнений и т.п. Следующий этап сокращения предполагает использование графических средств. На этом этапе происходит превращение вербальной схемы в графическую, когда сохранение смысловых связей обеспечивается условными обозначениями, символами, пространственной субординацией, величиной, цветом элементов и т.п.

Конечный вариант подобного сокращения допустимо называть и опорным конспектом, и схемой, и графической моделью. Следует учитывать, что при предельном сокращении прогнозирующая функция схемы значительно ослабевает, если преподаватель не подкрепляет условные обозначения вербальными рассуждениями, но зато усиливается ее перекодирующая функция.

Необходима постепенная подготовка учеников к систематическому использованию графических схем, желателен учет возрастных особенностей, памяти и др. Поэтому педагог должен постоянно ощущать “обратную связь” и не абсолютизировать свои схемы.

Подобные методические приемы иногда считают “натаскивающими”, а используемые при кодировании содержания учебного материала знаки — примитивными. Конечно, как любое лекарство, схема не лишена недостатков, которые при догматическом подходе могут свести к минимуму дидактический эффект или вовсе затруднить усвоение знаний. Но недостатки эти менее всего связаны с графическими формами, поскольку они не претендуют на внешнее сходство с понятиями. Графическая модель не может принести обучаемому больше вреда, чем слово: и то, и другое — знаки.

Справедливости ради следует сказать, что из тысяч публикаций о Шаталове, его системе лишь немногие содержат обоснованные критические замечания. Как любая система, она не является абсолютной. Ее можно дополнять и развивать. Она открыта.

Вместо заключения

Система Шаталова не сводится только к использованию опорных конспектов. В его “табели о рангах” они стоят на последнем месте. На первом — система оценки знаний. Затем идут: повторение, решение задач, спортивная работа.

Безупречно организованная и эффективная учебная работа обладает и значительным воспитательным потенциалом: возникает здоровая соревновательная атмосфера, взаимопомощь, исчезают шпаргалки, двойки, дневники, пропуски, не нужными становятся обманы родителей и т.п. Иными словами, активизируются сильнейшие резервы, экономится время.

Уроки Шаталова действительно похожи на классическую сказку по композиции, размерам элементов, безупречному стилю и артистизму. Сколько раз надо рассказать сказку, прежде чем ребенок сможет ее воспроизвести? Шаталов рассказывает столько, сколько нужно. Он даже перед опросом учеников сам отвечает по листу контроля. Такого учителя можно встретить только в сказке.

А кто сказал, что хорошо учить можно по-другому? Разве школьная сказка про атом для старшеклассника сложнее сказки про репку для малыша? Таких данных нет. Тогда почему сказку про атом, рассказывают один раз и посылают... к репетитору и десятку учебников, далеко не сказочных?

Пятьдесят четыре года у школьной доски, двадцать пять лет открытых уроков по географии, физике, астрономии, геометрии, истории, тригонометрии, алгебре, автоделу, исключения из партии, семинары по всему Союзу, книги, съемки. Трудно представить, что такой путь кто-то способен повторить. Поэтому видеозаписи уроков Шаталова, его лекций по педагогическому мастерству, которые выпускает издательство "Дортранспечать", сохраняют бесценный педагогический опыт. Система имеет столько нюансов, что многие из них трудно переложить на бумагу. Это надо видеть. И пока такая возможность есть. **Для заинтересованных читателей приводим телефоны "Школы Шаталова" в Москве:**

(495)225-76-46, (495)772-47-34.

Хочется надеяться, что уроки Шаталова будут иметь продолжение. Жаль, что работа Донецкой лаборатории интенсивных методов обучения АПН СССР была делом государственным и для России, и для Украины только до 1992 г. При умелом использовании ее достижений экономический эффект может оказаться соизмеримым с взаиморасчетами между Москвой и Киевом по газу [10, с. 80-87].

Литература

[1] Кант И. Трактаты и письма. — М.: Наука, 1982.

[2] Коменский Я.А. Избранные педагогические сочинения. — М: Учпедгиз, 1955.

[3] Лейбниц Г.В. Основы исчисления рассуждений//Сочинения в 4-х томах. — М.: АН СССР, 1984.

[4] Лурия А.Р. Основные проблемы нейролингвистики. — М.: Изд-во МГУ, 1975.

[5] Миллер Дж. Магическое число семь, плюс или минус два. О некоторых пределах нашей способности перерабатывать информацию//Инженерная психология. — М.: Прогресс, 1964.

[6] Миллер Дж., Галантер Ю., Прибрам К. Планы и структура поведения, — М.: Прогресс, 1965.

[7] Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения. — М.: Прогресс, 1957.

[8] Типологические исследования по фольклору. — М.: Наука, 1975.

[9] Шаталов В.Ф. Соцветие талантов. — М.: ГП ЦРП МСП, 2001.

[10] Шаталов В.Ф. Трудных детей не бывает. — М.: ГП ЦРП МСП, 2001.

[11] Шаталов В.Ф. Быстрая тригонометрия (видеокурс). — М.: ГП ЦРП МСП, 2002.

[12] Шаталов В.Ф. Фамильная геометрия (видеокурс). — М.: ГП ЦРП МСП, 2002.

[13] Шаталов В.Ф. Физика на всю жизнь (видеокурс). — М.: ГП ЦРП МСП, 2003.

[14] Шаталов В.Ф. Алгебраические волны (видеокурс). — М.: ГП ЦРП МСП, 2005.

[15] Шаталов В.Ф. Физика чести (видеокурс). — М.: ГП ЦРП МСП, 2005.

[16] Шаталов В.Ф. Педагогическое мастерство (видеокурс). — М.: ГП ЦРП МСП, 2006.

Виноградов Сергей Николаевич,
кандидат философских наук,
директор ЗАО "Дортранспечать".

E-mail: snvinogradov@yandex.ru

О четырех окружностях четырех точек треугольника и двух окружностях восьми точек прямоугольного треугольника

Е. Д. Куланин

В статье изучается расположение некоторых замечательных точек треугольника. Показано, что в случае произвольного треугольника 16 точек лежат по 4 на четырех окружностях, а в частном случае прямоугольного треугольника — по 8 на двух окружностях.

1. Вводные замечания

Напомним сначала некоторые определения. Пусть P — точка в плоскости треугольника ABC, A_1, B_1, C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA, AB соответственно. Тогда треугольник $A_1B_1C_1$ называется педальным треугольником точки P относительно треугольника ABC. Прямые, проходящие через вершину данного угла и симметричные относительно биссектрисы этого угла, называются изогональными относительно этого угла. Окружность, на которой лежат середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков от вершин до точки пересечения высот (ортоцентра), называется окружностью Эйлера или окружностью девяти точек этого треугольника. Внутренней точкой Фейербаха данного треугольника называется точка касания окружности Эйлера и вписанной окружности этого треугольника. Внешними точками Фейербаха треугольника называются точки касания окружности Эйлера и вневписанных окружностей этого треугольника.

Приведем формулировки тех теорем из [1] и [2] которые понадобятся нам в этой статье. Желающие могут найти их доказательства в [1] и [2], для чего в скобках приводятся номера этих теорем, которые они имеют в [1] и [2].

Теорема 1* (4, [1]). *Пусть P — произвольная точка в плоскости треугольника ABC, не лежащая на его описанной окружности; AH_1, BH_2, CH_3 — его высоты, пересекающиеся в точке H; E_1, E_2, E_3 — середины отрезков AH, BH, CH; P_1, P_2, P_3 — точки, одинаково расположенные с P относительно подобных треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, ABC соответственно*[1]*. Тогда прямые E_1P_1, E_2P_2, E_3P_3 пересекаются в такой точке K окружности Эйлера треугольника ABC, через которую проходит описанная окружность педального треугольника точки P относительно треугольника ABC.*

Следствие 1* (3, [1]). *Пусть O — центр описанной, а I, I_a, I_b, I_c — центры вписанной и трех вневписанных окружностей треугольника ABC. Тогда педальные окружности всех точек P, лежащих на прямой OI, проходят через внутреннюю точку Фейербаха F треугольника ABC, а педальные окружности всех точек P, лежащих соответственно на прямых OI_a, OI_b, OI_c, проходят соответственно через внешние точки Фейербаха F_a, F_b, F_c треугольника ABC.*

Теорема 2* (1, [2]). *Пусть P — точка, не лежащая на описанной окружности треугольника ABC. Тогда прямые, изогональные соответственно прямым PA, PB, PC относительно углов A, B, C этого треугольника, пересекаются в одной точке P'.*

Точки P и P' называются изогонально сопряженными точками относительно треугольника ABC или просто изогональными точками.

Теорема 3* (2, [2]). *Пусть P и P' — точки, изогонально сопряженные относительно треугольника ABC, а $A_1B_1C_1$ и $A'_1B'_1C'_1$ — педальные треугольники этих точек. Тогда вершины треугольников $A_1B_1C_1$ и $A'_1B'_1C'_1$ лежат на одной окружности.*

[1]Т.е. преобразование подобия, переводящее треугольник AH_2H_3 в ABC, переводит точку P_1 в точку P и т.д. — *Прим. ред.*

2. Четыре окружности четырех точек

Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а I' — точка, симметричная I относительно центра O описанной окружности этого треугольника (рис. 1). Обозначим через K, L, N вершины педального треугольника точки I, а через K', L', N' — вершины педального треугольника точки I'.

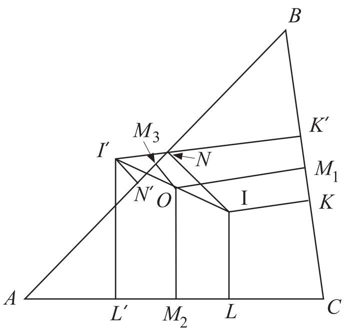

Рис. 1.

Поскольку точка I' лежит на прямой OI, то согласно следствию 3 из [1] педальная окружность этой точки, т. е. описанная окружность треугольника $K'L'N'$, проходит через внутреннюю точку Фейербаха F треугольника ABC. Но точки K', L', N' симметричны точкам касания вписанной окружности K, L, N относительно середин M_1, M_2, M_3 сторон BC, CA, AB треугольника ABC и поэтому совпадают с точками касания вневписанных окружностей со сторонами BC, CA, AB.

Итак, точки касания трех вневписанных окружностей треугольника с его сторонами (а не с продолжениями сторон) и внутренняя точка Фейербаха этого треугольника лежат на одной окружности. Аналогичные факты имеют место и для точек касания вневписанных окружностей с продолжениями сторон треугольника и внешних точек Фейербаха F_a, F_b, F_c этого треугольника.

Пусть I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся его сторон BC, CA, AB (рис. 2), I_b' — точка, симметричная I_b относительно центра O описанной окружности треугольника ABC.

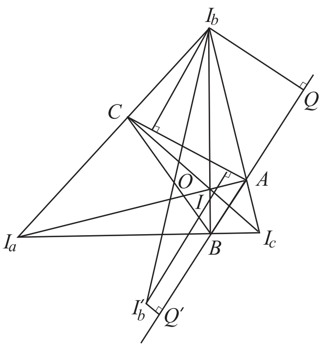

Рис. 2.

Тогда согласно следствию 3 из [1] педальная окружность точки I_b' проходит через внешнюю точку Фейербаха F_b треугольника ABC, но проекции точки I_b' на продолжения сторон AB и BC симметричны проекциям точки I_b на продолжения этих сторон относительно середин этих же сторон.

Проекции точки I_b на продолжения сторон AB и BC треугольника ABC совпадают с точками касания вневписанной окружности I_b с продолжениями этих сторон, поэтому точки, симметричные этим точкам касания относительно середин сторон AB и BC совпадают с точками касания вневписанных окружностей I_a и I_c с продолжениями сторон AB и BC.

Проекция точки I_b' на сторону AC симметрична проекции точки I_b на ту же сторону, т. е. точке касания вневписанной окружности I_b со стороной AC, относительно середины AC и поэтому совпадает с точкой касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AC.

Итак, точка касания вписанной окружности треугольника с какой-либо стороной этого треугольника, две точки касания вневписанных окружностей этого треугольника, вписанных в прилежащие к этой стороне углы, с продолжениями двух других сторон треугольника и точка Фейербаха, принадлежащая третьей вневписанной окружности, в свою очередь лежат на одной окружности.

Полученные результаты можно объединить в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Шестнадцать точек касания вписанной и трех вневписанных окружностей треугольника с его сторонами, продолжениями сторон и окружностью Эйлера лежат на четырех окружностях по четыре на каждой окружности.*

3. Две окружности восьми точек прямоугольного треугольника

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) и пусть I, I_a, I_b, I_c — центры вписанной и трех вневписанных окружностей этого треугольника (рис. 3).

Тогда треугольник ABC является ортоцентрическим треугольником треугольника $I_aI_cI_b$ и

$$\angle ACB = \, = 90^\circ = 180^\circ - 2\angle I_aI_cI_b, \text{ откуда } \angle I_aI_cI_b = 90^\circ/2 = \, = 45^\circ.$$

Обозначим через O и I_c' точки, симметричные точкам I и I_c относительно центра E описанной окружности треугольника ABC. Поскольку точка I совпадает с ортоцентром треугольника $I_aI_bI_c$, а E — с центром окружности Эйлера этого треугольника, то точка O является центром описанной окружности треугольника $I_aI_bI_c$.

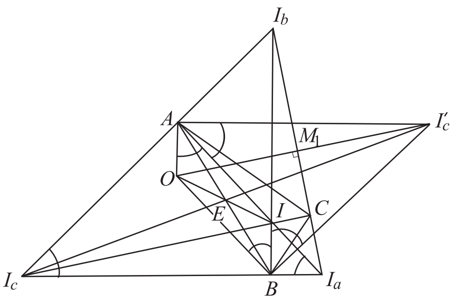

Рис. 3.

Так как прямоугольные треугольники I_cAI_a и I_cBI_b равнобедренные ($\angle I_aI_cI_b = 45°$), а точки O, A и O, B лежат на серединных перпендикулярах соответственно к отрезкам I_aI_c и I_bI_c, то AO и BO — биссектрисы прямых углов I_aAI_c и I_bBI_c, поэтому $\angle OAI = \angle OBI = 45°$. Вспомнив, что E — середина отрезков AB и I_cI_c', выводим, что четырехугольник $I_cBI_c'A$ — параллелограмм, откуда $AI_c' \parallel I_cI_a$, $BI_c' \parallel I_cI_b$ и $\angle OAI_c' = \angle OBI_c' = 90°$ ($AO \perp I_cI_a$, поэтому AO перпендикулярна и прямой AI_c', параллельной I_cI_a, аналогично $OB \perp BI_c'$), но тогда $\angle IAI_c' = \angle OAI_c' - \angle OAI = 90° - 45° = 45° = \angle OAI$ и $\angle IBI_c' = \angle OBI_c' - \angle OBI = 90° - 45° = 45° = \angle IBI_c'$.

Итак, прямые AO и AI_c', BO и BI_c' изогональны относительно углов A и B, поэтому изогональны и прямые CO и CI_c' относительно угла C (см. теорему 1* из [2]) и, таким образом, точки O и I_c' изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Но, как мы показали в пункте 1, педальные окружности точек O и I_c' являются окружностями четырех точек, а, как известно (см. теорему 2* из [2]), педальные окружности изогонально сопряженных точек совпадают, поэтому для прямоугольного треугольника эти две окружности четырех точек совпадают и, таким образом, появляется одна окружность восьми точек. Центром этой окружности является середина отрезка OI_c'.

Поскольку E — середина отрезков OI и I_cI_c', то четырехугольник $OI_c'II_c$ — параллелограмм и $OI_c' \parallel I_cI$, но $I_cI \perp I_aI_b$ (I — ортоцентр треугольника $I_aI_bI_c$), поэтому и $OI_c' \perp I_aI_b$. Вспоминая, что O — центр описанной окружности треугольника $I_aI_bI_c$ и, следовательно, лежит на серединном перпендикуляре стороны I_aI_c, получим, что отрезок OI_c' пересекает сторону I_aI_b в ее середине M_1.

С другой стороны, прямая E_1E содержит среднюю линию параллелограмма $I_cII_c'O$ и поэтому пересекает отрезок OI_c' в его середине. Одновременно прямая E_1E пересекает сторону I_aI_b в ее середине M_1 (точки E_1 и M_1 окружности Эйлера треугольника $I_aI_bI_c$ диаметрально противоположны). Отсюда следует, что середина отрезка OI_c' совпадает с точкой M_1.

Аналогично доказывается, что центром второй окружности восьми точек прямоугольного треугольника ABC является точка E_1. Так как E_1 — середина дуги AE_1B описанной окружности треугольника ABC, а точка M_1 диаметрально противоположна E_1, то M_1 — середина дуги ACB описанной окружности треугольника ABC.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Точки касания вписанной и трех вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с его сторонами, продолжениями сторон и окружностью Эйлера лежат на двух окружностях по восемь точек на каждой окружности, причем центры этих окружностей совпадают с точками пересечения серединного перпендикуляра гипотенузы с описанной окружностью этого треугольника.*

Обозначим через S_2 середину дуги ACB описанной окружности прямоугольного треугольника ABC, а через S_1 — точку, диаметрально противоположную S_2 (рис. 4). Тогда на окружности S_1 лежат две внешние точки Фейербаха F_a и F_b, две точки касания вписанной окружности с катетами и четыре точки касания вневписанных окружностей с продолжениями катетов и гипотенузы; а на окружности S_2 — внутренняя точка Фейербаха F, внешняя точка Фейербаха F_c, точка касания вписанной окружности с гипотенузой, три точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника и две точки касания вневписанных окружностей с продолжениями катетов.

Обозначим через K и L точки пересечения средней линии треугольника ABC, параллельной гипотенузе, с его описанной окружностью и покажем, что каждая из окружностей S_1 и S_2

проходит через точки K и L.

В самом деле, если Q — точка касания вписанной окружности с гипотенузой, то из прямоугольного треугольника S_2MQ найдем квадрат радиуса окружности S_2:

$$R_2^2 = S_2Q^2 = S_2M^2 + MQ^2 = R^2 + (MB - QB)^2 = R^2 + (R - (p - b))^2 =$$

$$R^2 + (R - ((a + b + c)/2 - b))^2 = R^2 + (R - R + (b - a)/2)^2 = R^2 + (b - a)/2)^2 =$$

$$R^2 + ((b - a)/2)^2 = R^2 + (a^2 - 2ab + b^2)/4 = R^2 + (a^2 + b^2 - 2ab)/4 =$$

$$R^2 + c^2/4 - ab/2 = R^2 + (2R)^2/4 - ab/2 = 2R^2 - S,$$

где R — радиус описанной окружности треугольника ABC, а S — его площадь. Обозначив длину высоты CD через h, получим из прямоугольного треугольника S_2NL (hN — точка пересечения KL и MS_2):

$$S_2L^2 = S_2N^2 + NL^2 = (S_2M - MN)^2 + ML^2 - MN^2 = (R - h/2)^2 + R^2 - (h/2)^2 =$$

$$R^2 - Rh + h^2/4 + R^2 - h^2/4 = 2R^2 - Rh = 2R^2 - ch/2 = 2R^2 - S = R_2^2,$$

откуда $S_2L = R_2$ и, таким образом, точка L лежит на окружности S_2.

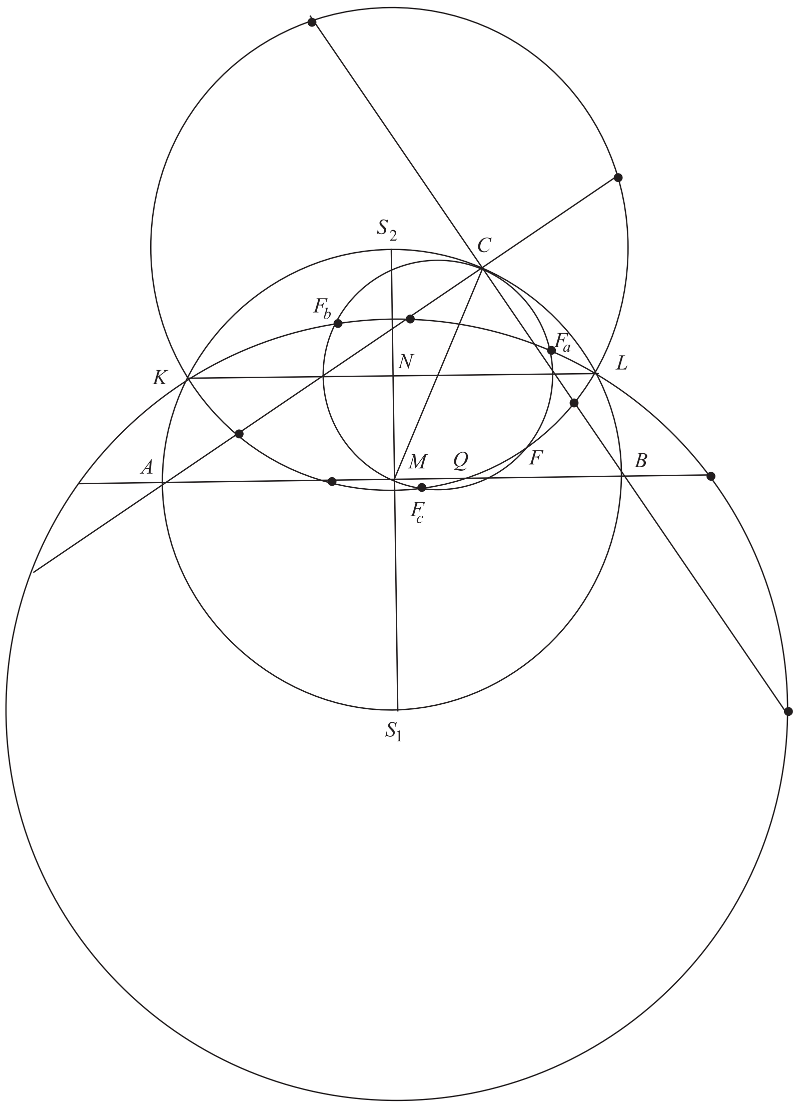

Рис. 4

Аналогично показывается, что L лежит и на окружности S_1, причем $R_1^2 = 2R^2 + S$. Итак, описанная окружность прямоугольного треугольника и окружности S_1 и S_2 имеют общую хорду.

