ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

год тридцатый

номер 1 (117)

январь-март 2026

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 1 (117), 2026 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2026 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 27.04.2026 г.
Стиль верстки разработан С.А. Кулешовым.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.
Объем 5,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (117), январь – март 2026 г.

Содержание

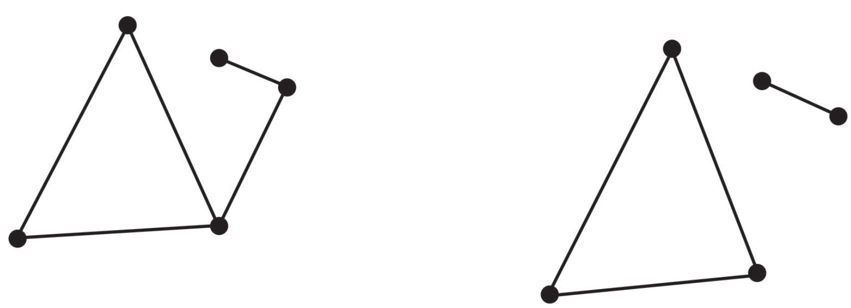
Правильные раскраски ребер графов и некоторые их свойства

Р. А. Акбердин, И. Б. Шмигирилова

В статье рассматривается подборка олимпиадных задач на графы, в постановке и решениях которых используется правильная раскраска ребер графов. Также предлагаются примеры заданий для мини-исследований, связанных с рассмотренными задачами.

Теория графов — один из современных разделов математики. Хотя вопросы теории графов пока не включаются в программы школьного курса математики, зачастую они являются источниками задач для математических олимпиад разного уровня. Знакомство с большинством вопросов теории графов не требует владения обширным математическим аппаратом и поэтому эти вопросы доступны учащимся, начиная уже с начальной школы. Решение задач теории графов может также послужить основой для организации исследований, в том числе и школьников среднего звена. В данной статье продемонстрированы отдельные подходы к таким исследованиям. Вначале приведем некоторые сведения из теории графов, необходимые для дальнейшего изложения [2, 5].

Обычно под обыкновенным графом понимают картинку, где некоторые пары точек (вершин) соединены линиями (ребрами). Примеры подобных иллюстраций приведены на рисунке 1.



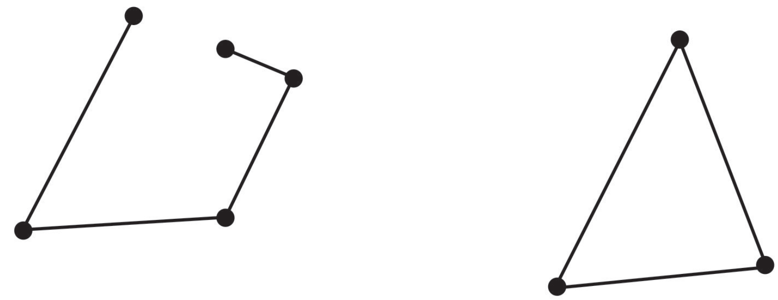
а) б)

Рис. 1.

Граф — это совокупность множества точек и множества линий, соединяющих пары этих точек. Точки называются *вершинами* графа, а линии — *ребрами.* Обозначим граф буквой G, число вершин — буквой p, а число ребер — q. Граф G также называют (p, q)-графом.

Графы подразделяются на *связные*, рис. 1 а) и *несвязные*, рис. 1 б). В связных графах из любой вершины можно попасть в любую другую, двигаясь по ребрам графа, а в несвязных это невозможно хотя бы для одной пары вершин.

Если из графа удалить некоторые ребра, то полученный граф G_1 называют *суграфом* для исходного графа G. Если из графа удалить некоторые вершины, вместе со всеми ребрами, из них исходящими, то полученный граф G_2 называется *подграфом* исходного графа G. Для графа, изображенного на рисунке 1 а) примеры суграфа и подграфа приведены на рисунках 2 а) и 2 б) соответственно.



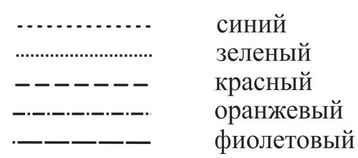
а) б)

Рис. 2.

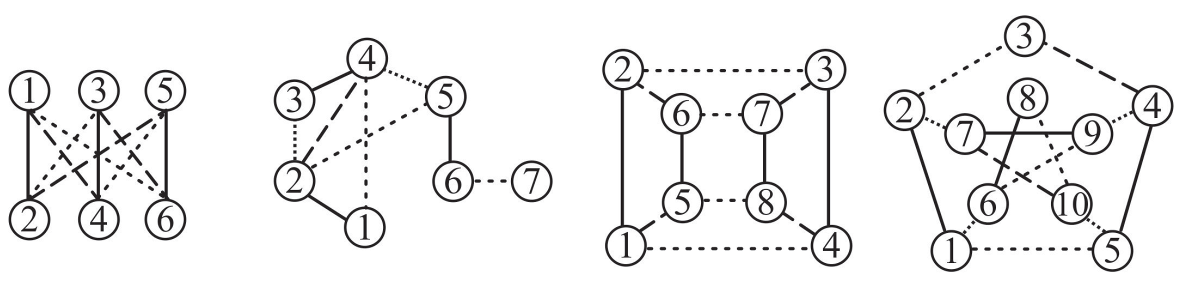
Под *реберной раскраской* графов понимается присваивание каждому ребру графа определенного цвета (номера). В [1] были рассмотрены задачи, связанные с произвольной реберной раскраской. Раскраска ребер графов называется *правильной*, если любые два ребра одного цвета не имеют общих вершин. То есть правильная раскраска ребер графа предполагает, что ребра, исходящие из одной вершины, должны быть разного цвета. На рисунке 3 приведены примеры таких раскрасок ребер графов с пронумерованными вершинами.

Наименьшее число красок, необходимых для правильной раскраски ребер графа G, называется *хроматическим индексом* этого графа и обозначается $\chi_1(G)$. Например, для графов на рисунках 3 а), в) $\chi_1(G) = 3$, а на рисунках 3 б), г) $\chi_1(G) = 4$.

Примечание. Рисунки ниже предназначены для черно-белой печати, поэтому разные раскраски ребер изображаются разными типами прерывистых линий:



Степенью вершины графа называется число ребер, исходящих из этой вершины, а вершину степени 1 называют *висячей*. В графах на рисунках 3 а), в), г) все вершины имеют равные степени. Такой граф называется *однородным* (*регулярным*) степени k. Для графов на рисунках 3 а), в), г) $k = 3$. Такие графы называются *кубическими*. Граф на рисунке 3 а) также является *двудольным*[1]. Такие графы называются *бикубическими*. В графе на рисунке 3 б) ровно одна висячая вершина — 7.



G−кубический граф — G− произвольный — G− граф куба — G− граф Петерсена

а) б) в) г)

Рис. 3.

[1] Двудольный граф — это граф, множество вершин которого разбивается на две независимые части (доли) так, что рёбра соединяют только вершины из разных частей, а внутри одной части рёбер нет.

Будем использовать в дальнейшем следующие предложения.

1°. В любом графе сумма степеней вершин равна удвоенному числу ребер.

Справедливость этого предложения следует из того, что при суммировании каждое ребро используется ровно 2 раза. Так для графа на рисунке 3 б) с числом ребер 9 эта сумма равна: $2+4+2+4+3+2+1$ или $2 \cdot 9$.

2°. В любом графе число вершин нечетной степени четно.

Это предложение является следствием предложения 1°. В графе на рисунке 3 б) две вершины: 5 и 7 имеют нечетную степень.

3°. Однородный граф нечетной степени k содержит четное число вершин.

Это предложение является непосредственным следствием предложения 2°. Для графов на рисунках 3 а), в), г) число вершин $p = 6$.

4°. Если однородный граф степени 2 является связным, то он представляет собой цикл, содержащий все его вершины, а если граф является несвязным, то его компоненты связности также циклы.

Читатель сам может привести соответствующие примеры. Следующие два предложения связаны с нахождением хроматического индекса графов.

5°. Для любого графа $G : \triangle(G) \leq \chi_1(G) \leq 1+\triangle(G)$, где $\triangle(G)$ — наибольшая из степеней вершин графа G. То есть $\chi_1(G) = \triangle(G)$ или $\chi_1(G) = 1 + \triangle(G)$.

Это предложение было доказано советским математиком В.Г. Визингом в 1964 году [4, 5].

Для графа на рисунке 3 б) $\triangle(G) = 4$ и $\chi_1(G) = 4$, а на рисунке 3 г) $\triangle(G) = 3$ и $\chi_1(G) = 4$, то есть $\chi_1(G) = 1 + \triangle(G)$.

6°. Хроматические индексы некоторых видов графов известны:

1) $\chi_1(K_{2n}) = \triangle(G) = 2n - 1$, где K_{2n} — полный граф[2] с четным числом вершин $p = 2n$;

2) $\chi_1(K_{2n+1}) = 1 + \triangle(G) = 2n + 1$; известно также, что для любого однородного графа G с нечетным числом вершин $\chi_1(G) = 1 + \triangle(G)$;

3) если G — бикубический граф, то $\chi_1(G) = \triangle(G)$ (например, для графа на рисунке 1 а) $\chi_1(G) = 3$);

4) если G — кубический граф, то $\chi_1(G) = \triangle(G)$ или $\chi_1(G) = 1 + \triangle(G)$, то есть, точное значение не определено. Перейдем к рассмотрению задач мини-исследования.

Задача 1. Некоторые пары городов страны соединены беспосадочными рейсами одной из трех авиакомпаний, причем из каждого города есть по одному рейсу каждой из этих авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого города, возможно с пересадками. Из-за финансового кризиса было закрыто два рейса различных авиакомпаний. Докажите, что из любого города можно по-прежнему улететь в любой другой город.

Решение данной задачи опирается на следующее предложение.

7°. Если в связном кубическом графе G, ребра которого могут быть окрашены в три цвета (раскраска правильная), удалить любые два ребра разного цвета, то полученный граф G^* (сурграф графа G) остается связным.

Примечание. Из предложения 3° получаем, что G должен содержать четное число вершин, а из предложения 6° и условия предложения 7° получаем, что $\chi_1(G) = \triangle(G) = 3$.

Иллюстрация этого предложения представлена на рисунке 4.

[2]Полный граф — это граф, в котором каждая пара различных вершин соединена ребром.

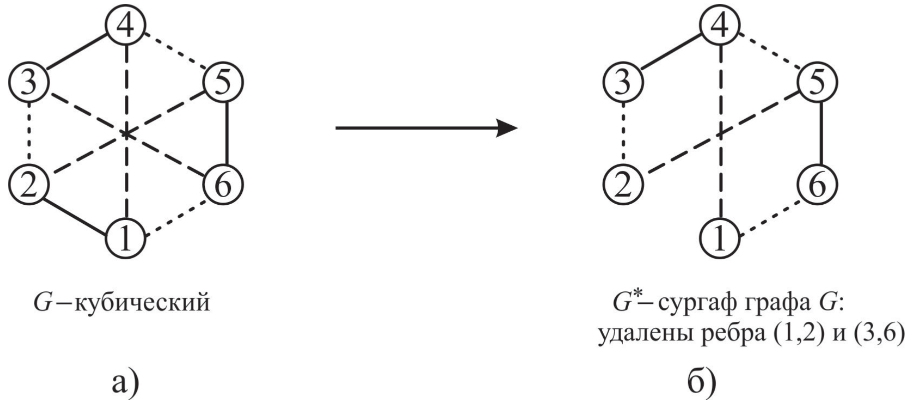


Рис. 4.

Доказательство. Для доказательства связности G^* достаточно доказать, что для любой пары его вершин i и j существует цепь P^*, их связывающая. Так как исходный граф G связный, то в нем существует цепь P, соединяющая вершины i и j. Возможны два случая для удаления ребер.

1) Цепь P не содержит удаленных ребер, тогда цепь P является искомой.

2) Цепь P содержит удаленное ребро (i_o, j_o) и пусть оно окрашено в цвет a_1. Достаточно доказать, что в G_1 существует обходная цепь P_1, соединяющая i_o и j_o и не содержащая удаленного его ребра (рис. 5).

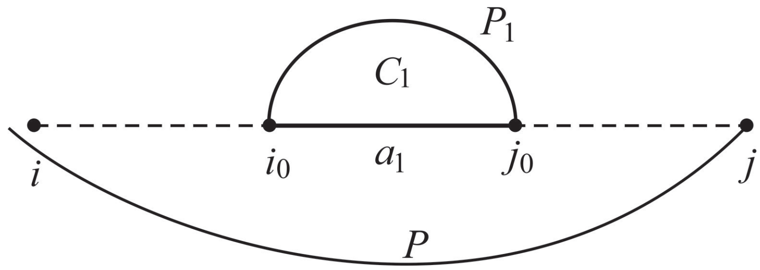


Рис. 5.

Пусть для определенности второе удаленное ребро имеет цвет a_2, а ребер цвета a_3 нет среди удаленных. Рассмотрим в графе G двуцветный сурграф, составленный из ребер цветов a_1 и a_3. Этот сурграф является однородным степени 2 и если даже он несвязный, то он состоит из циклов (см. 4°). Пусть C_1 — цикл, содержащий ребро (i_o, j_o). Тогда цепь P_1, полученная из C_1 удалением ребра (i_o, j_o), является искомой. Она не содержит удаленных ребер. Тогда цепь P^* $(i \dots i_o, P_1, j \dots j_o)$ соединяет вершины i и j. Если P^* содержит второе удаленное ребро, то аналогично находим обходную цепь P_2.

Оказывается, что справедливо и следующее обобщение предложения 7°.

8°. Если в связном однородном степени k $(k \geq 3)$ графе G ребра могут быть окрашены в k цветов (раскраска правильная) и затем удалены любые $k-1$ ребра разного цвета, то полученный граф G^* (сурграф графа G) остается связным.

Задания для исследования.

1. Докажите это предложение, используя обобщение доказательства предложения 7°.
2. Придумайте содержательные задачи, для решения которых можно воспользоваться предложением 8°.
3. Проверьте справедливость предложения 8° для случая $k = 2$.
4. Задайте другую правильную раскраску ребер графа G (рис. 4) в три цвета и проверьте справедливость предложения 7°, удалив одну из пар разноцветных ребер.
5. Постройте связный бикубический граф на $p = 8$, найдите правильную раскраску его ребер в три цвета и проверьте справедливость предложения 7°.

6. Будет ли верным предложение 7°, если удалять два ребра одного цвета?

7. Будет ли верным предложение 7°, если удалять три ребра: а) разных цветов? б) одного цвета?

Задача 2. В регионе $2n$ населенных пунктов, связанных такой сетью дорог, что пары населенных пунктов соединены не более чем одной дорогой и из каждого населенного пункта выходит ровно три дороги. Проводится тендер по обслуживанию всех участков дорог. В тендере участвуют три компании, но по условиям тендера участки дорог, выходящие из каждого населенного пункта, должны обслуживаться разными компаниями. Доказать, что тендерная комиссия может выбрать такие $n+1$ участков дорог, что, распределив их между этими тремя компаниями, она автоматически распределит для обслуживания и все остальные участки дорог или выяснит, что трех компаний для проведения тендера недостаточно.

Решение этой задачи опирается на следующее предложение.

9°. Если G — кубический граф на $2n$ вершинах, то можно так выбрать $n+1$ ребро, чтобы правильная их раскраска в три цвета однозначно определит правильную раскраску в эти три цвета оставшихся ребер графа G, а, следовательно, всего графа G или покажет, что такой раскраски не существует. Иллюстрация этого предложения и его доказательства представлена на рисунке 6.

Доказательство. Число ребер этого графа $q(G) = 3n$, рис. 6 а). Пусть T — сурграф графа G, являющийся деревом[3], его еще называют *покрывающим деревом*, рис. 6 б). Число его ребер $q(T) = p-1 = 2n-1$, а G_1 — граф удаленных ребер, которые называют хордами. Число его ребер $q(G_1) = q(G) - q(T) = 3n - (2n-1)$, то есть $q(G_1) = n+1$.

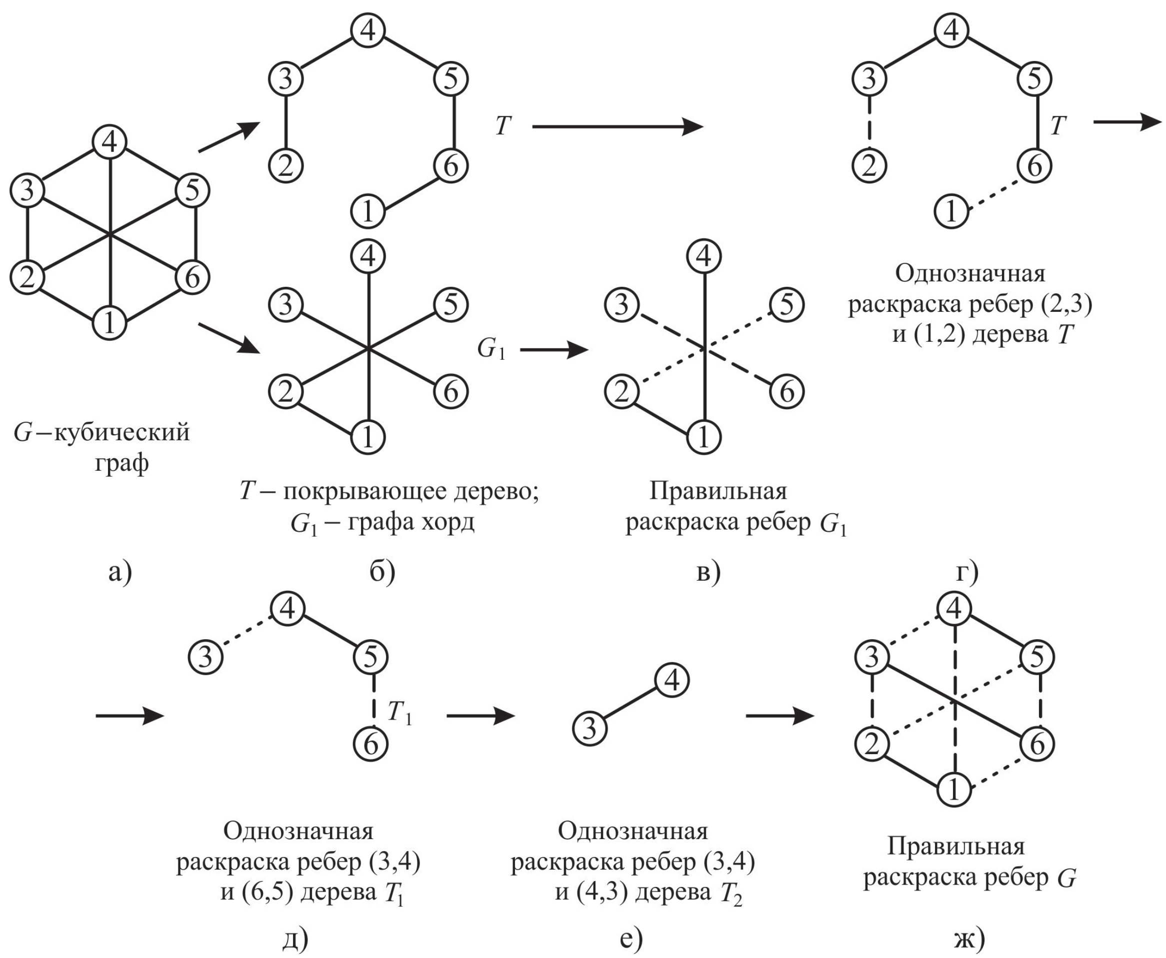


Рис. 6.

[3]Дерево — это связный, в котором нет циклов.

Задаем правильную раскраску ребер G_1 в три цвета, рис. 6 в). Это всегда возможно. Раскрасим ребра, исходящие из висячих вершин покрывающего дерева T, рис. 6 г). Так как по два ребра в G, исходящие из данных вершин уже окрашены, то раскраска этих ребер определяется однозначно. Удаляем из дерева T эти ребра и в получившемся дереве T_1 однозначно раскрашиваем ребра, исходящие из его висячих вершин, рис. 6 д). Повторяя этот процесс, получим либо дерево из одной вершины, либо дерево, состоящее из двух вершин, рис. 6 е). В первом случае требуемая раскраска ребер графа G получена. Во втором случае возможны два варианта:

1) раскраска ребра с концами в этих двух висящих вершинах возможна, то есть требуемая раскраска ребер графа G получена;

2) раскраска ребра с концами в этих двух висячих вершинах невозможна, следовательно, раскраска ребер графа G в три цвета невозможна. То есть для этого графа G хроматический индекс $\chi_1(G) = 1 + \triangle(G) = 4$.

Задания для исследования.

1. Используя алгоритм из приведенного доказательства, получите правильную раскраску ребер графа куба в три цвета.

2. Используя алгоритм из приведенного доказательства, покажите, что для графа Петрсена [4, 5] не существует правильной раскраски его ребер в три цвета. Получите правильную раскраску его ребер в четыре цвета.

3. Необходимо ли, чтобы в предложении 9° граф G был связным?

Задача 3. Связная дорожная сеть некоторого региона устроена так, что из каждого населенного пункта, кроме трех “особых”, исходит ровно по три участка дорог, а из каждого «особого» пункта ровно по одному участку. Проводится тендер по обслуживанию этих участков дорог. В тендере участвуют три компании, а по условиям тендера участки дорог, выходящие из каждого населенного пункта, должны обслуживаться разными компаниями. Доказать, что при любом решении тендерной комиссии участки дорог, исходящие из «особых» населенных пунктов, должны обслуживаться разными компаниями.

Решение данной задачи можно свести к доказательству следующего предложения.

10°. Если в связном графе G три вершины имеют степень, равную единице, то есть являются висячими вершинами, а остальные вершины имеют степень, равную трем, то при любой правильной раскраске ребер этого графа в три цвета, ребра, исходящие из висячих вершин, должны быть окрашены в разные цвета. Иллюстрация этого предложения и его доказательства представлена на рисунке 7.

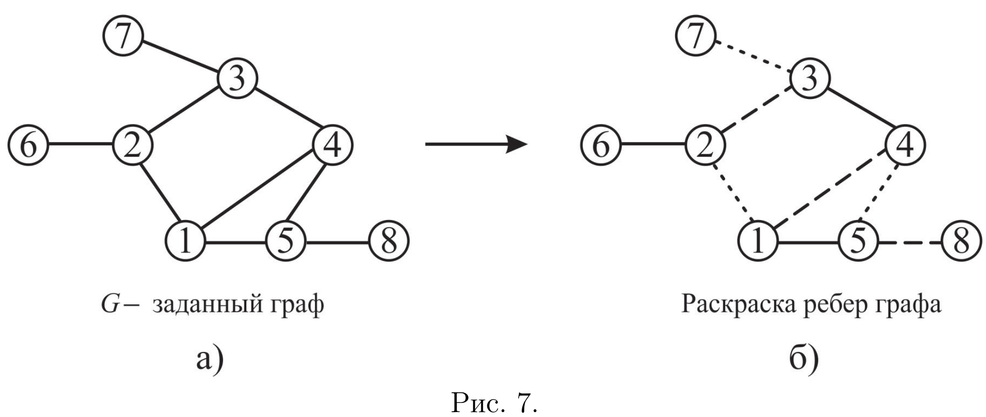


Рис. 7.

Доказательство. Так как все вершины имеют нечетную степень, то их число четно (см. 2°), то есть число вершин $p = 2n$, а число ребер $q = \frac{1}{2}(3(2n-1)+3) = 6n$ (см. 1°). Поскольку все вершины, кроме висячих, имеют степень, равную трем, то при любой правильной раскраске ребер число ребер каждого из трех цветов равно $2n$. Пусть G^* — подграф графа G, полученный удалением висячих вершин. Число его вершин $p^* = 2n - 3$, а число ребер $q^* = 6n - 3$. Для G^* при любой правильной раскраске ребер число ребер каждого из трех цветов равно $2n - 1$. Следовательно, каждое из трех ребер, исходящих из трех висящих вершин графа G, должно быть раскрашено в свой цвет.

Задания для исследования.

Проведите исследование на конкретных примерах справедливость обобщений предложения 10°:

а) если степени всех вершин связного графа, кроме четырех “особых”, равна 4, а четыре “особые” вершины, имеют степень, равную единице, то при любой правильной раскраске ребер этого графа в четыре цвета, ребра, исходящие из висячих вершин, должны быть окрашены в разные цвета;

б) если степени всех вершин связного графа, кроме n “особых”, равны n, а четыре “особые” вершины, имеют степень, равную единице, то при любой правильной раскраске ребер этого графа в n цветов, ребра, исходящие из висячих вершин, должны быть окрашены в разные цвета.

Задача 4. В некотором регионе с развитой инфраструктурой любые два из $2n$ $(n \geq 2)$ населенных пунктов связаны напрямую ровно одной дорогой. В целях борьбы с коррупцией по условиям тендера на обслуживание дорог их участки, выходящие из любого населенного пункта, должны обслуживаться разными компаниями, а для удобства контроля за качеством обслуживания необходимо, чтобы для любых двух компаний существовал замкнутый маршрут по дорогам, обслуживаемым этими компаниями, проходящий через каждый населенный пункт ровно один раз. Возможно ли проведение тендера на этих условиях?

11° Для любого полного графа K_{2n} $(n \geq 2)$ существует такая правильная раскраска его ребер в $2n - 1$ цветов, что для любой пары цветов существует цикл, состоящий из ребер этих двух цветов и содержащий каждую вершину этого графа ровно один раз. Такой цикл называется *гамильтоновым*.

На рисунке 8 приведен пример, иллюстрирующий задачу 4, предложение 11°, а также конструктивную часть его доказательства.

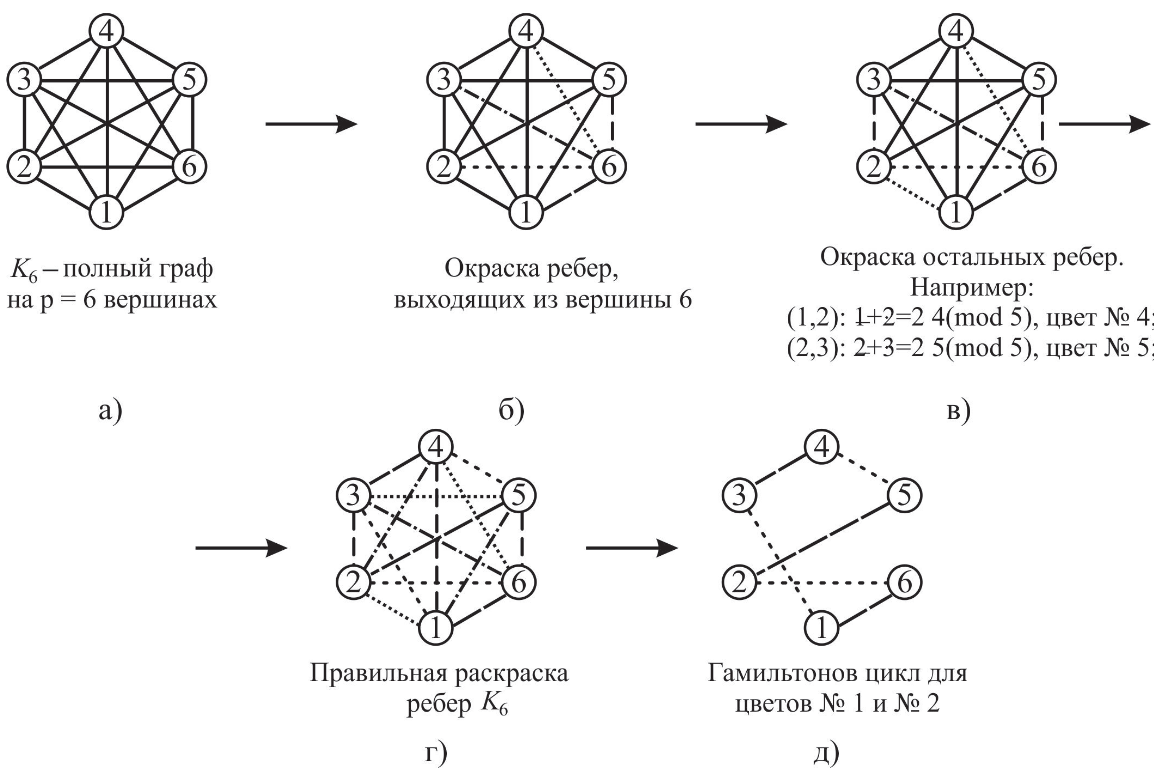


Рис. 8.

Доказательство. Из предложения 6° следует, что для графа K_{2n} существует правильная раскраска его ребер в $2n - 1$ цветов. Таким образом, доказательство предложения состоит из двух частей. Конструктивная часть доказательства: задается алгоритм этой правильной раскраски ребер в $2n-1$ цвета:

а) ребра $(2n;\, i)$, где $i = \overline{1,\, 2n-1}$ окрасим в цвет i;

б) ребра $(i;\, j)$ окрасим в такой цвет t, что $1 \leq t \leq 2n-1$ и $2t \equiv i+j \pmod{2n-1}$ — такое значение t существует и притом только одно;

в) таким образом, получаем раскраску всех ребер для $K2n$.

2. Необходимо доказать, что полученная раскраска является искомой:

а) Раскраска является правильной, то есть любые два ребра, исходящие из одной вершины, окрашены в разный цвет.

б) Двуцветные сурграфы графа определяют гамильтонов цикл. Так как эти сурграфы являются однородными степени два, то остается показать, что они являются связными. Предлагаем читателям доказать это самостоятельно.

Используя утверждение 11°, можно доказать следующие предложения.

12° а) Ребра полного графа K_{2n} $(n \geq 2)$ с четным числом вершин можно разложить на $n-1$ гамильтоновых циклов и n ребер, не имеющих общих вершин.

б) Ребра полного графа K_{2n+1} $(n \geq 2)$ с нечетным числом вершин можно разложить на n гамильтоновых циклов.

На рисунке 9 приведены примеры, иллюстрирующие эти предложения.

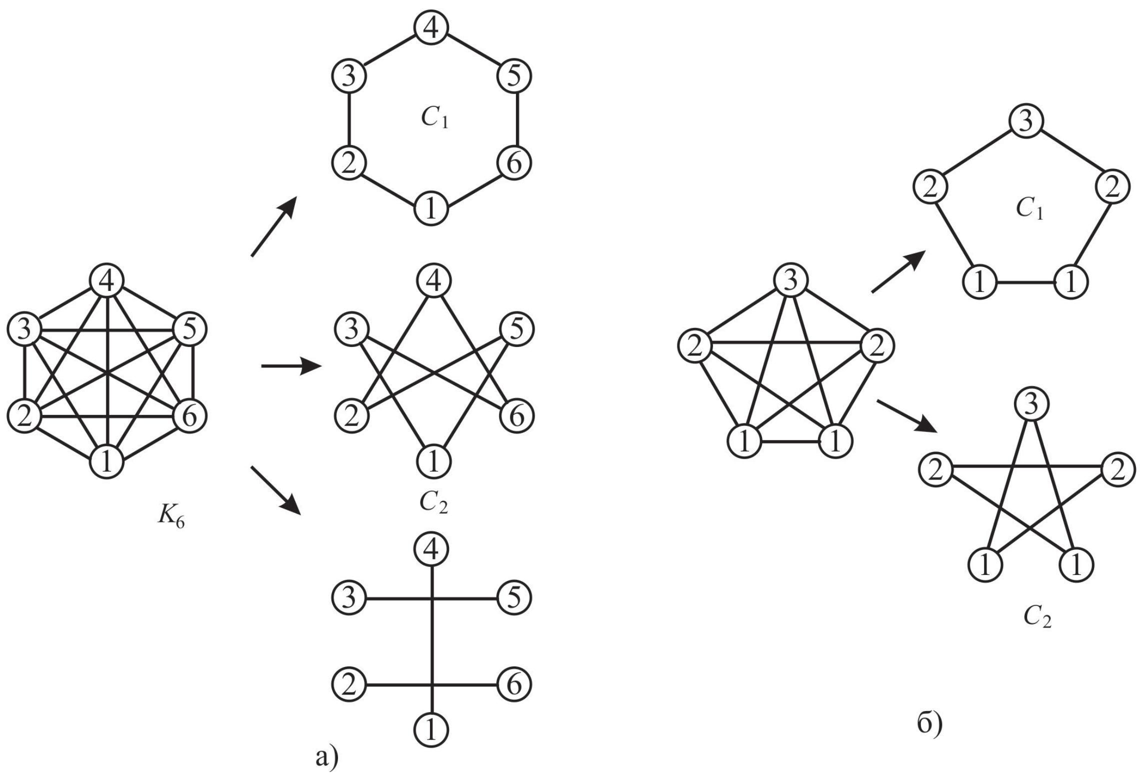


Рис. 9.

В качестве самостоятельного исследования можно предложить следующие задания.

Задания для исследования.

1. Проиллюстрируйте предложение 11° на полном графе K_8.

2. Докажите предложения 12° а), б).

3. Придумайте задачи, решение которых сводится к предложениям 12° а), б).

Для выбора тем для дальнейших исследований можно использовать олимпиадные задачи о графах из [3, 6].

Литература

[1] Акбердин Р.А., Шмигирилова И.Б. Раскраска ребер графов и связность одноцветных сурграфов // Математика для школьников. - 2025. - № 1.

[2] Клауди Альсина. Карты метро и нейронные сети. Теория графов. - М.: DeAgostini, 2014. - 144 с.

[3] Мельников О.И. Занимательные задачи по теории графов. - Минск: «ТетраСистемс», 2001. - 144 с.

[4] Оре О. Графы и их применение. - М.: Мир, 1965. - 175 с.

[5] Уилсон Р. Введение в теорию графов. - М.: Мир, 1977. - 205 с.

[6] Фомин Д.В. Санкт-Петербургские математические олимпиады. - СПб.: Политехника, 1994. - 309 с.

Акбердин Рифкат Абдуллович,
заслуженный профессор кафедры "Математика и информатика" Северо-Казахстанского университета им. М. Козыбаева, г. Петропавловск, Казахстан, доцент.

E-mail: akberdin47@mail.ru

Шмигирилова Ирина Борисовна,
профессор кафедры «Математика и информатика», Северо-Казахстанского университета им. М. Козыбаева, г. Петропавловск, Казахстан, кандидат педагогических наук, доцент.

E-mail: irinankzu@mail.ru

Сравнения по модулю в решениях олимпиадных задач

А. Н. Афанасьев

В статье изложены начала теории сравнений и показано ее применение для решения олимпиадных задач.

Определение и основные свойства

Далее, если только это не оговорено, речь будет идти о целых числах.

Определение 1. Если a и b целые числа, а m — натуральное число, то запись $a \equiv b \pmod{m}$ (читается: a сравнимо с b по модулю m) означает, что числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на m.

Например, так как числа 7, 10, 1 и -2 имеют остаток 1 при делении на 3, то верны сравнения

$$7 \equiv 10 \equiv 1 \equiv -2 \pmod{3}.$$

Легко проверить, что $a \equiv b \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда $a - b$ кратно m.

Из определения следует, что отношение сравнения по модулю является отношением эквивалентности. То есть, для любых целых чисел a, b, c и натурального числа m верны утверждения:

$$a \equiv a \pmod{m}, \tag{1}$$

$$\text{если } a \equiv b \pmod{m}, \text{ то } b \equiv a \pmod{m}, \tag{2}$$

$$\text{если } a \equiv b \pmod{m} \text{ и } b \equiv c \pmod{m}, \text{ то } a \equiv c \pmod{m}. \tag{3}$$

Также, из определения, легко выводятся следующие четыре свойства, которые мы назовем *основными свойствами сравнений по модулю.*

Свойство 1. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ (сравнения по одному и тому же модулю можно складывать друг с другом);

Свойство 2. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$ (сравнения по одному и тому же модулю можно умножать друг на друга).

Свойство 3. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, $(n \in N)$ (сравнение можно возвести в любую натуральную степень).

Для доказательства этого свойства, необходимо вспомнить бином Ньютона. Если $a = b + km$, то

$$a^n = (b+km)^n = b^n + \binom{n}{1} b^{n-1}(km) + \cdots + \binom{n}{n-1} b(km)^{n-1} + (km)^n \equiv b^n \pmod{m},$$

так как, начиная со второго, члены бинома кратны m.

