

ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического
образования и просвещения

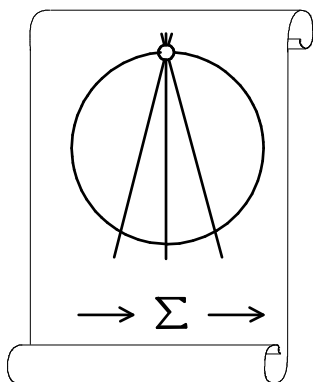
год тридцатый

номер 2 (118)

апрель-июнь 2026

Москва

*Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования*



Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.

Дворянинов С.В.

Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)

Дубовицкий А.В.

Канель-Белов А.Я.

Комаров С.И.

Константинов Н.Н.

Костенко И.П.

Саблин А.И.

№2 (118), 2026 г.

© “Математическое образование”, составление, 2026 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2026 г.

“Математическое образование”, периодическое издание.

Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.

Подписано к печати 17.07.2026 г.

Стиль верстки разработан С.А. Кулеповым.

Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.

Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.

Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (118), апрель – июнь 2026 г.

Содержание

Учащимся и учителям средней школы

- И. Г. Малышев.* О четырёхугольнике, имеющем в своём арсенале более четырёх десятков формул, а представленном в учебнике одной 2

Студентам и преподавателям математических специальностей

- К. Ю. Горбунов.* Вычисление вероятностных моментов времени достижения множества состояний в конечной Марковской цепи 13
- Н. В. Илюшечкин.* О различии характеристического и минимального многочленов матрицы 19
- С. И. Калинин, Л. В. Панкратова.* Аналог неравенства Иенсена для p -выпуклых функций и его применение к решению уравнений 24

Из истории математики

- В. Н. Оникийчук, И. В. Оникийчук.* О задаче барона Мюнхгаузена. Леонард Эйлер. Окончание части 2 30
- В. А. Сердюков, А. В. Сердюкова.* Числа от натуральных до октав 41

Образовательные инициативы

- А. А. Андреев, А. А. Балабекян, А. В. Куприн, Е. А. Максимова, Е. А. Скородумова.* Олимпиада школьников "ТИИМ — Технологии. Интеллект. Информатика. Математика" 2025/2026 52

О четырёхугольнике, имеющем в своём арсенале более четырёх десятков формул, а представленном в учебнике одной

И. Г. Малышев

Рассмотрен ряд полезных формул, связывающих различные параметры (длины сторон, углы, площадь и др.) четырёхугольников, удовлетворяющих некоторым условиям, например, одновременно вписанных и описанных.

Название статьи можно чуть уточнить: О четырёхугольнике, имеющем в своём арсенале более четырёх десятков формул, а представленном в школьном учебнике только одной, а именно, формулой площади

$$S = \sqrt{abcd}. \quad (1)$$

Это о четырёхугольнике, в который вписана окружность и который сам вписан в окружность (см. рис.1). На рисунке обозначены стороны, два угла и отрезки касательных. С учетом свойства углов ($C = \gamma = 180^\circ - \alpha$, $D = \delta = 180^\circ - \beta$, где углы $A = \alpha$, $B = \beta$) очевиден один из алгоритмов построения четырёхугольника при заданной стороне и двум углам (a , α , β). Сначала получаем центр вписанной окружности при пересечении биссектрис углов A и B . Следующий этап — построение двух радиусов (OQ , OT) и одного из углов в центре окружности. Третий этап — построение перпендикуляра к радиусу OF и получение точек C и D как пересечение прямых BQ и AT с этим перпендикуляром.

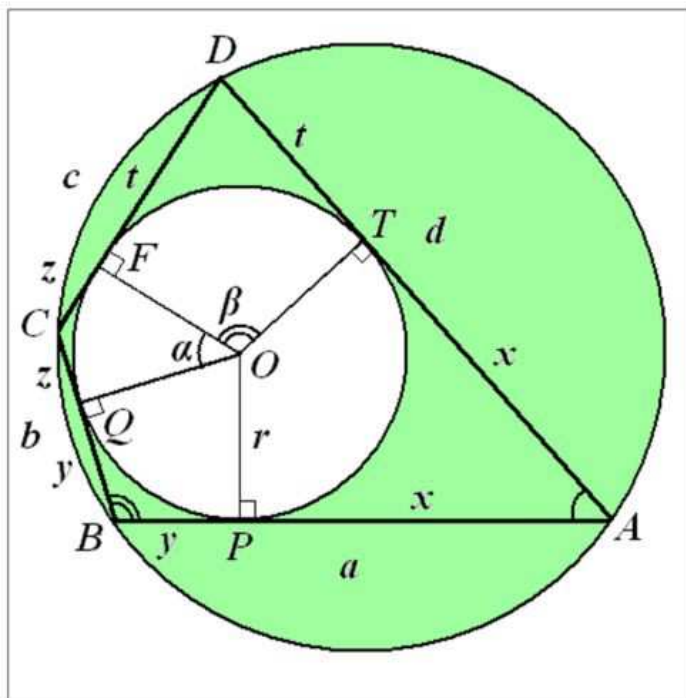


Рис. 1

Основные формулы четырёхугольника

В большинстве зарубежных статей по теме [1; 2] авторы подробно исследуют свойства этого четырёхугольника, а в формулах и теоремах фигурируют в основном стороны четырёхугольника либо отрезки касательных (см. рис. 1). В результате некоторые формулы красивы, но непрактичны и выглядят довольно громоздко. Часть из них будет приведена ниже. Большой список формул для этого четырёхугольника был дан в статье автора [3]. Рассмотрим некоторые из них.

Начнём с площади. Общая формула площади выпуклых четырёхугольников довольно громоздка: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{\alpha+\gamma}{2}}$, где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$. Если учесть, что для вписанных четырёхугольников $\alpha + \gamma = 180^\circ$, и воспользоваться формулой Брахмагупты (инд. математик и астроном, 598-670 гг.): $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, то при условии, что в этот четырёхугольник вписана окружность, т.е. выполняется равенство $a + c = b + d$, получаем формулу (1). Отметим, что вписанный четырёхугольник имеет наибольшую площадь из всех четырёхугольников с данными сторонами. Если же взять формулу площади для описанного четырёхугольника $S = \sqrt{abcd} \cdot \sin \frac{\alpha+\gamma}{2}$, то при условии, что четырёхугольник вписан в окружность, также получаем формулу (1). Отметим, что и здесь из исходной формулы следует, что наибольшей площадью из описанных четырёхугольников обладают вписанные четырёхугольники. Что касается названия такого четырёхугольника, то в российской литературе по элементарной геометрии он практически нигде серьёзно не представлен, поэтому и названия не получил. Судя по Википедии, у этих четырёхугольников оказалось много названий. Например, двух-окружностные четырёхугольники (double circle quadrilateral), вписано-описанные четырёхугольники, бицентрические четырёхугольники (bicentric quadrilateral), хордо-касающиеся четырёхугольники (chord-tangent quadrilateral), четырёхугольник с двумя окружностями, четырёхугольник с двумя дугами. В работе [4] предложено название — “четырёхугольник Понселе”, поскольку для заданных двух окружностей, одна внутри другой, таких четырёхугольников бесконечно много. Семь названий, да ещё из двух слов — это перебор, поэтому такой законопослушный четырёхугольник автором был назван “клумбовым” [5]. Рисунок в какой-то степени и даёт повод так назвать.

В далёком 1937 г. в журнале “Математика в школе” [6] в статье, посвящённой задачам построения треугольника по заданным элементам, был представлен полный набор формул для треугольника. Этот набор состоял из 207 формул. Формулы были представлены без повторения, т.е., выписывалась только одна из трёх возможных, например, формула радиуса вневписанной окружности, касающейся стороны a . В статьях автора в журналах “Математика в школе”, “Математика в профильной школе. Фрактал”, “Математика для школьников” были рассмотрены основные свойства клумбового четырёхугольника и приведено более 40 формул, при этом за основные параметры четырёхугольника были приняты радиус вписанной окружности и два угла. Для удобства введём обозначения: $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = p$, $\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = q$ (где речь идёт о полупериметре p , видно из контекста).

Стороны и отрезки касательных четырёхугольника через радиус вписанной окружности и котангенсы половинных углов α и β выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} x = rp, \quad y = rq, \quad z = \frac{r}{p}, \quad t = \frac{r}{q}, \quad xz = r^2, \quad yt = r^2, \\ a = r(p+q), \quad b = r\left(\frac{1}{p} + q\right), \quad c = r\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right), \quad d = r\left(p + \frac{1}{q}\right), \quad \frac{a}{c} = pq, \quad \frac{b}{d} = \frac{q}{p} \end{aligned} \quad (2)$$

В следующей системе равенств для вписанного четырёхугольника выписана формула Птолемея и формула, связанная с прямой и обратной теоремой о перпендикулярности диагоналей четырёхугольника [7]:

$$\begin{cases} ac + bd = d_1 d_2 \\ b^2 + d^2 - (a^2 + c^2) = 2d_1 d_2 \cos \varphi \end{cases}$$

где φ — угол между диагоналями, лежащий напротив сторон a и c . Сложим и вычтем удвоенное верхнее выражение с нижним и получаем систему равенств:

$$\begin{cases} (b+d)^2 - (a-c)^2 = 2d_1d_2(1 + \cos \varphi) \\ (a+c)^2 - (b-d)^2 = 2d_1d_2(1 - \cos \varphi) \end{cases}$$

С одной стороны, перемножая оба выражения, имеем уже упомянутую формулу Брахмагупты, а с другой стороны, если в системе взять отношение двух выражений, то можно найти квадрат тангенса половинного угла между диагоналями:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{(a+c)^2 - (b-d)^2}{(b+d)^2 - (a-c)^2} = \frac{(p-b)(p-d)}{(p-a)(p-c)}$$

Для описанного четырёхугольника это преобразуется в $\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{bd}{ac} = \left(\frac{1+pq}{p+q} \right)^2$. Таким образом, для клумбового четырёхугольника $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{bd}{ac}} = \frac{1+pq}{p+q} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}$.

Учитывая, что полупериметр четырёхугольника равен:

$$\frac{a+b+c+d}{2} = r \left(p+q + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = 2r \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right),$$

получаем ещё одну формулу площади четырёхугольника: $S = 2r \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right)$. Руководствуясь формулами из перечня (2) для отрезков касательных, можно привести ещё одну формулу площади: $S = \sqrt[4]{xyzt} \cdot (x+y+z+t)$. Кроме того, получаются ещё три формулы площади, связанные с углами:

$$S = ac \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = bd \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}, \quad S = a^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Наконец, ещё известна одна формула площади, если записать теорему синусов для треугольников ABD и ABC : $\frac{d_1}{\sin \alpha} = 2R$ и $\frac{d_2}{\sin \beta} = 2R$, где BD и AC диагонали d_1 и d_2 соответственно. Подставляя в формулу $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$, получаем следующее равенство для вычисления площади вписанного четырёхугольника, а также связь радиусов окружностей и угла между диагоналями для клумбового четырёхугольника:

$$S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \varphi, \quad R^2 \sin \varphi = r^2 \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}.$$

Если воспользоваться формулой Птолемея $ac+bd = d_1d_2$ и подставить сюда стороны и диагонали: $r^2 \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} + \frac{1}{pq} + pq + 4 \right) = 4R^2 \sin \alpha \sin \beta$, то получим связь радиусов

$$R^2 = r^2 \frac{1 + \sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}, \quad (3)$$

а отсюда и синус угла между диагоналями $\sin \varphi = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{1 + \sin \alpha \sin \beta}$. Кроме того, стоит отметить и тождество для клумбовых четырёхугольников:

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} + \frac{1}{pq} + pq = \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{d} + \frac{d}{b} = \frac{4}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

Одним из основных вопросов геометрии этого четырёхугольника является вопрос расстояния между центрами окружностей. Известна формула ученика Эйлера Н.И. Фусса (швейцарский и российский математик, 1755-1825 гг.):

$$l^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}. \quad (4)$$

В известном зарубежном пособии [8] целый параграф посвящен этому четырёхугольнику и непосредственно выводу формулы Фусса. Известна также формула Леонарда Карлитца (американский математик, 1907-1999 гг.):

$$l^2 = R^2 - 2Rr\mu, \quad (5)$$

где μ выражается сложным образом через стороны четырёхугольника $\mu = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)^2(ac+bd)}} = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(b+d)^2(ac+bd)}}$. Понятно, что математику хотелось бы иметь формулу, аналогичную формуле Эйлера для треугольника $l^2 = R^2 - 2Rr$.

Недавно была получена новая формула для расстояния [9], имеющая более простой вид:

$$l^2 = r^2 \frac{1 - \sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}. \quad (6)$$

Разумеется, все три формулы расстояния связаны между собой. Связующим звеном стала зависимость между радиусами вписанной и описанной окружностями (3). Например, подстановка произведения синусов через радиусы окружностей в зависимость (6) приводит к формуле Фусса (4), и наоборот, подстановка зависимости (3) в формулу Фусса приводит к формуле (6). Совмещая формулы (3) и (6) мы приходим к выражению

$$l^2 = R^2 - 2r \cdot \frac{r}{\sin \alpha \sin \beta} = R^2 - \frac{2rR}{\sqrt{1 + \sin \alpha \sin \beta}}. \quad (7)$$

Таким образом, коэффициент в формуле Карлитца (5) должен иметь вид $\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin \alpha \sin \beta}}$. В том, что это действительно так, легко убедиться, если подставить в формулу $\mu = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)^2(ac+bd)}}$ значения сторон из перечня (2) и мы получим после некоторых преобразований выражение

$$\mu = \sqrt{\frac{(1+p^2)(1+q^2)}{(p+q)^2 + (1+pq)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4pq}{(1+p^2)(1+q^2)}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin \alpha \sin \beta}}.$$

Новые формулы (3) и (6) подтвердили и справедливость теоремы Понселе (французский математик, механик, инженер, 1788-1867 гг.) о существовании бесконечного множества возможных клумбовых четырёхугольников при заданных радиусах окружностей либо радиусе одной окружности и положении одной окружности внутри другой. И это следствие того, что полученные формулы зависят от произведения $\sin \alpha \sin \beta$, которое остаётся неизменным, хотя углы при этом могут изменяться. Хотя в формуле (6) задействовано три параметра, но она в паре с формулой для радиусов окружностей (3) выглядит привлекательней, чем формула Фусса. Комбинируя эту пару, можно получить ещё зависимость $l^2 = R^2 \frac{1 - \sin \alpha \sin \beta}{1 + \sin \alpha \sin \beta}$.

Где же ещё встречается произведение $\sin \alpha \sin \beta$? Одна из теорем планиметрии непосредственно касается вписанного четырёхугольника. Это теорема Р. Симсона (шотландский математик, популяризатор геометрии, 1687-1768 гг.). Симсон никакого отношения к теореме не имел, тем более, что она доказана только в 1797 г. шотландским математиком В. Уоллесом (1768-1843). Поэтому будем говорить о теореме Уоллеса. В Википедии эта теорема в компактном виде выглядит следующим образом:

Основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника или их продолжения из произвольной точки вне треугольника, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точка лежит на описанной окружности треугольника.

В пособии Я.П. Понарина [10] она сформулирована следующим образом:

Для того чтобы четыре точки принадлежали одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы ортогональные проекции одной из них на три прямые, определяемые тремя остальными точками, были коллинеарны.

Учитывая, что 4 точки на окружности образуют четырёхугольник, можно дать и такую формулировку теоремы:

Четырёхугольник вписан в окружность тогда и только тогда, когда проекции одной из вершин на прямые, определяемые тремя другими вершинами, лежат на одной прямой.

В работе [11] было показано, что независимо от вершины, из которой опущены перпендикуляры на стороны, все четыре отрезка Уоллеса (соединение крайних точек из трёх) равны между собой. На это указывает и само выражение для них $U = 2R \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$. Фактически это инвариант для целого класса вписанных четырёхугольников, разумеется и для клумбовых. Причём, площадь четырёхугольника имеет вид: $S = RU \sin \varphi$.

Оказывается, что есть ещё более удачный выбор параметров четырёхугольника, при котором формулы заметно упрощаются [12]. Для этого воспользуемся формулой Эйлера для четырёхугольников: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4\varepsilon^2$, где ε — расстояние между серединами диагоналей. После небольших преобразований получаем равенство: $\varepsilon^2 = p^2 - R^2(\sin \alpha + \sin \beta)^2 - S \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right)$. Дальнейшие преобразования приводят к выражению: $\varepsilon^2 = r^2(\sin \alpha + \sin \beta)^2 \cdot \frac{1 - \sin \alpha \sin \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$, из которого следуют две формулы. Во-первых, $\varepsilon = \frac{p}{2} \sqrt{1 - \sin \alpha \sin \beta}$, а во-вторых,

$$l = \frac{\varepsilon}{\sin \alpha + \sin \beta}. \quad (8)$$

Последняя формула по своей красоте и простоте не идёт ни в какое сравнение с формулами Фусса и Карлитца. Кстати, здесь же возможно и получение ещё одной формулы для площади клумбового четырёхугольника:

$$S = pr = \frac{2\varepsilon r}{\sqrt{1 - \sin \alpha \sin \beta}}. \quad (9)$$

Подводя некоторый итог этой части, стоит обратить внимание на то, что, если руководствоваться перечнем формул (2), можно составить целую таблицу рациональных клумбовых четырёхугольников [13]. Для этого достаточно принять переменные p и q рациональными числами и выбрать соответствующее целочисленное значение радиуса вписанной окружности. Большинство параметров четырёхугольника тогда будут или целыми, или рациональными числами. В таблице 1. Приведён небольшой список таких четырёхугольников и указаны параметры: стороны, площадь, $t = \sin \alpha \sin \beta$, синус угла между диагоналями и расстояние между центрами окружностей. Стоит обратить внимание на то, что угол между диагоналями довольно близок к 90° .

Таблица 1.

№	p	q	r	a	b	c	d	S	t	$\sin \varphi$	l
1.	2	3	6	30	21	5	14	210	$\frac{12}{25}$	$\frac{35}{37}$	$\frac{5\sqrt{145}}{8}$
2.	2	$\frac{3}{4}$	12	33	15	22	40	660	$\frac{96}{125}$	$\frac{220}{221}$	$\frac{5\sqrt{145}}{6}$
3.	3	$\frac{3}{4}$	12	45	13	20	52	780	$\frac{72}{125}$	$\frac{195}{197}$	$\frac{5\sqrt{265}}{6}$
4.	2	$\frac{2}{5}$	10	24	9	30	45	540	$\frac{16}{29}$	$\frac{216}{225}$	$\frac{5\sqrt{377}}{8}$
5.	2	$\frac{4}{5}$	20	56	26	35	65	1820	$\frac{32}{41}$	$\frac{364}{365}$	$\frac{15\sqrt{41}}{8}$
6.	2	5	10	70	55	7	22	770	$\frac{4}{13}$	$\frac{77}{85}$	$\frac{15\sqrt{13}}{2}$

Прямые в клумбовом четырёхугольнике

Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то согласно теореме Ньютона, середины диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой. На рисунке 2 точки P и Q середины диагоналей, а точка O это центр вписанной окружности. Как недавно выяснилось [14], в качестве дополнения теоремы можно указать ещё отношение длин получившихся отрезков: $\frac{PO}{OQ} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\delta}{2}}$. Для клумбового четырёхугольника это выглядит как $\frac{PO}{OQ} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

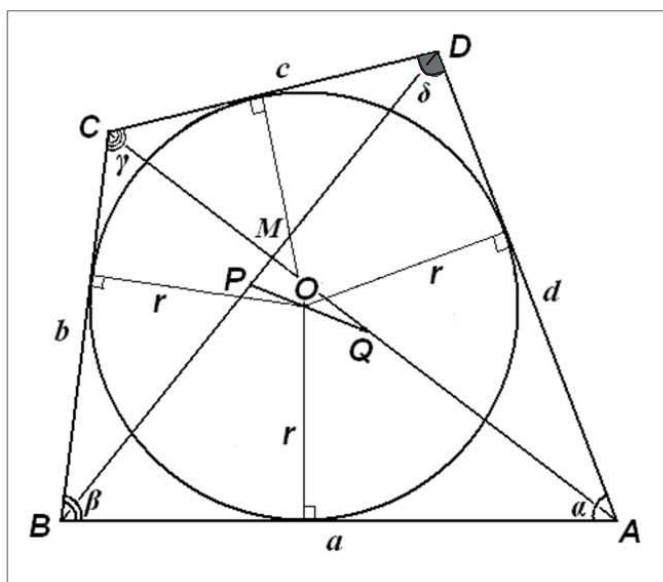


Рис. 2

Говоря о прямой Гаусса, имеют ввиду теорему о прямой, проходящей через середины диагоналей уже произвольного четырёхугольника. Середины диагоналей принадлежат прямой, которая проходит через середину отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон четырёхугольника (см. рис.3).

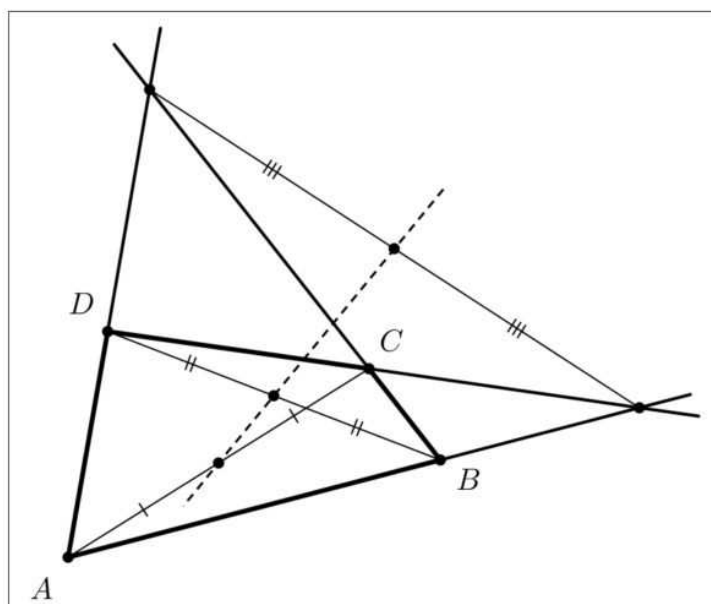


Рис. 3

В частном случае описанного четырёхугольника прямая Гаусса проходит через центр вписанной окружности, т.е. является прямой четырёх точек. Последовательно рассмотрим точки, лежащие на одной прямой в клумбовом четырёхугольнике. В одной из статей [12] была доказана теорема о положении центра вписанной окружности клумбового четырёхугольника (на рис. 4 точка O). Оказалось, что он лежит на пересечении диагоналей четырёхугольника, вершинами которого являются середины диагоналей (P, Q), точка пересечения диагоналей (M) и центр описанной окружности (N) исходного четырёхугольника (см. рис.4).

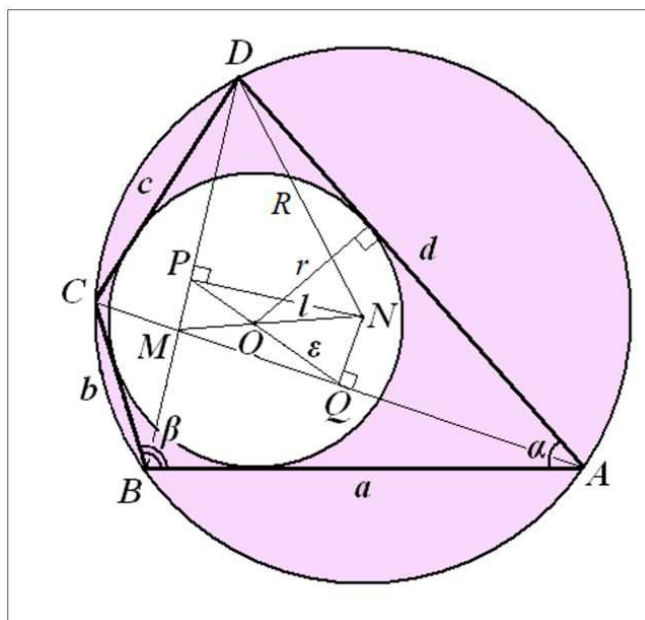


Рис. 4

Но оказалось ещё интереснее. Как было показано в статьях из журнала “Математика для школьников” [15; 16]: центры внеписанных окружностей клумбового четырёхугольника являются вершинами четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями, вписанного в окружность. На рисунке 5 представлены все окружности для клумбового четырёхугольника — вписанная, описанная, внеписанные и окружность для четырёхугольника с вершинами в центрах внеписанных окружностей. Итак, $ABCD$ — клумбовый четырёхугольник; P, Q, N, M — центры внеписанных окружностей (в отличие от обозначений рис. 4); O — центр вписанной окружности, E — центр описанной окружности, F — центр описанной окружности четырёхугольника $PQNM$; точка K — точка пересечения диагоналей.

В процессе вычислений выяснилось, что в клумбовом четырёхугольнике на одной прямой лежат не только точка пересечения диагоналей и центры вписанной и описанной окружностей, но и центр описанной окружности четырёхугольника с вершинами в центрах внеписанных окружностей. В статьях было показано, что четырёхугольник $PQNM$ вписан в окружность радиусом $R_f = \frac{2r}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$ и его диагонали перпендикулярны. Причём, расстояние от центра вписанной окружности до центра описанной окружности для $ABCD$ (OE) такое же, как и расстояние от центра описанной окружности $ABCD$ до центра описанной окружности $PQNM$ ($OE = EF$). Более того, у клумбового четырёхугольника речь идёт о прямой пяти точек. А именно, точка пересечения диагоналей, центры вписанной и описанной окружностей, центр описанной окружности четырёхугольника, вершинами которого являются центры внеписанных окружностей четырёхугольника, принадлежат прямой, которая перпендикулярна отрезку, соединяющему точки пересечения противоположных сторон четырёхугольника.