Поскольку S_1S_2 — диаметр описанной окружности треугольника ABC, то из прямоугольного треугольника S_1LS_2 имеем $S_1L^2 + S_2L^2 = S_1S_2^2$, но $S_1L = R_1$, $S_2L = R_2$, $S_1S_2 = 2R$, поэтому $R_1^2 + R_2^2 = (2R)^2$. Вычитая из равенства $R_1^2 = 2R^2 + S$ равенство $R_2^2 = 2R^2 - S$, найдем $R_1^2 - R_2^2 = 2S$.

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

Предложение 1. *Описанная окружность прямоугольного треугольника и две его окружности восьми точек имеют общую хорду, концами которой служат точки пересечения прямой, содержащей среднюю линию треугольника, параллельную гипотенузе, с его описанной окружностью.*

Сумма квадратов радиусов окружностей восьми точек равна квадрату диаметра описанной окружности прямоугольного треугольника, а разность квадратов этих же радиусов — удвоенной площади треугольника.

4. Еще несколько окружностей, проходящих через точки Фейербаха

Расположим на плоскости четыре окружности O_1, O_2, O_3, O_4 так, что каждая из них касается двух соседних, т. е. окружность O_1 касается окружностей O_4 и O_2, O_2 — O_1 и O_3, O_3 — O_2 и O_4, O_4 — O_3 и O_1 (рис. 5). Тогда нетрудно доказать, что точки касания A, B, C, D также лежат на одной окружности.

Упражнение 1. *Докажите сформулированное утверждение.*

Данный факт остается справедливым, если некоторые из этих окружностей касаются внутренним образом (рис. 6), а также в случае, когда одна из окружностей заменяется на общую касательную соседних с ней окружностей (рис. 7).

Докажем наше утверждение в случае, показанном на рис. 8. Так как равнобедренные треугольники O_1AB и O_3MB подобны ($O_1A = O_1B$ и $O_3M = O_3B$ как радиусы окружностей O_1 и O_3), то $O_3M \parallel O_1A$, но $O_1A \perp KC$, поскольку A — точка касания окружности O_1 с прямой l, поэтому и $O_3M \perp KL$ и, таким образом, M — середина дуги KML, т. е. $\overset{\smile}{KM} = \overset{\smile}{ML}$. Тогда $\angle ACD = \angle LCD = 1/2\,\overset{\smile}{KM} - 1/2\,\overset{\smile}{DL} = 1/2\,\overset{\smile}{MD} = \angle MBD = \angle ABD$.

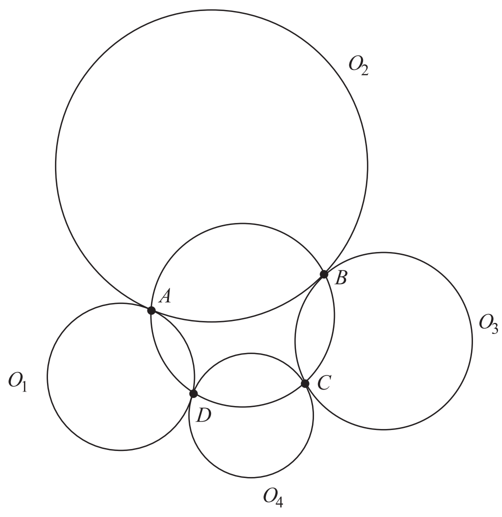

Рис. 5

Итак, мы получили, что $\angle ACD = \angle ABD$, откуда следует, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности. Заметим, что, если две окружности касаются внутренним образом, а две другие — внешним, то общая касательная должна быть внутренней, как на рис. 8, а во всех остальных случаях — внешней, как на рис. 7 и 9.

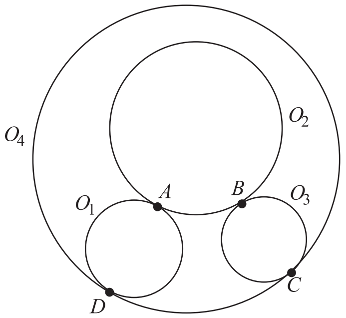

Рис. 6.

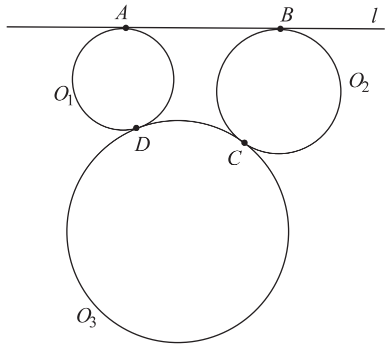

Рис. 7.

Попутно мы доказали следующий важный факт, который будет неоднократно использоваться в дальнейшем:

Предложение 2. *Пусть окружность O_2 касается окружности O_1 и хорды AB этой окружности в точках K и L соответственно. Тогда прямая KL проходит через середину дуги AB окружности O_1, не содержащей точку K (рис. 10).*

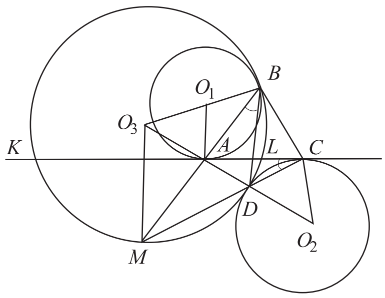

Рис. 8.

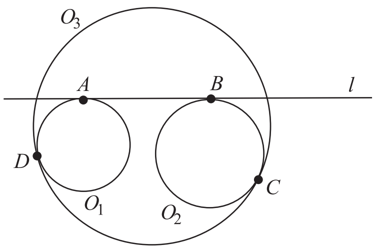

Рис. 9.

Упражнение 2. *Докажите, что, когда окружность O_2 касается окружности O_1 и продолжения хорды AB в точках K и L соответственно (рис. 11), то прямая KL проходит через середину дуги AB окружности O_1, содержащей точку K.*

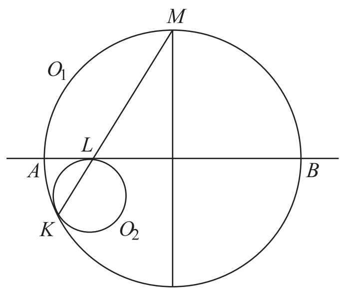

Рис. 10.

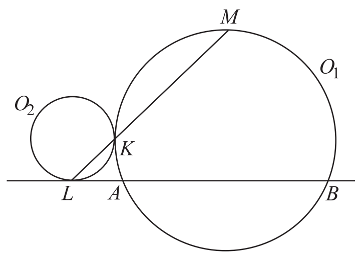

Рис. 11.

Обозначим теперь через A_a, B_a, C_a точки касания вневписанной окружности I_a треугольника ABC соответственно с прямыми BC, CA, AB (рис. 12). Аналогично, A_b, B_b, C_b и A_c, B_c, C_c — точки касания вневписанных окружностей I_b и I_c, а A_I, B_I, C_I — точки касания вписанной окружности I с этими же прямыми; F, F_a, F_b, F_c — как и раньше, внутренняя и внешняя точки Фейербаха.

Тогда, применяя доказанное выше утверждение, получим, что каждая из следующих шести четверок точек лежит на одной окружности: A_a, A_I, F_a, F; A_b, A_c, F_b, F_c; B_b, B_I, F_b, F; B_c, B_a, F_c, F_a; C_c, C_I, F_c, F; C_a, C_b, F_a, F_b.

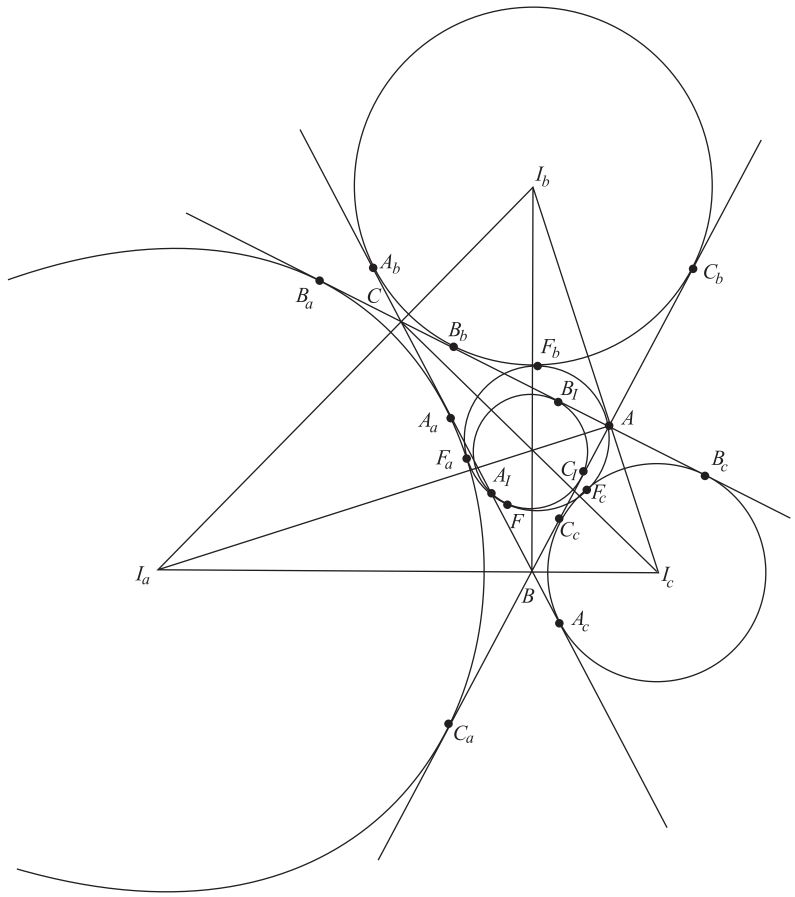

Рис. 12

Литература

[1] *Е. Д. Куланин.* О некоторых свойствах точек Фейербаха и Тебо. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», № 15, 2005.

[2] *Е. Д. Куланин.* Педальные треугольники, прямые Симсона и изогональность. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», № 13, 2005.

Куланин Евгений Дмитриевич,
профессор факультета информационных технологий
Московского городского психолого-педагогического
университета, кандидат физ.-мат. наук,
старший научный сотрудник.

E-mail: lucas03@mail.ru

За пределами квадратных уравнений

В. Б. Дроздов

В статье рассмотрены некоторые алгебраические уравнения степени больше двух, которые не входят в программу средней общеобразовательной школы. Предложены различные специальные приемы их решения, приведены результаты численных расчетов на калькуляторе.

Замечательное уравнение

В “Сборнике задач по специальному курсу элементарной математики” (автор П. С. Моденов, М.: “Высшая школа”, 1960) на страницах 71 и 72 приведены два совершенно однотипных уравнения №5* и №20:

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1; \;\; x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 5.$$

Это сразу привлекает внимание, тем более, что первое почему-то “со звездочкой”, а второе нет. Есть уравнения такого вида в современных пособиях для средней школы, например, в книге “Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа”, М., “Просвещение”, 1990. Встречаются они и на конкурсных экзаменах в ВУЗы. Все это побуждает исследовать и решить в общем виде уравнение

$$x^2 + \frac{a^2x^2}{(x+a)^2} = m^2, \tag{1}$$

где $a \neq 0$ и $m \neq 0$.

Прежде чем решать уравнение (1), исследуем его с помощью дифференциального исчисления. Запишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{a^2x^2}{(x+a)^2} = m^2 - x^2. \tag{2}$$

Графики обеих частей уравнения (2) $f(x) = m^2 - x^2$ и $g(x) = \frac{a^2x^2}{(x+a)^2}$ легко строятся. Они изображены на рис. 1 для $a > 0$ и на рис. 2 для $a < 0$.

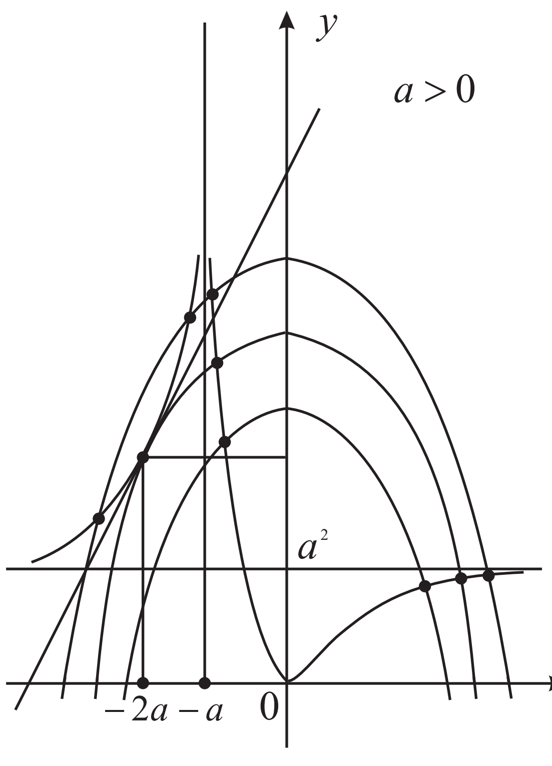

*Рис.*1

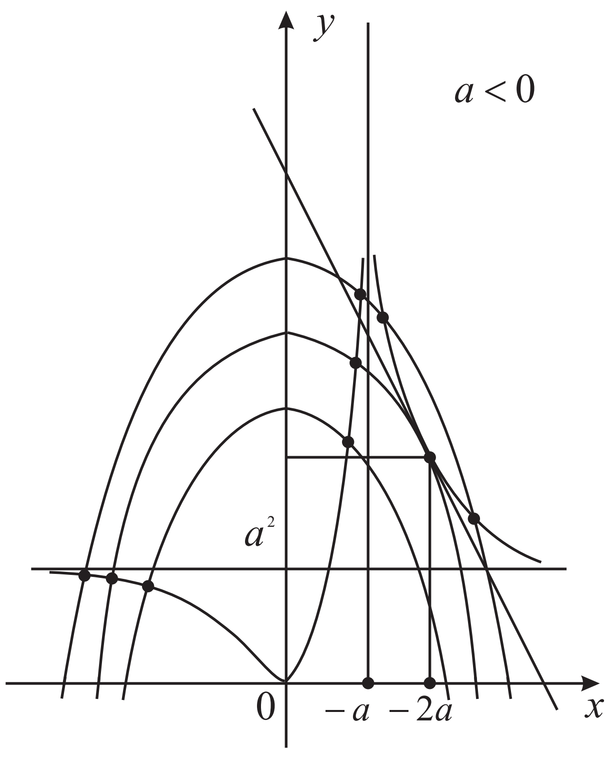

*Рис.*2

Ясно, что три действительных корня равносильные уравнения (1) и (2) будут иметь при условии касания кривых $f(x)$ и $g(x)$ в точке $M(x_1, y_1)$. Это означает, что графики двух функций имеют в точке M общую касательную. Очевидно, должна выполняться система уравнений

$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_1) \\ f'(x_1) = g'(x_1) \end{cases} \text{или, конкретно} \quad \begin{cases} m^2 - x_1^2 = \frac{a^2 x_1^2}{(x_1+a)^2}, \\ a^3 + (x_1 + a)^3 = 0, \end{cases}$$

откуда $(x_1)_1 = -2a$ и $(x_1)_{2,3} = a(1 \pm \sqrt{3})$. Между m и a получается, после исключения x_1, такое соотношение:

$$m^2 = 8a^2.$$

Геометрически понятно, что при $m^2 > 8a^2$ будет четыре действительных корня, а при $m^2 < 8a^2$ — два действительный и два комплексно-сопряженных корня. Знаки корней легко просматриваются из рисунков 1 и 2. Бо́льшего начала анализа дать не могут. Поэтому переходим к алгебраическим решениям уравнения (1).

1. Решение с помощью тождеств сокращенного умножения

Так как левая часть уравнения (1) есть сумма квадратов двух величин, то логично отнять от нее и прибавить удвоенное их произведение:

$$x_2 - 2x\frac{ax}{x+a} + \left(\frac{ax}{x+a}\right)^2 + \frac{2ax^2}{x+a} = m^2.$$

Далее следуют "технические" выкладки:

$$\left(x - \frac{ax}{x+a}\right)^2 + \frac{2ax^2}{x+a} = m^2; \quad \left(\frac{x^2}{x+a}\right)^2 + 2\cdot\frac{x^2}{x+a}\cdot a + a^2 = m^2 + a^2;$$

$$\left(\frac{x^2}{x+a} + a\right)^2 = m^2 + a^2; \quad \frac{x^2}{x+a} = \pm\sqrt{m^2+a^2} - a;$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{a^2 \pm a\sqrt{m^2+a^2}} = 0. \tag{3}$$

Получив два квадратных уравнения (3) относительно "обратного икса", решение можно, в принципе, считать законченным.

2. Решение разложением многочлена на множители

Уравнение (1) приводится к уравнению четвертой степени $f(x) = 0$, где $f(x) = x^4 + 2ax^3 + (2a^2 - m^2)x^2 - 2am^2x - m^2a^2$. Кстати, отрицательный свободный член — m^2a^2 в силу теоремы Виета свидетельствует, что уравнение (1) имеет нечетное число (т.е. один или три) отрицательных корней. Поскольку в выражение $\frac{a^2x^2}{(x+a)^2}$ величины x и a входят симметрично, вычислим выражение $f(x) - (x^2 + ax + a^2)^2$, в котором явно уничтожается x^4. Но мы получим гораздо бо́льшее — ликвидируется и кубический член: $f(x) - (x^2+ax+a^2)^2 = -(m^2+a^2)(x+a)^2$, откуда имеем уравнение $(x^2 + ax + a^2)^2 - (\sqrt{m^2+a^2}\cdot(x+a))^2 = 0$, распадающееся на два квадратных:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + (a + \sqrt{m^2+a^2})x + (a^2 + a\sqrt{m^2+a^2}) = 0, \\ x^2 + (a - \sqrt{m^2+a^2})x + (a^2 - a\sqrt{m^2+a^2}) = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

3. Решение сведением к биквадратному уравнению

Не всякое уравнение четвертой степени можно преобразовать к биквадратному, но уравнение (1) стоит попробовать:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a}\right)^2} = m^2.$$

Произведем замену переменной $\frac{1}{x}+\frac{1}{2a}=t$, тогда $\frac{1}{x}=t-\frac{1}{2a}$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=t+\frac{1}{2a}$. Относительно t приходим к уравнению $\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2a}\right)^2}+\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2a}\right)^2}=m^2$, или, после приведении к общему знаменателю, к биквадратному уравнению

$$2t^2+\frac{1}{2a^2}=m^2\left(t^2-\frac{1}{4a^2}\right)^2.$$

Удобно обозначить $t^2-\frac{1}{4a^2}=y$, тогда последнее уравнение упрощается: $\left(\frac{1}{y}\right)^2+2a^2\cdot\frac{1}{y}-m^2a^2=0$. Далее находим:

$$y=\frac{1}{-a^2\pm a\sqrt{m^2+a^2}};\;\; t^2=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{-a^2\pm a\sqrt{m^2+a^2}};$$

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2a}\right)^2=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{-a^2\pm a\sqrt{m^2+a^2}};\;\;\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{a^2\pm a\sqrt{m^2+a^2}}=0.$$

Мы пришли другим путем к уравнениям (3).

4. Решение приведением к системе уравнений

В ряде случаев алгебраическое уравнение можно привести к стандартно решаемой системе уравнений. Обозначим $\frac{ax}{x+a}=y$, тогда имеем:

$$x-y=\frac{x^2}{x+a};\quad 2xy=\frac{2ax^2}{x+a}=2a(x-y);\quad x^2+y^2=m^2.$$

Используем тождество $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$:

$$(x-y)^2+2a(x-y)-m^2=0,$$

откуда $x-y=-a\pm\sqrt{m^2+a^2}$. Таким образом, приходим к двум системам уравнений:

$$\begin{cases} x-y=-a\pm\sqrt{m^2+a^2},\\ xy=a(-a\pm\sqrt{m^2+a^2}). \end{cases}$$

Исключая y, приходим к уравнениям (4).

Посмотрим, наконец, что дают формулы (3) и (4) при решении какого-либо конкретного уравнения вида (1), например $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=9$. Тогда при $m^2=9$, $a=1$ по формулам (3)

$$x_{1,2,3,4}=\frac{2}{-1\pm\sqrt{1-\frac{4}{1\pm\sqrt{10}}}},$$

А по формулам (4)

$$x_{1,2,3,4}=\frac{-1\mp\sqrt{10}\pm\sqrt{7\mp2\sqrt{10}}}{2}.$$

Выражения в радикалах весьма громоздки, поэтому вычислим с помощью калькулятора корни и расположим их в порядке возрастания:

$$x_1\approx-2,492066037647536,\quad x_2\approx-1,670211622520842,$$

$$x_3\approx-0,744001939852252,\quad x_4\approx2,906279600020631.$$

Гиперболическая подстановка для кубического уравнения

Как хотелось бы учащимся, интересующимся математикой, уметь вычислять корни кубического уравнения

$$x^3+px+q=0 \tag{1}$$

по формулам, как это делается в случае квадратного уравнения! Однако на пути встает формула Кардано, получить и, самое главное, применить которую весьма сложно для школьника. Отметим, что полное приведенное уравнение $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ подстановкой $y = x - \frac{a}{3}$ приводит к виду (1), где p и q — действительные числа.