Свойство 4. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $ka \equiv kb \pmod{m}$, $(k \in \mathbb{Z})$ (сравнение можно умножить на любое целое число).

Свойство 5. К любой из частей сравнения $a \equiv b \pmod{m}$ можно прибавить целое число, кратное модулю, то есть, если числа t_1 и t_2 — произвольные целые числа, кратные m, то

$$(a + t_1) \equiv (b + t_2) \pmod{m}.$$

Из этих свойств и равенств (1), (2) и (3) легко получить еще несколько полезных свойств.

Из свойства 1 и равенства (1) получаем

Свойство 6. К обеим частям сравнения $a \equiv b \pmod m$ можно прибавить одно и то же число c :

$$(a+c) \equiv (b+c) \pmod m$$

Из определения, свойства 2 и равенства (1) получаем

Свойство 7. Обе части сравнения $a \equiv b \pmod m$ и модуль m можно умножить на одно и то же целое положительное число q : $aq \equiv bq \pmod{mq}$.

Для деления, в отличие от умножения, правила, подобные Свойствам 2, 4 и 7, не всегда работают. Сравнения, вообще говоря, нельзя делить друг на друга или на другие числа. Пример: $14 \equiv 20 \pmod 6$, однако, сократив сравнение на 2, мы получаем ошибочное сравнение: $7 \equiv 10 \pmod 6$. Тем не менее, в некоторых случаях, сокращение сравнений возможно.

Свойство 8. Можно делить обе части сравнения на число, но только взаимно простое с модулем: если $ad \equiv bd \pmod m$ и НОД$(d, m) = 1$, то $a \equiv b \pmod m$.

Примеры

Для решения первых трех примеров достаточно знать основные свойства сравнений. Это примеры из книги [15].

Пример 1. Докажите что число $2^{70} + 3^{70}$ кратно 13.

Доказательство. Заметим, что $2^7 = 128 \equiv -2 \pmod{13}$ и $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$. Следовательно, учитывая что $(-2)^{10} = 1024 = 8 \cdot 13 + 10$, $2^{70} + 3^{70} = \left(2^7\right)^{10} + \left(3^3\right)^{23} \cdot 3 \equiv (-2)^{10} + 1^{23} \cdot 3 \equiv 10 + 3 \equiv 0 \pmod{13}$.

Пример 2. Докажите, что для любого натурального n: $2^{5n+1} + 5^{n+2} \,\vdots\, 27$.
Доказательство. Так как $32 = 5 + 27$, то $2^{5n+1} + 5^{n+2} = 32^n \cdot 2 + 5^n \cdot 25 \equiv 5^n \cdot 2 + 5^n \cdot 25 \equiv 5^n \cdot 27 \equiv 0 \pmod{27}$.

Пример 3. Докажите, что для любого натурального n: $4^{2n} - 3^{2n} - 7 \,\vdots\, 84$.
Доказательство. Пусть $f(n) = 4^{2n} - 3^{2n} - 7$. Тогда:

$$f(n) \equiv 4^{2n} - 7 \equiv 1^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod 3 \tag{4}$$
$$f(n) \equiv -3^{2n} - 7 \equiv -(-1)^{2n} - 7 \equiv -1 - (-1) \equiv 0 \pmod 4 \tag{5}$$
$$f(n) \equiv 4^{2n} - 3^{2n} \equiv (-3)^{2n} - 3^{2n} \equiv 0 \pmod 7 \tag{6}$$

Из (4), (5) и (6) следует, что $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ кратно $3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$.

Обратите внимание: при решении последней задачи, оказалось полезным то, что

$$4 \equiv (-3) \pmod 7.$$

Как видим, запись решений получается компактной.

Для решения следующих примеров, наряду с основными свойствами сравнений по модулю, могут понадобиться свойства 6 и 7.

Пример 4. Про целое число a известно, что $a \equiv 1 \pmod 2$ и $a \equiv 4 \pmod 5$. Докажите, что $a \equiv 9 \pmod{10}$.

Доказательство. По свойствам 7 и 2:

$$a \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow 5a \equiv 5 \pmod{10} \tag{7}$$

и

$$a \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow 2a \equiv 8 \pmod{10} \Rightarrow 4a \equiv 16 \pmod{10}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует: $5a - 4a = a \equiv 5 - 16 \equiv -11 \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}$.

Наиболее часто встречающиеся на олимпиадах теоремы теории чисел

В последнее время на олимпиадах по математике нередко встречаются задачи из области теории чисел, рассчитанные на знание теорем, не входящих в курс школьной математики. Мы посчитали необходимым привести формулировки наиболее часто встречающихся таких теорем.

Определение 2. *Функция Эйлера* $\varphi(n)$ — арифметическая функция, равная количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним. При этом полагают по определению, что число 1 взаимно просто со всеми натуральными числами, и $\varphi(1) = 1$.

Например, для числа 12 существует 4 меньших его и взаимно простых с ним чисел: 1, 5, 7, 11. Поэтому $\varphi(12) = 4$. Если p — простое число, то очевидно $\varphi(p) = p - 1$, а чтобы найти $\varphi(p^n)$, из множества $\{1, 2, \ldots, p^n\}$ (p^n чисел) надо исключить числа $p, p^2, \ldots, p^n$ (n чисел). Следовательно $\varphi(p^n) = (p^n - n)$. А так как функция φ мультипликативна, то если $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \cdots \cdot p_n^{k_n}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — простые делители числа a, то $\varphi(a) = (p_1^{k_1} - k_1)(p_2^{k_2} - k_2) \ldots (p_n^{k_n} - k_n)$.

Теорема 1 (Теорема Эйлера). *Если* $(a, m) = 1$, *то* $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Например, так как $(35, 12) = 1$ и $\varphi(12) = 4$, то по Теореме Эйлера должно быть $35^4 \equiv 1 \pmod{12}$. И действительно, $35^4 = 1500625 \equiv 25 \equiv 1 \pmod{12}$.

Из Теоремы Эйлера следует Малая теорема Ферма.

Теорема 2 (Малая теорема Ферма) *Если a —целое, p —простое и a не кратно p, то*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{9}$$

Известна и другая формулировка этой теоремы.

Теорема 3 (Малая теорема Ферма 2) *Если a —целое, p —простое, то*

$$a^p \equiv a \pmod{p}. \tag{10}$$

В отличие от первой формулировки теоремы, при второй формулировке, теорема верна для любого целого a. Сравните при $a = 6,\ p = 2:$

$$6^{2-1} = 6 \not\equiv 1 \pmod{2}, \text{ в то время, как } 6^2 = 36 = 15 \cdot 2 + 6 \equiv 6 \pmod{2}$$

Доказательство. Доказательство второго варианта теоремы индукцией по a.

1. Так как $1^p = 1 \equiv 1 \pmod{p}$, то для $a = 1$ теорема верна.

2. Предположим, что
$$a^p \equiv a \pmod{p}. \tag{11}$$
Тогда, учитывая бином Ньютона,

$$(a + 1)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} + \binom{p}{2} a^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1} a + 1 \equiv a^p + 1 \pmod{p},$$

а учитывая индуктивное предположение (11), получаем $(a + 1)^p \equiv a + 1 \pmod{p}$.

Первый же вариант теоремы является следствием второго варианта.

Теорема 4 (Китайская теорема об остатках). *Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — попарно взаимно простые натуральные числа (то есть $(m_i, m_j) = 1$ при $i \neq j$) и $M = m_1 m_2 \ldots m_n$. Тогда, каковы бы ни были целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, система сравнений*

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \ldots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

имеет единственное решение $x \equiv a \pmod M \quad (0 \le x < M)$, *где*

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i M_i \mu_i,$$

и

$$M_i = \frac{M}{m_i}, \quad M_i \cdot \mu_i \equiv 1 \pmod{m_i}.$$

Например, рассмотрим систему сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 2 \pmod 4 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases} \tag{12}$$

Заметим, что система удовлетворяет условиям китайской теоремы об остатках, и

$$M = 60, M_1 = 20, M_2 = 15, M_3 = 12, \mu_1 = 2, \mu_2 = 3, \mu_3 = 3.$$

Следовательно, так как

$$a = 1 \cdot 20 \cdot 2 + 2 \cdot 15 \cdot 3 + 3 \cdot 12 \cdot 3 = 40 + 90 + 108 = 238,$$

то число 58 является единственным решением системы (12).

Решение олимпиадных задач с применением сравнений по модулю

В качестве примеров предлагаем задачи из различных математических олимпиад. Сокращения названий этих олимпиад приводим ниже:

- ММО — Московская математическая олимпиада;
- ВСМО — Всесоюзная математическая олимпиада;
- ВРМО — Всероссийская математическая олимпиада;
- СПбМО — Санкт-Петербургская математическая олимпиада;
- IMO — International Mathematical Olympiad
- CGMO — China Girls Mathematical Olympiad;
- CWMO — China Western Mathematical Olympiad;
- USAMO — United States of America Mathematical Olympiad;
- CMC(E) — China Mathematical Competition (Extra Test);
- RMM — Romanian Master of Mathematics;
- IrMO — Irish Mathematical Olympiad.

1. (IMO1964) [13].

(а) Найдите все положительные целые числа n, для которых $2^n - 1$ кратно 7.

(б) Докажите, что не существует положительного целого числа n, при котором число $2^n + 1$ кратно 7. (Чехословакия)

Решение. (а) Ответ: $n = 3k(k \in \mathbb{N})$.

$$n = 3k(k \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2^n - 1 \equiv \left(2^3\right)^k - 1 \equiv 1^k - 1 \equiv 0 \pmod 7; \tag{13}$$

$$n = 3k + 1(k \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2^n - 1 \equiv \left(2^3\right)^k \cdot 3 - 1 \equiv 3 - 1 \equiv 2 \pmod 7; \tag{14}$$

$$n = 3k + 2(k \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2^n - 1 \equiv \left(2^3\right)^k \cdot 9 - 1 \equiv 2 - 1 \equiv 1 \pmod 7. \tag{15}$$

Следовательно, любое положительное целое число, кратное 3, и только оно, удовлетворяет условию задачи.

(б) Из (13), (14) и (15) следует, что

$$2^n + 1 = (2^n - 1) + 2 \not\equiv 0 \pmod 7. \qquad \square$$

2. (ММО2019) [9].

Найдите наименьшее натуральное число n, для которого $n^2+20n+19$ делится на 2019. (Д.Э. Шноль)

Решение. Ответ: $n = 2000$.

Запишем условие в виде сравнения:

$$f(n) = n^2 + 20n + 19 \equiv 0 \pmod{2019}.$$

Тогда, так как $2019 = 3 \cdot 673$ (3 и 673 взаимно просты) и

$$n^2 + 20n + 19 = (n + 1)^2 + 18(n + 1) = (n + 1)(n + 19),$$

то $f(n) \equiv 0 \pmod{2019}$ тогда и только тогда, когда либо

$$f(n) \equiv n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 \equiv 0 \pmod 3, \tag{16}$$

либо

$$f(n) = (n + 1)(n + 19) \equiv 0 \pmod{673}. \tag{17}$$

Первое сравнение (по модулю 3) имеет единственное решение -1, а второе сравнение (по модулю 673) имеет два решения: -1 и -19. Учитывая, что числа 3 и 673 простые и $-19 \equiv -1 \pmod 3$, получаем, что $n \equiv -1 \pmod{2019}$ или $n \equiv -19 \pmod{2019}$, откуда и следует, что искомое число равно $2019 - 19 = 2000$. $\square$

3. (ММО 1982)[10, с. 145].Найти все натуральные числа n, для которых число $n \cdot 2^n + 1$ кратно трем.

Решение. Ответ: Все числа вида $6k + 1$ и $6k + 2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

В книге [10] приведен только ответ. Приводим свой вариант решения. Пусть $f(n) = n \cdot 2^n + 1$. Заметим,что

$$f(0) = 1 \not\equiv 0 \pmod 3,\quad f(1) = 3 \equiv 0 \pmod 3,\quad f(2) = 9 \equiv 0 \pmod 3,$$
$$f(3) = 25 \not\equiv 0 \pmod 3,\quad f(4) = 65 \not\equiv 0 \pmod 3,\quad f(5) = 161 \not\equiv 0 \pmod 3,$$
$$f(6) = 365 \not\equiv 0 \pmod 3,\quad f(7) = 897 \equiv 0 \pmod 3.$$

Это дает нам гипотезу, что

$$3|f(n) \Leftrightarrow n \in \{6k + 1, 6k + 2 : k = 0, 1, 2, \ldots\}$$

. Проверим:

$$6k \cdot 2^{6k} + 1 \equiv 1 \pmod 3;$$
$$(6k+1) \cdot 2^{6k+1} + 1 = 6k \cdot 2^{6k+1} + 4^{3k} \cdot 2 + 1 \equiv 0 + 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3;$$
$$(6k+2) \cdot 2^{6k+2} + 1 = 6k \cdot 2^{6k+2} + 2 \cdot 4^{3k} \cdot 4 + 1 \equiv 0 + 8 + 1 \equiv 0 \pmod 3;$$
$$(6k+3) \cdot 2^{6k+3} + 1 = 3(2k+1) \cdot 2^{6k+3} + 1 \equiv 0 + 1 \equiv 1 \pmod 3;$$
$$(6k+4) \cdot 2^{6k+4} + 1 = 6k \cdot 2^{6k+4} + 4^{3k+2} \cdot 4 + 1 \equiv 0 + 4 + 1 \equiv 2 \pmod 3;$$

$$(6k+5) \cdot 2^{6k+4} + 1 = 6k \cdot 2^{6k+5} + 4^{3k+2} \cdot 2 \cdot 5 + 1 \equiv 0 + 10 + 1 \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 3).$$ □

4. (IrMO1996)[1, с. 24].Пусть p — простое число, а a и n — положительные целые числа. Докажите, что если

$$2^p + 3^p = a^n,$$

то $n = 1$.

Решение. Отредактированное решение из [4].

Если $p = 2$, так как $2^2 + 3^2 = 13$, то $n = 1$. Если $p > 2$, то p нечетно и $2^p + 3^p$ кратно 5 $(2 + 3 = 5)$. Следовательно a кратно 5. Теперь, если $n > 1$, то a^n кратно 25.

С другой стороны, если $p \neq 5$, то сравнение

$$\frac{2^p + 3^p}{5} = \frac{2^p + 3^p}{2+3} = 2^{p-1} - 2^{p-2} \cdot 3 + \cdots - 2 \cdot 3^{p-2} + 3^{p-1} \equiv$$
$$\equiv 2^{p-1} - 2^{p-2} \cdot (5-2) + \cdots - 2 \cdot (5-2)^{p-2} + (5-2)^{p-1} \equiv p2^{p-1} \equiv 0 \pmod 5,$$

противоречит тому, что $p \neq 5$. То есть $n = 1$.

Если же $p = 5$, то число $2^5 + 3^5 = 753 \neq a^n$ не является степенью (более первой) ни для какого натурального a, и опять $n = 1$.

5. (IMO 1975)[13, с. 285].Пусть A —сумма цифр в десятичной записи числа 4444^{4444}, а B — сумма цифр числа A (A и B также рассматриваются в десятичной записи). Найдите сумму цифр числа B. (СССР)

Решение. Ответ: 7

Заметим, что поскольку $4444^{4444} < 10000^{4444} = 10^{4 \cdot 4444} = 10^{17776}$, то $A \leq 17776 \cdot 9 = 159984$.

Следовательно, если A — шестизначное число, то $B \leq 1 + 5 + 9 + 9 + 9 + 9 = 42$, а если A — пятизначное число, то $B \leq 45$. Поэтому, обозначив сумму цифр числа B через C, получим

$$C < 4 + 9 = 13. \tag{18}$$

Заметим, что сумма цифр числа дает тот же остаток что и само число. Отсюда

$$4444^{4444} \equiv C \pmod 9. \tag{19}$$

С другой стороны, $4444 \equiv 7 \ (\mathrm{mod}\ 9)$ и поэтому $4444^{4444} \equiv 7^{4444} \equiv (-2)^{4444} \ (\mathrm{mod}\ 9)$. Поэтому

$$4444^{4444} \equiv (-2)^{3 \cdot 1481} \cdot 7 \equiv (-8)^{1481} \cdot 7 \equiv 1^{1481} \cdot 7 \equiv 7 \pmod 9.$$

Отсюда, учитывая (18) и (19) получаем, что $C = 7$. □

6. (CGMO2012)[6, с. 190].Найдите все пары (a, b) целых чисел, удовлетворяющих следующему условию: существует целое число $d > 1$ такое, что $a^n + b^n + 1$ делится на d при любом целом положительном n.

Решение. Если $a + b$ нечетно, то $a^n + b^n + 1$ четно при любом n, и следовательно $d = 2$.

Если $a + b$ четно, то $a^n + b^n + 1$ нечетно при любом n, и следовательно d должно быть нечетно.

Так как $d \mid a+b+1$, $(a+b+1)^2 = a^2+b^2+1+2(a+b+1)-2(ab-1)$ и $d \mid a^2+b^2+1$, то $d \mid 2(ab-1)$, т. е. $d \mid ab-1$. Так как $a^3+b^3+1 = (a+b)(a^2+b^2-ab)+1 \equiv (-1)(-1-1)+1 \equiv 3 \pmod{d}$ и $d \mid a^3+b^3+1$, то $d \mid 3$, или $d=3$.

Так как $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab \equiv -1-2 \equiv 0 \pmod 3$, то $a \equiv b \equiv 1 \pmod 3$. Следовательно, для любого целого положительного n :

$$a^n + b^n + 1 \equiv 1+1+1 \equiv 0 \pmod 3.$$

Суммируя вышесказанное, утверждаем, что условиям задачи удовлетворяют пары

$$(2k,\ 2l+1),\ (2k+1,\ 2l),\ (3k+1,\ 3l+1),$$

где k и l — целые числа, и только они. □

7. (IMO2005). Найдите все положительные целые числа, которые взаимно просты с каждым членом бесконечной последовательности

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \ (n = 1, 2, \dots).$$

Решение. Ответ: единственное такое число — 1.

[5, с. 261]. Сначала мы докажем, что для фиксированного простого p $(p \geq 5)$,

$$2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1 \equiv 0 \pmod p. \tag{20}$$

Так как p простое, не меньшее 5, то $(2,p)=1$, $(3,p)=1$, и $(6,p)=1$. По малой Теореме Ферма:

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod p, 3^{p-1} \equiv 1 \pmod p, 6^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Следовательно:

$$3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} \equiv 3+2+1 \equiv 6 \pmod p,$$

т. е.

$$6 \cdot 2^{p-2} + 6 \cdot 3^{p-2} + 6 \cdot 6^{p-2} \equiv 6 \pmod p.$$

Последнее сравнение равносильно

$$2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1 \equiv 0 \pmod p$$

Таким образом, для любого простого $p \geq 5$ a_{p-2} кратно p. А так как $a_1 = 10$ и $a_2 = 48$ соответственно кратны 2 и 3, то не существует натурального числа, большего 1 и взаимно простого со всеми членами данной последовательности.

8. (USAMO1998) Предположим, что множество $\{1, 2, \dots, 1998\}$ разбито на не пересекающиеся пары $\{a_i, b_i\}$ $(1 \leq i \leq 999)$ так, что для всех i, $|a_i - b_i|$ равно 1 или 6. Докажите, что сумма

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_{999} - b_{999}|$$

оканчивается на цифру 9.

Решение. Пусть $S = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_{999} - b_{999}|$. Тогда, так как $|a_i - b_i| \equiv 1 \pmod 5$ $(1 \leq i \leq 999)$:

$$S = \sum |a_i - b_i| \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 \equiv 999 \equiv 4 \pmod 5.$$

Так как для любых целых чисел a и b $|a-b| \equiv a-b \equiv a+b \pmod 2$:

$$S \equiv \sum (a_i + b_i) \equiv 1 + 2 + \cdots + 1998 \equiv 999 \cdot 1999 \equiv 1 \pmod 2.$$

Следовательно, по китайской теореме об остатках, $S \equiv 9 \pmod{10}$.

9. (ВМО1980) Двузначные числа, от от 19 до 80 выписаны подряд. Делится ли получившееся число 192021...7980 на 1980?

Решение. Приводим решение из [8, с. 139],отредактированное с применением сравнений по модулю. Так как $1980 = 20 \cdot 99$, причем 20 и 99 не имеют общих делителей, то достаточно выяснить, делится ли данное число $A = 192021\ldots 7980$ на 20 и 99. Делимость A на 20 очевидна. Докажем, что A делится на 99. Так как $100 \equiv 1 \pmod{99}$, то

$$A = 19 \cdot 100^{61} + 20 \cdot 100^{60} + \cdots + 79 \cdot 100 + 80 \equiv 19 + 20 + \cdots + 79 + 80 \equiv 99 \cdot 31 \equiv 0 \pmod{99}.$$

Следовательно, число A делится на 20 и 99, а значит и на 1980.

10. (ВМО1984)[8, с. 43].Натуральное число назовем *абсолютно простым*, если оно простое и при любой перестановке его цифр получается простое число. Доказать, что абсолютно простое число не может содержать в своей записи более трех различных цифр.

Решение. Приводим решение из [8, с. 166],переведенное на язык сравнений по модулю.

Пусть M — абсолютно простое число, имеющее в своей записи более трех знаков. Тогда, как легко видеть, в его записи не может встретиться ни одна четная цифра, а также цифра 5. Если бы такая цифра была, то, переставив ее на последнее место, мы получили бы составное число. Следовательно, в записи числа M могут встретиться только цифры 1, 3, 7, 9. Предположим, что все они в записи числа M присутствуют. Переместив их на последние позиции, мы получим абсолютно простые числа

$$M_1 = M + 1379,\ M_2 = M + 3179,\ M_3 = M + 9137,\ M_4 = M + 7913,$$
$$M_5 = M + 1397,\ M_6 = M + 3197,\ M_7 = M + 7139,$$

где $M = \overline{a_1 a_2 \ldots a_m 0000}$.

Пусть $M \equiv m \pmod 7$. Тогда:

$$M_1 \equiv m + 0 \pmod 7,\ M_2 \equiv m + 1 \pmod 7,\ M_3 \equiv m + 2 \pmod 7,$$
$$M_4 \equiv m + 3 \pmod 7,\ M_5 \equiv m + 4 \pmod 7,\ M_6 \equiv m + 5 \pmod 7,\ \ M_7 \equiv m + 6 \pmod 7.$$

Как видим, числа M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 и M_7, при делении на 7 дают семь разных остатков. Следовательно среди них найдется число кратное 7, противоречие!

11. (ВМО1972)[11, с. 41].Доказать, что при каждом натуральном n, число

$$1^{1987} + 2^{1987} + \cdots + n^{1987}$$

не делится на $n + 2$.

Решение. Приводим решение из [11, с. 219],переведенное на язык сравнений по модулю.

При $n = 1$ верность утверждения очевидна. Пусть $n \geq 2$. Обозначим $a_n = 1^{1987} + 2^{1987} + \cdots + n^{1987}$. Тогда, поскольку при каждом $k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n$

$$k^{1987} + (n - k + 2)^{1987} \equiv k^{1987} + (-k)^{1987} \equiv 0 \pmod{n + 2},$$

$$2a_n = 1^{1987} + (2^{1987} + n^{1987}) + (3^{1987} + (n - 1)^{1987}) + \cdots + (n^{1987} + 2^{1987}) + 1^{1987} \equiv$$
$$\equiv 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + 1 \equiv 2 \pmod{n + 2}.$$

Следовательно $a_n \not\equiv 0 \pmod{n + 2}$.

12. (ВМО1997)[7, с. 21]. Даны натуральные числа m и n. Докажите, что число $2n - 1$ делится на число $(2m - 1)^2$ тогда и только тогда, когда число n делится на число $m(2^m - 1)$.

Решение. [7, с. 147]. Из равенства

$$2^{kn} - 1 = (2^n - 1)(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \cdots + 1)$$

следует, что $2^{kn}-1$ делится на 2^n-1, поэтому $2^{kn+d}-1 = 2^{kn+d}-2^d+2^d-1 = 2^d(2^{kn}-1)+2^d-1 \equiv 2^d-1 \pmod{2^n-1}$. Таким образом 2^n-1 делится на 2^m-1 тогда и только тогда, когда n делится на m. Если $n = km$, то

$$\frac{2^{km}-1}{2^m-1} = 1 + 2^m + \cdots + 2^{m(k-1)} \equiv 1 + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{k-1} \equiv k \pmod{2^m - 1}.$$

Поэтому $2^{km}-1$ делится на $(2^m-1)^2$ тогда и только тогда, когда $k = \dfrac{n}{m}$ делится на 2^m-1, что равносильно тому, что n делится на $m(2^m-1)$.

13. (СПбМО1967)[14, с. 47]. Даны последовательные нечетные числа p и q. Докажите, что p^p+q^q делится на $p+q$.

Решение. [14, с. 185]. Пусть $p = 2k-1$, $q = 2k+1$, k — натуральное. Тогда $p+q = 4k$ и так как $p = p+q-q$, то

$$\begin{aligned} p^p + q^q \equiv (-q)^p + q^q = q^p(q^2-1) = q^p(q-1)(q+1) = q^p 2k(2k+2) = \\ = q^p 4k(k+1) = q^p(p+q)(k+1) \equiv 0 \pmod{p+q}. \end{aligned}$$

Значит, p^p+q^q делится на $p+q$.

14. (СПбМО1969)[14, с. 54]. $K > 1$ — натуральное число. Последовательность (x_n) строится следующим образом: $x_1 = 1$, $x_2 = K$, $x_n = Kx_{n-1} - x_{n-2}$ при $n > 2$. Докажите, что для любого натурального n существует такое $m > n$, что x_m делится на x_n.

Решение. В [14] приводится только краткое указание. Мы приводим развернутое решение задачи. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть натуральное число a таково, что $x_{n-1} \equiv -a \pmod{x_n}$. Тогда*

$$x_{n+l} \equiv ax_l.$$

Доказательство Леммы. Будем доказывать индукцией по l.

(1) При $l = 1$ и $l = 2$:

$$x_{n+1} \equiv Kx_n - x_{n-1} \equiv a \equiv ax_1 \pmod{x_n};\quad x_{n+2} \equiv Kx_{n+1} - x_n \equiv Ka \equiv ax_2 \pmod{x_n}.$$

(2) Сделаем следующее индуктивное предположение:

$$x_{n+k} \equiv ax_k \pmod{x_n}; \tag{21}$$
$$x_{n+k+1} \equiv ax_{k+1} \pmod{x_n}. \tag{22}$$

Тогда, учитывая (21) и (22),

$$x_{n+k+2} = Kx_{n+k+1} - x_{n+k} \equiv Kax_{k+1} - ax_k \equiv a\,(Kx_{k+1} - x_k) \equiv ax_{k+2}. \tag{23}$$

Лемма доказана.

Теперь, из леммы следует, что

$$x_{2n} = x_{n+n} \equiv ax_n \pmod{x_n},\ \ n = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, x_{2n} делится на x_n.

15. (СПбМО1993)[14, с. 167]. В двух урнах лежит $2p+1$ шар. Каждую секунду половина шаров из одной урны, где лежит четное количество шаров, перекладывается в другую урну. Пусть $k < 2p+1$ — некоторое натуральное число и известно, что числа p и $2p+1$ — простые. Докажите, что рано или поздно в одной из урн будет ровно k шаров.

Решение. [14, с. 285]. Перейдем в арифметику остатков по модулю $2p+1$. Пусть x — число шаров в первой урне, а y — во второй. Тогда каждую секунду пара $(x,\ y)$ меняется на пару $(x/2,\ y/2)$ (не забывайте, что мы рассматриваем лишь остатки по модулю $2p+1$; ясно, что $y=-x$). Пусть m — наименьшее натуральное число такое, что $2^m \equiv 1 \pmod{2p+1}$. Тогда остатки $1, 2, \ldots, 2p$ распадаются на группы по m остатков вида

$$\{x,\ x/2,\ x/4,\ \ldots\ x/2^{m-1}\},\ \ \{2p+1-x,\ 2p+1-x/2,\ 2p+1-x/4,\ \ldots\ 2p+1-x/2^{m-1}\},$$

а значит, $2p$ делится на m, т. е. $m \in \{1,\ 2,\ p,\ 2p\}$. Случаи $m=1,\ 2$ очевидны (условие задачи не выполнимо). Если $m=2p$, то числа x и k входят в одну группу и, значит через несколько секунд в первой урне будет ровно k шаров.

Если же $m=p$, то число $(-1) \equiv 2p \pmod{2p+1}$ входит в группу отличную от той, куда входит 1. В самом деле, если $2^r \equiv -1 \pmod{2p+1}$ для какого-то натурального r, то $2^{2r} \equiv 1 \pmod{2p+1}$, и тогда $2r$ делится на $m=p$, т. е. r делится на p. Но тогда $2^r \equiv 2^p \equiv 1 \pmod{2p+1}$ — противоречие! Отсюда следует, что остатки k и $(-k)$ входят в разные группы (их всего две) и поэтому x находится в одной группе с одним из них, что нам и требуется.

16. (CMC(E)2003)[5, с. 56] Пусть три стороны треугольника выражены целыми числами l, m, n, удовлетворяющими условиям $l > m > n$ и $\left\{\dfrac{3^l}{10^4}\right\} = \left\{\dfrac{3^m}{10^4}\right\} = \left\{\dfrac{3^n}{10^4}\right\}$, где $\{x\} = x - [x]$ и $[x]$ обозначает целую часть числа x. Найдите минимальный периметр такого треугольника.

Решение. Так как

$$\frac{3^l}{10^4} - \left[\frac{3^l}{10^4}\right] = \frac{3^m}{10^4} - \left[\frac{3^m}{10^4}\right] = \frac{3^n}{10^4} - \left[\frac{3^n}{10^4}\right],$$

то

$$3^l \equiv 3^m \equiv 3^n \pmod{10^4},$$

и следовательно,

$$\begin{cases} 3^l \equiv 3^m \equiv 3^n \pmod{2^4} \\ 3^l \equiv 3^m \equiv 3^n \pmod{5^4} \end{cases} \tag{24}$$

Так как числа 2 и 3 взаимно просты, из (24) следует, что $3^{l-n} \equiv 3^{m-n} \equiv 1 \pmod{2^4}$.

Пусть u — наименьшее положительное целое число, удовлетворяющее условию $3^u \equiv 1 \pmod{2^4}$. Тогда для любого положительного целого числа v, удовлетворяющего условию $3^v \equiv 1 \pmod{2^4}$, $u \mid v$. Так как

$$3 \equiv 3 \pmod{2^4},\ \ 3^2 \equiv 9 \pmod{2^4},\ \ 3^3 \equiv 27 \equiv 11 \pmod{2^4},\ \ 3^4 \equiv 1 \pmod{2^4},$$

то $u=4$. Пусть $m-n=4k$, где k — положительное целое число.

Аналогично, из (24), получим, что $3^{4k} \equiv 1 \pmod{5^4}$.

Теперь будем искать, чему равно k. Так как $3^{4k} = 81^k = (1+5\cdot 2^4)^k$, и

$$\begin{aligned} 3^{4k}-1 &\equiv 5k\cdot 2^4 + \frac{k(k-1)}{2}\cdot 5^2\cdot 2^8 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\cdot 5^3\cdot 2^{12} \equiv \\ &\equiv 5k + 5^2k(3+(k-1)2^7) + \frac{k(k-1)(k-2)}{2}\cdot 5^3\cdot 2^{11} \equiv 0 \pmod{5^4}, \end{aligned} \tag{25}$$

то $k = 5t$. Подставляя в сравнение (25) $5t$ вместо k , получим:

$$t + 5t(3 + (5t - 1) \cdot 128) = t + 5t(5t \cdot 128 - 125) = t + 5^2t(128t - 25) \equiv 0 \pmod{5^2} \Rightarrow t = 5^2s, k = 5^3s.$$

Следовательно $m - n = 500s$, где s — положительное целое число. Аналогично получим, что $l - n = 500r$ где r целое положительное число, и $r > s$ так как $l > m > n$.

Таким образом, длины трех сторон треугольника соответственно равны $l = 500r+n$, $m = 500s+n$ и n, удовлетворяющим условию $n > l-n = 500(r-s)$. При $r = 2, s = 1, n = 501$ получим наименьший периметр для такого треугольника, равный $(1000 + 501) + (500 + 501) + 501 = 3003$. □

17. (IMO2024)[12]. Найдите все действительные числа α такие, что для любого положительного целого n целое число

$$\lfloor\alpha\rfloor + \lfloor 2\alpha\rfloor + \lfloor 3\alpha\rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha\rfloor$$

кратно n. (Здесь $\lfloor z\rfloor$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее z. Например, $\lfloor -\pi\rfloor = -4$ и $\lfloor 2\rfloor = \lfloor 2{,}9\rfloor = 2$.)

Решение. Ответ: α — любое целое четное число.

Приводим решение из [2]. Пусть $S(n, \alpha)$ — сумма из условия задачи.

Случай, когда α целое число. Если α целое, то сумма равна

$$S(n, \alpha) = (1 + 2 + \cdots + n)\alpha = \frac{n(n + 1)}{2} \cdot \alpha$$

и кратна n если $2 \mid \alpha$; если α — нечетное целое число, то $n = 2$ является контрпримером.

Докажем, что для любого $\alpha \notin \mathbb{Z}$ существует целое положительное число n, для которого:

$$S(n, \alpha) \not\equiv 0 \pmod{n}. \tag{26}$$

Так как для любого целого числа k и для любого действительного числа α

$$\lfloor k(\alpha \pm 2)\rfloor = \lfloor k\alpha\rfloor \pm 2k,$$

то, если α не является целым,

$$S(n, \alpha \pm 2) - S(n, \alpha) = \pm 2(1 + 2 + \cdots + n) = \pm n(n + 1) \equiv 0 \pmod{n}$$

для любого n. Таким образом,

$$S(n, \alpha) \equiv S(n, \alpha_0) \pmod{n}$$

для некоторого α_0, где $-1 < \alpha_0 < 1$. Следовательно, нам достаточно доказать (26) для случая $-1 < \alpha < 1$.

- Если $0 < \alpha < 1$, пусть $n \geq 2$ — наименьшее целое число, такое, что $n\alpha \geq 1$. Тогда

$$S(n, \alpha) = \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n-1 \text{ слагаемых}} + 1 = 1 \not\equiv 0 \pmod{n}.$$

- Если $-1 < \alpha < 0$, то пусть $n \geq 2$ наименьшее целое число, такое, что $n\alpha \leq -1$. Тогда

$$S(n, \alpha) = \underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{n-1 \text{ слагаемых}} + 0 = -(n - 1) \not\equiv 0 \pmod{n}.$$

Таким образом, α — целые четные числа, и только они. □

18. (СПбМО2020) Последовательность a_n задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $a_{n+2} = a_n(a_{n+1}+1)$ при $n \geq 1$. Докажите, что a_{a_n} делится на $(a_n)^n$ при $n \geq 100$.

Решение. Пусть простое число p входит в a_n в k-й степени. Докажем, что a_{a_n} делится на p^{kn} . Тогда утверждение задачи будет выполнено.

Пусть a_i — первое число в нашей последовательности, кратное p. Если $p \neq 2$, то $i > 2$ и $a_i = a_{i-2}(a_{i-1}+1)$. Следовательно,

$$a_{i-1} \equiv -1 \pmod p.$$

Заметим, что для $p = 2$ будет $i = 2$, и выведенное сравнение тоже выполнено.

Итак, $a_{i-1} \equiv -1$, $a_i \equiv 0$, а дальше в последовательности чередуются остатки -1 и 0 от деления на p: $a_{i+1} = a_{i-1}(a_i+1) \equiv -1 \cdot (0+1) \equiv -1 \pmod p$, $a_{i+2} = a_i(a_{i+1}+1) \equiv 0 \cdot (-1+1) \equiv 0 \pmod p$ и т.д. Более того, как видно из последнего вычисления, степени числа p, на которые делятся члены последовательности, растут: если a_i делилось на p, то a_{i+2} делится на p^2 и т.д. Отсюда следует, что если a_n делится на p^k, то a_{n+2t} делится на p^{k+t}. Кроме того, учтем, что числа a_n и n одинаковой четности, поскольку $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и остатки по модулю 2 чередуются. Следовательно, a_{a_n} делится на $p^{k+(a_n-n)/2}$. Остается заметить, что $a_n > 2^n$ при $n \geq 5$ (это значит, что a_n существенно крупнее n) и $a_n \geq 2^k$, так как делится на p^k (это значит, что a_n существенно крупнее k), поэтому $a_n - n > 2kn$, откуда следует требуемое.