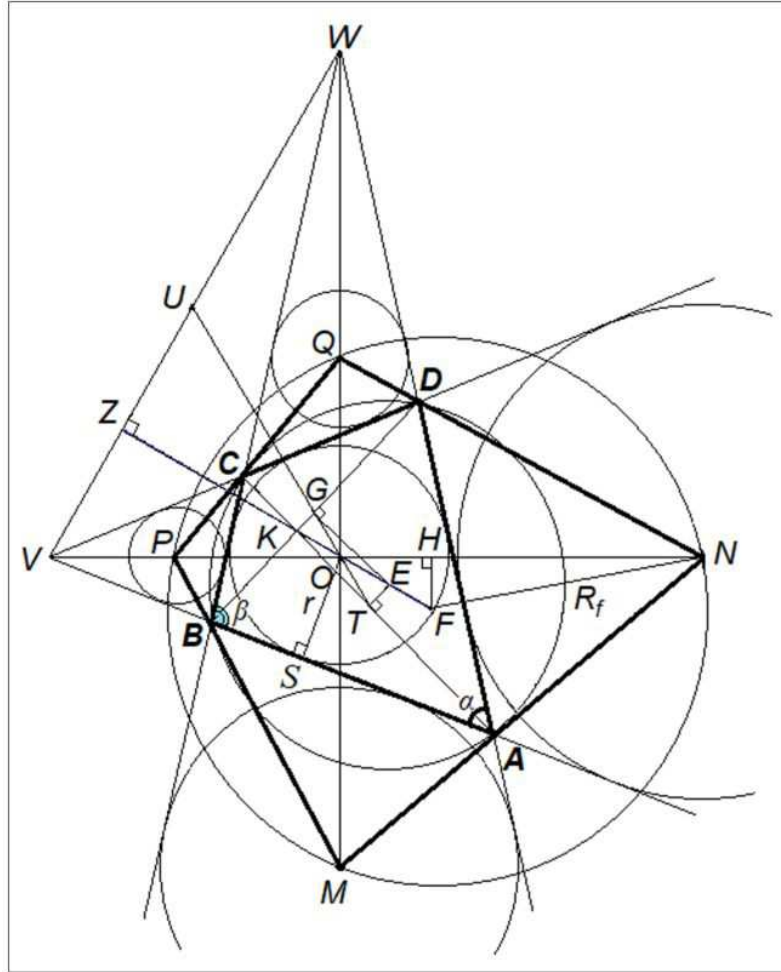


Рис. 5

Отметим следующее. Во-первых, на рис. 5 на продолжении прямой GT лежит точка U — середина гипотенузы VW (частный случай теоремы Гаусса). Как уже отмечалось выше, для клумбового четырёхугольника эта прямая включает ещё и центр вписанной окружности четырёхугольника, т.е. пример прямой четырёх точек — T, O, G, U . Во-вторых, известна теорема [17]: Если четырёхугольник вписанный, то линия, соединяющая центр его описанной окружности с точкой пересечения диагоналей перпендикулярна линии, которая соединяет точки пересечения его противоположных сторон. И опять, в клумбовом четырёхугольнике на этой прямой лежат ещё две характерных точки — центр вписанной окружности четырёхугольника и центр описанной окружности четырёхугольника с вершинами в центрах внеписанных окружностей.

В третьих, формула площади клумбового четырёхугольника $S = 2\varepsilon \cdot OZ$ известна [17]. Однако, и здесь, как видим, возможно уточнение. Из полученной выше формулы (9) следует, что длина перпендикуляра $OZ = \frac{r}{\sqrt{1 - \sin \alpha \sin \beta}}$

Обратимся ещё раз к рисункам 4 и 5. Во-первых, уточним параметры четырёхугольника $PNQM$ на рис. 4. Он вписан в окружность диаметром MN , причём: $MN = \frac{\varepsilon}{\sin \varphi}$, $OM = l \sin \alpha \sin \beta$. Во-вторых, параллельно с формулами расстояния между центрами вписанной и описанной окружностями, были получены и формулы для расстояний между центрами внеписанных окружностей и центром описанной окружности четырёхугольника (на рис. 5 — это, например, ME): $L_i^2 = R^2 + \frac{2r\rho_i}{\sin \alpha \sin \beta} = R^2 + R_f \rho_i$, где индекс i означает соответствующую сторону четырёхугольника (a, b, c, d), а ρ_i — радиус внеписанной окружности. Кстати, этот же параметр R_f (радиус описанной окружности четырёхугольника $PQNM$ на рис. 5) участвует и в формуле расстояния между центрами $l^2 = R^2 - R_f r$.

Стоит напомнить, что для треугольника известна формула Эйлера $L_i^2 = R^2 + 2R\rho_i$.

Среди известных теорем для четырёхугольников стоит упомянуть и теорему Брианшона (французский математик 1783–1864 гг.) Согласно ей, в описанном четырёхугольнике прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон, проходят через точку пересечения его диагоналей.

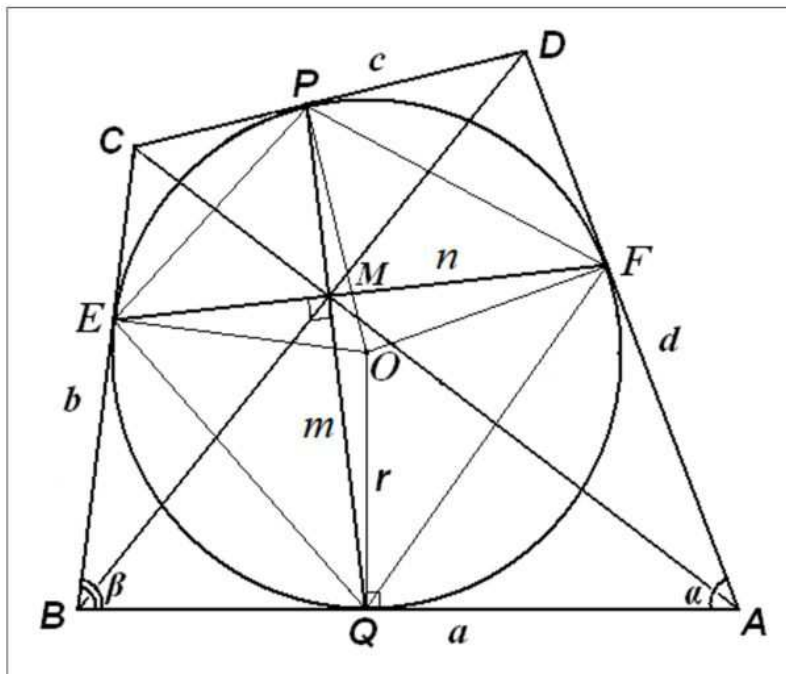


Рис. 6

Назовём для удобства отрезки EF и PQ (см. рис. 6), соединяющие точки касания противоположных сторон четырёхугольника, *отрезками Брианшона*. Соотношение, в котором делятся отрезки точкой пересечения, получены в статье [18]: $\frac{MQ}{MP} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\delta}{2}}$, $\frac{MF}{ME} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}}$. Кроме того, в статье [19] получено соотношение для описанных четырёхугольников: $\frac{PQ^2}{EF^2} = \frac{bd}{ac}$. В нашем случае четырёхугольник не только описанный, но и вписанный. В результате имеем: $\frac{MQ}{MP} = pq = \frac{a}{c}$, $\frac{MF}{ME} = \frac{p}{q} = \frac{d}{b}$. Нужно уточнить, что рисунок 6 относится к клумбовому четырёхугольнику. Поэтому указаны только два угла и отрезки PQ и EF на рисунке перпендикулярны. Учитывая, что отрезки Брианшона в клумбовом четырёхугольнике перпендикулярны, если ввести новые переменные $PQ = m$, $EF = n$, получаем $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{bd}{ac}} = \frac{m}{n}$, а формула для вычисления площади выглядит интереснее приведённых выше: $S = \frac{mn}{\sin \alpha \sin \beta}$.

Задач для клумбового четырёхугольника и на вычисление параметров, и на построение было предложено достаточно много в статьях автора [20–22]. За 17 лет ЕГЭ задачи для данных четырёхугольников можно было встретить всего несколько раз, а именно, тестовые задачи на применение формулы площади (1), одну задачу на равнобедренную трапецию, в которую вписана окружность, и задачу на дельтоид, который вписан в окружность. Все эти задачи были представлены в различных тренировочных вариантах. Единственный раз в общем виде задача встретилась в варианте 254 с известного сайта alexlarin.net:

“Четырёхугольник, один из углов которого равен $\arccos \frac{3}{5}$, вписан в окружность радиуса $2\sqrt{10}$ и описан около окружности радиуса 3.

- Найдите площадь четырёхугольника.
- Найдите угол между диагоналями четырёхугольника”.

Задача легко решается, если воспользоваться формулами, приведёнными выше: $R^2 = r^2 \frac{1+t}{t^2}$, $40t^2 - 9t - 9 = 0$, $t = \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \beta = \frac{3}{4}$, $p = 2r \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right) = \frac{31}{2}$, $S = pr = 93/2$, $\sin \varphi = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{1 + \sin \alpha \sin \beta} = \frac{S}{2R^2 \sin \alpha \sin \beta} = \frac{31}{32}$. Кстати, для этого четырёхугольника получается $l^2 = R^2 \frac{1-t}{1+t} = 10$, $l = \sqrt{10}$.

Таким образом, в целом, большой раздел планиметрии на красивые фигуры пока не нашёл своего места в школьной геометрии, хотя в зарубежных пособиях ему посвящены параграфы. А пока изложенный выше материал может быть использован на факультативных занятиях или стать темой докладов в научных обществах учащихся.

Литература

- [1] Mirko Radić. Certain inequalities concerning bicentric quadrilaterals, hexagons and octagons // Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. - Volume 6. - Issue 1. - Article 1. - 2005.
- [2] Martin Josefsson. The Area of a Bicentric Quadrilateral // Forum Geometricorum. - Volume 11. - 2011. - P. 155–164.
- [3] Малышев И.Г. О перечне формул клумбового четырёхугольника // Математика в школе. – 2017. - № 6. - С. 38-42.
- [4] Диомидов Е., Заславский А., Калашников В., Кожевников П., Челноков Г. Вокруг теоремы Понселе. URL: turgor.ru>lktg/2014/6/6-1ru.pdf
- [5] Малышев И.Г. Клумбовый четырёхугольник // Математика в школе. – 2016. - № 3. - С. 50-53.
- [6] Фурсенко В.Б. Лексикографическое изложение конструктивных задач геометрии треугольника // Математика в школе. - 1937. - № 5. - С. 4-30.
- [7] Атанасян Л.С. и др. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 9 класс. - М.: изд. “Вита-Пресс”, 2002. - С. 80-86.
- [8] Yiu P. Euclidean Geometry. - 1998.
- [9] Малышев И.Г. О расстоянии между центрами окружностей в клумбовом четырёхугольнике // Математика в профильной школе. Фрактал. - 2016. - № 2. - С. 13-19.
- [10] Понарин Я.П. Элементарная геометрия: В 3 т. Т. 1: Планиметрия. Преобразования плоскости. - М.: МЦНМО, 2018. - 312 с.
- [11] Малышев И.Г. О перечне формул вписанного четырёхугольника // Математика в школе. - 2024. - № 2. - С. 38-43.
- [12] Малышев И.Г. О новых формулах и теоремах элементарной геометрии // Математика в школе. - 2018. - № 4. - Диск-приложение.
- [13] Малышев И.Г. О рациональных фигурах // Математика для школьников. - 2020. - № 4. - С. 3-9.
- [14] Малышев И.Г. О расположении центра окружности, вписанной в четырёхугольник // Математика для школьников. – 2018. - № 1. - С. 3-5.
- [15] Малышев И.Г. Внеписанные окружности и фигуры с внеписанными вершинами // Математика для школьников. – 2022. - № 3. - С. 16-25.

- [16] Малышев И.Г. Прямые в клумбовом четырёхугольнике // Математика для школьников. – 2023. - № 1. - С. 20-26.
- [17] Тахаев С.М. Построение четырёхугольников с заданными свойствами // Математическое образование. – 2018. - выпуск 1 (85). - С. 10-32.
- [18] Малышев И.Г. Теорема Бриансона для четырёхугольника и её продолжение // Scientific discussion. - V. 1. - No 26. - 2018. - P. 18–22.
- [19] Малышев И.Г. Отрезки Бриансона в описанном четырёхугольнике // Математика для школьников. – 2020. - № 2. - С. 3-6.
- [20] Малышев И.Г. Некоторые задачи о клумбовом четырёхугольнике // Математика для школьников. – 2017. - № 1. - С. 3-8.
- [21] Малышев И.Г. О перечне задач для клумбового четырёхугольника // Математика для школьников. – 2022. - № 2. - С. 19-24.
- [22] Малышев И.Г. Пример интересной задачи на построение // Математика для школьников. – 2021. - № 1. - С. 21-25.

*Малышев Игорь Геннадьевич,
доцент кафедры «Прикладная математика»
Нижегородского государственного технического
университета имени Р.Е. Алексеева,
кандидат технических наук, доцент.*

E-mail: migniro@mail.ru

Вычисление вероятностных моментов времени достижения множества состояний в конечной Марковской цепи

К. Ю. Горбунов

В настоящей заметке излагается простой, но универсальный метод вычисления вероятностных моментов времени первого достижения заданного множества состояний конечной Марковской цепи при случайном блуждании. Он может быть использован в учебном процессе при изложении дисциплин «теория вероятностей» и «случайные процессы». Приводится пример применения метода.

Введение

Методике изложения теории случайных, в частности, Марковских процессов посвящена обширная литература. Отметим недавнюю статью [1] и учебники [2-4]. Однако вопрос оценки вероятностных моментов времени первого достижения заданного множества состояний часто излагается не в полной общности. Следуя описанию из [5], мы изложим достаточно простой, но универсальный метод вычисления этих моментов для конечной Марковской цепи, основанный на матричном инструментарии. Затем дадим пример его применения.

Описание метода

Рассмотрим однородную неприводимую Марковскую цепь $X_0, X_1, X_2, \dots$ с конечным множеством S состояний. Если A — непустое подмножество в S , обозначим T_A — время (номер шага) первого попадания в A . Неприводимость цепи гарантирует, что с вероятностью 1 это время конечно. Обозначив A' дополнение до A , представим матрицу переходов цепи как

$$P = \begin{pmatrix} P_A & P_{AA'} \\ P_{A'A} & P_{A'} \end{pmatrix},$$

где P_A (соответственно, $P_{A'}$) — матрица вероятностей переходов между состояниями из A (соответственно, из A'), а матрица $P_{AA'}$ (соответственно, $P_{A'A}$) — матрица вероятностей переходов из A в A' (соответственно, из A' в A).

Как известно, k -я степень матрицы переходов содержит вероятности переходов между состояниями ровно за k шагов. Чтобы первый раз попасть из A' в A на k -м шаге, надо первые $k - 1$ шагов провести внутри A' , а на k -м шаге попасть из A' в A . Таким образом, матрица $(P_{A'})^{k-1} P_{A'A}$ состоит из вероятностей первого попадания из состояний A' в состояния из A на k -м шаге. Сумма элементов её i -й строки равна вероятности такого попадания в A из состояния $i \in A'$. В матричном виде это записывается как

$$\mathbf{P}(T_A = k \mid X_0 = i) = ((P_{A'})^{k-1} P_{A'A} \mathbf{1})_i,$$

где $\mathbf{1}$ — столбец из одних единиц, а индекс i означает i -ю строку матрицы. По определению, r -й момент распределения времени T_A равен

$$E(T_A^r | X_0 = i) = \sum_{k=1}^{\infty} k^r (P_{A'}^{k-1} P_{A'A} \mathbf{1})_i. \quad (1)$$

Очевидно, эта формула не годится для применения в практических вычислениях. Однако мы докажем, что столбец значений r -го момента можно вычислить как линейную комбинацию столбцов, равных умноженным на $\mathbf{1}$ степеням матриц $(I - P_{A'})^{-1}$, где I — единичная матрица. Тогда эти значения вычисляются решением системы линейных уравнений. Коэффициенты c_{lr} линейной комбинации определяются двумя натуральными индексами: вышеупомянутым r и $l \leq r$. А именно, $c_{rl} = (-1)^r \sum_{j=1}^l (-1)^j C_l^j j^r$, где C_l^j — число сочетаний из l по j . Например, $c_{11} = 1$, $c_{21} = -1$, $c_{22} = 2$, $c_{31} = 1$, $c_{32} = -6$, $c_{33} = 6$.

Теорема. Для любого $r \geq 1$ выполняется

$$E(T_A^r | X_0 = i) = \sum_{l=1}^r c_{rl} ((I - P_{A'})^{-l} \mathbf{1})_i. \quad (2)$$

Доказательство. Сравнение равенств (1) и (2) показывает, что требуется связать между собой матрицы $P_{A'}$ и $P_{A'A}$. Стохастичность матрицы P даёт соотношение между ними: $(P_{A'A} + P_{A'}) \mathbf{1} = I \mathbf{1}$, что можно переписать как

$$(I - P_{A'})^{-l} P_{A'A} \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Таким образом, требуется доказать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r (P_{A'}^{k-1} P_{A'A} \mathbf{1})_i = \sum_{l=1}^r c_{rl} ((I - P_{A'})^{-l} (I - P_{A'})^{-1} P_{A'A} \mathbf{1})_i = \sum_{l=1}^r c_{rl} ((I - P_{A'})^{-(l+1)} P_{A'A} \mathbf{1})_i, \quad (3)$$

для чего достаточно доказать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r P_{A'}^{k-1} = \sum_{l=1}^r c_{rl} (I - P_{A'})^{-(l+1)}. \quad (4)$$

Доказательства равенств такого рода часто становятся проще, если в каждую из двух частей ввести переменную x , превратив числовое равенство в равенство функций. Применяя индукцию по r , рассмотрим случай $r = 1$. Внесём под сумму в левую часть множитель x^{k-1} , чтобы в ней просматривалась производная геометрической прогрессии со знаменателем $x P_{A'}$ (считаем, что $x \in (0, 1]$). Соответственно, в правой части перед $P_{A'}$ поставим множитель x , чтобы там просматривалась сумма этой прогрессии. Теперь (при $r = 1$) имеем: с одной стороны, производная функции $F(x) = x \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} P_{A'}^{k-1}$ равна $\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} P_{A'}^{k-1}$. С другой стороны, представляя $F(x)$ суммой геометрической прогрессии как $x(I - x P_{A'})^{-1}$, получаем её производную в виде

$$(I - x P_{A'})^{-1} + x P_{A'} (I - x P_{A'})^{-2} = (I - x P_{A'} + x P_{A'}) (I - x P_{A'})^{-2} = (I - x P_{A'})^{-2}.$$

Полагая $x = 1$ и учитывая, что $c_{11} = 1$, получаем равенство (4) при $r = 1$, а умножая его на $P_{A'A} \mathbf{1}$, также и равенство (3).

Предположим, что функциональное соотношение, соответствующее (4), верно при $r - 1$, т.е. что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{r-1} x^{k-1} P_{A'}^{k-1} = \sum_{l=1}^{r-1} c_{(r-1)l} (I - x P_{A'})^{-(l+1)}.$$

С одной стороны, производная функции $x \sum_{k=1}^{\infty} k^{r-1} x^{k-1} P_{A'}^{k-1}$ равна $\sum_{k=1}^{\infty} k^r x^{k-1} P_{A'}^{k-1}$, обозначим последнее выражение как $G_r(x)$. С другой стороны, эта производная равна $G_{r-1}(x) + xG'_{r-1}(x)$. Приравнявая эти выражения и используя предположение индукции, получаем:

$$G_r(x) = \sum_{l=1}^{r-1} c_{(r-1)l} (I - xP_{A'})^{-(l+1)} + xP_{A'} \sum_{l=1}^{r-1} (l+1) c_{(r-1)l} (I - xP_{A'})^{-(l+2)}.$$

Поскольку $xP_{A'}(l+1)c_{(r-1)l} = -(l+1)c_{(r-1)l}(I - xP_{A'}) + (l+1)c_{(r-1)l}I$, имеем:

$$\begin{aligned} G_r(x) &= \sum_{l=1}^{r-1} c_{(r-1)l} (I - xP_{A'})^{-(l+1)} - \sum_{l=1}^{r-1} (l+1) c_{(r-1)l} (I - xP_{A'})^{-(l+1)} + \sum_{l=1}^{r-1} (l+1) c_{(r-1)l} (I - xP_{A'})^{-(l+2)} \\ &= - \sum_{l=1}^{r-1} l c_{(r-1)l} (I - xP_{A'})^{-(l+1)} + \sum_{l=2}^{r-1} l c_{(r-1)(l-1)} (I - xP_{A'})^{-(l+1)} \\ &= -c_{(r-1)1} (I - xP_{A'})^{-2} + \sum_{l=2}^{r-1} l (c_{(r-1)(l-1)} - c_{(r-1)l}) (I - xP_{A'})^{-(l+1)} + r c_{(r-1)(r-1)} (I - xP_{A'})^{-(r+1)}. \end{aligned}$$

Заметим: во-первых $-c_{(r-1)1} = (-1)^{r+1} = c_{r1}$. Во-вторых, для $l = 2, \dots, (r-1)$ имеем:

$$\begin{aligned} l(c_{(r-1)(l-1)} - c_{(r-1)l}) &= l \left[(-1)^{r-1} \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^j C_{l-1}^j j^{r-1} - (-1)^{r-1} \sum_{j=1}^l (-1)^j C_l^j j^{r-1} \right] \\ &= (-1)^{r-1} \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^j l [C_{l-1}^j - C_l^j] j^{r-1} - (-1)^{r-1} (-1)^l l^r \\ &= (-1)^{r-1} \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^j (-j) C_l^j j^{r-1} - (-1)^{r-1} (-1)^l l^r = (-1)^r \sum_{j=1}^{l-1} (-1)^j C_l^j j^r + (-1)^r (-1)^l l^r = c_{lr}. \end{aligned}$$

В-третьих, осталось доказать, что $r c_{(r-1)(r-1)} = c_r$. Однако, проще доказать, что для любого n выполняется $c_{nn} = n!$, из чего следует требуемое равенство. Воспользуемся разложением экспоненты в ряд Тейлора: $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots + x^n/n! + \dots$. По формуле бинома Ньютона $(e^x - 1)^n = e^{nx} - C_n^1 e^{(n-1)x} + C_n^2 e^{(n-2)x} - \dots + (-1)^n$. Пользуясь указанным разложением, получаем, что

$$\begin{aligned} (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots - 1)^n &= \left[1 + nx + \frac{(nx)^2}{2!} + \dots + \frac{(nx)^n}{n!} + \dots \right] \\ &\quad - C_n^1 \left[1 + (n-1)x + \frac{(n-1)^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{(n-1)^n x^n}{n!} + \dots \right] \\ &\quad + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \right] + (-1)^n. \end{aligned}$$

Приравнявая в этом равенстве коэффициенты при x_n , приходим к равенству

$$1 = \frac{n^n}{n!} - C_n^1 \frac{(n-1)^n}{n!} + C_n^2 \frac{(n-2)^n}{n!} - \dots + (-1)^n C_n^{n-1} \frac{(n-1)^n}{n!}.$$

Умножая обе его части на $n!$, получаем требуемое соотношение. При $x = 1$ получаем равенство (4), а из него и равенство (3). Теорема доказана.

При $r = 1$ и $r = 2$ получаем, соответственно, формулы для первого и второго моментов:

$$E(T_A | X_0 = i) = ((I - P_{A'})^{-1} \mathbf{1})_i, \quad E(T_A^2 | X_0 = i) = ((I - P_{A'})^{-1} \mathbf{1})_i + 2((I - P_{A'})^{-2} \mathbf{1})_i. \quad (5)$$

Пример. Ограниченное блуждание

Рассмотрим Марковскую цепь с n состояниями, занумерованными числами от 1 до n . Из состояния 1 происходит переход с вероятностью 1 в состояние 2, из состояния n — в него же, из любого другого состояния i — с вероятностью 0.5 в $i - 1$ и в $i + 1$. Отбрасывая тривиальные случаи $n = 1$ и $n = 2$, считаем, что $n > 2$. Например, если $n = 6$, то матрица P , представленная в табличной форме, имеет следующий вид:

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	0.5	0	0.5	0	0	0
3	0	0.5	0	0.5	0	0
4	0	0	0	0	0.5	0
5	0	0	0	0.5	0	0.5
6	0	0	0	0	0	1

Обозначим T_n — число шагов, за которые цепь первый раз попадает в состояние n , начиная блуждание из состояния 1. Согласно первому равенству в (5), имеем:

$$E(T_n) = ((I - P_{\{1,2,\dots,n-1\}})^{-1}\mathbf{1})_i,$$

где $P_{\{1,2,\dots,n-1\}}$ — матрица, полученная из P вычёркиванием последней строки и последнего столбца. Умножая обе части равенства на $I - P_{\{1,2,\dots,n-1\}}$, получаем систему линейных уравнений:

$$x_1 - x_2 = 1, \quad -0.5x_1 + x_2 - 0.5x_3 = 1, \quad -0.5x_2 + x_3 - 0.5x_4 = 1, \dots, \quad -0.5x_{n-2} + x_{n-1} = 1.$$

Из неё последовательно получаем:

$$x_1 = x_2 + 1, \quad x_2 = x_3 + 3, \dots, \quad x_{n-2} = x_{n-1} + (2n - 5), \quad x_{n-1} = 2n - 3.$$

Отсюда $x_1 = x_{n-1} + (1 + 3 + \dots + (2n - 5)) = 2n - 3 + (n - 2)^2 = (n - 2)n + 1$. Например, при $n = 3$ получаем, что среднее число шагов, требуемое для попадания из состояния 1 в состояние 3, равно 4. Вычисление, основанное на определении математического ожидания, потребовало бы суммирования ряда $2(1/2) + 4(1/8) + 6(1/32) + \dots$, что было бы не простым делом. Аналогично получаем, что при $n=4$ для попадания из состояния 1 в состояние 4 требуется в среднем 9 шагов.