На помощь приходят комплексные числа, известные учащимся из углубленного и факультативного школьных курсов, а также гиперболические функции, которым посвящена литература, адресованная школьникам, см. [1-4].

Нам потребуются формулы:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \tag{2}$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \tag{3}$$

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2} \qquad \text{— косинус гиперболический,} \tag{4}$$

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2} \qquad \text{— синус гиперболический,} \tag{5}$$

опираясь на которые, весьма легко доказать, что

$$\operatorname{sh}(-t) = -\operatorname{sh} t \tag{6}$$

$$\operatorname{ch}(-t) = \operatorname{ch} t \tag{7}$$

$$\operatorname{sh} 3t = 3\operatorname{sh} t + 4\operatorname{sh}^3 t \tag{8}$$

$$\operatorname{ch} 3t = 4\operatorname{ch}^3 t - 3\operatorname{ch} t \tag{9}$$

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \tag{10}$$

$$\operatorname{ch}(it) = \cos t \tag{11}$$

$$\operatorname{sh}(it) = -i \sin t \tag{12}$$

Трудно не заметить поразительное сходство формулы (1) с формулами (8) и (9). Используя его, получим:

$$\begin{cases} x^3 + px + q = 0 \\ \operatorname{sh}^3 t + \frac{3}{4}\operatorname{sh} t - \frac{1}{4}\operatorname{sh} 3t = 0 \end{cases}$$

Естественно положить $x = a\operatorname{sh} t$. Так как $-\infty < \operatorname{sh} t < +\infty$, то, не умаляя общности, считаем $a > 0$. Получаем:

$$\begin{cases} \operatorname{sh}^3 t + \frac{p}{a^2}\operatorname{sh} t + \frac{q}{a^3} = 0, \\ \operatorname{sh}^3 t + \frac{3}{4}\operatorname{sh} t - \frac{1}{4}\operatorname{sh} 3t = 0, \end{cases}$$

откуда для определения a и t имеем систему уравнений:

$$\left\{ \frac{p}{a^2} = \frac{3}{4}, \quad \frac{q}{a^3} = -\frac{1}{4}\operatorname{sh} 3t \right.$$

Видим, что решение возможно лишь при $p > 0$. Легко находим, что $a = 2\sqrt{\frac{p}{3}}$, $\operatorname{sh} 3t = -\frac{q}{2} / \left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, $x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{sh} t$. Для определения оставшихся корней x_2 и x_3 применим к уравнению (1) теорему Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 x_2 x_3 = -q, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x_2 + x_3 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{sh} t \\ x_2 x_3 = -\frac{q}{2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{sh} t}. \end{cases}$$

После несложных преобразований и исключений q по формуле $q = -x_1^2 - px_1$ получим два комплексно-сопряженных корня

$$x_{2,3} = -\sqrt{\frac{p}{3}} \cdot (\operatorname{sh} t \pm i\sqrt{3}\operatorname{ch} t).$$

При $p > 0$ ищем x в виде $x = a\operatorname{ch} t$. Из сопоставления уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{ch}^3 t + \frac{p}{a^2}\operatorname{ch} t + \frac{q}{a^3} = 0 \\ \operatorname{ch}^3 t - \frac{3}{4}\operatorname{ch} t - \frac{1}{4}\operatorname{ch} 3t = 0 \end{cases}$$

имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{p}{a^2} = -\dfrac{3}{4}, \quad \dfrac{q}{a^3} = -\dfrac{1}{4}\operatorname{ch} 3t. \end{cases}$$

Так как $\operatorname{ch} 3t \geq 1$ (13), то $a < 0$, значит, $a = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Тогда $\operatorname{ch} 3t = \frac{\frac{q}{2}}{\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}$ (14) и $x_1 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{ch} t$ (15). Из формул (13) и (14) ясно, что решение возможно только при $\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \leq \frac{q}{2}$.

Аналогично ищем комплексно-сопряженные корни x_2 и x_3 из системы уравнений

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{ch} t \\ x_2 x_3 = -\frac{q}{2\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{ch} t}. \end{cases}$$

Вычисления дают: $x_{2,3} = \sqrt{-\frac{p}{3}}(\operatorname{ch} t \pm i\sqrt{3}\operatorname{sh} t)$. Если $\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{q}{2}$, то $t = 0$ и $x_1 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}$, $x_2 = x_3 = \sqrt{-\frac{p}{3}}$. Нетрудно проверить, что при $\frac{q}{2} \leq -\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ замена $x = -y$ сразу приводит к только что рассмотренному случаю с результатом:

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{ch} t, \quad x_{2,3} = -\sqrt{-\frac{p}{3}}(\operatorname{ch} t \pm i\sqrt{3}\operatorname{sh} t) \quad \text{при} \quad \operatorname{ch} 3t = -\frac{-\frac{q}{2}}{\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Если $\frac{q}{2} = -\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, то $t = 0$ и $x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$; $x_2 = x_3 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$.

Осталось разобрать самый интересный, так называемый “неприводимый” случай:

$$-\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}} < \frac{q}{2} < \left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Поскольку формула $\operatorname{ch} 3t = -\frac{\frac{q}{2}}{\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}$ неприменима, ибо $-1 < \frac{\frac{q}{2}}{\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} < 1$, положим $t = i\tau$, где τ — действительное число. Из формул (11), (12), (14), (15), (16) немедленно вытекает: $\cos 3\tau = \frac{\frac{q}{2}}{\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}$,

$$x_1 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\tau, \;\; x_{2,3} = \sqrt{-\frac{p}{3}}(\cos\tau \pm \sqrt{3}\sin\tau).$$

Итак, уравнение (1) в “неприводимом” случае имеет три действительных корня. Конечно, от учащихся не требуется запоминания вышеприведенных выкладок. Достаточно их понимания.

Итогом является таблица, охватывающая все возможные четыре варианта. Однако без калькулятора она имеет лишь теоретическое значение. Калькулятор открывает путь к скорому и весьма точному вычислению корней, играя принципиально важную роль. Решим, например, уравнение $x^3 - 3x - 10 = 0$. Видим, что оно относится ко второму варианту. Имеем: $\operatorname{ch} 3t = 5$; $t = 0,764143889$;

$$x_1 = 2\operatorname{ch} t = 2,612887864, \;\; x_{2,3} = -1,306443932 \pm 1,45615495i.$$

Обратим внимание на то, насколько формулы таблицы удобны для вычислений. Вот мы и смогли обойтись без формулы Кардано!

$p>0$	$p<0$	$p<0$	$p<0$
$-\infty<q<+\infty$	$-\infty<\frac{q}{2}\le-\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$	$-\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}<\frac{q}{2}<\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\le\frac{q}{2}<+\infty$
$\mathrm{sh}3t=-\dfrac{\frac{q}{2}}{\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}$	$\mathrm{ch}3t=\dfrac{-\frac{q}{2}}{\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}$	$\cos3\tau=\dfrac{\frac{q}{2}}{\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}$	$\mathrm{ch}3t=\dfrac{\frac{q}{2}}{\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}$
$x_1=2\sqrt{\frac{p}{3}}\mathrm{sh}t$	$x_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\mathrm{ch}t$	$x_1=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\tau$	$x_1=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\mathrm{ch}t$
$x_{2,3}=-\sqrt{\frac{p}{3}}(\mathrm{sh}t\pm i\sqrt{3}\mathrm{ch}t)$	$x_{2,3}=-\sqrt{\frac{p}{3}}(\mathrm{ch}t\pm i\sqrt{3}\mathrm{sh}t)$	$x_{2,3}=\sqrt{-\frac{p}{3}}(\cos\tau\pm i\sqrt{3}\sin\tau)$	$x_{2,3}=\sqrt{-\frac{p}{3}}(\mathrm{ch}t\pm i\sqrt{3}\mathrm{sh}t)$

Литература

1. В. Г. Шерватов. “Гиперболические функции” (“Популярные лекции по математике”, выпуск 16).

2. “Энциклопедический словарь юного математика” (Составитель Савин А.П.). М.: “Педагогика”, 1985.

3. Н. Я. Виленкин, С. И. Шварцбурд. “Математический анализ”, учебное пособие для IX-X классов средних школ с математической специализацией. М.: “Просвещение”, 1973.

4. Г. М. Гусак, Е. А. Гусак. “Функции и пределы”. Минск: “Вышэйшая школа”, 1987.

Дроздов Василий Борисович,
г. Рязань.

О существовании треугольника с заданными длинами двух биссектрис и чевианы из вершины третьего угла

Виктор Оксман

В статье рассматривается вопрос о существовании и единственности треугольника с заданными длинами биссектрис двух углов и чевианы, проведенной из вершины третьего угла (биссектриса, высота, медиана).

Введение

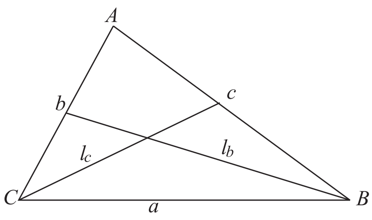

Рис. 1.

В настоящей статье установлена связь между стороной a и двумя другими сторонами треугольника, длины биссектрис двух углов которого равны заданным значениям l_b и l_c. Это позволяет в качестве простого следствия доказать известную теорему о существовании и единственности треугольника с заданными длинами трех биссектрис [1, 2] , а также получить аналогичный результат для некоторых других чевиан.

Обозначим в треугольнике ABC: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Длины биссектрис углов B и C обозначим соответственно l_b и l_c (рис. 1).

Лемма. *Даны три действительных числа $b, l_b, l_c > 0$. Для существования и единственности треугольника ABC, у которого $AC = b$ и длины биссектрис углов B и C равны l_b, l_c, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\underline{b} < b$, где*

$$\underline{b} = \begin{cases} l_c\left(1 + \dfrac{l_c - \sqrt{l_b^2 - l_b l_c + l_c^2}}{2(l_b - l_c)}\right), & l_b \neq l_c, \\ \dfrac{3}{4} l_b, & l_b = l_c. \end{cases}$$

Доказательство. В [3] доказано, что при заданных значениях $b, l_b, l_c > 0$ для существования и единственности треугольника ABC, у которого $AC = b$ и длины биссектрис углов B и C равны l_b, l_c, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$l_c \leq b \tag{1}$$

или

$$b < l_c < 2b \tag{2}$$

и

$$l_b > \frac{4bl_c(l_c - b)}{(2b - l_c)(3l_c - 2b)}. \tag{3}$$

Тогда, если $l_c > b$, из (3) следует, что

$$4b^2(l_b - l_c) + 4bl_c(l_c - 2l_b) + 3l_c^2 l_b < 0. \tag{4}$$

Если $l_b = l_c$, то $b > \frac{3}{4}l_b$. В двух других случаях $l_b < l_c$ и $l_b > l_c$ легко проверить , что из (2) и (3) следует, что

$$b > l_c\left(1 + \frac{l_c - \sqrt{l_b^2 - l_b l_c + l_c^2}}{2(l_b - l_c)}\right).$$

Таким образом, из доказанной леммы следует, что для любого $b \in (\underline{b}, \infty)$ существует единственный треугольник ABC с биссектрисами, равными l_b, l_c, и стороной $AC = b$, и поэтому существует единственное значение a для длины стороны BC. Из [4] получаем, что

$$a \in \left(\frac{\sqrt{l_b^2 + l_c^2}}{2}, \frac{l_b + l_c + \sqrt{l_b^2 - l_b l_c + l_c^2}}{2}\right) = (\underline{a}, \overline{a}).$$

Таким образом, мы можем определить функцию $f : (\underline{b}, \infty) \to (\underline{a}, \overline{a})$, $f(b) = a \Leftrightarrow$ существует треугольник ABC с заданными длинами биссектрис l_b, l_c и $BC = a$, $AC = b$.

Теорема. *Функция f непрерывна.*
Доказательство. Предположим, что b_0 — точка разрыва функции f, $b_0 \in (\underline{b}, \infty)$. Обозначим $f(b_0) = a_0$. Из известных формул геометрии $b = (a + c)\sqrt{1 - l_b^2/ac}$ и $c = (a + b)\sqrt{1 - l_c^2/ab}$ получаем:

$$F(b, a) = 0, \text{ где } F(b, a) = b - \left(a + (a + b)\sqrt{1 - l_c^2/ab}\right)\sqrt{1 - \frac{l_b^2}{a(a + b)\sqrt{1 - l_c^2/ab}}}.$$

Функция $F(b, a)$ удовлетворяет условиям *теоремы о неявных функциях* (см., например, [5]). Действительно, необходимо проверить, что

- F непрерывна в окрестности точки (b_0, a_0);
- $F(b_0, a_0) = 0$;
- частная производная F_a существует и непрерывна в точке (b_0, a_0) и $F_a(b_0, a_0) \neq 0$.

Рассмотрим прямоугольную область $R = [b_1, b_2] \times [a_1, a_2]$, $b_1, b_2 \in (\underline{b}, \infty), a_1, a_2 \in (\underline{a}, \overline{a})$, содержащую (b_0, a_0) в качестве внутренней точки. Тогда

1. Очевидно, что F непрерывна в R и $F(b_0, a_0) = 0$.
2. $$F_a = -\left(1 + \sqrt{1 - l_c^2/ab} + \frac{(a + b)l_c^2}{2a^2 b\sqrt{1 - l_c^2/ab}}\right)\sqrt{1 - \frac{l_b^2}{a(a + b)\sqrt{1 - l_c^2/ab}}} -$$
$$\left(a + (a + b)\sqrt{1 - l_c^2/ab}\right) \cdot \frac{(2a + b)\sqrt{1 - l_c^2/ab} + a(a + b) \cdot \frac{l_c^2}{2a^2 b\sqrt{1 - l_c^2/ab}}}{2 \cdot \sqrt{1 - \frac{l_b^2}{a(a+b)\sqrt{1 - l_c^2/ab}}}} \neq 0.$$

Таким образом, F_a существует и непрерывна в точке (b_0, a_0), и $F_a(b_0, a_0) \neq 0$.

Из теоремы о неявных функциях следует, что в некоторой окрестности $E \subseteq [b_1, b_2]$ точки b_0 существует единственная непрерывная функция $a = g(b)$, удовлетворяющая условиям $F(b, g(b)) = 0$ и $a_0 = g(b_0)$. Для любого $b \in E$ существует единственное значение a, удовлетворяющее $F(b, a) = 0$. Это означает, что $g(b) \equiv f(b)$ в E и, таким образом, f непрерывна в E (и, в частности, в точке b_0).

***

Для любого $a \in (\underline{a}, \overline{a})$ существует единственное значение $b \in (\underline{b}, \infty)$, обеспечивающее существование треугольника ABC с заданными l_b и l_c и с длинами сторон $BC = a$, $AC = b$. Следовательно, существует обратная функция

$$f^{-1} : (\underline{a}, \overline{a}) \to (\underline{b}, \infty), \quad f^{-1}(a) = b.$$

Из известной теоремы о непрерывных функциях следует,что f^{-1} — непрерывная монотонная функция. Легко проверить, что f^{-1} монотонно убывает.

Аналогичный результат может быть получен для стороны c.

***

Следствие 1. *Для любых заданных значений $l_a, l_b, l_c > 0$ существует единственный треугольник ABC, у которого длины биссектрис внутренних углов равны l_a, l_b, l_c.*

Доказательство. При заданных значениях $l_b, l_c > 0$ длины сторон b и c непрерывно убывают при возрастании a, поэтому $l_a = \sqrt{bc\,(1 - a^2/(b+c)^2)} = l(a)$ является непрерывной монотонно убывающей функцией, $a \in (\underline{a}, \overline{a})$, $l_{\underline{a}} = \sqrt{\underline{bc}\,\left(1 - \overline{a}^2/(\underline{b} + \underline{c})^2\right)} = 0$ и $\lim\limits_{a \to \underline{a}} l(a) = \infty$.

Таким образом, $l(a) : (\underline{a}, \overline{a}) \to (\infty, 0)$ и для заданного значения $l_a > 0$ существует единственный треугольник ABC, у которого длины биссектрис внутренних углов равны l_a, l_b, l_c.

Следствие 2. *Для заданного значения $h_a > 0$ существует единственный треугольник ABC, у которого длины биссектрис углов B и C равны l_b, l_c и длина высоты AH равна h_a.*

Доказательство. Площадь треугольника ABC равна

$$\frac{1}{2} h_a a = \frac{1}{2} ba \sin \angle ACB = \frac{1}{2}(a+b) l_c \sin \frac{\angle ACB}{2},$$

откуда

$$\cos \frac{\angle ACB}{2} = \frac{l_c(a+b)}{2ab} \quad \text{и} \quad \sin \frac{\angle ACB}{2} = \sqrt{1 - \frac{l_c^2(a+b)^2}{4a^2b^2}}.$$

Следовательно, для заданных значений $l_b, l_c > 0$

$$h_a = l_c \left(1 + \frac{b}{a}\right) \sqrt{1 - \frac{l_c^2(a+b)^2}{4a^2b^2}} = h(a) \tag{5}$$

и $h(a)$ непрерывна в интервале $(\underline{a}, \overline{a})$. Аналогично

$$h_a = l_b \left(1 + \frac{c}{a}\right) \sqrt{1 - \frac{l_b^2(a+c)^2}{4a^2c^2}}. \tag{6}$$

$a = b \cos \angle ACB + c \cos \angle ABC = bF_1(a, b) + cF_2(a, c)$, где

$$F_1(a, b) = \frac{l_c^2(a+b)^2}{2a^2b^2} - 1 \quad \text{и} \quad F_2(a, c) = \frac{l_b^2(a+c)^2}{2a^2c^2} - 1.$$

Если $a_1 < a_2, a_1, a_2 \in (\underline{a}, \overline{a})$ и

$$a_1 = b_1 F_1(a_1, b_1) + c_1 F_2(a_1, c_1), \quad a_2 = b_2 F_1(a_2, b_2) + c_2 F_2(a_2, c_2),$$

то $b_1 > b_2$, $c_1 > c_2$ и, следовательно, выполняется по крайней мере одно из неравенств

$$F_1(a_1, b_1) < F_1(a_2, b_2) \tag{7}$$

и

$$F_2(a_1, c_1) < F_2(a_2, c_2). \tag{8}$$

Тогда из (5) и (6) легко вытекает, что $h_a(a_1) > h_a(a_2)$. Таким образом, $h(a)$ — непрерывная монотонно убывающая функция.

Поскольку $\underline{h_a} = h(\overline{a}) = 0$ и $\lim\limits_{a\to\underline{a}} h(a) = \infty$, то для заданного значения $h_a > 0$ существует единственный треугольник ABC, у которого длины биссектрис углов B и C равны l_b, l_c, и длина высоты AH равна h_a.

Следствие 3. *Для заданного $k > 0$ рассмотрим на стороне BC треугольника ABC точку M, такую что $BM : MC = k$. Тогда для любых значений $l_b, l_c, t_a > |\underline{b}k - \underline{c}|/(k+1)$ существует единственный треугольник ABC, у которого длины биссектрис углов B и C равны l_b, l_c и длина чевианы AM равна t_a.*

Доказательство.

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, \qquad CM = \frac{a}{k+1},$$

$$AM^2 = b^2 + \left(\frac{a}{k+1}\right)^2 - \frac{a^2+b^2-c^2}{k+1} = \frac{b^2(k^2+k)+c^2(k+1)-a^2k}{(k+1)^2} = t(a)$$

(см. рис. 2).

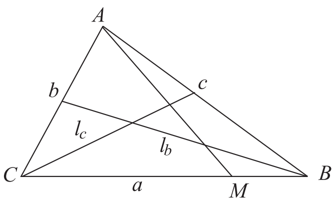

Рис. 2.

При непрерывном убывании a от $\overline{a}$ до $\underline{a}$ величина AM непрерывно возрастает от

$$\underline{AM} = \sqrt{\frac{\underline{b}^2(k^2+k)+\underline{c}^2(k+1)-\overline{a}^2k}{(k+1)^2}} = \frac{\sqrt{\underline{b}^2k^2-2\underline{b}\underline{c}k+\underline{c}^2}}{k+1} =$$
$$= \frac{|\underline{b}k-\underline{c}|}{k+1}\underline{AL} = \sqrt{\frac{\underline{b}^2(k^2+k)+\underline{c}^2(k+1)-\overline{a}^2k}{(k+1)^2}} = \frac{\sqrt{\underline{b}^2k^2+\underline{c}^2}}{k+1}$$

до ∞. Поэтому для заданных $l_b, l_c, t_a > \frac{|\underline{b}k-\underline{c}|}{k+1}$ существует единственный треугольник ABC, у которого длины биссектрис углов B и C равны l_b, l_c, и длина чевианы AM равна t_a. В частности, для медианы m_a $(k=1)$ и $l_b \neq l_c$ получим неравенство

$$\underline{m_a} = \frac{1}{2}\left| l_c\left(1+\frac{l_c-\sqrt{l_b^2-l_bl_c+l_c^2}}{2(l_b-l_c)}\right) - l_b\left(1+\frac{l_b-\sqrt{l_b^2-l_bl_c+l_c^2}}{2(l_c-l_b)}\right)\right| < m_a < \infty,$$

а для $l_b = l_c$ (равнобедренный треугольник): $0 < m_a < \infty$.

Литература

[1] P. Mironescu and L. Panaitopol. The Existence of a Triangle with Prescribed Angle Bisector Lengths, *Amer. Math. Monthly*, **101** (1994), 58–60.

[2] А. Жуков, И. Акулич. Однозначно ли определяется треугольник? *Квант*, 2003, № 1, 29–31.

[3] V. Oxman. On the existence of Triangles with Given Lengths of One Side, the Opposite and One Adjacent Angle Bisectors, *Forum Geom.*, V. 5 (2005) 21–22.