19. (CWMO2012)[6, с. 230] Найдите все положительные целые числа m, такие, что для любого простого числа $p > 3$

$$105 | 9^{p^2} - 29^p + m.$$

Решение. Ответ: 20. Так как $105 = 3 \times 5 \times 7$, задача сводится к тому, что надо найти все положительные целые числа m, такие, что число $9^{p^2} - 29^p + m$ делилось и на 3 и на 5 и на 7.

Так как p и p^2 имеют одинаковую четность, то

$$9^{p^2} - 29^p + m \equiv (-1)^{p^2} - (-1)^p + m \equiv m \pmod 5.$$

Следовательно, $m \equiv 0 \pmod 5$.

Так как $p > 3$ — нечетное число, то

$$9^{p^2} - 29^p + m \equiv -(-1)^p + m \equiv m + 1 \pmod 3.$$

Следовательно, $m \equiv 2 \pmod 3$.

Так же $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ для $p > 3$ или $p^2 = 3k + 1$. Следовательно,

$$9^{p^2} - 29^p + m \equiv 2^{3k+1} - 1 + m \equiv 8^k \cdot 2 - 1 + m \equiv m + 1 \pmod 7.$$

Следовательно, $m \equiv 6 \pmod 7$.

Получается

$$\begin{cases} m \equiv 0 \pmod 5 \\ m \equiv 2 \pmod 3 \\ m \equiv 6 \pmod 7. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $m = 20$.

20. (CMO2000/01)[3, с. 36] Пусть a, b, c, $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ и $a+b+c$ — семь различных простых чисел, таких, что $a+b = 800$. Найдите наибольшее значение разности между наибольшим и наименьшим из этих семи чисел.

Решение. [3, с. 167] Пусть $a < b$. Заметим, что $a + b = 800 \equiv 2 \pmod 3$. Предположим, что $a \equiv 0 \pmod 3$ и $b \equiv 2 \pmod 3$. Тогда $a = 3$ и $c \not\equiv 0 \pmod 3$. Если $c \equiv 1 \pmod 3$, то $a + b + c \equiv 0$

(mod 3), что противоречит различности семи чисел. Если же $c \equiv 2$, то $c + a - b \equiv 0 \pmod 3$, что опять приводит к противоречию. Следовательно, должно быть $a \neq 3$, $c \equiv 2 \pmod 3$.

Теперь $a+b-c \equiv 0 \pmod 3$ — простое число. Следовательно, оно равно 3 и является наименьшим из наших семи чисел. Получается, что $c = 800 - 3 = 797$ (797 — простое число), и искомая разность равна

$$(a + b + c) - (a + b - c) = 2c = 1594.$$

Заметим, что если $a = 7$ и $b = 793$, то 3, 7, 11,793, 797, 1571 и 1597 — наши семь различных простых чисел.

Литература

[1] Dukes Mark. The Irish Mathematical Olympiads Compendium 1988 – 2024. - University College Dublin, 2025. - 85 с.

[2] Evan Chen. Olympiad Problems and Solutions. URL: https://web.evanchen.cc/problems.html

[3] Liu A., ред. Chinese Mathematics Competitions and Olympiads. Т. 2. - AMT Publishing, 2005. - 175 с.

[4] Mathematical Olympiads 1996-1997. 1998.
URL: https://igor-kortchemski.perso.math.cnrs.fr/olympiades/Problemes/mc96-97-01feb.pdf

[5] Xiong Bin., Lee P.Y., ред. Mathematical Olympiad in China (2003–2006): problems and solutions. - World Scientific Publishing Co. Ltd, 2007. - 274 с.

[6] Xiong Bin., Lee P.Y., ред. Mathematical Olympiad in China (2011-2014): problems and solutions. Т. 15. - World Scientific Publishing Co. Ltd, 2017. - 369 с.

[7] Агаханов Н.Х. и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006: Окружной и финальный этап. - М.: МЦНМО, 2007. - 472 с.

[8] Агаханов Н.Х. и др. Математические олимпиады школьников 9. - М.: Просвещение, 1997. - 208 с.

[9] Бакаев Е.В. и др. LXXI Московская математическая олимпиада, задачи и решения. - М.: Издательство МЦНМО, 2019. - 60 с.

[10] Гальперин Г.А., Толпыго А.К.. Московские математические олимпиады. - М.: Просвещение, 1986. - 303 с.

[11] Купцов Л.П. и др. Математические олимпиады школьников 10. - М.: Просвещение, 1998. - 256 с.

[12] Международные математические олимпиады. URL: https://www.imo-official.org/?language=ru

[13] Морозова Е.А., Петраков И.С., Скворцов В.А. Международные математические олимпиады. 4-е изд, испр. и доп. - М.: Просвещение, 1976. - 288 с.

[14] Фомин Д.И. Санкт-Петербургские математические олимпиады. - М.: МЦНМО, 1994. - 309 с.

[15] Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач. - М.: Просвещение, 1989. - 252 с.

Афанасьев Александр Николаевич,
доцент кафедры теории и методики обучения
математике и информатике Института
математики и информатики Северо-Восточного
Федерального Университета им. М.К. Аммосова,
г. Якутск, кандидат педагогических наук.

E-mail: an.afanasev@s-vfu.ru, afalnik@mail.ru

Бесполезные формулы

М. А. Горелов

В статье излагаются элементы теории уравнений третьей степени. От читателя не требуется знаний, выходящих за пределы школьной программы за одним исключением: знание некоторых свойств комплексных чисел или готовность принять их на веру необходимо.

1. Введение

В своем очень кратком очерке истории математики [1] С.П. Новиков как главное достижение математики XVI века выделил решение уравнений третьей и четвертой степени. Эта точка зрения является общепринятой [2, 3]. Между тем ни полученные в то время формулы Кардано для корней уравнений третьей степени, ни метод Феррари для уравнений четвертой степени при решении уравнений практически не применяются. Мне приходилось видеть лишь несколько примеров в учебной литературе, которые приводились исключительно для того, чтобы продемонстрировать, что с помощью этих формул какие-то уравнения действительно можно решить.

Парадокс объясняется просто. В данном случае идеи, приведшие к получению окончательного результата, важнее самого результата. А этих идей оказалось на удивление много.

Кажется, С. Маклейн заметил [4], что новые идеи по-настоящему осознаются не тогда, когда они впервые появляются, или когда их проще всего заметить, а тогда, когда без них уже невозможно обойтись. В связи с рассматриваемыми задачами оформились, по меньшей мере, две таких идеи.

Вполне логично выглядит появление *комплексных чисел* в связи с решением квадратных уравнений. Но достаточно полная и стройная теория квадратных уравнений может быть развита без использования этого понятия, как это делается, например, в курсе средней школы. И история пошла нелогичным путем. Квадратные уравнения умели решать вавилонские математики еще до начала нашей эры. И на протяжении многих веков о мнимых корнях таких уравнений речь даже не заходила. А вот развивать теорию уравнений третьей степени без комплексных чисел крайне неудобно, если вообще возможно. И комплексные числа «изобрели»[1] именно в связи с решением кубических уравнений! Процесс их признания проходил долго и болезненно. Есть мнение, что он не закончился до сих пор [1]. Но влияние этого изобретения на прогресс математики трудно переоценить.

Другое «изобретение», появившееся после и вследствие решения кубического уравнения, — понятие *группы*. С группами целых чисел по сложению и положительных рациональных чисел по умножению люди имели дело с глубокой древности. Со времен Платона изучались правильные многогранники, которые выделяются среди прочих наличием «больших» групп симметрий. Примеры можно продолжать. Но понятия группы в этой связи не возникало. Оно появилось лишь в теории уравнений, причем, совсем не очевидным образом.

Этому, вероятно, способствовал исторический контекст, в котором были придуманы методы решения уравнений третьей и четвертой степеней. Эти методы в известном смысле являются наследием «олимпиадной» математики. Дело в том, что в XVI веке были популярны математические турниры, на которых участники предлагали друг другу сложные математические задачи [5]. Для таких турниров задачи на решение уравнений очень удобны[2]. Дело в следующем. Проверить, что данное число является корнем какого-то уравнения гораздо проще, чем найти решение того же уравнения[3]. Поэтому можно подтвердить «корректность» вызова, не раскрывая метода решения задачи, а на следующем турнире предложить аналогичные задачи. В этой связи не удивительно, что после

[1]Кстати, и отрицательные числа стали употреблять более широко в связи с кубическими уравнениями.
[2]и совершенно не годятся для тестов, которые недавно входили в ЕГЭ.
[3]Факт существования таких задач сыграл большую роль в теории алгоритмов [6].

обнародования методов решения уравнений третьей и четвертой степеней возникла задача найти аналогичный метод для уравнений пятой степени. Эта задача очень долго не поддавалась решению. Мода на турниры прошла, а задача осталась. И лишь в XIX веке удалось доказать, что решить задачу в принципе невозможно. И в этом доказательстве без понятия группы не обойтись (по крайней мере, пока иного способа не найдено).

Есть и много других идей, возникших в связи с решением кубических уравнений. Может быть, они не столь значимы, но до сих пор применяются в самых разных областях математики (см., например, [7, 8, 9]).

На сегодняшний день нет недостатка в книгах и статьях, содержащих вывод формул для корней кубических уравнений [13, 14, 15, 16, 17, 18][4]. Но по большей части они очень краткие. И, в основном, они нацелены на дальнейшее изучение теории Галуа. По этой причине основной акцент делается на теоретико-групповых идеях, а о других за недостатком места не рассказывается. В данной статье я постарался рассказать об этих идеях, избегая теоретико-групповых соображений. Тому есть две причины. Во-первых, о «групповых» доказательствах есть, где прочитать. А, во-вторых, на мой взгляд, теоретико-групповые идеи гораздо сложнее для молодого читателя.

Я старался изложить материал так, чтобы он был доступен школьникам, даже не самых старших классов. Единственное исключение — комплексные числа. Об их свойствах нужно иметь какое-то представление. Но зато я нигде не пользуюсь соображениями непрерывности. В конце разделов приводятся комментарии, требующие бо́льшей подготовки. Но они не обязательны для понимания основного текста

Кроме того, я буду использовать утверждение о том, что каждый многочлен имеет хотя бы один корень[5]. В прежние времена это утверждение называлось «основной теоремой алгебры». Его доказательство можно прочесть, например, в [19]. Впрочем, к обсуждению этой темы мы еще вернемся.

Поскольку, как отмечалось, в данном случае идеи важнее конечного результата, я не отказывался от возможности посмотреть на один предмет с разных сторон, когда такая возможность представлялась.

Непосредственным поводом для написания данной статьи послужила работа [20], из которой я заимствовал одну идею. По физтеховской привычке я сначала решил задачу, а потом стал смотреть, что в этом направлении уже сделано. Это нашло отражение в стиле статьи. Можно было бы изложить материал более последовательно, но при этом стал бы не виден путь, на котором было найдено решение. Я предпочел этого не делать.

2. Основная идея

Начнем с рассмотрения примера.

Задача 1 (Задачник «Кванта», M821). Решите уравнение $x^3+x^2+x=-\frac{1}{3}$.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$3x^3+3x^2+3x+1=0,\ \ 2x^3+(x^3+3x^2+3x+1)=0,\ \ 2x^3+(x+1)^3=0,\ \ 2x^3=-(x+1)^3.$$

Отсюда $\sqrt[3]{2}x=-(x+1)$ и $x=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$.

Функция $y=2x^3+(x+1)^3$, возрастает. Поэтому рассматриваемое уравнение имеет один действительный корень. Его мы и нашли. В данном случае нетрудно найти и комплексные корни.

Пусть ε — отличное от единицы число, удовлетворяющее условию $\varepsilon^3=1$, например, $\varepsilon=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. Тогда число $\varepsilon^2=\frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ также удовлетворяет условию $\left(\varepsilon^2\right)^3=1$, а равенство $2x^3=-(x+1)^3$ равносильно совокупности трех уравнений $\sqrt[3]{2}x=-(x+1)$, $\sqrt[3]{2}x=-\varepsilon(x+1)$ и $\sqrt[3]{2}x=-\varepsilon^2(x+1)$. Отсюда легко находятся еще два корня $\frac{-\varepsilon}{\sqrt[3]{2}+\varepsilon}$ и $\frac{-\varepsilon^2}{\sqrt[3]{2}+\varepsilon^2}$.

[4]Оригинальная книга Джироламо Кардано доступна сейчас и в исходном виде [11] (на латыни), и в английском переводе [12].

[5]Это утверждение будет использовано только для многочленов второй и третьей степени.

Задача полностью решена. На первый взгляд, это просто милый пустячок, основанный на использовании специально подобранных коэффициентов уравнения. Но, развивая эту идею, можно найти решение общего уравнения третьей степени.

Подумаем, какие уравнения можно решить, используя ту же идею? Понятно, что так же решается любое уравнение вида $\alpha x^3 + \beta(x+\gamma)^3 = 0$. А при каком условии уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ может быть приведено к такому виду?

Раскрывая скобки, убедимся, что должны выполняться условия

$$a = 3\beta\gamma, b = 3\beta\gamma^2, c = \beta\gamma^3. \tag{1}$$

Отсюда

$$3ac = 3(3\beta\gamma)(\beta\gamma^3) = 9\beta^2\gamma^4 = (3\beta\gamma^2)^2 = b^2.$$

Таким образом, получаем необходимое условие $b^2 = 3ac$.

Покажем, что это условие является достаточным. Пусть числа a, b и c удовлетворяют равенству $b^2 = 3ac$. Из первых двух уравнений системы (1) получим

$$b = a\gamma, \gamma = \frac{b}{a}, \beta = \frac{a}{3\gamma} = \frac{a^2}{3b}.$$

Положим еще $\alpha = 1 - \beta = 1 - \frac{a^2}{3b}$. Тогда непосредственно проверяется, что

$$\alpha x^3 + \beta(x+\gamma)^3 = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Если условие $b^2 = 3ac$ выполнено, то уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет корень

$$\frac{-\sqrt[3]{\beta}\gamma}{\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}} = \frac{-\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{3b}} \cdot \frac{b}{a}\right)}{\left(\sqrt[3]{\frac{3b-a^2}{3b}} + \sqrt[3]{\frac{a^2}{3b}}\right)} = -\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{b^2}{3a}}\right)}{\left(\sqrt[3]{\frac{3b-a^2}{3b}} + \sqrt[3]{\frac{a^2}{3b}}\right)} = \frac{-b}{\sqrt[3]{3ab - a^3} + a}.$$

Можно переписать эту формулу в ином виде, избавившись от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{-\sqrt[3]{\beta}\gamma}{\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}} = \frac{-\sqrt[3]{\beta}\gamma\left(\sqrt[3]{\alpha^2} - \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2}\right)}{\alpha + \beta} = -\gamma\left(\sqrt[3]{\alpha^2\beta} - \sqrt[3]{\alpha\beta^2} + \beta\right) =$$

$$= -\frac{b}{a}\left(\sqrt[3]{\frac{(3b-a^2)^2a^2}{(3b)^3}} - \sqrt[3]{\frac{(3b-a^2)a^4}{3b^3}} + \frac{a^2}{3b}\right) = \frac{1}{3}\left(-\sqrt[3]{\frac{(3b-a^2)^2}{a}} + \sqrt[3]{(3b-a^2)a} - a\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\sqrt[3]{\frac{(a^2-3b)^2}{a}} - \sqrt[3]{(a^2-3b)a} - a\right).$$

Таким образом, мы имеем целый класс уравнений, которые мы умеем решать. Дальше можно попробовать найти замену переменной, при которой заданное уравнение приводится к какому-то уравнению из этого класса. Прежде чем заниматься этим, сделаем некоторые заготовки.

Упражнение 1. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, чтобы умножением на константу из него можно было получить возвратное уравнение?

Комментарий. Похожий метод был предложен в [20] для решения уравнений четвертой степени. Суть состоит в том, чтобы найти класс уравнений, которые допускают «простое» решение, а также замену переменных, сводящую общее уравнение к уравнению из этого класса. Казалось бы, все просто. Но не всякий класс уравнений в данном случае годится. Например, возвратные уравнения для наших целей не подходят, хотя класс возвратных уравнений «не меньше» чем рассматриваемый нами класс. Далее эта тема достаточно подробно обсуждается в упражнениях.

3. Теорема Безу

Рассмотрим многочлен[6] $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Используя стандартные формулы сокращенного умножения получим

$$f(x) - f(t) = x^3 + ax^2 + bx + c - (t^3 + at^2 + bt + c) = (x^3 - t^3) + a(x^2 - t^2) + b(x - t) =$$

$$= (x - t)(x^2 + xt + t^2) + a(x - t)(x + t)) + b(x - t) = (x^2 + (t + a)x + (t^2 + at + b))(x - t).$$

Отсюда следует, что если t — корень многочлена $f(x)$, т.е. $f(t) = 0$, то $f(x)$ делится на $x - t$ (это означает, что существует такой многочлен $g(x)$, что $f(x) = g(x)(x - t)$). Доказанное утверждение носит название *теоремы Безу*.

Из полученных формул сразу следует, что если многочлен $f(x)$ имеет действительные коэффициенты и корень t тоже действительный, то частное от деления $f(x)$ на $x-t$ тоже имеет действительные коэффициенты.

Перепишем доказанное равенство в виде

$$f(x) = (x^2 + (t + a)x + (t^2 + at + b))(x - t) + f(t).$$

Тогда можно сказать, что остаток от деления $f(x)$ на $(x - t)$ равен $f(t)$. В таком виде доказанное утверждение тоже бывает полезно.

Пусть теперь многочлен $f(x)$ имеет два корня: x_1 и $x_2 \neq x_1$. Согласно доказанному, существует такой многочлен $g(x)$, что $f(x) = g(x)(x-x_1)$. Тогда $g(x_2)(x_2-x_1) = f(x_2) = 0$. Поскольку $x_2-x_1 \neq 0$, отсюда следует, что $g(x_2) = 0$. Согласно известному утверждению о квадратных трехчленах (которое доказывается дословно так же, как для кубических многочленов), существует такой многочлен $h(x)$, что $g(x) = h(x)(x - x_2)$. Отсюда $f(x) = h(x)(x - x_1)(x - x_2)$, т.е. многочлен $f(x)$ делится на произведение $(x - x_1)(x - x_2)$.

Нетрудно понять, что тогда частное $h(x)$ — это многочлен первой степени со старшим коэффициентом, равным 1, т.е. $h(x) = x - x_3$. Таким образом, $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Из доказанного, в частности, следует, что многочлен третьей степени не может иметь более трех различных корней. Можно сформулировать то же утверждение несколько иначе. Пусть $f(x)$ — многочлен, степень которого не превосходит трех. Если $f(x)$ равняется нулю при четырех разных значениях аргумента, то многочлен тождественно равен нулю.

Обратим внимание на частное $x^2 + (t + a)x + (t^2 + at + b)$ от деления $f(x) - f(t)$ на $x - t$. При $x = t$ оно равно $3t^2 + 2at + b$. Это — *производная* многочлена $f(x)$ в точке $x = t$.

До введения понятия *предела* Огюстеном Коши производная именно так и определялась. В общем случае это определение логически не совсем корректно, но в случае многочленов оно вполне годится. С минимальными изменениями все сказанное годится для произвольных многочленов. Все свойства производных выводятся из этого определения без больших проблем.

Для конкретного случая кубического многочлена из теоремы Безу можно сделать еще один существенный вывод. Обычно задача «решить уравнение» означает «найти все корни уравнения». В случае кубических многочленов это практически то же, что найти хотя бы один корень уравнения. В самом деле, если x_1 — это один корень уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, то, чтобы найти остальные корни этого уравнения, достаточно решить квадратное уравнение $x^2 + (x_1 + a)x + (x_1^2 + ax_1 + b) = 0$, а это уже — дело техники.

Сказанное относится и к случаю, когда имеющиеся в нашем распоряжении средства ограничены, а именно, нужно решить уравнение «в радикалах». Действительно, если корень x_1 найден с помощью алгебраических операций и извлечения корней, то коэффициенты уравнения

[6] Все полученные далее результаты переносятся на случай общего многочлена третьей степени. Почти всегда это делается очевидным образом.

$x^2+(x_1+a)x+(x_1^2+ax_1+b)=0$ будут найдены с помощью одних только алгебраических операций, а чтобы решить это уравнение, потребуется, кроме алгебраических операций, еще одно извлечение квадратного корня.

Упражнения

2. Разложите на множители $(a+b)^3-a^3-b^3$.

3. Решите уравнение $x^3-a^3-b^3-3abx=0$.

4. Доказать, что многочлен третьей степени с целыми коэффициентами, принимающий при $x=0$ и $x=1$ нечетные значения, не имеет целых корней.

5. Доказать, что многочлен третьей степени с целыми коэффициентами, принимающий при $x=0$ и $x=1$ нечетные значения, не имеет рациональных корней.

6. Пусть $f(x)$ многочлен третьей степени с целыми коэффициентами и числа $f(0), f(1), f(2)$ не делятся на 3. Докажите, что этот многочлен не имеет целых корней.

7. Пусть $f(x)$ — многочлен третьей степени с целыми коэффициентами и числа $f(0), f(1), f(2)$, $f(3)$ дают одинаковые ненулевые остатки при делении на 13. Докажите, что этот многочлен не имеет целых корней.

8. Пусть $f(x)$ — многочлен третьей степени с целыми коэффициентами и числа $f(0), f(1), f(2)$, $f(3)$ не делятся на 5. Может ли многочлен $f(x)$ иметь целый корень?

Комментарий. Можно дать два разных определения нулевого многочлена. Можно сказать, что многочлен нулевой, если все его коэффициенты равны нулю. А можно сказать, что многочлен нулевой, если все его значения равны нулю. Когда речь идет о многочленах над полем комплексных (или действительных) чисел, то эти два определения равносильны. В одну сторону это почти очевидно. Обратное утверждение доказано выше даже в более сильной форме. В случае других полей эти два определения могут быть не эквивалентны.

4. Формулы Виета

Мы считаем известным, что многочлен $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ имеет корень.

Тогда из теоремы Безу следует, что он имеет три корня, и, следовательно, может быть записан в виде $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ (числа x_1, x_2, x_3 не обязательно различны). Раскрыв скобки и сравнив коэффициенты при степенях переменной, получим формулы

$$x_1+x_2+x_3=-a, \quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b, \quad x_1x_2x_3=-c.$$

Эти формулы носят название *формул Виета.*

Упражнения

9. Какими должны быть числа a и b, чтобы выполнялось равенство

$$x^3+px+q=x^3-a^3-b^3-3abx?$$

10. Пусть a, b, c — попарно различные числа. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=0, \\ x+by+b^2z+b^3=0, \\ x+cy+c^2z+c^3=0. \end{cases}$$

11. Докажите тождество $(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+(ab+ac+bc)(a+b+c)-3abc=0$.

12. (Московская олимпиада, 1937 г.) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$$

13. Для любого натурального n докажите тождество

$$(a^{n+3}+b^{n+3}+c^{n+3})-(a+b+c)(a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2})+$$
$$+(ab+ac+bc)(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1})-(a^n+b^n+c^n)abc=0.$$

14. (Московская олимпиада, 1963 г.) Пусть a, b, c — такие три числа, что $abc > 0$ и $a+b+c>0$. Докажите, что $a^n+b^n+c^n>0$ при любом n.

15. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни многочлена $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Найдите коэффициенты приведенного кубического многочлена с корнями $x_1+x_2, x_1+x_3, x_2+x_3$.

16. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни многочлена $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Найдите коэффициенты приведенного кубического многочлена с корнями x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3.

17. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни многочлена $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Найдите коэффициенты приведенного кубического многочлена с корнями $x_1+x_2-x_3, x_1+x_3-x_2, x_2+x_3-x_1$.

18. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни многочлена x^3+px+q. Выпишите многочлен, корнями которого будут числа $\frac{x_2+x_3}{x_1^2}, \frac{x_1+x_3}{x_2^2}, \frac{x_1+x_2}{x_3^2}$.

19. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты многочлена $f(x)$, чтобы его кори образовывали арифметическую прогрессию?

20. Решите уравнение $f(x)=0$ в предположении, что его корни образуют арифметическую прогрессию.

21. (Польская олимпиада, 1951—1952 г.) Выясните, каким необходимым и достаточным условиям должны удовлетворять действительные числа a, b, c для того, чтобы уравнение $x^3+ax^2++bx+c=0$ имело три действительных корня, образующих арифметическую прогрессию.

22. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты многочлена $f(x)$, чтобы один из них равнялся сумме двух других?

23. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты многочлена $f(x)$, чтобы его корни образовывали геометрическую прогрессию?

24. Решите уравнение $f(x)=0$ в предположении, что его корни образуют геометрическую прогрессию.

25. (Польская олимпиада, 1954—1955 г.) Каким условиям должны удовлетворять действительные числа a, b, c для того, чтобы уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ имело три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию?

26. Докажите, что для любых x_1 и x_2 существует многочлен вида $f(x)=x^3+px+q$, корнями которого являются числа x_1 и x_2.

27. Верно ли, что для любых x_1 и x_2 существует многочлен вида $f(x)=x^3+rx^2+q$, корнями которого являются числа x_1 и x_2?

5. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Обратимся к вопросу о том, как восстановить многочлен, зная его значения в некоторых точках. Более точно, пусть заданы две четверки чисел x_1, x_2, x_3, x_4 и y_1, y_2, y_3, y_4 (числа x_1, x_2, x_3, x_4 будем считать попарно различными). Требуется найти такой многочлен вида $f(x)=dx^3+ax^2+bx+c$, что $f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2, f(x_3)=y_3$ и $f(x_4)=y_4$.

По сути, вопрос сводится к поиску чисел a, b, c, d, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} dx_1^3+ax_1^2+bx_1+c=y_1,\\ dx_2^3+ax_2^2+bx_2+c=y_2,\\ dx_3^3+ax_3^2+bx_3+c=y_3,\\ dx_4^3+ax_4^2+bx_4+c=y_4.\end{cases}$$

Это можно сделать стандартным способом, например, методом исключения Гаусса. Но проще решить эту систему, используя ее специфику.

Рассмотрим многочлен $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Он равен нулю при x равном x_1, x_2, x_3 и отличен от нуля при $x = x_4$. Если теперь разделить этот многочлен на его значение $(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)$ в точке x_4, то получим многочлен $\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$, который равен нулю в точках x_1, x_2, x_3, и равен 1 при $x = x_4$. Если умножить его на y_4, то получится многочлен $\frac{y_4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$, равный нулю в точках x_1, x_2, x_3 и равный y_4 при $x = x_4$.

Добавив к нему аналогичный многочлен $\frac{y_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}$, мы «не испортим» его значение при $x = x_4$, и сделаем значение суммы при $x = x_3$ равным y_3. Продолжая те же действия, мы легко найдем искомый многочлен

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{y_4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} + \frac{y_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + \\ + \frac{y_2(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + \frac{y_1(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}. \end{aligned}$$

На самом деле, такой многочлен — единственный. Действительно, если $f(x)$ и $g(x)$ — два многочлена, принимающих в точках x_1, x_2, x_3, x_4 значения y_1, y_2, y_3, y_4, то их разность равна нулю в точках x_1, x_2, x_3, x_4, а тогда, как уже установлено, эта разность тождественно равна нулю, то есть многочлены $f(x)$ и $g(x)$ совпадают.

Доказанный факт имеет многочисленные приложения, от чисто теоретических до инженерных. Далее нам потребуется следующее. Если x_1, x_2, x_3, x_4 — попарно различные числа, то система линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0, \\ x_1\alpha + x_2\beta + x_3\gamma + x_4\delta = 0, \\ x_1^2\alpha + x_2^2\beta + x_3^2\gamma + x_4^2\delta = 0, \\ x_1^3\alpha + x_2^3\beta + x_3^3\gamma + x_4^3\delta = 0, \end{cases} \tag{2}$$

имеет единственное решение $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Действительно, пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — произвольное решение этой системы. Рассмотрим многочлен $f(x) = dx^3 + ax^2 + bx + c$, принимающий в точках x_1, x_2, x_3, x_4 значения $\bar\alpha, \bar\beta, \bar\gamma, \bar\delta$ ($\bar\alpha$ — число, комплексно сопряженное числу α). Тогда

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = \alpha\bar\alpha + \beta\bar\beta + \gamma\bar\gamma + \delta\bar\delta = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) + \gamma f(x_3) + \delta f(x_4) = \\ = \alpha(dx_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c) + \beta(dx_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c) + \\ + \gamma(dx_3^3 + ax_3^2 + bx_3 + c) + \delta(dx_4^3 + ax_4^2 + bx_4 + c) = \\ = d(\alpha x_1^3 + \beta x_2^3 + \gamma x_3^3 + \delta x_4^3) + a(\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 + \delta x_4^2) + \\ b(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4) + c(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда немедленно следует, что $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Аналогичным образом, с использованием квадратного трехчлена вместо кубического многочлена, доказывается, что система линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ x_1\alpha + x_2\beta + x_3\gamma = 0, \\ x_1^2\alpha + x_2^2\beta + x_3^2\gamma = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение, если числа x_1, x_2, x_3 попарно различны.

Упражнения

28. Проведите это доказательство.

29. Докажите это, решив систему методом исключения Гаусса.

30. Решите методом исключения систему (2).

Комментарий. В этом разделе затронуты сразу две темы из линейной алгебры и функционального анализа. Во-первых, здесь появились системы линейных уравнений, которые явно связаны с *определителями Вандермонда*. Они появляются в самых разных задачах. А во-вторых, здесь появилась некая двойственность, которая ведет к бесконечномерному аналогу, называемому *альтернативой Фредгольма*. Это тоже большая и важная тема.

6. Формула Тейлора

В разделе 3 доказано равенство $f(x) = f(t) + (x^2 + (t + a)x + (t^2 + at + b))(x - t)$.

Разделим многочлен $g(x) = x^2 + (t+a)x + (t2+at+b)$ на $x-t$ с остатком. Как установлено выше, остаток — это значение многочлена при $x = t$. Но как отмечено в конце раздела 3, это значение равно производной $f'(t) = 3t^2 + 2at + b$. Тогда

$$g(x) - f'(t) = x^2 + (t+a)x + (t^2 + at + b) - (3t^2 + 2at + b) = (x^2 - t^2) + (t+a)(x-t) = (x+2t+a)(x-t).$$

Значит,

$$f(x) = f(t) + (f'(t) + (x + 2t + a)(x - t))(x - t) = f(t) + f'(t)(x - t) + (x + 2t + a)(x - t)^2.$$

Продолжая в том же духе, получим $x + 2t + a = (x - t) + 3t + a$. Заметим, что $3t + a$ — это половина производной многочлена $3x^2 + 2ax + b$ при $x = t$, или половина второй производной многочлена $f(x)$ при $x = t$. Поэтому

$$f(x) = f(t) + f'(t)(x - t) + \frac{1}{2}f''(t)(x - t)^2 + (x - t)^3. \tag{3}$$

Имея в виду дальнейшие обобщения, эту формулу можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{0!}f(t) + \frac{1}{1!}f'(t)(x - t) + \frac{1}{2!}f''(t)(x - t)^2 + \frac{1}{3!}f'''(t)(x - t)^3.$$

Эту формулу называют *формулой Тейлора*.

Заметим, что, раскрыв скобки, получим

$$(x - x_1)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_2)(x - x_3) = 3x^2 + 2a + b.$$

Следовательно, производная многочлена $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ может быть записана в виде

$$f'(x) = (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_2)(x - x_3).$$

Этот факт будет использован в дальнейшем.

Можно доказать формулу Тейлора иначе. Имеем:

$$f(x) = [t + (x - t)]^3 + a[t + (x - t)]^2 + b[t + (x - t)] + c.$$

Раскроем по формуле бинома Ньютона квадратные скобки, не раскрывая круглых:

$$f(x) = t^3 + 3t^2(x - t) + 3t(x - t)^2 + (x - t)^3 + at^2 + 2at(x - t) + a(x - t)^2 + bt + b(x - t) + c.$$

Теперь соберем вместе члены с одинаковыми степенями $(x - t)$:

$$f(x) = (t^3 + at^2 + bt + c) + (3t^2 + 2at + b)(x - t) + (3t + a)(x - t)^2 + (x - t)^3.$$

Вновь получилась формула Тейлора. Заметим, что использованная в этом доказательстве формула бинома Ньютона — это частный случай формулы Тейлора для многочлена $f(x) = x^3$.

Из формулы Тейлора непосредственно следует, что при замене переменной $y = x - t$ многочлен $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ переходит в многочлен

$$\varphi(y) = \big(t^3 + at^2 + bt + c\big) + \big(3t^2 + 2at + b\big)\, y + (3t + a)\, y^2 + y^3.$$

При такой замене переменных график многочлена сдвигается вдоль оси абсцисс на расстояние t. Таким образом проявляется связь формулы Тейлора с оператором сдвига.

Особый интерес представляет случай $t = -\frac{1}{3}a$. При такой замене коэффициент при квадрате переменной обращается в ноль и получается многочлен $\varphi(y) = y^3 + py + q$, где $p = -\frac{1}{3}a^2 + b$, $q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$. Понятно, что если мы решим уравнение $\varphi(y) = 0$, то и решение уравнения $f(x) = 0$ будет найдено без труда. Кроме того, многие свойства многочлена $f(x)$ при «сдвиге» сохраняются. А выкладки с многочленом $\varphi(y)$ оказываются заметно проще.

Упражнения

31. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни многочлена $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Найдите кубический многочлен с корнями $\frac{x_1+x_2-x_3}{2}, \frac{x_1+x_3-x_2}{2}, \frac{x_2+x_3-x_1}{2}$.

32. Пусть x_1, x_2, x_3 — три различных числа. Докажите, что любой приведенный кубический многочлен $f(x)$ может быть представлен в виде

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \alpha(x - x_1)(x - x_2) + \beta(x - x_1) + \gamma.$$

Найдите коэффициенты α, β, γ если известны значения $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$.

33. Пусть x_1, x_2 — два различных числа. Докажите, что любой приведенный кубический многочлен $f(x)$ может быть представлен в виде

$$f(x) = (x - x_1)^2(x - x_2) + \alpha(x - x_1)(x - x_2) + \beta(x - x_1) + \gamma.$$

Найдите коэффициенты α, β, γ если известны значения многочлена $f(x_1), f(x_2)$ и значение его производной $f'(x_1)$.

34. Пусть x_1, x_2, x_3 — три различных числа. Докажите, что любой кубический многочлен $f(x)$ может быть представлен в виде

$$f(x) = \delta(x - x_1)^2(x - x_2) + \alpha(x - x_1)(x - x_2) + \beta(x - x_1) + \gamma.$$

Найдите коэффициенты $\delta, \alpha, \beta, \gamma$ если известны значения $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ и значение его производной $f'(x_1)$.

35. Пусть x_1, x_2, x_3 — три различных числа. Докажите, что при любых y_1, y_2, y_3, y_4 система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3dx_1^2 + 2ax_1 + b = y_1, \\ dx_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = y_2, \\ dx_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = y_3, \\ dx_3^3 + ax_3^2 + bx_3 + c = y_4 \end{cases}$$

имеет решение.

36. Пусть x_1, x_2, x_3 — три различных числа. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} \beta + \gamma + \delta = 0, \\ \alpha + x_1\beta + x_2\gamma + x_3\delta = 0, \\ 2x_1\alpha + x_1^2\beta + x_2^2\gamma + x_3^2\delta = 0, \\ 3x_1^2\alpha + x_1^3\beta + x_2^3\gamma + x_3^3\delta = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

37. Пусть x_1, x_2 — два различных числа. Докажите, что любой приведенный кубический многочлен $f(x)$ может быть представлен в виде

$$f(x) = (x - x_1)^2(x - x_2) + \alpha(x - x_1)^2 + \beta(x - x_1) + \gamma.$$

Найдите коэффициенты α, β, γ если известны значения многочлена $f(x_1), f(x_2)$ и значение его производной $f'(x_1)$.

38. Докажите, что число $\cos\alpha$ является корнем многочлена $\varphi(y) = u(4y^3 - 3y - \cos 3\alpha)$.

39. Найдите замену независимой переменной, с помощью которой произвольный кубический многочлен $f(x)$ приводится к виду $\varphi(y) = u(4y^3 - 3y + v)$. При каком условии на коэффициенты многочлена $f(x)$ выполняется неравенство $|v| \leqslant 1$?

40. Используя эту идею решите уравнения

а) $x^3 - 3x - 1 = 0$;

б) $x^3 - 3x - \sqrt{3} = 0$.

Комментарий. В.И. Арнольд считал изобретение рядов Тейлора главным достижением Ньютона[7] в области анализа [21]. Столь важные понятия обычно имеют много граней. В анализе чаще всего используются ряды Тейлора как средство аппроксимации. В данной статье более важны два других аспекта. Во-первых, ряды Тейлора тесно связаны со сдвигами в области определения функции. А во-вторых, многочлены, степени которых не превосходят данного числа n, можно рассматривать как *векторное пространство размерности* $n+1$. Формулы Тейлора отвечают за замену *базиса* $x^0, x^1, \ldots, x^n$ базисом $(x-t)^0, (x-t)^1, \ldots, (x-t)^n$ в этом пространстве. Как обычно, выбор «подходящего» базиса может существенно упростить решаемую задачу.

Комментарий. Упражнения 38—40 показывают, что формула Кардано дает лишь весьма условное «решение» уравнений третьей степени. Действительно, она предполагает извлечение кубического корня из какого-то числа. А для этого нужно найти косинус трети аргумента этого числа. Как видно, в общем случае это задача той же сложности, что и решение общего уравнения третьей степени.

7. Кратные корни

Выше было показано, что если t — корень уравнения $f(x) = 0$, то многочлен $f(x)$ делится на $x - t$. Но может так случиться, что он делится и на $(x-t)^k$ при некотором $k > 1$. В таком случае говорят, что корень t — *кратный* (в противном случае он называется *простым*). Если многочлен делится на $(x-t)^k$, а на $(x-t)^{k+1}$ не делится, то число k называют *кратностью корня*. В случае $k = 2$ говорят о двойных корнях, а при $k = 3$ — о тройных.

Для ненулевых многочленов степень делимого не может быть меньше степени делителя, поэтому кубический многочлен не может иметь корней кратности больше 3. Если имеется тройной корень t, то многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c = (x-t)^3$. Если имеется двойной корень, то частное — многочлен первой степени, а, значит, у исходного кубического многочлена есть еще один простой корень.

Если t — кратный корень многочлена $f(x)$, то число t является корнем его производной $f'(x)$. Это следует, например, из формулы Тейлора.

Действительно, многочлен можно записать в виде (3). Так как t — корень, имеем $f(t) = 0$. Многочлен $f(x)$ делится на $(x-t)^2$. Сумма $\frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2 + (x-t)^3$ тоже делится на $(x-t)^2$. Тогда и $f'(t)(x-t)$ делится на $(x-t)^2$. А это возможно только если $f'(t) = 0$.

Таким образом, чтобы найти кратный корень кубического уравнения $f(x) = 0$, достаточно решить квадратное уравнение $f'(x) = 0$. Но на самом деле даже этого можно не делать. Поскольку кратный корень t является общим корнем двух многочленов $f(x)$ и $f'(x)$, он является корнем их наибольшего общего делителя. А наибольший общий делитель ищется с помощью алгоритма Евклида. Покажем, как это реализуется в случае многочлена вида $x^3 + px + q$.

[7] Б. Тейлор был учеником Ньютона.

Производная этого многочлена равна $3x^2+p$. Чтобы найти остаток от деления исходного многочлена на его производную, можно записать его в виде $x(x^2)+px+q$ и подставить число $-\frac{p}{3}$ вместо x^2. Получим линейный многочлен $\frac{2}{3}px+q$, откуда легко найдем кратный корень $t=\frac{3q}{2p}$.

Распознать многочлены вида x^3+px+q, имеющие кратные корни, нетрудно. В самом деле, если t — кратный корень, то по теореме Виета $-2t$ — тоже корень этого многочлена (сумма всех трех корней равна нулю). А тогда по той же теореме $p=-3t^2$ и $q=-2t^3$. Отсюда $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}=0$.

Если нужно найти условие на коэффициенты многочлена $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, то можно сделать замену переменной $y=x+\frac{a}{3}$. Тогда получившийся многочлен вида y^3+py+q будет тоже иметь кратный корень. Следовательно, достаточно в условие $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}=0$ подставить значения $p=-\frac{1}{3}a^2+b, q=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c$. Сделав это, получим условие

$$\frac{1}{27}a^3c-\frac{1}{108}a^2b^2-\frac{1}{6}abc+\frac{1}{27}b^3+\frac{1}{4}c^2. \tag{4}$$

Иногда бывает удобно исключить из рассмотрения уравнения с кратными корнями. Из сказанного видно, что это можно делать достаточно свободно.

Упражнения

41. Докажите, что если многочлен имеет целые коэффициенты и кратный корень, то этот корень рационален.

42. Докажите, что если многочлен имеет целые коэффициенты и кратный корень, то все его корни рациональны.

43. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты многочлена $f(x)=x^3+px+q$, чтобы он имел тройной корень?

44. Решите уравнение $x^3-x-\frac{2\sqrt{3}}{9}=0$.

8. Формула Кардано

Рассмотрим многочлен $f(x)=x^3+px+q$ и попробуем найти замену переменной вида $y=x-t$, при которой получится многочлен (от y), представимый в виде суммы двух кубов.

По формуле Тейлора при такой замене переменной получим многочлен

$$y^3+\frac{1}{2}f''(t)y^2+f'(t)y+f(t).$$

Нас интересует случай, когда $(f'(t))^2=3\left(\frac{1}{2}f''(t)\right)f(t)$ или $(3t^2+p)^2=3\left(\frac{1}{2}(6t)\right)(t^3+pt+q)$. Раскрывая скобки, получим $9t^4+6pt^2+p^2=9t^4+9pt^2+9qt$ или $3pt^2=p^2-9qt$.

Здесь можно перевести дух и констатировать, что в принципе задача выражения корней рассматриваемого уравнения в радикалах решена.

Нам дважды повезло. Во-первых, и левая и правая части уравнения $(f'(t))^2=3\left(\frac{1}{2}f''(t)\right)f(t)$ — многочлены четвертой степени. И нам повезло, что разность этих частей оказалась многочленом второй степени, корни которого мы умеем искать. А во-вторых, могло оказаться, что при вычислении этой разности сократились бы еще и члены с t и t^2, и тогда оказалось бы, что рассматриваемый многочлен $f(t)$ не представим в виде суммы двух кубов. Ни того, ни другого не произошло. Над причинами этого стоит подумать. Это мы отложим на будущее, а пока доведем решение до конца.

В случае $p=0$ имеем корень $t=0$ и уравнение $x^3+q=0$ решается без проблем. В противном случае имеем два корня $t=\frac{-9q\pm\sqrt{81q^2+12p^3}}{6p}$. Тогда $f''(t)=6t$,

$$f'(t)=3t^2+p=\frac{p^2-9qt}{p}+p=2p-\frac{9q}{p}t,\quad \left(\frac{1}{2}f''(t)\right)^2=9t^2=3\frac{p^2-9qt}{p}=3f'(t)-3p.$$

Используя полученные ранее результаты, получим отсюда

$$y=\frac{1}{3}\left(-\sqrt[3]{\frac{\left(\left(\frac{1}{2}f''(t)\right)^2-3f'(t)\right)^2}{\frac{1}{2}f''(t)}}-\sqrt[3]{\left(\left(\frac{1}{2}f''(t)\right)^2-3f'(t)\right)\frac{1}{2}f''(t)}-\frac{1}{2}f''(t)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\sqrt[3]{\frac{9p^2}{3t}}+\sqrt[3]{3p\cdot 3t}-3t\right)=-\sqrt[3]{\frac{p^2}{9t}}+\sqrt[3]{\frac{1}{3}pt}-t.$$

Возьмем корень $t=\frac{-9q+\sqrt{81q^2+12p^3}}{6p}$ (нам опять не нужны все корни, а достаточно одного). Тогда

$$\frac{1}{t}=\frac{6p}{-9q+\sqrt{81q^2+12p^3}}=\frac{6p\left(-9q-\sqrt{81q^2+12p^3}\right)}{81q^2-(81q^2+12p^3)}=\frac{9q+\sqrt{81q^2+12p^3}}{2p^2}.$$

Значит,

$$y=-\sqrt[3]{\frac{p^2}{9t}}+\sqrt[3]{\frac{1}{3}pt}-t=-\sqrt[3]{\frac{9q+\sqrt{81q^2+12p^3}}{18}}+\sqrt[3]{\frac{-9q+\sqrt{81q^2+12p^3}}{18}}-t,$$

а

$$x=y+t=-\sqrt[3]{\frac{p^2}{9t}}+\sqrt[3]{\frac{1}{3}pt}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

что и требуется.

Упражнение 45. А что получится, если взять корень $t=\frac{-9q-\sqrt{81q^2+12p^3}}{6p}$?

Если $p=0$ (а этот случай мы исключали из рассмотрения), то формула Кардано дает $x=\sqrt[3]{q}$, таким образом, она годится во всех случаях.

Упражнения

46. Пусть корни многочлена $f(x)$ не образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что тогда существует единственное число t, для которого корни многочлена $f(x-t)$ образуют геометрическую прогрессию.

47. Найдите связь коэффициентов многочлена $f(x)$ и числа t из предыдущего упражнения.

48. Как, зная коэффициенты уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$, найти такое t, что после замены переменной $y=x-t$ получается возвратное уравнение?

49. Решите с помощью формулы Кардано уравнение $x^3+x^2-2=0$.

50. Докажите, что $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}=4$.

51. Докажите, что $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}=2$.

52. Докажите, что $\sqrt[3]{\sqrt{243}+\sqrt{242}}-\sqrt[3]{\sqrt{243}-\sqrt{242}}=2$.

53. Упростите выражение $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}+\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

54. Упростите выражение $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$.

Комментарий. Серия из шести последних упражнений еще раз подчеркивает ограниченную конструктивность метода решения кубических уравнений с помощью формул Кардано.

9. Сумма двух кубов

Выше мы отправлялись от задачи 1. При этом мы «потеряли» симметрию задачи, в результате чего выкладки пусть и не сильно, но усложнились. Попробуем иной путь.

По ходу вывода формулы Кардано мы, по сути, доказали следующий факт: почти любой кубический многочлен можно представить в виде суммы кубов двух линейных функций. Попробуем доказать этот факт напрямую. Понятно, что после этого решение кубического уравнения — это дело техники. Для сокращения формул будем опять работать с многочленом $f(x) = x^3 + px + q$.

Итак, пусть $f(x) = x^3 + px + q = \alpha(x+\delta)^3 + \beta(x+\gamma)^3$. Раскрыв скобки в правой части этого равенства и приравняв коэффициенты при степенях x, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha+\beta=1, \\ 3\alpha\delta+3\beta\gamma=0, \\ 3\alpha\delta^2+3\beta\gamma^2=p, \\ \alpha\delta^3+\beta\gamma^3=q. \end{cases} \tag{5}$$

Первые два уравнения этой системы можно рассматривать как систему двух линейных уравнений от неизвестных α и β с параметрами γ и δ. Эту систему легко решить: $\alpha = \frac{-\gamma}{\delta-\gamma}$, $\beta = \frac{\delta}{\delta-\gamma}$.

Подставляя эти значения в третье уравнение системы (5), получим

$$3\frac{-\gamma\delta^2}{\delta-\gamma} + 3\frac{\gamma^2\delta}{\delta-\gamma} = 3\gamma\delta = p.$$

Отсюда $\gamma\delta = \frac{1}{3}p$. Наконец, из четвертого уравнения получим

$$\frac{-\gamma\delta^3}{\delta-\gamma} + \frac{\gamma^3\delta}{\delta-\gamma} = -\gamma\delta(\gamma+\delta) = -\frac{1}{3}p(\gamma+\delta) = q,$$

или $\gamma+\delta = -\frac{3q}{p}$.

Значит, по теореме Виета γ и δ являются корнями квадратного уравнения $t^2 + \frac{3q}{p}t - \frac{p}{3} = 0$. Это уравнение имеет два разных корня[8], если $\frac{9q^2}{p^2} + \frac{4p}{3} \neq 0$ или $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \neq 0$.

В этом случае система (5) имеет решение

$$\delta = 3\frac{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}{p}, \gamma = 3\frac{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}{p}, \alpha = \frac{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}{2\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \beta = \frac{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}{2\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Теперь нетрудно решить уравнение $f(x) = 0$. Перепишем его в виде $\alpha(x+\delta)^3 + \beta(x+\gamma)^3 = 0$ или $\frac{-\gamma}{\delta-\gamma}(x+\delta)^3 + \frac{\delta}{\delta-\gamma}(x+\gamma)^3 = 0$. Тогда $\gamma(x+\delta)^3 = \delta(x+\gamma)^3$.

Извлекая корень, найдем

$$x = \frac{\sqrt[3]{\delta}\gamma - \sqrt[3]{\gamma}\delta}{\sqrt[3]{\gamma}-\sqrt[3]{\delta}} = \frac{\sqrt[3]{\gamma\delta}\left(\left(\sqrt[3]{\gamma}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{\delta}\right)^2\right)}{\sqrt[3]{\gamma}-\sqrt[3]{\delta}} = \sqrt[3]{\gamma\delta}\left(\sqrt[3]{\gamma}+\sqrt[3]{\delta}\right) = \sqrt[3]{\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{\gamma}+\sqrt[3]{\delta}\right).$$

Подставляя найденные значения для γ и δ, получим:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}.$$

Упражнения

55. Разберитесь самостоятельно со случаем $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$.

[8] а это необходимо для того, чтобы система из двух первых уравнений (5) имела решение.

56. Докажите, что всякий квадратный трехчлен $f(x)$ может быть представлен в виде $f(x) = \alpha x^2 + \beta(x+\gamma)^2$.

57. Получите отсюда формулу для корней квадратного уравнения.

58. Докажите, что при любом фиксированном δ всякий квадратный трехчлен $f(x)$ может быть представлен в виде $f(x) = \alpha(x+\delta)^2 + \beta(x+\gamma)^2$.

10. Векторы и многочлены

Может создаться впечатление, что достаточно сложную систему уравнений (5) удалось решить чисто случайно. Чтобы разобраться в причинах, приведем еще одно доказательство представимости многочлена третьей степени в виде суммы двух кубов.

Удобно рассмотреть общий случай многочлена $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Если он представим в виде $f(x) = \alpha(x+\delta)^3 + \beta(x+\gamma)^3$, то выполняются равенства

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ 3\alpha\delta + 3\beta\gamma = a, \\ 3\alpha\delta^2 + 3\beta\gamma^2 = b, \\ \alpha\delta^3 + \beta\gamma^3 = c. \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим векторы в каком-нибудь трехмерном пространстве. Выберем ненулевой вектор n ортогональный плоскости, содержащей оба вектора $u = \left(1, \frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$ и $v = \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, c\right)$. Если эти векторы не коллинеарны, то годится векторное произведение $n = \left(\frac{ac}{3} - \frac{b^2}{9}, \frac{ba}{9} - c, \frac{b}{3} - \frac{a^2}{9}\right)$. В самом деле, скалярное произведение $nu = \frac{ac}{3} - \frac{b^2}{9} + \frac{a^2b}{27} - \frac{ac}{3} + \frac{b^2}{9} - \frac{a^2b}{27} = 0$. Аналогично проверяется, что $nv = 0$. Если векторы u и v коллинеарны, то такой вектор n найти еще проще. Годится, например, векторное произведение векторов u и $(0,1,1)$ равное $n = \left(\frac{a-b}{3}, -1, 1\right)$.

Упражнение 59. Убедитесь, что так определенные векторы u и n действительно ортогональны.

Рассмотрим случай неколлинеарных векторов u и v. Скалярное произведение вектора n и вектора $\left(1, t, t^2\right)$ можно рассматривать как значение многочлена

$$g(t) = \frac{ac}{3} - \frac{b^2}{9} + \left(\frac{ba}{9} - c\right)t + \left(\frac{b}{3} - \frac{a^2}{9}\right)t^2.$$

Допустим, этот многочлен имеет два разных корня γ и δ. Тогда векторы $(1,\gamma,\gamma^2)$ и $(1,\delta,\delta^2)$ ортогональны вектору n и не коллинеарны. А, значит, векторы u и v могут быть представлены в виде линейных комбинаций векторов $(1,\gamma,\gamma^2)$ и $(1,\delta,\delta^2)$.

Пусть числа α и β удовлетворяют первым двум уравнениям системы (6). Тогда первые две компоненты векторов $\alpha(1,\delta,\delta^2) + \beta(1,\gamma,\gamma^2)$ и u совпадают. Но в таком случае совпадают и третьи компоненты этих векторов, т.е. выполняется третье уравнение системы (6). А, следовательно, совпадают первые две компоненты векторов $\alpha(1,\delta,\delta^2) + \beta(1,\gamma,\gamma^2)$ и v. Значит, совпадают и третьи компоненты этих векторов, т.е. выполняется четвертое уравнение системы (6).

Теперь мы готовы ответить на вопрос, почему существует замена переменой, с помощью которой мы решали кубическое уравнение в разделе 8. В двух словах ответ состоит в том, что для любых двух векторов в трехмерном пространстве существует третий вектор, ортогональный первым двум.

Итак, мы нашли решение системы (6) в предположении, что векторы u и v не коллинеарны и многочлен $g(t)$ имеет два различных корня. А тогда при выполнении этих ограничений многочлен $f(x)$ представим в виде суммы двух кубов. Остается разобраться с этими ограничениями.

В случае, когда векторы u и v коллинеарны, можно провести те же рассуждения с вектором $n = \left(\frac{a-b}{3}, -1, 1\right)$. Но проще разобраться непосредственно. В этом случае $b = \frac{a^2}{3}$ и $c = \frac{a^3}{27}$ и потому $f(x) = \left(x + \frac{a}{3}\right)^3$, т.е. $f(x)$ можно представить в виде суммы двух кубов многими способами.

Может случиться, что многочлен $g(t)$ имеет степень, меньшую двух.

Если два старших коэффициента обращаются в ноль, то $b = \frac{a^2}{3}$ и $c = \frac{a^3}{27}$. Это случай уже рассмотрен. Заметим, что и свободный член многочлена $g(t)$ в этом случае тоже равен нулю.

Если только старший коэффициент многочлена $g(t)$ равен нулю, то $b = \frac{a^2}{3}$ и

$$f(x) = \left(x - \frac{a}{3}\right)^3 + c - \frac{a^3}{27}.$$

Упражнение 60. Докажите, что многочлен $f(x) = x^3 + q$ при $q \neq 0$ нельзя представить в виде $f(x) = \alpha(x+\delta)^3 + \beta(x+\gamma)^3$.

Наконец, может оказаться, что многочлен $g(t)$ имеет один кратный корень. Вычисляя дискриминант квадратного трехчлена $g(t)$ получим, что это может произойти, если выполнено условие

$$\frac{4}{27}a^3c - \frac{1}{27}a^2b^2 - \frac{2}{3}abc + \frac{4}{27}b^3 + c^2 = 0.$$

Сравнивая с формулой (4), получим, что в этом случае и многочлен $f(x)$ имеет кратные корни. И тогда возможны два варианта.

Многочлен $f(x)$ может иметь тройной корень. Понятно, что тогда он представим в виде суммы двух кубов многими способами.

Во втором варианте многочлен $f(x)$ имеет один двойной корень и один простой. Покажем, что тогда он не может быть представлен в виде суммы двух кубов.

Допустим противное. Пусть $f(x) = \alpha(x+\delta)^3 + \beta(x+\gamma)^3$ и x_0 — двойной корень многочлена $f(x)$. Тогда x_0 — корень производной $f'(x) = 2\alpha(x+\delta)^2 + 2\beta(x+\gamma)^2$, то есть выполняются условия

$$\begin{cases} \alpha(x_0+\delta)^3 + \beta(x_0+\gamma)^3 = 0, \\ \alpha(x_0+\delta)^2 + \beta(x_0+\gamma)^2 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Если $\gamma = \delta$, то x_0 — тройной корень многочлена $f(x)$. Следовательно, можно считать, что $\gamma \neq \delta$. Тогда или $x_0 \neq -\gamma$ или $x_0 \neq -\delta$. Не уменьшая общности, можно считать, что $x_0 \neq -\delta$.

Вычитая из первого уравнения системы (7) второе уравнение, умноженное на $x_0 + \gamma$ получим $\alpha(x_0+\delta)^2(\delta-\gamma) = 0$. А тогда $\alpha = 0$ и многочлен $f(x)$ имеет тройной корень. Получено противоречие.

Комментарий. В системе (7) опять нетрудно увидеть определитель Вандермонда.

11. Число представлений в виде суммы двух кубов

Подумаем над тем, сколькими способами данный многочлен $f(x)$ может быть представлен в виде $f(x) = \alpha(x+\delta)^3 + \beta(x+\gamma)^3$? В силу полученных результатов интерес представляют два случая: когда многочлен $f(x)$ имеет тройной корень и когда он имеет три простых корня. Начнем с рассмотрения первого из них.

Пусть x_0 — тройной корень. Тогда многочлен $f(x) = (x - x_0)^3$ представляется в виде $f(x) = \alpha(x-x_0)^3 + (1-\alpha)(x-x_0)^3$ при любом α. А существуют ли нетривиальные представления $f(x) = \alpha(x+\delta)^3 + \beta(x+\gamma)^3$ с $\delta \neq -x_0$ или $\gamma \neq -x_0$? Убедимся, что такое невозможно.

Прежде всего заметим, что не может быть $\delta = -x_0$ и $\gamma \neq -x_0$. Действительно, в таком случае, положив $x = x_0$ в равенстве $(x-x_0)^3 = \alpha(x+\delta)^3 + \beta(x+\gamma)^3$, получим $\beta = 0$, то есть придем к тривиальному представлению.

Допустим теперь, что $(x-x_0)^3 = \alpha(x+\delta)^3 + \beta(x+\gamma)^3$, где $\delta \neq -x_0$ и $\gamma \neq -x_0$. Раскрыв скобки и приравняв коэффициенты при равных степенях придем к равенствам

$$\begin{cases} 1 - \alpha - \beta = 0, \\ -x_0 - \alpha\delta - \beta\gamma = 0, \\ x_0^2 - \alpha\delta^2 - \beta\gamma^2 = 0 \end{cases}$$

(условие для свободного члена не понадобится). Эти равенства можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно неизвестных α и β. Выше показано (см. упражнение 28), что такая система решений не имеет.

Пусть теперь многочлен $f(x)$ имеет три простых корня. В предыдущем разделе доказано существование представления в виде суммы двух кубов. Покажем, что оно единственно. Предположи противное, то есть

$$f(x) = \alpha(x+\delta)^3 + \beta(x+\gamma)^3 = \pi(x+\tau)^3 + \rho(x+\sigma)^3. \tag{8}$$

Сравнивая коэффициенты при степенях x в равенстве (8) получим

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \pi - \rho = 0, \\ \alpha\delta + \beta\gamma - \pi\tau - \rho\sigma = 0, \\ \alpha\delta^2 + \beta\gamma^2 - \pi\tau^2 - \rho\sigma^2 = 0, \\ \alpha\delta^3 + \beta\gamma^3 - \pi\tau^3 - \rho\sigma^3 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Начнем с рассмотрения «типичного» случая, когда все четыре числа $\gamma, \delta, \sigma, \tau$ различны. Выше показано, что такая система имеет лишь нулевое решение, а это значит, что многочлен $f(x)$ тождественно равен нулю.

Значит, среди чисел $\gamma, \delta, \sigma, \tau$ есть равные.

Равенство $\gamma = \delta$ невозможно, так как в этом случае многочлен $f(x) = (\alpha+\beta)(x+\gamma)^3$ имеет тройной корень. Аналогично, невозможно равенство $\tau = \sigma$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\delta = \tau$.

Тогда придем к равенству вида $\alpha'(x+\delta)^3 + \beta(x+\gamma)^3 = \rho(x+\sigma)^3$. Выше установлено, что тогда $\alpha' = \beta = \rho = 0$, т.е. вновь приходим к тривиальному случаю. Это доказывает единственность представления многочлена $f(x)$ с тремя различными корнями в виде суммы двух кубов.

Теперь можно ответить на один из вопросов, поставленных в разделе 8. Напомним, что там мы искали замену переменной $y = x - t$, при которой данный многочлен может быть записан в виде $\bar{\alpha}y^3 + \bar{\beta}(y+\bar{\gamma})^3$. При этом для величины «сдвига» t получилось уравнение второй, а не четвертой степени. Сейчас уже можно сказать, почему это произошло.

Мы выяснили, что в интересных случаях существует лишь один способ представления многочлена в виде $f(x) = \alpha(x+\delta)^3 + \beta(x+\gamma)^3$. Но если после замены переменной $y = x - t$ многочлен представляется в виде $\alpha' y^3 + \beta'(y+\gamma')^3$, то исходный многочлен представим в виде $\alpha'(x+t)^3 + \beta'(x+t+\gamma')^3$. Значит, t может быть равно либо γ, либо δ, то есть уравнение для t имеет не более двух корней. А, значит, его степень не превосходит двух.

Комментарий. В данном разделе содержится небольшой экскурс в теорию диофантовых уравнений для многочленов. Некоторые подробности можно найти, например, в [22] (задача 2).

12. Дискриминант

Дискриминант квадратного уравнения $d(x-x_1)(x-x_2)$ равен $d^2(x_1-x_2)^2$. По аналогии дискриминант D кубического многочлена

$$d(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = dx^3 + ax^2 + bx + c$$

определяется формулой

$$D = d^4(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2. \tag{10}$$

Важно, что дискриминант может быть выражен через коэффициенты d, a, b, c многочлена. Сделаем это для многочлена вида $f(x) = x^3 + px + q$ (общий случай сводится к данному очевидной заменой переменной).

Согласно формуле Лейбница производная многочлена $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ равна

$$f'(x) = (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_2)(x - x_3).$$

Поэтому $f'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)$,$f'(x_2) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)$,$f'(x_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$. Значит, $D = f'(x_1)f'(x_2)f'(x_3)$.

Производные в данном случае вычисляются легко, и остается провести не очень сложное умножение. Но можно не делать и этого.

Разделим многочлен $f(x)$ на его производную $f'(x)$ с остатком:

$$f(x) = x^3 + px + q = x \cdot \frac{1}{3}(3x^2 + p) + \frac{2}{3}px + q = \frac{1}{3}xf'(x) + \frac{2}{3}px + q.$$

Но $f(x_1) = 0$, поэтому $f'(x_1) = -\frac{2px_1+3q}{x_1}$. Аналогично $f'(x_2) = -\frac{2px_2+3q}{x_2}$, $f'(x_3) = -\frac{2px_3+3q}{x_3}$. Поэтому $D = -\frac{(2px_1+3q)(2px_2+3q)(2px_3+3q)}{x_1x_2x_3} = \frac{(2px_1+3q)(2px_2+3q)(2px_3+3q)}{q}$. Дальше можно воспользоваться формулами Виета:

$$D = 27\frac{(q + \frac{2}{3}px_1)(q + \frac{2}{3}px_2)(q + \frac{2}{3}px_2)}{q} =$$

$$= 27\frac{q^3 + \frac{2}{3}p(x_1 + x_2 + x_3)q^2 + \frac{4}{9}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)p^2q + \frac{8}{27}x_1x_2x_3p^3}{q} =$$

$$= 27\frac{q^3 + \frac{4}{9}p^3q - \frac{8}{27}p^3q}{q} = 27q^2 + 4p^3.$$

С этим выражением приходилось сталкиваться не раз.

13. Критические значения

Во многих случаях бывает нужно и интересно найти значения многочлена в его критических точках, то есть в тех точках, где производная многочлена равна нулю.

Понятно, что если x_1 и x_2 — критические точки кубического многочлена $f(x)$, то $x_1 + t$ и $x_2 + t$ — критические точки многочлена $f(x - t)$. Поэтому задачу достаточно решить для многочлена вида $f(x) = x^3 + px + q$.

Если y — его критическое значение, то соответствующая ему критическая точка является общим корнем многочлена $f(x) - y$ и его производной. Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} x^3 + px + q - y = 0, \\ 3x^2 + p = 0. \end{cases}$$

Стандартным образом исключим переменную x. Имеем $\frac{2}{3}px = y - q, x = \frac{3(y-q)}{2p}$ и, наконец, $\frac{27(y-q)^2}{4p^2} + p = 0$. Таким образом, критические значения являются корнями квадратного многочлена $27y^2 - 54qy + (4p^3 + 27q^2)$. Вновь в ответе фигурирует дискриминант.

14. Число корней

До сих пор мы неявно предполагали, что кубическое уравнение имеет корни. Кое-где использовалась теорема Виета, в которой фигурируют даже три корня. Пришло время доказать, что эти предположения оправданы.

В контексте данной статьи естественно сделать предположение о том, что из всякого числа можно извлечь квадратный и кубический корни. Сделав это предположение, доказать нужную теорему уже несложно.

Сначала докажем, что всякое уравнение третьей степени имеет хотя бы один корень. Прежде всего, понятно, что число корней уравнения не изменится, если уравнение умножить на ненулевое число. Значит, можно ограничиться рассмотрением приведенных уравнений вида $x^3+ax^2+bx+c=0$. Далее, число корней не меняется при замене переменных вида $y=x-t$: если x_0 — корень исходного уравнения, то $y_0=x_0-t$ — корень преобразованного. Поэтому достаточно рассмотреть уравнения вида x^3+px+q.

Покажем, что такое уравнение имеет корень

$$x_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}.$$

В данном случае не важно, откуда взялась эта формула. Можно считать, что мы ее просто угадали. Поэтому логического круга здесь не возникает.

Итак, пусть $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}, v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}$. Тогда $u^3+v^3=-q$,

$$uv=\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}\right)\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}\right)}=\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2-\left(\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2\right)}=-\frac{p}{3}.$$

Поэтому $x_0^3=u^3+v^3+3uv(u+v)=-q-p(u+v)=-q-px_0$, что и требуется.

Теперь мы готовы доказать, что многочлен x^3+px+q всегда имеет три корня (с учетом кратности). Если один корень x_0 есть, то многочлен x^3+px+q делится на $x-x_0$. Поэтому достаточно доказать, что частное имеет два корня. А для этого достаточно доказать, что любой квадратный трехчлен имеет два корня. Это делается теми же рассуждениями с использованием более простых и более известных формул для корней квадрантных уравнений.

Упражнения

61. Проведите соответствующие рассуждения.

62. Найдите еще два корня уравнения $x^3+px+q=0$ тем же способом, которым были найдены комплексные корни уравнения из задачи 1.

Комментарий. На самом деле, предположение, сделанное в начале данного раздела, не так уж безобидно. Чтобы извлечь кубический корень из комплексного числа, нужно поделить на три равные части его аргумент. А это, по сути, предполагает умение решать уравнение $4\cos^3 x-3\cos x=0$, или $4t^3-3t=0$. Но как видно из упражнения 39, к таком виду несложно свести произвольное кубическое уравнение. Впрочем, доказать сделанное предположение можно и независимо, например, используя разложение в ряд Тейлора. Это вполне можно сделать на языке, доступном школьнику. Однако, это уже совсем другая история.

Комментарий. Если рассматривать только рациональные числа, то не всякий кубический многочлен имеет корни. Например, рациональных корней нет у многочлена x^3-2. Поэтому, совсем отказаться от предположений о «тонкой структуре» рассматриваемого числового поля при доказательстве существования корней у многочленов нельзя. В данном случае сделано предположение о существовании корней у «простейших» многочленов x^3+a и x^2+a. В тех же предположениях и тем же методом можно доказать, что корни имеет всякий многочлен четвертой степени. Это доказательство не столь «тавтологично», поскольку многочленов четвертой степени заметно «больше».

Для полноты выясним, сколько действительных корней имеет кубическое уравнение. В этом случае естественно считать, что и его коэффициенты действительны. Вновь вопрос легко сводится к исследованию уравнения $x^3+px+q=0$.

Сначала покажем, что такое уравнение всегда имеет хотя бы один действительный корень.

Пусть $x_0 = y_0 + iz_0$ — какой-нибудь корень. Если $z_0 = 0$, то все доказано. А в противном случае число $x_1 = y_0 - iz_0$ будет другим корнем того же уравнения. Действительно, так как x_0 — корень, имеем

$$0 = x_0^3 + px_0 + q = (y_0 + iz_0)^3 + p(y_0 + iz_0) + q = y_0^3 + 3iy_0^2 z_0 - 3y_0 z_0^2 - iz_0^3 + py_0 + ipz_0 + q = \\ = (y_0^3 - 3y_0 z_0^2 + py_0 + q) + i(3y_0^2 z_0 - z_0^3 + pz_0).$$

Тогда $y_0^3 - 3y_0 z_0^2 + py_0 + q = 0$ и $3y_0^2 z_0 - z_0^3 + pz_0 = 0$. Следовательно,

$$0 = (y_0^3 - 3y_0 z_0^2 + py_0 + q) - i(3y_0^2 z_0 - z_0^3 + pz_0) = y_0^3 - 3iy_0^2 z_0 - 3y_0 z_0^2 + iz_0^3 + py_0 - ipz_0 + q = \\ = (y_0 - iz_0)^3 + p(y_0 - iz_0) + q = x_1^3 + px_1 + q.$$

Это означает, что x_1 — тоже корень.

Но тогда многочлен $x^3 + px + q$ делится на

$$(x - x_0)(x - x_1) = (x - y_0 - iz_0)(x - y_0 + iz_0) = (x - y_0)^2 - (iz_0)^2 = (x - y_0)^2 + z_0^2.$$

Но если делимое и делитель имеют действительные коэффициенты, то и частное имеет действительные коэффициенты. А это частное — приведенный многочлен первой степени. Он конечно же имеет действительный корень, который является и корнем многочлена $x^3 + px + q$, что и требовалось доказать.

Рассуждения из последнего абзаца можно заменить ссылкой на теорему Виета. В самом деле, установлено, что рассматриваемое уравнение имеет три комплексных корня и их сумма равна нулю. Но сумма двух из них — действительное число. Значит, третий корень — действительный.

Из сказанного следует, что кубический многочлен может иметь либо один, либо три действительных корня.

Если все три корня многочлена $x^3 + px + q$ действительны, то в силу формулы (10) его дискриминант $27q^3 + 4p^2$ неотрицателен.

Пусть корень x_1 действителен, а корень $x_2 = y_2 + iz_2$ — нет. Тогда третий корень имеет вид $x_3 = y_2 - iz_2$. А, значит, дискриминант

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2 = ((x_1 - x_2)(x_1 - x_3))^2 (x_2 - x_3)^2 = \\ = ((x_1 - y_2 - iz_2)(x_1 - y_2 + iz_2))^2 (y_2 + iz_2 - y_2 + iz_2)^2 = ((x_1 - y_2)^2 + z_2^2)^2 (2iz_2)^2 = \\ = -4((x_1 - y_2)^2 + z_2^2)^2 z_2^2$$

отрицателен.

Таким образом, вопрос полностью решен.

По ходу, по сути, было установлено, что кубический многочлен с действительными коэффициентами имеет нечетное число действительных корней.

15. Теоремы о промежуточных значениях

В этом разделе будем рассматривать только многочлены с действительными коэффициентами, и будем считать, что переменные принимают только действительные значения.

Начнем с доказательства вспомогательного результата. Пусть $f(x)$ — многочлен второй степени, а точки x_+ и x_- таковы, что $f(x_+) > 0$ и $f(x_-) < 0$. Тогда между точками x_+ и x_- лежит корень многочлена $f(x)$.

Не ограничивая общности, можно считать многочлен приведенным. Тогда его можно записать в виде $f(x) = (x - x_0)^2 - \Delta$, где Δ — дискриминант многочлена $f(x)$. Из условия

$$f(x_-) = (x_- - x_0)^2 - \Delta < 0$$

следует, что дискриминант положителен. Значит, многочлен $f(x)$ имеет два действительных корня x_1 и x_2 и может быть записан в виде $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$.

Тогда из неравенства $f(x_-) = (x_- - x_1)(x_- - x_2) < 0$ следует, что точка x_- лежит между точками x_1 и x_2. А из неравенства $f(x_+) = (x_+ - x_1)(x_+ - x_2) > 0$ следует, что точка x_+ лежит вне интервала (x_1, x_2). Отсюда следует нужное утверждение.

Теперь докажем аналогичное утверждение для кубического многочлена: если $f(x)$ — многочлен третьей степени, а точки x_+ и x_- таковы, что $f(x_+) > 0$ и $f(x_-) < 0$, тогда между точками x_+ и x_- лежит, по крайней мере, один корень многочлена $f(x)$.

Уже установлено, что такой многочлен имеет один действительный корень x_1, а значит, его можно записать в виде $f(x) = g(x)(x - x_1)$, где частное $g(x)$ — многочлен второй степени с действительными коэффициентами. Если x_1 лежит между числами x_+ и x_-, то все доказано. А в противном случае числа $x_+ - x_1$ и $x_- - x_1$ имеют один знак, а тогда числа $g(x_+)$ и $g(x_-)$ имеют разные знаки и доказательство следует из предыдущего вспомогательного утверждения.

Теперь можно доказать *теорему Ролля* для кубических многочленов: если многочлен третьей степени $f(x)$ имеет три действительных корня $x_1 < x_2 < x_3$, то на каждом из интервалов (x_1, x_2) и (x_2, x_3) лежит по одному из корней его производной.

Вновь можно считать многочлен приведенным. Тогда $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ и $f'(x) = (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_2)(x - x_3)$. Значит, $f'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) > 0$, $f'(x_2) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) < 0$ и $f'(x_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) > 0$. Из предыдущего утверждения следует, что на каждом из интервалов (x_1, x_2) и (x_2, x_3) лежит хотя бы по одному из корней его производной. А поскольку производная — многочлен второй степени, больше одного корня на каждом и интервалов быть не может.

Упражнения

63. Многочлен $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три действительных корня. Докажите, что тогда многочлен $cx^3 + bx^2 + ax + 1$ имеет три действительных корня.

64. Многочлен $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три действительных корня. Докажите, что тогда многочлен $3cx^2 + 2bx + a$ имеет два действительных корня.

65. Докажите, что если $f(x)$ — кубический многочлен и $x_l < x_r$, то на интервале (x_l, x_r) найдется такая точка x_0, что $f'(x_0) = \frac{f(x_r) - f(x_l)}{x_r - x_l}$.

Указание. Примените теорему Ролля к многочлену $g(x) = f(x) - \left(f(x_l) + \frac{f(x_r) - f(x_l)}{x_r - x_l}(x - x_l)\right)$.

66. Пусть $f(x)$ — кубический многочлен, $x_l < x_r$, и на интервале (x_l, x_r) выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$. Докажите, что на отрезке $[x_l, x_r]$ функция $f(x)$ не убывает.

67. Пусть $f(x)$ — кубический многочлен, $x_l < x_r$, и на интервале (x_l, x_r) выполняется неравенство $f'(x) > 0$. Докажите, что на отрезке $[x_l, x_r]$ функция $f(x)$ возрастает.

68. Пусть $f(x)$ — кубический многочлен, $x_l < x_r$. Докажите, что на отрезке (x_l, x_r) найдется такая точка x_0, что $f(x) \leqslant f(x_0)$ для всех x из отрезка $[x_l, x_r]$.

69. Многочлен $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет один действительный корень. Докажите, что этот корень положителен тогда и только тогда, когда $c < 0$.

70. Многочлен $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три действительных корня. Докажите, что все три корня положительны тогда и только тогда, когда $a < 0$, $b > 0$ и $c < 0$.

71. Многочлен $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три действительных корня. Докажите, что ровно один из этих корней положителен, тогда и только тогда, когда $c < 0$ и выполнено хотя бы одно из неравенств $b \leqslant 0$ или $a \geqslant 0$.

72. Многочлен $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три действительных корня. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты a, b, c для того, чтобы многочлен имел ровно два положительных корня?

73. Многочлен $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три действительных корня. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты a, b, c для того, чтобы многочлен не имел положительных корней?

74. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни многочлена $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты a, b, c для того, чтобы из отрезков с длинами x_1, x_2, x_3 можно было составить треугольник?

Комментарий. Теоремы о промежуточных значениях «очевидны», если рассматривать их как геометрические утверждения о графиках функций. Поэтому традиционно их доказывают, используя топологические соображения. В данном разделе показано, что их можно доказать для многочленов и алгебраическими методами.

16. Заключение

Когда я задумывал эту статью, у меня было желание изложить достаточно полную теорию кубических уравнений. Очень быстро стало понятно, что сделать это в одной статье не реально. Очень многие идеи остались нераскрытыми. По уже объясненным причинам я не касался идей, ведущих к теории Галуа. Почти не затронута геометрия, связанная с кубическими уравнениями. Она весьма богата и разнообразна. Вероятно, о ней стоит поговорить отдельно. Не рассказано и о том, как же все-таки решить кубическое уравнение, если решение зачем-то понадобилось. Не затронут вопрос о приложениях этой теории в других задачах. А они есть.

Но, надеюсь, мне удалось показать, какое богатство можно получить, если не бросать красивую идею, использованную при решении задачи 1.

Литература

[1] Новиков С.П. Вторая половина XX века и ее итог: кризис физико-математического сообщества в России и на Западе // Вестник ДВО РАН. - 2006. - № 4. - С. 3-22.

[2] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Т. 1. - М.: Наука, 1970. - 351 с.

[3] Kline M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. - Oxford: Oxford university press, 1990. - 390 p.

[4] Mac Lane S. Mathematics, Form and Function. - New York: Springer-Verlag, 1986. - 476 p.

[5] Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. - М.: Наука, 1982. - 192 с.

[6] Успенский В.А., Семенов А.Л. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. - М.: Наука, 1987. - 288 с.

[7] Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. - М.: Наука, 1989. - 336 с.

[8] Арнольд В.И. Теория катастроф. - М.: Наука, 1990. - 128 с.

[9] Шабат Г.Б. О преобразовании Гаусса-Ландена // Математическое просвещение. - 2020. - Вып. 26. - С. 221-248.

[10] URL: http://www.filosofia.unimi.it/cardano/testi/operaomnia/vol_4_s_4.pdf

[11] URL: https://web.archive.org/web/20220201093634/

[12] Cardano G. Ars Magna, or, The Rules of Algebra. - New York: Dover Publications, Inc., 1993. - 267 p.

[13] Табачников С.Л. Фукс Д.Б. Математический дивертисмент. 30 лекций по классической математике. - М.: МЦНМО, 2011. - 512 с.

[14] Гашков С.Б. Современная элементарная алгебра в задачах и упражнениях. - М.: МЦНМО, 2006. - 328 с.

[15] Аршинов М.Н., Садовский Л.Е. Грани алгебры. - М.: Факториал Пресс, 2008. - 328 с.

[16] Колосов В.А. Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики. - М.: Гелиос АРВ, 2001. - 256 с.

[17] Uspensky J.V. Theory of equations. - New York: McGrow-Hill, 1948. - 353 p.

[18] Белов А.Я. Об одном способе решать уравнения четвертой степени // Математическое образование. - 2023. - № 3(107). - С. 24-26.

[19] Тоом А.Л. Дама с собачкой // Квант. - 1990. - № 2. - С. 1-16, 26.

[20] Собиров Б. Способ решения уравнений 4-й степени с помощью симметрии // Математическое образование. - 2023. - № 3(107). - С. 35-37.

[21] Арнольд В.И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук — первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. - М.: Наука, 1989. - 96 с.

[22] Восьмая летняя конференция турнира городов. - М.: Издательство ИЦТГ, 1997. - 129 с.

Горелов Михаил Александрович,
старший научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: griefer62@gmail.com

Старая задача на новый лад или математический допинг

В. Ф. Очков, Ли Икан

Рассмотрены примеры геометрических задач, когда учащийся выполняет творческую часть — построение алгебраической модели в виде уравнения или системы уравнений, а рутинную часть решения уравнений, а также исследование решений поручает математическому пакету.

На просторах интернета "гуляет" такая вирусная задача — см. рис. 1. Её легко найти по ключу поиска "два круга и квадрат".

Для поиска решения нужно начертить в одной из окружностей прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна радиусу окружностей, один катет (вертикальный) меньше радиуса на искомую величину стороны квадрата, а другой катет (горизонтальный) — на половину этой величины. Это сделано на нижней половинке рис. 1. Есть в интернете видео с таким построением — см. например [1].

Рис. 1. Задача о двух окружностях и квадрате: исходная вверху и с подсказкой внизу.

Задача сводится к поиску корня квадратного уравнения. В интернете объясняется, как это можно сделать вручную. При этом не учитывается то, что в настоящее время почти все, знакомящиеся с этой задачей, делают это через компьютер или, по крайней мере, через смартфон, где без особого труда можно решить любое квадратное уравнение и не только [2, 4]. На рис. 2 показан снимок экрана смартфона с решением вышеописанного уравнения на сайте www.wolframalpha.com (on-line версия математической программы Mathematica). При особом желании можно перейти на Pro-версию сайта и узнать, как это делается пошагово (step-by-step).

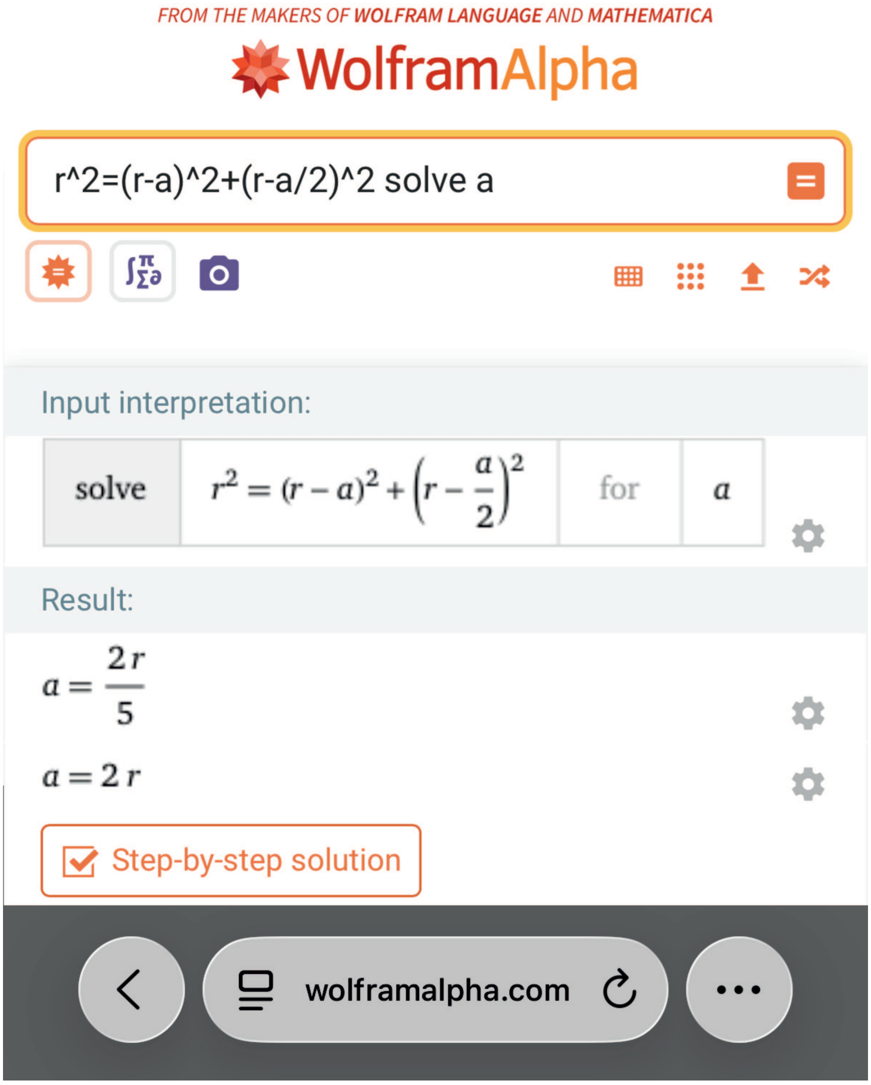


Рис. 2. Сайт wolframalpha.com с решением квадратного уравнения.

Ответ по нашей задаче при $r = 5$: площадь квадрата равна 2^2 (четырем единицам площади). Второй корень, показанный на рис. 2 ($5r$), не отвечает условиям задачи.

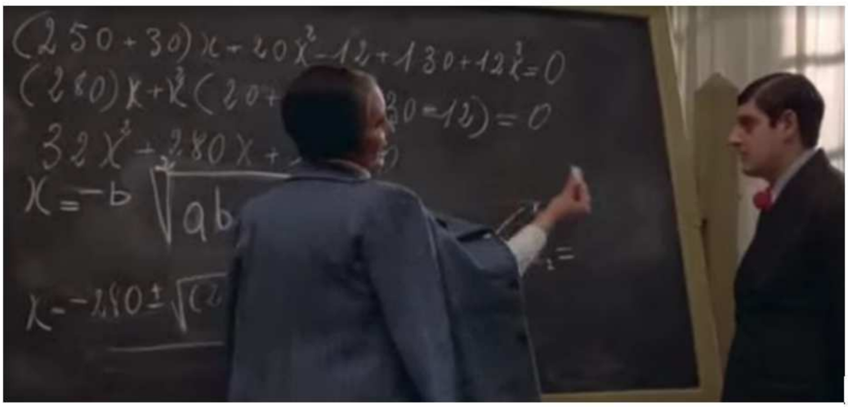


Рис. 3. Кадр из фильма “Амаркорд” Феллини: решаем квадратное уравнение.

Кто-то здесь сразу возразит в том плане, что школьники обязаны уметь решать квадратные уравнения, что компьютеры и смартфоны в таких ситуациях оказывают им медвежью услугу. И что вообще можно загрузить саму задачу с кругами и квадратом в интернет и получить ответ от ИИ. Да это так! Но, с другой стороны, бесконечное решение в школе на уроках математики квадратных уравнений нередко приводит к обратному эффекту — к отторжению учащимися математики вообще. Квадратное уравнение попало даже в мировую кинематографическую классику — см. рис. 3.

Давайте усложним пример — рассмотрим случай, когда окружности имеют разные размеры (рис. 4). Решим же мы задачу в среде математической программы SMath Studio, которая свободно скачивается с сайта smath.com. Есть также и облачная версия пакета (www.smath.com/ru-RU/cloud), которая не требует скачиваний.

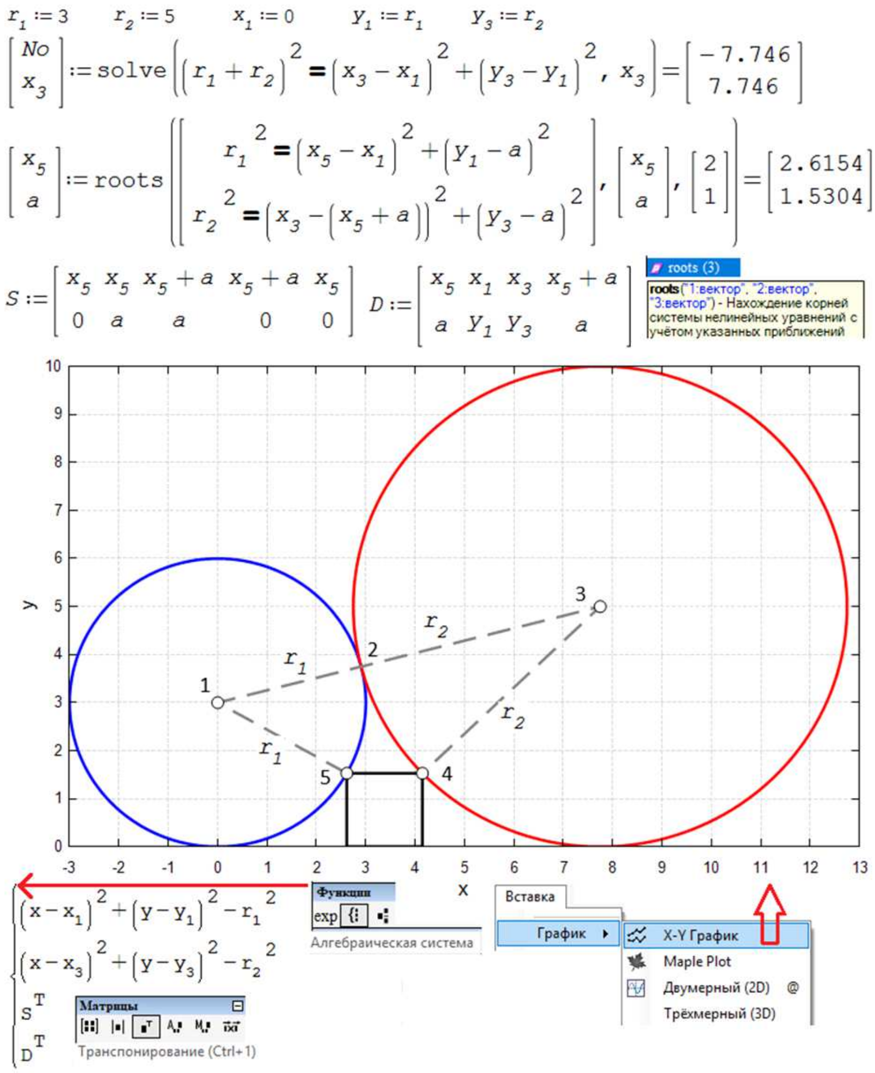


Рис. 4. Решение и графическое отображение задачи о двух окружностях и квадрате.

Задача сводится к составлению квадратных уравнений (творческая часть работы) и их решению с помощью встроенных в SMath функций *solve* (решить) и *roots* (корни) — рутинная часть работы. При этом корни ищутся не аналитически (рис. 2), а численно. Можно, конечно, попытаться найти и аналитическое решение. Но ответы при этом будут получаться слишком громоздкими. Их потом опять же придётся сводить к числу при подстановке в полученные формулы конкретных значений радиусов окружностей. Так что лучше сразу работать с численной математикой. Конечно, хочется иметь ответ не в виде приближённого десятичного числа, а в виде аналитического выражения, но — см. выше.

Функция *solve* вернула два корня (значение абсциссы центра большой окружности x_3), из которых отрицательный корень был отброшен — присвоен формальной переменной с именем No. Функция *roots* вернула один корень в соответствие с первым приближением к решению — двойка для неизвестной величины x_5 и единица для искомой величины стороны квадрата a.

На графике, завершающем решение, построены две окружности по их неявным формулам (а это может делать график, подгруженный из приложения $X - Y - Plot$), сам квадрат построен по матрице его вершин S, а также пунктир (матрица D), соединяющий узловые точки и поясняющий суть решения — три пунктира трёх квадратных уравнений.

Исходная задача с окружностями одинакового размера решается двумя способами — заменой тройки на пятерку для r_1 (рис. 4) или через составление и решение квадратного уравнения — см. рис. 5, где функция *solve* имеет не два (рис. 4), а четыре аргумента, два из которых задают интервал поиска корня методом половинного деления.

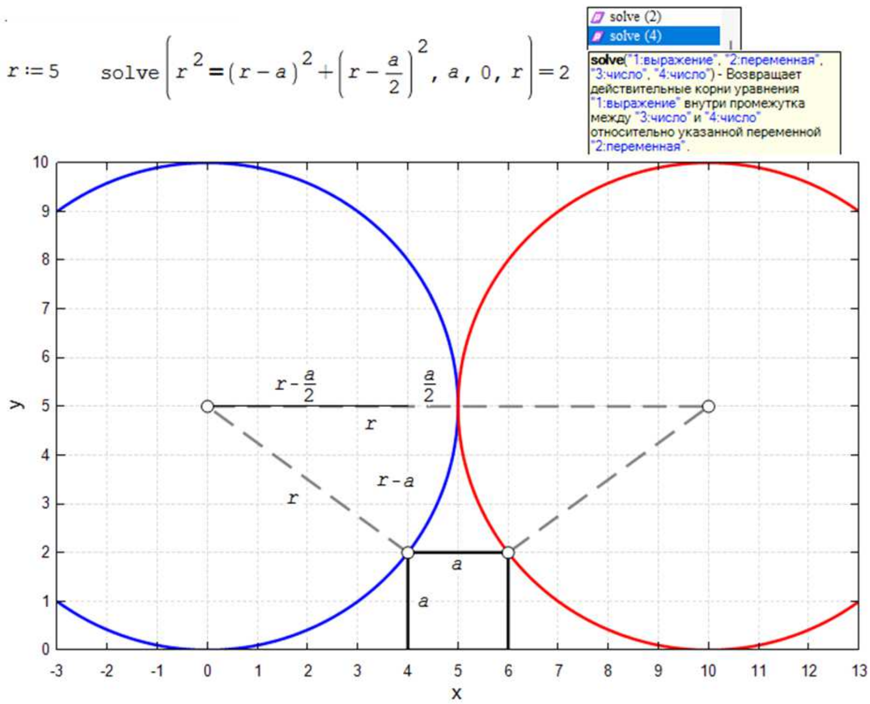


Рис. 5. Графическое отображение задачи о двух одинаковых окружностях и квадрате.

Кстати, пакет SMath может решать уравнения и аналитически (символьно) — см. рис. 6. Для этого к пакету необходимо подгрузить особое приложение — свободно распространяемый символьный движок пакета Maple (в решении на рис. 2 был использован подобный движок из пакета Mathematica).

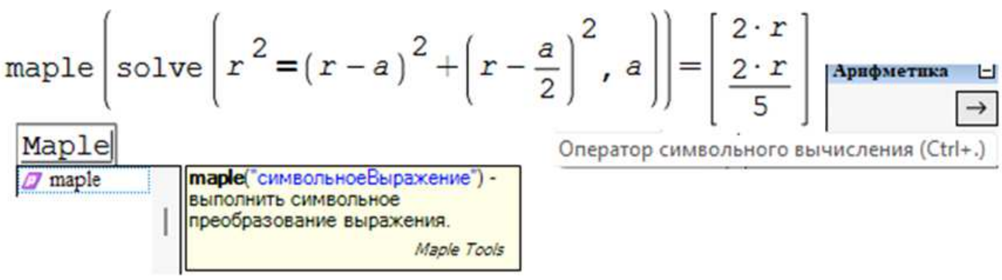


Рис. 6. Аналитическое решение задачи о двух одинаковых окружностях и квадрате.

А вот как ещё можно усложнить не саму задачу, а её решение. Для этого можно перейти к пакету SimInTech [3] — см. рис. 7. В решении используется блок $F(x) = 0$, предназначенный для численного решения нелинейных уравнений и их систем. Разобраться непосвященному в таком решение — это ещё одна отдельная интересная задача!

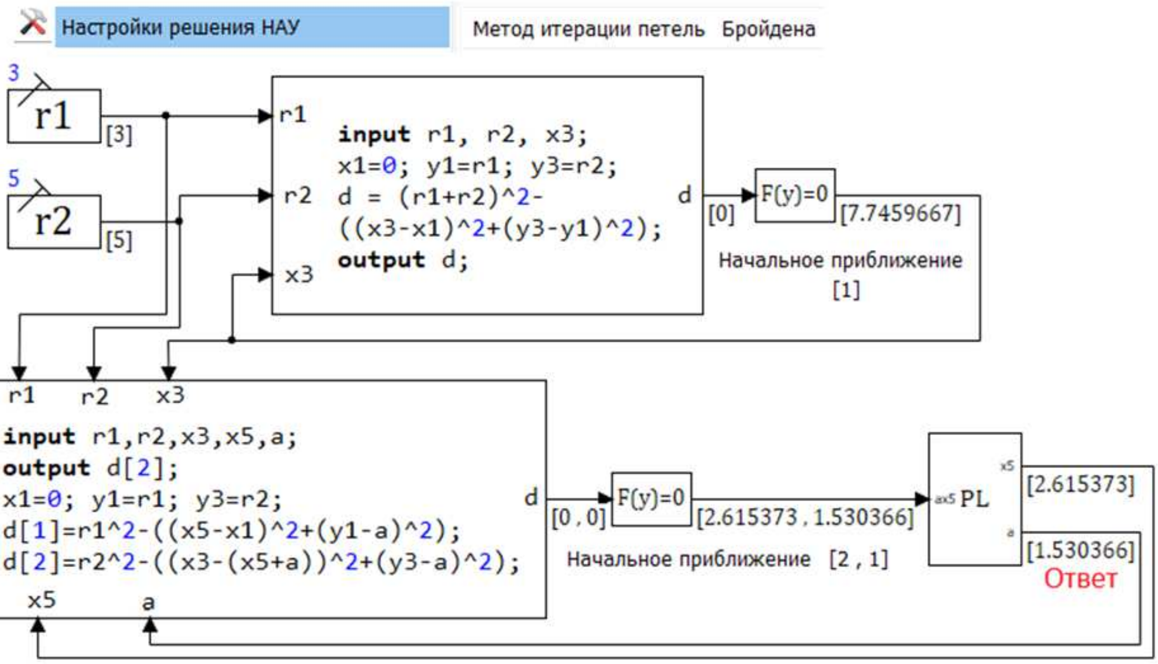


Рис. 7. Решение в среде SimInTech.

Послесловие

Автор наткнулся на задачу о двух окружностях и квадрате, как это ни покажется странным, на сайте... анекдотов. Сначала шло обсуждение исходной задачи с одинаковыми окружностями (anekdot.ru/id/1549126). Затем стал решаться и обсуждаться её более сложный вариант (anekdot.ru/id/1550122). При этом высказывались идеи использования полярных координат для решения. Было описано сведение задачи к одному нелинейному уравнению и др.

Вот очень поучительный диалог на этом форуме:

— А оно мне надо? В пятницу, на 63-м году жизни на развлекательном сайте решать задачи?

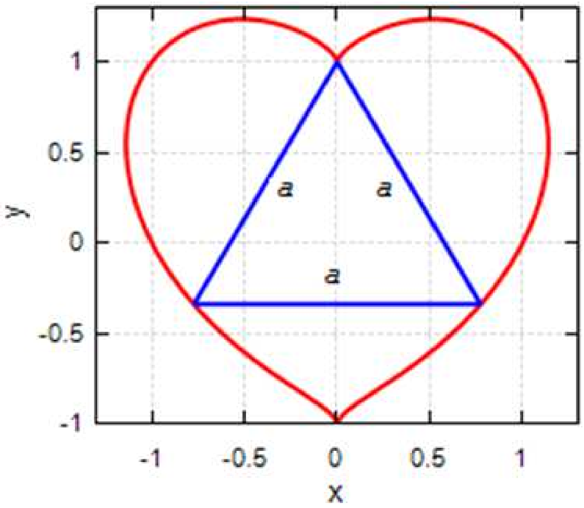
— Решение сложных и новых задач в преклонном возрасте отсрочивает наступление когнитивных нарушений и деменции — это любой врач скажет! День недели и локация никакой роли не играют.

— А если серьёзно, назовите конкретную ситуацию, когда подобные исчисления необходимы!

— Вот такая ситуация! Придут к тебе два товарища с фамилиями Паркинсон и Альцгеймер и спросят: "Третьим будешь?". А ты решишь при них подобную математическую задачу, и они уйдут ни с чем!

Полезно это делать как в молодые, так и в зрелые годы. Учителя и преподаватели математики перегружены рутинной работой: проведение занятий в классах и аудиториях, проверка работ, составление разного рода планов и отчетов и т.д. Домашняя повседневная рутина также заедает... Так вот, как знает по себе автор, и как признались автору многие его коллеги, если заниматься только обычными делами и не решать новые интересные пусть и бесполезные задачи, то наступает некая хандра, которая не только угнетает, но и сильно мешает делать обычные нужные дела. Многие коллеги откровенно признаются автору в том, что они уже давно "подсели на этот наркотик".

Автор дает своим студентам подобные задачи на занятиях по новой учебной дисциплине МИТ [3, 5]. Это служит хорошей разминкой перед решением более сложных практических задач будущего инженера. Одна из них показана на рис. 8.



$$\left(x^2+y^2-1\right)^3-x^2\cdot y^3$$

Рис. 8. Треугольник, вписанный в сердце.

Здесь также нужно уметь составить систему нелинейных уравнений и решить её на компьютере [4]. Кстати, кривая сердца, показанная на рис. 8, легла в основу портрета богини численной математики.

Литература

[1] https://yandex.ru/video/preview/1391634129104016167

[2] Очков В.Ф., Бобин А.А., Изъюров И.А., Полторанин П.А. Математическое образование и современные информационные технологии: показательный пример // Математическое образование. - № 3 (115). - 2025. - с. 11-18.

URL: http://twtshell.ru/ochkov/Math-Education-115-2025.pdf

[3] Очков В.Ф. 16 занятий МИТ: SimInTech. - Санкт-Петербург: Лань, 2026.

URL: https://disk.yandex.ru/i/mtnthbL4ijzX_g

[4] Очков В.Ф., Чудова Ю.В., Умирова Н.Р. Портрет корней системы уравнений // Математическое образование. - №3(103). - 2022. - С. 33-46.

[5] Очков В.Ф. 16 занятий МИТ: Математика — Информатика — Техника. - Санкт-Петербург: Лань, 2025. - 292 с.

URL: https://e.lanbook.com/book/455684

Очков Валерий Федорович,
профессор НИУ "МЭИ", доктор техн. наук.

E-mail: OchkovVF@mpei.ru

Ли Икан,
студент второго курса магистратуры
Института энергомашиностроения
и механики НИУ "МЭИ".

E-mail: LiIk@mpei.ru

Маленький штрих к большому вопросу о скорости распространения вируса

К. Э. Каибханов

Предлагаем вниманию читателей краткое сообщение о полученном автором научном результате по актуальному в современных условиях вопросу о скорости распространения вируса при определенных условиях.

1. Постановка задачи и формулировка результата

Рассматривается следующая задача. В мегаполисе с населением $N \geq 10^6$ человек, некто, неизвестно кто, заразился вирусом. В тот же день власти города ввели режим самоизоляции, согласно которому горожанам запрещается встречаться. Однако жители, не отличающиеся законопослушанием и дисциплиной, слегка нарушают режим и продолжают встречаться. Вероятность встречи любых двух жителей в течение дня – одно и то же число, равное $p = 1/N$. Обозначим через X_n случайную величину – число заразившихся за первые n дней. При этом предположим, что: 1) при встрече здорового человека с заражённым первый непременно заражается; 2) раз заразившись, человек становится носителем заразы на всю жизнь; 3) зараза не смертельна, и число жителей города неизменно. Выглядит естественной постановка задачи: по заданному числу $0 < \varepsilon < 1$ оценить вероятность $P(X_n < \varepsilon N)$.

В приведённой общей постановке решить задачу непросто. Получена следующая оценка.

Теорема. *При вышеуказанных условиях справедливо неравенство*

$$P(X_n \leq N^{2/3}) < \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot N^{2/3}. \tag{1}$$

2. Обозначения и основное вспомогательное утверждение

Обозначим $\mu_j^{(n)} = P(X_n = j)$. (День, в который ввели режим самоизоляции, считаем нулевым; поэтому $\mu_1^{(0)} = 1, \mu_j^{(0)} = 0$ при $j \geq 2$.)

Обозначим $Q_{jk} = C_{N-k}^{j-k}(1-(1-p)^k)^{j-k}(1-p)^{k(N-j)}$ — это вероятность того, что k заражённых жителей (при остальных $(N-k)$ здоровых) в течение дня заразят ещё $(j-k)$ горожан. С учётом этого обозначения

$$\mu_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{j} Q_{jk} \mu_k^{(n-1)}.$$

Покажем, что справедливость неравенства

$$\sum_{k=1}^{j} Q_{jk} < \frac{2}{3} \tag{2}$$

для любого $1 \leq j \leq N^{2/3}$ влечёт неравенство (1).

Действительно, пусть для любого $j \le N^{2/3}$ выполняется неравенство (2). Тогда

$$P(X_n \le N^{2/3}) = \sum_{j \le N^{2/3}} \mu_j^{(n)} = \sum_{j \le N^{2/3}} \sum_{k_{n-1}=1}^{j} Q_{jk_{n-1}} \mu_{k_{n-1}}^{(n-1)} =$$

$$= \sum_{j \le N^{2/3}} \sum_{k_{n-1}=1}^{j} Q_{jk_{n-1}} \left(\sum_{k_{n-2}=1}^{k_{n-1}} Q_{k_{n-1}k_{n-2}} \mu_{k_{n-2}}^{(n-2)} \right) = \ldots =$$

$$= \sum_{j \le N^{2/3}} \sum_{k_{n-1}=1}^{j} Q_{jk_{n-1}} \left(\sum_{k_{n-2}=1}^{k_{n-1}} Q_{k_{n-1}k_{n-2}} \left(\sum_{k_{n-3}=1}^{k_{n-2}} Q_{k_{n-2}k_{n-3}} \cdots \left(\sum_{k_0=1}^{k_1} Q_{k_1k_0} \mu_{k_0}^{(0)} \right) \cdots \right) \right) \le$$

$$\le \sum_{j \le N^{2/3}} \sum_{k_{n-1}=1}^{j} Q_{jk_{n-1}} \left(\sum_{k_{n-2}=1}^{k_{n-1}} Q_{k_{n-1}k_{n-2}} \left(\sum_{k_{n-3}=1}^{k_{n-2}} Q_{k_{n-2}k_{n-3}} \cdots \left(\sum_{k_0=1}^{k_1} Q_{k_1k_0} \right) \cdots \right) \right) <$$

$$< \frac{2}{3} \sum_{j \le N^{2/3}} \sum_{k_{n-1}=1}^{j} Q_{jk_{n-1}} \left(\sum_{k_{n-2}=1}^{k_{n-1}} Q_{k_{n-1}k_{n-2}} \cdots \left(\sum_{k_2=1}^{k_3} Q_{k_3k_2} \left(\sum_{k_1=1}^{k_2} Q_{k_2k_1} \right) \right) \cdots \right) <$$

$$< \left(\frac{2}{3}\right)^2 \sum_{j \le N^{2/3}} \sum_{k_{n-1}=1}^{j} Q_{jk_{n-1}} \left(\sum_{k_{n-2}=1}^{k_{n-1}} Q_{k_{n-1}k_{n-2}} \cdots \left(\sum_{k_3=1}^{k_4} Q_{k_4k_3} \left(\sum_{k_2=1}^{k_3} Q_{k_3k_2} \right) \right) \cdots \right) <$$

$$< \ldots < \left(\frac{2}{3}\right)^n \sum_{j \le N^{2/3}} 1 \le \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot N^{2/3},$$

что и требовалось.

Авторское доказательство неравенства (2) содержит технически сложные выводы большого количества вспомогательных утверждений, что не может быть изложено в рамках данного краткого сообщения. Однако часть этих утверждений представляет самостоятельный интерес безотносительно к цели доказательства (2), поэтому мы приведем их формулировки (полное доказательство автор готов выслать любому желающему).

Утверждение 1. *Для любого* $0 < p < 1$ *и любого натурального* m *выполняется неравенство* $(1-p)^m < e^{-pm}$.

Утверждение 2. *Для любого* $0 < p < 1$ *и любых натуральных* k *и* j, $k \le j$, *справедливо неравенство*

$$(1-(1-p)^k)^{j-k} < (kp)^{j-k} \exp\left(\frac{p}{2}(k^2 - kj) + \frac{p^2k^2}{6} j - \frac{p^2k^3}{6} + \frac{p}{2}(j-k) \right).$$

Утверждение 3. *При* $j \le N$ *справедливо неравенство*

$$\left(1 - \frac{k}{N}\right)\left(1 - \frac{k+1}{N}\right)\left(1 - \frac{k+2}{N}\right) \cdots \left(1 - \frac{j-1}{N}\right) <$$

$$< \exp\left(-\frac{j^2-k^2}{2N} - \frac{j^3-k^3}{6N^2} + \frac{j^2-k^2}{4N^2} + \frac{j-k}{12N^2} + \frac{j-k}{2N} \right).$$

Утверждение 4. *При* $1 \le k \le j$, $N \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\frac{1}{12N^2}(2k^2j - 3k^2 - 2j^3 + 3j^2 + j - k) + \frac{j-k}{N} < \frac{j}{N}.$$

Утверждение 5. *Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[a;b]$, и пусть $f'(a) > 0$, $f''(x) < 0$ для любого $x \in [a;b]$. Тогда*

$$\max_{a \le x \le b} f(x) < f(a) + (b-a)f'(a).$$

Утверждение 6. *Пусть функции $g(x)$ и $h(x)$, определённые и дважды непрерывно дифференцируемые на $[1;l]$, $l \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условиям:*

1) $g(x) > 0$, $h(x) > 0$;

2) $g(x)$ строго возрастает;

3) существует $\omega \in (1;l)$, такое что $(x-\omega)h'(x) < 0$, $x \neq \omega$ (т.е. ω – точка максимума $h(x)$);

4) существуют натуральные числа a и b такие, что

$$\begin{cases} a < \omega < b, \\ (g(x)h(x))'' < 0 \text{ при } x \in [a;b]. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{l} g(k)h(k) < \int_1^b g(x)h(x)\,dx + \frac{1}{2}\left(g(a)h(a) + g(b)h(b)\right) + \sum_{k=b+1}^{l} g(k) \int_{k-1}^{k} h(x)\,dx.$$

Утверждение 7. *Пусть функции $g(x)$ и $h(x)$, непрерывные на $[1;l]$, $l \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условиям: 1) $g(x) > 0$, $h(x) > 0$; 2) $g(x)$ строго возрастает; 3) существует число $\omega \in (1;l)$, такое что $h(x)$ строго возрастает на $[1;\omega]$ и строго убывает на $[\omega;l]$. Обозначим через a целую часть числа ω (наибольшее целое число, не превосходящее ω). Тогда*

$$\sum_{k=1}^{l} g(k)h(k) < \int_1^{\omega} g(x)h(x)\,dx + g(a+1)\int_{\omega}^{a+1} h(x)\,dx + \sum_{k=a+1}^{l} g(k)\int_{k-1}^{k} h(x)\,dx + g(a+1)h(\omega).$$

Каибханов Карахан Эйбханович,
доцент Департамента математики
Факультета экономических наук
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»,
кандидат физ.-мат. наук, доцент.

E-mail: kkaib@yandex.ru

Калейдоскоп определений экспоненты

Г. А. Мерзон

Что такое экспонента? Легко сказать, что это функция e^x, где $e \approx 2{,}71$. Но после такого определения не так просто понять, чем замечательно именно такое основание, и уж совсем непонятно, как вычислять экспоненту от разных сущностей, не являющихся вещественными числами.

Почему, например, $\exp(\pi i) = -1$, и что это вообще значит: что, вот это число чуть меньшее тройки нужно умножить на себя πi раз?.. А что получится, если взять экспоненту от дифференцирования?..

Чтобы разобраться, полезно посмотреть на экспоненту с разных точек зрения. Текст представляет собой калейдоскоп из 6 разных определений с небольшими комментариями.

1. Число e как предел

Начнем с самого прямолинейного подхода:

$$\exp(x) := e^x, \quad e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots$$

Для доказательства существования предела полезно понимать, что последовательность $(1+1/n)^n$ возрастает, а последовательность $(1+1/n)^{n+1}$ убывает. Это заодно дает оценку того, насколько близки конкретные значения к пределу: видим, например, что $1{,}01^{100}$ отличается от e не более чем на 1% (причем в меньшую сторону).

Как уже говорилось, из этого определения не очень ясно, чем замечательна именно такая функция (по сравнению, например, с функцией 2^x — казалось бы, гораздо более естественной). Возникают некоторые трудности и с деталями формального определения (что такое возвести число в степень 7 понятно: перемножить 7 одинаковых чисел, что такое возвести число в степень $3/2$, тоже несложно объяснить... но вот возведение в степень $\sqrt{2}$ уже дело не такое простое). И совсем трудно пользоваться таким определением, если хочется брать экспоненту не только от чисел.

Так что полезно иметь и другие определения экспоненты.

2. Экспонента как предел

Можно определить как предел не только число e, но и сразу экспоненту:

$$\exp(x) := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Опуская детали, неформально можно сказать, что если ε число маленькое, а N большое, то $(1+\varepsilon)^N \approx \exp(\varepsilon N)$. Это уже объясняет возникновение экспоненты в некоторых ситуациях.

Например, если вы взяли микрокредит «всего» под 0,8% в день, то через год сумма долга вырастет в $(1+0{,}008)^{365} \approx \exp(365\cdot 0{,}008) \approx \exp(2{,}9)$, т.е. почти в 20 раз (а не в $1+365\cdot 0{,}008 < 4$ раза). В качестве более позитивного **упражнения** — объясните «правило 72»: чтобы узнать, за сколько примерно лет удвоится вклад, разделите 72 на процентную ставку в год.

Конечно, это определение полезно не только для подсчета сложных процентов. Например, оно уже позволяет определить экспоненту *комплексного* числа.

3. Разложение в ряд

Если в выражении $(1+x/n)^n$ раскрыть скобки, то коэффициент при x^k будет равен

$$\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{1}{k!}.$$

Если перейти в каждом члене к пределу по n (и обосновать, почему сумма от этого не меняется!), то можно прийти к разложению экспоненты в бесконечный ряд:

$$\exp(x):=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

С таким определением экспоненты *комплексного* числа уже не очень сложно если не объяснить, то хотя бы доказать знаменитую формулу Эйлера

$$\exp(ix)=\cos x+i\sin x.$$

Замечательно, что таким рядом можно определить экспоненту не только числа (пусть и комплексного), но и, скажем, *оператора* (n-ю степень оператора при этом надо, как обычно, понимать как n-кратное применение, а слагаемое «1» — как тождественный оператор).

Упражнение. Экспонента оператора дифференцирования (рассматриваемого, например, на пространстве многочленов) — это оператор сдвига аргумента на 1.

От этого упражнения, кстати, уже не далеко до формулы Эйлера–Маклорена и проч. (см., например, статью «Алгебра, геометрия и анализ сумм степеней последовательных чисел» в выпуске 21 третьей серии Мат. Просвещения).

4. Функциональное уравнение

Экспонента — это дифференцируемое решение уравнения

$$\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y),$$

удовлетворяющее условию $\exp'(0)=1$.

Все непрерывные решения функционального уравнения $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ имеют вид $f(x)=c^x$. Часто это является частью *определения* возведения в степень, так что в известном смысле мы недалеко ушли от самого первого определения… Зато дополнительное условие объясняет, чем функция $\exp(x)$ лучше остальных показательных функций: ее производная устроена проще всего.

Упражнение. Проверьте, что ряд из предыдущего определения удовлетворяет этому функциональному уравнению.

5. Дифференциальное уравнение

Функциональное уравнение можно продифференцировать по y при $y=0$. Получится, что экспонента — это решение уравнения

$$\exp'(x)=\exp(x)$$

с начальным условием $\exp(0)=1$.

Существование и единственность решения дифференциального уравнения с фиксированным начальным условием следует (по крайней мере, локально) из общей теории (не такой, впрочем, простой). С другой стороны, совсем просто решить это уравнение *в формальных степенных рядах* — и получить формулу из третьего определения.

Наверное именно это определение лучше всего объясняет появление экспоненты в явных формулах для решений различных дифференциальных уравнений.

С другой стороны, от этого определения один шаг до экспоненты как отображения в *группу Ли* из ее *алгебры Ли*. Вместо объяснения этих возвышенных слов рассмотрим конкретный пример: с такой точки зрения $\exp(it)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ соответствует движению по плоскости, при котором $\exp'(it) = i\exp(it)$, т.е. вектор скорости получается из радиус-вектора поворотом на 90° против часовой стрелки. Как выглядит такое движение, известно: это движение по окружности (единичного радиуса, т.к. $\exp(0) = 1$), т.е. $\exp(it) = \cos t + i\sin t$. Пожалуй, такое рассуждение не просто доказывает формулу Эйлера, но и объясняет ее.

6. Логарифм как площадь

В этом подходе мы начинаем не с экспоненты, а с обратной к ней функции (натурального логарифма), который определяем как

$$\exp^{-1}(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

Про такую площадь под гиперболой легко понять, что она удовлетворяет функциональному уравнению из определения 4 (или дифференциальному уравнению из определения 5) — для этого не нужно даже знаний про интегралы, см. статью В.А. Клепцына «Изобретая логарифмическую линейку» в №№ 2-3 за 2022 год журнала «Квантик». Можно сказать, что это — *явная конструкция* функции, удовлетворяющей нужным нам свойствам (опр. 4 / 5).

Определение может показаться довольно странным — хотя бы тем, что мы начинаем с построения не той функции, которая нам нужна, а обратной к ней. Но вообще примерно так же, если вдуматься, устроено определение и тригонометрических функций: «$\sin\varphi$ — это такая функция, что длина дуги кривой $x^2 + y^2 = 1$ от $y = 0$ до $y = \sin\varphi$ равна φ» — это тоже, фактически, определение не для синуса, а для обратной к нему функции — и тоже, если угодно, через интеграл:

$$\sin^{-1}(y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

(А знатоки могут вспомнить и конструкцию *эллиптических функций* по Абелю.)

Конечно, у этого определения есть и другой недостаток: повысив конструктивность, мы потеряли общность: буквально интеграл из определения логарифма определен только для положительных вещественных чисел, обратная к нему функция $\exp(x)$ — для произвольных вещественных. (Впрочем, если преодолеть некоторые технические сложности, то можно так определить и экспоненту комплексных чисел.)

Это входит в программу нашего круиза: кажется, что среди приведенных определений нет одного "самого лучшего", а полезно иметь в виду разные точки зрения на предмет.

Мерзон Григорий Александрович,
МЦНМО, Лаборатория популяризации
и пропаганды математики МИАН.

E-mail: merzon@mccme.ru

Неполное исследование функции и построение графика

И. Л. Покровский, Л. Д. Покровский

В работе изложен подход к построению графика функции, заключающийся в предварительном анализе характерных особенностей её поведения и последующем построении эскиза графика, качественно не отличающегося от графика, построенного на основе полного исследования. Предложенный подход позволяет проводить неполное исследование и строить эскизы кривых, в том числе заданных неявно, параметрически и в полярных координатах.

Введение

Исследование функции и построение её графика составляет неотъемлемую часть курса математического анализа. Практически во всех учебниках [1-5] построение графика принято предварять полным исследованием функции, начиная с области определения и заканчивая применением дифференциального исчисления для нахождения экстремумов, точек перегиба, участков монотонности и выпуклости.

В настоящей работе используются понятия асимптот: *локальной* [4], *вертикальной, наклонной* [1-5] и *обобщённой*, а также понятие *ростка графика функции*. Предложенный подход основан на замене функции вблизи характерных точек и на бесконечности приближенными выражениями, графики которых будем называть *ростками графика*. Именно, *росток* графика функции является уточнением положения графика относительно его вышеперечисленных асимптот. Последующее соединение (естественным образом) полученных ростков приводит к эскизу графика. Такой подход будем называть *неполным построением графика*. При необходимости можно уточнить детали (экстремумы, перегибы) с помощью (иногда достаточно трудоёмкого) дифференцирования.

Данная работа не является в полном смысле математической, так как не содержит строгих математических результатов, однако на физическом уровне строгости может быть полезна учащимся профильных классов школ, студентам, аспирантам, сотрудникам.

1. Обращение функции в нуль и бесконечность

Будем предполагать (непрерывную) кусочно-гладкую функцию $f(x)$ бесконечно малой при $x \to a$. На рис. 1 изображены с точностью до сдвига и постоянного множителя локальные асимптоты для качественно разных примеров обращения некоторых функций в нуль в конечной точке (горизонтальная линия здесь представляет ось абсцисс):

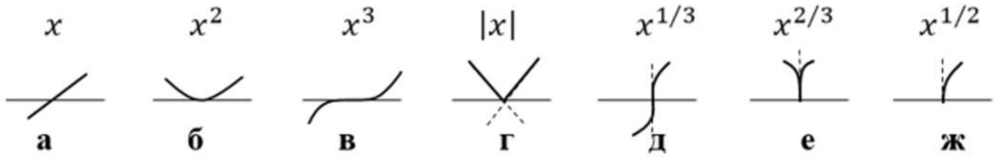


Рис. 1.

- **1а** — со сменой знака, с наклонной (не вертикальной и не горизонтальной) касательной;
- **1б** — без смены знака, с горизонтальной касательной;
- **1в** — со сменой знака, с горизонтальной касательной;
- **1г** — с изломом, т.е. скачкообразным изменением касательной;
- **1д** — с вертикальной касательной, со сменой знака;
- **1е** — с вертикальной касательной, без смены знака;

- 1ж — с односторонней вертикальной касательной.

Приведём несколько примеров классов эквивалентности бесконечно малых функций.

1) Графики следующих функций:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim sh \sim th \sim e^x - 1 \sim \ln(1+n) \sim \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha} \sim \ldots, \ \ x \to 0,$$

имеют в начале координат общую касательную $y = x$ типа **1а**.

2) Эквивалентности

$$1 - \cos x \sim e^{x^2/2} - 1 \sim \ln(1 + x^2/2) \sim x^2/2, \ \text{ при } x \to 0,$$

соответствуют типу **1б**.

3) Эквивалентность

$$\sin(x^3 + x^4) \sim x^3 \ \text{ при } x \to 0,$$

соответствует типу **1в**. Сюда же относится соответствие функции $(x-1)^3/x$ вблизи точки $x = 1$ эквивалентной ей функции $(x-1)^3$ (также тип **1в**).

4) Эквивалентность

$$\ln(1 + \sqrt{x}) \sim \sqrt{x} \ \text{ при } x \to 0,$$

соответствует типу **1ж**.

График функции $f(x)$ обладает *вертикальной асимптотой* вида $x = a$, если хотя бы один из односторонних пределов функции (при стремлении переменной x к a справа или слева) есть $+\infty$ или $-\infty$. Наклонную (а также обобщённую) асимптоты $Y = g(x)$ графика функции $f(x)$ будем понимать в смысле стремления к нулю зазора во вертикали между асимптотой и графиком, $f(x) - g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

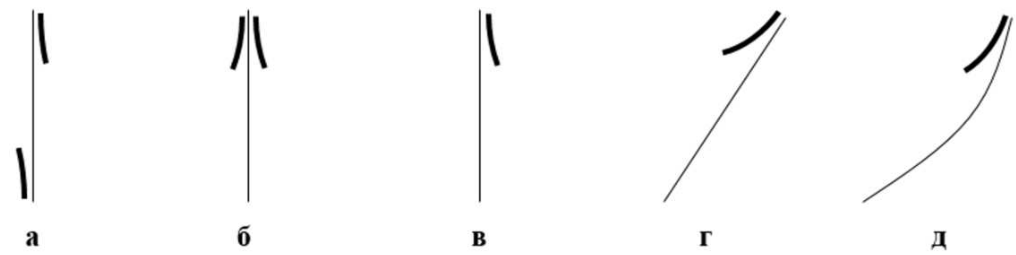


Рис. 2.

На рис. 2 изображены качественно различные случаи вертикальных, наклонных и обобщённых асимптот с точностью до множителя:

- 2а — вертикальная асимптота со сменой знака (пример: $y = 1/x$);

- 2б — вертикальная асимптота без смены знака (пример: $y = 1/x^2$);

- 2в — вертикальная асимптота, одностороннее обращение в бесконечность (пример: $y = -\ln x$);

- 2г — наклонная асимптота $Y = kx + b$;

- 2д — нелинейная (обобщённая) асимптота $Y = \varphi(x)$.

Кроме известных [1-5] формул $k_\pm = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)/x)$, $b_\pm = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - k_\pm x)$, для нахождения параметров наклонной (линейной) асимптоты $Y = k_\pm x + b_\pm$ при $x \to \pm\infty$, соответственно, можно применить иные приёмы, дающие информацию о подходе графика к асимптоте, например, такие как деление углом в случае рациональной дроби и применение формулы Тейлора.

5) Преобразование рациональной функции делением углом к виду

$$y = \frac{x^3+3x^2-2x+1}{x^2-2} = x+3+\frac{7}{x^2-2} = x+3+\frac{7}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})},$$

позволяет непосредственно увидеть, что график функции $y(x)$ приближается к своей наклонной асимптоте $Y = x+3$ сверху как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$ (по типу **2г**). Вид последнего слагаемого показывает наличие двух вертикальных асимптот $x = \pm\sqrt{2}$, соответствующих типу **2а**.

6) Понятие *обобщённой асимптоты* иллюстрирует пример функции

$$y = \frac{(x-1)^3}{x} = x^2-3x+3-\frac{1}{x} = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}-\frac{1}{x},$$

у которой, как несложно убедиться, нет линейных асимптот. Среди обобщённых асимптот класса $Y = a_\pm x^2 + b_\pm x + c_\pm$ при $x \to \pm\infty$, соответственно, искомым представителем является квадратичная асимптота $Y = (x-3/2)^2+3/4$ (а не её главная часть, как может показаться), относительно которой график расположен снизу при $x \to +\infty$ и сверху при $x \to -\infty$, по типу **2д**, о чем свидетельствует зазор $(-1/x)$ между соответствующей параболой и графиком функции $y(x)$.

7) График функции $y = xe^{1/x}$, представленной с помощью формулы Маклорена

$$y = x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\bar{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x+1+\frac{1}{2x}+\bar{o}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \to \infty^1,$$

имеет линейную асимптоту $Y = x+1$. Зазор $1/2x$ между асимптотой и графиком означает наличие ростков типа **2г**: сверху от асимптоты при $x \to +\infty$, и снизу — при $x \to -\infty$.

8) Аналогично можно найти обобщённую (нелинейную) асимптоту графика функции $y = x^2e^{1/x}$:

$$y = x^2(1+1/x+1/(2x^2)+1/(6x^3)+\bar{o}(1/x^2)) = (x^2+x+1/2)+1/6x+\bar{o}(1/x)$$

при $x \to \infty$, откуда получается уравнение асимптоты $Y = (x+1/2)^2+1/4$ с тем же характером приближения графика функции к ней, что и в примере 7).

2. Нахождение локальной и вертикальной асимптот

Будем понимать под локальной асимптотой функции $f(x)$ при $x \to a$ функцию наиболее простого вида из эквивалентных $f(x)$ при $x \to a$ (это показано в вышеприведённых примерах 1)-4)).

Построение локальной и вертикальной асимптот происходит по одной и той же схеме. Пусть точка а такова, что $f(x) \to 0$ или $f(x) \to \pm\infty$ при $x \to a$, и в окрестности точки а функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = g(x)h(x)$, где $g(x) \to 0$ (или $g(x) \to \pm\infty$) при $x \to a$, а $h(x)$ имеет конечный ненулевой предел $\lim_{x\to a} h(x) \neq 0$. Тогда эквивалентность $f(x) \sim (\lim_{x\to a} h(x)g(x))$ при $x \to a$ определяет локальную асимптоту графика $f(x)$ в окрестности точки a. Это позволяет вывести правило нахождения *локальной (вертикальной) асимптоты* $f(x)$ в точке $x = x_i$: *множители, имеющие конечный ненулевой предел при $x \to x_i$, можно заменить их предельными значениями в точке $x = x_i$, а множители, обращающиеся в нуль (в бесконечность) в точке $x = x_i$, следует оставить в неизменном виде, либо заменить эквивалентными выражениями.*

Например, локальной асимптотой при $x \to 0$ функции $f(x) = e^x \sin x$ является функция $y = x$.

Рассмотренный подход можно применить к функциям $f(x)$ следующего вида

$$f(x) = g_1(x)g_2(x)\dots g_k(x),$$

[1] Следуя определению [4], для бесконечно малой функции $f(x)$ при $x \to a$ полагаем $\bar{o}(f(x)) = \alpha(x)f(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$. Под a можно понимать как действительное число, так и бесконечность (включая односторонние пределы).

где $g_i(x) \to 0$ или $g_i(x) \to \pm\infty$ при $x \to x_i$, и $\lim_{x\to x_i} g_j(x) \neq 0$ $i \neq j$.

Тогда в окрестности точки x_i будем иметь представление функции $f(x)$ в виде $f(x) = g_i(x)h_i(x)$, где $h_i(x) = \prod_{i\neq j} g_j(x)$, при этом $h_i(x)$ имеет конечный ненулевой предел $\lim_{x\to x_i} h_i(x) \neq 0$.

Росток графика при $x \to a$ уточняет положение графика относительно локальной асимптоты (требует ещё одного слагаемого формулы Тейлора). Следующие два примера иллюстрируют понятие ростка графика и связь с понятием локальной асимптоты.

1) Функция $y = (x + x^3)/(1 - x)$ имеет в нуле локальную асимптоту $y = x$. Используя разложение функции y(x) по степеням x (по формуле Маклорена — суммы бесконечной геометрической прогрессии)

$$y = \frac{x + x^3}{1 - x} = (x + x^3)(1 + x + x^2 + \ldots) = x + x^2 + \bar{o}(x^2) \text{ при } x \to 0,$$

получаем росток $y = x+x^2$, содержащий два члена разложения (рис. 3а). Приведённый пример показывает, что построение ростка графика отличается от нахождения локальной асимптоты с помощью «замораживания» множителя $h(x)$ в точке $x = a$.

2) Функции $y = x + x^2$ и $y = x + x^3$ (графики изображены на рис. 3а) и рис. 3б), соответственно) вблизи точки $x = 0$ имеют общую локальную асимптоту — прямую $y = x$ при $x \to 0$ и различные ростки, которые совпадают с параболами $y = x + x^2$ и $y = x + x^3$, касаются прямой $y = x$ и располагаются выше (рис.3а)) и по разные стороны от неё (рис.3б)).

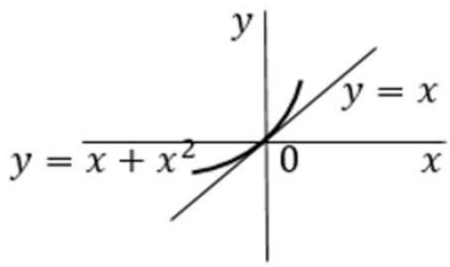


Рис. 3а

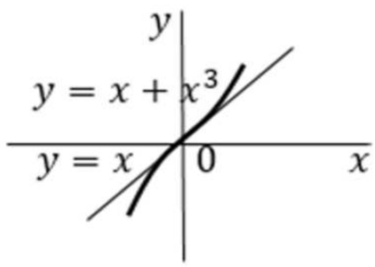


Рис. 3б

Для функций, представленных в виде $f(x) = (x - a)^k\ \varphi(x)$, где $\varphi(a) \neq 0$ и $k > 1$, росток и локальная асимптоты практически неразличимы при их построении в малой окрестности точки a.

Если $\lim_{x\to a} f(x) = b \neq 0$, то бесконечно малой при $x \to a$ является функция $\alpha(x) \equiv f(x) - b$. Здесь под локальной асимптотой графика функции будем понимать локальную асимптоту $\alpha(x)$, сдвинутую на величину b по оси ординат.

3. Примеры построения графиков

Пример 1. Продолжая рассмотренный пример 6) раздела 1, построим график функции $y = (x - 1)^3/x$. Пусть $x \to 1$, тогда знаменатель дроби x можно заменить его предельным значением 1, а выражение $(x - 1)^3$, которое само является отклонением от своего предельного значения, равного нулю, следует оставить неизменным. В результате, вид графика вблизи точки $x = 1$ определяется эквивалентностью $y \sim (x - 1)^3$ при $x \to 1$, что соответствует типу обращения в нуль **1в**. По тем же причинам вблизи точки $x = 0$ оставляем без изменений знаменатель x, а в выражении $(x - 1)^3$ можно положить $x = 0$. Поэтому прямая $x = 0$, вблизи которой поведение функции определяется эквивалентностью $y \sim (-1)/x$, является вертикальной асимптотой типа **2а**.

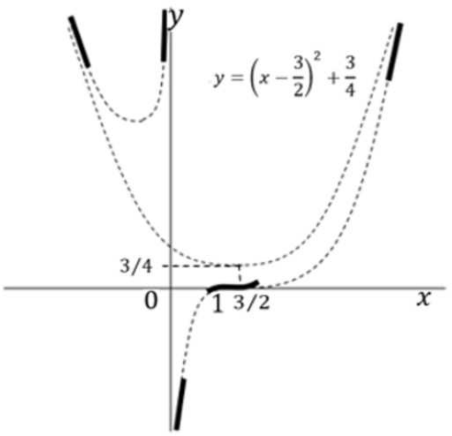


Рис. 4а

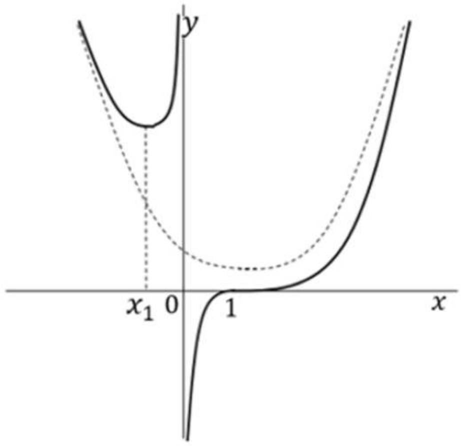


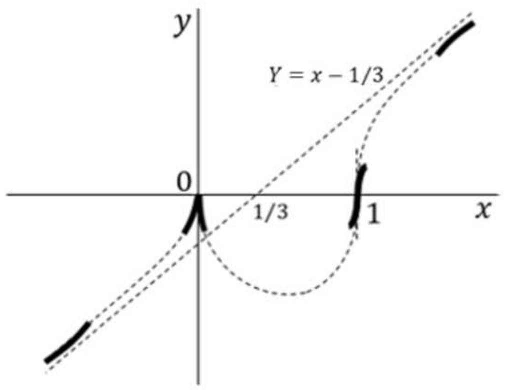
Рис. 4б

Таким образом, *при* $x \to 1$ *полагаем* $x = 1$ *в знаменателе и оставляем* $(x-1)^3$ *без изменений в числителе, а при* $x \to 0$ *полагаем* $x = 0$ *в числителе и оставляем* x *без изменения в знаменателе.* Ростки графика расположены относительно найденной в 6), раздел 1 нелинейной асимптоты $Y = x^2 - 3x + 3$ типа **2д** в соответствии со знаком зазора $(-1)/x$: сверху при $x \to -\infty$ и снизу при $x \to +\infty$ (рис. 4). На рис. 4а) изображены ростки, полученные в результате неполного исследования функции. Остается естественным образом их соединить (пунктирной линией). Окончательный результат представлен на рис. 4б). Точка $x_1 < 0$ ожидаемого минимума может быть найдена методами дифференциального исчисления. Из неполного построения сразу следует, что график функции имеет перегиб в точке с абсциссой $x_2 = 1$ и ординатой $y = 0$.

Пример 2. Построить эскиз графика функции $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$. Выделение главных частей даёт $y \sim -x^{(2/3)}$ при $x \to 0$, $y \sim (x-1)^{(1/3)}$ при $x \to 1$, ростки имеют типы **1д** и **1е** соответственно. Применение формулы Маклорена

$$y = \sqrt[3]{x^3 - x^2} = x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/3} = x - \frac{1}{3} - \frac{2}{9x} + \bar{o}\left(\frac{1}{x}\right) \quad x \to \infty,$$

позволяет определить положение ростков графика функции относительно линейной двусторонней



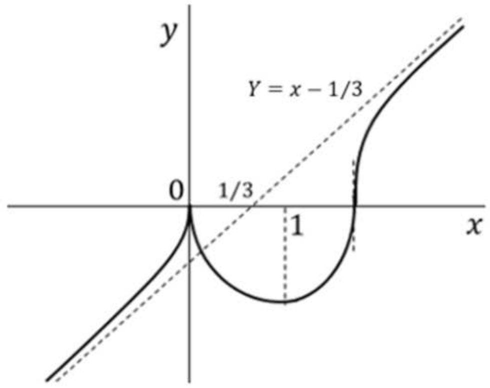


Рис. 5.

асимптоты $Y = x - 1/3$ при $x \to \pm\infty$ (рис.5). Можно говорить о наличии, по крайней мере, максимума при $x = 0$, минимума в интервале $(0, 1)$, а также перегиба графика с вертикальной касательной в точке $(1, 0)$.

Упражнение 1. Построить эскизы графиков функций $y = (x-1)\sqrt[3]{x}$ и $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$.

Пример 3. Построим эскиз графика функции $y = xe^{(1/x)}$ (аналогичного примеру 8) раздела 1). В силу теоремы Бернулли-Лопиталя, справедлив предельный переход $\lim_{x\to 0+} xe^{1/x} = \lim_{t\to+\infty} e^t/t = +\infty$, поэтому график функции имеет правостороннюю вертикальную асимптоту $x = 0$.

Далее, $\lim_{x\to 0-} xe^{1/x} = 0$ и производная слева пополненной нулем в нуле функции равна нулю, $\lim_{\triangle x\to 0-} \triangle xe^{1/\triangle x} = = \lim_{\triangle x\to 0-} e^{1/\triangle x} = 0$, что означает наличие левосторонней горизонтальной касательной к графику в начале координат. Окончательный эскиз графика (рис. 6) строится с помощью наклонной асимптоты аналогично примеру 8) раздела 1.

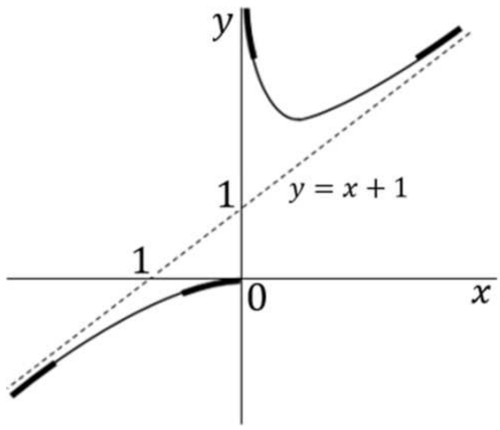


Рис. 6.

Приведём примеры, содержащие логарифмические функции.

Пример 4. Построим эскиз графика функции $y = x^\alpha \ln x$, $(x > 0, \alpha > 0)$. Снова применяя теорему Бернулли-Лопиталя к выражению $x^\alpha \ln x$ $(x > 0,\ \alpha > 0)$, имеющему в нуле неопределённость вида $0 \cdot (-\infty)$, получим:

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0+} x^\alpha = 0.$$

Положим, как в предыдущем примере, функцию в нуле равной нулю, тогда её производная

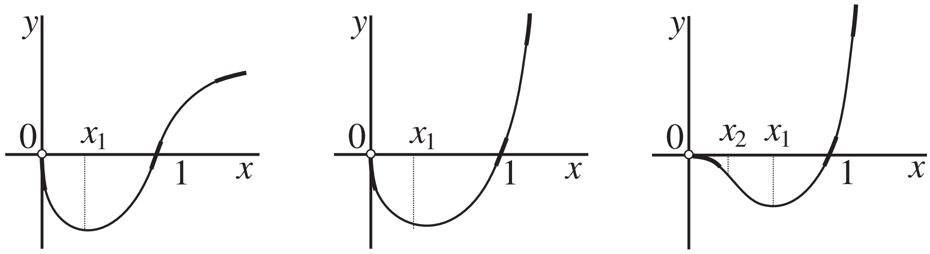
$$\lim_{\triangle x\to 0+} \frac{\triangle x^\alpha \ln \triangle x}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0+} \triangle x^{\alpha-1} \ln \triangle x = \begin{cases} -\infty, & 0 < \alpha \le 1, \\ 0, & \alpha > 1 \end{cases}$$

определяет тип ростка её графика в начале координат:

а) при $0 < \alpha \le 1$ росток направлен вниз, вдоль односторонней вертикальной касательной, по типу **1ж**, рис. 7а);

б) при $\alpha = 1$ росток так же, как и в пункте а), направлен вниз, по типу **1ж**, рис. 7б);

в) при $\alpha > 1$ росток направлен вправо вдоль односторонней горизонтальной касательной в начале координат, рис. 7в).



а) б) в)

Рис. 7.

Эти же выводы остаются справедливыми для функции вида $x^\alpha(\ln x)^\beta$ при положительных α и β, так как величина x^α при любом положительном значении α стремится к нулю быстрее, чем $(\ln x)^\beta$ стремится к бесконечности при любом положительном β, $x^\alpha(\ln x)^\beta \to 0$ при $x \to 0$.

При $x \to 1$ имеет место эквивалентность

$$x^\alpha \ln x = x^\alpha \ln(1 + (x-1)) \sim x - 1 \text{ при } x \to 1,$$

и во всех случаях росток в точке $x = 1$ имеет тип **1а**. Росток на бесконечности имеет тип **2д**, он вогнутый при $\alpha < 1$ и выпуклый при $\alpha \geq 1$. Во всех случаях а), б) и в), при соединении ростков естественно появляется точка минимума x_1 на интервале $(0,1)$, рис. 7а), б), в) соответственно Также при $\alpha \neq 1$ имеется перегиб при $x = x_2$, так что $x_1 < x_2$ в случае а) и $x_2 < x_1$ в случае в). Заметим, что тип ростка можно определить, представляя исходную функцию в виде произведения $x \cdot x^{\alpha-1}\ln x = k(x)x$ и понимая $k(x)$ как угловой коэффициент прямой, соединяющей точки $(0,0)$ и $(x, x^\alpha \ln x)$.

Пример 5. Рассмотрим еще одну функцию, $y = x/\ln x$, $x > 0$, значение в точке $x = 0$, как и раньше, положим равным нулю (предельному значению). Так как $1/\ln x \to 0$ монотонно при $x \to 0+$, график выходит из начала координат с идущим вправо и вниз горизонтальным ростком. Прямая $x = 1$ есть вертикальная асимптота, обращение в бесконечность происходит по типу **2а**.

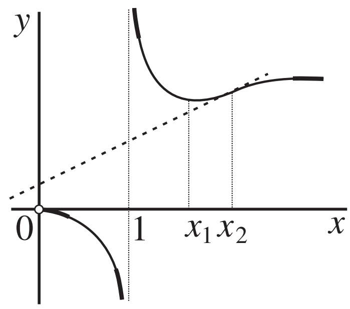


Рис. 8.

Прямая вида $Y = k(x)x$, проведенная из начала координат к точке $(x, x/\ln x)$ графика функции $y(x)$, пересекает график ровно один раз, в силу того, что функция $k(x) = 1/\ln x$ — взаимно-однозначная на своей области определения.

Функция $k(x) = 1/\ln x \to 0$ монотонно при $x \to +\infty$, что, в сочетании с возрастанием самой функции, указывает (не строго!) на вогнутость функции при больших значениях x (росток имеет тип **2д**). Это позволяет утверждать наличие минимума в точке x_1 и перегиба при $x = x_2$, при этом $1 < x_1 < x_2$, рис.8.

Показанный в примере 5 приём построения графика, обобщает

Замечание 1. Пусть дана функция $y = f(x)$, $x \neq 0$. Будем говорить, что график *виден* из начала координат, если луч, выходящий из начала координат в точку графика, не имеет больше пересечений с графиком. Прямая, проведенная из начала координат в точку $(x, f(x))$ графика имеет вид $Y = k(x)x$, где $k(x) = f(x)/x$ — угловой коэффициент. Очевидным критерием видимости графика из начала координат является взаимная однозначность функции $f(x)/x$ при $x > 0$ и $x < 0$. Вообще, видимость кривой — это возможность её параметризации, при которой за параметр принимается угловой коэффициент $k(x)$ (см. далее пример 13).

Свойством видимости, определённым в Замечании 1, помимо графика из предыдущего примера 4, обладают графики функций и кривые из примеров 2, 3, 4б), 7, 9, 11, 13 и 14 (везде предполагается $x \neq 0$).

Пример 6. Для выполнения эскиза графика функции

$$y(x) = \frac{x^{3/5} \ln |x|}{|x-2|(x-2)}, \;\; x \neq 0$$

построим ростки при $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, а также на бесконечности. В начале координат, пример 4а), получим росток типа **1д**. В точках $x = \pm 1$ ростки определяются "замораживанием" всех множителей, кроме $\ln|x|$, и и относятся к типу **1а**, $y \sim \frac{\ln x}{-1} = \sim 1 - x$ при $x \to 1$, $y \sim \frac{\ln(-x)}{-9} = \sim -\frac{1+x}{9}$ при $x \to -1$, а обращение в бесконечность при $x = 2$, $y \sim 2^{3/4} \ln 2 \frac{\operatorname{sgn}(x-2)}{(x-2)^2}$ при $x \to 2$, происходит по типу **2а**.

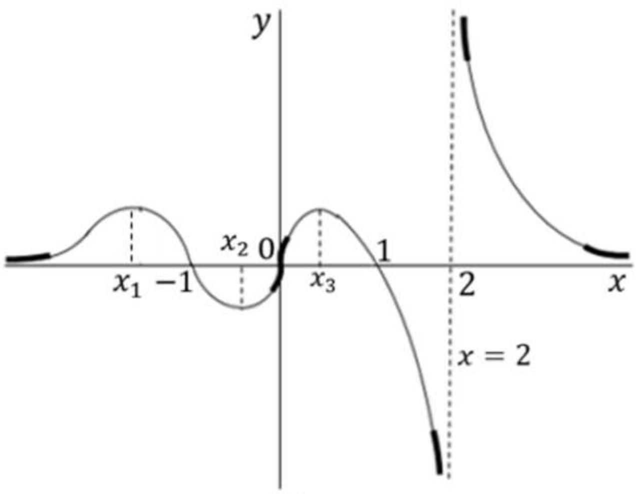


Рис. 9.

Легко видеть, что $y \to 0$ при $x \to \infty$, откуда следует наличие горизонтальной асимптоты $y = 0$ с ростками графика поверх неё при $x \to +\infty$ и снизу при $x \to -\infty$ (рис. 9). Помимо этого следует ожидать наличие, по крайней мере, двух максимумов x_1 и x_3, а также минимума x_2, таких что $x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < 1$, а также, по крайней мере, трёх точек перегиба её графика с абсциссами x_4, x_5 и $x_6 = 0$, такими что $x_4 < x_1 < x_5 < x_2 < x_6 = 0$.

Пример 7. Для чётной функции $y = x \operatorname{arctg} x$ эквивалентность $y \sim x^2$ при $y \to 0$ даёт росток типа **1б** в начале координат. С учетом свойств функции $\operatorname{arctg} x$,

$$x \operatorname{arctg} x = \frac{\pi x}{2} - x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \text{ при } x > 0 \text{ и } x \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} x + x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \text{ при } \quad x < 0.$$

Предельный переход $x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \to 1$ при $x \to \infty$, а также оценка $x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} < 1$ позволяют найти разносторонние наклонные асимптоты $Y = \pm\frac{\pi}{2} x - 1$ при $x \to \pm\infty$, соответственно, и установить, что ростки графика расположены сверху относительно асимптот. То же самое можно получить, воспользовавшись разложением функции по формуле Маклорена в виде

$$y = \pm\frac{\pi}{2} x - 1 + \frac{1}{3x^2} + \bar{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ при } x \to \pm\infty,$$

Эскиз графика показан на рис. 10.

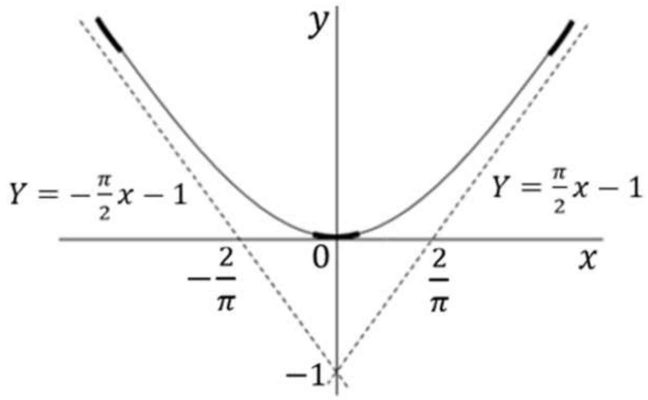


Рис. 10.

Пример 8. В главе 9 [3] в результате полного исследования построен график функции

$$y = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}.$$

Ростки графика, относящиеся к вертикальной и наклонной асимптотам и определённые соотношениями

$$y \sim -\frac{2}{2x^2} \text{ при } x \to 0, \quad \text{и } y = \frac{x}{2} - \frac{5}{4} + \frac{7}{2x} + \bar{o}\left(\frac{1}{x}\right) \text{ при } x \to 0,$$

соответственно, показаны на рис. 11, где изображен окончательный эскиз графика. Легко видеть, что переход с ростка 1 на росток 2 содержит точку перегиба графика функции. Однако, на этом участке может находиться как один перегиб, так и максимум, минимум и перегиб. Для решения этого вопроса в настоящем примере достаточно найти частные значения функции $y(1) = 5/4 > 9/8 = y(2)$. Полученное неравенство показывает наличие интервала убывания и, следовательно, существование экстремумов x_1, x_2 и точки перегиба при $x = x_3$.

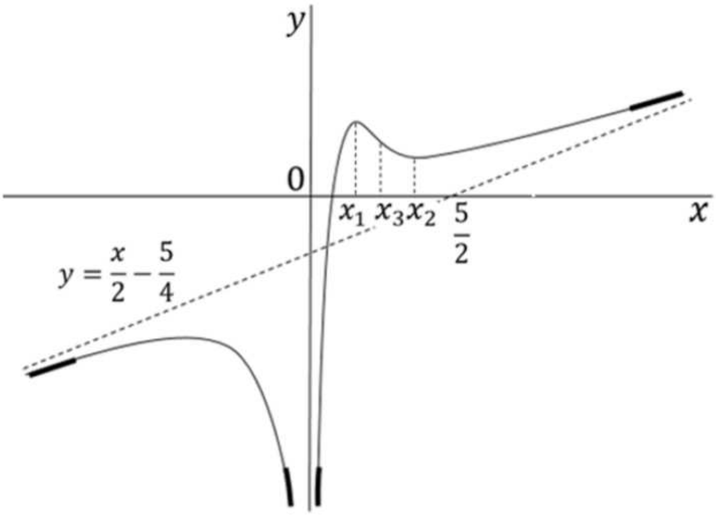


Рис. 11.

Пример 9. Нечётная функция $y = 1/(\sqrt[3]{x+4} + \sqrt[3]{x-4})$ обращается в точке $x = 0$ в бесконечность со сменой знака и вертикальной асимптотой типа **2a** (рис. 12), ростки определяются эквивалентностью

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}(1 + x/4)^{1/3} - (1 - x/4)^{1/3}} \sim -\frac{3\sqrt[3]{2}}{x} \text{ при } x \to 0,$$

Разложения функции в окрестностях точек $(\mp 4, \mp 1/2)$ по формуле Тейлора

$$y = \frac{1}{2}\left(\mp 1 - \frac{1}{2}(x \pm 4)^{1/3} + \bar{o}\left((x \pm 4)^{1/3}\right)\right) \text{ при } x \to \mp 4,$$

соответственно, дают ростки графика типа **1д**. Эквивалентность $y \sim 1/(2\sqrt[3]{x})$ при $x \to \infty$ означает наличие горизонтальной асимптоты $Y = 0$.

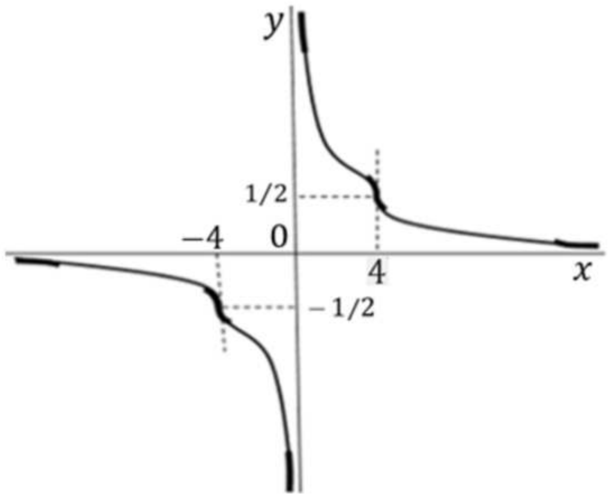


Рис. 12.

Пример 10. Представление о ходе графика рациональной функции

$$y = \frac{x^2(x+1)(x-1)^3}{(x^2+1)(x+2)^3(x-2)^2}.$$

носит ориентировочный характер, рис. 13 а), что связано с весьма большими степенями числителя и знаменателя рациональной функции $y(x)$. Ростки функции в характерных точках определяются следующими эквивалентностями:

$$y \sim \frac{1}{x} \text{ при } x \to \infty; \quad y \sim \frac{27}{20(x+2)^3} \text{ при } x \to -2;$$

$$y \sim \frac{-4(x+1)}{9} \text{ при } x \to -1; \quad y \sim -\frac{x^2}{32} \text{ при } x \to 0;$$

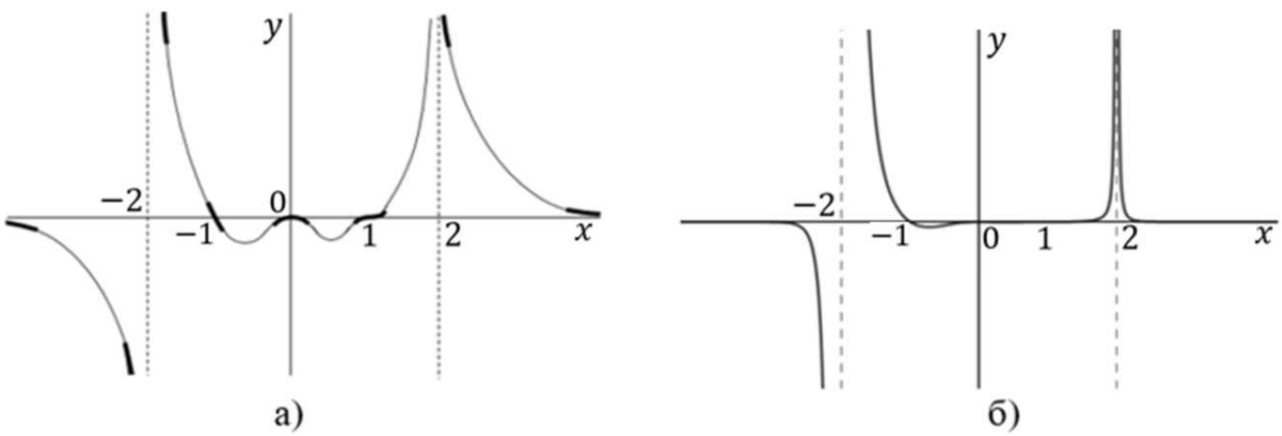


Рис. 13.

$$y \sim \frac{(x-1)^3}{27} \text{ при } x \to 1; \quad y \sim -\frac{3}{80(x-2)^2} \text{ при } x \to 2.$$

Приведенный на рис. 13 б) график, полученный с помощью программы Geogebra (приложение geogebra.org) не позволяет сразу определить типы точек обращения в нуль функции из-за специфики соответствующей вычислительной задачи — график практически совпадает с осью абсцисс на промежутке $(-1/2, 3/2)$, к которому принадлежат интересующие нас точки $x = 0$ и $x = 1$.

Также заметим, что представленный на рис. 13а) эскиз графика можно рассматривать в качестве развития общеупотребительного *метода интервалов*.

4. Построение кривых, заданных неявно и параметрически

Описанные выше приёмы построения графиков явно заданных функций могут быть применены в рамках общей схемы, описанной в разделах 1-2, к построению кривых, заданных неявно, параметрически, а также в полярных координатах.

Пусть кривая задана неявно, т.е. в виде $f(x, y) = 0$.

Пример 11. Кривая “Декартов лист”

$$x^3 + y^3 = 3axy \tag{1}$$

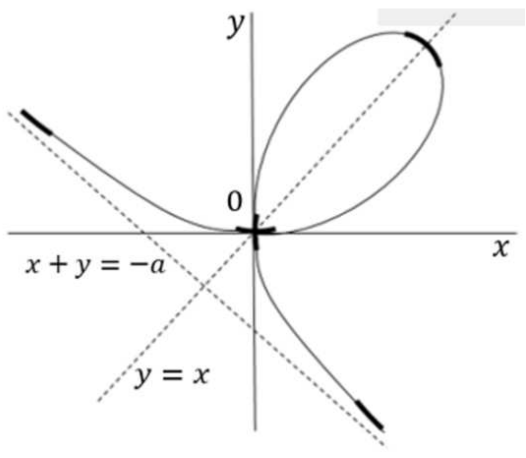


Рис. 14.

задана с помощью симметричной функции

$$f(x, y) \equiv x^3 + y^3 - 3axy = f(y, x)$$

и, значит, расположена симметрично относительно прямой $y = x$ (рис. 14). Неявное задание (1) кривой позволяет установить локальные асимптоты (ростки) в начале координат. Прохождение кривой через начало координат с ростком, наклонённым под углом, иным, нежели 0 или $\pi/2$ (то есть вида $y = tx$, $t \neq 0$), невозможно ввиду неоднородности полинома $f(x, y)$. Допущение $y = \bar{o}(x)$ при $x \to 0$, означающее горизонтальность ростка, приводит к соотношению

$$y = \frac{1}{3a}\left(x^2 + \frac{y^3}{x}\right) = \frac{1}{3a}\left(x^2 + \bar{o}(x^2)\right) \sim \frac{x^2}{3a} \text{ при } x \to 0. \tag{2}$$

Аналогично получается вертикальный росток

$$x \sim \frac{y^2}{3a} \text{ при } y \to 0. \tag{2'}$$

Соотношение (1), преобразованное к виду

$$x + y = \frac{3at}{t^2 - t + 1}, \ \ t \equiv \frac{y}{x}, \tag{3}$$

позволяет перейти к изучению кривой $f(x, y) = 0$ посредством сечения её параллельными прямыми семейства $x+y = c$, величина t имеет геометрический смысл углового коэффициента радиус-вектора точки (x, y). Значения c — суммы координат точки (x, y) — удобно откладывать на прямой $y = x$.

Соотношение (3) сводится к квадратному уравнению относительно t, зависящему от c как от параметра:

$$t^2 - t\left(1 + \frac{3a}{c}\right) + 1 = 0, \ \ c \neq 0. \tag{4}$$

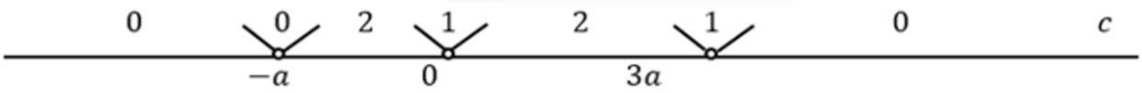


Рис. 15.

Диаграмма (рис. 15) числа решений квадратного уравнения (4) (значение $c = 0$ добавлено "вручную") помогает установить, что кривая (1), изображенная на рис. 14:

- лежит в полосе $-a < x + y \leq 3a$;

- представляет собой петлю с точкой самопересечения $(0, 0)$ при $c = 0$ и парами точек пересечения с каждой из остальных прямых вида $x + y = c$ для $c \in (-a; 0) \cup (0; 3a)$;

- имеет вершину в точке $(3a, 3a)$ при $c = 3a$;

- имеет двустороннюю наклонную асимптоту $x + y = -a$ при $x + y \to -a$.

Рассмотрим теперь случай параметрического задания кривой y: $x = x(t)$, $y = y(t)$, где параметр t пробегает некоторый интервал.

Пример 12. Циклоида $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in R$, ввиду обратимости функции $x(t)$, является графиком параметрически заданной 2π–периодической функции $\hat{y}(x) \equiv y(t(x))$. Поведение графика в окрестности начала координат определяется эквивалентностью $y \sim \sqrt[3]{9x^2}/2$ при $x \to 0$, типа **1e**, вытекающей из вида главных частей $x \sim t^3/6$ и $y \sim t^2/2$ при $t \to 0$, и означающей наличие односторонней вертикальной касательной. Этот росток тиражируется 2π–периодически вдоль оси Ox посредством замены $t = 2\pi n+\tau$, и соответствует локальным минимумам функции $\hat{y}(x)$ в точках вида $x_n = 2\pi n$, где n — целое число (рис. 16). Также параметрическое задание позволяет сразу назвать верхние точки циклоиды $(\pi + 2\pi n, 2)$, соответствующие максимумам x'_n функции $\hat{y}(x)$, $x'_n = \pi + 2\pi n$, n — целое число.

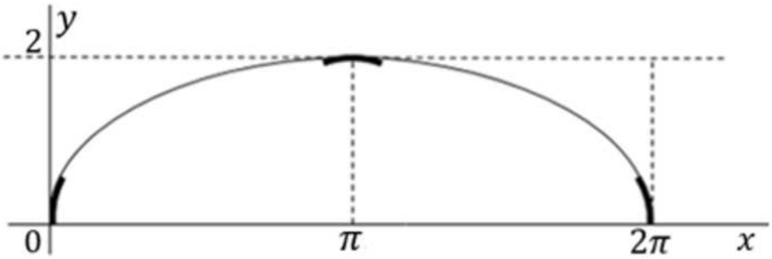


Рис. 16.

Пример 13. Кривая "Декартов лист" из примера 10 допускает параметризацию

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}, \ \ y = \frac{3at^2}{1 + t^3}, \ \ t \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty), \tag{5}$$

с помощью которой несложно получить ростки (2) и (2′) кривой в начале координат. Предельный переход

$$x + y + a = a\frac{(t+1)^2}{t^2 - t + 1} \to 0 \text{ при } t \to -1, \ \frac{(t+1)^2}{t^2 - t + 1} > 0,$$

показывает, что кривая, заданная соотношениями (1) или (5), выходит сверху на прямую $x+y+a = 0$, как на свою двустороннюю наклонную асимптоту.

Кривая «Декартов лист», обладает свойством быть «видимой» из начала координат. Помимо геометрической очевидности, это следует из возможности параметризации (5) кривой угловым коэффициентом $t = y/x$ (см. Замечание 1).

В заключение рассмотрим построение кривой, заданной в полярных координатах

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \ r \geq 0, \ \varphi \in (-\pi, \pi],$$

соотношением $r = r(\varphi)$. Полезно сначала построить график функции $r = r(\varphi)$ в декартовых координатах (r, φ), при этом линиям координатной сетки на плоскости (x, y) (концентрические окружности с центром в начале координат $r = \text{const} > 0$ и лучи, выходящие из начала координат $\varphi = const$) на плоскости (r, φ) соответствуют координатные прямые. При этом возрастание функции $r = r(\varphi)$ в точке φ_0, $r_0 = r(\varphi_0)$, означает, что соответствующая кривая на плоскости (x, y) с ростом φ выходит из круга $r \leq r_0$, соответственно, убывание означает вхождение внутрь круга. Максимумы и минимумы функции $r = r(\varphi)$ в точке φ_0 означают касание кривой окружности радиуса $r(\varphi_0) > 0$ и прохождение через начало координат в случае $r(\varphi_0) = 0$.

Пример 14. Для построения кардиоиды $r(\varphi) = 1 + \cos\varphi$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, воспользуемся вспомогательным хорошо известным графиком функции $r(\varphi)$ на плоскости (r, φ) (рис. 17). Значения функции $r(\varphi)$ занимают отрезок $[0, 2]$, поэтому кардиоида целиком лежит в круге $x^2 + y^2 \leq 4$ радиуса 2. Локальный максимум функции $r(\varphi)$ достигается в точке $\varphi = \pm\pi$ (что соответствует точке $(x, y) = (-2, 0)$ кривой), локальный минимум — в точке $\varphi = 0$ (что соответствует началу координат). Также рис. 17 позволяет отследить интервалы возрастания и убывания функции $r(\varphi)$. Это помогает должным образом расположить ростки кардиоиды в точках с полярными углами $\varphi = 0$, $\pm\pi/2$, $\pm\pi$ относительно начала координат и вспомогательных окружностей $r = 1$ и $r = 2$ (рис. 18).

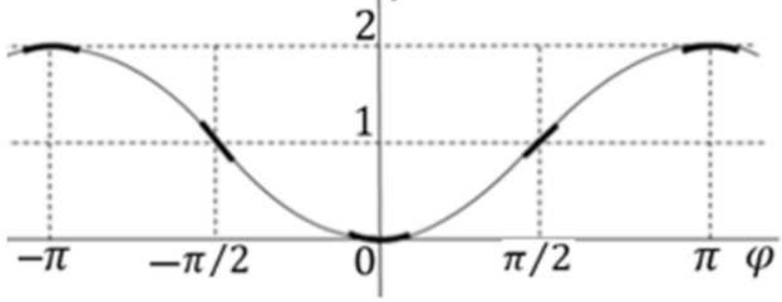


Рис. 17.

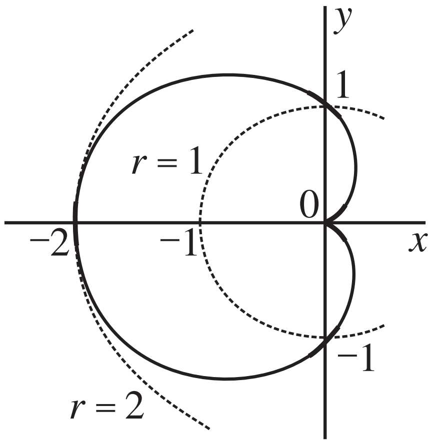


Рис. 18.

Литература

[1] Шилов Г.Е. Как строить графики. - М.: Государственное Издательство Физико-Математической Литературы, 1959. - 23 с.

[2] Гурский И.П. Функции и построение графиков. - М.: Просвещение, 1968. - 218 с.

[3] Ильин В.А. Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1. - М.: Физматлит, 2005. - 644 с.

[4] Зорич В.А. Математический анализ, ч.1. - М.: Издательство МЦНМО, 2012. - 702 с.

[5] Козко А.И., Лужина Л.М., Лужин А.А., Чирский В.Г. Построение графика функции $y = f(x)$ с полным исследованием. Учебные материалы по математическому анализу и линейной алгебре. - Механико-математический и Химический факультеты МГУ им. М.В. Ломоносова, 2024. - 35 с.

URL: postroenije.grafika.funktsii.s.polnym.issledovanijev.pdf

Покровский Илья Леонидович,
доцент кафедры ФН-11 «Вычислительная математика
и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: pokrovski.ilia@yandex.ru

Покровский Леонид Дмитриевич,
доцент кафедры ФН-1 «Высшая математика»
МГТУ им. Н.Э. Баумана, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: valenki140@gmail.com

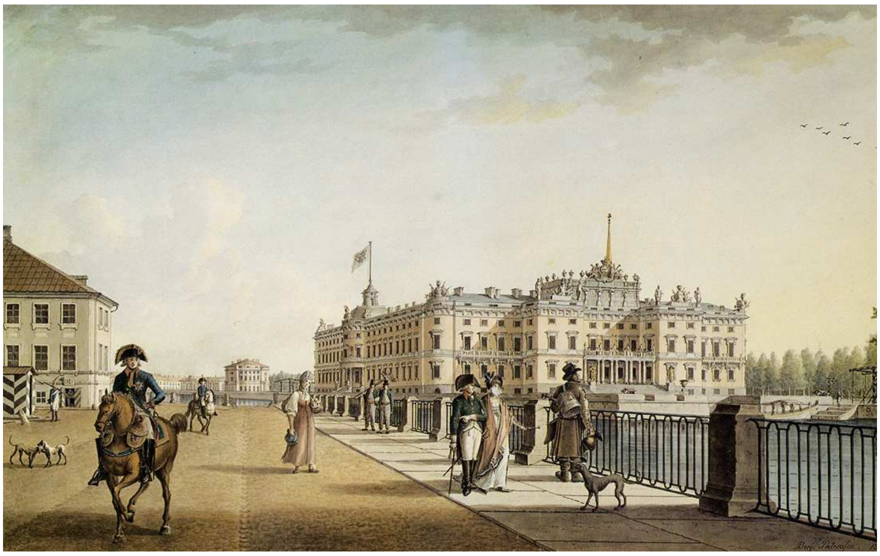
О задаче барона Мюнхгаузена. Леонард Эйлер. Часть 2

В. Н. Оникийчук, И. В. Оникийчук

Вторая часть статьи (первая опубликована в номере 3(115), 2025 г.) рассказывает о петербургском периоде жизни Леонарда Эйлера. Подробно объясняется суть достижений Эйлера в понимании и решении динамических задач механики твердого тела. Эта часть печатается с продолжением.

Леонард Эйлер в Санкт-Петербурге

По приезде в Санкт-Петербург Леонард Эйлер поселился в доме на Васильевском острове. В 1731 г. ему предложили вакансию профессора в Академии Наук вместо профессора Билфингера, выбывшего в Германию. Довольно быстро Эйлер был избран членом Академии Наук и спустя два года возглавил кафедру математики на месте уехавшего в Базель Даниила Бернулли. Женился Леонард в 1734 г. на Каталине Гзелль — дочери швейцарского художника Георга Гзелль[1], к тому моменту уже давно переехавшего в Россию. Жалованье профессора Эйлера составляло 600 р., что по тем временам было весьма солидной суммой. Жизнь налаживалась. Современники Л. Эйлера отмечали, что он за год пребывания в России усвоил русский язык. Более того, первые свои работы публиковал на русском языке.



Санкт-Петербург, XVIII век.

[1]**Георг Гзелль** был пригашен на работу в Россию Петербургской Академией художеств. В 1720 году был назначен хранителем императорских галерей. Он занимался пополнением, хранением и первой каталогизацией императорской коллекции живописи. С 1727 года преподавал живопись и рисунок в Российской Академии наук в Санкт-Петербурге и иллюстрировал несколько изданий академии, оформлял росписями Летний дворец Петра I и Грот в Летнем саду и лютеранскую церковь Святых Петра и Павла, коронационные триумфальные ворота и триумфальные ворота на Троицкой пристани, работал над убранством Петропавловского собора.

Однако, интриги и придворная чехарда вокруг малолетних наследников престола (12-летнего царя Петра II, а затем 3-месячного Ивана VI) вносили повсеместную нервозность и неопределенность будущего. Следовавшие за интригами кадровые перестановки в Академии Наук усиливали эту неопределенность.

Внешне казалось, что придворные интриги и сплетни никак не затрагивают Эйлера. Он был спокоен и невозмутим, ни в каких интригах не был замечен. Как отмечали его современники, Леонард делал всё быстро и хорошо. Руководство Академии отмечало его высокую работоспособность и бесконфликтность. И вскоре ему дополнительно поручили руководить географическим департаментом Академии, заметно увеличив жалованье.

Это не разочарование, а прощание с иллюзиями

Всё уже случилось и произошло. Волчок не просто разрушил системную логику классической механики, он бросал вызов ей. Откуда у волчка появляется принципиально новое свойство — противодействовать силе тяжести при раскрутке? Парадокс волчка невозможно объяснить "частным случаем" ньютоновских законов.

В каждой теории есть своё главное ядро, вокруг которого выстроена теория. Если оно исчезает, то исчезает и сама теория, либо обретает качественно новую форму. Ключевым ядром в ньютоновской парадигме является второй закон Ньютона. Он определяет закон движения точечной массы в неподвижном (инерциальном) пространстве $OXYZ$.

Рисунок академика РАН Фоменко А.Т.

Точечная масса в этом пространстве имеет координаты $\{x, y, z\}$, которые в современной математике принято обозначать вектором[2] $\mathbf{x} = [x\,y\,z]^T$. Уравнение движения частицы массы m, в соответствии со вторым законом Ньютона, определяется дифференциальным уравнением второго порядка[3]: $m\,\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$, где $\mathbf{F}$ — вектор внешней силы, действующий на частицу. Для каждой из частиц твердого тела с координатой $x_i \in OXYZ$ и массой m_i можно написать аналогичное векторное уравнение:

$$m_i\,\ddot{\mathbf{x}}_i = \Phi_i^{int} + \mathbf{F}_i, \tag{1}$$

где Φ_i^{int} — статическая "внутренняя" сила, действующая со стороны соседних точек тела; $\mathbf{F}_i$ — сила от внешнего источника, находящегося вне геометрических размеров тела.

Все в этом утверждении логично и правильно, но проблема в том, что математической формулы для "внутренних сил" Φ_i^{int} твердого тела нет. Без этого знания уравнения (1) становились "просто картинкой".

Разумеется, в состоянии покоя совокупность всех статических "внутренних сил" Φ_i^{int} не может сдвинуть тело с места, поэтому сумма этих сил $\sum_{\mathbf{i}} \Phi_i^{int}$ должна быть равна нулю: $\sum_{\mathbf{i}} \Phi_i^{int} = 0$. Суммируя уравнения (1) по всем частицам, получаем уравнения для твердого тела: $\sum_{\mathbf{i}} (m_i \ddot{\mathbf{x}}_i) = \sum_{\mathbf{i}} \Phi_i^{int} + \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{F}_i$. В итоге получаем уравнение движения точечной массы $m_0 = \sum_{\mathbf{i}} m_i$ с координатой $\mathbf{x}_c$, которая является координатой центра масс тела.

$$m_0\,\ddot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{F}_c\,. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{F}_c$ — равнодействующий вектор внешних сил, m_0 — масса всего тела.

Из уравнения (2) видно, что форма тела никак не отражается в структуре уравнения. Точно так же не имеет значения, вращается тело относительно собственного центра масс, или нет. Это ключевой вывод в классической механике.

[2]Здесь символ T означает операцию транспонирования вектора.

[3]Уравнения для второго закона Ньютона были написаны Л. Эйлером в 1752 г. и опубликованы в работе "Открытие нового принципа механики".

Простые рассуждения на основе аксиом линейной алгебры и геометрии привели к выводу, что не существует никаких явных причин, из-за которых вращение могло бы как-то изменить траекторию движения тела. Действительно, вращение — это не сила, по-определению, и поэтому никак не вписывается в фундаментальный принцип причинности. С точки зрения геометрии и алгебры вращение и сдвиг — совершенно разные действия, никак не связанные между собой. Следовательно, концепция замены твердого тела массивной точкой с координатой (1) показалась безупречной.

Идея о том, что протяженное твердое тело всегда можно заменить точечной массой, размещенной в центре масс тела, ясно написана в главной работе И.Ньютона:

Ньютон И.: "*Центр тяжести системы двух или нескольких тел от взаимодействия тел друг на друга не изменяет ни своего состояния покоя, ни движения; поэтому центр тяжести системы всех действующих друг на друга тел (при отсутствии внешних действий, или препятствий) или находится в покое, или движется равномерно и прямолинейно*". [1, с.47].

Ньютоновская парадигма в точности соответствует фундаментальному принципу причинности, который утверждает, что только внешняя причина порождает действие. Из этого принципа, а также из уравнения (2) следует равенство нулю суммы "внутренних сил" $\sum_{\mathbf{i}} \Phi_i^{int} = 0$. Следовательно, ***Задача барона Мюнхгаузена*** принципиально невозможна в реализации.

Распаковка ящика Пандоры

"...Никто не может сам поднять себя на воздух, потянув вверх свой стул. Но как мы знаем, из опыта, движение одного тела может быть определено только другими телами, находящимися вне его" — твердо будет стоять на своем Эрнст Мах[4] в конце XIX века [2, стр. 170]. Такого же мнения ученые, в основной своей массе, придерживались и в XVIII в.

Наука занимается только измеримыми величинами. Что не измеряемо и не объективируется, то не предмет науки. Другими словами, знание — это не набор энциклопедических догм. Главнейший признак знания — это наличие в нем системной логики и возможность экспериментального подтверждения. Система знаний в идеале — это некий непротиворечивый набор принципов, которые делают цельным мировоззрение. И всё же, каждая научная теория имеет свой жизненный цикл.

Ньютоновские законы механики можно условно считать линейными, поскольку мера движения в этом случае пропорциональна величине действующей внешней силе. Конечно, понятие "линейности" здесь рассматривается в метафизическом смысле, ведь дифференциальное уравнение (2) по своей математической природе является нелинейным.

Физический эффект ***нелинейности*** проявляется в том, что система создает в процессе движения новые силы, которые качественно меняют поведение системы. Система внезапно, без предупреждения, начинает демонстрировать поведение, которое раньше и представить было невозможно.

Постулат причинности лежал в фундаменте всех физических и статических законов мироздания. Это был, фактически, один из главных законов метафизики. Он утверждал: сначала причина, а потом — следствие, но не наоборот. Такая ***линейная*** последовательность событий принципиальна. Внешняя причина порождает движение и изменяет его. Ключевое слово здесь — ***внешняя***. Мир XVIII в. — мир статичных фигур. Отсюда и главная наука XVIII в. — геометрия, и поэтому математиков XVIII в. называли геометрами.

От Ньютона начиналась новая эпоха изучения движения тел. Мир медленно и осторожно погружался от статического состояния в ***динамическое мышление***. Переход от статики и геометрии к дифференциальным уравнениям — к динамике — был весьма болезненным в XVIII–XIX в.в. Попытки перестроить динамику на привычных принципах статики не исчезли и в XX в. Но это уже отдельная любопытная история.

Причиной конфликта в научной теории, построенной на "линейных принципах", является то, что "линейные принципы" создают *нелинейный* эффект наблюдаемых физических явлений. Одним из

[4]**Эрнст Мах** (1838—1916) — австрийский физик, механик и философ-позитивист.

первых примеров *нелинейного динамического эффекта* в “*линейной метафизике*” и стал волчок. Эффект волчка ломал фундаментальный “*линейный*” принцип причинности, поскольку он не вписывался в линейный постулат причинности. Фундаментальное непонимание этого эффекта состоит в том, что математикам XVIII в. был непонятен механизм перехода от “линейного принципа” причинности к нелинейным динамическим эффектам.

Волчок осторожно подсказывал, что мир является “сильно нелинейным”. Это значит, что причина и следствие в процессе могут меняться местами. Естественно, к такому радикальному переходу в XVIII в. и даже в XIX в. психологически никто не был готов. Это ведь нарушение метафизического принципа причинности, который лежит “над законами физики”.

В свою очередь, динамическая концепция мира Ньютона также безжалостно и последовательно, ломала статику и геометрию XVII в., поскольку и она была, по сравнению со статикой, тоже *нелинейной*. Именно поэтому ньютоновская концепция с трудом осознавалась в течение столетия после смерти Ньютона.

Динамический эффект волчка был также *нелинейным* эффектом, но его степень *нелинейности* была на порядок выше “нелинейных” принципов Ньютона. Именно поэтому психологический эффект волчка оказался настолько непривычным, что на него решили закрыть глаза и молча решили оставить задачу “до лучших времен”. Может, лучше не идти в атаку на эту задачу, а отсидеться в тихой стороне? В учебниках по физике и механике нередко либо вообще не писали про этот эффект, либо говорили бегло, вскользь, как о чем-то незначительном.

Последствия

Классические уравнения Ньютона (2) не были способны объяснить “*сильно нелинейный*” динамический эффект волчка. Ни геометрия, ни статика таких “кульбитов” не могли предусмотреть. Что делать: тихо отсидеться в окопе, или подняться в полный рост и идти в атаку?

Первые признаки “слабых эффектов нелинейности” при движении твердого тела отметил Христиан Гюйгенс. Он отмечал, что частота колебаний физического, протяженного маятника лишь приблизительно моделируется уравнением движения центра масс [3]. Леонард Эйлер знал эту драматичную историю о движении “твердого телесного” маятника. Он еще в юности, будучи в Базеле, прочитал книгу своего учителя Германа “Форономия...”, где была сделана попытка описать движение “телесного” (физического) маятника. Это была достаточно знаменитая и удивительно сложная задача.

Горькую пилюлю о том, что протяженное массивное тело нельзя заменять материальной точкой даже на примере простейшего физического маятника пришлось геометрам XVIII в. молча “проглотить”. Иоганн Бернулли придерживался той же точки зрения, что задача с вращающимися телами представляется абсолютно непонятной и неразрешимой. Масштаб надвигающегося явления было трудно оценить. Позже Лагранж в своей “Аналитической механике” об этом казусе напишет:

Лагранж Ж.Л.: “*...Математики продолжали молча допускать, что центр удара совпадает с центром колебаний*” [4, т. 1, с. 304].

В каждом заявлении должна быть некая добавленная стоимость. Другими словами, есть ли смысл браться за эту задачу? Несет ли в себе она принципиально новые знания? Однако, “добавленная стоимость” в задаче о волчке не просматривалась. Никто не видел научных перспектив в раскрытии парадокса волчка и физического маятника. Движение к сущности всегда имеет свои психологические границы. Следовательно, если нет видения перспективы, то нет и длинной воли к решению проблемы.

Знание в своей глубинной сути — это способность выявлять закономерности. Если вы продолжаете играть по этим “двойным стандартам” и схемам, то вы уже проиграли в будущем. Если вы не пытаетесь разобраться в противоречиях, вы молча передаете нерешенную проблему будущим поколениям и стыдливо расписываетесь в своем бессилии.

Если мы упорствуем и пытаемся подстроить ньютоновскую парадигму под якобы "случайные" частные случаи, то допускаем "двойные стандарты" в мышлении и противоречия в логике. Высказывание и его отрицание не могут быть вместе истинными. В этом случае вместе с противоречиями к нам неизбежно приходит кризис и разрушение иллюзий.

Парадигму "по щелчку пальца" поменять не получится. Для этого надо понимать, в какой ситуации утверждение науки является истинным, а в какой — ложным. А это совсем не просто. Даже очевидные противоречия не дают ясности, какая же из аксиом "фальшивит".

Загадка волчка в полной мере не была вскрыта и в XIX в. Существенно позже, в XX веке известный американский ученый и историк механики Трусделл К. написал:

Трусделл К.: "*... В 1750 году никто не мог сказать, что общее движение твердого тела вообще понимали. Даже для движения вокруг неподвижных осей нельзя было вычислить обратное действие тела на свою опору, и метод определения поведения вращающегося волчка известен не был*" [5 стр. 148].

Работал исторический фактор накопления причинности. Как долго будет накапливаться эта причинность и когда она достигнет критического значения — заранее не знает никто. Однако закон непредвиденных последствий продолжает делать свою невидимую работу.

Люди высокого интеллекта склонны глубоко размышлять о вещах, которые другие считают как данность. Такие люди постоянно склонны сомневаться в своих решениях. Сильный человек признает реальность. Конечно, у человека есть еще совесть и этим он фундаментально отличается от искусственного интеллекта.

Совесть — это ограничение, которое накладывает сам на себя добровольно человек. Масштаб проблемы и честность перед собой, прежде всего, не позволяли Л. Эйлеру "закрыть глаза" на эффект волчка. Кто знает, к каким фундаментальным открытиям ведет этот тоненький ручеек возникших парадоксов. Может он ведет к водопаду новых знаний, или даже к океану открытий? Кто знает?

Сверхсложная система может осуществить прорыв, задействовав свою тонкую структуру, которая является хранителем ее потенциала сверхсложности. Но для этого надо знать тонкую структуру Системы. Вопрос об истоках здесь всегда крайне не прост. Леонард Эйлер увидел в парадоксальном эффекте волчка вселенский масштаб задачи. И этот масштаб выглядел пугающей темной бездной.

"Живые" и "мертвые"

Идею перехода от точечных уравнений к уравнению для твердого тела осторожно высказал Готфрид Лейбниц[5]. Он утверждал, что наблюдаемые странные эффекты в движении твердого тела вызваны фактором твердости ("непроницаемостью") тела.

Лейбниц утверждал, что величина импульса $m\mathbf{V}$ для произвольной частицы твердого тела является эквивалентом силового воздействия на соседние частички твердого тела. Суммарным эффектом этого воздействия может возникать более сложное движение.

Для Г. Лейбница было очевидно, что твердое протяженное тело принципиально отличается от точечной массы хотя бы тем, что тело может вращаться относительно собственного центра масс. В случае вращения тело имеет большую суммарную энергию, чем одинокая точка, поскольку тело имеет энергию вращения относительно собственного центра масс. Следовательно, движение твердого тела может быть в каких-то случаях принципиально иным, чем движение точечной массы, за счет дополнительной энергии вращения.

Сложные движения частиц тела не могут быть выведены из геометрического сложения движений — утверждал Лейбниц. При этом он подчеркивает, что его рассуждения не нарушают постулат о внешней силе, как первопричине движения [6, стр. 107]. Требуется лишь внести некоторые корректировки.

[5]**Готфрид Вильгельм Лейбниц** (1646-1716). Выдающийся математик и философ. Основатель и первый президент Берлинской академии наук, член Лондонского королевского общества (1673), иностранный член Французской академии наук, член Лондонского королевского общества, иностранный член Французской академии наук.

Кинетическая энергия[6] — пример принципиально нового типа сил, которые Лейбниц выделил отдельно и назвал ***живой***[7] ***силой***. Например, совокупность внешних физических сил $\mathbf{F}$ в уравнении (1) — это ***мертвая сила***, по мнению Лейбница. В качестве примера он ссылается на особенность движения маятника, у которого есть ***живая*** сила, т.е. кинетическая энергия в ее современной трактовке. И вот эта *живая* сила способна поднять маятник на исходную высоту. В этом смысле энергия тела производит такой же эффект, как и обычная сила.

Принципиальное отличие ***живой*** силы от ***мертвой***, в том, что первая возникает исключительно *в процессе движения.* ***Живая*** сила не существует отдельно от твердого тела. Нет движения тела — нет и *живой* силы [6, стр. 251].

Оставаясь в рамках ньютоновской парадигмы, Л. Эйлер увидел то место, где происходят "мутации" ньютоновских "линейных" физических принципов *в нелинейные парадоксы...* Суть в том, что для каждой частицы твердого тела воздействие соседних с ней частиц является внешней силой. Парадоксально, но это так: элементы "внутренних сил" являются для каждой отдельной частицы и внешними силами. Поэтому для каждой частицы тела можно написать закон движения в рамках второго закона Ньютона. Сохранение расстояний между всеми частицами твердого при сложном движении тела требует от всех частиц тела определенных взаимодействий.

Эйлер Л.: "*Тела обладают силой, способной непрерывно изменять свое состояние. Все явления доказывают, что в телах не может быть другой силы, кроме силы, направленной на сохранение их состояния*" [7. Стр. 18].

Эйлер Л.: " *В самой природе вещей скрыта настоящая* **субстанциональная** *причина, которая не перестает действовать, когда этого отсутствия достаточного основания уже нет*" [8, стр.69].

Фактически, Л. Эйлер вводит принципиально новый тип сил, которые он предложил назвать ***силами инерции*** $\mathbf{f}_i^{inert}$.

Эйлер Л.: "*Все, что способно изменять абсолютное состояние тела, называется силой*" [8, стр.354].

Теорема Эйлера: "*Если два тела сходятся таким образом, что ни одно из них не может сохранить своего состояния, а равно ни одно из них не может пройти сквозь другое, то они воздействуют друг на друга и вызывают силы, вследствие которых их состояние меняется*" [8 стр. 365].

Статические "внутренние" силы Φ_i^{int} в сумме дают нулевой вектор. Силы инерции $\mathbf{f}_i^{inert}$, в отличие от сил Φ_i^{int} и $\mathbf{F}_i$, возникают исключительно в процессе движения тела. Суть новой идеи Л. Эйлера была в том, в том, что сумма этих инерционных сил $\mathbf{f}_i^{inert}$ для твердого тела не равна нулю ***в процессе движения***, т.е. $\sum_i \mathbf{f}_i^{inert} \neq 0$. В покое сумма этих сил равна нулю, а при движении — нет. Эти силы необходимо как-то вычленить.

Эйлер Л.: "... ***Живая сила***, *как это будет определено выше, есть свойственная движущемуся телу сила, действие которой* **в состоянии сообщить движение другим телам**" [9,стр. 241-242].

Эйлер Л.: "*Существует два вида силы, способных сообщить телу движение. В первом случае, когда тело получает движение давления, или тяги, мы говорим, что это движение приводится* ***мертвой*** *силой...*

Во втором случае, в котором тело приобретает движение от другого сообщающего тела, то есть движение производится движением, мы говорим, что ***оно возникает от живой силы****.*

Итак, ***живая*** *сила есть способность, присущая движущемуся телу, благодаря которой оно в состоянии сообщить движение другим телам*" [9, стр. 238].

[6]Термин "кинетическая энергия" в трудах Лейбница отсутствует. Он появится в трудах ученых лишь в конце XVIII века. Определение кинетической энергии как $T = \frac{1}{2}\sum mV^2$ предложил Г. Кориолис в XIX в.

[7]Слова "живые" и "мертвые", применительно к понятии сила в работах Г. Лейбница и Л. Эйлера писались без кавычек.

Это не расхождение с концепцией Ньютона, а расширение поля, на котором предлагается поиграть. Таким образом, общее уравнение движения для произвольной частицы тела с координатой $\mathbf{x}_i$, в соответствии с гипотезой Л. Эйлера, можно записать так:

$$m_i\,\ddot{\mathbf{x}}_i = f_i^{inert} + \mathbf{F}_i$$

Здесь на точку с координатой $\mathbf{x}_i$ действуют следующие силы:

1. f_i^{inert} — инертная сила, возникающая в процессе движения,
2. $\mathbf{F}_i$ — вектор внешних физических сил.

С прекращением движения силы инерции $\mathbf{f}_i^{inert}$, создаваемые каждой частицей тела, бесследно исчезают. Гипотеза Л. Эйлера состояла том, что при движении твердого тела вся совокупность инерционных сил образует равнодействующую дополнительную силу $\mathbf{f}_c$, действующую в центре масс тела, и поэтому она способна изменять характер движения тела $\sum_i \mathbf{f}_i^{inert} = \mathbf{f}_c \neq 0$.

Это означает, что сверхсложная система может осуществить прорыв, задействовав свою тонкую структуру, которая является хранителем ее потенциала сверхсложности. Но для этого надо знать математическую структуру этих сил.

Для Л. Эйлера понятие живой силы стало сигналом о том, что наличие энергии тела при вращении, возможно, и является причиной странного поведения волчка [9, стр. 242]. Гипотеза Лейбница о том, что дополнительные силы $\mathbf{f}_i^{inert}$ могут возникать в процессе вращения тела, показалась Эйлеру весьма разумной.

Эйлер Л.: "*Мы с достаточной ясностью видим, что подобного рода силы могут получить свое начало из упругих тел и **из вихрей***" [8, т.1, стр. 20].

Эйлер Л.: "*Итак, я утверждаю, хотя это заявление и покажется очень странным, что то же самое свойство тел, благодаря которому они стремятся сохранить свое прежнее состояние, **способно породить силы, вызывающие изменение состояния других тел***" [10, стр.162].

И далее: "*Итак, в тех случаях, когда тела, не проникая одно сквозь другое, лишены возможности сохранить свое состояние, **силы как раз и порождаются непроницаемостью**. Вследствие же сил изменяется состояние тел*" [8, стр. 364-366].

Эйлер Л.: "*Следовательно, всякий раз, когда два или множество тел не сохраняют свое состояние без взаимного проникновения, тогда их непроницаемость всегда порождает силы, нужные для изменения их состояния*". [10, стр. 163] и аналогично: [10, стр. 164-165].

Эйлер Л.: "*Именно непроницаемость тел и является истинным источником сил, которые постоянно изменяют состояние тел. ... Вот истинная разгадка великой тайны, которая так учит философов*" [10, стр. 163].

Проблема на самой верхушке контура. Переход через Рубикон

Твердость тела в процессе сложного движения тела создает суммарную дополнительную силу $\mathbf{f}_c \neq 0$, приложенную в центре масс тела. Это результат наличия ***живой*** силы, о существовании которой говорил Лейбниц. Она возникает исключительно в процессе движения и исчезает при остановке тела.

И всё же, Л. Эйлер понятие живой силы трактовал шире, чем это делал Лейбниц. Для Лейбница живая сила олицетворялась, фактически, с кинетической энергией, или даже с центробежными силами. Л. Эйлер в понятие живой силы включил дополнительные силы более сложной композиции[8], которые возникают в процессе движения тела и которые удерживают тело твердым ("непроницаемым").

[8]Например, гироскопические силы, суммарный вектор которых в проекции на неподвижные (инерциальные) оси не равен нулю [13].

Эйлер Л.: "*Следовательно, способность отдельных тел к сохранению своего состояния порождает силы, вследствие которых изменяется состояние других тел*[9] " [8, стр.357].

Эйлер Л.: "*Следует отметить, что эти силы не имеют свои источником непроницаемость одного только тела; они порождаются непроницаемостью всех тел вместе взятых*" [10, стр. 164].

Утверждение, что новые силы "*порождаются непроницаемостью всех тел вместе взятых*" здесь, является, пожалуй, ключевым. Другими словами, равнодействующая всех этих динамических сил $\mathbf{f}_c \neq 0$ не равна нулю. Это ключевой вывод.

Кажется, паззл сошелся. Эта сила $\mathbf{f}_c$ ("*порождаются непроницаемостью всех тел вместе взятых*") не учтена в постулатах Ньютона, но она существует в процессе движения твердых тел. Говоря современным математическим языком, движение центра масс твердого тела должно, в конечном итоге, определяться уравнением:

$$m_0 \frac{d^2\mathbf{x}_c}{dt^2} + \mathbf{f}_c = \mathbf{F}_c$$

Здесь m_0 — масса всего тела, $\mathbf{x}_c$ — вектор-координата центра масс тела в неподвижном пространстве; $\mathbf{f}_c = \sum_i \mathbf{f}_i^{inert} \neq 0$ — "живая", дополнительная сила, которая возникает в процессе движения тела, $\mathbf{F}_c$ — равнодействующий вектор всех внешних ("мертвых") сил, действующий на тело и приложенный в центре масс тела. Другими словами, суммарный вектор *сил инерции не равен нулю*, $\mathbf{f}_c \neq 0$ и способен принципиально скорректировать траекторию движения тела.

Теорема Эйлера: "*Если два тела сходятся таким образом, что ни одно из них не может сохранить своего состояния, а равно ни одно из них не может пройти сквозь другое, то они воздействуют друг на друга* ***и вызывают силы, вследствие которых их состояние изменяется***" [8, стр. 365].

Эйлер Л.: "*Тем не менее,* ***непроницаемость*** *нас приводит к первоисточнику всех сил, а это чего-нибудь да стоит*" [8, стр. 365].

Постулаты Ньютона не предусмотрели возможности появления такого рода "сил твердости" $\mathbf{f}_c \neq 0$. Действительно, уравнение $m_0 \dfrac{d^2\mathbf{x}_c}{dt^2} = \mathbf{F}_c$ никаких дополнительных сил инерции от твердости тела не содержит.

Итак, Л. Эйлер развивает идею Лейбница о том, что частицы твердого тела, пытаясь сохранить постоянными расстояния между всеми частицами тела, в итоге создают новую силу $\mathbf{f}_c$, вследствие которой движение тела изменяется. *Это значит, что не только причина вызывает следствие, но и следствие тут же изменяет причину.*

Однако, легко сказать, да трудно сделать. Здесь одних слов мало. Требуется построить математический механизм выявления этих "***сил твердости***" $\mathbf{f}_c$. Новые формулы и уравнения должны, как минимум, объяснить эффекты волчка, физического маятника и жернового колеса.

Рай и ад люди выбирают сами

Современники отмечали, что Л. Эйлер был светским человеком, страстно одержимым наукой. У него всегда был ровный и невозмутимый характер. Сплетни и интриги, казалось, его не интересовали. По воспоминаниям историков науки, он был "чуть ли не дипломатом" во взаимоотношениях, и всё же сторонился придворной жизни.

К слову сказать, новая императрица Анна Иоанновна[10] проявила интерес к Академии наук. После ее смерти (1740 г) наследником престола стал 3-месячный Иван VI, а его мать Анна Леопольдовна[11],

[9] Имеется в виду — "соседних" частиц тела.

[10] **Анна Иоанновна** (1693—1740) — императрица Всероссийская с 1730 года из династии Романовых, сменившая на престоле Петра II, племянница Петра I, дочь его старшего единокровного брата Ивана V.

[11] Великая княжна **Анна Леопольдовна**, при рождении **Елизавета Катарина Кристина Мекленбург-Шверинская** (1718—1746), — внучка Ивана V по матери, и внучатая племянница Петра I Великого. Правительница-регент Российской империи с 9 ноября 1740 по 25 ноября (6 декабря) 1741 при своём сыне, малолетнем императоре Иване VI.

стала регентшей.

Леонард Эйлер к этому времени работал уже в нескольких департаментах. Он был востребован новой властью, ему доверяли. У него в Петербурге сложилась жизнь, родились два его сына, у него был хороший дом и достаток. И всё же, в среде придворных интриг Л. Эйлер чувствовал себя неуютно. Поговаривали, что Эйлер боялся Бирона[12]. Жалованье профессора по основному месту работы составляло 600 рублей, а дополнительный заработок в других департаментах давал прибавку еще 400 рублей.

После издания книги “Механика, или наука о движении, изложенная аналитически” (1736) Л. Эйлер чувствовал себя опустошенным. Выпущенная книга ему удовлетворения не приносила.

Леонард Эйлер

Эйлер Л.: “…*Я исследовал и другие работы. относящиеся к этой науке, разбросанные по многим местам, и лично для себя я изложил их планомерным и однообразным методом и привел их в удобный порядок*” [8, стр.34].

К его удивлению, после появления книги он стал известным в европейских аристократических кругах. И вот результат: король Пруссии Фридрих II пригласил его в Берлин, в Академию наук. Королевскому приглашению Леонард Эйлер был очень рад, но не хотел уезжать из С-Петербурга.

Он помнил слова Иоганна Бернулли, когда тот призывал его приехать в Россию: “*Лучше несколько потерпеть от сурового климата страны, в которой приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в котором муз презирают и обижают*” [11].

В семейном кругу всё же настаивали на отъезде в Берлин. Петербургская Академия не хотела отпускать Л. Эйлера и, чтобы удержать его, утвердила его *почётным членом Академии* с окладом 200 рублей. Однако настойчивые просьбы жены и его близких родственников сделали свое дело. В мае 1741 года разрешение на отъезд из России было получено.

По дороге в Германию Л. Эйлер то и дело наблюдал из окошка своего дилижанса мчащиеся в Россию экипажи. Европа неистово прорывалась в Россию. Это было похоже на какое-то массовое бегство из Европы. Навстречу этому людскому потоку экипажи из России в Европу по дороге почти не встречались. И только на постоялых дворах иногда замечались одинокие экипажи на пути в Европу. Во дворе они всегда стояли отдельно, окруженные строгой конной охраной. Это государевы люди ехали в Европу по своим, только им известным делам. Накормив и напоив лошадей, они

[12] **Эрнст Иоганн Бирон** (1690—1772) — фаворит русской императрицы Анны Иоанновны, регент Российской империи в октябре — ноябре 1740 года, герцог Курляндии и Семигалии. После смерти Анны Иоанновны (1740) Бирон стал регентом при несовершеннолетнем императоре Иване VI, что вызвало недовольство русского дворянства. По обвинению в “захвате регентства” и стремлении завладеть престолом Бирон был приговорён к смертной казни, замененной затем ссылкой (1740-1761).

перед рассветом стремительно покидали постоялый двор, стараясь как можно меньше привлекать внимания посторонних глаз.

Летом 1741 г. Леонард Эйлер с семьей: женой, двумя сыновьями и четырьмя племянниками прибыл в Берлин. В первые дни своего приезда в Берлин он был тепло принят королевой-матерью. Первое время Эйлера принимали в Берлине доброжелательно и вскоре после переезда его пригласили на придворный бал.

Будучи в Берлине, Леонард Эйлер не прерывал своих отношений с Санкт-Петербургом. Он участвовал в публикациях Петербургской Академии, приобретал для неё книги и оборудование, редактировал математические отделы русских журналов, вел широкую переписку с учеными России. К тому времени мать Леонарда Эйлера приехала к сыну и нянчилась с внуками после смерти своего мужа Пауля Эйлера (1747).

В доме Л. Эйлера в Берлине на полном пансионе годами жили молодые студенты из России М. Софронов, С. Котельников, С. Румовский[13], впоследствии ставшие академиками. Леонард Эйлер свои сочинения диктовал ученикам и помощникам, главными из которых были А.И. Лексель, Н.И. Фусс и М.Е. Головин (племянник М.В. Ломоносова).

В одном из писем (1748), Л. Эйлер писал М.В. Ломоносову, что "... *Он [Ломоносов] значительно опередил современных ему химиков и обнаружил глубокие познания в физике*" [12, стр. 180].

В ответном письме М.В. Ломоносов написал Л. Эйлеру, что "... *очень ценит внимание и доброе расположение к нему очень рад и в будущем вести с ним переписку*" [12, стр. 179].

Изнуренная Семилетней[14] войной Пруссия, переживала далеко не лучшие времена. Во время войны русская артиллерия разрушила загородный дом семьи Эйлера. Узнав об этом, фельдмаршал П.С. Салтыков немедленно возместил потери, а позже императрица Елизавета прислала от себя ещё 4000 рублей в качестве компенсации.

В дом Эйлера в Берлине часто наведывались в гости его коллеги по Санкт-Петербургу. К нему в гости, в Берлин, часто приезжал граф К.Г. Разумовский[15], который уговаривал Л. Эйлера вернуться в Санкт-Петербург.

По велению императрицы Екатерины II письмо с просьбой вернуться в Россию вручил Л. Эйлеру лично в руки посол России граф В.С. Долгоруков. Персональное письмо её величества было для Л. Эйлера весьма кстати. Он уже давно искал выход из ситуации и это был хороший повод вернуться в Санкт-Петербург.

"*Я уверена, что моя Академия возродится из пепла от такого важного приобретения, и заранее поздравляю себя с тем, что возвратила России великого человека*"[16] — писала об Л. Эйлере Екатерина II графу А.Р. Воронцову в январе 1766 года.

Однако король Пруссии не желал отпускать Л. Эйлера в Россию и всячески оттягивал разрешение на отъезд. Более того, он категорически отказался отпускать младшего сына Кристофа, который к тому времени служил подполковником в Прусской армии. Существенно позже, после персонального вмешательства Екатерины II, сын смог вернуться в Россию и дослужился в русской армии до звания генерал-лейтенанта.

Переехав обратно в Санкт-Петербург (1766), Л. Эйлер убедился, что императрица Екатерина II

---

[13]**Степан Яковлевич Румовский** (1734—1812) — русский астроном и математик, один из первых русских академиков (с 1767 года). Иностранный член Стокгольмской Академии наук. Инициатор открытия Казанского университета (1804). Много усилий он направил на преподавание с целью воспитать первое поколение российских учёных. Написал учебник "Сокращения математики" (1760). Один из составителей первого издания "Словаря Академии Российской" в 6 томах (1789—1794).

[14]Семилетнюю войну (1756—1763) историки часто называют первой мировой войной, поскольку в ней участвовали десятки стран.

[15]**Кирилл Григорьевич Разумовский** (1728–1803), граф, последний гетман Войска Запорожского генерал-фельдмаршал (1764), президент Петербургской академии наук (1746–1798). Основатель графского и княжеского рода Разумовских.

[16]**Леонард Эйлер**, материал из Википедии, https://ru.wikipedia.org/

слов на ветер не бросает. Она поступила по-царски, подарив семье Эйлера большой дом в Санкт-Петербурге. Леонард Эйлер и его семья были окружены вниманием со стороны государевых людей. Августейшим императорским Указом специально для Л. Эйлера был учрежден пост вице-президента Российской Академии наук. Такого поста раньше не было.

После того, как Леонард Эйлер вернулся в Россию, матушка-императрица поручила ему секретное дело большой государственной важности. Речь шла о том, чтобы создать первую в России противовоздушную оборону. Она проектировалась против возможного вторжения врагов России на воздушных шарах. Такие идеи вынашивались в Европе.

Императрице докладывали, что лучше Л. Эйлера никто не справится с этой задачей. Ему было поручено представить проект противодействия планам воздушного вторжения, которые, не стесняясь, часто обсуждали в политических кругах Европы. Российской Академии Наук предстояло знать о технических возможностях, а главное — о слабых и уязвимых сторонах этого способа вторжения. Знать слабости оружия противника — это наша сила.

К академическому жалованию Екатерина II распорядилась выдавать дополнительно и "персональную надбавку" так, чтобы общая сумма жалованья Леонарду Эйлеру составила 3000 рублей. Вскоре после новоселья Екатерина II приехала в дом Л. Эйлера "на чай" и убедилась, что ее распоряжение исполнено даже в мелочах. Она уехала в хорошем расположении духа.

Продолжение следует.

Литература

[1] Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Изд.3-е. - М.: Издательство ЛКИ, 2008. - 704 с.

[2] Мах Э. Механика. Историко-критический очерк ее развития. - Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. - 456 с.

[3] Оникийчук В.Н., Оникийчук И.В. Господь всегда дает больше, чем мы предполагаем. Христиан Гюйгенс и Готфрид Лейбниц // Математическое образование. - 2025. - № 1(113). - с. 69-75.

[4] Лагранж Ж.Л. Аналитическая механика. т. 1, 2. - Москва; Ленинград: Гос. Издат. техн.-теорет. лит., 1950.

[5] Трусделл К. Очерки по истории механики. - Москва-Ижевск, 2002.

[6] Лейбниц Г.В. Сочинения в 4-х томах. Т.1. - М.: АН СССР, Институт философии, Издательство "Мысль", 1982.

[7] Леонард Эйлер. Письма к ученым. - Москва-Ленинград: Издательство АН СССР, 1963. - 396 с.

[8] Леонард Эйлер. Основы динамики точки. Теория движения твердых тел, выведенная из первоначальных принципов нашего познания и примененная к движениям, которые могут иметь этого рода тела. - Москва-Ленинград: Главная ред. технико-теоретич. лит., 1938. - 500 с.

[9] Полак Л.С. Некоторые вопросы механики Леонарда Эйлера. В сборнике к 250-летию со дня рождения, представленных Академией наук СССР. - Москва: Издательство АН СССР, 1958.

[10] Леонард Эйлер. Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях. - С-Пб: "Наука", 2002. - 719 с.

[11] "Русская каша" математика Эйлера 13 марта. 2021 "Секретные материалы XX века". URL: https://dzen.ru/a/YEx4Sq9Bo2ZBky9x

[12] Леонард Эйлер. Переписка. Аннотированный указатель. - Ленинград: Издательство “Наука”, Ленинградское отделение, 1967, 376 с.

[13] Оникийчук В.Н, Оникийчук И.В., О динамических эффектах движения центра масс вращающегося твердого тела в центральном поле // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. - 2023. - выпуск 1. - с. 49–83.

Оникийчук Валерий Николаевич,
Государственный Университет Просвещения (г. Москва),
кафедра “Высшей алгебры, математического анализа
и геометрии”, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: valeryonikiychuk@yandex.ru

Оникийчук Иван Валерьевич,
инженер-математик, ПАО “Аэрофлот”, г. Москва.

E-mail: ionikv@inbox.ru

Памяти Андрея Михайловича Зубкова

Н. М. Трубицин

Краткий некролог Андрея Михайловича Зубкова, известного советского и российского математика. Завершается стихотворением автора, посвященным А.М. Зубкову.

Андрей Михайлович Зубков

Андрей Михайлович Зубков (30.12.1946 – 06.08.2025) — известный советский и российский математик, доктор физико-математических наук, заведующий отделом дискретной математики Математического института имени В.А. Стеклова РАН и кафедрой математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ, действительный член Академии криптографии Российской Федерации, главный редактор журнала «Дискретная математика».

Андрей Михайлович Зубков родился 30 декабря 1946 года в Москве. С ранних лет его отличали незаурядные математические способности: школьником он занимался в математических кружках и занимал призовые места в Московских математических олимпиадах. После окончания средней школы № 444 в 1965 году без экзаменов поступил на механико-математический факультет МГУ как победитель Международной математической олимпиады школьников в Берлине.

Большую роль во время обучения Андрея Михайловича в университете сыграл научный руководитель его дипломного проекта А.Д. Соловьёв. После окончания механико-математического факультета МГУ в 1970 году (по кафедре теории вероятностей) он был принят на работу в Математический институт имени В.А. Стеклова АН СССР, где, будучи соискателем, спустя два года успешно защитил кандидатскую диссертацию на тему «Условия вырождения модифицированных ветвящихся процессов» под руководством Б.А. Севастьянова. А в 1982 году состоялась защита уже докторской диссертации Андрея Михайловича на тему «Аппроксимации зависимых случайных величин независимыми и их применения».

Его работы охватывали множество различных направлений в области теории вероятностей и математической статистики. Андрей Михайлович является автором и соавтором более 150 статей, посвящённым ветвящимся процессам, вероятностным неравенствам, предельным теоремам для распределений сумм случайных величин, цепям Маркова, различным вероятностно-комбинаторным задачам, свойствам случайных размещений частиц по ячейкам, методам точного вычисления распределений статистик. Он является одним из авторов многократно переиздаваемого «Сборника задач по теории вероятностей». Вместе с Андреем Михайловичем писали работы такие учёные, как

1) Б.А. Севастьянов — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, член Академии криптографии РФ, сотрудник Математического института имени В.А. Стеклова РАН и профессор МГУ;

2) В.П. Чистяков — доктор физико-математических наук, профессор, член Академии криптографии РФ, ведущий научный сотрудник отдела дискретной математики Математического института имени В.А. Стеклова РАН;

3) В.А. Ватутин — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник отдела дискретной математики Математического института имени В.А. Стеклова РАН;

4) В.Г. Михайлов — доктор физико-математических наук, член Академии криптографии РФ, старший научный сотрудник Математического института имени В.А. Стеклова РАН;

5) Г.И. Ивченко — доктор физико-математических наук, профессор, член Академии криптографии РФ;

6) Ю.И. Медведев — доктор физико-математических наук, профессор, член Академии криптографии РФ;

7) Ю.С. Харин — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси;

8) В.Е. Тараканов — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела дискретной математики Математического института имени В.А. Стеклова РАН;

9) Э.Э. Гасанов — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ, заместитель главного редактора журнала «Интеллектуальные системы. Теория и приложения»;

10) О.К. Шибанов — кандидат физико-математических наук, PhD по финансам, профессор РЭШ;

11) Б.И. Селиванов — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела дискретной математики Математического института имени В.А. Стеклова РАН;

12) А.А. Серов — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела дискретной математики Математического института имени В.А. Стеклова РАН;

13) В.И. Круглов — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела дискретной математики Математического института имени В.А. Стеклова РАН;

14) А.В. Прохоров — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ;

15) Е.В. Хиль — кандидат физико-математических наук, учёный секретарь кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ;

16) О.П. Орлов — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории математической статистики механико-математического факультета МГУ;

17) М.В. Филина — старший лаборант отдела дискретной математики Математического института имени В.А. Стеклова РАН;

18) И.С. Бадалбаев — сотрудник института математики АН Узбекистана;

19) Н.Н. Попов — сотрудник Математического института имени В.А. Стеклова РАН;

20) Д.В. Шуваев — сотрудник лаборатории ТВП.

С момента основания Академии криптографии Российской Федерации (в 1991 году) Андрей Михайлович был избран её действительным членом, а в 1994 году он возглавил отдел дискретной математики МИАН. По совместительству Андрей Михайлович преподавал в Институте криптографии, связи и информатики и на механико-математическом факультете МГУ. Среди читаемых им дисциплин были такие курсы, как «Теория вероятностей», «Теория случайных процессов», «Дополнительные главы теории вероятностей», «Введение в криптографию». Также он вёл постоянный научный семинар «Дискретные задачи теории вероятностей».

Андрей Михайлович был главным редактором журнала «Дискретная математика», заместителем главного редактора журнала «Математические вопросы криптографии», а также членом редакционной коллегии журнала «Теория вероятностей и её применения». Почти 30 лет он возглавлял кафедру математической статистики и случайных процессов на механико-математическом факультете МГУ. Под его руководством были защищены 12 кандидатских диссертаций. Вклад Андрея Михайловича в развитие отечественной науки был отмечен орденом Почёта и медалью ордена "За заслуги перед Отечеством" II степени.

Андрей Михайлович был не только настоящим профессионалом, замечательным преподавателем и известным учёным, но и добрым, отзывчивым человеком. Его отличали внимательность, организованность, трудолюбие, а также скромность и щепетильность по отношению к своим научным достижениям. Андрей Михайлович имел почти энциклопедические знания о прикладных и теоретических аспектах исследуемых им направлений математики. Многие работы Андрея Михайловича представляют интерес не только для дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики, но и для криптографии.

Светлая память об Андрее Михайловиче Зубкове навсегда останется в сердцах его коллег и учеников.

Организованный, спокойный,
Трудолюбивый... Был таков
К несчастию, уже покойный
Андрей Михайлович Зубков.

Великий и одновременно
Простой и скромный человек —
Такую личность, несомненно,
Запомнит двадцать первый век.

Сначала алгебры любитель
И геометрии фанат,
Причём призёр и победитель
Бесчисленных олимпиад.

Затем студенчество, свобода,
Наука, молодость, мехмат
И выпуск. А спустя два года
На свет явился кандидат.

И вот, уже не соискатель,
Не ученик и не студент,
А доктор и преподаватель,
Руководитель и доцент,

Редактор нескольких журналов,
Известнейший для многих стран,
Профессор, сделавший немало
Для МГУ, ИКСИ, МИАН,

Эксперт практических аспектов,
Знаток дискретных областей
И вероятностных объектов,
Соавтор множества статей.

У многих вклад его в науку
Производил к ней интерес.
Сперва учёному под руку
Попал ветвящийся процесс.

Ну а затем, никак иначе,
Решал он множество проблем:
Комбинаторные задачи,
Поток предельных теорем

Для разных сумм распределений,
Проблемы Марковских цепей,
Оценок, точных вычислений
Объектов разных областей,

Сходимостей, аппроксимаций
И свойств случайных величин.
При этом в ряде публикаций
Был академик не один:

Работал с ним сам Севастьянов,
Писали вместе с ним Круглов,
Хиль, Бадалбаев, Селиванов,
Михайлов, Филина, Орлов,

Ватутин, Ивченко, Шибанов,
Медведев, Харин, Чистяков,
Попов, Шуваев, Тараканов,
Гасанов, Прохоров, Серов…

Как много рядом с ним фамилий!
Их трудно перечислить всех!
Как много вложено усилий!
Какой достигнут им успех!

Успех научного полёта
Идей, фантазий, мыслей, дум!
Недаром орденом Почёта
Был награждён великий ум

И за талант, и за заслуги,
И за труды прожитых лет.
Но вот, болезни и недуги
Свели жизнь гения на нет…

И вот, со взглядом огорчённым,
С печалью, грустью и тоской,
Увы, простились мы с учёным,
Обретшим навсегда покой.

Теперь, смотря на труд незримый,
Лишь вспоминаем мы, каков
Был человек неповторимый –
Андрей Михайлович Зубков.

Трубицин Никита Михайлович,
сотрудник ООО «Центр сертификационных исследований», Москва.

E-mail: trubitsin.nik@mail.ru

Информация

О деятельности ФМОП в 2025 г.

От редакции

В 2025 г. Фонд математического образования и просвещения (ФМОП) осуществлял следующие виды деятельности по разделам: поддержка образовательных инициатив, издательская деятель ность, благотворительная деятельность:

- Методическая поддержка и обеспечение экспериментальными учебными материалами учащихся старших классов ГБОУ Школа № 179 г. Москвы.
- Поддержка мероприятий по работе со школьниками: Турнир Городов, Турнир Ломоносова, Летняя конференция Турнира Городов, Летние математические лагеря.
- Выпуск журнала “Математическое образование”, издателем и учредителем которого ФМОП является; в 2025 г. вышли номера 1(113), 2(114), 3(115), 4(115).
- Участие (очное и он-лайн) в мероприятиях по популяризации математического образования и просвещения.
- Выпуск приложения к журналу “Математическое образование”: вышли в он-лайн и печатном варианте выпуски 10 и 11 по разделу “Образование: история, персоналии, проблемы”.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей математической Олимпиады школьников ТИИМ, гг. Самара и Москва.
- Предоставление изданий Фонда для летнего математического лагеря “Алые Паруса”.
- Предоставление изданий Фонда для летнего математического лагеря “Берендеевы поляны”.
- Предоставление изданий Фонда для участников Всероссийского семинара “Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом”.
- Предоставление изданий Фонда для смены “2×2”, Сириус, февраль 2025 г.
- Предоставление изданий Фонда для учащихся Школы № 2, г. Москва, май 2025 г.
- Предоставление изданий Фонда в редакцию журнала “Квант”, май 2025 г.
- Предоставление безвозмездных транспортных услуг организациям и физическим лицам, работающим в области математического образования.
- Организация бесплатной подписки на журнал “Математическое образование” ряду организаций и физических лиц, работающих в области математического образования.
- Организация и проведение международной математической олимпиады «Осенний Олимп» для школьников 1-9 классов.
- Организация и проведение международного конкурса «Выход есть!» для школьников и взрослых.
- Организация и проведение командного конкурса по математике «Математическая сДача» для школьников 3-6 классов (осенний и весенний туры).
- Предоставление грантов на путёвки в математические смены в лагерь «Берендеевы поляны» проживающим в регионах победителям олимпиад и конкурсов, проводимых Фондом.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2026 год (1 экз., включая стоимость пересылки): 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2026 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.
Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки): 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!
Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. Редакция принимает материал к публикации или отклоняет без объяснения причины. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776