Переходим к вычислению второго момента. Обозначим матрицу $P_{\{1,2,\dots,n-1\}}$ как P' . Согласно второму равенству в (5), имеем:

$$E(T_n) = -((I - P')^{-1}\mathbf{1})_1 + 2((I - P')^{-2}\mathbf{1})_1$$

Умножая обе части равенства на $(I - P')^2$, получаем систему линейных уравнений относительно столбца X неизвестных: $(I - P')^{-2}X = (I + P')\mathbf{1}$. Решим её в два этапа — сначала решим систему $(I - P')Y = (I + P')\mathbf{1}$, затем найдём x_1 из системы $(I - P')X = Y$.

Этап 1. Выведем формулы для решения системы $(I - P')Y = B$, где $B = (b_1, \dots, b_{n-1})$ — произвольный столбец. Матрица $I - P'$ имеет вид (приводим его для $n = 6$):

	1	2	3	4	5
1	1	-1	0	0	0
2	-0.5	1	-0.5	0	0
3	0	-0.5	1	-0.5	0
4	0	0	-0.5	1	-0.5
5	0	0	0	-0.5	1

Имеем: $y_1 - y_2 = b_1$, $-0.5y_1 + y_2 - 0.5y_3 = b_2$, $-0.5y_2 + y_3 - 0.5y_4 = b_3$, $\dots$, $-0.5y_{n-2} + y_{n-1} = b_{n-1}$. Выразим каждую переменную, кроме y_{n-1} , через следующую в виде $y_i = y_{i+1} + a_i$. Тогда $a_1 = b_1$, $a_2 = b_1 + 2b_2$, $a_3 = b_1 + 2b_2 + 2b_3$, $\dots$, $a_i = a_{i-1} + 2b_i$, $\dots$, $a_{n-2} = a_{n-3} + 2b_{n-2}$. Для последней переменной получаем $y_{n-1} = a_{n-2} + 2b_{n-1}$. Подставим $B = (I + P')\mathbf{1} = (2, 2, \dots, 2, 1.5)$. Имеем $y_{n-1} = (2 + 4(n-3)) + 3 = 4n - 7$ и $y_1 = [2 + (2 + 4) + (2 + 4 + 4) + \dots + (2 + 4(n-3))] + [2 + 4(n-3)] + 3 = (n-2)\frac{4 + 4(n-3)}{2} + (4n-7) = 2n^2 - 4n + 1 = (2n^2 - 4n - 1) - (2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1)$.

Для произвольного y_i при $i \leq n-2$ аналогично получаем:

$$y_i = [2 + 4(i-1) + (2 + 4i) + \dots + (2 + 4(n-3))] + [2 + 4(n-3)] + 3 = (n-i-1)\frac{(2 + 4(i-1)) + (2 + 4(n-3))}{2} + (4n-7) = (2n^2 - 4n - 1) - (2 \cdot i^2 - 4 \cdot i).$$

Таким образом, $y_i = (2n^2 - 4n - 1) - (2i^2 - 4i)$ при $i \leq n-2$ и $y_{n-1} = 4n - 7$.

Этап 2. Положим $B = Y$, тогда имеем:

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 + a_1 = x_3 + a_1 + a_2 = x_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} a_k &= \sum_{k=1}^{n-2} a_k + a_{n-2} + 2y_{n-1} \\ &= y_1 + (y_1 + 2y_2) + (y_1 + 2y_2 + 2y_3) + \dots + (y_1 + 2 \sum_{k=2}^{n-3} y_k) + 2(y_1 + 2 \sum_{k=2}^{n-2} y_k) + 8n - 14. \end{aligned}$$

Например, при $n = 3$ эта сумма превращается в $2y_1 + 8n - 14$, так что средний квадрат числа шагов, требуемых для попадания из состояния 1 в состояние 3, равен $2 \cdot 7 + 10 = 14$. При $n = 4$ сумма равна $y_1 + 2(y_1 + 2y_2) + 8n - 14$, так что средний квадрат числа шагов, требуемых для попадания из состояния 1 в состояние 4, равен $17 + 2(17 + 30) + 18 = 129$.

Заключение

Описанный метод вычисления вероятностных моментов может найти применение в большинстве областей, где применяются конечные Марковские цепи: в финансовом моделировании, системах массового обслуживания, машинном обучении. Отдельно отметим применение Марковских цепей в биоинформатике для моделирования динамики клеточных состояний [6].

Работа выполнена в рамках государственного задания ИППИ РАН, утверждённого Минобрнауки России.

Литература

- [1] Сидняев Н.И. Типы случайных процессов, связанных со сложным событием. Практические приложения // Математическое образование. - 2025. - № 1 (113). - С. 27-43.
- [2] Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т.2. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения: в 2 ч. Часть 1. - М.: МЦНМО, 2021. - 396 с.
- [3] Sericola B. Markov chains. Theory, algorithms and applications. Applied stochastic methods series. - Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2013. - 397 p.

- [4] Tolver A. An Introduction to Markov Chains. - University of Copenhagen, 2016. - 159 p.
- [5] Castella F. and Sericola B. Hitting times on the lollipop graph // Probability in the Engineering and Informational Sciences. - 2025. - P. 1-34. - doi:10.1017/S0269964825000026.
- [6] Lange M., Bergen V., Klein M. et al. CellRank for directed single-cell fate mapping // Nat. Methods. - 2022. - Vol. 19. - P. 159-170. - doi:10.1038/s41592-021-01346-6.

*Горбунов Константин Юрьевич,
Ведущий научный сотрудник Института
Проблем передачи информации РАН,
кандидат физ.-мат. наук.*

E-mail: gorbunov@iitp.ru

О различии характеристического и минимального многочленов матрицы

Н. В. Илюшечкин

Получен критерий различия характеристического и минимального многочленов любой квадратной матрицы. Несовпадение этих многочленов равносильно неполноте ранга некоторой вспомогательной матрицы бóльшего размера.

Символом $Mat_C(n)$ мы будем обозначать пространство всех комплексных квадратных матриц порядка n . Пусть $Z = (z_{jl}) \in Mat_C(n)$ — произвольная матрица, $p_Z(\lambda) = \det(\lambda E - Z)$ — её характеристический многочлен, где E — единичная матрица порядка n . Пусть также $m_Z(\lambda)$ — минимальный многочлен матрицы Z .

Известны следующие критерии совпадения (или несовпадения) этих двух многочленов. Во-первых, пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — все различные собственные числа матрицы Z с кратностями $n_1, \dots, n_k$ соответственно. Тогда [1, Задача 1131] равенство $p_Z(\lambda) = m_Z(\lambda)$ имеет место тогда и только тогда, когда в жордановой форме матрицы Z каждому её собственному числу λ_α соответствует ровно одна жорданова клетка (порядка n_α). Практическое применение этого критерия затруднительно, так как приведение матрицы к жордановой форме — дело непростое.

Другой критерий [2, с. 232] утверждает, что характеристический многочлен матрицы Z порядка n совпадает с её минимальным многочленом тогда и только тогда, когда для любого вектора $(x_0, \dots, x_{n-1})$ найдутся столбцы P и Q длины n , для которых $x_k = Q^T Z^k P$, где $k = 0, 1, \dots, n-1$, а символом T обозначена операция транспонирования. Здесь не нужно вычислять собственные числа матрицы Z , но требуется вывести условия разрешимости системы уравнений второй степени, что опять же непросто. Поэтому данный критерий применим скорее в теоретических исследованиях, чем в практических вычислениях.

Наконец, можно привести ещё один, почти очевидный, критерий отличия многочленов $p_Z(\lambda)$ и $m_Z(\lambda)$. Так как в случае $p_Z(\lambda) \neq m_Z(\lambda)$ степень минимального многочлена не превосходит $n-1$, то должно иметь место равенство

$$x_0 E + x_1 Z + \dots + x_{n-1} Z^{n-1} = 0$$

при некоторых коэффициентах $x_0, \dots, x_{n-1}$, не все из которых равны нулю. Это — система n^2 линейных уравнений с n неизвестными. Она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг её матрицы Z_* меньше n . Эта матрица содержит n^2 строк и n столбцов. Для её описания обозначим элементы матрицы Z^k через $z_{jl}^{(k)}$ при $k = 0, 1, \dots, n-1$. В столбце с номером k матрицы Z_* стоят элементы матрицы Z^k , взятые в определённом, одном и том же для всех k , порядке. Каждая строка этой матрицы состоит из элементов $z_{jl}^{(0)}, z_{jl}^{(1)}, \dots, z_{jl}^{(n-1)}$, где (j, l) — какая-то пара индексов. Ранг матрицы Z_* меньше n тогда и только тогда, когда все её максимальные миноры равны нулю. Количество этих миноров равно числу сочетаний из n^2 по n , а каждый из них является формой степени

$$M = n(n-1)/2$$

от элементов матрицы Z . Таким образом, для проверки различия многочленов $p_Z(\lambda)$ и $m_Z(\lambda)$ нужно проверить $C_{n^2}^n$ форм степени M на предмет равенства нулю.

Настоящая статья посвящена установлению ещё одного критерия различия характеристического и минимального многочленов матрицы Z , при использовании которого также придётся проверять формы степени M на равенство нулю, но число проверок значительно меньше. Нам понадобится матрица некоторого линейного оператора, к описанию которой мы и переходим.

Базис пространства $Mat_C(n)$ образуют матрицы E_{jl} при $j, l = 1, \dots, n$, содержащие единицу на пересечении строки с номером j и столбца с номером l , и нули на всех остальных местах. Пусть также $so_C(n)$ и $Sym_C(n)$ — пространства кососимметрических и симметрических матриц порядка n . Размерности этих пространств равны M и

$$N = n(n+1)/2$$

соответственно. Ортонормированный базис пространства $so_C(n)$ образуют матрицы $E_{jl}^- = 2^{-1/2}(E_{jl} - E_{lj})$ при $j < l$, взятые в порядке

$$12, 13, \dots, 1n, 23, \dots, 2n, \dots, n-1n. \quad (1)$$

Ортонормированный базис пространства $Sym_C(n)$ образуют матрицы E_{jj} при $j = 1, \dots, n$, а также матрицы $E_{jl}^+ = 2^{-1/2}(E_{jl} + E_{lj})$ при $j < l$, взятые в порядке (1).

Пусть теперь $Z \in Mat_C(n)$ — произвольная матрица. Ей можно сопоставить линейный оператор

$$Z^\square : so_C(n) \longrightarrow Sym_C(n), \quad Z^\square(A) = AZ - Z^T A,$$

где $A \in so_C(n)$.

Матрицу размера $N \times M$ этого оператора в базисах E_{jl}^- и E_{pp}, E_{pq}^+ обозначим через $Z^!$. Отображение $Z^\square$ действует на базисные элементы E_{jl}^- по формуле

$$\begin{aligned} Z^\square(E_{jl}^-) &= \sqrt{2}z_{lj}E_{jj} - \sqrt{2}z_{jl}E_{ll} + (z_{ll} - z_{jj})E_{jl}^+ + \\ &+ \sum_{t=1}^{j-1} (z_{lt}E_{tj}^+ - z_{jt}E_{tl}^+) + \sum_{t=j+1}^{l-1} (z_{lt}E_{jt}^+ - z_{jt}E_{tl}^+) + \sum_{t=l+1}^n (z_{lt}E_{jt}^+ - z_{jt}E_{tl}^+). \end{aligned} \quad (2)$$

В этой формуле коэффициенты при векторах базиса пространства $Sym_C(n)$ являются элементами матрицы $Z^!$. Нужно нам свойство матрицы $Z^!$ — инвариантность её ранга относительно преобразований подобия матрицы Z . Для доказательства рассмотрим преобразование пространства $Mat_C(n)$, задаваемое формулой

$$Z = V^{-1}WV, \quad (3)$$

где Z и W — переменные квадратные матрицы порядка n , а V — постоянная обратимая матрица того же порядка. С матрицей V можно связать также преобразования пространств $so_C(n)$ и $Sym_C(n)$, действующие по формулам $B = (V^T)^{-1}AV^{-1}$ и $R = V^T S V$, где переменные матрицы A и B кососимметричны, а переменные матрицы S и R симметричны. Матрицы рассмотренных только что преобразований обозначим через $V_\wedge$ и $V^\wedge$ соответственно. Как нетрудно видеть,

$$Z^\square(A) = AV^{-1}WV - V^T W^T (V^T)^{-1}A = V^T [(V^T)^{-1}AV^{-1}W - W^T (V^T)^{-1}AV^{-1}] V$$

или, в матричной записи, $Z^! = V^\wedge W^! V_\wedge$. Так как матрицы $V^\wedge$ и $V_\wedge$ обратимы, то из последней формулы следует, что ранги матриц $Z^!$ и $W^!$ равны:

$$rg(Z^!) = rg(W^!). \quad (4)$$

Как мы сейчас увидим, с помощью оператора $Z^\square(A)$ можно решать вопрос о совпадении характеристического и минимального многочленов матрицы Z . Оказывается, несовпадение этих двух многочленов равносильно неполноте ранга матрицы $Z^!$.

Теорема. Минимальный многочлен матрицы Z совпадает с её характеристическим многочленом $\iff$ ранг матрицы $Z^!$ принимает максимально возможное значение M .

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — все различные собственные числа матрицы Z с кратностями $n_1, \dots, n_k$. Как уже упоминалось ранее, минимальный многочлен этой матрицы совпадает с её характеристическим многочленом в том и только в том случае, если в жордановой форме матрицы Z каждому её собственному значению λ_α соответствует ровно одна жорданова клетка порядка n_α . Поэтому пусть V — такая обратимая матрица порядка n , что в соотношении (3) матрица W является жордановой формой матрицы Z . Вследствие равенства (4) нам достаточно доказать утверждение теоремы для матрицы W .

Верхнюю жорданову клетку порядка s с числом λ на диагонали будем обозначать как

$$J_s(\lambda) = \lambda E^{(s)} + H^{(s)} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix},$$

где $E^{(s)}$ — единичная матрица порядка s , в матрице $H^{(s)}$ на первой наддиагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю. Нижнюю жорданову клетку того же порядка s будем обозначать как

$$J_s^T(\lambda) = \lambda E^{(s)} + F^{(s)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Верхняя и нижняя жордановы клетки одного порядка получаются друг из друга транспонированием. Умножение прямоугольной матрицы подходящего размера справа на матрицу $H^{(s)}$ перемещает её столбцы на одну позицию вправо. При этом последний столбец исчезает, а на место первого записываются нули. Умножение прямоугольной матрицы слева на матрицу $F^{(s)}$ перемещает её строки на одну позицию вниз. Последняя строка при этом исчезает, а на место первой записываются нули.

Итак, мы будем доказывать, что каждому собственному значению λ_α матрицы W тогда и только тогда соответствует ровно одна жорданова клетка, когда ранг матрицы W^1 равен M . Будем считать верным наше предположение о жордановых клетках. Тогда W — квазидиагональная матрица вида

$$W = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}.$$

Чтобы доказать, что ранг матрицы W^1 равен M , нам достаточно установить, что ядро оператора $W^\square$ равно нулю, то есть что уравнение

$$AW = W^T A, \quad (5)$$

где неизвестная матрица $A \in so_C(n)$, имеет только нулевое решение. Доказательство будем вести по схеме, предложенной в [3, Глава 8, § 1], только у нас кроме верхних жордановых клеток будут задействованы и нижние. В соответствии с квазидиагональным видом матрицы W разобьём искомую матрицу A на блоки $A = (A_{\alpha\beta})$, где $\alpha, \beta = 1, \dots, k$ и $A_{\alpha\beta}$ — прямоугольная матрица размера $n_\alpha \times n_\beta$. Тогда уравнение (5) распадается на $k(k+1)/2$ матричных уравнений

$$A_{\alpha\beta} (\lambda_\beta E^{(n_\beta)} + H^{(n_\beta)}) = (\lambda_\alpha E^{(n_\alpha)} + F^{(n_\alpha)}) A_{\alpha\beta} \quad (6)$$

при $\alpha \leq \beta$, причём при $\alpha = \beta$ матрица $A_{\alpha\alpha}$ должна быть кососимметрической. Уравнение (6) при $\alpha < \beta$ преобразуется к виду

$$(\lambda_\beta - \lambda_\alpha) A_{\alpha\beta} = F^{(n_\alpha)} A_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta} H^{(n_\beta)}.$$

Нетрудно доказать, что решением этого уравнения может быть только нулевая прямоугольная матрица. Докажем это последовательно, начиная с первого диагонального элемента, который вследствие условия $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ должен быть равен нулю. Далее слева направо доказывается, что равны нулю все элементы первой строки матрицы $A_{\alpha\beta}$. Аналогично, двигаясь сверху вниз, получаем равенство нулю и всех элементов её первого столбца. После этого рассматривается второй диагональный элемент и так далее. В итоге находим, что матрица $A_{\alpha\beta}$ нулевая.

При $\alpha = \beta$ уравнение (6) приводится к виду

$$A_{\alpha\alpha}H^{(n_\alpha)} = F^{(n_\alpha)}A_{\alpha\alpha},$$

и рассуждениями, подобными приведённым выше, доказывается, что матрица $A_{\alpha\alpha}$ должна быть ганкелевой [3, с. 301], причём на всех её побочных наддиагоналях стоят нули. Но ганкелева косо-симметрическая матрица неизбежно является нулевой. Таким образом, при сделанном относительно матрицы W предположении получается, что уравнение (5) имеет только нулевое решение. Следовательно, ядро оператора $W^\square$ равно нулю и ранг матрицы $W^!$ принимает максимально возможное значение M .

Теперь предположим, что, напротив, какому-либо собственному числу λ в матрице W соответствует более одной одной жордановой клетки. Тогда в этой матрице есть две различные строки с номерами j и l с $j < l$, в каждой из которых есть всего один ненулевой элемент, равный λ (в столбцах j и l соответственно). Рассмотрим вектор-столбцы x и y , у которых равны единице координаты с номерами j и l соответственно, а все остальные координаты нулевые. Тогда $x^TW = \lambda x^T$, $y^TW = \lambda y^T$, а также $W^Tx = \lambda x$, $W^Ty = \lambda y$. Матрица

$$A = xy^T - yx^T = \sqrt{2}E_{jl}^-$$

очевидным образом кососимметрична. При этом

$$W^\square(A) = AW - W^TA = \lambda xy^T - \lambda yx^T - \lambda xy^T + \lambda yx^T = 0,$$

то есть ядро оператора $W^\square$ непусто. Поэтому ранг матрицы $W^!$ меньше M , и теорема доказана.

Итак, различие многочленов $p_Z(\lambda)$ и $m_Z(\lambda)$ равносильно обращению в нуль всех максимальных миноров матрицы $Z^!$. Каждый из этих миноров является формой степени M от элементов матрицы Z , а их количество равно C_N^n , что значительно меньше числа $C_{n_2}^n$ максимальных миноров матрицы Z_* , но всё равно оно велико. Однако есть один частный случай, когда объём проверок может быть существенно уменьшен. Именно, предположим, что существует и известен ненулевой минор матрицы $Z^!$ порядка $M - 1$, который мы будем называть выделенным минором. Тогда, как показано в [4, с. 19], для равенства нулю всех максимальных миноров матрицы $Z^!$ необходимо и достаточно, чтобы обращались в нуль все миноры, окаймляющие выделенный минор. Таких окаймляющих миноров всего $n + 1$, что сильно упрощает проверку.

Рассмотрим случай $n = 3$. Из формулы (2) следует, что если первые три строки матрицы $Z^!$ для простоты разделить на $\sqrt{2}$, то она примет вид

$$Z^! = \begin{pmatrix} z_{21} & z_{31} & 0 \\ -z_{12} & 0 & z_{32} \\ 0 & -z_{13} & -z_{23} \\ z_{22} - z_{11} & z_{32} & z_{31} \\ z_{23} & z_{33} - z_{11} & -z_{21} \\ -z_{13} & -z_{12} & z_{33} - z_{22} \end{pmatrix}.$$

Максимальный минор этой матрицы, образованный строками с номерами r, s и t , будем обозначать как $[r, s, t](Z)$. Предположим, что в матрице $Z^!$ отличен от нуля минор, образованный строками

2, 6 и столбцами 1, 2, то есть $z_{12} \neq 0$. В этом случае для неполноты ранга матрицы Z^1 достаточно обращения в нуль четырёх кубических форм

$$[1, 2, 6](Z) = [2, 3, 6](Z) = [2, 4, 6](Z) = [2, 5, 6](Z) = 0.$$

Аналогичные условия можно выписать при отличии от нуля любого из недиагональных элементов z_{jl} . Если же все недиагональные элементы равны нулю, то задача тривиальна.

В заключение покажем, как можно легко построить трёхмерную матрицу Z с минимальным многочленом степени два. Предположим, что в матрице Z^1 отличен от нуля минор, лежащий на пересечении первых двух строк и первых двух столбцов, то есть $z_{31}z_{12} \neq 0$. Тогда окаймляющими для выделенного минора будут миноры третьего порядка, полученные добавлением к первым двум строкам третьей, четвёртой, пятой или шестой строки. Таким образом, при условии $z_{31}z_{12} \neq 0$ минимальный многочлен матрицы Z имеет вторую степень при обращении в нуль четырёх кубических форм $[1, 2, t](Z)$ для $t = 3, 4, 5, 6$ или при выполнении равенств

$$\begin{aligned} z_{13}z_{32}z_{21} - z_{12}z_{23}z_{31} &= 0, \\ z_{31}z_{32}(z_{22} - z_{11}) + z_{12}z_{31}^2 - z_{21}z_{32}^2 &= 0, \\ -z_{32}z_{21}(z_{33} - z_{11}) + z_{31}(z_{23}z_{32} - z_{12}z_{21}) &= 0, \\ z_{31}z_{12}(z_{33} - z_{22}) + z_{32}(z_{12}z_{21} - z_{13}z_{31}) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Этих же равенств (7) достаточно при выполнении любого из условий $z_{32}z_{21} \neq 0$ или $z_{31}z_{32} \neq 0$. Теперь предположим, что отличны от нуля все недиагональные элементы матрицы Z , расположенные в первых двух строках матрицы Z^1 , то есть

$$z_{12}z_{21}z_{31}z_{32} \neq 0. \quad (8)$$

Непосредственно проверяется, что

$$\frac{[1, 2, 3](Z)}{z_{12}z_{21}} + \frac{[1, 2, 4](Z)}{z_{31}z_{32}} + \frac{[1, 2, 5](Z)}{z_{32}z_{21}} + \frac{[1, 2, 6](Z)}{z_{31}z_{12}} = 0.$$

Поэтому при условии (8) одно из уравнений (7), например, последнее, можно исключить. Построение же искомой матрицы Z выполняется следующим образом. Сначала нужно подобрать все её недиагональные элементы так, чтобы выполнялось условие (8) и первое из уравнений (7). Затем, задав произвольно элемент z_{11} , найти элементы z_{22} и z_{33} из второго и третьего уравнений (7).

Литература

- [1] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. - СПб.: Издательство "Лань", 2010.
- [2] Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. - М.: МЦНМО, 2015.
- [3] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988.
- [4] Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1986.

Илюшечкин Никита Васильевич,
АО Концерн Моринформсистема – Агат, г. Москва,
Ведущий инженер.

E-mail: ilyush55@mail.ru

Аналог неравенства Иенсена для p -выпуклых функций и его применение к решению уравнений

С. И. Калинин, Л. В. Панкратова

В статье рассматривается аналог неравенства Иенсена для p -выпуклых функций и его применение к решению одного олимпиадного уравнения.

1. Одна олимпиадная задача

На IX Всероссийской студенческой олимпиаде по математике с международным участием в 2023/2024 учебном году была предложена следующая

Задача ([1], задача 2). Дана функция $f(x) = 19^x - 13^x - 3^{2x} + 3^x$. Найдите все действительные корни уравнения $f(x) = 0$.

Приведём решение данной задачи, основанное на подходе составителей заданий отмеченной олимпиады.

Решение. Перепишем функцию f в виде $f(x) = (19^x - 13^x) - (9^x - 3^x)$. Для разностей в скобках применим формулу Лагранжа о конечных приращениях для функции $g(t) = t^x$. Будем иметь: $f(x) = x\theta_1^{x-1}(19 - 13) - x\theta_2^{x-1}(9 - 3)$, где $\theta_1 \in (13; 19)$, $\theta_2 \in (3; 9)$. Следовательно, рассматриваемое уравнение имеет вид $6x(\theta_1^{x-1} - \theta_2^{x-1}) = 0$, а значит, его корни — $x = 0$, $x = 1$.

В данном месте нацелим читателя на то, что ниже мы намерены познакомить его с другим способом решения приведённой задачи, а именно — с подходом, который опирается на так называемый аналог неравенства Иенсена для p -выпуклых функций. Рассмотрим упоминаемый аналог.

2. Аналог неравенства Иенсена для p -выпуклых функций

Опубликованная ранее работа [2] знакомит читателя с понятием p -выпуклой функции, обобщающим понятие выпуклой функции. Напомним его.

Определение 1. Функцию $f : l \subset (0; +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ назовём p -выпуклой ($p \neq 0$) на промежутке l , если для любых чисел a и b из l и любого $\lambda \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f\left((\lambda a^p + (1 - \lambda)b^p)^{1/p}\right) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b). \quad (1)$$

Если в условиях этого определения для любых различных чисел a и b из l и любого $\lambda \in (0; 1)$ выполняется неравенство

$$f\left((\lambda a^p + (1 - \lambda)b^p)^{1/p}\right) < \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b), \quad (2)$$

то функцию f будем называть *строго p -выпуклой* на промежутке l .