[4] V. Oxman, On the existence of Triangles with Given Lengths of One Side and Two Adjacent Angle Bisectors, *Forum Geom.*, V. 4 (2004) 215–218.

[5] Implicit function, Encyclopaedia of Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002, SpringerLink (http://eom.springer.de/i/i050310.htm).

Виктор Оксман,
Колледж Западной Галилеи, Израиль.

E-mail: victor.oxman@gmail.com

Может ли визуализация развивать причинно-следственное мышление

Дж. Малати

Визуализация (наглядное, графическое представление) широко используется в преподавании математики. Автор, на примере темы равенства обыкновенных дробей, показывает, что привычные способы визуализации, являясь статичными, объяснительными, не побуждают учащихся к поиску причинно-следственных связей, лежащих за математическим соотношением, и могут иногда вводить в заблуждение. В качестве альтернативы автор предлагает вариант динамичной, интерактивной визуализации. По материалам обучения математике в Финляндии и Венгрии.

Мне дороже открыть одну причину,
чем получить Персидское королевство.

Демокрит (примерно 460–370 до н.э.)

1. Современное использование визуализации понятий и отношений

На занятиях в классе, в различных учебниках визуализация применяется для наглядного представления математических понятий и отношений. При этом возникают определенные проблемы. В некоторых случаях визуализация не позволяет детям увидеть обобщение тех или иных соотношений. В других случаях она может наглядно представлять соотношение, но не вскрывает причину его происхождения. Иными словами, учебники используют ее, чтобы “перепрыгивать” к заключениям, сделать которые она сама по себе на позволяет. Самая распространенная проблема заключается в том, что визуализация предлагает статичное использование готовой модели и оставляет ученикам мало простора для поиска причинно-следственных связей.

2. Пример

Понятие равенства дробей — существенная часть программы по математики в начальной школе. В Финляндии, как и в некоторых других странах, умножение числителя и знаменателя дроби на натуральное число, дающее в итоге равную дробь, выделяется как отдельная операция и имеет специальное название “расширение”. Для выполнения этой операции применяются даже специальные обозначения.

Например, когда мы “расширяем” дробь $\frac{1}{2}$ при помощи числа 3 для получения равной дроби $\frac{3}{6}$, мы записываем это действие так:

$$^{3)}\,\frac{1}{2}=\frac{3}{6}.$$

Обычно для обоснования этого равенства используется следующая визуализация:

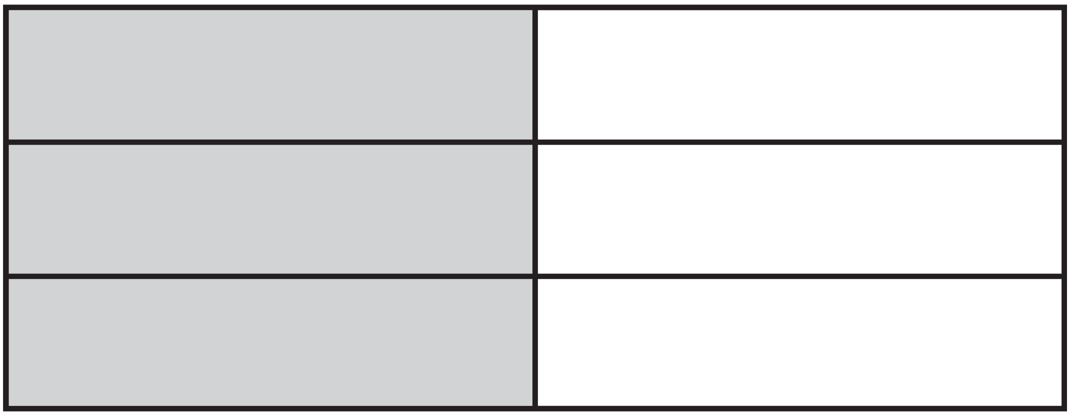

Рис. 1

Действительно, этот рисунок иллюстрирует, что $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, но при этом возникают две педагогические проблемы. Первая заключается в том, что рисунок сам по себе не вскрывает обоснованной причины умножения числителя и знаменателя дроби $\frac{1}{2}$ на 3. Рисунок сам по себе ничего не говорит об умножении вообще. Вторая — в том, что мы не можем, вообще говоря, основываясь на этом рисунке, заключить, что умножение числителя и знаменателя дроби на натуральное число всегда приводит к равной дроби. В следующем разделе мы более подробно обсудим первую проблему.

3. Проблема обоснования

Чтобы объяснить, почему рис. 1 сам по себе не обосновывает умножение числителя и знаменателя дроби $\frac{1}{2}$ на 3, чтобы получить дробь $\frac{3}{6}$, обсудим следующую ситуацию.

Допустим, мы используем рис. 1, чтобы прийти к заключению о равенстве $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, но объясняем, как мы можем перейти от $\frac{1}{2}$ к $\frac{3}{6}$, следующим образом:

$$3)\ \frac{1}{2} = \frac{3^1}{3^2 - 3} = \frac{3}{9 - 3} = \frac{3}{6}.$$

Другими словами, можно перейти от дроби $\frac{1}{2}$ к $\frac{3}{6}$ при помощи числа 3 разными способами, не обязательно умножая числитель и знаменатель дроби на 3.

4. Как улучшить применение визуализации

В Финляндии, как и во многих других странах, предпринимаются различные попытки улучшать использование визуализации. Мы развиваем тот или иной способ визуализации и поразному апробируем его, например на курсах математического клуба нашего университета. Стоит отметить также специальную подготовку учителей, как во время предпрофессиональной работы, так и на курсах повышения квалификации, это же относится и к авторам школьных учебников.

Приведем некоторые характерные черты развиваемого нами типа визуализации:

1) Фигура, применяемая для визуализации некоторой математической целостности, должна быть как можно проще.

2) Фигура должна быть изоморфна визуализируемой математической целостности.

Эти характерные черты указывают направления, в которых можно улучшать использование визуализации:

1) Визуализация должна являться путем к пониманию математических принципов в наиболее общей форме.

2) Визуализация должна стимулировать учеников искать причину, по которой математический принцип является верным.

Эти два направления показывают, что визуализация служит не для демонстрации обоснования принципа, а для мотивации к поиску такого обоснования.

5. Пример улучшения

В качестве примера рассмотрим улучшение визуализации, которое мы сделали при обучении принципу расширения дробей.

Сначала мы рисуем прямоугольник для представления целого. После этого мы просим детей разделить прямоугольник на два равных прямоугольника при помощи отрезка и закрасить одну из двух половин, рис. 2.

Рис. 2

Теперь мы предлагаем детям определить, с какой долей единицы мы имеем дело, и сколько таких долей показано на рис. 2. Мы просим обратить внимание на закрашенный прямоугольник как на представление дроби $\frac{1}{2}$. После этого мы делим закрашенный прямоугольник на три равных прямоугольника и затем закрашиваем один из этих трех прямоугольников более темным, рис. 3.

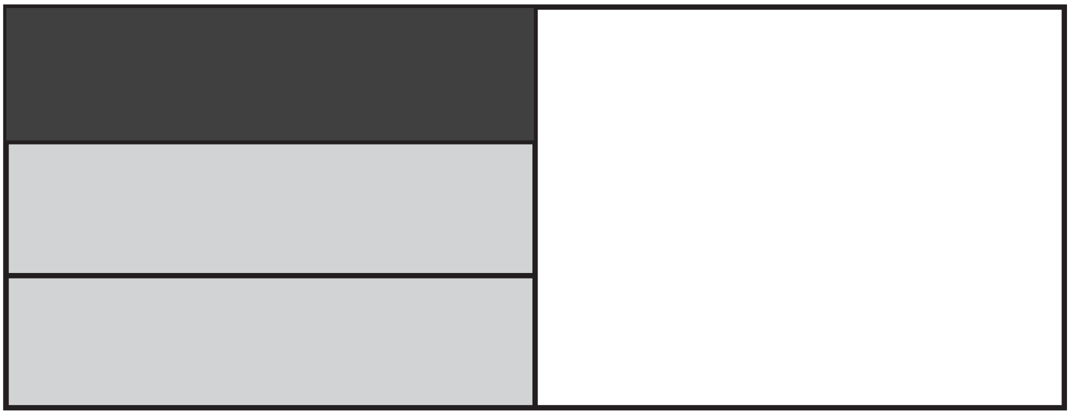

Рис. 3

Далее мы просим детей рассмотреть темный прямоугольник в качестве новой доли единицы и сказать, сколько таких долей видно. Мы подходим к **решающему вопросу**: сколько раз по три таких доли содержится в целом прямоугольнике? Приходим к обсуждению неопределенного выражения

$$\frac{1}{2} = \frac{? \times 3}{? \times 3},$$

в котором число 3 пишем красным цветом.

Итак, мы спрашиваем детей, какую новую долю единицы мы получаем, сколько их в половине, и сколько их в целом.

Чтобы продемонстрировать преимущества нашего способа визуализации, обсудим вкратце следующий рисунок:

Рис. 4

Мы можем использовать его, чтобы найти числа, которыми надо заменить знаки вопроса в следующем неопределенном выражении:

$$\frac{2}{3} = \frac{? \times 5}{? \times ?}.$$

Эта визуализация позволяет детям понять, что мы переходим от доли $\frac{1}{3}$ к $\frac{1}{15}$. Рисунок 4 наглядно представляет сомножители: **множимое** и **множитель**. Напротив, деление целого прямоугольника на рис. 4 на 15 равных прямоугольников, аналогично рис. 1, не помогает увидеть идею, стоящую за умножением числителя и знаменателя дроби $\frac{2}{3}$ на 5.

6. Заключение

Рассмотренный в этой небольшой заметке пример позволяет показать, как визуализация может быть средством мотивации детей к поиску причин, стоящих за тем или иным принципом, а также к поиску возможностей обобщения. Она не является статичной демонстрацией некоторого факта, но средством развития причинно-следственного мышления или, другими словами, привычки к поиску причин. Это образец динамической интерактивной визуализации, которая, наряду с другими, позволяет развивать всю совокупность визуальных средств.

Литература (приведены только публикации на английском языке):

1. Malaty, G. Can young children learn abstract ideas in geometry? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 5 (1994), 751–758.

2. Malaty, G. Joensuu and mathematical thinking. In: *Mathematics for Tomorrow's Young Children.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 302–316.

3. Malaty, G. From mathematics for living to living for mathematics. In: *Proceedings of the International Conference Mathematics Education into the 21-st Century "Mathematics for Living"*, 209–213.

Перевод с английского: В. М. Имайкин.

Малати Джордж,
профессор Университета Йоенсуу, Финляндия.

E-mail: george.malaty@joensuu.fi

О математике размерностей (к вопросу о математике XXI века). Окончание

А. Н. Митрохин

Во второй части статьи (начало см. “Математическое образование” №2(37), 2006 г.) автор показывает, что система размерностей величин, используемых в научной и инженерной практике и утвержденных, в частности, в России Государственным Стандартом, еще далека от логического совершенства. Это создает определенные трудности в практической работе исследователей и инженеров.

Они из чисел делают физические тела,
у которых есть тяжесть и легкость.

Аристотель, Метафизика.

Математика для инженера есть инструмент такой же,
как штангель, зубило, ручник, напильник для слесаря.

Академик А. Н. Крылов, Собрание сочинений, т.2.

По роду своей практической деятельности автору статьи приходится постоянно пользоваться единицами измерений, относящимися к механике. Применение некоторых из них всегда требует дополнительных уточнений, касается ли это освоения содержания учебной и технической литературы, преподавательской деятельности, расчетов или же разработки нормативной документации машин и механизмов. К таким “неудобным” физическим величинам автор относит в первую очередь частоту вращения, угловую скорость, частоту (частоту периодического процесса, частоту периодического колебания), угловую частоту гармонического колебания. Причиной неудобств является то обстоятельство, что вышеперечисленные физические величины при своей смысловой неоднородности имеют, если внимательно изучить международные и отечественные метрологические стандарты, основанные на Международной системе единиц измерения (СИ), возможность двойственной записи единиц измерения упомянутых величин, а именно: например “Герц”, “оборот в секунду”, “колебание в секунду”, “радиан в секунду” могут быть сведены к одной мере — “секунде в минус первой степени” или кратко к “c^{-1}”. Соответственно размерность упомянутых физических величин определена как время в минус первой степени, сокращенно T^{-1}. Так, например, ГОСТ 8.417-81[1] [1] в таблице 4 отождествляет единицу измерения частоты 1[Герц] и $1[c^{-1}]$, а в таблице 7 единицу измерения частоты вращения 1[оборот/c] и $1[c^{-1}]$. В свою очередь международный стандарт ISO 31-0 [2] считает эквивалентной запись единицы измерения угловой скорости в виде 1[радиан/c] или $1[c^{-1}]$ и также уравнивает 1[Герц] и $1[c^{-1}]$. При этом ГОСТ 24347-80 [3] в отношении угловой частоты гармонических колебаний предусматривает, в отличие от международного стандарта [2], запись единицы измерения этой физической величины только в виде “радиан/c”.

В чем состоит проблема при практическом применении единиц измерения СИ в отношении упомянутых разнородных физических величин? Поясним существующее положение на простом примере. Запишем следующее равенство:

$$1[c^{-1}] + 1[c^{-1}] + 1[c^{-1}] = 3[c^{-1}]. \tag{1}$$

Имея такую запись, невозможно однозначно определить, что же мы суммировали: частоты периодического процесса, частоты вращения или же угловые скорости, или по ошибке и то, и другое, и третье. И далее, если перед нами представлено количественное значение величины,

[1] С 01.09.2003 г. введен в действие ГОСТ 8.417-2002. Несмотря на обновленную редакцию, практически ничего не изменилось в отношении тех вопросов, которые рассматриваются в статье.

измеренное в “c^{-1}”, то как определить, что это — оборот в секунду, колебание в секунду или радиан в секунду? Ответа на этот вопрос СИ и основанные на ней метрологические стандарты нам не дадут. Более того, они могут ввести нас в прямое заблуждение в зависимости от того, каким документом мы воспользуемся и какую страницу документа откроем. Заметим, что такой неопределенности не возникло, если бы в равенстве (1) вместо “c^{-1}” стояли “Герцы”, или “обороты в секунду”, или “радианы в секунду”. В подтверждение рассмотрим один из многочисленных, случайно выбранных из технической литературы примеров, имеющих отношение к рассматриваемому вопросу. Так, в статье [4] в таблице на стр.15 представлены цифровые данные расчетов собственных частот колебаний гибкого колеса волновой торцовой передачи, измеренные в “c^{-1}”. Но, согласно упомянутым нормативным документам, это может быть и частота периодического процесса — наименование единицы измерения “Герц”, и угловая частота гармонических колебаний — наименование единицы измерения “радиан в секунду”. И для правильного истолкования данных необходимо тщательно изучить всю статью для выяснения, что же в конце концов получено, и не спутать при этом угловую частоту гармонических колебаний с частотой колебаний, учитывая такой прискорбный факт, что ряд авторов настойчиво внедряют тезис о том, что частота колебаний и угловая частота гармонических колебаний могут называться одним термином — частотой колебаний [5, 6, 7, 8]. Но, как известно, в том числе и авторам такого предложения, физические величины “частота колебаний” и “угловая частота гармонических колебаний” связаны соотношением $f = \omega/\pi$, т.е. частота колебаний всегда меньше угловой частоты колебаний в 6,283... раза, и поэтому нельзя рекомендовать пользоваться одним термином для этих разнородных понятий. Проблема здесь, конечно, состоит в том, что согласно СИ измерение обеих величин может быть осуществлено одной и той же единицей измерения — “c^{-1}”, обе величины имеют размерность — T^{-1}. И это дает серьезные основания выдвигать подобные, неверные в своей основе, утверждения. Поэтому, возвращаясь к рассматриваемой статье [4], непосредственно из таблицы упомянутой статьи мы фактически не можем определить, что же на самом деле получено: “Герцы” или “радианы в секунду”, хотя по утверждению авторов статьи искомая физическая величина есть собственная частота колебаний — частота, как указано в таблице, т.е. мы вправе предположить, что под “секундой в минус первой степени” подразумевается “Герц”, что, кстати, однозначно вытекает из [1] и [3]. Однако полный анализ материала статьи [4] показывает, что на самом деле в таблице представлены численные значения угловых частот гармонических колебаний, т.е. физической величины, имеющей, согласно [3], единицу измерения “радиан в секунду”, сокращенно “рад/c”. Поэтому количественные значения, записанные в таблице, фактически не являются частотами в полном смысле этого слова. И причиной путаницы явилась “секунда в минус первой степени”, а в целом недостатки СИ, тесно связанные с математическим аппаратом, перенесенные в международные и государственные метрологические стандарты и далее на страницы учебной, научной и технической литературы.

Об имеющихся “белых пятнах” идет речь в работе [9], где исследуется понятийный аппарат точных наук — математики, метрологии, физики. Будучи прикладником в области механики, автор статьи не может обходиться без математики, без физических и математических моделей, где в единстве присутствуют и числа, и знаки математических операций, и единицы измерения. Одной из таких моделей, хорошо известной во многих разделах наук (механика, электротехника, радиотехника, оптика, гидравлика, теория звуковых колебаний и др.) является уравнение колебательного движения, которое в механике записывается следующим образом [10]:

$$X''[\textit{м}/c^2] + \omega^2[1/c^2] \cdot X[\textit{м}] = 0, \tag{2}$$

где X'' — вторая производная от пути по времени — ускорение, ω — угловая частота гармонических колебаний. Решение уравнения (2):

$$X[\textit{м}] = A[\textit{м}]\sin(\omega[\text{рад}/c]\ t[c]). \tag{3}$$

Замечаем, что в исходном уравнении (2) угловая частота гармонических колебаний “ω” измеряется в “$1/c$” или как принято сейчас записывать согласно СИ в “c^{-1}”. Но из решения (3) уравнения (2) следует, что вместо единицы в размерность "ω" должна входить единица измерения плоского угла, причем это должны быть не угловые градус, минута или секунда, а именно радиан, чего явно не следует из уравнения (2). Этот шаг в прикладной теории колебаний из-за, если можно так выразиться, безвыходности положения вынужденный и принят для возможности получения правильного решения уравнения (2). Переход от "$1/c$" к "рад$/c$" несомненно является исключением из правил образования размерностей и требует дополнительных разъяснений.

Итак, из сопоставления уравнений (2) и (3) следует, что "ω", измеренная в "$1/c$" в уравнении (2), приравнивается самой себе, измеренной уже в "рад$/c$" в уравнении (3), и мы вынуждены записать:

$$1[1/c] = 1[\textit{рад}/c]. \tag{4}$$

В то же время ГОСТ 24346-80 [11] определяет угловую частоту гармонических колебаний "ω" как производную по времени от фазы гармонического колебания, равную частоте, умноженную на 2π:

$$(\varphi)' = d\varphi/dt = \omega = f \cdot 2\pi, \tag{5}$$

откуда:

$$1[1/c] = 6,283[\textit{рад}/c]. \tag{6}$$

Таким образом, в одном случае (дифференциальное уравнение колебаний гармонического осциллятора) имеем $1[1/c] = 1$[рад$/c$], а в другом (определение угловой частоты гармонических колебаний согласно ГОСТ 24346-80) $1[1/c] = 6{,}283$[рад$/c$], что представляет собой существенную неувязку. Из исходного уравнения (2) также следует, что "ω", судя по ее размерности — "c^{-1}", может выражать собой, согласно ГОСТ 8.417, и угловую скорость, и частоту вращения, и частоту колебания, но в решении (3) уравнения колебательного движения это уже, согласно ГОСТ 24347-80 [3], угловая частота гармонических колебаний.

Из равенств (2) – (6) уже ясно видны неувязки с размерностями и среди них четкие очертания приобретает "радианная" проблема, которая в математической интерпретации предстает в виде равенства:

$$\text{РАДИАН} = 1. \tag{7}$$

Осмыслить математическое равенство (7), очень простое по своему виду, опираясь на современную научную парадигму, невозможно. Равенство (7) воспринимается скорее всего как досадное недоразумение, чем как серьезное предупреждение о неблагополучии понятийного аппарата математики. Перед нами, конечно, фрагмент того, во что верили пифагорейцы — все вещи суть числа. Без сомнения равенство (7) — не математика и не наука, это самая настоящая мистика. Количественная категория ни при каких условиях не может быть отождествлена с качественной категорией. Такое равенство логически абсурдно и не имеет права на существование. Это хорошее "белое пятно", которое не может не привлечь внимания особенно с математической точки зрения.

"Радианная" проблема, выраженная равенствами (2) – (7), давно уже в полный рост стоит в метрологии. Отечественные и зарубежные метрологи долгое время не могут придти к соглашению о статусе радиана — считать ее дополнительной или основной единицей измерения. Часть отечественных метрологов полагает, что радиан должен быть отнесен к *основным* единицам измерения СИ и обладать таким же статусом, как, например, основная мера времени — секунда [12], другая половина относит радиан к *безразмерным внесистемным* единицам измерения [13] и оспаривает решение XX Генеральной конференции по мерам и весам 1995 г., которая отнесла радиан к *производным* единицам измерения, исключив из употребления дополнительные единицы измерения [13, с.4]. В целом же ситуация в данном вопросе остается таковой, что ни математика, ни известные размерностные системы, ни другие естественные науки не дают убедительных решения "радианной" проблемы. Остается законным вопрос — почему единица измерения плоского угла радиан, да и остальные угловые меры, обладают свойствами, которые у других единиц измерения физических величин отсутствуют? Однозначного ответа на этот вопрос в настоящее время у науки нет[2].

[2]В работе [9] предложено нетривиальное решение "радианной" проблемы.

Как уже заметил читатель, автор статьи, обсуждая содержание математики, постоянно вплетает в математический аппарат размерностную составляющую[3]. В самом деле, так ли уж математика свободна от мира размерностей? Рассмотрим известные математические операции:

$$\begin{gathered} A + B = C, \\ A \times B = D, \\ A : B = E, \\ \sin A = B, \\ (X^2)' = 2X. \end{gathered} \tag{8}$$

Записанные в алгебраическом виде равенства (8) не вызывают вопросов, в них все правильно. По логике вещей после подстановки численных значений дополнительных вопросов также не должно возникать. Действительно, к операциям сложения, умножения и деления претензий как будто бы нет, однако тригонометрическая операция и операция взятия производной явно не укладываются только в числовые рамки. Так, вычисление синуса, наряду с указанием числового значения, требует применения угловых мер (радиана, градуса, минуты, секунды); операция взятия производной требует уточнения: если "X" — константа (число), то производная будет равна нулю, если "X" — переменная, то мы получаем результат, представленный в уравнении (8). Возникает естественный вопрос — что же в таком случае изучает математика, только ли операции над числами? Не тесновато ли ей в этом числовом "костюмчике", сшитом пифагорейцами?

Увлекшись в свое время решением "радианной" проблемы, которая заставила детально анализировать тему размерностей в математике, метрологии, физике, а данная проблема пронизывает все перечисленные научные ветви, мною обнаружен ряд неувязок, имеющих непосредственное отношение к математике [9, 15]. Вот некоторые из них в сжатом виде, частично представленные в настоящей статье:

- анализ математических операций, начиная от действий счета и сложения-вычитания до взятия производной и нахождения первообразной, показывает, что количественные преобразования сопровождаются не только влиянием (счет, сложение-вычитание), но и самим взаимодействием и изменением в той или иной форме размерностей математических величин (умножение-деление, тригонометрические операции), при этом очевидность необходимости учета взаимодействия размерностей увеличивается по мере перехода от простых форм математических преобразований к более сложным, где преобладающими являются преобразования не над количественными, а над качественными частями математических величин (взятие производной — нахождение первообразной);

- основополагающие математические понятия, которые составляют сущность математики, такие как "математическая величина", "функция", "угол" и другие, характеризуются в настоящее время неоднозначностью их толкования; например, понятие угла имеет несколько толкований в математической интерпретации, но, как правило, он определяется как фигура или участок; рассматривая угол как фигуру или участок, в дополнение к этой неоднозначности, можно видеть такую необъяснимую картину, что одинаковые по величине углы могут иметь неравновеликие фигуры и участки;

- в дифференциальном уравнении колебательного движения, рассматриваемом в математике, механике, электротехнике, теории автоматического управления и других разделах наук, отсутствует единый понятийный подход к физической величине, именуемой согласно ГОСТ 24346-80 "угловой частотой колебаний", при этом указанная физическая величина в

[3] Автор статьи не одинок в своем стремлении рассматривать в математике единство числа и меры. В начале XX столетия Н. А. Морозовым [14] сформулирован даже закон изотезичности математических равенств, звучащий следующим образом: всякое математическое равенство заключает в себе полный и законченный логический смысл только в том случае, когда обе его части изотезичны, т.е. представляют те же самые тезисы, состоящие из одноименных величин.

исходном уравнении колебательного движения имеет размерность “1/секунду”, а в его решении, в силу вхождения этого параметра под знак тригонометрической функции, обязана иметь размерность в “радиан/секунду” и если следовать правилам СИ и ГОСТ 8.417, то данная физическая величина в исходном уравнении колебательного движения, судя по ее размерности, может выражать собой и частоту вращения, и частоту колебания, и угловую скорость, но в решении уравнения колебательного движения это уже однозначно угловая частота гармонических колебаний;

- из анализа исходного уравнения колебательного движения и его решения следует, что “радиан=1” и это непонятное математическое равенство, в котором качественное понятие отождествляется с количественным, математикой не исследуется и не объясняется, хотя в размерностном анализе, на основании того, что размерность угла $[\varphi] = l/r = L/L = 1$, утверждается, что угол не имеет размерности; парадокс заключается в том, что следом авторами исследований говорится совершенно обратное, т.е. о наличии размерности угла, и с этими доводами также нельзя не согласиться, т.к. если имеется единица измерения, то существует и размерность; полемика о размерности плоского угла в науке продолжается и сейчас;

- исходное дифференциальное уравнение колебательного движения и его решение приводят к следующему равенству: 1[1/секунду]=1[радиан/секунду]; в то же время, согласно ГОСТ 24346-80, угловая частота колебаний определена как частота колебаний, умноженная на 2π, откуда следует, что 1[1/секунду]=6,283[радиан/секунду];

- ни одна из размерностных систем не определяет в качестве единицы измерения физическую константу π, которая повсеместно входит во всю учебную, научную и техническую литературу и несет двойственную смысловую нагрузку: как отношение длины окружности к диаметру окружности и как радианная мера измерения углов.

Следует ли обращать внимание на перечисленные неувязки? Может быть это всего лишь лингвистические шероховатости, ни к математике, ни к реальной практике не имеющие отношения? Вовсе нет: как показано выше в настоящей статье и в [9, 15], недостатки понятийного аппарата отрицательно отражаются на изложении метрологических стандартов, пользование которыми по этой причине затруднено и может привести к ошибочному восприятию результатов расчетов. Конечно, все это в полной мере присутствует в учебном процессе школ и вузов, о чем говорится, например, в статье [16]. Устранение имеющихся неувязок автор статьи посчитал важной задачей и решение ее начал с допущения о неразрывности содержимого математической величины, состоящей из количественной (числа) и качественной (меры) частей, полагая, что математика объективно является точной наукой не только в операциях над числами, но и при взаимодействии размерностей. Ведь никто не станет сомневаться в том, что соблюдение правил строгого взаимосоответствия двух взаимосвязанных частей (числа и размерности) математических величин одинаково важно для получения субъектом исследования правильного результата.

По затронутой автором проблеме взаимосвязи числа и меры профессор В. А. Слаев — академик Российской метрологической академии им. Д.И.Менделеева — высказался следующим образом в отзыве на [9], обсужденном на семинаре, состоявшемся 20.03.1998 г. во ВНИИМ им. Д. И. Менделеева в С-Петербурге: “Автором выдвигается *гипотеза о единстве количественного и качественного в математических преобразованиях.* Такая гипотеза не вызывает каких-либо возражений, исходя из того, что человеческое познание, в силу несовершенства разума, постоянно использует в процессе своей познавательной деятельности дихотомию и “разбивает” единую сущность на противоположности. Для углубленного анализа каждой из выделенных противоположностей это предоставляет дополнительные возможности. Однако завершаться этот процесс должен синтезом. И здесь уместно вспомнить о единстве количества и качества, в том числе в математических преобразованиях”.

Литература

[1] ГОСТ 8.417-81. Государственная система обеспечения единства измерений. Единицы физических величин. М.: Издательство стандартов. 1982. - 40 с.

[2] Quantities and Units - Part 0: General principles. International Standard ISO 31-0: 1992 (E). Third edition 1992-08-01. Switzerland. - 1992. - 21 p.

[3] ГОСТ 24347-80. Вибрация. Обозначения и единицы величин. М.: Изд. стандартов. 1980. - 5 с.

[4] Клеников С.С., Семин С.И. Определение собственных частот неосесимметричных колебаний гибкого колеса волновой торцовой передачи. // Изв. вузов. Машиностроение. №4-6. - 1992. - с.12-15.

[5] Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б. Физика: Учебник для 11 класса средней школы - М.: Просвещение, 1991. - 254 с.

[6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Теоретическая физика: Учебное пособие. - В 10 т. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988-1993.

[7] Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: Учебник. Т.2. Динамика. - 3-е изд., исправленное и дополненное. - М.: Наука. 1985. - 496 с.

[8] Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. - 4-е изд., перераб. и доп. - Л.: Политехника. 1990. - 272 с.

[9] Митрохин А.Н. О взаимодействии размерностей в математических преобразованиях. - М.: Транспорт, 1996. - 102 с.

[10] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука.1981. - 568 с.

[11] ГОСТ 24346-80. Вибрация. Термины и определения. М.: Изд. стандартов. 1984. - 31 с.

[12] М.Ф.Юдин, М.Н.Селиванов, О.Ф.Тищенко, А.И.Скороходов; под ред. Тарбеева Ю.В. Основные термины в области метрологии: Словарь-справочник. - М.: Издательство стандартов, 1989. - 113 с.

[13] Брянский Л.Н., Дойников А.С., Крупин Б.Н. Безразмерные единицы и числа //Измерительная техника. - 1999. - № 9. - с.3-10.

[14] Морозов Н.А. Основы качественного физико-математического анализа и новые физические факторы, обнаруживаемые им в различных явлениях природы. - М.: Типография товарищества И. Д. Сытина. 1908. - 404 с.

[15] Митрохин А.Н. Математика и ее роль в анализе размерностей и образовании единиц измерения //Законодательная и прикладная метрология. - 2000. - № 5. - с. 39-47.

[16] Коган И.Ш. К вопросу о размерности и единицах измерений безразмерных физических величин // Законодательная и прикладная метрология. - 1998.- №4. - с. 55-57.

Митрохин Аркадий Николаевич,
ведущий научный сотрудник
Всероссийского НИИ железнодорожного транспорта,
кандидат технических наук.
129851 Москва, ул. 3-я Мытищинская, 10 (отделение П).

Задачи на клетчатой бумаге

В. В. Вавилов, А. В. Устинов

Продолжаем публикацию учебных материалов СУНЦ МГУ (ранее ФМШ №18). Вниманию читателя предлагаются три главы из брошюры преподавателей СУНЦ В. В. Вавилова и А. В. Устинова "Задачи на клетчатой бумаге". Окончание пособия будет опубликовано в следующих номерах журнала.

Предисловие

Решетки точек обладают важными свойствами и в различных исследованиях являются инструментом, который позволяет задачи алгебры, теории чисел, анализа изучать при помощи геометрических средств, и обратно — многие чисто геометрические проблемы при помощи решеток удается проанализировать аналитическими или арифметическими методами.

В различных монографиях и учебниках, научно-популярных книгах и журнальных статьях, материалах школьных и студенческих математических олимпиадах можно обнаружить многочисленные красивые теоремы и задачи из теории точечных решеток. В данной книге мы постарались собрать достойную коллекцию, которая позволит активному читателю познакомиться с наиболее интересными (на наш взгляд) аспектами теории точечных решеток.

Книга в первую очередь адресована учащимся, студентам, аспирантам, преподавателям школ и вузов, которые связаны с организацией факультативов и кружков в средней школе, спецкурсов и спецсеминаров в вузовских аудиториях. Она также будет полезна при подготовке к олимпиадам и при проведении занятий в летних математических школах.

Работа выполнена в рамках научного гранта, выделенного в 2006 году "Клубом ФМШ Колмогорова", который объединяет учащихся, выпускников, преподавателей и ветеранов школы им. А. Н. Колмогорова Специализированного Учебно-Научного Центра МГУ им. М. В. Ломоносова.

Обозначения

В книге будут использоваться следующие обозначения:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;
$[F]$ — площадь фигуры F;
$(a_1, \ldots, a_n)$ — наибольший общий делитель чисел $a_1, \ldots, a_n$;
$\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$ — расстояние от x до ближайшего целого числа;
жирными латинскими буквами ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$,...) будут обозначаться векторы;
$\delta_q(m)$ — характеристическая функция делимости на q:

$$\delta_q(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{q}, \\ 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod{q}. \end{cases}$$

1. Решётки

Рассмотрим на плоскости два семейства параллельных прямых, разбивающих плоскость на равные параллелограммы; множество L всех точек пересечения этих прямых (или множество вершин всех параллелограммов) называется *точечной решеткой* или просто решеткой, а сами точки — *узлами решетки.* Любой из этих параллелограммов называется *фундаментальным параллелограммом* или параллелограммом, порождающим решетку; площадь фундаментального параллелограмма решетки L обозначим через $\Delta = \Delta(\mathrm{L})$.

Задать решетку можно еще и так. Предположим, что на плоскости заданы две пересекающиеся прямые l_0 и m_0, а также два положительных числа a и b. По обе стороны от прямой l_0 проведем параллельные прямые $l_{\pm 1}$, $l_{\pm 2}$, $l_{\pm 3}$,... на расстояниях a, $2a$, $3a$, ... от нее. Аналогично по обе стороны от прямой m_0 на расстояниях b, $2b$, $3b$,... проведем прямые $m_{\pm 1}$, $m_{\pm 2}$, $m_{\pm 3}$,... Отметим все точки пересечения прямых l_i с прямыми m_j; множество всех этих точек пересечения и является решеткой, которую мы обозначим через L.

Важно иметь в виду, что решетка состоит из точек (узлов), а сами прямые к ней не относятся. Одна и та же решетка может быть получена при помощи различных семейств параллельных прямых. Так называемая *ортогональная целочисленная решетка* $\mathbb{Z}^2$ состоит из точек с целыми координатами в декартовой системе координат, где те же самые точки являются точками пересечений различных семейств параллельных прямых. Отметим, что понятие фундаментального параллелограмма решетки тесно связано не только с самой решеткой, но и с семействами параллельных прямых, ее определяющих.

Так решетка может быть построена из любого параллелограмма следующим образом. Отметим вершины данного параллелограмма и затем сдвинем параллелограмм параллельно одной из его сторон на длину, равную этой стороне, и отметим две вновь полученные вершины. Если этот процесс продолжаем сначала в одном направлении до бесконечности, а затем в противоположном, то мы получим на плоскости полосу, состоящую из двух рядов равноотстоящих точек. Сдвинем эту полосу параллельно самой себе в направлении другой стороны данного параллелограмма и на длину равную этой стороне; отметим вновь получившиеся точки и представим себе, что и этот процесс продолжен в обоих направлениях до бесконечности. Множество точек, отмеченных таким образом, образует решетку, а параллелограмм, с которого мы начинали, является фундаментальным, т. е. порождает эту решетку.

Другим удобным способом задания решетки точек на плоскости является следующий. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ненулевые и неколлинеарные векторы, O — некоторая точка. Тогда множество всех таких точек P, что $\mathbf{OP} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$, где m, n — целые числа, является решеткой. Пара векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, порождающих решётку, называется её базисом. Так, целочисленная решетка $\mathbb{Z}^2$ порождается базисом $(1, 0)$, $(0, 1)$. Другим важным примером является *треугольная решётка*, которая получается, если выбрать $\mathbf{a} = (1, 0)$ и $\mathbf{b} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Аналогично, начиная с трех ненулевых и некомпланарных векторов, легче всего определить решетки точек в пространстве. Например, ортогональная целочисленная решетка $\mathbb{Z}^3$ в пространстве получается, например, если в качестве базиса выбрать векторы $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

1.1 Основные свойства

1.1. Докажите следующие важнейшие свойства решеток:

а) Параллельный перенос, переводящий один узел решетки в другой ее узел, переводит решетку саму в себя.

б) **Правило параллелограмма.** Если три вершины параллелограмма являются узлами некоторой решетки, то и четвертая его вершина — тоже узел этой решетки.

в) Прямая, проходящая через два узла решетки, содержит бесконечно много узлов решетки. При этом все расстояния между соседними узлами, лежащими на прямой, равны между собой.

г) Решетка центрально симметрична относительно любого своего узла.

д) Параллелограмм с вершинами в узлах некоторой решетки является фундаментальным тогда и только тогда, когда он кроме своих вершин не содержит ни внутри себя, ни на сторонах никаких других узлов решетки.

е) Площадь фундаментального параллелограмма не зависит от выбора базиса решётки.

ж) Пересечение решеток есть решетка.

1.2. Пара векторов $\mathbf{a} = m\mathbf{e_1} + n\mathbf{e_2}$ и $\mathbf{b} = k\mathbf{e_1} + l\mathbf{e_2}$, где m, n, k, l — целые числа, тогда и только тогда порождает ту же решетку, что и векторы $\mathbf{e_1}$ и $\mathbf{e_2}$, т. е. $\mathbb{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbb{L}(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$, когда

$$|ml - nk| = 1.$$

1.3. **Характеристическое свойство решетки.** Пусть множество X точек плоскости обладает следующими свойствами:

а) X содержит три точки, не принадлежащие одной прямой;

б) для точек множества X имеет место правило параллелограмма, т.е. если точки A, B, $C \in X$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$, то и $D \in X$;

в) расстояния между любыми двумя его точками не меньше некоторого числа $d > 0$.

Тогда X — решетка.

1.4. **Кристаллографическое неравенство** (См. [9]). а) Пусть $d = d(\mathbb{L})$ обозначает наименьшее расстояние между двумя точками решетки $\mathbb{L}$ и $\Delta = \Delta(\mathbb{L})$ — площадь ее фундаментального параллелограмма. Тогда

$$d \le \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}\Delta};$$

при этом, знак равенства имеет место только в том случае, если решетка $\mathbb{L}$ составлена из вершин правильных треугольников (другими словами, при заданном наименьшем расстоянии между узлами, такая решетка имеет фундаментальный параллелограмм наименьшей площади).

б) Для наименьшего расстояния $d(\mathbb{L})$ пространственной решетки с объемом фундаментального параллелепипеда $V(\mathbb{L})$ имеет место неравенство (см. [9]):

$$d(\mathbb{L}) \le \sqrt[3]{\sqrt{2}V(\mathbb{L})}.$$

Оценки наименьшего расстояния между узлами решеток тесно связаны с изучением плотнейших упаковок шаров в пространстве.

1.5. (Аргентина, 1995, [30]; см. также [16], с. 99.). Пусть X — бесконечное множество точек плоскости — таково, что внутри любого круга имеется только конечное число его точек либо вообще нет точек из X и, кроме того:

а) $(0, 0) \in X$;

б) Если $(a, b) \in X$ и $(c, d) \in X$, то $(a - c, b - d) \in X$;

в) Существует такое α, что $R_O^\alpha(X) = X$, где R_O^α обозначает поворот плоскости на угол α вокруг точки $O = (0, 0)$.

Докажите, что α может принимать только следующие значения: $\pm 60°$, $\pm 90°$, $\pm 120°$, $\pm 180°$.

1.6. а) (Вьетнам, 1977, [15], зад. 26.16). На решетке $\mathbb{Z}^2$ отмечены $n \ge 3$ узлов так, что любые три из них образуют треугольник, медианы которого не пересекаются в узле этой решетки. Найдите наибольшее число n, при котором это возможно.

б) (Румыния, 1977, [15], зад. 26.16). На решетке $\mathbb{Z}^3$ отмечены 37 узлов, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что из них можно выбрать такие 3 точки, что центр тяжести образованного ими треугольника будет узлом решетки.

Пусть $\mathbb{L}$ решетка и $ABCD$ — её некоторый фундаментальный параллелограмм; $[ABCD] = \Delta$. Рассмотрим параллелограмм $AB'C'D'$ такой, что

$$AD' \perp AD, \quad AB' \perp AB, \quad AB' = \frac{AB}{\Delta}, \quad AD' = \frac{AD}{\Delta},$$

и, кроме того, точки C, D, B' лежат по одну сторону от прямой AB, а точки B, C, D' — по одну сторону от прямой AD. Построенный параллелограмм $AB'C'D'$ порождает некоторую решетку $\mathbb{L}^*$, которая называется *взаимной решеткой* для решетки $\mathbb{L}$.

1.7. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ — двумерная решётка с базисом

$$\lambda_{\mathbf{1}} = (a_{1,1}, a_{1,2}), \qquad \lambda_{\mathbf{2}} = (a_{2,1}, a_{2,2}).$$

Этой решетке поставим в соответствие матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \qquad \det A \neq 0,$$

с целыми коэффициентами. Рассмотрим матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Проверьте, что такой матрице соответствует взаимная решетка Λ^* с базисом $\lambda_{\mathbf{1}}^*$, $\lambda_{\mathbf{2}}^*$, где

$$\lambda_{\mathbf{1}}^* = \left(\frac{a_{2,2}}{\det A}, -\frac{a_{1,2}}{\det A}\right), \qquad \lambda_{\mathbf{2}}^* = \left(-\frac{a_{2,1}}{\det A}, \frac{a_{1,1}}{\det A}\right).$$

1.8. Докажите, что взаимная решетка L^* по данной решетке L определяется единственным образом, т. е. не зависит от выбора фундаментального параллелограмма $ABCD$ решетки L; кроме того, $\Delta(\mathrm{L}) \cdot \Delta(\mathrm{L}^*) = 1$.

1.2 Базисы решёток

1.9. Доказать, что у любой решетки можно так выбрать базис $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, что $|\mathbf{e_2}| \geq |\mathbf{e_1}|$, длина проекции вектора $\mathbf{e_2}$ на направление вектора $\mathbf{e_1}$ не превосходит половины длины вектора $\mathbf{e_1}$ и угол между векторами $\mathbf{e_1}$ и $\mathbf{e_2}$ не тупой. Такой базис называется *приведённым*.

1.10. (Венгрия, 1942, [17], задача 137). Пусть a, b, c, d — такие целые числа, что система уравнений

$$\begin{aligned} ax + by &= m, \\ cx + dy &= n \end{aligned}$$

для всех целых n и m имеет решение в целых числах. Докажите, что

$$|ad - bc| = 1.$$

1.11. ([11]) Из кристаллографического неравенства следует, что для квадратичной формы

$$f(n,m) = am^2 + 2bmn + cn^2$$

с действительными коэффициентами a, b, c, определителем $\Delta = ac - b^2 = 1$ и $a > 0$, существует такая пара целых чисел (m,n), не равных нулю одновременно, что

$$0 < f(m,n) \leq 2/\sqrt{3}.$$

1.12. **Области Дирихле.** Для каждого узла решетки L множество точек, расстояние от которых до этого узла не больше, чем расстояние до всех других узлов решетки, представляет собой квадрат или шестиугольник с попарно параллельными противоположными сторонами; такая область называется областью Дирихле $D(\mathrm{L})$ решетки L; кроме того, $[D(\mathrm{L})] = \Delta(\mathrm{L})$.