Отметим, что строго p -выпуклая функция является p -выпуклой. Для неё равенство в (1) может достигаться только тогда, когда или $\lambda = 0$, или $\lambda = 1$, или $a = b$.

Определение 1 действительно обобщает понятие выпуклой функции: при $p = 1$ имеем классическое определение выпуклой функции, заданной на промежутке из интервала $(0; +\infty)$.

Изменение знаков неравенств в соотношениях (1)–(2) на противоположные приводит к определениям понятий *p -вогнутой* и *строго p -вогнутой* функций соответственно.

Отметим также, что в работе [3] обосновано неравенство, названное неравенством Иенсена для p -выпуклой функции. Оно имеет вид

$$f \left(\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p \right)^{1/p} \right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k), \quad (3)$$

$$x_1, \dots, x_n \in l; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0; 1), \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Если при этом функция f — строго p -выпуклая, то равенство в (3) может достигаться только при условии $x_1 = \dots = x_n$.

Рассмотрим своеобразный аналог неравенства (3) для p -выпуклой функции. Он состоит в следующем.

Пусть $f : l \rightarrow \mathbf{R}$ — p -выпуклая на промежутке $l \subset (0; +\infty)$ функция; $[a; b]$ — произвольный отрезок, принадлежащий l ; $x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 1$) — произвольный кортеж точек (узлов) из этого отрезка $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; — произвольный набор положительных чисел (весов), сумма которых равна 1. В данных условиях справедливо неравенство

$$f \left(\left(a^p + b^p - \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p \right)^{1/p} \right) \leq f(a) + f(b) - \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k). \quad (4)$$

Неравенство (4) так и условимся называть — *аналогом неравенства Иенсена для p -выпуклой функции*. Такое название согласуется с терминологией и символикой статей [4]–[5], в которых обсуждается аналог неравенства Иенсена для выпуклой (в классическом смысле) функции.

Приведём обоснование неравенства (4), при этом покажем, что если f — строго p -выпуклая функция, то (4) может обращаться в равенство только тогда, когда все числа $x_1, \dots, x_n$ совпадают либо с a , либо с b .

Сначала неравенство (4) докажем в случае наличия лишь одного узла, то есть покажем, что если функция f является p -выпуклой на отрезке $[a; b] \subset (0; +\infty)$, то для любого x , принадлежащего этому отрезку, выполняется неравенство

$$f \left((a^p + b^p - x^p)^{1/p} \right) \leq f(a) + f(b) - f(x). \quad (5)$$

Если при этом f — строго p -выпуклая функция, то (5) обращается в равенство только тогда, когда $x \in \{a, b\}$.

Отметим, что неравенство (5) корректно по записи, поскольку точка $(a^p + b^p - x^p)^{1/p}$ принадлежит отрезку $[a; b]$. Это следует из цепочек неравенств:

$$\begin{aligned} a \leq x \leq b &\Leftrightarrow a^p \leq x^p \leq b^p \Leftrightarrow -a^p \geq -x^p \geq -b^p \Leftrightarrow b^p \geq a^p + b^p - x^p \geq a^p \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b \geq (a^p + b^p - x^p)^{1/p} \geq a \quad (p > 0); \\ a \leq x \leq b &\Leftrightarrow a^p \geq x^p \geq b^p \Leftrightarrow -a^p \leq -x^p \leq -b^p \Leftrightarrow b^p \leq a^p + b^p - x^p \leq a^p \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b \leq (a^p + b^p - x^p)^{1/p} \leq a \quad (p < 0). \end{aligned}$$

Из включения $x \in [a, b]$ следует, что существует $\lambda \in [0, 1]$, такое что $x = (\lambda a^p + (1 - \lambda)b^p)^{1/p}$. Подставим это значение в выражение $(a^p + b^p - x^p)^{1/p}$:

$$(a^p + b^p - x^p)^{1/p} = ((1 - \lambda)a^p + \lambda b^p)^{1/p}.$$

В силу p -выпуклости функции f будем иметь:

$$f \left((a^p + b^p - x^p)^{1/p} \right) = f \left(((1 - \lambda)a^p + \lambda b^p)^{1/p} \right) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b) = \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
&= f(a) + f(b) - \lambda f(a) - (1 - \lambda)f(b) \leq f(a) + f(b) - f\left((\lambda a^p + (1 - \lambda)b^p)^{1/p}\right) = \\
&= f(a) + f(b) - f(x).
\end{aligned} \tag{7}$$

Неравенство (5) доказано.

Выясним условия достижения равенства в нём, если f — строго p -выпуклая функция. Для этого осмыслим условия достижения равенства в (6) и (7). Таковые сводятся к тому, что должны иметь место равенства $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$, то есть x должно совпадать или с точкой b , или с точкой a .

Случай одного узла рассмотрен. Перейдем к *доказательству* неравенства (4) и обоснованию условий достижения в нём равенства для ситуации, когда узлов больше одного.

Заметим, что значение $f\left(\left(a^p + b^p - \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p\right)^{1/p}\right)$ существует, поскольку весовое среднее арифметическое $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p$ чисел $x_1^p, \dots, x_n^p$ есть точка из отрезка с концами a^p, b^p . Оценим это значение сверху, используя неравенство Иенсена (3) для p -выпуклых функций. Будем иметь:

$$f\left(\left(a^p + b^p - \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p\right)^{1/p}\right) = f\left(\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k (a^p + b^p - x_k^p)\right)^{1/p}\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f\left((a^p + b^p - x_k^p)^{1/p}\right). \tag{8}$$

Но, согласно (5),

$$f\left((a^p + b^p - x_k^p)^{1/p}\right) \leq f(a) + f(b) - f(x_k), \quad k = 1, \dots, n. \tag{9}$$

значит,

$$f\left(\left(a^p + b^p - \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p\right)^{1/p}\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k (f(a) + f(b) - f(x_k)) = f(a) + f(b) - \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k),$$

что доказывает неравенство (4).

Ясно, что равенство в (4) будет достигаться только тогда, когда оно будет иметь место и в неравенстве (8), и в неравенствах (9). Если функция f является строго p -выпуклой, то в (8) равенство может достигаться только при условии $x_1 = \dots = x_n$, а в неравенствах (9) — при условии $x_k \in \{a, b\}$, $k = 1, \dots, n$. Следовательно, в условиях строгой p -выпуклости f имеем: или $x_1 = \dots = x_n = a$, или $x_1 = \dots = x_n = b$. Неравенство (4) доказано.

В случае, если f — p -вогнутая на промежутке l функция, то для неё будет иметь место аналогичное неравенство

$$f\left(\left(a^p + b^p - \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^p\right)^{1/p}\right) \geq f(a) + f(b) - \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k), \tag{10}$$

$$[a; b] \in l; \quad x_k \in l; \quad \lambda_k > 0 \quad (k = 1, \dots, n); \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Условия достижения равенства в (10) в случае строгой p -вогнутости функции f будут те же, что и для (4), то есть при совпадении всех узлов $x_1, \dots, x_n$ либо с точкой a , либо с точкой b .

Замечание. При $n = 1$ неравенства (4) и (10) условимся называть *одноузловыми аналогами неравенства Иенсена* для p -выпуклой и p -вогнутой функции соответственно.

3. Второй способ решения олимпиадной задачи

В тематике неравенств и средних величин хорошо известно следующее свойство взвешенного среднего степенного

$$F(p) = \begin{cases} (\lambda a^p + (1 - \lambda)b^p)^{\frac{1}{p}}, & p \neq 0, \\ a^\lambda b^{1-\lambda} & p = 0 \end{cases}$$

положительных чисел a и b с весами λ и $1 - \lambda$ ($0 < \lambda < 1$): если $a \neq b$, то F — возрастающая на всей числовой прямой Op функция. Из этого свойства следует, что функция $y = x$, $x > 0$ является строго p -выпуклой при $p < 1$ ($p \neq 0$) и строго p -вогнутой при $p > 1$.

Применим к этой функции одноузловой аналог неравенства Иенсена на отрезке $[3; 19]$, беря в качестве узла значение $t = 9$. Будем иметь:

$$(3^p + 19^p - 9^p)^{\frac{1}{p}} < 3 + 19 - 9 = 13 \quad (p < 1, p \neq 0), \quad (3^p + 19^p - 9^p)^{\frac{1}{p}} > 3 + 19 - 9 = 13 \quad (p > 1),$$

или

$$3^p + 19^p - 9^p > 13^p \quad (0 < p < 1), \quad 3^p + 19^p - 9^p < 13^p \quad (p < 0, p > 1).$$

Из последних двух неравенств следует, что уравнение

$$19^x - 13^x - 3^{2x} + 3^x = 0$$

на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ корней не имеет. Остаётся проверить, являются ли значения $x = 0$ и $x = 1$ его корнями.

4. Некоторые показательные уравнения и неравенства

Рассмотренное показательное уравнение относится к классу показательных уравнений вида

$$a^x + b^x - \alpha^x - \beta^x = 0, \tag{11}$$

где a, b, α, β — заданные положительные величины, удовлетворяющие условию $a + b = \alpha + \beta$. Корни $x = 0$ и $x = 1$ уравнения (11) угадываются, для завершения его решения остаётся показать, что иных вещественных корней у данного уравнения нет.

Как и в предыдущем пункте, обратимся к свойству p -выпуклости / p -вогнутости функции $y = x$, $x > 0$. Заметим, из равенства $a + b = \alpha + \beta$ следует, что выполняется одно из включений: либо $[a; b] \subset [\alpha; \beta]$, либо $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$. Пусть для определённости выполняется второе. Тогда по одноузловому аналогу неравенства Иенсена имеем соотношения:

$$a^p + b^p - \alpha^p < \beta^p \quad (0 < p < 1), \tag{12}$$

$$a^p + b^p - \alpha^p > \beta^p \quad (p < 0, p > 1), \tag{13}$$

которые устанавливают требуемое.

Уравнение (11) приводит к рассмотрению неравенства

$$a^x + b^x - \alpha^x - \beta^x > 0 \tag{14}$$

при тех же условиях на величины a, b, α, β (вместо знака $>$ в (14) может быть знак $<$ или $\geq, \leq$). В силу соотношений (12)–(13) решениями (14) будут все значения x из множества $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$. А вот множеством решений неравенства $a^x + b^x - \alpha^x - \beta^x \leq 0$ будет, нетрудно видеть, отрезок $[0; 1]$.

Уравнение (11) обобщается показательным уравнением относительно x вида

$$a^x + b^x - \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k^x - \beta^x = 0, \quad (15)$$

где a, b, β — заданные положительные величины, $\alpha_k \in [a, b]$, $\lambda_k \in (0; 1)$, $k = 1, \dots, n$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, при этом выполняется условие $a + b = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k + \beta$.

Нетрудно заметить, что $\beta \in [a, b]$. Уравнение (15) имеет только два корня: $x = 0$ и $x = 1$, других корней у него нет, поскольку в силу p -выпуклости функции $y = x$, $x > 0$ при $p < 1$, $p \neq 0$ и её p -вогнутости при $p > 1$

$$\left(a^p + b^p - \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k^p \right)^{1/p} \neq a + b - \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k = \beta,$$

или

$$a^p + b^p - \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k^p \neq \beta^p$$

(мы воспользовались аналогом неравенства Иенсена (4) и (10) для функции $y = x$, $x > 0$).

Наряду с уравнением (15) может быть осмыслено на предмет нахождения множества решений неравенство типа

$$a^x + b^x - \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k^x - \beta^x > 0.$$

Предлагаем читателю сделать это самостоятельно.

В качестве иллюстрации применения приводимых выше соображений рассмотрим следующую задачу.

Пример 1. Решите уравнение

$$19^x - 0,5 \cdot 13^x - 11^x - 0,5 \cdot 3^{2x} + 3^x = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$3^x + 19^x - 0,5 \cdot 13^x - 0,5 \cdot 9^x - 11^x = 0.$$

Так как $3 < 9 < 13 < 19$ и $3 + 19 - 0,5 \cdot (9 + 13) = 11$, то последнее уравнение есть уравнение вида (15). Значит, исходное уравнение имеет ровно два корня: $x = 0$ и $x = 1$.

Предложим сейчас читателю решить неравенство, навеянное только что решённым уравнением.

Пример 2. Решите неравенство

$$3^x + 19^x - 0,5 \cdot 13^x - 0,5 \cdot 9^x - 11^x < 0.$$

Ответ: $x \in (0; 1)$.

Литература

- [1] Всероссийская студенческая олимпиада по математике с международным участием в 2023/2024 уч.г. / Составители Попов С.В., Лазарев Н.П., Федотов Е.Д., Верховцев С.Д. - Якутск, 2024.

- [2] Калинин С.И. p -Выпуклые функции и уравнения // Математика в школе. - 2022. - № 5. - С. 26–32.
- [3] Калинин С.И., Макарова Ю.И., Протасов Н.С. Обобщение некоторых классических неравенств средствами p -выпуклых функций // Математика в школе. - 2023. - № 4. - С. 58–62.
- [4] Abramovich S., Klaričić Bakula M., Matić M. and Pečarić J. A variant of Jensen–Steffensen’s inequality and quasi-arithmetic means // J. Math. Anal. Applics. - 307. - 2005. - P. 370–385.
- [5] Mercer A. McD. A variant of Jensen’s inequality // J. Inequal. In Pure and Appl. Math. - Vol. 4. - Issue 4. - Article 73. - 2003. - P. 1–2.

*Калинин Сергей Иванович,
профессор кафедры фундаментальной математики
Института математики и информационных систем
Вятского государственного университета,
доктор педагогических наук.*

E-mail: kalinin_gu@mail.ru

*Панкратова Лариса Валерьевна,
доцент кафедры фундаментальной математики
Института математики и информационных систем
Вятского государственного университета,
кандидат педагогических наук.*

E-mail: pankratovalarisa19@rambler

**О задаче барона Мюнхгаузена. Леонард Эйлер.
Окончание части 2**

В. Н. Оникийчук, И. В. Оникийчук

Вторая часть статьи (первая опубликована в номере 3(115), 2025 г.) рассказывает о петербургском периоде жизни Леонарда Эйлера. Подробно объясняется суть достижений Эйлера в понимании и решении динамических задач механики твердого тела. Эта часть печатается с продолжением, в данном номере публикуется ее окончание.

На дне ящика Пандоры лежит надежда

Многочисленные попытки Л. Эйлера создать модель неизменности расстояний между частицами тела на основе сферической геометрии не привели к успеху. И всё же, упорный подвижнический труд в итоге привел к первой удаче.

Если на тело не действует никакая внешняя сила, то суммарная энергия его движения должна сохраняться. Это утверждение Л. Эйлер сформулировал в форме интегрального инварианта. Физический смысл интегрального инварианта, предложенного Л. Эйлером, — неизменность усредненной линейной скорости всех частиц тела. На современном языке это можно представить так:

$$\sqrt{\int_V \rho \langle \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle dv} = const, \quad (3)$$

где $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T \in OXYZ$ — вектор-координата произвольной частицы тела, $\dot{\mathbf{x}}$ — скорость этой частицы относительно неподвижной системы координат $OXYZ$. Символьное интегрирование означает суммирование всех модулей скоростей по всему объему тела V ; ρ — плотность массы твердого тела.

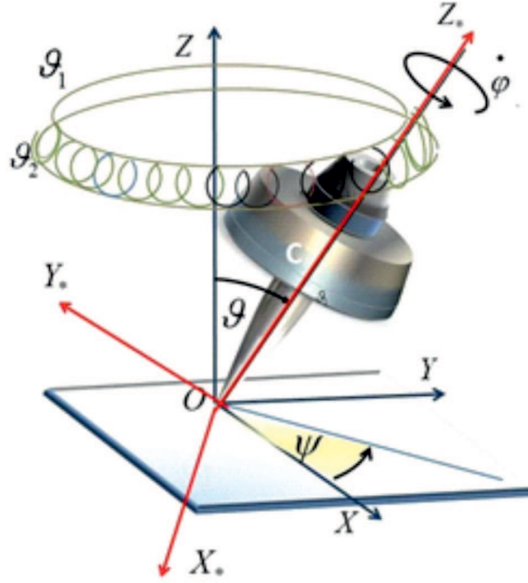
Л. Эйлер установил, что интегральному инварианту (3) соответствуют уравнения¹:

$$\frac{dx}{dt} = \omega_2 z - \omega_3 y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega_3 x - \omega_1 z, \quad \frac{dz}{dt} = \omega_1 y - \omega_2 x. \quad (4)$$

Здесь $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ — компоненты вектора угловой скорости² $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ тела; $\{x, y, z\}$ — координаты произвольной точки твердого тела. Впервые кинематические уравнения (4) были опубликованы в работе “Decouverte d’un nouveau principede Mecanique” (1750, t,VI, 185-217) [13, стр. 211].

¹В учебниках эти уравнения часто называют *кинематическими уравнениями Эйлера*.

²Символ T в векторе $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3\}^T$ означает операцию транспонирования



Движение центра масс волчка в неподвижной системе $OXYZ$ координат определяется углами Эйлера ψ , ϑ и углом φ поворота относительно центра масс.

В этой работе Л. Эйлер полагал, что компоненты $\{x, y, z\}$ в уравнениях (4) являются координатами произвольной частицы тела в *неподвижной* (инерциальной) системе координат [13, стр. 221-222]. Это важно отметить.

Для удобства условимся в дальнейшем неподвижную (инерциальную) систему координат обозначать как $OXYZ$. Из уравнений (4) в этом случае следует, что вектор $\omega = \{\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3\}^T$ также представляет собой проекцию вектора угловой скорости на *неподвижную* систему координат, $\omega \in OXYZ$. Формулу (4) в компактном изложении можно представить так:

$$\frac{dx}{dt} = \hat{\omega} \mathbf{x} = -\hat{\mathbf{x}} \omega, \quad \hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Здесь $\omega \in OXYZ$ — вектор угловой скорости частицы $\mathbf{x} \in OXYZ$, а $\hat{\omega}$ — кососимметричный оператор, соответствующий этому вектору ω . Кососимметричный оператор $\hat{\mathbf{x}}$ взаимно-однозначно соответствует вектору $\mathbf{x}$.

Если говорить современным языком математики, то запись кинематических уравнений (5) с помощью кососимметричной матрицы угловой скорости является следствием того, что поворот твердого тела моделируется композицией ортогональных матриц. Дифференцирование ортогональных матриц приводит к появлению кососимметричных операторов [23]. Таким образом, математическая модель вращения тела на основе ортогональных операторов гарантирует “твердость тела”.

В этом случае интегральный инвариант (3) можно представить так:

$$\sqrt{\int_V \rho \langle \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle dv} = \sqrt{\int_V \rho \langle \hat{\omega} \mathbf{x}, \hat{\omega} \mathbf{x} \rangle dv} = \sqrt{\left\langle -\int_V (\rho \hat{\mathbf{x}}^2), dv \hat{\omega}, \omega \right\rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{J}_0 \omega, \omega \rangle}, \quad (6)$$

где $\mathbf{J}_0$ — тензор инерции твердого тела в проекции на неподвижные оси $OXYZ$:

$$\mathbf{J}_0 = -\int_V (\rho \hat{\mathbf{x}}^2) dv \in OXYZ.$$

В современном понимании выражение $2T = \langle \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle$ (6) под знаком радикала равно удвоенной кинетической энергии тела T . Кинематические уравнения (4) хороши тем, что являются математической моделью сохранения расстояний между частицами твердого тела в процессе движения.

Действительно, для двух произвольных частиц твердого тела $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ квадрат расстояния между ними определяется формулой $\Delta = \langle \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle$. Как изменяется это расстояние, если векторы $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ удовлетворяют уравнению (4)? Дифференцируем величину Δ и получаем: $\frac{d\Delta}{dt} = 2 \langle \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle$. В соответствии с формулой (5) получаем: $\frac{d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{dt} = \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$. Таким образом, $\frac{d\Delta}{dt} = 2 \langle \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle$, поскольку смешанное произведение с двумя одинаковыми векторами равно тождественно нулю. Следовательно, расстояние между частицами в процессе движения сохраняется, $\Delta = \text{const}$. Это известный факт из линейной алгебры о том, что скалярное произведение двух векторов сохраняется, если векторы подвергаются ортогональным преобразованиям.

Динамические уравнения Эйлера — это уравнение в полных дифференциалах

Системная наука о движении тел должна опираться на дифференциальные уравнения второго порядка. Статика и геометрия здесь не работают. Второй порядок уравнений можно получить из уравнений (4), если их еще раз продифференцировать.

Путь Л. Эйлера от кинематических уравнений (4) до динамических уравнений можно условно воспроизвести по цепочке операций, используя современный аппарат дифференциальной алгебры. Дифференцируем вектор $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{x}$ (5) и получаем в итоге: $\ddot{\mathbf{x}} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\hat{\boldsymbol{\omega}}} \mathbf{x} = (\hat{\dot{\boldsymbol{\omega}}} + \hat{\boldsymbol{\omega}}^2) \mathbf{x}$. Далее, векторное произведение³ $[\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}}]$ для удобства определим, как умножение кососимметричного оператора $\hat{\mathbf{x}}$ на вектор $\ddot{\mathbf{x}}$:

$$m[\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}}] = m\hat{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}} = m\frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) = m\hat{\mathbf{x}}(\hat{\dot{\boldsymbol{\omega}}} + \hat{\boldsymbol{\omega}}^2)\mathbf{x} \quad (7)$$

Используя перестановочные свойства кососимметричных операторов $\hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\omega} = -\hat{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{x}$, представим уравнение (7) так:

$$m\hat{\mathbf{x}}\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = m\hat{\mathbf{x}}(\hat{\dot{\boldsymbol{\omega}}} + \hat{\boldsymbol{\omega}}^2)\mathbf{x} = m\hat{\mathbf{x}}(-\hat{\mathbf{x}}\dot{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\boldsymbol{\omega}}\hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\omega}) = m(-\hat{\mathbf{x}}^2\dot{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\mathbf{x}}\hat{\boldsymbol{\omega}}\hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\omega}). \quad (8)$$

Далее воспользуемся полезным свойством кососимметричных операторов [14, стр.53]:

Свойство:

$$\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}^2\hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}}^2 + |\mathbf{a}|^2\hat{\mathbf{b}}. \quad (9)$$

Формула (9) справедлива для двух произвольных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, и связанных с ними кососимметричных матриц $\hat{\mathbf{a}}$ и $\hat{\mathbf{b}}$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

С помощью свойства (9) фрагмент правой часть уравнения (8) преобразуется так: $\hat{\mathbf{x}}\hat{\boldsymbol{\omega}}\hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\omega}$. Следовательно, уравнение (8) существенно упрощается:

$$m\hat{\mathbf{x}}\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = m(-\hat{\mathbf{x}}^2\dot{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\mathbf{x}}\hat{\boldsymbol{\omega}}\hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\omega}) = m(-\hat{\mathbf{x}}^2\dot{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\boldsymbol{\omega}}\hat{\mathbf{x}}^2\boldsymbol{\omega}). \quad (10)$$

³Во времена Л. Эйлера операция “векторное произведение”, да и вообще понятие вектора, были не известны математикам.

В соответствии со вторым законом Ньютона, на каждую частицу тела с координатой $\mathbf{x}$ действует *внешняя* сила $\mathbf{F}$: $m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}$. Таким образом, выражение (10) превращается в равенство

$$m \hat{\mathbf{x}} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = m \left(-\hat{\mathbf{x}}^2 \dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \hat{\mathbf{x}}^2 \boldsymbol{\omega} \right) = \hat{\mathbf{x}} \mathbf{F}. \quad (11)$$

Интегральное суммирование равенства (11) по всему объему V тела приводит к динамическому уравнению⁴:

$$\int_V m \hat{\mathbf{x}} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} dv = \int_V m \left(-\hat{\mathbf{x}}^2 \dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \hat{\mathbf{x}}^2 \boldsymbol{\omega} \right) dv = \mathbf{J}_0 \dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}] = \mathbf{M}_0, \quad (12)$$

где $\hat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega} \equiv [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}]$, $\mathbf{J}_0$ — тензор инерции твердого тела в проекции на *неподвижные* оси $OXYZ$:

$$\mathbf{J}_0 = - \int_V m \hat{\mathbf{x}}^2 dv \in OXYZ, \quad \hat{\mathbf{x}}^2 = \begin{bmatrix} z^2 + y^2 & -yx & -xz \\ -yx & z^2 + y^2 & -zy \\ -xz & -zy & z^2 + y^2 \end{bmatrix} \in OXYZ. \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{M}_0 = \int_V \hat{\mathbf{x}} \mathbf{F} dv \in OXYZ$ — суммарный момент внешних сил, действующих на тело в проекции на инерциальные оси.

Следует обратить внимание на то, что выражение $\int_V m \hat{\mathbf{x}} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} dv$ в левой части уравнения (12) является полной производной от некоторого вектора. Действительно, из свойства $\dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{x} = -\hat{\mathbf{x}} \boldsymbol{\omega}$ следует, что $\int_V \rho \hat{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} dv = \int_V \rho \hat{\mathbf{x}} \dot{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{x} dv = - \left(\int_V \rho \hat{\mathbf{x}}^2 dv \right) \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}$. Отсюда следует, что выражение $m \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{x}} \mathbf{x}) = m \hat{\mathbf{x}} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}$ в левой части уравнения (12) является полной производной.

Вывод: Векторное динамическое уравнение Эйлера (12) в проекции на неподвижные оси $OXYZ$ является полной производной от вектора $\mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}$, т.е. является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{d(\mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega})}{dt} = \mathbf{J}_0 \dot{\boldsymbol{\omega}} + \hat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_0, \quad (14)$$

Примечание: В уравнении (14) тензор инерции $\mathbf{J}_0$ не является постоянным, поскольку рассматривается в проекции на инерциальные оси.