1.13. ([11]). а) Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2.$$

Доказать, что для любой точки (x,y) найдётся такая пара целых чисел (m,n), что

$$f(x-m, y-n) = (x-m)^2 + (x-m)(y-n) + (y-n)^2 \leq 1/2.$$

б) Обозначим через $f_{min}(x,y)$ наименьшее из чисел $f(x-m,y-n)$ при целых m и n. Утверждение задачи а) состояло в том, что выполняется неравенство

$$f_{min}(x,y) \le 1/2 \quad \text{для всех} \quad (x,y).$$

Докажите, что на самом деле верно более сильное неравенство

$$f_{min}(x,y) \le 1/3,$$

и найдите все точки, для которых

$$f_{min}(x,y) = 1/3.$$

в) Рассмотрим функцию

$$f(a,x,y) = x^2 + axy + y^2, \qquad a \ge 0.$$

Найдите какое–либо число C (зависящее от a) так, чтобы для всех (x,y) выполнялось неравенство

$$|f_{min}(a,x,y)| \le C.$$

Постарайтесь найти точную оценку.

1.14. Рассмотрим три линейных преобразования плоскости Oxy ("правый перекос", "левый перекос" и "симметрия":

$$R:(x;y)\to(x;x+y), \quad L:(x;y)\to(x-y;y), \quad S:(x;y)\to(y;x).$$

Преобразования R, L и S являются взаимно однозначными отображениями решетки $\mathbb{Z}^2$ на себя. Ясно, что $RL = LR$; однако можно привести примеры, когда

$$L(S(x;y)) \ne S(L(x;y)), \quad R(S(x,y)) \ne S(R(x;y)),$$

а это означает, что $LS \ne SL$ и $RS \ne SR$.

1.15. При помощи преобразований R, L и S узел $(a;b)$ решетки $\mathbb{Z}^2$ можно перевести в узел $(d;0)$, где $d=(a,b)$, а так как преобразования R, L и S обратимы, то при их помощи из узла $(a;b)$ можно получить узел $(p;q)$ тогда и только тогда, когда

$$(a,b) = (p,q).$$

1.16. При помощи различных композиций преобразований R, L, S можно получить преобразования решетки $\mathbb{Z}^2$, которые имеют вид

$$(x;y)\to(ax+by;cx+dy),$$

где a, b, c, d — целые числа и $|ad-bc|=1$.

Общие целочисленные решетки. Если решетка $\mathbb{L}$ обладает тем свойством, что квадраты расстояний от какого-либо ее узла до всех других узлов выражаются целыми числами, то такая решетка называется *целочисленной* (см. [18], стр. 198).

1.17. Пусть пара векторов $\mathbf{e_1}$ и $\mathbf{e_2}$ порождает целочисленную решетку $\mathbb{L}$. Проверьте, что квадрат расстояния между точками этой решётки выражается квадратичной формой вида

$$am^2 + bmn + cn^2,$$

где $a=|\mathbf{e_1}|^2$, $c=|\mathbf{e_2}|^2$, $b=2(\mathbf{e_1},\mathbf{e_2})$ и a, b, c — целые числа. При этом $D=4\Delta^2=4ac-b^2$ — целое положительное число (которое называется дискриминантом решетки).

1.18. ([11]). Докажите, что базис решётки можно выбрать так, что будут выполняться неравенства

$$c \ge a \ge b \ge 0 \quad \text{и} \quad D \ge 3ac.$$

1.19. Докажите, что при заданной площади Δ фундаментального параллелограмма существует лишь конечное число различных (с точностью до перемещения) целочисленных решеток.

В частности, при $\Delta^2 = 1$ существуют лишь одна такая решётка — $\mathbb{Z}^2$, а при $\Delta^2 = 15/4$ — две различные целочисленные решетки.

1.20. Докажите, что число $a \in \mathbb{N}$ можно представить в виде

$$a = m^2 + n^2, \quad \text{где} \quad (m,n) = 1 \tag{1}$$

тогда и только тогда, когда разрешимо сравнение $t^2 + 1 \equiv 0 \pmod a$. Верно ли обратное утверждение?

1.21. Следующие два утверждения можно рассматривать как факты, связанные с одномерными решётками.

а) Даны два натуральных числа. За один ход разрешается прибавить к некоторому целому числу одно из чисел a, b или вычесть из него одно из этих чисел. Можно ли таким образом из числа 0 получить число c?

б) Пусть заданы n натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда целое число c можно получить из 0 ходами $\pm a_1, \pm a_2, \ldots, \pm a_n$ тогда и только тогда, когда число c делится на $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

1.22. Пусть на плоскости Oxy заданы n векторов $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ с целочисленными координатами. Тогда множество точек D плоскости, в которые можно попасть из точки O ходами $\pm\mathbf{v_1}$, $\pm\mathbf{v_2}, \ldots, \pm\mathbf{v_n}$, представляет собой некоторую решетку $\mathbb{L}$. При этом, если с каждым вектором $\mathbf{v_i}$ в семействе векторов $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ имеется равный ему по длине и перпендикулярный, то множество "достижимых" точек D будет квадратной решеткой $\mathbb{L}$.

1.23. Даны натуральные числа m и n. На одном из полей бесконечной шахматной доски стоит фигура, которая ходит буквой "Г" на m полей в одном направлении и на n в перпендикулярном. На какие поля доски такая фигура может попасть?

1.24. (М 219, "Квант", №5, 1974). В пространстве заданы четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, три вершины которых совпадают с заданными точками? Опишите способы построения таких параллелепипедов.

1.3 Решётки и подрешётки

Определение (подрешётка). Если каждая точка решетки $\mathbb{L}$ является также точкой решетки M, то $\mathbb{L}$ называется подрешёткой решетки M. Индексом подрешетки $\mathbb{L}$ решетки M называется величина

$$D = \frac{\Delta(\mathbb{L})}{\Delta(M)}.$$

1.25. Докажите, что индекс подрешетки $\mathbb{L}$ решетки M всегда является натуральным числом.

1.26. Множество $\mathbb{L}$ состоит из середин всех отрезков с концами в узлах решетки M. Докажите, что $\mathbb{L}$ — подрешётка решетки M и найдите ее индекс.

1.27 а) Пусть целые числа x и y таковы, что $2x + 3y$ кратно 17. Тогда числа

$$9x + 5y, \quad 8x - 5y, \quad 3x - 4y, \quad 4x - 11y, \ldots$$

также кратны 17. Изображая в прямоугольной системе координат точками (x, y) решения уравнения $2x + 3y = 17m$ при различных целых значениях m, получаем некоторую решетку на плоскости $\mathbb{L}$. Ту же самую решетку образуют при различных значениях m и решения, например, уравнения $3x - 4y = 17m$ (или уравнения $9x + 5y = 17m$). Дайте геометрическую интерпретацию этого факта и найдите $\Delta(\mathbb{L})$.

б) Точки (x, y) с целыми координатами, для которых $x^2 + y^2$ кратно 17, образуют две ортогональные решетки, пересечением которых также является плоская решётка.

1.28. Найдите индексы подрешеток из задачи в решетке $\mathbb{Z}^2$.

1.29. Сколько существует подрешеток в решетке $\mathbb{Z}^2$, имеющих индекс n?

1.30. Если D — индекс подрешетки $\mathbb{L}$ решетки M, то

$$DM \subset \mathbb{L} \subset M,$$

где DM — решетка векторов вида $D\mathbf{b}$, где $\mathbf{b} \in M$.

Определение. Будем говорить, что два вектора $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ решетки M находятся в одном классе относительно подрешетки $\mathbb{L}$, если вектор $\mathbf{c} - \mathbf{d}$ лежит в $\mathbb{L}$.

1.31. Проверьте, что принадлежность одному классу относительно подрешетки $\mathbb{L}$ является отношением эквивалентности и разбивает решетку M на непересекающиеся классы. Докажите, что число классов совпадает с индексом подрешетки $\mathbb{L}$ решетки M.

1.32. Пусть $\mathbb{L}$ — решетка в пространстве, которая получается, если к кубической решетке добавить центры всех единичных кубиков. Нарисуйте фундаментальный параллелепипед решетки $\mathbb{L}$. Найдите индекс подрешетки $\mathbb{Z}^3$ решетки $\mathbb{L}$.

1.33. а) Пусть плоскость разбита на единичные квадраты. Их можно раскрасить в пять цветов так, что центры квадратов одного и того же цвета расположены в вершинах квадратной сетки. При каком еще числе цветов возможно аналогичное заполнение плоскости?

б) Если плоскость покрыта шестиугольниками равного размера, то их можно раскрасить в семь цветов так, что центры ближайших шестиугольников одного и того же цвета будут лежать в вершинах ромбов с острым углом 60° (другими словами, будут являться вершинами гексагональной решетки). При каком еще числе цветов возможно аналогичное построение?

Примечание. В пункте а) число цветов может равняться единице (все квадраты одного цвета) и двум (как на шахматной доске). Во второй задаче вы без труда найдете решения с одним цветом и с тремя цветами.

1.34. **Функция $\delta_q(m)$.** Для натурального q через $\delta_q(m)$ будем обозначать характеристическую функцию делимости на q, см. Обозначения. Докажите, что при любом целом m и любом натуральном q выполняется равенство

$$\delta_q(m) = \frac{1}{q}\sum_{x=1}^{q} e^{2\pi i \frac{mx}{q}}. \tag{2}$$

1.35. (см. [12].) **Тригонометрическая сумма решетки.** Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ — двумерная решётка с базисом λ_1, λ_2. Будем обозначать через $M(\Lambda)$ множество, состоящее из точек взаимной решетки Λ^*, лежащих в единичном двумерном кубе $[0;1)^2$.

а) Докажите, что число элементов множества $M(\Lambda)$ равно $|\det \Lambda|$.

б) Для решетки Λ и целого вектора $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ определим характеристическую функцию δ_Λ решетки Λ равенством

$$\delta_\Lambda(\mathbf{m}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{m} \in \Lambda; \\ 0, & \text{если } \mathbf{m} \notin \Lambda. \end{cases}$$

Докажите, что

$$\delta_\Lambda(\mathbf{m}) = \frac{1}{|\det \Lambda|}\sum_{\mathbf{x}\in M(\Lambda)} e^{2\pi i (\mathbf{m},\mathbf{x})}.$$

в) Проверьте, что аналогичное утверждение выполняется и для целочисленных решёток в пространствах большей размерности.

2. Прямые, многоугольники и окружности на решётках

2.1. Прямые на решетках

2.1. Найдите наименьшее c, при котором

а) уравнение $7x + 9y = c$ имело бы ровно 6 целых положительных решений;

б) уравнение $14x + 11y = c$ имело бы ровно 5 целых положительных решений.

2.2. В каких пределах должно заключаться число c, чтобы уравнение $19x + 14y = c$ имело бы 6 целых положительных решений?

2.3. Пусть a и b — натуральные взаимно простые числа. Рассмотрим точки плоскости с целыми координатами (x, y), лежащие в полосе $0 \le x \le b - 1$. Каждой такой точке припишем целое число $N(x, y) = ax + by$.

а) Докажите, что для каждого натурального c существует ровно одна точка (x, y) $(0 \le x \le b - 1)$, такая что $c = N(x, y)$.

б) **Теорема Сильвестра.** Докажите, что наибольшее c, для которого уравнение $ax+by=c$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, имеет вид $c=ab-a-b$.

2.4. Пусть числа a и b взаимно просты и уравнение $ax+by=c$ имеет ровно n решений в целых неотрицательных числах ($n\geq 1$). Докажите, что число c должно находиться в пределах

$$(n-1)ab\leq c\leq (n+1)ab-a-b.$$

Докажите также, что условие

$$nab-a-b+1\leq c\leq nab-1$$

является достаточным для того, чтобы уравнение $ax+by=c$ имело ровно n решений относительно переменных x, $y\geq 0$.

2.5. Отметим на прямой красным цветом все точки вида $81x+100y$, где x, y — натуральные, и синим цветом — остальные целые точки. Найдите на прямой такую точку, чтобы любые симметричные относительно нее целые точки были закрашены в разные цвета.

2.6. (С. Фомин). Можно ли бесконечный лист клетчатой бумаги разбить на "доминошки" (каждая доминошка покрывает две соседние клетки) так, чтобы каждая прямая, идущая по линиям сетки, разрезала пополам лишь конечное число доминошек?

2.7. (Студенческая олимпиада в США; см. [33]). Докажите, что на плоскости не существует такой рациональной точки P, для которой расстояния от P до всех рациональных точек прямой $y=13x$ являются рациональными числами.

2.8. (Соросовская олимпиада). На координатной плоскости (x,y) проведены всевозможные вертикальные прямые $x=k$ и горизонтальные $y=m$, где k и m — целые числа. Представим себе, что все эти прямые имеют черный цвет. Проведена также прямая, уравнение которой $19x+96y=c$. Обозначим через M число различных по длине отрезков, образовавшихся на красной прямой при пересечении с черными. (Концами каждого отрезка являются точки пересечения красной и черной прямых. Внутри отрезка таких точек пересечения нет). Какие значения может принимать M при изменениях c?

2.9. (Рот К., [41]). Показать, что если p — простое, то никакие три из p точек (i,i^2), где $0\leq i\leq p-1$ и вторая координата приведена по модулю p, не лежат на одной прямой.

2.10. а) Докажите, что единственный узел решетки $\mathbb{Z}^3$, принадлежащий плоскости $x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z=0$, — начало координат.

б) Докажите, что плоскость $ax+by+cz+d=0$ тогда и только тогда содержит три различных узла решетки $\mathbb{Z}^3$, когда a, b, c, d — рациональные числа.

2.11. (Венгрия, [17]). На шахматной доске размером $8\times 8=64$ клетки произвольно проведена прямая. Чему равно наибольшее число клеток, которое она может пересечь?

2.12. (Москва, [7]). а) Можно ли так провести прямую на листе клетчатой бумаги размером 20×30, чтобы она пересекала 50 клеток?

б) Какое наибольшее число клеток может пересечь прямая, проведенная на листе клетчатой бумаги размером $m\times n$ клеток?

2.13. (А. Ковальджи). На клетчатой бумаге по линиям сетки начертили прямоугольник со сторонами 1994 и 1995. Сколько клеток пересекает диагональ прямоугольника?

2.14. (Всесоюзная олимпиада, [5]). Некоторый прямоугольник разделен прямыми, параллельными сторонам, на квадраты со стороной 1, которые раскрашены в шахматном порядке в белый и черный цвет. Диагональ прямоугольника разбилась на белые и черные отрезки. Найдите отношение суммы длин белых отрезков к сумме длин черных отрезков, если размер прямоугольника а) 100×99; б) 101×99.

2.15. (Материалы жюри ВМО, Д. Митькин, А. Канель-Белов). На листе клетчатой бумаги нарисован квадрат размерами 1992×1992, стороны которого идут по линиям сетки. Докажите, что можно отметить 1993 узла сетки так, чтобы никакая прямая не содержала более двух отмеченных точек.

2.16. (Россия, [5]). Бильярдный стол имеет форму правильного треугольника. Докажите, что если шар после удара прошел через некоторую точку семь раз, то он пройдет через нее еще хотя бы один раз.

2.17. (Москва, [7]). а) Дан прямоугольный бильярд размером 26×1965. Из нижней левой лузы под углом 45° к бортам выпускается шар. Доказать, что после нескольких отражений он упадет в верхнюю левую лузу.

б) Дан бильярд прямоугольной формы. В его углах имеются лузы, попадая в которые, шарик останавливается. Шарик выпускают из одного угла бильярда под углом 45° к стороне. В какой–то момент он попал в середину некоторой стороны. Докажите, что в середине противоположной стороны он побывать не мог.

в) В прямоугольном бильярде размером $p \times 2q$, где p и q — целые нечетные числа, сделаны лузы в каждом углу и в середине каждой стороны длиной $2q$. Из угла выпущен шарик под углом 45° к стороне. Докажите, что шарик обязательно попадет в одну из средних луз.

2.18. (Москва, [7]). а) Дан лист клетчатой бумаги размером 101×200 клеток. Начиная от какой-либо угловой клетки, идем по диагонали и каждый раз, дойдя до границы, меняем направление по правилу отражения света. Попадем ли мы когда-нибудь в какую-либо угловую клетку?

б) На бесконечной шахматной доске стоит конь. Найти все клетки, куда он может попасть за $2n$ ходов.

2.19. (См. [22]). Лесом называется множество цилиндрических деревьев радиуса 60 см, растущих внутри квадрата со стороной 1 км. Лес называется густым, если всякий прямолинейный путь длиной 100 м имеет общую точку хотя бы с одним деревом. Докажите, что в густом лесу не меньше 7430 деревьев.

2.20. (См. [32], [34]). Дан квадрат, состоящий из $n \times n$ узлов решетки $\mathbb{Z}^2$. Можно ли выбрать $2n$ из данных n^2 узлов так, чтобы никакие три их них не лежали на одной прямой?

Рассмотрите случай $n = 8$. Найдите число существенно различных конфигураций для $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

Докажите, что число таких точек не превышает $2n$.

2.21. (См. [45], [38]). Пусть k — наибольшее число из n^2 узлов решетки $\mathbb{Z}^2$ и таких, что все C_k^2 определямые ими попарные расстояния различны. Показать, что $k \leq n$. Рассмотреть случай $n = 7$.

2.22. ([27]). а) Докажите, что невозможно окрасить узлы решетки $\mathbb{Z}^2$ в четыре цвета таким образом, чтобы на каждой прямой, параллельной осям координат, встречались все четыре цвета, и чтобы каждый прямоугольник с вершинами в узлах решетки и сторонами параллельными осям координат имел вершины, окрашенные в различные цвета.

б) ([23]). Докажите, что множество всех узлов решетки $\mathbb{Z}^2$ можно разбить на два подмножества, из которых первое является конечным на каждой прямой, параллельной оси абсцисс, а второе — конечным на каждой прямой, параллельной оси ординат.

2.23. (См. [26]). Из 27 одинаковых кубиков сложили большой куб. Докажите, что любая прямая пересекает не более 7 малых кубиков. Проведенная прямая не должна пересекать ребра кубиков.

2.24. (Турнир городов; см. [24]). Куб размером $20 \times 20 \times 20$ составлен из 2000 равных прямоугольных параллелепипедов размером $2 \times 2 \times 1$. Докажите, что существует прямая, перпендикулярная грани куба и проходящая через куб, которая не “протыкает” ни один из кирпичей (в действительности, таких прямых не менее 83).

2.25. (Соросовская олимпиада). Пространство обычным образом заполнено единичными кубами. (К каждому кубу прилегают 6 других, имеющих с ним общую грань.) На трех ребрах одного из кубов, выходящих из одной вершины, отмечены точки на расстоянии 1/19, 1/9 и 1/7 от нее соответственно. Через эти точки проведена плоскость. Рассмотрим множество всевозможных многоугольников, образоваавшихся при пересечении этой плоскости с кубами, заполняющими пространство. Сколько различных (неравных) многоугольников в этом множестве?

2.2. Многоугольники на решётках

2.26. (См. [22]). Существует ли прямоугольный треугольник с целыми сторонами, который может быть положен на клетчатую бумагу так, чтобы его вершины попали в узлы, и ни одна из сторон не совпадала с линиями бумаги?

2.27. Докажите, что правильные треугольник и шестиугольник нельзя расположить на решетке $\mathbb{Z}^2$.

2.28. Докажите, что не существует плоской решетки, содержащей одновременно квадрат и правильный треугольник.

2.29. (См. [36]). Докажите, что никакой прямоугольный треугольник с целочисленными длинами сторон (пифагоров треугольник) нельзя расположить на гексагональной решетке.

2.30. (Москва, [7]). Построить квадрат, три вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых.

2.31. Докажите, что не существует ни одной решетки (двух или более измерений), куда можно было бы поместить правильный пятиугольник.

2.32. (См. [43], [44]). Предположим, что плоский правильный n-угольник можно расположить на решетке $\mathbb{Z}^k$ при некотором $k \geq 3$. Тогда $n = 3$, 4 или 6.

2.33. (Н. Васильев, см. [13]). Проверьте, что правильный треугольник и квадрат можно разместить на листе бумаги в линейку (линии — параллельные прямые, расположенные на одинаковых расстояниях друг от друга).

Докажите, что никакой правильный n-угольник, $n > 4$, разместить на таком листе бумаги нельзя.

2.34. (Всесоюзная олимпиада, [5]). Докажите, что на решетке $\mathbb{Z}^2$ нельзя расположить выпуклый четырехугольник, у которого одна диагональ вдвое длинней другой, а угол между диагоналями равен $45°$.

2.35. (См. [39]). Пусть α — наименьший угол параллелограмма, расположенного на решетке $\mathbb{Z}^2$. Докажите, что имеется только три возможности: α/π — иррациональное число, $\alpha = \pi/2$ или $\alpha = \pi/4$.

2.36. Пусть отношение площади многоугольника к квадрату одной из его сторон иррационально. Докажите, что подобный ему многоугольник нельзя расположить на решетке $\mathbb{Z}^2$ так, чтобы вершины лежали в узлах.

2.37. а) Докажите, что если p и q — взаимно простые натуральные числа и $\cos(p\pi/q)$ рациональное число, то число $\cos(\pi/q)$ также рационально.

б) Докажите, что число $\cos(p\pi/q)$ при взаимно простых p и q, $q > 3$, рационально тогда и только тогда, когда рационально число $\cos(\pi/q)$.

в) Пусть p и q взаимно просты, $q \geq 3$. Докажите, что числа $\cos(p\pi/q)$ иррациональны при $q \neq 3$; $\sin(p\pi/q)$ иррациональны при $q \neq 6$ и $\operatorname{tg}(p\pi/q)$ — при $q \neq 4$.

2.38. (Вавилов В.В.). Пусть на плоскости задано множество

$$K(D) = \{z : z = \alpha + i\beta; \alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})\},$$

где D — натуральное число свободное от квадратов, $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ — квадратичное поле, состоящее из чисел вида $x + y\sqrt{D}$, где x, y — рациональные числа.

Докажите следующие утверждения:

а) При любом D квадрат всегда можно расположить на $K(D)$.

б) Если $D = 2$, то на $K(2)$ можно расположить только квадрат и правильный восьмиугольник.

в) Если $D = 3$, то на $K(3)$ можно расположить только квадрат и правильные треугольник, шестиугольник и двенадцатиугольник.

г) Если $D \neq 2$ и $D \neq 3$, то никакой правильный многоугольник, за исключением квадрата, на $K(D)$ расположить нельзя.

2.39. Докажите, что максимальное число вершин, являющихся узлами решетки $\mathbb{Z}^2$, которое может иметь на плоскости правильный n-угольник (n не кратно 4), равно двум.

2.40. (Студенческая олимпиада, Москва, см. [21]). Доказать, что на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$ любой выпуклый многоугольник площади S можно заключить в параллелограмм площади не более $4S$.

2.41. (См. [31], [4]). **Равноугольные многоугольники.** Рассмотрим множество *равноугольных* многоугольников — таких, у которых все внутренние углы равны, но стороны могут и отличаться друг от друга.

Докажите, что из всех возможных равноугольных многоугольников на решетке $\mathbb{Z}^2$ можно расположить только прямоугольник и восьмиугольник.

2.42. (См. [31], [4]). **Равносторонние многоугольники.** Рассмотрим множество *равносторонних* многоугольников — таких, у которых все стороны равны, но внутренние углы могут и отличаться друг от друга.

Докажите, что среди всех равносторонних многоугольников на решетке $\mathbb{Z}^2$ можно расположить многоугольник с любым четным числом сторон и нельзя расположить ни одного многоугольника с нечетным числом сторон.

Дополнительно докажите, что на решетке $\mathbb{Z}^2$ существует *выпуклый* равносторонний многоугольник с любым четным числом сторон.

2.43. (См. [40], [20]). **Дуальный многоугольник.** Пусть на клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник $P = A_1A_2\dots A_n$, содержащий внутри себя ровно один узел O решетки. Отложим от точки O векторы $\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{A_2A_3}$, …, $\mathbf{A_nA_1}$ и на каждом из них выберем ближайший к O узел решетки. Соединяя последовательно выбранные n точек, получим многоугольник P^*, который называется двойственным к исходному многоугольнику P.

а) Докажите, что внутри P^* также будет находится ровно один узел решетки.

б) Докажите, что $P^{**} = P$ (с точностью до центральной симмтрии).

2.44. (См. [40], [20]). **Многоугольники и число 12.** Пусть многоугольник P удовлетворяет условию предыдущей задачи. Удалением треугольника назовем операцию отрезания от многоугольника P примитивного треугольника, имеющего с ним две общие стороны. Обратную операцию назовем добавлением треугольника.

а) Докажите, что при удалении треугольника из P происходит добавление треугольника к P^*.

б) Обозначим $N_e(P)$ — число всех узлов, попавших на границу многоугольника P. Докажите, что

$$N_e(P) + N_e(P^*) = 12.$$

2.45. (Всесоюзная олимпиада, [5]). Какой наименьший периметр может иметь выпуклый 32–угольник, все вершины которого лежат в узлах клетчатой бумаги со стороной клетки 1?

2.46. Дан выпуклый 10^9-угольник с целочисленными вершинами. Может ли его диаметр быть меньше 10^{12}?

2.47. (См. [35]). Докажите, что для любых 2^n-1 узлов A_1, A_2, …, A_{2^n-1} решетки $\mathbb{Z}^n$ ($n \geq 2$), существует такой узел P этой решетки, что ни один из отрезков PA_1, PA_2, …, PA_{2^n-1} не содержит внутри себя узлов решетки.

2.48 (Венгрия, см. [15]). Докажите, что если четыре вершины куба, не лежащих в одной плоскости, являются узлами решетки $\mathbb{Z}^3$, то и все остальные вершины куба также являются узлами этой решетки.

2.49. а) Докажите, что среди пяти правильных многогранников в пространстве на решетке $\mathbb{Z}^3$ можно разместить куб, тетраэдр и октаэдр, но додекаэдр и икосаэдр не вписываются ни в какую пространственную решетку.

б) Пусть в пространстве задано семейство параллельных плоскостей такое, что расстояния между соседними плоскостями семейства равны. Можно ли расположить в пространстве икосаэдр или додекаэдр так, чтобы их вершины лежали на плоскостях семейства?

2.50. Докажите, что длина ребра куба с вершинами в узлах пространственной ортогональной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^3$ всегда является целым числом.

2.51. (См. [2]). а) Докажите, что все тройки взаимно перпендикулярных векторов равной длины с целыми координатами (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) могут быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned}
&x_1 = 2k(ab-cd), && y_1 = k(a^2-c^2+d^2-b^2), && z_1 = 2k(ab+cd),\\
&x_2 = 2k(ad+bc), && y_2 = 2k(ab-cd), && z_2 = k(b^2-a^2+d^2-c^2),\\
&x_3 = k(c^2-a^2+d^2-b^2), && y_3 = 2k(ac+bd), && z_3 = 2k(bc-ad),
\end{aligned}$$

где a, b, c, d — целые числа, не равные нулю одновременно, k — натуральное число; при этом сторона куба равна $k(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

б) Для какого наименьшего n в куб $n \times n \times n$ на решетке $\mathbb{Z}^3$ можно поместить куб меньшего размера (вершины которого также лежат на решетке $\mathbb{Z}^3$), ребра которого не параллельны осям координат?

2.3 Окружности на решётках

2.52. (Всероссийская олимпиада, см. [5]). На плоскости расположена окружность радиуса 100, не проходящая через узлы решетки $\mathbb{Z}^2$ и не касающаяся прямых этой решетки. Докажите, что такая окружность пересекает 799 или 800 квадратов решетки.

2.53. (Материалы жюри ВМО). Два узла решетки $\mathbb{Z}^2$ называются соседними, если расстояние между ними равно 1. Пусть S — окружность радиуса $r \geq 2$, не проходящая ни через один узел решетки. Узел называется внутренним граничным, если он лежит внутри S, а хотя бы один из четырех соседних узлов — вне S. Аналогично, узел называется внешним граничным, если он лежит вне S, а хотя бы один из четырех соседних узлов — внутри S. Докажите, что разность между количеством внешних и внутренних граничных точек равна 4.

2.54. (Все приведенные здесь результаты принадлежат Л. Эйлеру; см. [1], [8]).

а) Докажите, что окружность $x^2 + y^2 = R^2$ проходит через узел решетки $\mathbb{Z}^2$ тогда и только тогда, когда $R = \sqrt{n}$, где n — натуральное число. Более того, если n делится на простое число вида $4k+3$, то на этой окружности нет видимых из начала координат узлов решетки (узел B — видимый из узла A, если отрезок AB не содержит других точек решетки).

б) Докажите, что если в разложении натурального числа n на простые множители некоторое простое число вида $4k+3$ входит в нечетной степени, то окружность $x^2+y^2 = n$ не содержит ни одного узла решетки $\mathbb{Z}^2$, и для всех остальных чисел n такая окружность проходит через узлы этой решетки.

в) Пусть m — делитель числа N и m делится только на простые числа вида $4k+1$, а частное N/m делится только на простые числа вида $4k+3$, причем они входят в его разложение только в четных степенях. Докажите, что на окружностях с центрами в начале координат и с радиусами $\sqrt{N}$ и $\sqrt{m}$ лежит поровну узлов решетки $\mathbb{Z}^2$, причем на первой из них нет видимых из начала координат узлов решетки.

г) Докажите, что на окружностях с общим центром в начале координат и радиусами $\sqrt{n}$ и $\sqrt{2n}$, где n — натуральное число, лежит поровну узлов решетки $\mathbb{Z}^2$, а если n — нечётно, то поровну и видимых из начала координат узлов решетки.

2.55. Докажите, что при четном n на окружности радиуса n с центром в начале координат, а при n, кратном 4, и на концентрической окружности радиуса $\sqrt{n}$ нет видимых из точки $(0,0)$ узлов решетки $\mathbb{Z}^2$.

2.56. Докажите, что если на окружности с центром $(0,0)$ лежат только видимые из начала координат узлы решетки $\mathbb{Z}^2$, то квадрат радиуса не делится ни на один квадрат натурального числа, и обратно.

2.57. (См. [25]). Пусть круг $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2$ $(0 \leq x_0, y_0 \leq 1)$ имеет площадь 10 см^2. Найдите какие-нибудь x_0, y_0, если известно, что этот круг содержит внутри себя 10 узлов целочисленной решетки.

2.58. а) Проверьте, что не для каждого натурального числа n существует на плоскости круг с центром в узле решетки $\mathbb{Z}^2$, содержащий внутри себя ровно n узлов этой решетки.

б) (См. [27]). Докажите, что для каждого натурального числа n существует круг с центром в точке $(\sqrt{2}; 1/3)$, заключающий внутри себя ровно n узлов решетки $\mathbb{Z}^2$.

в) Докажите, что для каждого натурального n существует шар с центром в точке с координатами $(\sqrt{2}; \sqrt{3}; 1/3)$, который содержит внутри себя ровно n узлов решетки $\mathbb{Z}^3$.

г) (См. [23]). Докажите, что на плоскости не существует такой точки O с двумя рациональными координатами, чтобы для каждого натурального числа n существовал круг с центром в точке O, заключающий внутри себя ровно n узлов решетки $\mathbb{Z}^2$.

д) (См. [23]). Докажите, что для каждого натурального числа n существует круг с центром в некоторой точке O (зависящей от n) с двумя рациональными координатами, заключающий внутри себя ровно n узлов из $\mathbb{Z}^2$.

2.59. а) (См. [23]). Докажите, что для каждого натурального числа n существует круг площади n, содержащий внутри ровно n узлов решетки $\mathbb{Z}^2$.

б) (См. [23]). Докажите, что для каждого натурального числа n существует квадрат, заключающий внутри себя ровно n узлов решетки $\mathbb{Z}^2$, а также куб, содержащий внутри ровно n узлов решетки $\mathbb{Z}^3$.

2.60. а) Докажите, что окружность $x^2+y^2=5^{k-1}$ при любом натуральном k содержит ровно $4k$ узлов решетки $\mathbb{Z}^2$.

б) (См. [42]). Докажите, что для каждого натурального числа n существует окружность, на которой лежит ровно n узлов решетки $\mathbb{Z}^2$.

в) (См. [37]). Докажите, что для каждого натурального числа n в пространстве существует шар, на поверхности которого лежит ровно n узлов решетки $\mathbb{Z}^3$.

2.61. а) Докажите, что для каждого натурального числа n существует окружность, которая содержит ровно n узлов гексагональной решетки.

б) Рассмотрим разбиение плоскости на правильные шестиугольники (пчелиные соты). Докажите, что аналогичное утверждение остается верным, если вместо узлов гексагональной решетки рассматривать вершины шестиугольников такого разбиения.

2.62. (См. [25]). а) Имеются 64 квадратные плитки со стороной 10. Как их следует уложить на плоскости, чтобы все 64 плитки можно было описать окружностью радиусом 50? Существуют ли окружности меньшего радиуса, способные вместить все 64 плитки? Можно ли поместить 67 плиток внутри этого же круга?

б) Чему равно максимальное число квадратных плиток со стороной 1, которые можно расположить внутри круга радиуса 2?

2.63. (См. [23]). Докажите, что если по крайней мере одна координата центра окружности иррациональна, то на самой окружности найдется не более двух точек с рациональными координатами.

Убедитесь, что утверждение остается в силе, если слово “иррациональное” заменить на “трансцендентное”, а слово “рациональное” — на “алгебраическое”.

2.64. (См. [23]). Докажите, что:

а) для каждой точки P любой окружности найдется бесконечно много точек Q таких, что расстояние PQ — рациональное число;

б) если на окружности радиуса R лежат три различные точки с рациональными расстояниями между ними, то R^2 — число рациональное;

в) на окружности радиуса R, где R^2 — рациональное число, существует бесконечное множество различных точек, из которых каждые две имеют между собой рациональное расстояние;

г) для любого натурального $n > 1$ на плоскости существует множество из n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и такие, что расстояние между двумя любыми точками этого множества является целым числом;

д) для произвольного натурального числа n существует n узлов решетки $\mathbb{Z}^2$, лежащие на окружности и такие, что расстояние между любыми двумя из них выражается целым числом.

2.65. (См. [23]). Докажите следующие утверждения:

а) Существуют окружности с центром в узле решетки $\mathbb{Z}^2$, на которых нет ни одной рациональной точки.

б) Существуют окружности, которые содержат ровно одну рациональную точку.

в) Существуют окружности, которые содержат ровно две рациональные точки.

г) Если окружность с центром в начале координат $(0;0)$ содержит по меньшей мере одну рациональную точку, то на такой окружности лежит бесконечно много рациональных точек плоскости.

д) Если окружность содержит три различных рациональных точки, то она содержит бесконечно много таких точек.

2.66. (Москва, см. [7]). Имеется шахматная доска с обычной раскраской (границы квадратов считаются окрашенными в черный цвет). Начертить на ней окружность наибольшего радиуса, целиком лежащую на черных полях.

2.67. (Россия, см. [29]). На листе клетчатой бумаги с клетками размером 1×1 нарисована окружность радиуса R с центром в узле клетки. Докажите, что если на ней лежит ровно 1988 узлов сетки, то либо R, либо $R\sqrt{2}$ — целое число.

2.68. (Студенческая олимпиада, см. [21]). Плоская фигура G называется строго выпуклой, если для любых ее точек A и B все точки интервала (A, B) являются внутренними для G. Через αG обозначим фигуру, получаемую из G путем гомотетии в α раз с центром в начале координат. Докажите, что существует замкнутая, ограниченная, строго выпуклая фигура G, для которой существуют сколь угодно большие α такие, что на границе αG имеется по крайней мере $[\sqrt{\alpha}]$ узлов решетки $\mathbb{Z}^2$.

2.69. (См. [10]). Окружность диаметра $2n-1$ с нарисована на клетчатой бумаге так, что ее центр совпадает с одним из узлов.

а) Какое число клеток пересекает такая окружность?

б) Найдите функцию $f(n,k)$ такую, что в точности $\sum\limits_{k=1}^{n} f(n,k)$ клеток лежат целиком внутри окружности.

2.70. **Математический сад.** а) (См. [27]), [19]). На плоскости расположены круги радиуса r с центрами во всех узлах целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$, за исключением узла $(0,0)$. Какой длины отрезок, середина которого совпадает с точкой $(0,0)$, можно разместить, чтобы он не пересекал данных кругов?

б) (Москва, [7]). Вокруг каждого узла решетки $\mathbb{Z}^2$ описан круг радиуса r. Тогда при $R > (3+r^2)/2$ любая окружность с радиусом R пересекает хотя бы один из этих кругов.

в) Пусть R — заданное целое число. Опишем возле каждого узла (m,n) целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$, удовлетворяющей условию $1 \le n^2+m^2 \le R^2$, как из центра, окружность радиуса r. Если r достаточно мало, то имеются выходящие из начала координат лучи, не пересекающие ни одного из описанных кругов (лес имеет “просветы”); таких лучей уже больше не существует, когда r достаточно велико (при $r = 1/2$ круги соприкасаются). Пусть $r = \rho$ значение, разделяющее эти два случая (граница “просвечиваемости”). Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{R^2+1}} \le \rho \le \frac{1}{R}.$$

2.71. (Венгрия; см. [17]). На плоскости провели окружность радиуса R с центром в начале декартовой системы координат. Пусть $\delta(R)$ — расстояние от ближайшей точки с целочисленными координатами до проведенной окружности. Докажите, что $\delta(R) \to 0$ при $R \to \infty$.

2.72. (См. [28], [27]). На квадратном участке со стороной 100 растут (цилиндрические) деревья радиуса 1. Докажите, что если на этом участке нельзя проложить (сколь угодно тонкую) прямолинейную тропинку длины 10, не задевающую ни одного дерева, то число деревьев не менее 400.

2.73. (Москва, см. [6], [19]). На участке земли квадратно–гнездовым способом посажено 10000 деревьев: 100 рядов по 100 деревьев. Какое наибольшее число деревьев можно срубить, чтобы выполнялось следующее условие: если встать на любой пень, то за деревьями не будет видно ни одного другого пня? Деревья считать достаточно тонкими.

2.74. (Москва, см. [6]). На координатной плоскости нарисованы круги радиуса 1/14 с центрами в каждой точке, у которой обе координаты — целые числа. Докажите, что любая окружность радиуса 100 пересечет хотя бы один из нарисованных кругов.

2.75. (См. [28]). В каждый узел целочисленной решетки на плоскости вбили тонкие гвозди и положили вектор длины 1987. Можно ли перемещать его по плоскости так, чтобы повернуть на 180° и так, чтобы он не задел ни одного гвоздя?

2.76. (Москва, см. [6]). В бесконечно большой каравай, занимающий все пространство, в точках с целыми координатами впечены изюминки диаметра 0,1. Каравай разрезали на части несколькими плоскостями. Докажите, что найдется неразрезанная изюминка.

2.77. (Студенческий математический бой, см. [21]). Плоскость засажена деревьями — замкнутыми непересекающимися кругами диаметра 1. При этом где бы человек ни встал и куда бы он не посмотрел, он не увидит просвета. Докажите, что если A_n — количество деревьев в круге радиуса n с фиксированным центром, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^2} = \infty.$$

3. Олимпийский калейдоскоп

3.1. Ломаные на решётках

3.1. (Москва, 1964). На клетчатой бумаге проведена замкнутая ломаная с вершинами в узлах сетки, все звенья которой равны. Докажите, что число звеньев такой ломаной четно.

3.2. (См. [22], № 57). На клетчатой бумаге в узлах сетки отмечено две точки. Сколькими способами можно пройти из одной точки в другую, если двигаться по линиям сетки и притом самыми короткими по длине путями?

3.3. (Москва, 1958, см. [7], №21.24) Сторона клетчатой бумаги равна 1. По линиям сетки построен прямоугольник размером $m \times n$. Можно ли в прямоугольнике провести по линиям сетки ломаную, которая ровно один раз проходила бы через каждый узел сетки, расположенный внутри или на границе прямоугольника? Если можно, то какова её длина? Какую площадь она будет ограничивать?

3.4. (Москва, 1963). а) Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая 14–звенная ломаная, проходящая по линиям клетчатой бумаги так, что ни на какой линии не лежит более одного звена ломаной?

б) На листе бумаги нанесена сетка из n горизонтальных и n вертикальных прямых. Сколько различных $2n$–звенных замкнутых ломаных линий можно провести по линиям сетки так, чтобы каждая ломаная проходила по всем горизонтальным и всем вертикальным прямым?

3.5. (См. [22], № 24). Четыре узла клетчатой бумаги образуют квадрат, (со сторонами, параллельными линиям сетки), на каждой стороне которого помещается n клеток ($n > 1$). Докажите, что существует ломаная из $2n$ звеньев, проходящая через все узлы этого квадрата, включая также узлы, лежащие на его сторонах.

3.6. (Москва, 1959). Как должна двигаться ладья по шахматной доске, чтобы побывать на каждом поле по одному разу и сделать наименьшее число поворотов?

3.7. (Москва, 1959). Докажите, что шахматную доску размером $4 \times n$ нельзя обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле ровно один раз.

3.8. (Москва, 1960). Улитка должна проползти вдоль линий клетчатой бумаги путь длины $2n$, начав и кончив свой путь в данном узле. Докажите, что число различных ее маршрутов равно $(C_{2n}^{n})^2$.

3.9. (Москва, 1961). На шахматной доске выбраны две клетки одинакового цвета. Докажите, что ладья, начав с первой из этих клеток, может обойти все клетки по разу, а на второй выбранной клетке побывать два раза.

Докажите также, что ладья может обойти все клетки прямоугольной доски шахматной доски, побывав в каждой клетке ровно один раз, и вернуться в исходную клетку только в случае, если число клеток на доске чётно.

3.10. (Москва, 1959). Рассмотрим лист клетчатой бумаги со стороной клетки, равной 1. Пусть p_k — число всех ломаных линий длины k, начинающихся в точке O — некотором фиксированном узле сетки, причем все ломаные составлены из звеньев сетки и не проходят по одному и тому же звену дважды. Докажите, что для любого k справедливо неравенство $p_k < 2 \cdot 3^k$.

3.11. (Г. Кондаков). Ребра бесконечной треугольной решетки раскрашены в два цвета. Докажите, что найдутся две сколь угодно далекие точки, соединенные одноцветным путем.

3.12. (Материалы жюри ВМО). На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 выделен квадрат $ABCD$ размером $n \times n$ клеток. Из вершины A в B по линиям сетки и внутри квадрата проводится ломаная длины $2n$. В n клетках таблицы, случайно расположенных в разных строках и разных столбцах, расставляются n звездочек. С какой вероятностью все звездочки окажутся по одну сторону от ломаной? (Другими словами, какую долю среди всевозможных расположений ломаных и звездочек составляют такие, что звездочки лежат по одну сторону от ломаной?).

3.13. (Всесоюзная олимпиада, 1977). Дан квадратный лист клетчатой бумаги 100×100 клеток. Проведено несколько несамопересекающихся ломаных, идущих по сторонам клеток и не имеющих общих точек. Эти ломаные идут строго внутри квадрата, а концами выходят на его границу. Докажите, что кроме вершин квадрата найдется узел (внутри или на границе), не принадлежащий ни одной ломаной.