Уравнение Эйлера в проекции на инерциальные оси (14) действительно является уравнением в полных дифференциалах. Чтобы в этом убедиться, воспользуемся следующим свойством для произвольных векторов и кососимметричных матриц:

Свойство: Векторному произведению $[\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}]$ соответствует коммутатор матриц $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ и $\mathbf{x}$: $[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}] \rightarrow [\hat{\boldsymbol{\omega}}, \hat{\mathbf{x}}] = \hat{\boldsymbol{\omega}} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} \hat{\boldsymbol{\omega}}$.

Дифференцируем тензор инерции $\mathbf{J}_0$ (13), получаем:

$$\dot{\mathbf{J}}_0 = - \int_V m \left(\hat{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}} \right) dv = - \int_V m \left((\hat{\boldsymbol{\omega}} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} \hat{\boldsymbol{\omega}}) \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} (\hat{\boldsymbol{\omega}} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} \hat{\boldsymbol{\omega}}) \right) dv = \hat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_0 - \mathbf{J}_0 \hat{\boldsymbol{\omega}} = [\hat{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{J}_0]. \quad (15)$$

Таким образом, динамическое уравнение Эйлера в проекции на *инерциальные* оси $OXYZ$ является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{d(\mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega})}{dt} = \dot{\mathbf{J}}_0 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}_0 \dot{\boldsymbol{\omega}} = (\hat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_0 - \mathbf{J}_0 \hat{\boldsymbol{\omega}}) \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}_0 \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}_0 \dot{\boldsymbol{\omega}} + \hat{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_0, \quad (16)$$

⁴Динамические уравнения Эйлера были опубликованы в работе “Теория движения твердых тел” (1765 г.).

т.е.

$$\frac{d(\mathbf{J}_0\boldsymbol{\omega})}{dt} = \mathbf{J}_0\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{J}_0\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_0 \quad (17)$$

Однако, полученный Эйлером результат (17) показался ему почти бесполезным. Система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами — это не то, что ожидал получить Л. Эйлер. Действительно, матрица инерции $\mathbf{J}_0(x)$ (13) зависит от координат $\{x, y, z\}$, которые непрерывно изменяются в процессе движения. Интегральное суммирование матрицы $\mathbf{J}_0$ (13) в этом случае является формальной операцией и не дает возможности понять, как движется центр масс тела [13, стр. 220]. Долгое время у Леонарда Эйлера еще не было идей, как перейти от переменного тензора $\mathbf{J}_0$ к классическому постоянному тензору $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$.

Тот самый случай, когда “благие пожелания приводят в ад”

Выход из тупика подсказала работа Сегнера⁵ (1755), в которой была предложена система координат, жестко связанная с телом [15, стр. 143]. Леонард Эйлер решил воспользоваться этой идеей. Чтобы нам понять суть замысла Эйлера, введем для удобства некоторые обозначения.

Условимся вектор координату произвольной частицы тела в неподвижной системе обозначать как $\mathbf{x} \in OXYZ$, а в системе координат $O_*X_*Y_*Z_*$, жестко связанной с телом, координату той же частицы обозначим вектором “со звездочкой” $\mathbf{x}_* = \begin{bmatrix} x_* \\ y_* \\ z_* \end{bmatrix} \in O_*X_*Y_*Z_*$.

Леонард Эйлер предположил, что инвариант $\sqrt{\langle \mathbf{J}_0\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle}$ (6) не меняется, если его рассматривать в осях $OX_*Y_*Z_*$. В этих осях тензор инерции $\mathbf{J}_0 = -\int_V \rho (\hat{\mathbf{x}}_*)^2 dv$ является постоянным, т.е. $\sqrt{\langle \mathbf{J}_0\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle} = \text{const.}$

Действительно, при отсутствии внешних сил полная кинетическая энергия тела не меняется, ее величина не зависит от того, в какой системе координат мы ее вычисляем.

Почти незаметная ошибка вдруг привела к катастрофе...

Эйлер двигался к цели, и казалось, удача ему сопутствует. И вот в этот момент Леонард делает едва заметную ошибку, которая впоследствии привела к печальным последствиям. Он решил, что динамические уравнения (17) также инвариантны⁶ относительно замены систем координат. Это значит, что в уравнениях матрицу $\mathbf{J}_0(x)$ можно формально заменить постоянным тензором $\mathbf{J}$. Конечно, в этом случае уравнения (17) рассматриваются уже в проекции на связанные с телом оси $OX_*Y_*Z_*$.

Рассматривать движение тела в осях, связанных с телом, крайне неудобно. Однако, эти “неудобства” меркнут перед главным эффектом. Динамические уравнения (17) с постоянным тензором становятся удобными для исследования, поскольку матрица становится постоянной. Любую симметричную матрицу можно привести к диагональному виду. Не является исключением и симметричная матрица $\mathbf{J} = -\int_V \rho (\hat{\mathbf{x}}_*)^2 dv$.

Систему координат $OX_*Y_*Z_*$ можно повернуть и сдвинуть так, что матрица становится диагональной с постоянными моментами инерции $\{A, B, C\}$: $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$. В этом случае система из

⁵ **Иоганн Андреас фон Зегнер** (*Jan Andrej Segner*) (1704-1777) — немецкий механик, математик и медик. Член Лондонского королевского общества (1739), Берлинской АН (1747), почётный член Петербургской АН (1754).

⁶ Динамические уравнения не обладают инвариантностью в операциях перехода от одной системы координат к другой [14].

шесть дифференциальных уравнений сокращается вдвое и становится системой из трех уравнений. В этом случае динамическое уравнение (17) принимает вид:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}] = \begin{cases} A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 = M_1 \\ B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_1\omega_3 = M_2 \\ C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 = M_3 \end{cases} \quad (18)$$

Здесь $\{M_1, M_2, M_3\}$ — компоненты суммарного вектора момента в проекции на связанные с телом оси: $\mathbf{M}_* = \int_V [\mathbf{x}_*, \mathbf{F}] dv \in OX_*Y_*Z_*$.

Замысел был понятный и благородный. Однако это был тот самый случай, когда “благие желания приводят в ад”. Так что же случилось?

Негативная петля обратной связи

Ошибка, сделанная вначале, приводит, как правило, к еще большей ошибке по закону отрицательной петли обратной связи. Замена в уравнениях (17) тензора $\mathbf{J}_0(x) \in OXYZ$ на постоянный тензор $\mathbf{J} \in OX_*Y_*Z_*$ оказалась фатальной для уравнений (18).

С этого момента оказалось невозможным вывести динамические уравнения (18) методом дифференцирования вектора $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ (14) из-за постоянства матрицы $\mathbf{J}$. Другими словами, цепочку операций (16)-(17) для вектора $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ стало невозможно повторить. Действительно, названная цепочка операций была построена на том, что дифференцирование тензора инерции $\mathbf{J}_0$ определяется коммутатором: $\dot{\mathbf{J}}_0 = [\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{J}_0]$. Это был ключевой момент на первоначальном этапе вывода уравнений, поскольку матрица $\mathbf{J}_0$ не является постоянной. Для постоянной матрицы $\mathbf{J}$ такая формула в виде коммутатора (15) не существует, поскольку $\dot{\mathbf{J}}_0 = 0$.

К возникшей ситуации, когда динамическое уравнение стало невозможно вывести, дифференцируя постоянную матрицу $\mathbf{J}$, Л. Эйлер оказался не готов. Словно табун троянских коней пронесся по его математическим выкладкам и от его трудов, казалось, осталась одна пыль.

И всё же, Л. Эйлер решил оставить динамические уравнения (18) такими, какими получились. К ним он потом почти не возвращался. В таком виде уравнения (18) с точностью до обозначений появились в современных учебниках.

Беда не приходит одна. Реквием

В последние годы жизни Леонарду Эйлеру особенно не везло. Когда ему было около 70 лет, умерла его жена. Правым глазом он уже давно не видел, левый глаз плохо видел и часто болел. Сделали операцию на глазу. Леонард Эйлер радовался, что операция левого глаза прошла удачно. Однако пришла новая беда. В еще не заживший от операции глаз попала инфекция. Вскоре старик Эйлер после мучительных болей совсем ослеп. Во время большого пожара в Санкт-Петербурге его дом сгорел. Только некоторые его рукописи еле удалось вынести из пожара. Императрица Екатерина II не оставила Л. Эйлера и его большую семью в беде. По ее высочайшему императорскому распоряжению ему был выстроен новый дом — лучше прежнего. Но он был отчаянным оптимистом и, будучи в глубокой старости, продолжал диктовать помощникам свои научные работы. Леонард Эйлер любил уединение, покой, неспешные прогулки. Хотя, он однажды про себя отметил, что совершенно не умеет отдыхать. Современники Эйлера утверждали, что он мог работать при любых, даже самых неблагоприятных условиях.

Терзала его еще одна проблема. В ходе переписки с европейскими учеными Л. Эйлер узнал, что наблюдаемая траектория Луны заметно отличается от расчетной траектории, если рассчитывать траекторию Луны по законам Ньютона. Сделав огромный объем вычислений, он так и не смог понять, где законы Ньютона “дают сбой”. Опубликованные черновые записи его расчетов движения

Луны в последние годы его жизни говорили о том, что эта задача не оставляла Эйлера. До последних своих дней он сохранял ясность ума и желание работать.

Умер Леонард Эйлер в начале сентября 1783 года от внезапного инсульта, когда пил чай в беседе с одним из академиков. Он только и успел сказать “Я умираю...”. Внезапная кончина Л.Эйлера для императорского двора России была поистине печальным событием.

Весь комплекс задумок по поводу первой российской ПВО так и не был реализован из-за внезапной кончины Первого Архитектора этой системы — Леонарда Эйлера [12]. Только лишь со смертью великого ученого стало ясно, что образовавшийся вакуум в Академии Наук некому заполнить. Не было личности того масштаба, каким был Л. Эйлер.

На траурном заседании в Конференц-зале Академии Наук, по случаю кончины, присутствовали 14 академиков. Президент Академии наук — княгиня Екатерина Дашкова⁷ — лично вела траурное заседание Академии и произнесла прощальную трогательную речь. Леонард Эйлер был похоронен со всеми государственными почестями на Смоленском (Лютеранском) кладбище на Васильевском острове в Санкт-Петербурге. В конце XIX в. на его могиле был воздвигнут мемориал, а в XX в. останки Л.Эйлера были перенесены в Некрополь Александро-Невской Лавры. Захоронение Л. Эйлера оказалось вблизи от могилы М.В. Ломоносова.

Эпилог

Недоработку Л. Эйлера при выводе динамических уравнений нетрудно исправить, если корректно написать формулу перехода от неподвижной (инерциальной) системы координат $\mathbf{x} \in OXYZ$ к системе $\mathbf{x}_* \in OX_*Y_*Z_*$, жестко связанной с твердым телом. Оказывается, динамические векторные уравнения Эйлера даже с постоянным тензором инерции являются уравнениями в полных дифференциалах [14],[16]. Для этого необходимо лишь корректно сделать математические операции.

Алгебраическая связь между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_*$ известна [14], [16]:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}_*.$$

Здесь $\mathbf{p}$ — ортогональная матрица, которая были известна еще Лагранжу [4, т.2, с.238], [17, с.138], [18, стр. 157], [19, стр. 51], [20, с.42], [21, стр.8]:

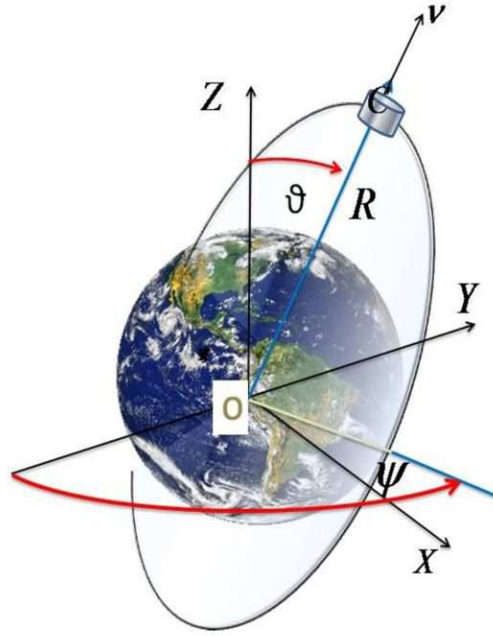
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \sin \psi, & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \vartheta \sin \psi, & \sin \vartheta \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \vartheta \cos \psi, & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \cos \psi, & -\sin \vartheta \cos \psi \\ \sin \vartheta \sin \psi & \sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

Матрица $\mathbf{Q}$ обладает замечательным свойством [14, стр. 35-36]:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}^{-1}\dot{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} - \sin \varphi \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} - \cos \varphi \sin \vartheta - \dot{\vartheta} \sin \varphi \\ \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Здесь $\mathbf{p}$ — известный вектор угловой скорости тела с одной неподвижной точкой в проекции на связанные с телом оси $OX_*Y_*Z_*$, а $\{\psi, \vartheta, \varphi\}$ — классические углы Эйлера.

⁷Княгиня **Екатерина Романовна Дашкова** (урождённая Воронцова), (1743–1810). Государственная деятельница Российской империи, одна из самых заметных личностей русского Просвещения, писательница и педагог. Первая в истории России женщина, занимавшая высокие государственные посты: директор Императорской Академии наук и художеств в Санкт-Петербурге, инициатор учреждения и первый председатель Императорской Академии Российской; организатор и участница создания первого толкового словаря русского языка — “Словаря Академии Российской”.



Движение вращающегося тела в центральном поле с постоянной высотой орбиты определяется динамическим уравнением Эйлера с нулевой правой частью [14], [16].

Вектор $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}\mathbf{Jp}$ в этом случае является кинетическим моментом твердого тела в проекции на неподвижные (инерциальные) оси $OXYZ$. Если $\mathbf{K}_0$ — постоянный вектор, то дифференцируя $\mathbf{K}_0$, получаются динамические уравнения Эйлера в проекции на инерциальные оси:

$$\frac{d(\mathbf{Q}\mathbf{Jp})}{dt} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Jp} + \mathbf{Q}\frac{d(\mathbf{Jp})}{dt} = \mathbf{Q}\left(\mathbf{Q}^{-1}\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Jp} + \frac{d(\mathbf{Jp})}{dt}\right) = \mathbf{Q}\left(\frac{d(\mathbf{Jp})}{dt} + \hat{\mathbf{p}}\mathbf{Jp}\right) = 0. \quad (19)$$

В проекции на связанные с телом оси $OX_*Y_*Z_*$ уравнения (19) принимают всем известный вид (“случай Эйлера — Пуансо”):

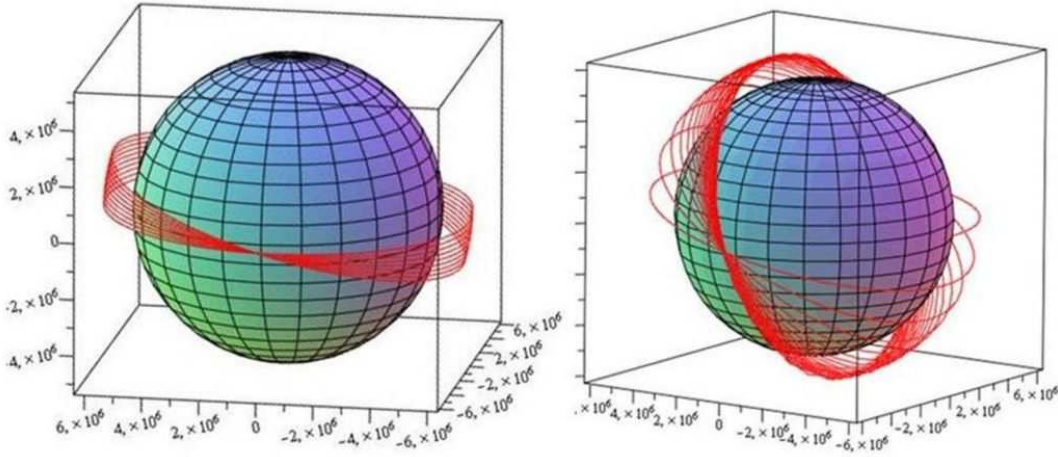
$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\mathbf{Jp} = 0. \quad (20)$$

Полным векторным интегралом для такого уравнения является вектор в элементарных функциях [14], [16]:

$$\mathbf{Jp} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C}, \quad (21)$$

где $\mathbf{C} = [C_1 \ C_2 \ C_3]^T$ — произвольный постоянный вектор.

Чтобы убедиться в этом, достаточно продифференцировать вектор $\mathbf{Jp}$ и получить уравнение Эйлера (21). Действительно, поскольку $\frac{d}{dt}(\mathbf{Q}^{-1}) = -\hat{\mathbf{p}}\mathbf{Q}^{-1}$ [16], то $\frac{d(\mathbf{Jp})}{dt} = \frac{d\mathbf{Q}^{-1}}{dt}\mathbf{C} = -\hat{\mathbf{p}}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{C} = -\hat{\mathbf{p}}\mathbf{Jp}$



При значениях начальной угловой скорости вращения тела относительно собственного центра масс в диапазоне $10^{10} \leq \omega_0 \leq 10^{12} \text{с}^{-1}$ наблюдается эффект изменения наклонения орбиты. С увеличением значений ω_0 .

Следует заметить, то из общего интеграла (21) следуют классические интегралы энергии $\langle \mathbf{Jp}, \mathbf{p} \rangle = h_1 = \text{const}$ и постоянства модуля кинетического момента $|\mathbf{K}_0| = \langle \mathbf{Jp}, \mathbf{p} \rangle = h_2 = \text{const}$ [14].

Вывод: Среди первых интегралов уравнения Эйлера (20) с нулевой правой частью *не существует эллиптических квадратур* [16].

Гипотеза Л. Эйлера подтвердилась

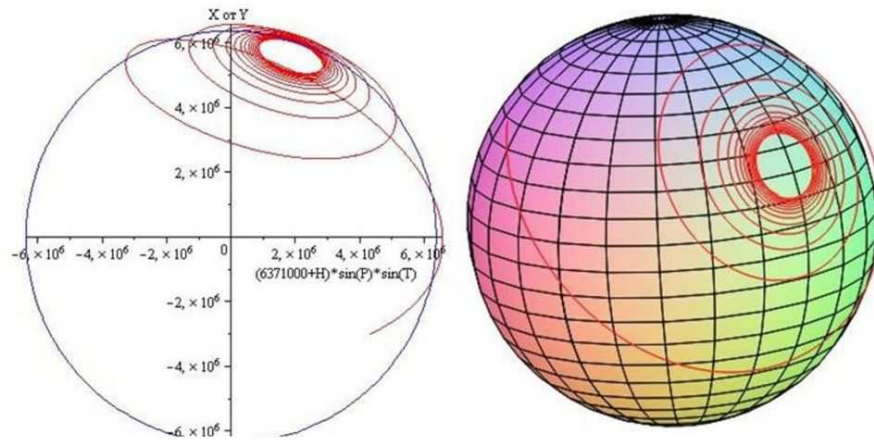
Человеческая жизнь, оказывается, короткая и далеко не всегда при жизни можно реально оценить вклад человека в науку. Путь поиска длиной в несколько десятилетий для Л. Эйлера закончился крупной удачей. Он представил будущим поколениям динамическое уравнение для твердого тела. Расшифровку загадочного поведения волчка и жернового колеса он не успел представить и оставил эту загадку следующим поколениям.

Интуиция величайших математиков XVIII в. — Г. Лейбница и Л. Эйлера — не подвела. Оказывается, действительно, динамическое уравнение Эйлера, при некотором количестве оговорок, можно привести к уравнению “квазиньютоновского типа” [14]:

$$m_0 \frac{d^2 \mathbf{x}_c}{dt^2} + \mathbf{f}_c = \mathbf{F}_c, \quad (22)$$

где $\mathbf{x}_c$ — координата центра масс тела в инерциальном пространстве $OXYZ$.

Любопытно, что уравнение Эйлера $\mathbf{J}\dot{\mathbf{p}} + [\mathbf{p}, \mathbf{Jp}] = \mathbf{0}$ (20) является моделью движения твердого тела, вращающегося относительно собственного центра масс, в центральном гравитационном поле [14], [16]. Эти уравнения справедливы при условии, что расстояние от центра масс тела до центра планеты является постоянным [14], [16]. Проекция этих уравнений (20) на инерциальные оси $OXYZ$, расположенные в центре гравитационного поля приводится к уравнению (22), где координата определяет центр масс тела в инерциальном пространстве.



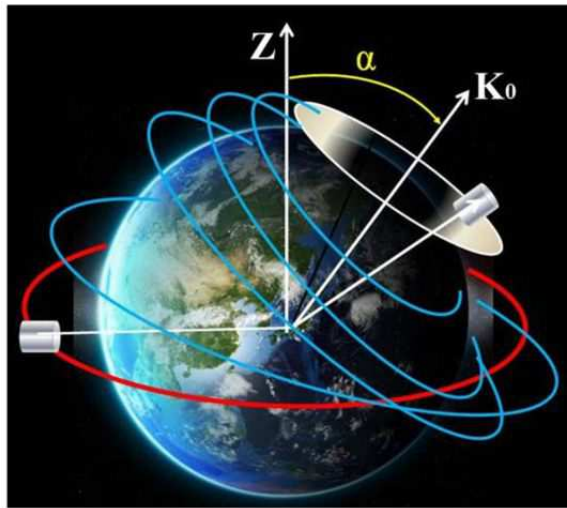
Трансформация начальной круговой орбиты в экваториальной плоскости до сжимающейся спиралевидной орбиты типа “космическая воронка” при значениях начальной угловой скорости $\omega_0 > 10^{13} \text{ c}^{-1}$ собственного вращения.

Величина параметра $R = |\mathbf{x}_c| = \text{const}$ может сохраняться, если тело массой m_0 движется по круговой орбите с первой космической скоростью. При этом предполагается дополнительно, что тело вращается относительно собственного центра масс с угловой скоростью ω .

В этом случае орбитальное движение тела по сфере постоянного радиуса определяется классическими углами Эйлера $\{\psi, \vartheta, \varphi\}$. Движения центра масс тела в инерциальной системе координат $OXYZ$ определяется уравнением (22). Величина функции $|\mathbf{f}_c|$ зависит от параметров угловой орбитальной скорости $\dot{\vartheta}, \dot{\psi}$, от компонент тензора инерции тела $\mathbf{J}$, и главное — от величины угловой скорости собственного вращения тела $\dot{\varphi} = \omega$.

При движении по орбите вектор кинетического момента $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{p}$ перпендикулярен плоскости орбиты.

При этом оказывается, что в пространстве параметров $\{\mathbf{J}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}, \omega\}$ существует область, в которой величина “поправки к закону Ньютона” $|\mathbf{f}_c|$ настолько мала, что ею можно пренебречь. В этом случае уравнение (22) становится классическим ньютоновским уравнением для точечной массы.



Динамический разворот вектора кинетического момента орбиты от исходного вертикального положения на угол α при увеличении угловой скорости ω_0 собственного вращения тела.

Таким образом, для данного класса задач можно сформулировать критерий, когда тело можно заменять точечной массой, а когда это нежелательно. Выбор критерия зависит от требуемой степени точности моделирования движения [14].

Величина функции $|\mathbf{f}_c|$ в уравнении (22), главным образом, зависит от величины угловой скорости $\dot{\varphi} = \omega$ вращения тела относительно собственного центра масс. Теоретически, величина $\dot{\varphi} = \omega$ может быть сколь угодно большой, в этом случае и величина $|\mathbf{f}_c|$ растет неограниченно, т.е. $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |\mathbf{f}_c| = \infty$.

Увеличение угловой скорости ω приводит, в первую очередь, к изменению наклона исходной орбиты, поскольку вектор $\mathbf{K}_0$, перпендикулярный плоскости орбиты, поворачивается в пространстве. Как показывают численные исследования, вектор $\mathbf{K}_0$ поворачивается в пространстве более чем на 90° при увеличении ω [14].

Так, например, диск лабораторных размеров, находящийся изначально на опорной орбите в плоскости земного экватора на высоте 200 км над Землей с увеличением угловой скорости ω существенно деформирует свою изначальную орбиту [14].

Если построить возрастающую последовательность начальных значений ω в диапазоне величин $10^{10} \leq \omega \leq 10^{12} \text{ с}^{-1}$ и для каждого из значений ω построить траекторию движения, то в итоге получится семейство орбит с изменяющимися наклонами. Более того, если дальше продолжить увеличивать значения ω , то при значениях $\omega \geq 10^{13} \text{ с}^{-1}$ траектория движения сжимается в “орбитальную воронку”. [14].

Литература

- [4] Лагранж Ж.Л. Аналитическая механика. т. 1, 2, - Москва, Ленинград: Гос. Издат. техн.-теорет. лит., 1950.
- [12] Леонард Эйлер. Переписка. Аннотированный указатель. - Ленинград: Издательство “Наука”, Ленинградское отделение, 1967. - 376 с.
- [13] Сретенский Л.Н.. Динамика твердого тела в работах Эйлера. В сборнике к 250-летию со дня рождения, представленных Академией наук СССР. - Москва: Издательство АН СССР, 1958.
- [14] Оникийчук В.Н., Оникийчук И.В. О динамических эффектах движения центра масс вращающегося твердого тела в центральном поле // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. - 2023. - выпуск 1. - С. 49–83.
- [15] Леонард Эйлер. К 300-летию со дня рождения. - Нестор-История, 2008. - 336 с.
- [16] Оникийчук В.Н., Оникийчук И.В. Векторные интегралы уравнений Эйлера, Пуассона и Вольтерра-Жуковского // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. - 2022. - выпуск 3. - С. 62–75.
- [17] Аппель П. Теоретическая механика. т. 2. - М.: Физматгиз, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1960.
- [18] Козлов В.В. Общая теория вихрей. - Ижевск: Издательский. Дом “Удмуртский университет”, 1998. - 238 с.
- [19] Маркеев А.П. Теоретическая механика. - Ижевск: Ред. Журнала “Регулярная и хаотичная динамика”, 1999. - 572 с.
- [20] Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. - Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотичная динамика”, 2001. - 384 с.
- [21] Клейн Ф. Математическая теория волчка. - Москва-Ижевск, 2013. - 70 с.
- [23] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. Учебное пособие, изд. 6-е. - М.: ЛЕНАНД, 2017.

Оникийчук Валерий Николаевич,
Государственный Университет Просвещения
(г. Москва), кафедра “Высшей алгебры,
математического анализа и геометрии”, кфмн.

Оникийчук Иван Валерьевич,
инженер-математик, ПАО “Аэрофлот”,
г. Москва.

E-mail: valeryonikiychuk@yandex.ru

E-mail: ionikv@inbox.ru

Числа от натуральных до октав

В. А. Сердюков, А. В. Сердюкова

Эту статью можно воспринимать как запись лекции университетского курса «Картина мира» на гуманитарных и некоторых естественных факультетах. Рассматривается процесс зарождения понятия числа, его преобразования и развития со временем. Текст доступен для понимания старшим школьникам.

Действительные числа

Понятие числа возникло у разумного человечества в процессе развития. В первобытно-общинном строе вопросы количества чего-либо не являлись основополагающими. Главное — еда! Период охоты, рыбалки, собирательства — палеолит.

Человечество в своём развитии перешло на следующий этап — производство пищи. Охоту и собирательство никто не отменял, но появилось земледелие и домашние животные — неолит. Подсчет запасов, поголовье скота, обмен, вычисление времени. В этот период зарождается понятие числа.

Если что и приходилось считать, то на первых порах достаточно было пальцев одной руки, в крайнем случае, двух рук. Для того времени подобная аналогия (пальцы-предметы) было гениальным открытием. Именно этим фактом в своё время восхищался В. Маяковский в своём трактате «Как делать стихи?»:

«Человек, впервые сформулировавший, что “два и два четыре”, — великий математик, если даже он получил эту истину из складывания двух окурков с двумя окурками». Поэтическое восхищение автора понятно, хотя с другой стороны, какие могли быть окурки у первобытных людей?!

Существуют находки древности, на которых подсчет фиксировался зарубками, например на кости волка, 55 зарубок сгруппированные по 5. Это свидетельствует о том, что могла бы возникнуть пятеричная система исчисления (вместо десятичной). Аналогичными зарубками Робинзон Крузо фиксировал дни, группируя их по неделям и месяцам.

По-видимому, операции с числами проводились в рамках пяти, десяти. То, что больше десяти, на разных языках именовалось как «много». Операции сложения, вычитания возникли первыми, а умножения, скорее всего, не было. Замечено при исследовании в появившихся впоследствии записях (и у современных изолированных первобытных племен), что умножение заменяли соответствующим количеством сложений. Деление появилось гораздо позже.

Про этот период зарождения основного понятия в математике «Число» мало что известно. Мы можем только догадываться. На эту тему написано множество философско-исторических работ. Самые первые числа впоследствии называли «натуральные числа». Числа, возникающие в процессе счета: 1, 2, 3, ... Принципиально: ноль не входит в понятие натуральных чисел. В некоторых практиках ноль добавляют, 0 — ничего нет.

Относительно достоверная история начинается с дошедших до нас артефактов, на которых каким-либо образом числа изображены.

Следующий этап в развитии понятия числа — его изображение.

Дошедшие до современной науки первые изображения числа на папирусах, глиняных табличках, картинках на стенах пещер относятся к началу 2-го тыс. до н.э. Основные носители изображения числа: папирусные и клинописные математические тексты. Числа по-разному выглядят, но однозначно переносят величину числа. На большей части математических артефактов фиксируются рецепты решения возникших практических задач. Уже на первых математических записях появляются дроби и действия над ними. Впоследствии натуральные и дробные числа назовут рациональными (до отрицательных — около 4 тыс. лет). Образовался первый раздел математики — арифметика, которая справлялась с потребностями практики.

Удивляют вавилонские клинописные таблички, относящиеся ко времени правления династии Хаммурапи (начало 2-го тыс. до н.э.). Уровень математических текстов очень высок. Всевозможные таблицы и рецепты решения некоторых практических задач. Табличек, дошедших до нашего времени, достаточно много, они лучше сохраняют изображения, чем папирус. По этим табличкам можно полнее представить картину математических достижений того времени.

Приводятся схемы решения некоторых математических задач, которые в Европе решены будут только в эпоху Возрождения (начало — XIV век). Например, решения некоторых квадратных и кубических уравнений. Для простого, особо не обременённого математическими знаниями, человека иногда может возникнуть вопрос: почему в нашей всеобщей десятичной системе измерений существуют «недесятичные» числа?

Например, сутки — 24 часа, час — 60 мин., минута — 60 секунд. Аналогично с углами: 360° , 180° , 90° , 45° , ... , доли угла в тех же минутах, секундах.

Дело в том, что во времена Хаммурапи система счисления (представления числа) была 60-ричная. Возникает вопрос: почему? Десятичная — понятно, десять пальцев на руках. Вавилоняне выбирали основу счисления по другому принципу — по количеству делителей. 60 делится на 2, 3, 4, 5, 6, 10, ... Удобно при использовании.

В настоящее время общепринятая система счисления десятичная. Есть некоторые исключения, например температура в отличие от Цельсия (у нас) измеряется в системе Фаренгейта. Денежные единицы: фунт = 20 шиллингов = 240 пенсов.

Основу десятичной системы составляют десять арабских цифр: 0, 1, ... , 9 (на самом деле пришли из Индии). В некоторых случаях применяются римская система исчисления, например 2025 год — ММХХV. К VI веку до н.э. сложилось представление, что всё замечательно с понятием и применением числа. Решаются практические задачи с использованием науки арифметики. Однако возникли первые «неприятности».

В то время главные развлечения у народа: гладиаторские бои и гонки на колесницах. (Позже зародится ещё одно развлечение — театр). Это для простых людей (не рабов). Однако существовал ещё один вид развлечений — философские беседы. Это развлечение для умных. Кто-то самый умный и богатый организовывал школу.

Подобную школу организовал древнегреческий мыслитель Пифагор (VI в. до н.э.). Мало что известно о его жизни, которую окутывают множество легенд. Пифагор — олимпийский чемпион по кулачному бою, тренер знаменитого атлета Милона. Он же разработал музыкальный строй, в основе которого математические пропорции. Изобрёл музыкальный инструмент — прообраз рояля.

Самое известное его достижение — теорема Пифагора. За то, что Боги осенили его доказательством этой теоремы, Пифагор принёс им в жертву гекатомбу — сжег 100 быков.

На самом деле теорема была известна, сведения о ней Пифагор почерпнул в Александрийской библиотеке; но не было доказательства. К этому времени утвердилось в науке положение: все утверждения следует доказывать.

Пифагор — философ. Этот термин придумал он («любитель мудрости»), вместо «софист» — мудрец.

Пифагор много путешествовал, даже был в плену. Свою школу организовал в 40 лет, зрелым, умудрённым немалым опытом и знаниями человеком. Ученики воспринимали его как бога, сошедшего на Землю.

К этому времени относятся серия задач на построение. При помощи циркуля и линейки построить квадрат, равный по площади кругу, — квадратура круга (не решена в то время, а в XIX веке доказали, что неразрешима). Другая нерешенная задача — «трисекция угла»: разделить угол на три равные части (то же замечание).

Задача удвоения квадрата была решена, при этом оказала очень важное влияние на понимание математического образа числа. Решение достаточно простое: диагональ квадрата равна стороне удвоенного квадрата.

Нашлись умные люди, которые доказали, что если у квадрата сторона равна 1, то сторону удвоенного квадрата невозможно представить рациональной дробью. ($\sqrt{2}$. Доказательство этого факта приводится в школьных учебниках).

Данное открытие называли «несоизмеримость отрезков».

Цитата из [6, 7]: «Открытие несоизмеримых вносило очевидный диссонанс в Пифагорову “гармонию мира”; эта основа всего сущего, всеопределяющая сила, символ, выражающий все отношения вещей, — число, по крайней мере число пифагорейцев, не было в состоянии выразить длины прямой линии в весьма простой фигуре; эта линия была лишена числового образа. Предание говорит, что ученик Пифагора, выдавший смертным эту тайну мирового диссонанса, величины без образа, бесформенного нечто, погиб во время кораблекрушения, ниспосланного разгневанными богами. Пифагорейцы, изгнавшие его из общины, еще при жизни соорудили ему могилу, как бы уже умершему.»

К этому времени относится легенда про удвоение куба. Во время чумы на острове Делос народ обратился к оракулу: что нужно сделать для прекращения эпидемии чумы? Ответ оракула: удвоить золотой жертвенник в храме. Народ собрал золото и соорудил точно такой жертвенник в виде куба и водрузил его на существующий. Но чума не прекратилась. Им объяснили, что нужно было заменить существующий жертвенник другим, который по объёму превосходил бы предыдущий в два раза. Жертвенник обязательно должен иметь форму куба, поскольку куб — идеальная фигура. (Это свидетельство влияния некоторых математических идей на атрибуты религии того времени).

Математическая задача: найти размер нового удвоенного куба. Задача, аналогичная удвоению квадрата, но не решается с использованием циркуля и линейки.

К числам натуральным и дробным, которые называли рациональными, добавились иррациональные (не рациональные, irrational — неразумный), которые невозможно представить в виде дроби.

Через некоторое время возникла следующая «неприятность» в понимании числа, которая появилась в дискуссиях философской школы, прославившейся на века из-за открытия этой «неприятности».

Школа Зенона Элейского (V в. до н.э.). Собираются ученики на симпозиум в помещении, принадлежащем Зенону. Слово «симпозиум» переводят в наших исторических текстах, как возлежание с выпивкой. На самом деле не совсем правильное определение. Возлежание — да. Выпивка — не совсем. Рабы-слуги разносили виноград и вино, разбавленное водой 1 к 10. Это такой напиток, который не способствует пьянству. И, вообще, пить неразбавленное вино — неприлично. Пьянство презирилось обществом.

Главным «ведущим ток-шоу» школы Зенона являлся он сам. Обсуждения всевозможных философских идей; самая популярная форма постановки проблем — апория (дошли до нас около 40 его апорий). Проводимые учителем-хозяином мероприятия проходили достаточно активно и бурно.

Несколько апорий с близкими идеями объединили в одну под общим названием: «Ахилл и черепаха». Апория — ложное утверждение, которое «безукоризненно» доказывается. Следует найти ошибку в доказательстве.

Ахилл (А) — символ не только самого выдающегося воина того времени, но и самого быстрого. Черепаха (Ч) — символ медленного передвижения.

На траектории движения по прямой находятся А и на некотором расстоянии от него Ч. Пока А будет бежать до той точки, где находилась Ч, она неспешно переместится на новую точку, А — на новую точку, Ч — на следующую. И так бесконечное число раз.

В то время уже как-то сложилось понятие бесконечности. Задача поставлена правильно: количество отрезков пробежавших Ахиллом — бесконечно. Длины отрезков убывают — верно.

Для мудрецов являлось очевидным, что сумма бесконечного количества отрезков равна бесконечности. Вывод: Ахилл не догонит Черепаху.

Последнее утверждение неверно. Сумма бесконечного числа отрезков может быть конечна. Это школьная тема «прогрессии», входит в ОГЭ по математике. Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия, есть формула вычисления суммы такой прогрессии.

Мудрецы Зенона не смогли найти ошибку в рассуждениях, но Ахилл точно догонит черепаху. Где ошибка?

«Потрясающий» вывод делают мудрецы: «Движенья нет!».

Над этим выводом издевался присутствующий на этом диспуте Диоген ... (Описано в исторических хрониках).

Эта апория изменила взгляд на понятия числа и бесконечности.

С этой задачей справился Архимед (III в. до н.э.). Он даже посчитал сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым элементом равным одному ($b_1 = 1$) и знаменателем $q = 1/4$. Сумма — $4/3$.

Идеи Архимеда, которые были им применены, впоследствии получили развитие в математическом анализе Ньютона-Лейбница (XVII – XVIII в.в.).

Архимеду также принадлежит первое практическое решение задачи трисекции угла, но оно не засчитывается как настоящее решение проблемы, поскольку нарушается правило использования линейки (проводить линию между двумя точками, а у Архимеда — три точки).

(Сведения выше из [1], [2], [3].)

При рассмотрении развития человеческой цивилизации с современных позиций, мы видим, что в VI в. до н.э. происходит научная революция.

Это не только Греция. «Вообще поразительная эпоха в развитии человечества». Это и Индия, Китай, Персия, ... Этот период получил название «осевого времени» [8].

Следующий «всплеск» в развитии цивилизации начнётся с эпохи Возрождения (XIV – XVI в.в.), новая научная эпоха начнётся в XVII веке.

По-видимому, первая революция развития цивилизации относится к правлению династии Хаммурапи (начало 2-го тыс. до н.э.).

Но про тот период мало что известно, кроме глиняных табличек и нескольких артефактов.

В античные времена натуральные числа не потерялись в громадном множестве всех чисел. Ещё от школы Пифагора пошло исследование натуральных чисел. Самые элементарные понятия и задачи: четные-нечетные; числа-близнецы; простые-составные (сколько простых чисел?); задача Пифагора (сумма квадратов равна квадрату числа), решето Эратосфена, ...

Тогда же все подобные исследования составили науку «Теория чисел», подразумевается, что числа натуральные.

В это же время появилась лженаука «нумерология» — суеверные предрассудки, связанные с натуральными числами. До сих пор можно встретить гостиницы, у которых нет 13 этажа, комнат с этим номером. По сочетанию цифр и чисел в дате рождения «предсказывают» судьбу.

Может возникнуть ощущение, что теория чисел — что-то несерьезное. Наукообразные игры.

Серьёзность этой науки доказывает то, что за научные работы в этой области в настоящее время присваивают научные звания доцента и профессора; кандидата и доктора физико-математических наук. И даже звание академика Академии наук РФ.

В Советском Союзе один из самых авторитетных математиков — академик Иван Матвеевич Виноградов (1891–1983) дважды Герой Социалистического труда, лауреат Ленинской и Государственных премий. Все его работы связаны с теорией чисел. Теория чисел — настоящая наука, раздел математики. Другое название — высшая арифметика.

Что касается не решаемых задач из античности: трисекции угла, квадратуры круга, удвоения куба, то они не были забыты.

В 1837 году математик П. Варцель опубликовал первое полное доказательство невозможности решения трисекции угла при помощи циркуля и линейки (потом последовали другие доказательства). Окончательное доказательство неразрешимости квадратуры круга дал математик Линдеман в 1887 году. Доказана и невозможность при помощи циркуля и линейки найти размер удвоенного куба.

Тем не менее, любителей математики доказательства невозможности решения этих трёх задач не останавливает. До сих пор появляются алгоритмы их решения при помощи линейки и циркуля, естественно, с ошибочные.

После античности сформировалось понятие числа (натуральные, дробные, иррациональные). В 1844 году появилось разделение иррациональных чисел на трансцендентные и алгебраические.

Однако продолжим отслеживать преобразование понятия числа.

Ничего не менялось вплоть до XVI века. Появилась идея отрицательных чисел; но как-то неуверенно витала в умах математиков. Великий французский математик Франсуа Виет (1540-1603) не признавал их.

Виет, возможно, — первый крупный математик за прошедшие почти две тысячи лет после античности. Он понимает, что в области математических наук необходимо использовать новую символику. Это уже делал древнегреческий математик Диофант, живший в III веке н.э., однако у древнего ученого не было последователей. Франсуа удалось изменить саму систему решения уравнений. До него алгебраические задачи решались при помощи длинных рассуждений и целой цепочки трудновыполнимых действий. Даже писались уравнения, но словами, что занимало долгое время, а уж выучить все необходимые алгоритмы было крайне трудно.

Виету принадлежит дальнейшая разработка системы введения и изображения формул, которую впоследствии назовут «алгебра». Но он не признавал отрицательные числа.

Первым талантливым математиком, который уверенно использовал новую науку алгебру и ввел в неё отрицательные числа, был француз Рене Декарт (1596–1650, по профессии мушкетер). Известна со школы декартова система координат. На самом деле нечто похожее уже существовало. Например, карты уже использовали, как-то наносили точки на карты, по ним ориентировались.

Декарт оси продлил в отрицательную сторону — таким образом, узаконил отрицательные числа. На этой «почве» Декарт основал новую математическую науку «аналитическая геометрия». Была евклидова геометрия, теперь все её объекты можно было представить при помощи формул.

Сложился новый образ числа. Теперь числа это: натуральные $\mathbb{N}$, целые $\mathbb{Z}$ (к $\mathbb{N}$ добавили отрицательных целые числа и ноль), дробные или рациональные $\mathbb{Q}$ (дроби, в том числе отрицательные), иррациональные $\mathbb{I}$ (в том числе отрицательные). Все известные числа обозначали $\mathbb{R}$ — действительные или вещественные. Каждому числу соответствует точка на координатной прямой и каждой точке на прямой — число.

Координатная прямая — это прямая с заданным началом отсчета, единичным отрезком и направлением от минус бесконечности $(-\infty)$ до плюс бесконечности $(+\infty)$.

Комплексные числа

В XVI веке в Италии происходит возрождение и развитие математики. Математические знания используются в быту, при торговле, обмене, измерениях, в астрономии. Математика преподаётся в университетах.

Появляются некоторые талантливые математики, которые держат свои открытия в секрете. Казалось бы, следовало как-то пропагандировать свои достижения.

Дело в том, что профессиональных математиков крайне мало. Стимула открывать новое не было; для применения на практике достаточно освоить, то, что уже представляет собой наука-математика. Это в древней Греции большая часть населения жила за счет труда рабов. Можно было решать увлекательные математические задачи для развлечения, делать открытия.

В XVI веке каждый думал о средствах к существованию. Знаниями математики прокормиться можно, но больших стимулов и времени для новых открытий в этой науке не было. Существовали университеты, можно было устроиться преподавать математику студентам или юношам, поступающим в университет. Также приносило прибыль составление гороскопов.

В то время вошли в моду публичные диспуты, которые сопровождались толпой зрителей. Спор мог вестись на любую тему. Назначалась комиссия, которая оценивала доводы одной и другой стороны, определяла победителя. Подобные соревнования были и математическими. Представитель одной стороны предлагал уравнения, которые должен решить представитель другой стороны; затем другая сторона задавала уравнения и т.д. Определялся победитель, который неплохо на выигрыше зарабатывал. Естественно желание победителя не разглашать свои методы решения уравнений, в надежде выиграть следующий диспут.

В эту эпоху родился Джироламо Кардано (1501–1576).

Человек с очень сложной судьбой, случайно выжил в детстве, практически сам обучался по книгам, которые с жадностью поглощал. Своя семья (нужно содержать), дети, один из них за убийство приговорён к казни...

Незадолго до своей смерти в 1563 году написал и издал свою автобиографию «О моей жизни». В которой описывает, что достаточно рано задумался о смысле жизни.

Цитата из автобиографии: «Цель, к которой я стремился, заключалась в увековечивании моего имени, поскольку я мог этого достигнуть, а вовсе не в богатстве или праздности, не в почестях, не в высоких должностях, не во власти.»

В этом направлении Кардано многого достиг. В энциклопедии написано: итальянский математик, инженер, философ, врач, астролог. Опубликовал фундаментальные труды по алгебре, теории вероятностей и механике, оказавшие огромное влияние на развитие науки.

Существует легенда, что Кардано предсказал дату своей смерти, но, поскольку, в назначенное время ещё был жив, то — самоубийство.

Джироламо получил медицинское образование. На этом поприще добился признанного успеха, что доказывает факт: лечил Папу римского. Преподавал в университете. Предсказал, что причинами инфекционных болезней являются живые существа, невидимые глазом из-за малых размеров.

В качестве инженера Кардано в своих трудах подробно описал множество механизмов, в том числе свои собственные изобретения: масляную лампу с автоматической подачей масла и кодовый замок. В каждой современной машине есть карданный вал, название которого от имени Кардано.

В историю криптографии Кардано вошёл как изобретатель несложного шифровального устройства, использовавшегося в переписках и получившего название «решётка Кардано». Расшифровывал чужие шифры.

Кардано выпустил книги по алхимии и натуральной философии.

Все эти научные достижения, по его мнению, не способствовали «увековечиванию его имени».

Кардано для себя решил, что только математика способна увековечить имя. Первая работа в этом направлении «Книга об игре в кости» — исследование по математической теории азартных игр, написанная в возрасте 25 лет. Он считал работу недостаточно серьёзной для математики, хотя в ней излагались идеи, которые только через сотню лет изложат основатели теории вероятностей — французы Пьер Ферма и Блез Паскаль.

Кардано решил собрать в одной книги все известные на тот момент достижения по математике: «*Artis Magnae, Sive de Regulis Algebraicis*» (Великое искусство, или Правила алгебры).

Уже было известно, что на диспутах решались уравнения третьей и четвёртой степени, но формулы не было. Кардано втёрся в доверие к математику Тарталья, который выиграл диспут именно решением подобных уравнений. Пообещал, что никому не расскажет, но после узнал эту формулу из других источников. Тарталья очень обиделся, даже судился... Кардано честно написал, что формула не его, но в математике она именуется как «формула Кардано».

Из всего математического творчества ученого, для формирования нового образа числа, нам важен небольшой эпизод из книги «Великое искусство».

При описании примера на применение «формулы Кардано» приходится формально записать корень из отрицательного числа. Но формула «работает».

Этот факт Кардано приводит в простом примере: найти числа a и b , если их сумма равна 10, а произведение 40. Ответ: $a = 5 + \sqrt{-15}$, $b = 5 - \sqrt{-15}$. Приводится сложение и умножение; доказывается, что ответ верен.

Затем Кардано говорит, что этот ответ «столь же тонок, сколь и бесполезен».

Однако этого примера оказалось достаточно чтобы в дальнейшем математикам разработать теорию комплексных чисел:

$$z = a + bi. \quad (1)$$

Введено обозначение $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$; a и b — обычные числа.

Из-за «бесполезного» примера Кардано считается автором комплексных чисел $z = a + bi$, теория которых развивалась по схеме математического анализа. Получила название «Теория функций комплексного переменного» (ТФКП). Так же, как в математическом анализе, в ТФКП есть функции, отображения, в частности, конформные, производные, интегралы, ряды, ...

Известно, что в вещественном математическом анализе существуют так называемые «неберущиеся интегралы». В ТФКП некоторые из них вычисляются в уме.

Теория имеет применение в различных областях человеческой деятельности (электроника, электротехника, ...).

Приведём только один пример.

Российский ученый Н.Е. Жуковский изучил функцию комплексного переменного $w = (1/2)(z + 1/z)$, которая применяется в гидродинамике и аэродинамике, в частности, для построения профиля крыла самолёта.

Благодаря идее Кардано математика получила расширение понятия числа; комплексные числа обозначаются $\mathbb{C}$, они представлены на плоскости. Через точку 0 координатной прямой проводится перпендикулярная прямая, на которой откладывается координата b комплексного числа, по горизонтальной откладывается координата a , см. (1). Каждой точке на комплексной плоскости соответствует число, и наоборот.

Теперь есть такие числа: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$ и $\mathbb{C}$.

Применение комплексных чисел позволило доказать основную теорему алгебры: уравнение степени n имеет n корней!

Коэффициенты уравнения и корни могут быть комплексными числами.

Например, уравнение $x^{13} = 1$ имеет 13 корней, первый из которых $x_0 = 1$, остальные 12 корней — комплексные.

Ещё один факт из ТФКП: $e^{i\pi} = -1$. В то время как положительное число в любой вещественной степени больше 0.

Теория функций комплексного переменного обогатила математику новыми идеями, но и, в какой-то мере, изменила стиль мышления.

На этом математики не остановились в исследовании числа. Иррациональные числа разделились на алгебраические и трансцендентные. Строгая теория иррациональных чисел появилась во второй половине XIX века, разработана немецким ученым Р. Дедекиндом.

В XIX веке возникла «мода», которая пошла ещё от Евклида: при создании новой науки строить её на аксиомах. После Евклида (через 2 тыс. лет) этим приёмом воспользовался Н.И. Лобачевский при создании своей неевклидовой геометрии.

Подобным приёмом воспользовался Георг Кантор (1845 – 1918) при создании теории множеств, которая по-новому представила понятие бесконечности.

С античности известно, что чисел бесконечно много. Кантор решил исследовать простой вопрос: каких чисел больше, целых или всех чисел на отрезке $[0; 1]$?

Единственная аксиома-постулат — определение понятия «множество». Ввел понятие мощности множества. Виртуозно доказал, что мощность целых чисел ($\aleph_0$, алеф-нуль — счетное множество) строго меньше мощности действительных чисел ($\aleph_1$, алеф-один — континуум).

Другими словами: доказал, что бесконечность целых чисел ($\aleph_0$) в «бесконечное число раз» меньше бесконечности всех чисел ($\aleph_1$ — континуум). Далее теорема:

Мощность множества 2^X всех подмножеств множества X строго больше мощности X . [5]

Виртуозно и остроумно было доказано, что бесконечностей бесконечно много! ($\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \dots$)

Выводы из теории множеств:

Натуральных, целых и дробных (рациональных) чисел — счетное множество. Вещественных, в том числе, иррациональных, трансцендентных, а также комплексных — континуум.

Однако не всё гладко было с теорией множеств. Часть ведущих математиков (Пуанкаре, Кронекер, ...) обрушились на Кантора с агрессивной критикой. К тому же открылись противоречия в самой теории множеств.

У Кантора началась депрессия, которая всё усиливалась; через 30 лет талантливый математик закончил свою жизнь в психбольнице.

Однако нашлись защитники новой теории, ввели новые постулаты — противоречия исчезли. Тем не менее, до сих пор существуют противники теории множеств.

Самый авторитетный математик начала XX века Давид Гильберт один из своих докладов закончил лозунгом:

«Никто не изгонит нас из рая, созданного для нас Кантором» — пообещал он своим коллегам-математикам [9, стр.230].

На рубеже веков в 1900 году на математическом конгрессе Д. Гильберт сформулировал 23 нерешенные проблемы [9], среди которых:

Проблема № 7: *Является ли число $2^{\sqrt{2}}$ трансцендентным?*

Строго доказано в 1934 году: является.

Расширение математического образа числа продолжается.

Кватернионы

См. [4, 5].

Некоторых математиков существование комплексных чисел вдохновило на поиск их аналогий, состоящих из трёх компонент. Подразумевалось, что новые числа будут точками в трёхмерном пространстве. Главная задача: создать систему таких чисел. Какая польза от них и будет ли, это потом разберёмся.

У некоторых математиков комплексные числа вызвали восторг!

Однако новые числа, по аналогии с комплексными, должны были обладать главным свойством: все операции над числами давали результат в этих же числах.

Это свойство не выполнялось для обычных вещественных чисел. Не было корня квадратного из отрицательного числа. Не имели решения некоторые уравнения.

Для дальнейшего развития теории комплексных чисел много сделал сэр Уильям Роуэн Гамильтон (1805 – 1865). В 1835 году он опубликовал работу, в которой привел строгое построение теории комплексных чисел. Гамильтон рассматривал комплексное число как пару действительных чисел, что позволяло применять теорию в планиметрии. Это настроило его на поиск аналогичных чисел, но в трёхмерном пространстве.

Позже Гамильтон писал, что каждое утро его дети спрашивали: «Папа, ты научился умножать тройки?»; я отвечал «Нет».

На самом деле подобной трёхмерной алгебры не существует.

Идея о «четвёрках» пришла ему во время прогулки с женой на мосту. На радостях Гамильтон вырезал на каменных перилах моста: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. (2)

По аналогии с формулой (1) в комплексных числах возникла формула для кватернионов: $V = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$, где x_n — действительные числа. (3)

Владимир Игоревич Арнольд [4] побывал на этом месте. Вырезанного изображения не нашел (за 150 лет стёрлось), но красовалась памятная табличка на мосту Брум Бридж в Дублине: «Здесь на прогулке, 16 октября 1843 года, сэр Уильям Роуэн Гамильтон, во вспышке гения, открыл формулу умножения кватернионов».

На самом деле формула (2) впервые появилась в работе Эйлера в 1748 году, но не получила дальнейшего развития. В 1840 году вышла в свет статья Родригеса с дальнейшим развитием идей Эйлера.

Гамильтон до конца жизни занимался исследованием кватернионов и их пропагандой. Некоторое время кватернионы были настолько в моде, что они стали входить в программу обязательных экзаменов не только в Великобритании, но и в некоторых американских университетах. В некоторых учебных заведениях кватернионы представляли единственный изучаемый раздел высшей математики.

Такая популярность не осталась безнаказанной. Часть крупных ученых разразились убийственной критикой, в которой мелькали такие эпитеты в адрес новых математических объектов: «уродцы-гермафродиты»!

Однако уже тогда кватернионы нашли применения в различных разделах физики. В настоящее время кватернионы применяются при решении некоторых видов дифференциальных уравнений. Особенно широко они применяются в различных областях программирования:

- 3D-графика и анимация.
- Разработка игр.
- Симуляция.

Применение кватернионов упрощает управление вращением объектов вокруг осей, преобразование координат.

Следует заметить, что некоторые неудобства в применении кватернионов осложняются невыполнением *коммутативности*. Из математики 1-го класса школы известно, что от перестановки сомножителей произведение не меняется: $AB = BA$ — это свойство и называется коммутативностью (умножения). В кватернионах это правило не обязано выполняться $AB \neq BA$.

Во всевозможных справочниках написано:

Кватернионы — система *гиперкомплексных* чисел, 4-мерная алгебра над полем вещественных чисел.

Теперь числа: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{I}, \mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$ — кватернионы (от начальной буквы имени «Гамильтон» — Hamilton).

Октавы

См. [4].

История открытия октав менее известна из-за «параллельности». Двое ученых независимо друг от друга причастны: товарищ Гамильтона по колледжу Джон Т. Грейвс и юный Артур Кэли.

Именно Грейвс разбудил в Гамильтоне повышенный интерес к комплексным числам. Впоследствии Гамильтон много сделал для дальнейшего развития ТФКП, которые индуцировали у него идею «троек».

На следующий день после своего открытия Гамильтон отправил письмо на восьми страницах о кватернионах Грейвсу.

Буквально через неделю пришло письмо от Грейвса, в котором тот восхищался открытием друга и добавил: «Если ... можно с помощью своей алхимии создать три фунта золота, то зачем же на этом останавливаться».

Развитие идеи кватернионов наводило на последовательность: 1, 2, 4, ... ; продолжение которой: 8, 16, 32, ...

Грейвс занялся добычей своего «золота» по той же «алхимии». 26 декабря 1843 года присылает письмо с описанием восьмимерной алгебры, которую назвал «октавами».

Завязалась переписка по поводу нового вида чисел — «октав». Гамильтон всецело поглощен развитием кватернионов, и публикациями на эту тему. Однако активно принимал участие в рассмотрении и обсуждении идей друга.

В январе 1844 года Грейс посылает несколько писем, в которых приводит построение 16-мерной нормированной алгебры, однако замечает, что возникают непреодолимые трудности и сомневается в возможности подобного построения. Только в XX веке топологом Хайнцем Хопфом (1894 – 1971) доказано было, что построение подобной алгебры невозможно.

Именно Гамильтон обратил внимание, что октавы не *ассоциативны* (впервые ввел в обращение этот термин). Вот цитата из письма:

« $A \cdot BC = AB \cdot C = ABC^1$, если A, B и C — кватернионы, но с твоими октавами это не так».

Пока проходили эти эпистолярные обсуждения, время шло, а публикаций не было.

В марте 1845 года появляется публикация в журнале «Philosophical magazine», в которой как-то вскользь сообщается краткое описание октав.

Таким образом, Грейвс утратил звание первооткрывателя октав, но в следующем номере этого же журнала утверждал, что знал про октавы с Рождества 1843 года. В 1847 году Гамильтон представил в «Труды» Королевской ирландской академии заметку, подтверждающую приоритет Грейвса, но было уже поздно — октавы вошли в математику под именем чисел Кэли. В дополнение личных разочарований Грейвса выяснилось, что теорема о восьми квадратах была открыта датским математиком Карлом Фердинандом Дегентом ещё в 1818 году.

Вот как выглядят числа-октавы: $W = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4 + x_5 i_5 + x_6 i_6 + x_7 i_7$, (4)

где x_n — действительные числа; «образующие» i_n удовлетворяют соотношениям:

$$i_n^2 = -1, i_{n+1} i_{n+2} = i_{n+4} = -i_{n+2} i_{n+1}, i_{n+2} i_{n+4} = i_{n+1} = -i_{n+4} i_{n+2}, i_{n+4} i_{n+1} = i_{n+2} = -i_{n+1} i_{n+4},$$

Вводятся операции сложения и умножения чисел вида (4).

Вот как написано в некоторых справочниках:

Алгебра Кэли — система гиперкомплексных чисел, 8-мерная алгебра над полем вещественных чисел. Обычно обозначается $\mathbb{O}$, поскольку её элементы (числа Кэли) называются иногда «октонионами» или «октавами».

Октонионы (октавы) находят применение в физике, в частности, в специальной теории относительности и теории струн.

К настоящему времени все числа: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{I}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$.

Других чисел пока что не обнаружено².

Данная статья представляет собой некоторое предварительное введение в понимание, в контексте исторического развития, математического объекта «число». Более полно и глубоко идеи различных понятий числа изложены в книге [10], которая является расширенным вариантом лекции, прочитанной на заседании студенческого лектория Московского математического общества.

¹Это свойство и называется ассоциативностью (умножения).

²Более точно: в указанном автором направлении расширение числовых систем останавливается — теорема Фробениуса утверждает, что при некоторых естественных предположениях всякое тело (в частности, поле), расширяющее поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо изоморфно исходному полю $\mathbb{R}$; либо изоморфно полю комплексных чисел $\mathbb{C}$; либо изоморфно телу кватернионов $\mathbb{H}$. (8-мерные октонионы Кэли исключением из теоремы не являются, поскольку умножение для них не ассоциативно.) Однако существуют расширения по другим основаниям, например, p -адические числа — неархимедовы расширения рациональных, числа нестандартного анализа — неархимедово расширение действительных. Упомянем также числа Конвея, см. Кнут Д.Э. Сюрреальные числа = Surreal Numbers / Перевод Н. Шихова. — М.: «Бином. Лаборатория знаний», 2014, а также [10]. — Прим. ред.

Литература

- [1] Русаков А.А., Чубариков В.Н. Счёт. Число. Континуум (К 115-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова): монография. – М.: Человек слова, 2018. – 136 с.
- [2] Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. Пер.с нем. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 256 с.
- [3] Колмогоров А.Н. Математика в её историческом развитии / Под ред. В.А. Успенского. – М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит., 1991. – 224 с.
- [4] Арнольд В.И. Геометрия кватернионов. – М.: МЦНМО, 2017. – 144 с.
- [5] Конвей Дж., Смит Д. О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях / Пер. с англ. С.М. Львовского. 2-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2019. – 184 с.
- [6] Липман М.М. Школьникам о математике и математиках: Пособие для учащихся / Сост. М.М. Лиман. – М.: Просвещение, 1981 – 80 с.
- [7] Шереметевский В.П. Сочинения Владимира Петровича Шереметевского / Вл. П. Шереметевский; изд. Комис. преподавателей рус. яз. при Учеб. отд. о-ва распространения техн. знаний. – М.: т-во тип. А.И. Мамонтова, 1897. – VIII. – 330. – 41 с.
- [8] Шафаревич И.Р. О науке. Сборник / Под ред. А.Н. Паршина – М.: МЦНМО, 2023. – 456 с.
- [9] Рид Констанс. Гильберт. / Пер. с англ. И.В. Долгочева. – М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит., 1977. – 388с.
- [10] Кириллов А.А. Что такое число?. - М.: Издательская фирма «Физико-математическая литература» ВО «Наука», 1993.

*Сердюков Владимир Алексеевич,
доцент экономического факультета ФГБОУ ВО
«Государственный академический университет
гуманитарных наук», канд. пед. наук, PhD.*

E-mail: serdukwa@mail.ru

*Сердюкова Алла Владимировна,
доцент факультета естественных наук
ФГБОУ ВО «Государственный университет
просвещения», кандидат биологических наук.*

E-mail: sekrbara@mail.ru

**Олимпиада школьников "ТИИМ — Технологии. Интеллект.
Информатика. Математика" 2025/2026**

А. А. Андреев, А. А. Балабекян, А. В. Куприн,

Е. А. Максимова, Е. А. Скородумова

В статье рассказано об олимпиаде для школьников по математике и информатике "ТИИМ" 2025/26 учебного года. Приведены задачи отборочного тура по математике для 10-11 классов с ответами, задачи заключительного тура по математике для 11 класса с решениями, а также примеры задач отборочного и заключительного туров по информатике с решениями.

Участие в олимпиадах — это не только проверка знаний, но и уникальная среда для формирования нестандартного мышления. Школьник учится видеть скрытые связи между разделами науки, находить элегантные решения там, где очевидные алгоритмы не работают. Этот опыт меняет подход к восприятию сложных задач, превращая их из источника стресса в поле для интеллектуального творчества.

Систематическая работа над олимпиадными заданиями развивает важнейшее качество — умение удерживать фокус в условиях ограниченного времени и высокой конкуренции. Чередование глубокого анализа, интуитивных догадок и строгой логической проверки формирует когнитивную гибкость, которая остаётся с человеком на всю жизнь, независимо от выбранной профессии.

Немаловажно и то, что олимпиадное движение создаёт сообщество увлечённых, целеустремлённых людей. Общение с ровесниками, которые горят тем же предметом, даёт мощный импульс к саморазвитию, помогает преодолевать профессиональное одиночество и находить надёжных партнёров для будущих научных или инженерных проектов. Победа здесь становится не самоцелью, а естественным подтверждением выстроенной системы знаний и упорства.

Важно подчеркнуть: олимпиады — это долгосрочная инвестиция в человеческий капитал. Она окупается не только дипломами при поступлении, но и сформированной привычкой учиться новому на протяжении всей жизни, способностью доводить начатое до результата и смелостью браться за нестандартные вызовы.

Разбор реальных заданий прошедших туров остаётся наиболее эффективным методом подготовки. Он позволяет не только набить руку, но и понять логику составителей, научиться распределять время и избегать типичных ловушек.

В 2025/26 учебном году отборочный тур олимпиады школьников «ТИИМ — Технологии. Интеллект. Информатика. Математика» прошёл с ноября 2025 по январь 2026 г., заключительный этап — в феврале 2026 г.

В соревновании по математике участвовали ученики 5–11 классов. Отборочный этап был организован в очной и дистанционной формах. Каждый из четырёх вариантов отборочного тура включал 10 задач. Для заключительного тура было подготовлено также 10 задач и два варианта для разных часовых поясов.

Варианты заданий по информатике (по два комплекта на каждый тур) содержали по 6 задач для учащихся 8–11 классов. Олимпиада использовала систему автоматической проверки решений на наборе тестов. Итоговая оценка зависела от количества успешно пройденных тестов. Решения принимались на языках C++, Python, Pascal, Java.

В математической олимпиаде приняли участие 6689 школьников из 80 регионов России и ближнего зарубежья, в олимпиаде по информатике — 2041 школьник из 70 регионов. Заключительный этап прошёл в очной форме на 74 площадках, включая Москву, Санкт-Петербург, Владимир, Самару, Белгород, Омск, Тюмень, Ульяновск, Саранск, Калининград, Улан-Удэ, Красноярск, Елабугу, Волгоград, Ивановскую область, Республику Башкортостан, Вологду, Ростов, Нижний Новгород, Новосибирск, Челябинск, Донецкую Народную Республику, а также в Абхазии и Узбекистане.

Полные тексты заданий, ответы, разборы решений, сборник задач, а также списки победителей и призёров опубликованы на официальном сайте олимпиады: <https://тиим.рф>.

Задания отборочного тура по математике

В отборочном туре по математике каждое из десяти заданий оценивалось максимально в 1 балл. Ответ было необходимо представить в краткой форме.

В данном разделе мы приводим по одному комплекту заданий для учащихся 10-х и 11-х классов вместе с правильными ответами к ним.

10 класс

Задача 1. Сколько граммов воды нужно добавить к 500 гр. 30% сливок, чтобы получить 9,(09)% сливки? Ответ запишите в граммах.

Ответ: 1150.

Задача 2. Найдите последние две цифры числа 2^{50} .

Ответ: 24.

Задача 3. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$(9x - a)(27x - a - 81) < 0$$

выполняется при всех x таких, что $1 \leq x \leq 3$. В ответе запишите сумму всех целых a из найденного промежутка.

Ответ: 36.

Задача 4. Пусть $a = \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$, $b = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}}$. Найдите сумму всех целых x , удовлетворяющих неравенству

$$x^2 + 6b < \sqrt{5}(a + b)x + 6a$$

Ответ: 150.

Задача 5. Сколько раз встречается единица и двойка в записи суммы

$$9 + 99 + \dots + \underbrace{99 \dots 9}_{2025}$$

В ответе укажите сумму найденных двух чисел.

Ответ: 2021.

Задача 6. Можно ли число 997 представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел? Если да, то найдите все такие представления. В ответе запишите наибольшее из всех произведений найденных пар чисел.

Ответ: 248502.

Задача 7. В магазине костюм, состоящий из пиджака и брюк, стоит на 20% дороже, чем такой же костюм на рынке, причём брюки стоят на 30% дороже, чем на рынке, а пиджак — на 15%. Во сколько раз на рынке брюки от этого костюма дешевле пиджака?

Ответ: 2.

Задача 8. Найти сумму всех положительных решений уравнения

$$\cos 2\pi x + 4\sin^2 \pi x = \sqrt{3} \sin 2\pi x,$$

удовлетворяющих неравенству $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$. Ответ записать в виде десятичной дроби, при необходимости округлить до двух десятичных знаков.

Ответ: 2,17.

Задача 9. Изобразить на координатной плоскости фигуру, заданную системой неравенств:

$$\begin{cases} 2|x-1| + |y| \geq 2, \\ x^2 - 2x + y^2 \leq 3 \end{cases}$$

и вычислить её площадь S . В ответе записать: $[S+1, 5]$, где $[a]$ — целая часть числа a .

Ответ: 10.

Задача 10. В треугольнике ABC угол A равен $\arccos \frac{7}{8}$, $BC = a$, длина высоты, опущенной из вершины A , равна сумме длин двух других высот треугольника. Найти площадь треугольника ABC . В ответе записать значение площади, если $a = \sqrt[4]{240}$.

Ответ: 15.

11 класс

Задача 1. Найдите сумму всех целых x , входящих в область определения функции

$$y = \log_5 \log_{0,5} \frac{3-x}{x+2}.$$

Ответ: 3.

Задача 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8 \cdot 2^y = 4^{1,5x+0,5}, \\ 5^{2x} = \frac{1}{25} \cdot 5^y. \end{cases}$$

В ответе запишите $x+y$.

Ответ: 14.

Задача 3. Найти сумму всех положительных решений уравнения

$$\cos 2\pi x + 4 \sin^2 \pi x = \sqrt{3} \sin 2\pi x,$$

удовлетворяющих неравенству $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$. Ответ записать в виде десятичной дроби, при необходимости округлить до двух десятичных знаков.

Ответ: 2,17.

Задача 4. На Урюпинской валютной бирже за 13 тугриков дают 26 динаров, за 28 рупий — 21 динар, за 14 рупий — 3 талера, а за 7 крон — 4 талера. Сколько тугриков можно получить за 21 крону?

Ответ: 21.

Задача 5. Найти всевозможные натуральные числа x и y , удовлетворяющие уравнению:

$$x^2 - 4xy - 5y^2 = 919.$$

В ответе запишите сумму количества всех делителей найденных значений x и y .

Ответ: 10.

Задача 6. Найдите неизвестные цифры X и Y пятизначного числа $\overline{313XY}$, если оно делится на 36. В ответе укажите среднее арифметическое всех найденных пятизначных чисел.

Ответ: 31356.

Задача 7. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость CPQ , где P — середина ребра BB_1 , а Q — центр грани $ABCD$. В каком отношении эта плоскость делит объём куба? В ответе записать отношение объёма большей части к меньшей.

Ответ: 11.

Задача 8. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB вдвое длиннее стороны BC . Внутри прямоугольника лежит точка N , причем $AN = \sqrt{2}$, $BN = 4\sqrt{2}$, $DN = 2$. Найти площадь прямоугольника $ABCD$. В ответе запишите $5S$.

Ответ: 78.

Задача 9. Предполагается использовать 2000 фунтиков (ф) на путёвки в дома отдыха. Путёвки есть на 15, 27 и 45 дней. Стоимость их соответственно 21 ф, 40 ф и 60 ф. Сколько и каких путёвок нужно купить, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим? В ответе укажите общее число дней отдыха.

Ответ: 1494.

Задача 10. Найти решения системы

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi}(\operatorname{ctg} \pi x - \operatorname{ctg} \pi y) = y - x, \\ \cos \pi x \cos \pi y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

при условии, что $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. В ответе запишите наибольшее возможное значение $2(x + y)$ из найденных.

Ответ: 3.

Отборочный тур олимпиады ТИИМ по информатике

На отборочном туре по информатике были предложены два варианта, каждый из которых содержал 6 задач различной направленности: геометрия, криптография, динамическое программирование, теория чисел, работа со строками.

Каждая задача оценивалась максимум в 100 баллов, причём зачёт шёл только при верном ответе на всех тестах (не менее 25 тестов на задачу). Приводим здесь по одной задаче из каждого из комплектов.

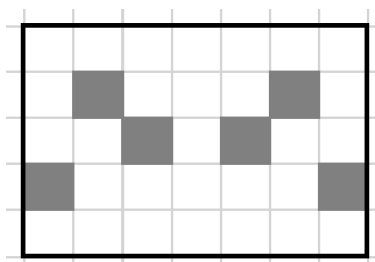
Задача 3 (8-9 класс). Магические пешки.

Колдун играет в магические шахматы. Суть игры заключается в расстановке пешек на клетчатом поле размером n на m .

Если поставить три пешки так, что образуется прямоугольный треугольник с вершинами в этих пешках, то пешки испарятся, и колдун проиграет.

Необходимо расставить на поле как можно больше пешек. У колдуна есть неограниченный запас пешек.

Пример не оптимальной расстановки пешек во время игры на поле 5 на 7:



Формат входного файла: В единственной строке ввода даны два числа n , m — размеры поля. ($1 \leq n \cdot m \leq 10^6$)

Формат выходного файла: В единственной строке выведите одно число — ответ на задачу.

Система оценивания: Решения, верно работающие при $n \cdot m \leq 16$, будут получать не менее 40 баллов.

Пример:

Входные данные	Результат работы программы
1 2	2

Разбор:

Утверждается, что всегда, кроме случая, когда $n = 1$ или $m = 1$, на поле возможно выставить $n + m - 2$ пешки. Например, это можно сделать следующим образом: поставим пешки на все клетки первого столбца и первой строки, убрав одну пешку из угловой клетки, тогда прямоугольных треугольников не образуется.

Теперь докажем, что $n + m - 1$ разместить уже невозможно. Рассмотрим двудольный граф, где в левой доле вершины отвечают за столбцы, а в правой за строки, тогда пешку на клетке (i, j) будем представлять как ребро из вершины левой доли i в вершину правой доли j . Теперь заметим следующее: если у ребра вершины на его концах обе имеют степень хотя бы 2, то присутствует прямоугольный треугольник, так как это будет значить, что у пешки существует сосед и по строке, и по столбцу. Тогда получается, что в графе все компоненты связности выглядят как звёзды и не имеют диаметра большего чем 2, так как иначе появится прямоугольный треугольник. Так как вид графа звезда подразумевает, что в нём нет циклов, а вершин в графе у нас $n + m$, то это значит, что рёбер может быть не более $n + m - k$, где k — число компонент связности. При этом $k = 1$ выполняется только если задействуется ровно 1 строка/столбец, но тогда ответ будет $\max(n, m)$, что не является оптимальным ответом, кроме оговорённого в начале случая. Тогда $k \geq 2$. И тогда максимальное количество возможных рёбер, а т.е. и пешек для нас $n + m - 2$.

Решение на языке Python:

```
n, m = map(int, input().split())
```

```
if n == 1 or m == 1:
    print(n * m)
else:
    print(n + m - 2)
```

Задача 4 (10-11 класс). Счастливый билет.

В старом трамвайном депо города Ветрограда существует поверье: раз в год среди обычных билетов попадает один Счастливый Билет Хранителей Удачи. Его невозможно подделать — магия цифр хранит тайну.

По правилам древней гильдии кондукторов билет считается счастливым, только если его номер, состоящий из n цифр и не содержащий нулей, делится на каждую из своих цифр без остатка. Говорят, тот, кому достанется такой билет, весь год будет ехать по жизни без пробок и задержек.

Тебе достался один из билетов из старого ящика контролёра. Горожане уверяют, что он может быть тем самым.

Формат входного файла: В первой строке дано число t — количество тестовых случаев.

Каждый тестовый случай представлен двумя строками:

В первой строке тестового случая дано число n — длина числа ($1 \leq n \leq 10^5$).

Во второй строке тестового случая дано само число длины n , без нулей.

Гарантируется, что $\sum n \leq 5 \cdot 10^5$.

Формат выходного файла: Для каждого тестового случая в отдельной строке выведите «YES» — если число является счастливым, «NO» — иначе.

Система оценивания: Решения, верно работающие при $n \leq 18$, будут получать не менее 40 баллов.

Пример:

Входные данные	Результат работы программы
1 6 231636	YES

Разбор:

Для каждого числа надо проверить делимость на его цифры при помощи признаков делимости, давайте вспомним их:

- Число делится на 2, если его последняя цифра делится на 2
- Число делится на 3, если его сумма цифр делится на 3
- Число делится на 4, если число, образованное последними двумя цифрами, делится на 4
- Число делится на 5, если его последняя цифра делится на 5
- Число делится на 6, если выполняются признаки делимости на 2 и на 3
- Число делится на 8, если число, образованное последними тремя цифрами, делится на 8
- Число делится на 9, если его сумма цифр делится на 9

Признак деления на 7 — немного сложнее, поэтому для него проще посчитать следующую последовательность: $r_i = (r_{i-1} \cdot 10 + a_i) \bmod 7$, где a_i — i -я цифра числа, $r_0 = 0$ и r_n — итоговый остаток деления числа на 7. Тогда чтобы число делилось, он должен быть равен 0.

Решение на языке Python:

```
import sys

def is_divisible_by_digits(s: str) -> bool:
    n = len(s)
    digits = [int(ch) for ch in s]
    last_digit = digits[-1]

    unique_digits = set(digits)

    for d in unique_digits:
        if d == 1:
            continue

        elif d == 2:
            if last_digit % 2 != 0:
                return False

        elif d == 3:
            if sum(digits) % 3 != 0:
                return False

        elif d == 4:
            if n == 1:
                if digits[0] % 4 != 0:
```

```
        return False
    else:
        if (digits[-2] * 10 + digits[-1]) % 4 != 0:
            return False

    elif d == 5:
        if last_digit != 5:
            return False

    elif d == 6:
        if last_digit % 2 != 0 or sum(digits) % 3 != 0:
            return False

    elif d == 7:
        # Вычисляем число mod 7
        rem = 0
        for dig in digits:
            rem = (rem * 10 + dig) % 7
        if rem != 0:
            return False

    elif d == 8:
        if n == 1:
            if digits[0] % 8 != 0:
                return False
        elif n == 2:
            if (digits[-2] * 10 + digits[-1]) % 8 != 0:
                return False
        else:
            if (digits[-3] * 100 + digits[-2] * 10 + digits[-1]) % 8 != 0:
                return False

    elif d == 9:
        if sum(digits) % 9 != 0:
            return False

    return True

def main():
    data = sys.stdin.read().strip().split()
    if not data:
        return
    t = int(data[0])
    idx = 1
    out_lines = []
    for _ in range(t):
        n = int(data[idx]); idx += 1
        num_str = data[idx]; idx += 1
        if is_divisible_by_digits(num_str):
```

```

        out_lines.append("YES")
    else:
        out_lines.append("NO")
    sys.stdout.write("\n".join(out_lines))

if __name__ == "__main__":
    main()

```

Заключительный тур по математике

Заключительный тур по математике включал два варианта заданий, каждый из которых состоял из 10 задач. Максимальная оценка за каждую задачу составляла 10 баллов.

Вариант заданий для 11 класса

Задача 1. Из 4104675 квадратных плиток одного размера и двух цветов составляется прямоугольник. Сколько прямоугольников разного размера можно составить, используя все плитки? За один ход в любом полученном прямоугольнике разрешается покрасить все плитки в одном ряду (горизонтальном или вертикальном) в тот цвет, который чаще встречается в этом ряду. Можно ли за конечное число ходов покрасить все плитки в один цвет?

Решение.

Разложим количество плиток на простые сомножители:

$$4104675 = 5^2 \cdot 3^4 \cdot 2027.$$

Количество различных делителей этого числа равно $(2 + 1) \cdot (4 + 1) \cdot (1 + 1) = 30$. Поскольку прямоугольники $m \times n$ и $n \times m$ одного размера, можно составить $30/2 = 15$ прямоугольников разного размера.

Общее число плиток 4104675 нечётно, поэтому прямоугольник с размерами $m \times n$ ($mn = 4104675$) содержит нечётное количество плиток в каждом ряду. Следовательно, в любом горизонтальном ряду есть преобладающий цвет, в который мы перекрасим все плитки этого ряда, после чего каждый вертикальный ряд будет иметь одинаковое распределение цветов по строкам. Но число строк нечётно, поэтому в каждом столбце будет преобладающий цвет, причём один и тот же для всех столбцов. Перекрасив все столбцы в этот цвет, получим одноцветный прямоугольник.

Ответ: 15 прямоугольников; можно.

Задача 2. Выразите в радианах значение выражения

$$\operatorname{arccctg} \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi}{3} + 1 \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{5\pi}{6} + 1 \right) \right) + \operatorname{arccctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2 \right).$$

Решение.

По формулам разности котангенсов и преобразования произведения синусов в полуразность косинусов представим аргумент первого арккотангенса таким образом:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi}{3} + 1 \right) - \operatorname{ctg} \left(\frac{5\pi}{6} + 1 \right) &= \frac{\sin \left(\frac{5\pi}{6} + 1 - \frac{2\pi}{3} - 1 \right)}{\sin \left(\frac{2\pi}{3} + 1 \right) \sin \left(\frac{5\pi}{6} + 1 \right)} = \\
 &= \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos \left(2 + \frac{3\pi}{2} \right) \right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2}.
 \end{aligned}$$

Итак, аргументы первого и второго арккотангенса являются взаимно обратными числами. При этом $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{2\pi}{3} < \sin 2$, поскольку во второй четверти синус убывает, а $\frac{2\pi}{3} > 2$. Для $x < 0$ имеет место формула $\operatorname{arccotg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg} x + \pi$. Учитывая тождество $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$, получим

$$\begin{aligned} & \operatorname{arccotg} \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2} \right) + \operatorname{arccotg} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2 \right) = \\ & = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2 \right) + \pi + \operatorname{arccotg} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2 \right) = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3\pi}{2}$.

Задача 3. Найдите все решения неравенства

$$x + y + z \leq \sqrt{x + y - 6} + 2\sqrt{y + z - 5} + 3\sqrt{z + x - 3}.$$

Решение.

Умножим неравенство на 2:

$$2x + 2y + 2z \leq 2\sqrt{x + y - 6} + 4\sqrt{y + z - 5} + 6\sqrt{z + x - 3}$$

и выполним замену $x + y = u$, $y + z = v$, $z + x = w$. Получим неравенство $u + v + w \leq 2\sqrt{u - 6} + 4\sqrt{v - 5} + 6\sqrt{w - 3}$, которое можно переписать в виде

$$(\sqrt{u - 6} - 1)^2 + (\sqrt{v - 5} - 2)^2 + (\sqrt{w - 3} - 3)^2 \leq 0.$$

Очевидно, это неравенство имеет единственное решение: $\sqrt{u - 6} - 1 = \sqrt{v - 5} - 2 = \sqrt{w - 3} - 3 = 0$
 $\Rightarrow u = 7$, $v = 9$, $w = 12$.

Вернёмся к исходным переменным $x + y = 7$, $y + z = 9$, $z + x = 12$, откуда $x = 5$, $y = 2$, $z = 7$.

Ответ: (5, 2, 7).

Задача 4. Дан отрезок длиной $\sqrt[32]{33}$ см. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длиной 31 см.

Решение.

Пусть $x = \sqrt[32]{33}$, тогда можно построить отрезок $4x$, а следовательно и отрезок $\sqrt{17}x = \sqrt{(x)^2 + (4x)^2}$ (по теореме Пифагора). Дальнейшие построения основаны также на свойстве высоты прямоугольного треугольника: 1) $a = \sqrt{(4x)^2 + (\sqrt{17}x)^2} = \sqrt{16x^2 + 17x^2} = \sqrt{33}x = 33^{\frac{17}{32}}$; 2) $b = 33x$; 3) $c = \sqrt{a \cdot x} = 33^{\frac{9}{32}}$; 4) $d = \sqrt{x \cdot c} = 33^{\frac{5}{32}}$; 5) $e = \sqrt{x \cdot d} = 33^{\frac{3}{32}}$; 6) $m = \sqrt{b \cdot d} = 33^{\frac{19}{32}}$; 7) $n = \sqrt{a \cdot c} = 33^{\frac{13}{32}}$; 8) $f = \sqrt{m \cdot n} = 33^{\frac{1}{2}}$; 9) $y = \sqrt{(4f)^2 + (\sqrt{17}f)^2} = 33$. Используя теорему Фалеса, можно построить отрезок длиной 31.

Задача 5. Натуральные взаимно простые числа α и β таковы, что

$$\frac{43}{197} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{17}{77}.$$

Найдите наименьшее возможное значение β .

Решение.

Запишем $\frac{77}{17}\alpha < \beta < \frac{197}{43}\alpha$ и оценим дроби, входящие в это неравенство: $4,52 < \frac{77}{17} < 4,53$; $4,58 < \frac{197}{43} < 4,59$.

1) $\alpha = 1 \Rightarrow 4,52 < \beta < 4,59$ — решений нет.

2) $\alpha = 2 \Rightarrow 9,04 < \beta < 9,18$ — решений нет.

3) $\alpha = 3 \Rightarrow 13,56 < \beta < 13,77$ — решений нет.

- 4) $\alpha = 4 \Rightarrow 18,09 < \beta < 18,77$ — решений нет.
 5) $\alpha = 5 \Rightarrow 22,60 < \beta < 22,95$ — решений нет.
 6) $\alpha = 6 \Rightarrow 27,18 < \beta < 27,48$ — решений нет.
 6) $\alpha = 7 \Rightarrow 31,71 < \beta < 32,06 \Rightarrow \beta = 32$ — наименьшее значение β .

Ответ: 32.

Задача 6. Сколько натуральных значений может принимать выражение $a = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$, если x, y, z, w удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 4y + 11, \\ z^2 + w^2 + 2w = 2z + 167, \\ xw + zy + w + x \geq 49 + 2z + y? \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем систему к виду:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 16, \\ (z-1)^2 + (w+1)^2 = 169, \\ (x+1)(w+1) + (z-1)(y-2) \geq 52. \end{cases}$$

Введём двумерные векторы $\vec{a} = (x+1, y-2)$, $\vec{b} = (w+1, z-1)$, тогда первые два уравнения системы сводятся к $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 13$, а левая часть неравенства равна скалярному произведению этих векторов. Пусть угол между векторами равен φ , тогда $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \geq 52$, откуда $4 \cdot 13 \cos \varphi \geq 52 \Rightarrow \cos \varphi = 1$, $\varphi = 0$. Пусть

$$\begin{cases} x+1 = 4 \cos \phi, & \begin{cases} z-1 = 13 \cos \psi, \\ w+1 = 13 \sin \psi, \end{cases} \\ y-2 = 4 \sin \phi, \end{cases}$$

тогда $4 \cos \phi \cdot 13 \sin \psi + 13 \cos \psi \cdot 4 \sin \phi \geq 52$; $\sin(\phi + \psi) \geq 1 \Rightarrow \sin(\phi + \psi) = 1 \Rightarrow \phi + \psi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Отсюда $\cos \psi = \sin \phi$, $\sin \psi = \cos \phi$. Подставим $x = 4 \cos \phi - 1$, $y = 4 \sin \phi + 2$, $z = 13 \cos \phi + 1$, $w = 13 \cos \phi - 1$ в выражение $a = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$:

$$\begin{aligned} a &= 16 \cos^2 \phi - 8 \cos \phi + 1 + 16 \sin^2 \phi + 16 \sin \phi + 4 + 169 \sin^2 \phi + 26 \sin \phi + 1 + \\ &\quad + 169 \cos^2 \phi - 26 \cos \phi + 1 = 192 - 34 \cos \phi + 42 \sin \phi. \end{aligned}$$

Как известно, выражение $-34 \cos \phi + 42 \sin \phi$ может принимать все значения из интервала $[-\sqrt{34^2 + 42^2}, \sqrt{34^2 + 42^2}]$. Простая оценка показывает, что $\sqrt{34^2 + 42^2} = 2\sqrt{730} \in (54, 55)$, откуда $a \leq 192 + 2\sqrt{730} \in (246; 247)$, $a \geq 192 - 2\sqrt{730} \in (137; 138)$. Следовательно, выражение a может принимать любые натуральные значения от 138 до 246. Их количество равно $246 - 138 + 1 = 109$.

Ответ: 109.

Задача 7. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$xyz = 2024 \cdot 2025 \cdot 2026?$$

Решение.

Разложим числа на простые сомножители: $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, $2026 = 2 \cdot 1013$. Итак, $xyz = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 1013$.

Число решений в натуральных числах равно числу способов распределить простые сомножители по переменным x, y и z . Из комбинаторики известно, что число способов распределить n одинаковых предметов по m местам равно C_{n+m-1}^{m-1} , поэтому для четырёх одинаковых двоек и троек число способов равно $C_6^2 = 15$. Для двух одинаковых пятёрок число способов равно $C_4^2 = 6$. Для каждого

из простых сомножителей, входящих в разложение в первой степени (11, 23, 1013), число способов равно $C_3^2 = 3$.

Общее число решений: $15^2 \cdot 6 \cdot 3^3 = 36450$.

Ответ: 36450.

Задача 8. Найдите, чему равны коэффициенты при x^{1000} и x^{2026} в многочлене

$$P(x) = (1+x)(1+2x^3)(1+3x^3)(1+4x^3) \dots (1+2026x^{3^{2025}}).$$

Решение.

В многочлене $P(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ показатели степени складываются из чисел вида 3^k , поэтому представим 1000 и 2026 в троичной системе счисления:

$$1000 = 1 \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 1101001_3;$$

$$2026 = 2 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 2210001_3.$$

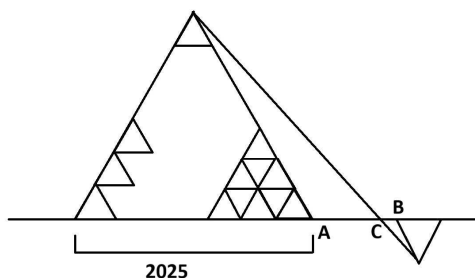
Очевидно, $a_{1000} = 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1 = 168$. В то же время 2026 невозможно представить как сумму различных степеней тройки с коэффициентами, равными 0 или 1. Следовательно, коэффициент при $a_{2026} = 0$.

Ответ: $a_{1000} = 168$, $a_{2026} = 0$.

Задача 9. Разделите данный отрезок на 2026 равных отрезков, пользуясь односторонней линейкой и шаблоном, имеющим форму равностороннего треугольника. (Шаблон можно обводить по его границе. Односторонней линейкой можно выполнять только одну операцию: проводить прямую через две данные точки.)

Решение.

Решение представлено на рисунке.



Проведём прямую, на которой лежит данный отрезок AB . Построим слева от точки A 2025 треугольников по шаблону, а затем будем заполнять шаблонами ряды, двигаясь вверх, пока не получится большой равносторонний треугольник, сторона которого в 2025 раз больше шаблона. Правее точки B по шаблону построим треугольник в другой полуплоскости относительно прямой AB . Соединяя вершины треугольников, получим в пересечении с прямой AB точку C , которая делит отрезок AB в отношении $AC : CB = 2025 : 1$. Отсюда $CB = \frac{1}{2026}AB$. Очевидно, таким образом можно отделить любую часть отрезка. Далее от AC отделим 2025-ю часть и т. д.

Задача 10. Существует ли функция $y = f(x)$, определённая во всех точках вещественной оси, непрерывная ровно в 2026 точках и такая, что $y = |f(x)|$ непрерывна в любой точке x числовой прямой?

Решение.

В качестве примера построим функцию

$$f(x) = x(x-1)(x-2) \dots (x-2025)D(x),$$

где $D(x) = \begin{cases} -1, & x - \text{рациональное,} \\ 1, & x - \text{иррациональное.} \end{cases}$

Функция $D(x)$ разрывна в каждой точке, а $f(x)$ непрерывна только в тех точках, где обращается в ноль, т. е. $x = 0, x = 1, \dots, x = 2025$. В то же время $|f(x)| = |x(x - 1) \dots (x - 2025)|$ является функцией, непрерывной на всей числовой прямой.

Ответ: Существует.

Заключительный тур олимпиады ТИИМ по информатике

Задания заключительного этапа заметно превосходили по сложности отборочные. Как и на отборочном туре, участникам предстояло решить 6 задач. Оценка за каждую задачу выставлялась по 100-балльной шкале.

Самой сложной для участников оказалась задача «Мудрый Крот»

Задача 5. Мудрый крот



Валентин Петрович захотел показать своим ученикам игру, в которую он играл ещё в детстве, "Мудрый крот". Это была одна из его любимых игр, даже были "любимые" уровни, решение которых он записывал в тетрадь. К сожалению, саму игру ему найти не удалось, но это не беда, ведь Валентин Петрович — программист и может легко разработать такую игру сам. Большую сложность представляло то, что изображения уровней у него не осталось. Тут-то и должны помочь записи решения головоломок.

Напишите программу, которая может восстановить карту уровня игры по его решению.

Историческая справка:

Мудрый Крот — русская версия культовой игры Sokoban, разработанная в 1992 году и работавшая в MS DOS.

Цель игры — перемещать объекты в обозначенные места, толкая их. Эти объекты находятся внутри комнаты, окружённой стенами. Пользователь управляет Кротом. Крот может двигаться вверх, вниз, влево и вправо, но не может проходить через стены или ящики, и может толкать только один ящик за раз (никогда не тянуть). В любой момент клетка может быть занята только стеной, ящиком или Кротом.

Больше об этой игре можно прочитать здесь: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Sokoban>

Также вы можете играть в эту игру: <https://www.mathsisfun.com/games/sokoban.html>

Формат входного файла: В качестве входных данных будет передана строка, содержащая решение уровня. Формат обозначений — "LURD".

Символы "lurd" (строчные) означают, что игрок перемещается влево, вверх, вправо, вниз.

Символы "LURD" (прописные) означают, что игрок толкает ящик влево, вверх, вправо, вниз.

Входные данные всегда считаются допустимым решением реального уровня.

Формат выходного файла: В ответ ваша функция должна вернуть изображение уровня. Размер уровня — менее 50x50.

Оценивание: Баллы за решение начисляются в соответствии с количеством пройденных тестов
Пример:

Входные данные	Результат работы программы
<pre>urrrrrDrdddlldlluuurRl1dddrurUluu111 l1dddrLuuuurrddrddld11UdrurU111L rrru111ldRrrrrddld11uUddrruru1uul l1ddrRRl1ddrruruuLdddlldlluuurUdld ddrruruuLuLLrrrrdrddldlluuurUruLLr ddRl1dddrurUruLLd1UruL</pre>	<pre>##### #... ### #@###\$ # # \$ # #.# ## ## # \$ # # ### ## #####</pre>

Замечание: Для описания уровня приняты следующие обозначения. Стена — "#", Игрок — "@", Игрок на цели — "+", Ящик — "\$", Ящик на цели — "*", Цель — ".", Пол — " " (пробел).

При создании карты уровня нужно добавлять минимальное количество элементов — только то, что необходимо. Запрещено добавлять лишние стены и ящики, с которыми игрок не взаимодействует. Минимальное свободное пространство внутри внешних границ. Минимальное количество ящиков. Внешняя граница должна быть толщиной 1, соединена ортогонально и минимально возможна. Уровень должен быть нарисован без лишних пробелов с обеих сторон.

Разбор:

Краткое описание хода решения:

1. Проходим по строке инструкций ("LURD" и их строчные аналоги), и моделируем перемещения игрока и толчки ящиков.
2. Все клетки по пути запоминаем как пустые или с ящиками и целями, если они появляются. Стены (если нужны) — добавим позже.
3. Находим финальную позицию игрока и ящиков, и минимально необходимое пространство вокруг, чтобы создать аккуратный уровень без лишних элементов.
4. Создаём двумерный массив — внешняя граница с препятствиями (стенами). Расставляем ящики, цели, игрока, исходя из записанных конечных позиций.

Авторское решение на языке Python:

```
def level_recovery(solution):
    D, boxes, i, j = {}, set(), 0, 0
    for c in solution:
        D[(i, j)] = ' '
        match c:
            case 'l' | 'L': k, l = 0, -1
            case 'r' | 'R': k, l = 0, 1
            case 'u' | 'U': k, l = -1, 0
            case 'd' | 'D': k, l = 1, 0
        if c.isupper():
            if (i+k, j+l) not in D:
```

```

        boxes.add((i+k, j+1))
        D[(i+k, j+1)] = ' '
        D[(i+2*k, j+2*1)] = '.'
    i, j = i+k, j+1

for i, j in boxes:
    match D[(i, j)]:
        case '.': D[(i, j)] = '*'
        case ' ': D[(i, j)] = '$'
match D[(0, 0)]:
    case '.': D[(0, 0)] = '+'
    case ' ': D[(0, 0)] = '@'

Y, X = zip(*D)
x, y = min(X)-1, min(Y)-1
H, W = max(Y)-y+2, max(X)-x+2
res = [[' ']*W for _ in range(H)]
for i in range(H):
    for j in range(W):
        if (i+y, j+x) in D:
            res[i][j] = D[(i+y, j+x)]
        elif any((k+y, l+x) in D for k in range(i-1, i+2) for l in range(j-1, j+2)):
            res[i][j] = '#'
print ('\n'.join(map(str.rstrip, map(''.join, res))))

line = input()
level_recovery(line)

```

Апельсины из Мульт Тауна

Мульт Таун — сказочный город из мультфильма "Кто подставил Кролика Роджера". В силу мультишинности всё, что там существует — плоское.

В саду у Кролика Роджера уродились чудесные апельсины. Все одинакового размера, круглые, яркие, как солнце!

И решил кролик угостить своих друзей апельсинами. Конечно, он хочет разделить их поровну. Но вот задача. Для деления всех апельсинов, независимо от их количества, на N частей можно использовать только $N - 1$ разрезов.

Кролик придумал решение — разложить свои апельсины радиусом $R = 1$ на координатной плоскости так, чтобы центры лежали на оси X , и делить апельсины параллельными оси X линиями. Осталось только произвести соответствующие вычисления, чтобы площадь апельсина, которая достанется каждому, была одинаковой.

Формат входного файла: Число N — сколько друзей у Кролика. $1 \leq N \leq 1000$.

Формат выходного файла: Список координат Y , в которых линии пересекают ось Y с точностью до 4 знаков после запятой, отсортированный по убыванию.

Система оценивания: Баллы за решение начисляются в соответствии с количеством пройденных тестов.

Примеры:

Входные дан- ные	Результат работы программы
2	2
15	0.7632 0.6179 0.4919 0.3755 0.2649 0.1577 0.0524 -0.0524 -0.1577 -0.2649 - 0.3755 -0.4919 -0.6179 -0.7632

Разбор:

Так как апельсины делятся горизонтальными прямыми (параллельными оси X), каждый разрез задаётся координатой Y . Площадь круга радиуса 1 делится на N равных частей, поэтому нужно найти $N - 1$ координату Y , через которые будут проведены прямые, отсекающие сверху площади, равные πR^2 . Для этого используется формула площади кругового сегмента и бинарный поиск, чтобы для каждой доли найти соответствующий Y .

Авторское решение на языке Python:

```
import math
num_parts = int(input())

R = 1.0
total_area = math.pi * R**2
area_per_part = total_area / num_parts

def segment_area_above(y, R):
    """Площадь сегмента сверху до y (от y до R)."""
    if y >= R:
        return 0
    if y <= -R:
        return total_area
    return R**2 * math.acos(y / R) - y * math.sqrt(R**2 - y**2)

def find_y_for_area(target_area, R, tol=1e-12):
    """Бинарный поиск y, для которого площадь сверху от y до R равна target_area."""
    low, high = -R, R
    while high - low > tol:
        mid = (low + high) / 2
        area = segment_area_above(mid, R)
        if area > target_area:
            low = mid
        else:
            high = mid
    return (low + high) / 2

# Находим y для деления на 5 равных по площади частей
y_lines = []
squares = []

for i in range(1, num_parts):
    target_area = i * area_per_part
```

```
y = find_y_for_area(target_area, R)
y_lines.append(round(y, 4))
squares.append(segment_area_above(y, R)-total_area/num_parts*i)

str = ' '.join(str(x) for x in y_lines)

print(str.replace(' -0.0 ', ' 0 '))
```

Андреев Александр Анатольевич,
зам. руководителя сектора
олимпиад школьников,
кандидат физ.-мат. наук, доцент.

E-mail: andre01071948@yandex.ru

Балабекийн Андрей Александрович,
тренер-педагог по информатике
Самарского Регионального Центра
для Одаренных Детей.

E-mail: andrei.balabekyan@yandex.ru

Куприн Андрей Валентинович,
старший преподаватель кафедры
"Математический анализ" МТУСИ.

E-mail: a.v.kuprin@mtuci.ru

Максимова Екатерина Алексеевна,
специалист сектора олимпиад
школьников МТУСИ.

E-mail: ekamaks@bk.ru

Скородумова Елена Александровна,
доцент кафедры "Теория вероятностей и
прикладная математика" МТУСИ,
кандидат физ.-мат. наук, доцент.

E-mail: eas@mtuci.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2026 год (1 экз., включая стоимость пересылки): 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2026 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,

к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки): 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. Редакция принимает материал к публикации или отклоняет без объяснения причины. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

- I. Malyshev. About a Quadrilateral, which Has More than Four Dozen Formulas in its Arsenal, but is Presented in a Textbook by One** 2
- A number of useful formulas are considered that relate various parameters (lengths of sides, angles, area, etc.) of quadrilaterals that satisfy certain conditions, for example, being simultaneously inscribed and circumscribed.
- K. Gorbunov. Calculating Probabilistic Times for Reaching a Set of States in a Finite Markov Chain** 13
- This article presents a simple yet universal method for calculating the probabilistic times of first reaching a given set of states in a finite Markov chain with a random walk. It can be used in educational settings for the subjects “probability theory” and “random processes”. An example of the method’s application is provided.
- N. Ilyushechkin. On the Difference between the Characteristic and Minimal Polynomials of a Matrix** 19
- A criterion for the difference between the characteristic and minimal polynomials of any square matrix is obtained. A discrepancy between these polynomials is equivalent to the incompleteness of the rank of some auxiliary matrix of larger size.
- S. Kalinin, L. Pankratova. An Analogue of Jensen Inequality for p -convex Functions and its Application to Solving Equations** 24
- The article considers an analogue of Jensen inequality for p -convex functions and its application to solving one Olympiad equation.
- V. Onikiychuk, I. Onikiychuk. On Baron Munchausen’s Problem. Leonhard Euler. Part 2, Finished** 30
- The second part of the article covers Leonhard Euler’s life in St. Petersburg. It explains in detail the essence of Euler’s achievements in understanding and solving dynamic problems in solid mechanics. Finished.
- V. Serdyukov, A. Serdykova. Numbers from Natural to Octaves** 41
- This article can be viewed as a transcript of a lecture from the university course “Worldview”, taught in humanities and certain natural science departments. It examines the origins of the concept of number, as well as its transformation and evolution over time. The presentation is tailored to the mathematical aptitude of the audience. The text is accessible to senior high school students.
- A. Andreev, A. Balabekyan, A. Kuprin, E. Maximova, E. Skorodumova. School Olympiad TIIM — “Technologies. Intellect. Informatics. Mathematics” — 2025/2026** 52
- This article describes the TIIM Olympiad in mathematics and informatics for school students for the 2025/26 academic year. It presents problems from the qualifying round in mathematics for grades 10–11 (with answers), problems from the final round in mathematics for grade 11 (with solutions), and examples of problems from the qualifying and final rounds in informatics (with solutions).

ISSN 1992-6138



9 771992 613776 >