3.14. (См. [22], № 23). Географическая карта разрезана параллельными прямыми на квадратные куски 20 км $\times$20 км. Докажите, что любой маршрут длины 310 км помещается не более чем на 36 квадратах.

3.15. (См. [22], № 35). На плоскости имеется замкнутая конечнозвенная ломаная линия. Прямая l имеет с ней ровно 1961 общую точку. Докажите, что существует прямая l', не проходящая ни по одному звену ломаной и имеющая с ней более чем 1961 общую точку.

3.16. (См. [22], № 54). На участке клетчатой бумаги квадратной формы в N^2 клеток выбраны два поля A и B, находящиеся рядом друг с другом (по горизонтали). На левое поле A поставлена фишка. Ее можно передвигать на одно поле по одному из трех направлений: вверх, вправо и по диагонали через левый нижний угол. Докажите, что независимо от N невозможно обойти всю доску, побывав на каждом поле ровно по одному разу и прийти на поле B.

3.17. (См. [22], № 56). Докажите, что шахматную доску с $4k+1$ вертикалями и $4k+1$ горизонталями можно обойти ходом коня, побывав на каждом поле ровно по одному разу.

3.18. (Москва, 1972). Улицы города M представляют собой правильную квадратную сетку размером 20×20 квадратов. На некоторых из перекрестках имеются станции метро. Известно, что, выйдя на улицу в любом месте, можно добраться до метро, пройдя не более двух кварталов по улице. Какое наименьшее число станций метро может быть в городе M?

3.19. ([7], прил. 2, № 62). На бесконечной клетчатой бумаге нарисованы две непересекающиеся бесконечные в обе стороны ломаные, звенья которых идут по линиям бумаги и каждая из которых проходит через все узлы бумаги. Обязательно ли эти ломаные имеют общие звенья?

3.20. ([7], прил. 2, № 65). Город, имеющий форму квадрата, разделен на n^2 квадратных кварталов. По улицам между кварталами введено двустороннее движение, а вокруг города — одностороннее. Велосипедист едет по городу, соблюдая правила дорожного движения, то есть едет по правой стороне улицы и на перекрестках не поворачивает налево (на внешней односторонней улице он обязан ехать так, чтобы дома находились все время справа от него). При каких n можно утверждать, что велосипедист может объехать весь город, побывав на каждой стороне каждой улицы по одному разу (на внешней улице — на ее единственной стороне)? Постарайтесь найти возможно более широкий набор искомых значений n.

3.21. ([7], прил. 2, № 54). Город, имеющий форму квадрата со стороной 10 км, разделён на n^2 одинаковых квадратных кварталов. Кварталы занумерованы числами от 1 до n^2 так, что два квартала, имеющие соседний номер, имеют общую сторону. Докажите, что велосипедист может найти нужный ему квартал, проехав не более 100 км.

3.2 Разбиения, раскраски

3.22. (Чехословакия, 1982; см. [15]). На координатной плоскости найти выпуклое множество, которое содержит бесконечно много узлов решетки $\mathbb{Z}^2$, но в пересечении с любой прямой содержит лишь конечное (или пустое) множество таких узлов.

3.23. (Москва, 1954). Дан лист клетчатой бумаги, каждый узел сетки которого обозначен некоторой буквой. Известно, что на любом отрезке, соединяющем два узла, обозначенные одной буквой и лежащие на одной линии, найдется по крайней мере один узел, обозначенный другой буквой. Какое наименьшее число различных букв требуется для этого?

3.24. (Москва, 1954). Из клетчатой бумаги вырезан квадрат 17×17. В каждой клетке квадрата написано одно из чисел 1, 2, ..., 70. Докажите, что существуют четыре различные клетки, центры которых A, B, C, D являются вершинами параллелограмма ($AB \parallel CD$) и сумма чисел, стоящих в клетках с центрами A и C, равна сумме чисел, стоящих в клетках с центрами B и D.

3.25. (Москва, 1955). Квадратная таблица в n^2 клеток заполнена числами от 1 до n так, что в каждой строке и каждом столбце встречаются все эти числа. Докажите, что если n нечётно и таблица симметрична относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, то на этой диагонали встретятся все числа 1, 2, ..., n.

3.26. (Москва, 1971). Имеется сетка, состоящая из квадратов размером 1×1. Каждый ее узел покрашен в один из четырех данных цветов так, что вершины любого квадрата 1×1 покрашены в разные цвета. Докажите, что найдется прямая, принадлежащая сетке, такая, что узлы, лежащие на ней, покрашены в два цвета.

3.27. (Россия, 1986). Каждая клетка бесконечного листа клетчатой бумаги окрашена в один из данных n цветов ($n \geq 2$). Докажите, что найдутся четыре клетки одного цвета, центры которых являются вершинами некоторого прямоугольника со сторонами, параллельными прямым линиям на бумаге.

3.28. (Москва, 1962). Уголком называется фигура, составленная из трех квадратов со стороной 1 в виде буквы "Г". Докажите, что прямоугольник размером 1961×1963 нельзя разбить на уголки, а прямоугольник размером 1963×1965 — можно.

3.29. (Москва, 1976). Каждая точка пространства окрашена в один из пяти фиксированных цветов, причём имеется 5 точек, окрашенных в различные цвета. Докажите, что существует прямая, все точки которой окрашены не менее чем в три цвета, и плоскость, все точки которой окрашены не менее чем в четыре цвета.

3.30. (Москва, 1977). В пространстве расположен выпуклый многогранник, все вершины которого находятся в целочисленных точках, т.е. все три координаты каждой вершины — целые числа. Других целочисленных точек внутри, на гранях и на ребрах многогранника нет. Доказать, что число вершин многогранника на превосходит 8.

3.31. (Москва, 1980). На прямоугольном листе клетчатой бумаги размером $m \times n$ клеток расположено несколько квадратов, стороны которых идут по горизонтальным и вертикальным линиям бумаги. Известно, что никакие два квадрата не совпадают и никакой квадрат не содержит внутри себя другой квадрат. Каково наибольшее число таких квадратов?

3.4 Игры на клетчатой бумаге

3.32. (Москва, 1969). Белая ладья преследует чёрного слона на доске 3×1969 клеток (они ходят по очереди по обычным шахматным правилам). Как должна играть ладья, чтобы взять слона? Первый ход делают белые.

3.33. (Москва, 1969). На шахматной доске на поле $a1$ стоит белый конь. Двое по очереди замазывают по одной клетке шахматной доски бокситовым клеем. При этом они должны замазывать так, чтобы конь мог пройти на любую незамазанную клетку, нигде не приклеевшись (конь ходит по обычным шахматным правилам). Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто выигрывает при правильной игре: сделавший первый ход или его партнёр?

3.34. (Москва, 1970). Какое максимальное количество чёрных шашек можно расставить на шашечной доске 8×8 так, чтобы простая белая шашка могла взять их все за один ход, не попадая при этом в дамки? Шашки стоят на чёрных полях.

3.35. (Москва, 1970). У Мерлина есть две таблицы 100×100; одна из них пустая, а на другой, волшебной, написаны какие–то числа. Первая таблица прибита к скале у входа в пещеру, а вторая — к стене внутри пещеры. Вы можете обвести на первой таблице какой–нибудь квадрат (размером 1×1, 2×2, ... или 100×100), расположенный в любом месте таблицы и за шиллинг узнать у Мерлина сумму чисел, стоящих в клетках соответствующего квадрата на волшебной таблице. Какое наименьшее количество денег потребуется, чтобы узнать сумму чисел на диагонали волшебной таблицы?

3.36. (Москва, 1971). На клетчатой бумаге нарисован квадрат 100×100 клеток. Внутри каждой клетки поставили синюю или красную точку так, что в каждом столбце и в каждой строке оказалось по 50 синих и красных точек. Соединим каждые две красные точки, расположенные в соседних квадратах (имеющих общую сторону), красным отрезком, а каждые две синие точки в соседних квадратах — синим отрезком. Докажите, что красных отрезков получится столько же, сколько и синих.

3.37. (Москва, 1972). Город X состоит из 10 бесконечных проспектов, пересекающих через равные интервалы поперечные улицы. Два полицейских, двигаясь вдоль проспектов и улиц, пытаются обнаружить гангстера, который может прятаться за домами. Если гангстер окажется на одном проспекте или на одной улице с каким–либо из полицейских, он будет обнаружен. Скорость гангстера не более чем в 10 раз превышает скорость полицейских, причём полицейским известно, что он в начальный момент времени находится от них на расстоянии не более 100 кварталов. Докажите, что полицейские смогут обнаружить гангстера.

3.38. (Москва, 1964). На квадратном клетчатом поле 99×99 клеток играют двое. Первый игрок ставит крестик в центр поля, вслед за этим второй игрок может поставить нолик на любую из восьми клеток, окружающих крестик первого игрока. После этого первый игрок ставит крестик на любое из полей рядом с уже занятыми и т. д. Первый игрок выигрывает, если ему удается поставить крестик на любую угловую клетку. Докажите, что при любой игре второго игрока первый всегда может выиграть.

3.39. (Москва, 1959). В углах шахматной доски размером 3×3 стоят кони: в верхних углах белые, а в нижних — чёрные. Одним ходом разрешается переставить любого коня на любое свободное поле в соответствии с правилами шахмат. Мы хотим поставить белых коней в нижние углы доски, а чёрных — в верхние. Докажите, что для этого понадобится не меньше 16 ходов.

3.40. (См. [22], № 45). На клетчатой бумаге играют двое, A и B. Одним ходом можно соединить две соседние вершины, находящиеся на расстоянии 1. Докажите, что, если первый ход делает A, то

а) B может помешать A образовать из своих линий какой–нибудь замкнутый многоугольник.

б) B может помешать A соединить своими линиями две наперед заданные точки, находящиеся на расстоянии, большем 1.

3.41. (См. [22], № 55). Пятьдесят из клеток обыкновенной шахматной доски пронумерованы целыми числами 1, 2, 3, …, 49, 50. На доске стоят 50 шашек, которые также пронумерованы. Каждая шашка стоит или на пустом поле, или на поле с номером, который может совпадать или не совпадать с номером шашки. За один ход можно одну шашку переставить на любое свободное место. Докажите, что для того чтобы все шашки поставить на свои места, потребуется не больше 75 ходов.

3.42. (Москва, 1967). На шахматной доске размером 1000×1000 находится чёрный король и 499 белых ладей. Чёрные и белые фигуры ходят по очереди. Докажите, что, как бы ни ходили ладьи, король всегда может встать за конечное число ходов под бой одной из них.

3.43. (Москва, 1968). Белые и чёрные играют в следующую игру. В углах шахматной доски стоят два короля: белый на $a1$, чёрный на $h8$. Играющие делают ходы по очереди (начинают белые). Играющий может ставить своего короля на любое соседнее поле (если только оно свободно), соблюдая следующие правила: нельзя увеличивать расстояние между королями (расстоянием между двумя королями называется наименьшее число ходов короля, за которое он может пройти с одного поля на другое: так, в начале игры расстояние между королями — 7 ходов).

Выигрывает тот, кто поставит своего короля на противоположную кромку доски (белого короля на вертикаль h или восьмую горизонталь, чёрного — на вертикаль a или первую горизонталь). Как нужно играть, чтобы выиграть? Кто выигрывает при правильной игре?

3.44. (Москва, 1973). Грани кубика пронумерованы числами 1, 2, …, 6, причём сумма чисел на противоположных гранях равна 7. Имеется шахматная доска 50×50 клеток; клетки доски равны граням кубика. Кубик перекатывается через рёбра из левого нижнего угла доски в правый верхний угол. При перекатывании он каждый раз перемещается только вправо и вверх (влево и вниз перемещаться запрещено), и на каждой клетке по пути его движения отпечатывается то число, которое расположено на грани, соприкасающейся с этой клеткой. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех написанных чисел? А какое наименьшее?

3.45. (Москва, 1973). Лист клетчатой бумаги размеров 100×100 раскрасили в 100 цветов. При этом каждую клетку либо закрасили одним из этих цветов, либо вовсе не закрасили. Раскраска называется *правильной*, если в каждой строке и в каждом столбце нет двух клеток одинакового цвета. Можно ли закрасить лист правильным способом так, чтобы оказались закрашенными все клетки, если первоначально были правильно закрашены: а) $100^2 - 1$; б) $100^2 - 2$; в) 100 клеток?

3.46. (Москва, 1978). Докажите, что в прямоугольник размером $n \times 2m$ (n и m — целые) можно уложить в два слоя кости домино размером 1×2 так, чтобы каждый слой полностью покрывал прямоугольник и чтобы никакие две кости из разных слоёв не совпадали друг с другом.

3.47. (И. Н. Сергеев, Москва, 1987; Квант 1987, №9). На клетчатой бумаге закрашены 17 единичных клеток. Докажите, что их можно покрыть прямоугольниками, сумма периметров которых не превосходит 100, причём расстояние между любыми точками разных прямоугольников не меньше $\sqrt{2}$.

3.48. (Москва, 1979). Коля и Витя играют в следующую игру на бесконечной клетчатой бумаге. Начиная с Коли, они по очереди отмечают узлы клетчатой бумаги. При этом каждый из них своим ходом должен отметить такой узел, чтобы после этого все отмеченные узлы лежали в вершинах выпуклого многоугольника (начиная со второго хода Коли). Тот из играющих, кто не сможет сделать очередного хода, считается проигравшим. Кто выиграет при правильной игре?

3.4 Дополнительные задачи

3.49 (Международная одимпиада, 1986). Пусть M — произвольное конечное множество целочисленных точек на координатной плоскости. Всегда ли можно окрасить некоторые точки множества M в белый цвет, а остальные — в красный цвет так, чтобы для каждой прямой p, параллельной любой из координатных осей, абсолютная величина разности между числом белых и красных точек на p не превосходила бы единицы?

3.50. (См. [22], № 21). По бесконечной шахматной доске с полями в виде квадратов со стороной 1 прыгает блоха, перемещаясь за каждый прыжок на α вправо и на β вверх. Докажите, что если числа α, β и α/β иррациональны, то блоха обязательно попадет когда–нибудь на черное поле.

3.51 (Москва, 1975). На шахматной доске размером 8×8 отмечены 64 точки — центры всех клеток. Можно ли отделить все точки друг от друга, проведя 13 прямых, не проходящих через эти точки?

3.52. (См. [22], № 31). Огород имеет форму квадрата со стороной 10. В некоторой точке огорода имеется колодец. Докажите, что общая длина труб, ответвляющихся от колодца и уложенных так, чтобы расстояние от любой точки огорода до ближайшей трубы было не больше 1, не меньше 48.

3.53. (Венгрия, [14]). Пусть a — произвольно заданное целое положительное число. Доказать, что всегда можно найти одну и только одну пару целых положительных чисел (x, y), для которых

$$x + \frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2} = a.$$

Литература

[1] Айерленд К., Роузен М. *Классическое введение в современную теорию чисел.* — М.: Мир, 1987.

[2] Болтянский В. Г. *Пифагоровы тетраэдры.* — “Квант”, 8 (1986).

[3] Вавилов В. В. *Избранные лекции по геометрии.* — Алматы: “Дарын”, 2000.

[4] Вавилов В. В., Устинов А. В. *Многоугольники на решетках.* — М.: МЦНМО, 2006.

[5] Васильев Н. Б., Егоров А. А., *Задачи всесоюзных математических олимпиад.* — М.: Наука, 1988.

[6] Гальперин В., Калинников В. *Многоугольники на клетчатой бумаге.* — “Квант”, 6 (1978)

[7] Гальперин Г. А., Толпыго А. К. *Московские математические олимпиады.* — М.: Просвещение, 1986.

[8] Гашков С. Б., Чубариков В. Н. *Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений.* — М.: Высш. шк., 2000.

[9] Гильберт Д., Кон–Фоссен С. *Наглядная геометрия*, — М.: Наука, 1981.

[10] Грэхем Р.Л., Кнут Д.Э., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики.* — М.: Мир, 1998.

[11] Гутенмахер В. Л. *Косоугольные координаты и области Дирихле.* — "Квант", 4 (1972).

[12] Добровольский Н. М. *Гиперболическая дзета функция решеток.* Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6090–84.

М.: Физматгиз, 1959.

[13] Егоров А. А. *Решетки и правильные многоугольники.* — "Квант", 12 (1974), 26–33.

[14] *Задачи отборочных математических олимпиад.* (Сост. Вавилов В. В.) — М.: МГУ, 1992.

[15] *Зарубежные математические олимпиады.* (Под ред. И. Н. Сергеева) — М: Наука, 1987.

М.:

[16] Коксетер Г. С. М. *Введение в геометрию.* — М.: Наука, 1966.

[17] Кюршак Й., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я. *Венгерские математические олимпиады.* — М.: Мир, 1976.

1967.

[18] Никулин В. В., Шафаревич И. Р. *Геометрии и группы.* — М.: Наука, 1983.

[19] Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии*, т. 2 — М: Наука, 1995.

[20] Прасолов В., Скопенков М., Дориченко С. 12 — 16-ая летняя конференция турнира городов, 2004, www.turgor.ru.

[21] Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В. *Задачи студенческих математических олимпиад.* — МГУ, 1987.

[22] *Сборник задач московских математических олимпиад.* (Под. ред. Болтянкого В. Г.) — М.: Просвещение, 1965.

[23] Серпинский В. *Сто простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики (На границе геометрии и арифметики).* —М.: Просвещение, 1961.

[24] Хонсбергер Р., *Математические изюминки.* — М.: Наука, 1992.

[25] Штейнгауз Г. *Задачи и размышления.* — М.: Наука, 1974.

[26] Штейнгауз Г. *Математический калейдоскоп.* — М.: Наука, 1981.

[27] Штейнгауз Г. *Сто задач.* — М.: Наука, 1976.

45.

[28] Яглом А. М., Яглом И. М. *Неэлементарные задачи в элементарном изложении* — М.: Наука, 1968.

[29] Яковлев Г. Н.,. Купцов Л. П, Резниченко С. В., Гусятников П. Б. *Всероссийские математические олимпиады школьников.* —М.: Просвещение, 1992.

[30] Araujo J., Keilhauer G., Pietrocola N., Vavilov V. *Area y Volumen en la geometria elemental.* — Buenos Aires: Red Olimpica, 2000.

[31] Ball D. G., *The constructability of regular and equilateral polygons on square pinboard.* — Math. Gaz., 57 (1973), 119–122.

20 (1953), 233-251.

[32] Erdös P. *Néhany geometriai problémáról.* — Mat. Lapok, 8(1957), 86–92.

[33] Gilbert G. T., Krusemeyer M. I., Larson L. C. *The Wohascum county problem book.* — The Dolciani mathematical expositions № 14, The Mathematical Association of America, 1993.

[34] Kelly P. A. *The use of the computer in game theory.* — Master's thesis, The Univ. Of Calgary, 1967.

[35] Klamkin M. *Problem E#10538.* — Amer. Math.Monthly, v. 105 (1998), № 9.

[36] Klamkin M. *Problem 709.* — Elemente der Math., 30 (1975), 14–15.

[37] Kulikowski. T. *Sur l'existence d'un sphère pasant par un nombre donnè de points aux coordonnées entières.* — l'Enseignement Mathematique, 4 (1958), 89–90.

[38] Lindstrom B. *An inequality for B2 - sequences.* — J. Combinatorial Theory, 6(1969), 211–212.

[39] Makowski A. *Angels of parallelogram with in Lattice points.* — Elemente der Mathematik, 1 (1962), 114–115.

[40] Poonen B., Rodriguez-Villegas F. *Lattice polygons and the number* 12. — Amer. Math. Monthly, March, 2000.

[41] Roth K. F. *On problem of Heilbronn.* — J. of London Math. Soc., 26 (1951) 198–204.

[42] Schinzel A. *Sur l'existence d'un cercle pasant par un nombre donné de points aux coordonnées entières.* — l'Enseignement Mathematique, 4 (1958), 71–72.

[43] Scherrer W. *Die Einlagerung eines regularen Vielecks in ein Gitter.* — Elemente der Mathematik, 1 (1946),97–98.

[44] Schenberg I. J. *Regular simplices and quadratic forms.* — J.London Math.Soc., 12 (1937), 48–55.

[45] Singer J. *A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory.* — Trans. Amer. Math. Soc., 43(1938), 377-385.

Вавилов Валерий Васильевич,
доцент СУНЦ МГУ,
кандидат физ.-мат. наук.
Лауреат конкурса школьных учителей
физики и математики фонда "Династия"
в номинации "Наставник будущих ученых" (2006),
Лауреат Ломоносовской премии МГУ (2007).

E-mail: vvavilov@tochka.ru

Устинов Алексей Владимирович,
ведущий научный сотрудник
Хабаровского отделения Института
прикладной математики ДВО РАН,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: ustinov@iam.khv.ru

Информация

Замеченные опечатки в №1(36), 2006 г.

Стр, 18, 15-я строка сверху, напечатано “[16, с. 10]”, должно быть “[10, с. 10]”;
Стр, 20, 16-я строка сверху, напечатано “20, 1937”, должно быть “19, 1937”;
Стр, 24, 15-я строка снизу, напечатано “Разрядка моя”, должно быть “Выделение мое”;
Стр, 35, 7-я строка сверху, напечатано “П-учебник”, должно быть “понимаемый учебник”.

Содержание журнала “Математическое образование” за 2005-2006 гг.

№ 3 (34), июль – сентябрь 2005 г.

№ 4 (35), октябрь – декабрь 2005 г.

№ 1 (36), январь – март 2006 г.

№ 2 (37), апрель – июнь 2006 г.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2006 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2006 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents