ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

год двадцать девятый

номер 4 (116)

октябрь - декабрь 2025

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 4 (116), 2025 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2025 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 16.01.2026 г.
Стиль верстки разработан С.А. Кулешовым.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (116), октябрь – декабрь 2025 г.

Содержание

Учащимся и учителям средней школы

О тонкостях применения метода интервалов

П. В. Бибиков, В. Д. Конышев, Б. Р. Мигранов

В статье рассказано о преимуществах и тонкостях применения метода интервалов при решении неравенств.

Метод интервалов является одной из основных техник решения школьных неравенств. Тем удивительнее то, что механика его применения до сих пор не устоялась, и разные учителя используют совершенно разные техники для его реализации.

Тем не менее, основа у всех этих техник общая. Она заключается в *исследовании знаков* некоторого выражения и определении промежутков числовой прямой, на которых эти знаки постоянны. Поскольку функция, задающая выражение, как правило, является непрерывной (на своей области определения), смена ее знака возможна при прохождении через ноль или при смене промежутка области определения. Таким образом, метод интервалов позволяет свести *решение неравенства* к *решению уравнения*, что зачастую является существенным упрощением.

Напомним на простом примере, как работает метод интервалов.

Пример 1. Решить неравенство $\dfrac{1}{x} \geqslant 1$.

Первая ошибка, которую часто допускают школьники, решая рациональные неравенства, заключается в следующем. Они выписывают ОДЗ (в нашем случае $x \neq 0$), а затем домножают обе части неравенства на наименьший общий знаменатель, сводя задачу к неравенству полиномиальному (т.е. к многочлену). Получается система

$$\begin{cases} 1 \geqslant x \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Эта система и дает нам ответ. Однако он *неверен*. Почему? Ведь ОДЗ учтено!

Дело в том, что *нельзя домножать неравенство на переменную величину.* Потому что неравенство сохраняет знак при умножении на положительное число и меняет знак при умножении на отрицательное число. Но мы умножаем неравенство на *переменную величину* x. И при каких-то значениях x (например, при $x = 2$) эта величина будет положительной, а при других x (например, при $x = -1$) она будет отрицательной. В результате совершенно непонятно, что делать со знаком нашего неравенства: то ли менять, то ли не менять Поскольку при домножении на знаменатель мы знак неравенства не изменили, то мы тем самым неявно наложили на x условие $x > 0$, полностью проигнорировав случай $x < 0$, который из нашего рассмотрения выпадает.

Разумеется, иногда бывают ситуации, когда домножение даже на переменный знаменатель возможно. Это происходит тогда, когда *знак знаменателя постоянен.* Например, можно умножить неравенство на $x^2 + 1$, поскольку это выражение всегда больше 0. Однако, как правило, на знаменатели домножать нельзя, поскольку они могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. И что же делать тогда?..

Часто школьники, не знакомые с методом интервалов, предлагают просто разобрать два случая: когда знаменатель больше нуля и когда он меньше нуля. Но здесь важно понимать, что при увеличении количества дробей в примере, а также при усложнении самих знаменателей, число вариантов возрастает очень быстро. Например, перебор знаков в произведении $(x-1)(x+1)(x-2)$ потребует минимум четырех случаев! Поэтому перебор вариантов (как и практически во всех алгебраических задачах) *не дает необходимой скорости и надежности.* Мы пойдем другим путем.

Для начала перенесем все слагаемые в одну часть неравенства, оставив в другой части 0:

$$\frac{1}{x} - 1 \geqslant 0.$$

Почему удобно сравнивать выражение с нулем? Потому, что нам достаточно следить лишь за *знаком* выражения, а не за его численными значениями! А информацию о знаке выражения можно получить, разложив его на множители (поскольку, зная знаки сомножителей, мы сможем однозначно определить знак всего выражения).

Итак, план действий таков: переносим все слагаемые в одну часть, приводим все к общему знаменателю и раскладываем числитель и знаменатель на множители. В результате мы получим следующее неравенство:

$$\frac{1-x}{x} \geqslant 0.$$

Заметим, что в числителе знак перед переменной x отрицательный. Это не очень-то удобно, поэтому поправим знак числителя, умножив все неравенство на -1:

$$\frac{x-1}{x} \leqslant 0.$$

Ну а теперь настало время применить *метод интервалов.* В чем этот метод состоит? Оказывается, что суть его скорее в геометрии, а не в алгебре! Нарисуем координатную прямую и отметим на ней *нули* числителя и знаменателя. При этом закрасим соответствующий нуль черным цветом, если он входит в ответ, и белым, если не входит. В частности, все нули знаменателя всегда белые. (Вот вам и учет ОДЗ! Оказывается, заранее его выписывать совершенно не нужно!)

Теперь запустим по нашей прямой *змейку.* Змейка — это кривая, являющаяся графической иллюстрацией знака нашего выражения, которое мы сравниваем с 0. А именно, если змейка на каком-то интервале *выше* нашей координатной прямой, это означает, что на данном интервале знак выражения *положителен*, а если *ниже*, то *отрицателен.*

Запускается змейка *всегда справа налево.* Почему? Дело в том, что правая часть нашей координатной прямой — это большие положительные x. При таких x легко контролировать знак выражения. А именно, если сделать так, чтобы знаки коэффициентов при x во всех скобках были бы положительны (вот почему мы домножили неравенство на -1), то очевидно, что и числитель, и знаменатель при больших x также будут положительны. А раз так, то и все выражение положительно! Значит, змейка идет *сверху.*

Ведя змейку налево, мы встретим первый нуль, т.е. отмеченную точку (в нашем случае это точка 1). Ясно, что если $x > 1$, то и числитель, и знаменатель будут положительны (поэтому змейка подошла к точке 1 сверху). Но если x будет чуть-чуть меньше 1, то числитель станет отрицательным, в то время как знаменатель все еще будет положительным. Значит, знак всего выражения поменяется, и змейка должна уйти вниз, перейдя за точку 1! Мы будем говорить, что *змейка глотает точку 1.*

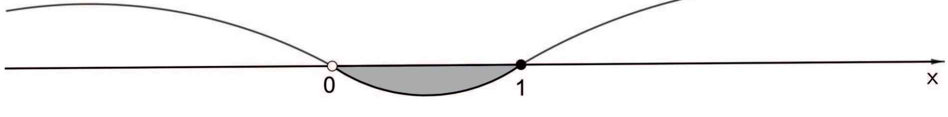


Рис. 1.

Абсолютно аналогично змейка проглотит и точку 0. Нам осталось только заштриховать ту область, на которой змейка ниже координатной оси, поскольку нам нужен знак $\leqslant$ согласно нашему неравенству, и просто записать ответ, глядя на рис. 1: $0 < x \leqslant 1$. Вот и все!

Ответ: $0 < x \leqslant 1$.

Упражнение 1. Используя метод интервалов, решите следующие неравенства:

1. $\dfrac{x}{x-4} < 3$. 2. $\dfrac{1}{3-2x} \leqslant 1$. 3. $\dfrac{2x-1}{3x+5} \leqslant -2$.

Разберем более сложный пример.

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{x}{1-x} < x - 6.$$

Начало решения полностью повторяет решение предыдущего примера: мы не домножаем на знаменатель, поскольку он может быть отрицательным, а переносим все слагаемые в левую часть и приводим выражение к общему знаменателю:

$$\frac{x^2-6x+6}{1-x} < 0.$$

Что делать дальше? Во-первых, поменяем знак в знаменателе, потому что нам удобно, чтобы коэффициент перед x был бы положительным. Домножая неравенство на -1, получаем

$$\frac{x^2-6x+6}{x-1} > 0.$$

Далее, нам нужно поймать точки, в которых числитель и знаменатель дроби меняют знак. Точки смены знака — это нули числителя и знаменателя. Именно эти точки мы затем отметим на координатной прямой и запустим через них змейку. Но если со знаменателем все понятно (он обращается в 0 в точке 1), то числитель представляет собой квадратный трехчлен.

В таких случаях очень важно не просто найти корни квадратного трехчлена (их, кстати говоря, иногда можно и угадать), но и обязательно *разложить выражение — квадратный трехчлен — на множители*. Почему нам важно разложение? Дело в том, что именно за *линейными скобками* мы следим при применении метода интервалов. Другая важная мотивировка разложения на множители будет дана ниже.

Поскольку у нашего квадратного трехчлена «плохие» корни, удобно оформить решение так. Следующий переход запишем таким образом:

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{x-1} > 0, \quad \text{где } x_1 = 3 - \sqrt{3^2-6} = 3 - \sqrt{3} \text{ и } x_2 = 3 + \sqrt{3^2-6} = 3 + \sqrt{3}.$$

Т.е. мы в дальнейшем будем использовать обозначения x_1 и x_2 для записи громоздких корней $3 \pm \sqrt{3}$.

Плохие корни порождают еще одну сложность при использовании метода интервалов. Нам важно *в правильном порядке* расположить нули числителя и знаменателя на координатной прямой. Понятно, что $x_2 = 3 + \sqrt{3} > 1$. Теперь давайте сравним $x_1 = 3 - \sqrt{3}$ и 1. В таких случаях нужно *всегда* кратко пояснять, какое из чисел больше. Сделать это можно так:

$$\sqrt{3} < 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 - \sqrt{3} > 3 - 2 = 1.$$

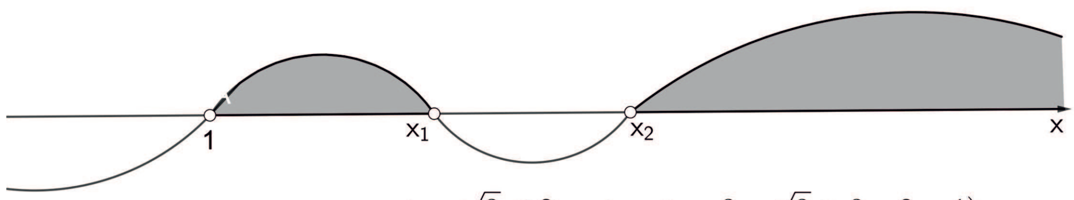
Приведем еще раз всю цепочку преобразований с самого начала:

$$\frac{x}{1-x} < x - 6 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} - (x-6) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-(1-x)(x-6)}{1-x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-6x+6}{1-x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-6x+6}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{x-1} > 0,$$

где $x_1 = 3 - \sqrt{3^2 - 6} = 3 - \sqrt{3}$ и $x_2 = 3 + \sqrt{3^2 - 6} = 3 + \sqrt{3}$.

Теперь можно рисовать координатную прямую и запускать змейку (см. рис. 2).



(т.к. $\sqrt{3} < 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 - \sqrt{3} > 3 - 2 = 1$).

Рис. 2.

Ответ: $1 < x < 3 - \sqrt{3}$, $x > 3 + \sqrt{3}$.

Упражнение 2. Решите следующие неравенства: 1. $\dfrac{4}{x+3} < \dfrac{3}{x-1}$. 2. $x \leqslant \dfrac{2}{x+1}$.
3. $\dfrac{7}{x^2 - 5x + 6} + \dfrac{9}{x-3} + 1 \leqslant 0$. 4. $\dfrac{1}{x^2 + 8x - 9} \geqslant \dfrac{1}{3x^2 - 5x + 2}$.

Кажется, что метод интервалов в такой форме записи является довольно рутинным и техническим методом. На самом деле не все так просто. В методе интервалов (как и в любой другой теме) есть свои подводные камни. Опишем одну такую проблему, решив еще один пример.

Пример 3. Решить неравенство

$$x \leqslant 3 - \frac{1}{x-1}.$$

Действуя по схеме, описанной выше, мы в конце концов приведем неравенство к виду

$$\frac{(x-2)^2}{x-1} \leqslant 0.$$

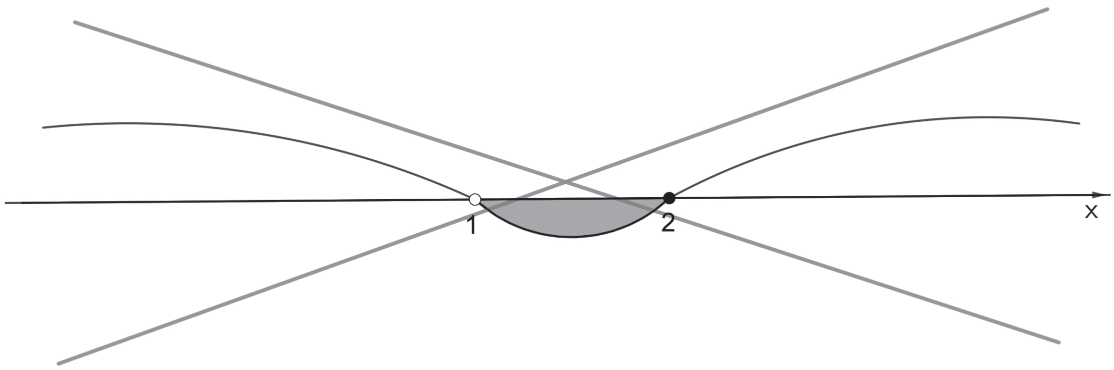


Рис. 3.

Запустив змейку как обычно (см. рис. 3), мы получим ответ $1 < x \leqslant 2$, который оказывается *неверным* (например, точка $x = 1{,}5$ не должна входить в ответ, а точка $x = 0$, наоборот, должна). Давайте посмотрим, чем отличаются неравенства

$$\frac{(x-2)^2}{x-1} \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{x-1} > 0.$$

Видно, что в первом случае скобка содержит *квадрат*. Видимо, в этом все дело…

Как влияет наличие квадрата на поведение нашей змейки? Видно, что при проходе через точку $x = 2$ змейка *не должна менять знак*, потому что скобка, стоящая в квадрате, не меняет знака!

Поэтому точка $x = 2$ — *опасная*, и змейке ее нельзя глотать. В таком случае будем говорить, что змейка *кусает* опасную точку.

Чтобы всякий раз не думать, глотать точку или кусать, полезно перед тем, как мы запускаем змейку, отметить все опасные точки, например, восклицательным знаком (см. рис. 4). Тогда змейка точно их не проглотит, поскольку будет *видеть*, что точки эти опасные!

А какие точки являются опасными? Когда знак выражения не меняется при проходе через эту точку? Ответ такой: точка является опасной, если скобка, которая ее содержит, входит в наше выражение *в четной степени*. Именно в этом случае знак такой скобки не будет меняться. Например, точка 2 в выражении

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}$$

опасная, поскольку она входит в степени $1 - 1 = 0$. Хотя, конечно же, чаще всего встречаются опасные точки степени 2. Напротив, скобки, стоящие в нечетных степенях $1, 3, \ldots,$ опасными не являются, и соответствующие точки змейкой проглатываются как обычно.

Вот почему важно *раскладывать числитель и знаменатель на множители*, а не просто искать их корни! Если не написать выражение $(x-2)^2$, мы *не увидим* четной степени и не поймем, что точка $x = 2$ — опасная! А именно на этом часто ловят школьников в олимпиадных задачах и примерах ЕГЭ.

Теперь мы можем нарисовать правильную картинку (см. рис. 4) для метода интервалов в нашем неравенстве

$$\frac{(x-2)^2}{x-1} \leqslant 0.$$

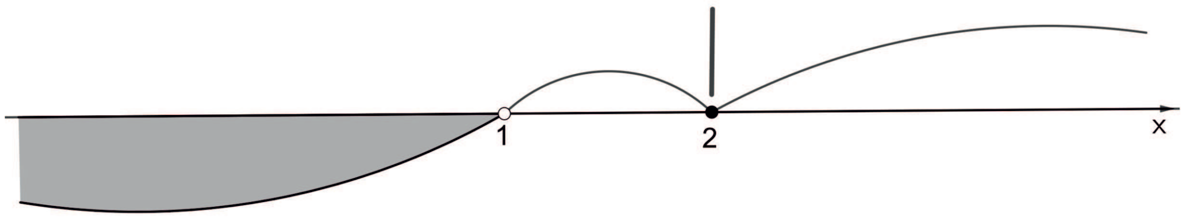


Рис. 4.

Остается только лишь выписать ответ. И вот здесь нас подстерегает еще одна опасность. Хочется выписать ответ $x < 1$, поскольку именно он и закрашен на рисунке. Но мы забыли опасную точку $x = 2$. Ведь она черная и потому тоже должна входить в ответ! Однако стоит эта точка *одна*, поэтому заметить ее, когда мы собираем ответ, непросто! Такие точки называются *изолированными*, и чаще всего именно о них забывают при решении задачи. Поэтому нужно помнить, что точка опасна не только потому, что ее нужно укусить, но еще и потому, что, если она черная, ее нужно не забыть включить в ответ! Напротив, если опасная точка белая, то ее в ответ включать не нужно. Такие точки называются *выколотыми*.

Ответ: $x < 1$, $x = 2$.

Упражнение 3. Решите следующие неравенства:

1. $x + 3 + \dfrac{4}{x-1} < 0.$ 2. $\dfrac{5x+1}{x^2-x-6} \geq 1 + \dfrac{16}{x-3}.$ 3. $\dfrac{2x-3}{x} \geqslant \dfrac{3-2x}{2x^2-4x}.$

Во всех рассмотренных выше примерах функция f, чьи знаки мы исследовали, была рациональной, т.е. имела вид $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где P и Q — многочлены. Оказывается, можно использовать метод интервалов и для решения неравенств с модулями и корнями.

Пример 4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{4-2x} \geq -1.$

Решение. Начнем действовать, как и раньше: перенесем все выражения в одну часть и приведем все к общему знаменателю. В результате мы получим следующее неравенство:

$$\frac{\sqrt{x^2-2}-2x+4}{2x-4} \le 0.$$

В обычном методе интервалов на следующем шагу нужно разложить на множители числитель. Но здесь стоит квадратный корень, и разложить такое выражение на множители невозможно! Как же быть?

Вспомним, что нашей основной целью было нахождение *нулей* числителя и знаменателя и последующее определение *их знаков*: именно через нули проходила змейка, а глотая и кусая точки, мы быстро определяли знаки выражения на каждом из промежутков. Сейчас эти действия требуют некоторой корректировки.

Прежде всего запишем ОДЗ числителя: $x^2-2 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -\sqrt{2},\ x \ge \sqrt{2}$. Это нужно, чтобы не забыть учесть область допустимых значений, когда мы будем рисовать змейку.

Теперь вычислим нули числителя (нуль знаменателя очевиден — это точка $x = 2$). Сделать это можно, просто приравняв числитель к нулю и решив получившееся уравнение:

$$\sqrt{x^2-2}-2x+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2-2}=2x-4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-2=(2x-4)^2 \\ 2x-4 \ge 0. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, мы находим ответ $x = \dfrac{8+\sqrt{10}}{3}$. Таким образом, числитель обращается в нуль в единственной точке $x = \dfrac{8+\sqrt{10}}{3}$.

Отметим на координатной прямой нули числителя и знаменателя, не забыв также об ОДЗ (см. рис. 5).

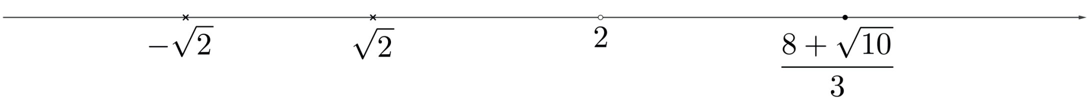


Рис. 5.

Теперь нужно определить знаки нашего выражения на каждом из полученных промежутков (кроме, разумеется, интервала $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ — там выражение просто не определено). Обратите внимание: сейчас мы не можем быть уверены, что змейка будет запускаться сверху вниз справа налево! Ведь в числителе стоит довольно трудное выражение, и его поведение при больших положительных x требует отдельного изучения.

Проще всего поступить следующим образом. Давайте найдем значения функции f на границе области допустимых значений: $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = -1 < 0$. И теперь мы запустим змейку, отталкиваясь именно от этих простых точек! В результате получится следующая кривая (см. рис. 6).

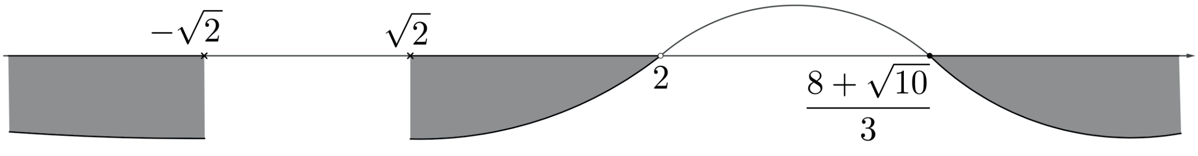


Рис. 6.

Ответ: $x \le -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} \le x < 2$, $x \ge \dfrac{8+\sqrt{10}}{3}$.

В приведенном выше примере наша змейка как бы разрывается областью допустимых значений и состоит из двух отдельных частей. Возникает естественный вопрос: а можно ли не разрывать змейку? Да, функция f не определена на промежутке $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Но ведь тогда и знак поменять она не может...

Оказывается, может! Это кажется невероятным, но подобное действительно возможно. Попробуем разобраться, в чем тут дело, решив следующий пример.

Пример 5. Решить неравенство $\sqrt{x^2-4x-5}+x \ge 0$.

Решение. Прежде всего найдем ОДЗ нашей функции $f(x) = \sqrt{x^2-4x-5}+x$: $x^2-4x-5 \ge 0$ $\Leftrightarrow$ $x \le -1$, $x \ge 5$. Далее найдем корни:

$$\sqrt{x^2-4x-5}+x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2-4x-5}=-x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-4x-5=(-x)^2 \\ -x \ge 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{5}{4}.$$

Осталось проверить знаки на каждом из промежутков. Для этого заметим, что $f(5)=5>0$ и $f(-1)=-1<0$. Поэтому кривая знаков будет выглядеть как на рис. 7.

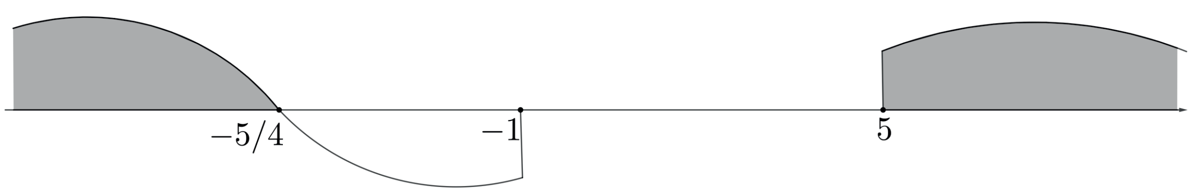


Рис. 7.

Ответ: $x \le -\dfrac{5}{4}$, $x \ge 5$.

Почему же функция f изменила свой знак при проходе через «несуществующую» область $(-1;5)$? Можно ли предугадать это заранее?

Оказывается, можно! Давайте рассмотрим функцию f как (многозначную) функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. В случае, когда подкоренное выражение неотрицательно, мы будем, как и в школе, выбирать ту ветку квадратного корня, которая соответствует неотрицательным значениям. Тогда на промежутке $(-\infty;-1] \cup [5;+\infty)$ график функции f будет лежать в плоскости Oxy и иметь следующий вид (см. рис. 8).

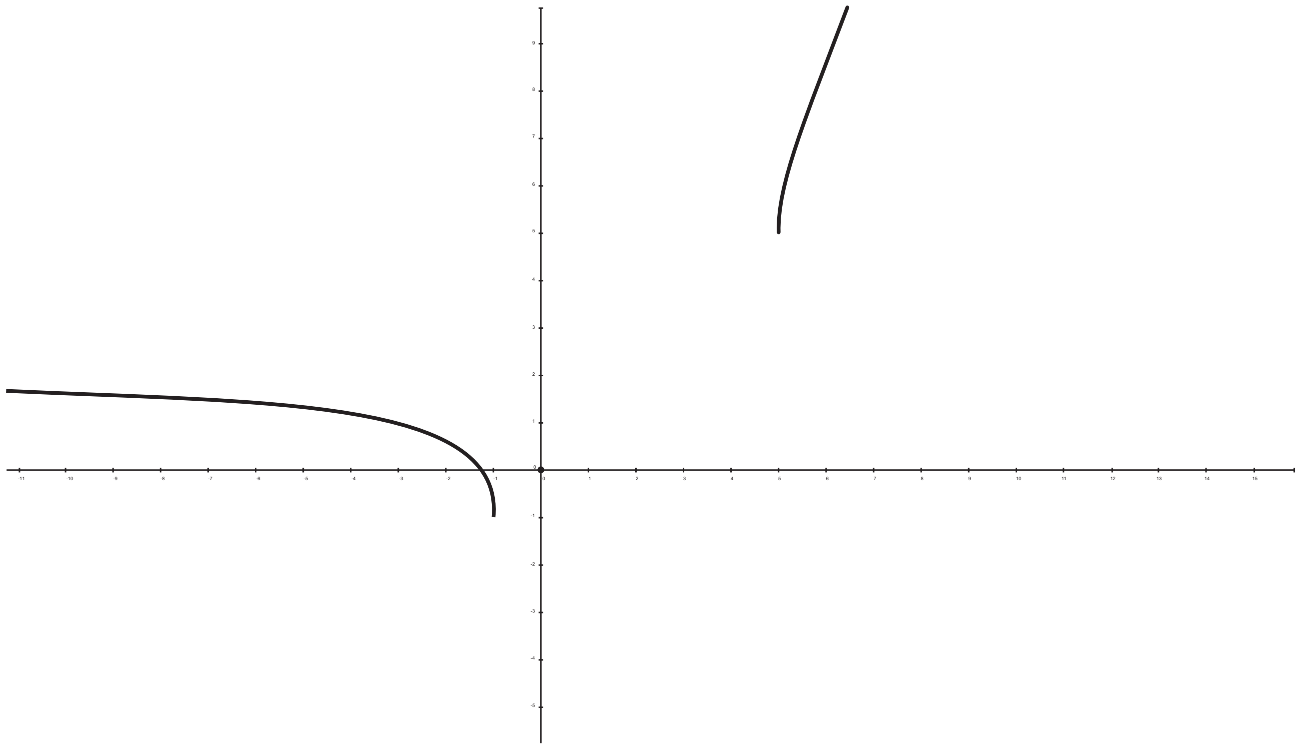


Рис. 8.

Однако на промежутке $(-1;5)$ график функции f будет ветвиться и выйдет в трехмерное пространство $Oxyz$, поскольку подкоренное выражение станет отрицательным, и корень из него станет принимать чисто мнимые значения (т.е. мы полагаем $f(x) = y + iz$, где $y = y(x) = x$ и $z = z(x) = \sqrt{-(x^2 - 4x - 5)}$ — некоторые функции от переменной x; см. рис. 9.

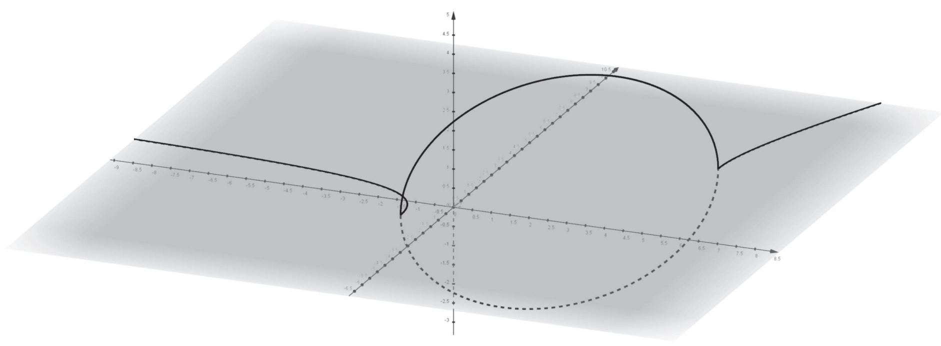


Рис. 9.

Если мы выберем любую ветку нашего графика (который в данном примере является эллипсом), то эта ветка лежит уже не в плоскости Oxy, а потому может пересечь плоскость Oyz и соединить точки, лежащие в разных полуплоскостях относительно оси Ox! Как мы видим, в нашем примере такое пересечение происходит в точке $x = 0$. Проекция кривой на плоскость Oxy изображена на рис. 10 ниже.

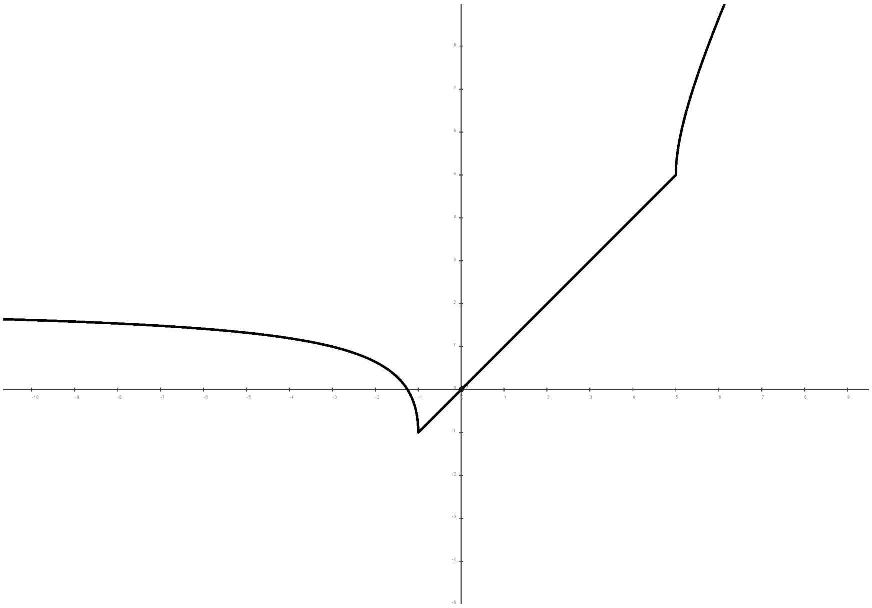


Рис. 10.

Таким образом, причиной возможной смены знака функции $f = f_1(x) + \sqrt{f_2(x)}$ при проходе через «запрещенную» область $\{x \in \mathbb{R} : f_2(x) < 0\}$ является наличие на этой области нулей числителя или знаменателя «вещественной части» $f_1(x)$.

Мы завершим нашу заметку очередным набором упражнений.

Упражнение 4. Решить следующие неравенства:

1. $\dfrac{\sqrt{9+4x-x^2}}{3-x} < 1.$ 2. $\dfrac{13-6x+\sqrt{4x^2-2x-6}}{5-2x} > 1.$ 3. $\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}+5}{x-4} \geq -1.$

4. $1 - \sqrt{\dfrac{1-x}{7-4x}} \geq x.$

Бибиков Павел Витальевич,
учитель математики ГБОУ "Лицей «Вторая школа» им. В.Ф. Овчинникова", кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: bibikov.pv@sch2.ru

Конышев Владимир Дмитриевич[1]*,*
студент первого курса Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики" (НИУ ВШЭ).

E-mail: konyshev.vd@gmail.com

Мигранов Булат Рустамович[2]*,*
студент первого курса Московского физико-технического института (МФТИ).

E-mail: 2000migranovbulat@gmail.com

[1] Статья написана в период обучения автора в ГБОУ "Лицей «Вторая школа» им. В.Ф. Овчинникова".
[2] То же.

Проблемы на экзамене ОГЭ по математике и возможные способы их решения

И. В. Колосова

Основной государственный экзамен (далее ОГЭ) — это форма государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего образования. Он служит для контроля знаний, полученных учащимися за 9 лет, а также для приёма в учреждения среднего профессионального образования или в профильные классы средней школы. От результатов данного экзамена очень сильно зависит будущее учащегося. Даже один потерянный балл может стать решающим. Под словом "потерянный" подразумевается не неумение решать задачи, а попадание учеником в "ловушку", уготовленную самим экзаменом. Данная статья посвящена проблемам как раз таких уловок, недочетов в ОГЭ по математике и возможным способам их решения.

Проблема 1

Пример одного из типичных заданий:

Общепринятые форматы листов бумаги обозначают буквой A и цифрой: $A0$, $A1$, $A2$ и так далее. Лист формата $A0$ имеет форму прямоугольника, площадь которого равна 1 кв.м.

Если лист формата $A0$ разрезать пополам параллельно меньшей стороне, получается два равных листа формата $A1$. Если лист $A1$ разрезать так же пополам, получается два листа формата $A2$. И так далее.

Найдите площадь листа формата $A3$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах. При этом размеры листа формата $A3$ даны в условии задачи с точностью до миллиметра (420мм $\times$ 297мм).

Решение, 1-й способ. Лист формата $A3$ является прямоугольником со сторонами 42,0 см и 29,7 см, поэтому его площадь равна

$$S = ab = 4 \cdot 29,7 = 1247,4 \text{ см}^2.$$

Решение, 2-й способ. Лист формата $A0$ состоит и 8 листов формата $A3$, поэтому

$$S = \frac{S_{\text{ф A0}}}{8} = \frac{10000}{8} = 1250 \text{ см}^2.$$

Суть проблемы. Отметим, что результаты, полученные в первом и втором решении, различны. Это связано с противоречивостью самих данных задачи, причем устранить противоречие невозможно. Дело в том, что стороны листов указанных в условии форматов бумаги должны относиться точно как $\sqrt{2}:1$, что на практике недостижимо. Поэтому площадь листа бумаги формата $A0$ лишь приближенно равна 1 м^2. В действительности размеры листа $A0$ 841 мм $\times$ 1189 мм. Таким образом, точного ответа на вопрос данной задачи нет, в связи с тем, что искомая площадь может быть найдена только приближенно.

Способы решения данной проблемы:

1. Первую часть экзамена должен проверять квалифицированный специалист, а не компьютер. Человек сможет засчитать оба варианта ответа, как правильные.

2. Разработчикам ОГЭ следовало бы уточнить формулировку этого задания, например, дав указание “Ответ дайте в квадратных сантиметрах, округлите до тысяч”.

Проблема 2

Пример задания:

Сколько квадратных метров плёнки нужно купить для теплицы с учётом передней и задней стенок, включая дверь? Для крепежа плёнку нужно покупать с запасом 10%. Число π возьмите равным 3,14. Ответ округлите до целых.

Решение. Используя данные задачи, мы вычисляем, что для обшивки теплицы нам понадобится, например, 31,95 м^2 пленки. Запас 10% для крепежа составит 3,195 м^2.

Итого $31,95 + 3,195 = 35,145$ м^2.

Суть проблемы. Ответ округляем до целых. А по какому принципу? По правилам округления математики получаем ответ 35 м^2, по законам логики мы должны округлить в большую сторону и получить ответ 36 м^2 (именно по этому принципу устроены задачи на покупку плитки для квартир и дачных участков). Но как показывает анализ большинства источников, правильным считается именно ответ 35 м^2. Что приводит учеников в замешательство и к панике, за то, что решив данную задачу правильно, они рискуют потерять честно заработанный балл.

Способы решения данной проблемы:

1. Первую часть экзамена должен проверять квалифицированный специалист, а не компьютер. Человек сможет засчитать оба варианта ответа, как правильные.

2. Разработчикам ОГЭ следовало бы уточнить, по какому принципу, необходимо проводить округление.

3. Разработчикам ОГЭ необходимо подобрать исходные данные таким образом, чтобы округление проводилось всегда в бóльшую сторону (для задач данного типа).

Проблема 3

Суть проблемы. Стоит ли разрешать ученикам использовать калькулятор на экзамене?

В большинстве практико-ориентированных задач используются громоздкие вычисления. В связи с тем, что время проведения экзамена ограничено, наличие калькулятора при подобных вычислениях сэкономит учащемуся время на решение других задач и исключит возможность механической ошибки, которая может быть допущена из-за волнения и спешки. Практико-ориентированные задачи направлены на проверку логического и ассоциативного мышления, наблюдательности, умения воспринимать и перерабатывать информацию, умения применять полученные знания для анализа наблюдаемых процессов, а не на проверку техники счёта.

Но в то же время в ОГЭ присутствует одно задание на проверку прямого счета. Например, найти значение выражения $(6,9 - 1,5) : 2,4$. При наличии у экзаменуемого калькулятора, оно не несет в себе никакого смысла. А выпускник девятого класса должен владеть техникой работы с дробями и элементарного счета, поэтому задание такого типа не менее важное, чем остальные.

Способы решения данной проблемы:

1. Разработчикам ОГЭ необходимо подобрать исходные данные таким образом, чтобы исключить громоздкие вычисления.

2. Задание на проверку прямого счета составлять таким образом, чтобы его невозможно было решить с помощью калькулятора. Например, действия с обыкновенными дробями или смешанные (обыкновенные и десятичные). При этом, обыкновенная дробь при переводе в десятичную не должна преобразовываться в конечную десятичную дробь.

Проблема 4

Суть проблемы. В большинстве заданий ОГЭ прослеживается неравнозначность задач из разных вариантов. Например, рассмотрим задание восемнадцать.

Вариант 1. На клетчатой бумаге с размером клетки 1см × 1см отмечены точки A, B и C (рис. 1.а). Найдите расстояние от точки A до прямой BC. Ответ выразите в сантиметрах.

Решение. Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. По рисунку (рис. 1.б) определяем это расстояние, оно равно двум клеткам, или 2 см.

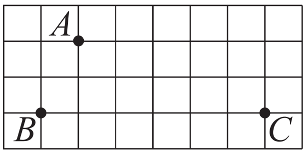


Рис. 1.а.

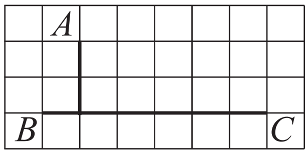


Рис. 1.б.

Вариант 2. Найдите тангенс угла AOB (рис. 2.а).

Решение. Проведем дополнительные построения, показанные на рис. 2б:

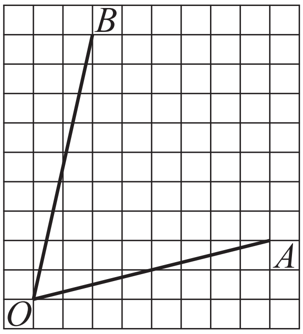


Рис. 2.а.

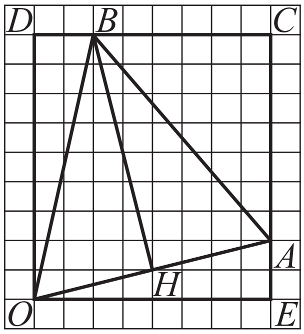


Рис. 2.б.

По теореме Пифагора в треугольнике ODB найдем OB:

$$OB = \sqrt{OD^2 + DB^2} = \sqrt{9^2 + 2^2} = \sqrt{85}.$$

В треугольнике ABC сторона AB равна:

$$AB = \sqrt{BC +^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}.$$

Таким образом, $OB = AB = \sqrt{85}$, следовательно, треугольник OAB — равнобедренный, а его медиана BH, также является и высотой, то есть $\angle OHB$ — прямой.

В треугольнике OAE по теореме Пифагора найдем длину стороны OA:

$$OA = \sqrt{AE^2 + EO^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2\sqrt{17}.$$

Из рисунка видно: $OH = HA = \frac{1}{2}OA\sqrt{17}$

В прямоугольном треугольнике OBH найдем длину стороны BH:

$$BH = \sqrt{OB^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\sqrt{85}\right)^2 - \left(\sqrt{17}\right)^2} = \sqrt{68}.$$

$$\operatorname{tg}\angle AOB = \operatorname{tg}\angle HOB = \frac{BH}{HO} = \frac{\sqrt{68}}{\sqrt{17}} = 2.$$

Нетрудно заметить, что решение задачи из второго варианта намного сложнее, чем в первом варианте. Время, затраченное на получение ответа в первом и во втором случае, тоже очень сильно отличается, что противоречит основному принципу ОГЭ — обеспечение равных условий.

Способы решения данной проблемы:

1. Разработчикам ОГЭ необходимо составлять задания таким образом, чтобы в каждом варианте, они были идентичны, требовали одинакового уровня знаний и одинаковых затрат времени на получение ответа.

Проблема 5

Суть проблемы. Может ли компьютер проверять работу человека?

Как мы уже заметили, разбирая предыдущие проблемы, при проверке первой части экзамена замена компьютера на квалифицированного специалиста, позволит избежать незаслуженной потери баллов учащихся. Помимо уже разобранных случаев, к данной проблеме следует отнести так же такие случаи, как:

- изначально в компьютер был занесен неверный ответ. Это техническая ошибка, и, к большому сожалению, уже были зафиксированы подобные случаи. Таким образом, все учащиеся, решив задание верно, не получили свой честно заработанный балл.

- неверно считанные данные компьютером. Данная проблема может возникнуть из-за нечеткой записи (неразборчивый почерк, дрогнула рука при написании, и т.д.), неправильного оформления (например, по условию задачи требуется записать корни уравнения по возрастанию без пробела, а ученик пробел поставил. Не стоит забывать о том, что 9 лет в школе их учили пробел между полученными ответами ставить!).

- компьютерный сбой. Были зафиксированы случаи, когда компьютерная проверка проходила по ответам другого варианта или когда при сканировании не была распознана работа или была распознана частично.

Учитывая все выше сказанное, можно прийти лишь только к одному выводу: компьютер не может проверять работу человека!

Способы решения данной проблемы:

1. Первую часть экзамена должен проверять квалифицированный специалист, а не компьютер.

Проблема 6

Суть проблемы. На тестовую часть экзамена нельзя подать апелляцию. Претензии принимают, если компьютер неправильно распознал почерк школьника и засчитал в качестве ответа другие символы (цифры, буквы). Такое правило противоречит рекомендациям Минпросвещения об объективной оценке учащихся. Верные ответы могут быть засчитаны как неверные по разным причинам, в чем мы уже убедились, разбирая предыдущие проблемы.

Способы решения данной проблемы:

1. Конфликтная комиссия должна перепроверять тестовую часть экзамена, если учащийся подает заявление на апелляцию своей работы.

Выводы. Основной государственный экзамен является важнейшим элементом общероссийской системы оценки качества образования. Основная цель ОГЭ — предоставить всем учащимся равные возможности продемонстрировать свои знания и навыки, полученные при обучении в школе. При этом в практике проведения экзамена остаются нерешенные и весьма острые вопросы, которым следует уделить особое внимание. Такие вопросы возникают и к подготовке заданий, и к организации самого экзамена, и к его проверке. Ученики должны уметь правильно заполнять специальные бланки, писать развёрнутые ответы по специальным шаблонам, но, к сожалению этому практически никто не уделяет должного внимания, поэтому только при правильной проверке работы, несколькими квалифицированными специалистами, можно получить лояльную оценку. Таким образом, мы приходим к однозначному выводу: ОГЭ — очень важный и необходимый школьникам экзамен, но разработчикам данного экзамена следует пересмотреть его структуру и содержание.

Литература

[1] Семёнов А.В. Математика. Основной государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации: учебное пособие. - М: МЦНМО, “Интеллект-Центр”, 2021. - 296 с.

[2] Горская Е.С. Творческие конкурсы учителей математики. Задачи и решения. - М.: МЦНМО, 2008. - 287с.

[3] Ященко И.В., Шестаков С.А. ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Задачи с практическим содержанием. - М.: МЦНМО, 2018. - 106 с.

[4] Боченков С.А. Интерпретация и представление результатов ЕГЭ проблемы и возможные решения. // Вопросы образования. - 2013. - № 3

URL: http://vo.hse.ru

[5] Болотов В.А. Информирование о результатах оценки качества образования // Журнал руководителя управления образованием. - 2013. - № 2. - С. 36-40.

[6] Редькин Г.М., Коновалов А.В. Метод определения направлений экстремумов интенсивности трещиноватости // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. - 2016. - № 2. - с. 121-127.

[7] URL: https://synergy.ru/about/education_articles/ege/kak_podat_apellyacziyu_na_oge_i_ege

[8] URL: https://iro86.ru/images/documents/RCOKO/Lekciya_zadachi_OGE.pdf

Колосова Ирина Владимировна,
доцент кафедры высшей математики
Белгородского государственного технологического
университета им. В.Г. Шухова,
кандидат физико-математических наук.

E-mail: e.kolosov2014@yandex.ru

Отдельные нестандартные логические задачи

Г. А. Оганесян, Э. М. Джамбетов, А. Я. Белов

Участникам конкурса предлагается решить систему трех уравнений с тремя неизвестными вида $A_1 = k \cdot ab + m \cdot c$, $A_2 = k \cdot ac + m \cdot b$, $A_3 = k \cdot bc + m \cdot a$, где a, b, c — неизвестные, принимающие натуральные значения с некоторыми ограничениями, k и m — параметры, зная только одно из чисел в левых частях уравнений A_1, A_2, A_3 и результаты опроса участников ведущим. Сформулированы и решены четыре задачи с полным анализом решения при различных значениях параметров. Предложены алгоритмы решения этих задач. Высказана гипотеза о решении частной задачи приведенного вида.

Настоящая статья является логическим продолжением нашей статьи “Некоторые нестандартные логические задачи”, опубликованной в журнале “Математическое образование” №3(107) июль-сентябрь 2023 г. Поэтому для удобства восприятия данной статьи будет использоваться ссылка на эту статью [1].

Сформулируем общую задачу:

Из трех разных натуральных чисел a, b, c, больших 2, учитель получает новые три числа $A_1 = ab+2c$, $A_2 = ac+2b$, $A_3 = bc+2a$ и каждому из учеников $У_1$, $У_2$, $У_3$ сообщает (дает) только одно из этих чисел (скрытно от других).

Затем учитель проводит опрос учеников по очереди, начиная с $У_1$ (не обязательно в один круг), с вопросом “Знает ли он три числа a, b, c или тройку чисел (a,b,c)?” или состоится короткая беседа между учениками. При этом ответы слышат все, и каждый знает вид всех трех выражений $ab + 2c$, $ac + 2b$, $bc + 2a$. Задача каждого ученика — определить тройку чисел (a,b,c), исходя из своего числа, которое ему известно (A_1 или A_2, или A_3) и ответов других учеников. Тройки, отличающиеся порядком расположения чисел, считаются одинаковыми.

Задача 1. В данной задаче ученикам сообщаются значения выражений $ab + 2c$, $bc + 2a$, $ca + 2b$ (вместо прежних $ab + c, \ldots$), а числа a, b, c уже больше 2, то есть a, b, $c \geq 3$.

Ученики беседуют:

У1: “Я уверен, что никто из нас не знает тройку (a,b,c)”.

У2: “А я был уверен, что ты это скажешь”.

У3: “Я тоже был уверен, что он (т.е. У1) это скажет”.

У1: “После ваших слов я уже знаю тройку (a,b,c)”.

Могут ли У2 или У3 определить тройку чисел (a,b,c) после слов У1?

Решение: Для наглядности и быстрого восприятия решения советуем для каждой задачи рисовать свой граф связей чисел со “своими” тройками. В прошлой статье у нас был фрагмент такого графа. Видно, что эта задача является вариацией задачи 4 из вышеуказанной статьи [1]. Поэтому логика и ход решения будут такими же, как там, но с другими числами.

Итак, числа A_1, A_2, A_3, для которых однозначно определяется тройка чисел (a,b,c), составляют множество $M_1 = \{22, 23, 24, 27\}$. А множество “своих” троек для чисел из M_1 есть множество $T_1 = \{(3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6)\}$. Заметим, что при $A = 22$ и $A = 23$ получаем одну и ту же “свою” тройку (3,4,5).

Из остальных двух троек, входящие в T_1, получаем по два новых числа $4\cdot5+2\cdot3 = 26$, $4\cdot6+2\cdot3 = 30$, $3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 = 28$, $5 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 36$, которые составят множество $M_2 = \{26, 28, 30, 36\}$.

Числа из M_2 имеют ещё и другие “свои” тройки, не входящие в T_1. Обозначим это множество T_2:

$$T_2 = \{(3, 4, 7), (3, 4, 9), (3, 4, 8), (3, 8, 6), (5, 4, 8), (3, 6, 9), (3, 4, 12)\}.$$

Определим M_3 как совокупность чисел, не входящих в M_2 и получающиеся из троек множества T_2. Таким образом, получили цепочку

$$M_1 \to T_1 \to M_2 \to T_2 \to M_3 \quad \text{(Таблица 1 ниже).}$$

Выясним, какие отношения могут быть между числами A_1, A_2 и A_3 и множествами M_1, M_2 и M_3.

Замечание 1. Ученик, у которого число из M_2, не может утверждать, что другие тоже не знают (a,b,c). Это видно из таблицы 1 (только эти числа имеют "выход" на M_1). Значит, ни одно из чисел A_1, A_2 и A_3 не принадлежит множествам M_1 или M_2.

Замечание 2. Если $A_2 \in M_3$, то не исключается, что $A_1 \in M_2$, но только-что сказали, что это невозможно. Значит, $A_2 \notin M_3$. По этой же причине $A_3 \notin M_3$. Значит, $A_2 \notin M_3$ и $A_3 \notin M_3$.

Замечание 3. Для однозначного определения тройки (a,b,c) учеником У1 необходимо и достаточно:

а) среди троек разложения A_1 ровно одна не имеет "выхода" ни на M_2, ни на M_3,

б) все остальные тройки приводят к M_2 или M_3. Это вытекает из замечания 2. Так же отметим, что об A_1 мы не можем утверждать ни $A_1 \in M_3$, ни $A_1 \notin M_3$.

Легко убедиться в том, что A_1, A_2 и A_3 не могут принять значения, меньшие 22 и равное 25. Из списка всех возможных значений A_1 вычеркиваем числа (Замечание 1), которые входят в M_1 или M_2 ($A_1 \neq 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30$). Тогда все оставшиеся значения можно разбить на множества:

$R_1 = \{29, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42\}$ и

R_2, состоящее из всех остальных чисел, больших 42.

Из множества R_1 мы найдем 4 числа, при которых У1 может сказать, что он уже знает (a,b,c). Обозначим $M_2 \cup M_3 = M$ и составим таблицу для этой задачи.

Таблица 1

M_1	T_1	M_2	T_2	M_3
22	(3, 4, 5)	26	(3, 4, 7)	29, 34
23				
24	(3, 4, 6)	26	(3, 4, 7)	29, 34
		30	(3, 4, 9)	35, 42
27	(3, 5, 6)	28	(3, 4, 8)	32, 38
		36	(3, 8, 6)	34, 54
			(5, 4, 8)	48, 42
			(3, 6, 9)	39, 60
			(3, 4, 12)	44, 54

Проверим каждое число, начиная с 29.

$A_1 = 29 \to (3,7,4)$ и $(3,5,7)$; $(3,5,7) \to 31, 41 \notin M$; $(3,7,4) \to 26 \in M$.

Ровно одна тройка не приводит к M. Значит, $(a,b,c) \sim (3,5,7)$ ((a,b,c) — это $(3,5,7)$ или тройка этих же чисел в любом порядке) и $A_1 = 29$ — первый нужный нам результат.

$A_1 = 31 \to (3,7,5)$ и $(3,5,8); (3,7,5) \to 29 \in M; (3,5,8) \to 34 \in M$, все тройки приводят к M, значит, $A_1 \neq 31$.

$A_1 = 32 \to (3,8,4)$ и $(4,5,6)$ и $(3,6,7)$ и $(3,4,10) \Rightarrow (\{38,38,48,38\} \in M)$ так же все тройки приводят к M.

$A_1 = 33 \to (3,7,6)$ и $(3,5,9); (3,7,6) \to 48 \in M; (3,5,9) \to 37$ и $51 \notin M$.

Так же, ровно одна тройка не приводит к M. Значит, $(a,b,c) \sim (3,5,9)$ и $A_1 = 33$ — это второе нужное нам число.

$A_1 = 34 \to (3,8,5)$ и $(3,4,11) \Rightarrow (\{31,46,50,41\} \notin M)$ — две "плохие" тройки, которые не приводят к M, а нам нужна ровно одна такая тройка (см. Замечание 2). Значит, $A_1 \neq 34$.

$A_1 = 35 \to (3,9,4)$ и $(3,5,10); (3,9,4) \to 42 \in M; (3,5,10) \to 40, 56 \notin M$, значит, $(a,b,c) \sim (3,5,10)$ и $A_1 = 35$ — это третье нужное нам число.

$A_1 = 37 \to (3,9,5)$ и $(3,5,11) \Rightarrow (51,33,61,43 \notin M)$ — две "плохие" тройки.

$A_1 = 38 \to (4,5,9)$ и $(3,4,13) \Rightarrow (46,53,58,47 \notin M)$ — две "плохие" тройки.

$A_1 = 39 \to (3,7,9)$ и $(3,5,12) \Rightarrow (41,69,66,46 \notin M)$ — две "плохие" тройки.

$A_1 = 40 \to (3,6,11)$ и $(3,4,14) \Rightarrow (45,72,62,50 \notin M)$ — две "плохие" тройки.

$A_1 = 41 \to (5,7,3)$ и $(3,11,4)$ и $(3,9,7)$ и $(3,7,10) \Rightarrow (29,34,39,44 \in M)$, и вот единственная тройка, которая не приводит к M — это $(3,5,13) \to 71$ и $49 \notin M$. Значит, $(a,b,c) \sim (3,5,13)$ и $A_1 = 41$ — это четвертое нужное нам число.

$A_1 = 42 \to (3,8,9)$ и $(3,4,15) \Rightarrow (43,78,66,53 \notin M)$ — две "плохие" тройки.

Дальше группу R_2 ($A > 42$) разделим на две подгруппы: четные и нечетные. Для каждой подгруппы найдем две "плохие" тройки, которые не приводят к M.

Начнем с нечетных:

$$(43+2\alpha) \to (3,5,14+\alpha) \text{ и } (3,7,11+\alpha)(\alpha = 0,1,2,3,\ldots);$$

$$(3,5,14+\alpha) \to (52+3\alpha) \notin M \text{ и } (76+5\alpha) \notin M; \quad (3,7,11+\alpha) \to (47+3\alpha) \notin M \text{ и } (83+7\alpha) \notin M.$$

(Здесь очевидно, что $47 + 3\alpha \neq 48$, 54, 60, которые входят в M).

Для четных:

$$(44+2\alpha) \to (4,5,12+\alpha) \text{ и } (3,4,16+\alpha)(\alpha = 0,1,2\ldots);$$

$$(4,5,12+\alpha) \to (58+4\alpha) \notin M \text{ и } (68+5\alpha) \notin M; \quad (3,4,16+\alpha) \to (56+3\alpha) \notin M \text{ и } (70+4\alpha) \notin M$$

Таким образом, мы исключили все числа $A \geq 43$.

В итоге получили четыре значения A_1 и четыре тройки, при которых $У1$ может сказать, что уже знает тройку: 29 и (3, 5, 7); 33 и (3, 5, 9); 35 и (3, 5, 10); 41 и (3, 5, 13).

И для каждой тройки получим значения для A_2 и A_3: $(3,5,7) \to 31$ и 41; $(3,5,9) \to 37$ и 51; $(3,5,10) \to 40$ и 56; $(3,5,13) \to 49$ и 71.

Среди этих восьми чисел нет повторяющихся, значит, $У2$ и $У3$ по своему числу определяют единственную тройку.

Ответ: Да, и $У2$, и $У3$ могут определить (a,b,c).

Задача 2. Здесь те же выражения $ab+2c$, $bc+2a$, $ca+2b$, a, b, $c \geq 3$, но вместо беседы идет опрос. Вот результат опроса:

первый круг – все ответили "нет",

второй круг – все ответили "нет",

третий круг – $У1$ ответил "нет".

Вопрос: Сможет ли $У2$ после этого определить (a,b,c)?

Решение: Подход такой же, как в задаче 1 из статьи [1], но здесь вариантов много и ещё в пункте "в" ситуация немножко иная. Опять советуем нарисовать нужный граф.

Напомним систему обозначений результатов опроса учеников: ответы учеников $У1$, $У2$, $У3$ соответственно в первом круге $Q1 \equiv$ да (нет), $Q2 \equiv$ да(нет), $Q3 \equiv$ да(нет), во втором круге — $Q4 \equiv$ да (нет), $Q5 \equiv$ да(нет), $Q6 \equiv$ да(нет) и так далее.

Будем пользоваться обозначениями из таблицы 1. Напишем решение без подробных объяснений:

а) ($Q1 \equiv$ да) $\Leftrightarrow A_1 \in M_1$. Очевидно, что верно $(A_1 \in M_1) \Rightarrow$ ($Q1 \equiv$ да), которое равносильно утверждению ($Q1 \not\equiv$ да) $\Rightarrow A_1 \notin M_1$.

б) $Q1 \equiv$ нет, $Q2 \equiv$ да. Получим $A_2 \in M_1$. Далее убеждаемся, что верно утверждение $(A_2 \in M_1) \Rightarrow$ ($Q2 \equiv$ да), что равносильно ($Q2 \not\equiv$ да)$\Rightarrow A_2 \notin M_1$. Именно это понадобится нам.

в) $Q1 \equiv$ нет, $Q2 \equiv$ нет, $Q3 \equiv$ да. Здесь после двух ответов "нет" получаем следующие исключения: $A_1 \neq 22$, $A_1 \neq 23$, $A_2 \neq 22$ и $A_2 \neq 23$, т.е. ни $У1$, ни $У2$ не видят эти числа. Значит, тройка (3, 4, 5) исключается и вместе с ней все три её "свои" числа. И, как следствие, получим $A_3 \neq 22$, $A_3 \neq 23$, иначе кто-то увидел бы или 22, или 23. Значит, нельзя делать вывод, что $A_3 \in M_1$. Получили для A_3 такие значения: $A_3 \in \{24, 27\}$ или $A_3 \in M_4 = \{26, 28, 30\}$, где значение $A_3 = 26$ получено не из тройки (3, 4, 5), которую мы исключили, а из тройки (3, 4, 6).

Появилось новое множество M_4 — это те числа из M_2, которые имеют ровно одно разложение, входящее в T_2, а всего — два разложения.

Ещё раз, как в пункте "в" решения задачи 1 из статьи [1]., делаем важное замечание: из того, что $A_3 \in \{24, 27\}$ или $A_3 \in M_4$, никак не следует, что обязательно $Q1 \equiv$ нет и $Q2 \equiv$ нет. Например: при $(a, b, c) \sim (3, 4, 5)$ и $A_3 = 26$ будут ответы $Q1 \equiv$ да и $Q2 \equiv$ да, а при $(a, b, c) \sim (3, 4, 6)$ и так же $A_3 = 26$, будут ответы $Q1 \equiv$ нет и $Q2 \equiv$ да.

А теперь мы утверждаем: если $A_3 \in \{24, 27\}$ или $A_3 \in M_4$, то $Q3 \equiv$ да. Это значит, что надо рассматривать всевозможные сочетания значений A_3 из указанного набора (таблица 1) с каждой "своей" тройкой.

Далее, опираясь на результаты (выводы) предыдущих пунктов, надо убедиться, что всегда будет $Q3 \equiv$ да. Да, мы согласны, что это "долгая песня", но для "чистоты эксперимента" этот этап необходимо выполнять! В решении задачи 1 [1] мы об этом говорили вскользь, считая, что "длина опроса" очень короткая и количество вариантов невелико. Да и здесь не будем весь этот процесс (этап) разбирать "до последнего винтика", потому что тогда получилась бы другая статья, посвящённая только одной задаче. Покажем на примере числа $A_3 = 30 \in M_4$ как это надо делать.

1) Пусть $A_3 = 30$ и $(a, b, c) \sim (3, 4, 6)$. Тогда кто-то ($У1$ или $У2$) видит число $24 \in M_1$ и на основании пунктов а) и б) говорит "да" и однозначно определяет тройку (3, 4, 6). После этого $У3$ тоже определяет эту же тройку и отвечает "да".

2) Опять $A_3 = 30$, но (a, b, c) — это не $(3, 4, 6)$. Тогда никто не видит число $24 \in M_1$ и так же, согласно пунктам а) и б), $У1$ и $У2$ ответят "нет". После этого $У3$ исключает тройку (3, 4, 6) и остаётся единственная "своя" тройка (3, 4. 9), которую и определяет, отвечая "да". Этим мы доказали, что $(A_3 = 30) \Rightarrow$ ($Q3 \equiv$ да). При остальных значениях $A_3 \in \{24, 27\}$ или $A_3 \in M_4$ алгоритм такой же.

Результат данного случая запишем так: ($A_3 \in \{24, 27\}$ или $A_3 \in M_4 = \{26, 28, 30\}$) $\Rightarrow Q3 \equiv$ да. А это равносильно следующему: ($Q3 \equiv$ нет) $\Rightarrow$ ($A_3 \notin \{24, 27\}$ и $A_3 \notin M_4 = \{26, 28, 30\}$).

д) $Q1 \equiv$ нет, $Q2 \equiv$ нет, $Q3 \equiv$ нет, $Q4 \equiv$ нет, $Q5 \equiv$ да. На основании предыдущих пунктов, как следствие, получаем $A_2 \in M_4$ или $A_2 \in M_5 = \{29, 35\}$. На втором этапе убеждаемся, что при $A_2 \in M_4$ или $A_2 \in M_5 = \{29, 35\}$ будет ответ $Q5 \equiv$ да. А это равносильно утверждению ($Q5 \equiv$ нет) $\Rightarrow$ ($A_2 \notin M_4$ и $A_2 \notin M_5 = \{29, 35\}$). Это и есть результат данного случая.

е) $Q1 \equiv$ нет, $Q2 \equiv$ нет, $Q3 \equiv$ нет, $Q4 \equiv$ нет, $Q5 \equiv$ нет, $Q6 \equiv$ да. Так же, на основании всех предыдущих пунктов, получаем $A_3 \in M_5 = \{29, 35\}$. Второй этап — проверяем верность утверждения

$(A_3 \in M_5 = \{29, 35\}) \Rightarrow (Q6 \equiv \text{да})$. Только после этого получим результат данного случая:

$$(Q6 \equiv \text{ нет})\ (A_3 \notin M_5 = \{29, 35\}).$$

ж) $Q1 \equiv Q2 \equiv Q3 \equiv Q4 \equiv Q5 \equiv Q6 \equiv$ нет, $Q7 \equiv$ да.

На основании рассмотренных пунктов делаем вывод: $A_1 \in M_5$ или $A_1 = 31$. Далее убеждаемся в верности утверждения ($A_1 \in M_5$ или $A_1 = 31$) $\Rightarrow Q7 \equiv$ да. Пишем равносильное утверждение: ($Q7 \not\equiv$да (т.е. $Q7 \equiv$ нет))$\Rightarrow$ ($A_1 \notin M_5 = \{29, 35\}$ и $A_1 \neq 31$), как результат этого пункта. (Про число 31 см. следующий пункт).

з) $Q1 \equiv Q2 \equiv Q3 \equiv Q4 \equiv Q5 \equiv Q6 \equiv Q7 \equiv$ нет, $Q8 \equiv$ да.

Из пунктов д), е) и ж) получаем $A_2 \notin M_5$, $A_3 \notin M_5$ и $A_1 \notin M_5$. А это значит, что для каждого числа из M_5 (это 29 и 35) появилось необходимое и достаточное условие исключения. Подробнее рассмотрим их. Исключая $A_2 = 35$, мы тем самым исключаем тройку (3, 5, 10), но у каждого из чисел 40 и 56, которые получаются из этой тройки, после исключения остаются много (больше одной) троек. Так что это ничего не дает нам.

Дальше, исключая $A_2 = 29$, мы исключаем (3, 5, 7) и только у числа 31 после этого остается ровно одна тройка, а у числа 41 — нет (31 и 41 получаются из тройки (3, 5, 7)).

Итого, получили, что $A_2 = 31, (a, b, c) \sim (3, 5, 8)$.

Ответ: Да, и это произойдет только тогда, когда $(a, b, c) \sim (3, 5, 8), A_2 = 31$.

Задача 3. В этой задаче уже другие выражения: сообщаются значения $2ab + 3c; 2ac + 3b; 2bc + 3a$ и числа a, b, c различны и больше 1 ($a, b, c \geq 2$).

Ход опроса такой:

Первый круг – все ответили "нет".

Второй круг – все ответили "нет".

Третий круг – все ответили "нет".

Четвертый круг – все ответили "нет".

Пятый круг – У1 ответил "нет".

Вопрос: Не пора ли прекратить опрос?

Решение: Нам достаточно привести пример, когда кто-то в дальнейшем скажет "да". Определения множеств (но не сами множества) M_1, T_1, M_2, M_3 такие же, как раньше, только числа и тройки будут из данной задачи. Нетрудно проверить, что $24 \in M_1$ (тройка определяется однозначно). Нас не интересует полный состав M_1. Дальше смотрим на цепочку $24 \to (2, 3, 4) \to 25$ и 30. Но здесь 25 так же имеет единственное разложение. У числа 30 есть еще одно разложение — это (2, 3, 6). Получим довольно редкий случай: Тройка (2, 3, 4) дает два числа из M_1, как тройка (3,4,5) в задаче 1:

$$\begin{tikzcd} 24 \arrow[r] & (2, 3, 4) \arrow[dr] & \\ & & 30 \\ 25 \arrow[r] & (2, 3, 4) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Это замечание надо будет учитывать потом. Мы видим, что в решении задачи 2 каждое из множеств M_4 и M_5 повторяется три раза и потом исчезает. (В пункте в) решения предыдущей задачи выяснили, почему с множеством M_1 такое не происходит). А исчезает тогда, когда появляются три подряд идущие исключения: $A_1 \notin M$; $A_2 \notin M$; $A_3 \notin M$ (задача 1 [1]). У множеств M_4 и M_5 есть общее свойство — числа, входящие в них, имеют по две тройки (исключая одну, переходим к другой).

Теперь напишем следующую длинную связанную цепочку, где каждое число имеет ровно два разложения на тройки:

$$30 \to (2, 3, 6) \to 33 \to (2, 3, 7) \to 37 \to (2, 4, 7) \to 40 \to (2, 4, 8) \to 44 \to\to (2, 5, 8) \to 47 \to (2, 5, 9).$$

Пропустили ненужные нам числа, получаемые из этих троек. Аналогичной цепочке множеств $M_1 \to M_4 \to M_5$ у нас будет следующая цепочка: $M_1 \to K_1 \to K_2 \to K_3 \to K_4 \to K_5 \to K_6$, где M_1 содержит числа, которые получаются только из одной тройки чисел (имеют одно представление);

K_1 — содержит только те числа, которые имеют ровно два представления (тройку) и являются "родственными" (получаются из одной и той же тройки), хотя бы для одного элемента из M_1;

K_2 — содержит только те числа, которые имеют ровно два представления (тройку) и являются "родственными", хотя бы для одного элемента из K_1;

K_3 — содержит только те числа, которые имеют ровно два представления (тройку) и являются "родственными", хотя бы для одного элемента из K_2;

K_4 — содержит только те числа, которые имеют ровно два представления (тройку) и являются "родственными", хотя бы для одного элемента из K_3.

Аналогично определены K_5 и K_6: числа, имеющие ровно два представления (тройку) и "родственные" элементам предыдущего множества.

Опять нас не интересует полный состав каждого множества, главное — они не пустые: $30 \in K_1$, $33 \in K_2$, $37 \in K_3$, $40 \in K_4$, $44 \in K_5$, $47 \in K_6$.

Кратко напишем уже в знакомом нам виде ход опроса. Рядом с K_i, в скобках, напишем число, входящее в него. Ещё раз отметим уникальное свойство числа 30: тот, кто получил 30, после первого ответа "нет" скажет "да", определив тройку (2,3,6) после исключения (2,3,4). Поэтому уже при $Q2$ появляется K_1 (30), в то время, как в решении задачи 2, множество M_4 появилось только при $Q3$.

$Q1 \equiv$ нет $\Rightarrow A_1 \notin M_1$

$Q2 \equiv$ нет $\Rightarrow A_2 \notin M_1$ и $A_2 \notin K_1(30)$

$Q3 \equiv$ нет $\Rightarrow A_3 \notin K_1(30)$

$Q4 \equiv$ нет $\Rightarrow A_1 \notin K_1(30)$; $A_1 \notin K_2(33)$

$Q5 \equiv$ нет $\Rightarrow A_2 \notin K_2(33)$

$Q6 \equiv$ нет $\Rightarrow A_3 \notin K_2(33)$; $A_3 \notin K_3(37)$

$Q7 \equiv$ нет $\Rightarrow A_1 \notin K_3(37)$

$Q8 \equiv$ нет $\Rightarrow A_2 \notin K_3(37)$; $A_2 \notin K_4(40)$

$Q9 \equiv$ нет $\Rightarrow A_3 \notin K_4(40)$

$Q10 \equiv$ нет $\Rightarrow A_1 \notin K_4(40)$; $A_1 \notin K_5(44)$

$Q11 \equiv$ нет $\Rightarrow A_2 \notin K_5(44)$

$Q12 \equiv$ нет $\Rightarrow A_3 \notin K_5(44)$; $A_3 \notin K_6(47)$

$Q13 \equiv$ нет $\Rightarrow A_1 \notin K_6(47)$

$Q14 \equiv$ да $\Rightarrow$ Один из возможных значений для A_2 это $A_2 = 47$.

Ответ: Нет, не пора. Если $A_2 = 47$, то $У2$ при $Q14$ скажет "да" и определит тройку (2,5,9).

Возникает вопрос:

> Можно ли, для любого натурального "n", выбрав подходящие m и k ($m, k \in N$), составить опрос длиной "n" (т.е. первый положительный ответ даётся на вопрос с номером "n") при выражениях $k \cdot ab + m \cdot c$, $k \cdot ac + m \cdot b$; $k \cdot bc + ma$? Есть предположение о том, что нет, не возможно. Более того, кажется, что приведённый пример длиной в 14 вопросов (в задаче 3) является максимально длинным опросом.

Задача 4. Здесь участвуют те же выражения $2ab + 3c$, $2ac + +3b$, $2bc + 3a$, где a, b и c попарно различные, a, b, $c \geq 2$. Состоялась беседа:

$У1$ — "Я уверен, что никто из нас не знает (a, b, c)".

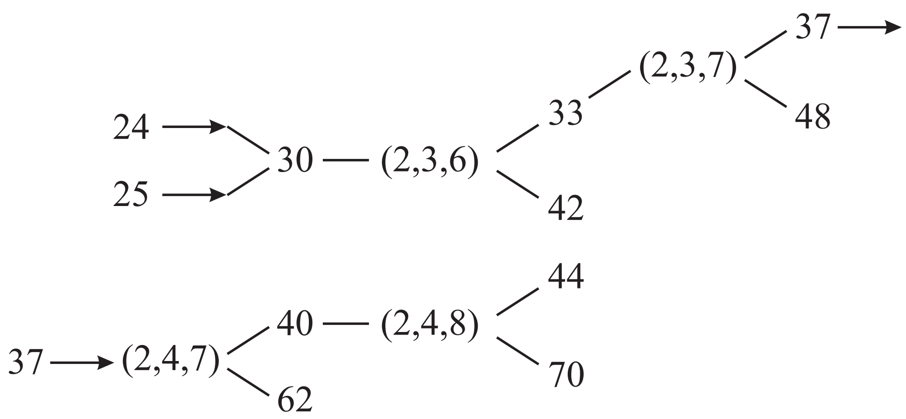
$У2$ — “Я так же уверен”.

$У3$ — “А я как не знал, так и не знаю (a,b,c)”.

$У1$ — “А я уже знаю (a, b, c)”».

Вопрос: После этого кто-то может определить тройку (a, b, c)?

Решение: Запишем знакомую нашу цепочку (фрагмент графа) из задачи 3 в развернутом виде.



Покажем, что если $(a, b, c) \sim (2, 3, 7)$ и $A_1 = 33$, то такая беседа, как в условии задачи, может состояться. Очевидно, что $A_2 \neq 30$. Пусть $A_2 = 42$ и $A_1 = 33$. Тогда $A_3 = 30$ и $У3$ должен был определить тройку (2, 3, 6), чего он не сделал. Значит, $У3$ исключает тройку (2,3,6) и определяет $(a, b, c,) \sim (2, 3, 7)$.

Дальше осталось убедиться, что тот, у кого число 37 (пусть это будет $У2$), тоже может определить тройку (2, 3, 7). Он понимает, что ученику $У1$ помог тот факт, что $У3$ не смог определить тройку и на основании этого $У1$ исключил что-то. А в случае тройки (2, 4, 7) по числам 40 и 62 нет такой возможности (делать какой-то вывод, исключить что-то): у них “нет выхода” на M_2 (напоминаем тот, у кого число из M_2, не может быть уверен, что остальные тоже не знают (a, b, c)).

Ответ: Да, если $(a, b, c) \sim (2, 3, 7)$ и $A_1 = 33$, то тот, у кого $A = 37$, может определить тройку (2, 3, 7).

Литература

1. Оганесян Г.А., Джамбетов Э.М., Белов А.Я. Некоторые нестандартные логические задачи // Математическое образование. - 2023. - № 3 (107). - с. 27-34.

Оганесян Гегам Аршакович,
г. Воронеж.
E-mail: geghamvahe@gmail.com

Джамбетов Эльман Махмудович,
доцент кафедры прикладной математики
Чеченского государственного университета
им. А.А. Кадырова, к.т.н., доцент,
почетный работник высшего образования РФ.
E-mail: xazar-76@mail.ru

Белов Алексей Яковлевич,
профессор МФТИ, главный научный сотрудник,
федеральный профессор математики,
доцент, доктор физ.-мат. наук.
E-mail: kanelster@gmail.com

Формулировка задач в комбинаторике: строгость или гибкость

И. В. Сухан, О. В. Иванисова, А. А. Лахтина

При изучении комбинаторики и решении практических задач нередко возникает проблема двусмысленности формулировки условия: неуточненные детали не позволяют однозначно решить задачу. В статье рассматриваются два подхода к решению этой проблемы, и проводится анализ необходимости детализации формулировок задач по комбинаторике.

Вопрос формулировки условий задач в математике — это важный аспект учебного процесса. Четко поставленные задачи облегчают обучение, обеспечивают основу для эффективного усвоения материала. Однако в реальной жизни редко встречаются ситуации, когда проблема приходит с четкой постановкой и готовым решением. Чаще всего приходится самому формулировать задачу и искать пути её решения.

Анализ условия задачи — это тоже часть решения, первый его этап. Иногда учебные задачи имеют формулировку, допускающую различные толкования. В зависимости от уточнения формулировки будет изменяться и решение задачи. Стоит ли преподавателю конкретизировать условие задачи, при этом, скорее всего, перегружая ее текст деталями, или же это повод к разговору со студентами и обсуждению возможных путей развития задачи и ее решения?

Естественно выделить два подхода для решения этого вопроса.

1. **Детализированная формулировка**. В этом случае условие задачи содержит все необходимые уточнения, исключающие двусмысленность. Это помогает обучающимся сразу сосредоточиться на правильном пути решения, не теряя время на догадки и предположения. Скрупулезная детализация формулировки задачи имеет несомненные преимущества. Обучающийся точно понимает требования задачи, экономит время выполнения задания. Однако такой подход может ограничить способность студентов самостоятельно разбираться в сложных ситуациях.

2. **Обсуждение различных интерпретаций**. Если условие задачи оставляет пространство для разных трактовок, это может стать отличным поводом для обсуждения в группе. Обучающиеся смогут рассмотреть разные точки зрения, проанализировать несколько вариантов понимания задачи, развития ее условия, обсудить возможные подходы к решению и прийти к единому пониманию. Открытая дискуссия дает возможность развить навыки критического мышления, улучшить навыки коммуникации и аргументации.

Рассмотрим эту проблему на примерах комбинаторных задач.

В комбинаторном анализе *выборкой* принято называть любой набор, составленный из элементов заданного множества. Осуществляя выборки при различных условиях: порядок выбора элементов может быть важен или не важен, элементы в выборке могут повторяться или нет, использованы все элементы исходного множества или же только их часть, получаем 6 типов выборок. Если порядок выбора элементов в выборке не важен, то образуются так называемые *сочетания*, если важен — *размещения.* Если в размещении использованы все элементы исходного множества, такая выборка называется *перестановкой.* Если в выборках возможно повторное появление элементов, они называются соответственно *выборкой с повторениями.*

В каждом из этих случаев задача имеет свое вполне определенное решение.

Рассмотрим классические задачи 1–3, см. [1,2].

Задача 1. Студенческая группа состоит из 25 человек. Нужно выбрать старосту, заместителя старосты и профорга. Сколькими способами это можно сделать, если каждый студент может занимать только одну должность?

В терминах выборок имеем множество мощности 25, из которого нужно выбрать упорядоченный (первый избранный — староста, второй — заместитель и т. д.) набор из 3 элементов. Следовательно, количество таких выборок равно числу размещений из 25 элементов по 3:

$$A_{25}^{3} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800.$$

Задача 2. Студенческая группа состоит из 25 человек. Нужно выбрать 3 дежурных по факультету. Сколькими способами это можно сделать?

Из множества мощности 25 нужно выбрать подмножество мощности 3, так как порядок, в котором они будут указаны, не важен, т.е. каждая выборка представляет собой сочетание без повторений. Следовательно, количество способов равно числу сочетаний из 25 элементов по 3:

$$C_{25}^{3} = \frac{25!}{3!22!} = 2300.$$

Задача 3. Сколько существует таких перестановок 7 учеников, при которых 3 определенных ученика находятся рядом друг с другом?

В этой задаче четко указано, что нужны упорядоченные выборки (перестановки). Поэтому число искомых перестановок можно найти, "склеив" троих учеников в один элемент. Имеем 5 различных элементов, число их перестановок равно $P_5 = 120$. Учтем еще число способов "склейки" троих учеников: $P_3 = 6$. Всего по правилу произведения получаем 720 вариантов.

В приведенных ситуациях по контексту понятно, упорядоченная выборка нужна или нет. Никакой двусмысленности и неоднозначных трактовок в задачах $1-3$ нет.

Задача 4. На каждом борту лодки сидят по 4 человека. Сколькими способами можно выбрать команду для этой лодки, если есть 31 кандидат, причем 10 человек хотят сидеть на левом борту лодки, 12 — на правом, а для 9 человек безразлично где сидеть? [1, с. 223].

Если под выбором команды понимать только определение состава, то решение может быть таким. На левый борт можно выбрать k человек ($k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$) из числа тех 9, которым безразличен выбор борта, это можно сделать C_9^k способами. После этого нужно выбрать еще $4-k$ человек из числа 10, предпочитающих левый борт, это можно сделать C_{10}^{4-k} способами. Далее нужно выбрать четверых человек на правый борт из числа 12 предпочитающих правый борт и оставшихся $9-k$, которым безразличен выбор борта, т.е. из $12+9-k = 21-k$, это можно сделать C_{21-k}^{4} способами.

Число способов для каждого k находим по правилу произведения:

$$C_9^k \cdot C_{10}^{4-k} \cdot C_{21-k}^{4}.$$

Число всех способов находим, используя правило суммы:

$$\sum_{k=0}^{4} C_9^k \cdot C_{10}^{4-k} \cdot C_{21-k}^{4}.$$

Однако так удалось отобрать только состав размещающихся на каждом борту лодки. Если учитывать еще и места, на которых они рассядутся, полученное выражение нужно еще умножить на число перестановок (пересадок) на каждом борту, т.е. на $(4!)^2$.

Возникает вопрос, понятно ли из условия задачи 4, какая выборка нужна: упорядоченная или нет?

Далее в задачах $5-6$ только обсудим возможные трактовки, решение приводить не будем.

Задача 5. Волонтеры разделились на две равные группы для розыска заблудившегося туриста. Среди них есть только 4 человека, знакомых с местностью. Каким числом способов они могут разделиться так, чтобы в каждую группу вошло 2 человека, знающих местность, если всего их 10 человек?

В этой задаче очевидно, что порядок людей в группе не важен, внутри группы участники равноправны. Однако можно предположить, что сами группы могут быть различимы (например, идут в разных направлениях), а могут быть и неразличимы (например, движутся параллельно по одной местности). Следует ли трактовать отсутствие подобного уточнения в условии как факт, что это не имеет значения?

Задача 6. Сколькими способами можно выбрать из 16 лошадей шестерку для запряжки так, чтобы вошли 3 лошади из шестерки $ABCA'B'C'$, но ни одна из пар AA', BB', CC'? [1]

Здесь возникает вопрос, нужно только указать выбранных лошадей (тогда это неупорядоченные выборки), или же важен их порядок в упряжке?

Задача 7. На школьный вечер танцев собрались ребята 9-х, 10-х и 11-х классов. Вести хоровод приглашаются 10 школьников. Сколькими способами можно составить хоровод при условии участия в нем хотя бы одного одиннадцатиклассника? [1]

Автор приводит решение, выбирая нужный состав группы, — возьмем одного одиннадцатиклассника, останется выбрать девятерых без всяких условий, число таких способов равно числу сочетаний с повторениями из трех элементов по девять. Нужно ли на этом остановиться или необходимо еще учесть, что выбранные люди еще встанут в определенном порядке для хоровода, ведь тогда необходимо умножить полученное число на количество способов переставлять танцующих.

Иногда полезно намеренно изменить условие задачи и понаблюдать, как меняется при этом решение.

Задача 8. Человек имеет 6 друзей и в течение 20 дней приглашает к себе 3 из них так, что состав компании ни разу не повторяется. Сколькими способами он может это сделать? [2, с. 54]

Подсчитаем, сколько компаний по 3 человека можно составить из 6 друзей:

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20.$$

Теперь задачу можно переформулировать так: “Человек имеет 20 компаний и в течение 20 дней приглашает их к себе. Сколькими способами он может это сделать?” Очевидно, все компании будут приглашены по одному разу, искомые способы отличаются только порядком следования этих компаний, значит, речь идет о перестановках: 20! способов.

“Пошевелим” условие, изменив исходные данные. Допустим, речь идет не о 20, а о 10 днях. Тогда решение выглядит так: нужно выбрать из 20 компаний 10 с учетом порядка (важно, кто в какой день приходит). А это число размещений A_{20}^{10}. Почему же в прошлый раз это были перестановки? Почему не A_{20}^{20}? Но это именно $A_{20}^{20} = P_{20} = 20!$ Таким образом, обучающиеся могут наблюдать не только изменения в решении, но и обнаружить (вспомнить) связи между комбинаторными понятиями.

Задача 9. Двое ребят собрали 10 ромашек, 20 васильков и 30 колокольчиков. Сколькими способами они могут разделить эти цветы между собой, если учитывается только количество полученных цветов?

Хотя в природе все натуральные объекты различны, в этой задаче объекты одного типа считаются неразличимыми, поэтому упоминание о том, что важно именно количество полученных цветов, важно.

Задача 10. Задача 10. В математический кружок ходят 10 человек. Сколько из них можно составить разных команд для участия: а) в математической регате (4 человека); б) в математическом бое (6 человек)? [3, с. 69]

Оба пункта авторы предлагают решить, вычислив соответствующее число сочетаний. Однако может возникнуть вопрос о том, каковы правила регаты и матбоя. Ведь если предполагаются различимые этапы соревнования, важно кто на каком этапе окажется, и тогда задача решается через нахождение соответствующего числа размещений.

Задача 11. Есть m мальчиков и n девочек. Сколькими способами можно выбрать из них k человек? [4, с. 53]

Выбирая сначала мальчиков, потом девочек, затем замечая, что раз дети все разные, то можно сразу из всех выбрать нужное количество, получаем прекрасную иллюстрацию к тожеству Вандермонда. Однако можно понять условие так, что мальчики для нас неразличимы, как и девочки. Тогда все способы отличаются только количеством выбранных мальчиков (количество девочек тогда определяется однозначно), а не конкретными персонами. Решение задачи в этом случае иное. Попутно заметим, что соотношения между числами m, n, k также существенно влияют на подход к решению.

Задачи о выборе объектов, удовлетворяющих определенным условиям, могут быть решены не только в терминах выборок, т.е. в терминах размещений, перестановок и сочетаний, но и в терминах распределения (раскладки) объектов по классам (предметов по ящикам). Поставим задачу следующим образом: пусть имеется n предметов, которые распределяются по k ящикам. При этом предметы могут быть различимы или неразличимы, ящики также могут быть различимы или нет, могут допускаться или не допускаться пустые ящики. Таким образом, получаем 8 типов раскладок.

Можно поставить дополнительные условия, например, в каждый ящик класть не более одного предмета или учитывать порядок предметов в ящике.

К задачам о раскладке предметов по ящикам тесно примыкает задача о разложении числа на слагаемые.

Задача 12. Сколькими способами можно представить число 13 в виде 4 целых слагаемых (отрицательные числа не рассматриваются)? [5, с. 233]

Представим число 13 в виде набора из 13 одинаковых единиц (предметы неразличимы), сами слагаемые — это ящики.

Понятно, что в формулировке задачи нет однозначности — в зависимости от условий, налагаемых на слагаемые (ящики), получаем разные комбинаторные схемы решения.

Если слагаемые неотрицательны (пустые ящики допускаются), а представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются различными (порядок ящиков важен), то количество различных способов представления числа 13 в виде суммы 4 слагаемых равно числу сочетаний с повторениями из 4 по 13:

$$\overline{C}_4^{13} = C_{13+4-1}^{13} = C_{16}^{13} = \frac{16!}{3! \cdot 13!} = 560.$$

Если слагаемые положительны (пустые ящики не допускаются), а порядок слагаемых все так же важен, то алгоритм решения такой: выложим предметы в ряд, между ними образуется 12 мест, выберем из них 3 для "перегородок", которые разобьют предметы на 4 группы (4 слагаемых). Тогда количество различных способов представления числа 13 в виде суммы 4 слагаемых равно:

$$C_{13-1}^{4-1} = C_{12}^{3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = 220.$$

Для нахождения количества различных способов представления числа 13 в виде суммы 4 слагаемых в случае, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми (порядок ящиков не важен), решение совершенно другое, в [5, с. 231] предлагается интересный алгоритм составления пары взаимно рекуррентных соотношений. Решить такую систему можно с помощью рекуррентных таблиц.

Задача 13. Сколько имеется способов расклеить 5 объявлений по 8 подъездам?

Снова к такой постановке задачи возникает ряд вопросов: одинаковы ли объявления? Допускается ли, чтобы на каждом подъезде было произвольное количество объявлений, или же их должно быть не более одного?

Так что же лучше: раздутые, но четкие формулировки или короткие постановки предлагаемых задач и непременно следующая за этим дискуссия?

В зависимости от целей урока (занятия) и уровня подготовки обучающихся преподаватель должен соблюдать баланс между точностью и открытостью, находить оптимальное сочетание строгости и свободы в формулировании задач. В начале изучения полезно предложить обучающимся корпус простых одноходовых задач для того, чтобы научить выделять в описанных практических ситуациях теоретико-множественную модель и соотносить ее с подходящим типом выборки. Постепенно расширяя арсенал, добавляя к комбинаторным схемам применение правил суммы и произведения, метода включений и исключений, можно усложнять задачи. Теперь их решение будет связано с осознанием необходимости строить более сложную модель, находить алгоритм решения, перебирая и отбрасывая неудачные варианты. На этом этапе толкование условия задачи должно быть однозначным.

Более опытные в решении комбинаторных задач студенты уже могут самостоятельно обнаруживать в формулировках задач некоторые упущения, недосказанности, влияющие на ход рассуждений. В этот момент можно уже не “вычищать” формулировки, а дать студентам некоторую свободу, предоставить им возможность самим найти “тонкое место” в условии, а затем понаблюдать, как меняется решение задачи от, казалось бы, незначительных изменений.

Также можно предложить намеренно изменить “хорошее” условие задачи. Это дает возможность учиться быстро (задача ведь та же) адаптироваться к новым условиям, а также подтверждать правильность своего понимания материала через успешное решение задач.

На завершающем этапе можно предложить студентам самим составить комбинаторную задачу и решить ее. Чтобы создать корректную задачу, студент должен понимать её внутреннее устройство: какую комбинаторную схему заложить в основу, как правильно сформулировать условие, какие данные необходимы для решения, каким должны быть решение и ответ. Это позволяет взглянуть на комбинаторику под другим, непривычным углом и глубже проникнуть в суть изучаемого предмета.

Задачи 14 и 15 предложены студентом факультета математики и компьютерных наук КубГУ Гориным И.

Задача 14. Шесть лепреконов[1] делили между собой 12 горшочков с золотом. Сколько имеется способов распределить горшочки между лепреконами?

Если сами лепреконы, скорее всего, различимы как живые персонажи, то с горшочками все не так очевидно. Необходимо уточнить, различны горшочки или одинаковые.

Задача 15. 32 лепрекона хотели попасть в парк аттракционов. Чтобы добраться до него, они раздобыли 4 минипига. Сколькими способами они могут распределиться по минипигам, если на каждом помещается 8 лепреконов?

К такой формулировке задачи возникают уточняющие вопросы: важен ли порядок лепреконов на одном минипиге; различаются ли минипиги (например, они разноцветные) или же они одинаковы?

Справедливости ради отметим, что студент сформулировал свои задачи корректно, речь идет только о возможных «движениях» формулировок.

При составлении задач студентам приходится проверять свои задачи на корректность. Они учатся анализировать информацию, выявлять ошибки и исправлять их. Обычно такое задание вызывает энтузиазм, но в итоге далеко не все студенты справляются с ним. Тем не менее, создание собственных задач вовлекает студента в учебный процесс более активно, способствуют всестороннему развитию их математической культуры.

Заметим, что для промежуточной аттестации (контрольные работы, зачеты, экзамены) использование таких открытых, дискуссионных задач неприемлемо.

Таким образом, выбор между этими двумя подходами зависит от целей урока (занятия) и уровня подготовки обучающихся. Если цель — научить основам комбинаторики и закрепить базовые навыки, следует использовать более детальные формулировки. Но если важно развивать самостоятельность, а также творческое и критическое мышление, обсуждение различных интерпретаций может ока-

[1] Лепрекон — это волшебное существо из ирландского фольклора, маленький, коренастый человечек, сапожник фей, известный своей хитростью и любовью к золоту; прячет его в горшках в конце радуги.

заться полезным инструментом. Преподаватель управляет учебным процессом, осуществляя гибкий подход к подбору задач, и создает условия для развития как технических, так и творческих навыков у студентов.

Литература

[1] Виленкин Н.Я. Комбинаторика: учебное пособие. - М.: Наука, 1969. - 331 с.

[2] Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика: учебное пособие. - М.: «ФИМА» МЦНМО, 2023. - 400 с.

[3] Раскина И.В., Шаповалов А.В. Комбинаторика: учебно-методическое издание. - М.: МЦНМО, 2020. - 132 с.

[4] Раскина И.В., Шаповалов А.В. Комбинаторика: заседание продолжается: учебно-методическое издание. - М.: МЦНМО, 2023. - 256 с.

[5] Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах: учебное пособие. - СПб.: БХВ-Петербург, 2008. - 352 с.

Сухан Ирина Владимировна,
старший преподаватель факультета математики
и компьютерных наук
Кубанского государственного университета.

E-mail: irina-sukhan@yandex.ru

Иванисова Ольга Владимировна,
доцент факультета математики и компьютерных наук
Кубанского государственного университета, кандидат физико-
математических наук.

E-mail: zah-ivanisov@yandex.ru

Лахтина Алёна Алексеевна,
преподаватель факультета математики
и компьютерных наук
Кубанского государственного университета.

E-mail: alena.lakhtina@mail.ru

Вступительные экзамены Concours Avenir

Представил Л. В. Чиликов

В предлагаемом материале коротко рассказано о многопредметном вступительном экзамене Concours Avenir, Франция. Приведен вариант по математике от 04.05.2024, с ответами. Цель публикации — ознакомить читателя с заданиями популярного зарубежного экзамена, чтобы, в частности, можно было сопоставить его уровень с уровнем российских экзаменов (ЕГЭ, ДВИ различных вузов).

Об экзамене Concours Avenir

Конкурсный вступительный экзамен Concours Avenir объединяет 7 ведущих инженерных школ на 15 различных кампусах: ECE (Париж и Лион), EIGSI (Ла-Рошель и Касабланка), EPF (Cco, Труа и Монпелье), ESIGELEC Руан, ESILV Париж – Ла-Дефанс/Нант, ESITC (Кан, Гавр и Лион) и ESTACA (Сен-Квентин-ан-Ивелин и Лаваль).

Инженерные школы Concours Avenir имеют кампусы по всей Франции, предоставляя студентам возможность работать в различных областях, таких как бортовые системы, кибербезопасность, информатика, электронное здравоохранение, охрана окружающей среды и энергетика, аэрокосмическая промышленность, автомобилестроение, количественные финансы, строительство, мехатроника, городское планирование, цифровые технологии, сложные системы и т.п.

В экзамене могут участвовать как кандидаты из французских средних школ, так и кандидаты из учебных заведений, не являющихся французскими.

Экзамен по математике, 04.05.2024

Вариант A

Длительность: 1 час 30 минут

Специальные инструкции:

Внимательно прочитайте инструкции, чтобы обеспечить наилучшие условия для успешного выполнения этого экзамена.

Этот экзамен намеренно содержит больше заданий, чем вы можете выполнить за отведённое время. Причина в том, что ваш преподаватель, возможно, не охватил всю программу выпускного класса.

Вы должны ответить на 45 вопросов из 60 предложенных, чтобы получить максимальную оценку. Если вы решите более 45 вопросов, будут учитываться только первые 45 ответов.

Черновики не предоставляются. Пустые страницы этого варианта можно использовать для черновых записей. **Использование калькулятора или любого другого электронного устройства (подключённого или нет) запрещено.**

Никакие другие документы, кроме этого варианта и бланка ответов, не разрешены. Обратите внимание, что это не экзамен, а конкурс, который приводит к ранжированию.

Если этот вариант кажется вам «сложным», не останавливайтесь во время выполнения, не сдавайтесь, оставайтесь сосредоточенными. Другие участники, вероятно, сталкиваются с такими же трудностями, как и вы!

Система оценивания:

Для каждого вопроса только один ответ является правильным. Чтобы исключить стратегии случайного угадывания, каждый правильный ответ оценивается в три балла, а каждый неправильный ответ штрафуется на один балл. Вопрос без ответа не приносит и не отнимает баллы.

Вопросы

1. Пусть u_n — последовательность, где $u_n = \frac{\pi^n}{e^n}$. Укажите верное равенство:

$$\text{(a)} \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \text{(b)} \lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \quad \text{(c)} \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{(d)} \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{e}$$

Ответ: c. Данная последовательность — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{\pi}{e} > 1$.

2. Пусть u_n — последовательность, где $u_n = \frac{2-n^2}{(n+1)(n+2)}$. Укажите верное равенство:

$$\text{(a)} \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \text{(b)} \lim_{n\to+\infty} u_n = -1 \quad \text{(c)} \lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \quad \text{(d)} \lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

Ответ: b. Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Предел равен отношению коэффициентов (-1) и 1.

3. Пусть u_n — рекуррентная числовая последовательность, где $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{1}{u_n^2+1}\right)$ и $u_0 \in \mathbb{R}$. Укажите свойство этой последовательности.

(a) (u_n) возрастает
(b) (u_n) не монотонна
(c) (u_n) убывает
(d) характер монотонности (u_n) зависит от u_0

Ответ: d. Если $u_0 = 0$, то последовательность является стационарной, все ее члены равны 0. Если $u_0 \neq 0$, то последовательность не является стационарной.

4. В культуре бактерий количество бактерий увеличивается каждый час на 300%. Пусть u_n — последовательность, где u_n представляет количество бактерий через n часов. Укажите вид этой последовательности.
   (a) (u_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем 4
   (b) (u_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем 3
   (c) (u_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем 1,3
   (d) (u_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем 2

Ответ: a. Увеличение на 300% означает увеличение в 4 раза.

5. Из четырех утверждений выберите верное.
   (a) Если последовательность стремится к $+\infty$, то она возрастает, начиная с некоторого номера
   (b) Если последовательность (u_n) сходится к 0 и $u_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ стремится к $-\infty$ или $+\infty$
   (c) Если последовательность убывает и её члены положительны, то она ограничена
   (d) Если последовательность строго убывает, то она стремится к $-\infty$

Ответ: c. Убывающая последовательность с положительными членами ограничена.

6. Пусть даны последовательности u_n, v_n и w_n такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $u_n < v_n < w_n$. Укажите верное утверждение.
   (a) если (u_n) и (w_n) сходятся, то (v_n) тоже сходится
   (b) если (u_n) возрастает, то (v_n) тоже возрастает
   (c) все три последовательности могут иметь один и тот же предел
   (d) (v_n) ограничена

Ответ: c. Это верно в случае теоремы *о промежуточной последовательности* (*теоремы о двух милиционерах*). В случаях a, b и d контрпримеры очевидны.

7. Пусть дана рекуррентная последовательность u_n, где $u_0 \geq 0$ и $u_{n+1} = \ln(u_n + 2)$. Укажите верное утверждение.

(a) если $u_0 \in [0; 2]$, то (u_n) возрастает
(b) если $u_0 \in [0; 2]$, то (u_n) убывает
(c) если $u_0 \in [2; +\infty[$, то (u_n) возрастает
(d) если $u_0 \in [2; +\infty[$, то (u_n) убывает

Ответ: d. Сначала заметим, что $u_1 < u_0$. Действительно, так как $u_1 = \ln(u_0+2)$, то предыдущее неравенство равносильно $e^{u_0} > u_0 + 2$, что верно для $u_0 \geq 2$. Предположим, что $u_{n-1} > u_n$. Неравенство $u_n > u_{n+1}$ равносильно

$$u_n + 2 < e^{u_n} = e^{u_{n-1}+2} = u_{n-1} + 2.$$

Последнее неравенство выполняется в силу предположения индукции.

8. Пусть последовательность (u_n) удовлетворяет условию $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Для всех натуральных $n \geq 2$ определим последовательность (v_n) как $v_n = e^{u_n} \cdot \left(\ln\left(\frac{n^3-1}{n-1}\right) - \ln(n^2+n+1)\right)$. Укажите верное утверждение.

(a) (v_n) стремится к $+\infty$
(b) (v_n) постоянна
(c) (v_n) стремится к $-\infty$
(d) (v_n) сходится к e

Ответ: b. Очевидно, что разность, стоящая в скобках, равна нулю. Для доказательства достаточно применить формулу разности кубов.

9. Рассмотрим следующую программу на языке программирования `Python`, которая принимает на вход натуральное число $N \geq 1$:

```
def mysterious_algorithm(N):
    u = 4
    for i in range(1, N+1):
        u = -u + 2*i + 3
    return(u)
```

Пусть на вход подаётся $N = 11$. Укажите, что вернёт программа.

(a) Член с индексом 11 рекуррентной последовательности $u_0 = 4$ и $u_{n+1} = -u_n + 2n + 3$
(b) Член с индексом 11 рекуррентной последовательности $u_0 = 4$ и $u_{n+1} = -u_n + 2n + 5$
(c) Одиннадцатый член рекуррентной последовательности $u_0 = 4$ и $u_{n+1} = -u_n + 2n + 3$
(d) Одиннадцатый член рекуррентной последовательности $u_0 = 4$ и $u_{n+1} = -u_n + 2n + 5$

Ответ: a. Легко видеть, что аргумент функции равен индексу вычисляемого члена последовательности.

10. Пусть (u_n) — рекуррентная числовая последовательность: $u_0 = 1500$; $u_{n+1} = 0,6 \cdot u_n + 10$. С этой последовательностью связан следующий алгоритм:

```
Вход: A
u = 1500
n = 0
пока u >= A:
    u = 0,6 * u + 10
    n = n + 1
Выход: n
```

Этот алгоритм при $A = 100$ выдал число 6. Укажите верное утверждение.

(a) $u_5 \leq 100 < u_6$ (b) $u_6 < u_5$ (c) $u_7 \geq 100$ (d) $u_{101} = 6$

Ответ: b. Цикл в программе выполняется, пока члены последовательности не меньше 100, а n после каждой итерации цикла равно индексу вычисленного члена последовательности. Так как алгоритм выдал 6, то u_6 меньше 100, и условие цикла не выполнилось, а u_5, напротив, не меньше 100.

Можно указать другой способ выбор верного утверждения. Члены данной в условии последовательности задаются формулой $u_n = c \cdot 0,6^n + 25$, независимо от значения u_0. Отсюда следует неравенство $u_{n+1} < u_n$ (так как основание показательной функции меньше 1).

11. Как известно, для $n > 0$ $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$. Например, $3! = 6$. По определению $0! = 1$. Укажите верное равенство.

(a) $4! \cdot 5! = 9!$ (b) $\dfrac{6!}{3!} = 3!$ (c) $\dfrac{6!}{3!} = 2!$ (d) $10! = 7! \cdot 6!$

Ответ: d. Замечаем, что a неверно, так как слева нет множителя 7. В случаях b и c получается, что 6! не содержит множителя 5. Остается d.

12. Сколькими нулями оканчивается число 25!?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

Ответ: d. Ноль получается при умножении чисел 2 и 5. Множитель 5 получается из чисел 5, 10, 15 и 20 по одному разу и из 25 два раза.

13. Пусть дана квадратичная функция $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Укажите верное утверждение.
    (a) Наибольшее значение функции равно 3
    (b) Наибольшее значение функции достигается при $x = 1$.
    (c) Наименьшее значение функции достигается при $x = 1$.
    (d) Наименьшее значение функции равно 3

Ответ: b. Старший коэффициент отрицателен, поэтому ветви параболы направлены вниз. Абсцисса вершины параболы является точкой максимума, эта абсцисса равна 1, при этом $f(1) = 4$.

14. Сколько всего асимптот (вертикальных и горизонтальных) имеет график функции $f(x) = \frac{x^2+1}{(x-3)(x+1)}$?

(a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) 6

Ответ: b. Вертикальные асимптоты соответствуют нулям знаменателя, и их две. Горизонтальная асимптота определяется уравнением $y = 1$.

15. Пусть дана функция $f(x) = \ln(8\pi)$. Укажите её производную.

(a) $f'(x) = \frac{1}{\pi}$ (b) $f'(x) = \frac{1}{8\pi}$ (c) $f'(x) = 0$ (d) $f'(x) = 8\ln(\pi)$

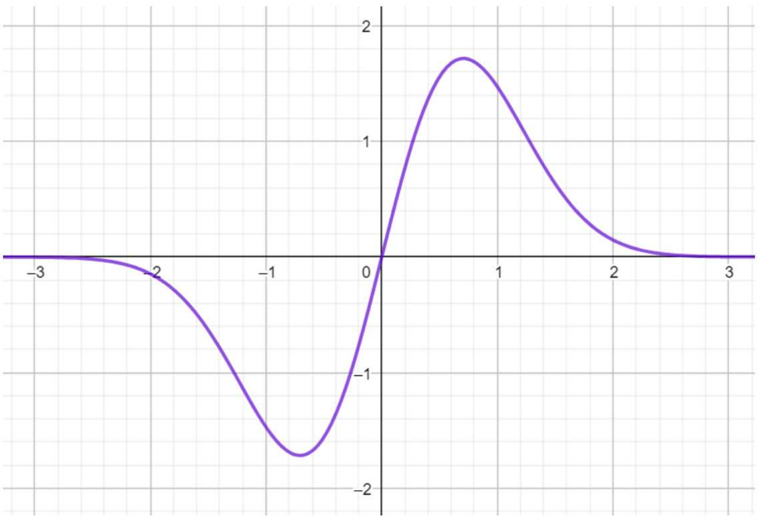
Ответ: c. Задание проверяет внимательность. Данная функция постоянна.

16. Дана функция $f(x) = \pi^x$. Укажите её производную.

(a) $f'(x) = \ln(\pi) \cdot \pi^x$ (b) $f'(x) = x \cdot \pi^{x-1}$ (c) $f'(x) = \ln(x) \cdot \pi^x$ (d) $f'(x) = \pi \cdot x^{\pi-1}$

Ответ: a. Задача проверяет знание производной показательной функции.

17. Ниже изображён график функции f' — производной функции f.



Укажите верное свойство функции f.

(a) f нечётна (b) f имеет минимум в $x = 0$

(c) f выпукла на $[-2; 0]$ (d) f выпукла на $[0; 2]$

Ответ: b. Задача проверяет умение читать график производной. Например, центральная симметрия графика производной относительно начала координат не означает нечётность функции f. Варианты c и d неверны. Если допустить, что вариант c или d верен, то производная на отрезке $[-2; 0]$ или $[0; 2]$ была бы монотонна. А это не так.

18. Пусть даны две функции f и g, определенные и выпуклые вверх на $\mathbb{R}$. Укажите верное утверждение.

(a) Функция $f \cdot g$ выпукла вниз (b) Функция $f \cdot g$ выпукла вверх

(c) Функция $f \circ g$ выпукла вверх (d) О выпуклости сделать вывод нельзя

Ответ: d. Функция $f(x) = x$ является выпуклой вверх и вниз одновременно. Функция $g(x) = x^2$ выпукла вниз, а функция $h(x) = -x^2$ выпукла вверх. Однако $f(x) \cdot g(x)$ не является выпуклой вниз, а $f(x) \cdot h(x)$ не является выпуклой вверх, поэтому a и b неверны. Для контрпримера в c рассмотрим выпуклую вверх функцию $\varphi(x) = -e^x$. Тогда легко показать, что функция $\varphi \circ h$ не является выпуклой вверх.

19. Напомним, что lg — десятичный логарифм (логарифм по основанию 10), ln — натуральный логарифм (логарифм по основанию e). Пусть $a > 0$. Укажите верное равенство.

(a) $\lg a = \dfrac{\ln a}{\ln 10}$ (b) $\lg a = \ln a \cdot \ln 10$ (c) $e^{\lg a} = 10^{\ln a}$ (d) $\lg(a) = 10^{\ln(a)}$

Ответ: a — эта формула есть в каждом учебнике.

20. Пусть функция f определена и дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$. В таблице показано поведение функции f''.

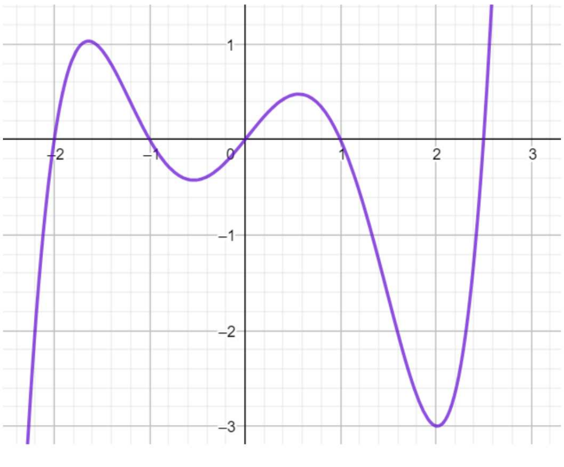
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f''(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Укажите верное утверждение.

(a) Функция f' имеет минимум на $[0; +\infty)$
(b) Функция f выпукла на $[0; +\infty)$
(c) График функции f имеет единственную точку перегиба
(d) Функция f'' чётна

Ответ: a. Для наличия минимума у функции f' её производная (то есть f'') должна менять знак с отрицательного на положительный. Это так на промежутке $[0; +\infty)$.

21. Пусть функция f определена и непрерывна на $\mathbb{R}$, её график изображён ниже. Функция имеет ровно 5 нулей. Сколько действительных корней имеет уравнение $f(x^2) = 0$?



(a) 5 корней (b) 6 корней (c) 9 корней (d) 10 корней

Ответ: a. Из графика видно, что функция $f(x)$ имеет три неотрицательных нуля: $0 < a < b$. Все корни данного уравнения находятся из уравнений $x^2 = 0$, $x^2 = a$ и $x^2 = b$.

22. Пусть функция f такова, что

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$$

. Укажите формулу, которая может определять функцию f.

$$\text{(a)} \;\; f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 - x} \quad \text{(b)} \;\; f(x) = \frac{x^2 + 5}{(x-1)(x^2+1)} \quad \text{(c)} \;\; f(x) = \frac{e^{-x}}{\ln(x)} \quad \text{(d)} \;\; f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$$

Ответ: a. В (b) и (c) второй предел $-\infty$, в (d) первый предел не 0.

23. Дана функция $f(x) = e^{-x^2} \cdot \cos(3x)$. Укажите свойство касательной к её графику в точке с абсциссой $x = 0$.

(a) Касательная параллельна оси абсцисс.
(b) Касательная имеет уравнение $y = x + 1$
(c) Касательная проходит через начало координат
(d) Касательная имеет уравнение $y = -x + 1$

Ответ: a. Данная функция чётная. Касательная в точке с абсциссой $x = 0$ параллельна оси абсцисс.

24. Дана функция $f(x) = \frac{e^x \sin(x-1)}{\ln(x-1)}$. Укажите верное равенство.

$$\text{(a)} \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1}{f(x)} = -\infty \quad \text{(b)} \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \text{(c)} \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1}{f(x)} = +\infty \quad \text{(d)} \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{e}$$

Ответ: a. Числитель данной дроби стремится к нулю; знаменатель — к $-\infty$. Функция $f(x)$ стремится к нулю слева.

25. В таблице представлены две характеристики людей из группы.

	До 18 лет	От 19 до 59 лет	60 лет и старше
Горожанин	12	58	110
Сельчанин	90	38	42

Укажите вероятность того, что опрошенному 60 лет или больше при условии, что он горожанин.

$$\text{(a)} \; \frac{110}{152} \quad \text{(b)} \; \frac{110}{170} \quad \text{(c)} \; \frac{11}{18} \quad \text{(d)} \; \frac{11}{35}$$

Ответ: c. Задача проверяет понимание формулы классической вероятности. $\frac{11}{18} = \frac{110}{110+58+12}$.

26. Пусть X — случайная величина с биномиальным распределением $\mathcal{B}(4; p)$. При каком значении p среднеквадратичное отклонение X максимально?

$$\text{(a)} \; 0 \quad \text{(b)} \; 1 \quad \text{(c)} \; \frac{1}{4} \quad \text{(d)} \; \frac{1}{2}$$

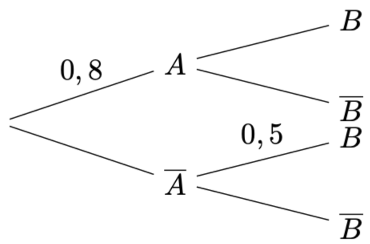
Ответ: d. Среднеквадратичное отклонение равно квадратному корню из дисперсии. Дисперсия случайной величины, распределенной биномиально, равна $4p(1-p)$ и максимальна при $p = \frac{1}{2}$.

27. Пусть даны два события A и B с вероятностями $P(A) = 0,4$ и $P(B) = p$. Оказалось, что $P(A \cup B) = 0,5$. При каком значении p события A и B несовместны?

$$\text{(a) } \frac{1}{6} \quad \text{(b) } \frac{1}{3} \quad \text{(c) } 0,25 \quad \text{(d) } 0,1$$

Ответ: d. Для несовместных событий имеем $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Имеем уравнение $0,5 = 0,4 + p$.

28. Пусть даны два события A и B с $P(A \cap B) = 0,4$.

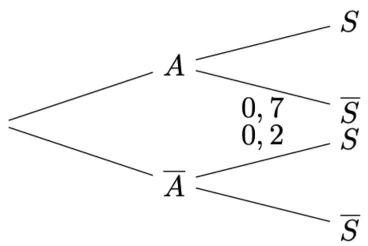


На основании приведённого дерева вероятностей укажите верное равенство.

(a) $P(\overline{A} \cap B) = 0,7$ (b) $P(A \cup \overline{B}) = 0,4$ (c) $P(B) = 0,6$ (d) $P_B(A) = 0,8$

Ответ: d. Задача проверяет понимание условной вероятности. Неизвестные вероятности в дереве легко вычислить.

29. Пусть даны два события A и S с вероятностью $P(S) = 0,24$. Используя приведённое дерево вероятностей, укажите верное равенство.



(a) $P(A) = 0,25$ (b) $P(A \cap \overline{S}) = 0,28$ (c) $P_A(S) = 0,4$ (d) $P(\overline{A}) > P(\overline{S})$

Ответ: b. Пусть $P(A) = x$. Из дерева и условия $P(S) = 0,24$ имеем $0,24 = 0,3x + 0,2(1 - x)$, откуда $P(A) = 0,4$. Тогда $P(A \cap \overline{S}) = P(A) \cdot P_A(\overline{S}) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28$.

30. Урна содержит два красных жетона и m зелёных. Случайным образом из урны вынимают два жетона без возвращения. Игрок получает 1 рубль за каждый зелёный жетон и теряет 2 рубля за каждый красный. Пусть его выигрышу соответствует случайная величина X. Сколько различных значений может принимать величина X?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Ответ: c. (В предположении, что m достаточно велико). Возможные значения X: $-4, -1, 2$.

31. Какова вероятность получить прибыль в этой игре?

$$\text{(a) } \frac{m^2 - m}{m^2 + 3m + 2} \quad \text{(b) } \frac{m^2 - 1}{(m+1)(m+2)} \quad \text{(c) } 1 - \frac{6m}{(m+1)(m+2)} \quad \text{(d) } 1 - \frac{2}{m^2 + 3m + 2}$$

Ответ: a. Для получения прибыли необходимо вытянуть два зелёных жетона. Первый вытягивается с вероятностью $\frac{m}{m+2}$, а второй — с вероятностью $\frac{m-1}{m+1}$.

32. Какое минимальное значение m гарантирует, что игрок не будет терять деньги в среднем?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

Ответ: b. Можно найти вероятности получения каждой прибыли из возможных, а затем найти математическое ожидание.

33. Если $m = 2$, то $V(X)$[1] $=$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

Ответ: d. Случайная величина X принимает значения -4, -1, 2 с вероятностями соответственно 1/6, 4/6, 1/6. Тогда $M(X) = -1$, $M(X^2) = 4$, $V(X) = M(X^2) - M(X)^2 = 3$.

34. Пусть X — случайная величина, следующая биномиальному распределению $\mathcal{B}(5; \frac{1}{2})$. Тогда вероятность $P(2 \leq X \leq 3)$ равна:

$$\text{(a) } \frac{5}{8} \quad \text{(b) } \frac{3}{8} \quad \text{(c) } \frac{15}{16} \quad \text{(d) } \frac{1}{16}$$

Ответ: a. Задача проверяет знание определения биномиального распределения.

35. Даны 5 жетонов с номерами 1, 2, 3, 4 и 5. Рассмотрим натуральные числа, которые можно составить, используя каждый жетон ровно один раз. Например, можно составить число 14325, но нельзя 114235 или 123. Сколько различных натуральных чисел можно составить с помощью этих жетонов?

(a) 120 (b) C_{10}^5 (c) 43210 (d) 10^5

Ответ: a. Количество чисел равно числу перестановок пяти элементов, то есть 5!.

36. Если упорядочить все возможные числа из вопроса 35 по возрастанию, какое число будет 100-м?

(a) 51423 (b) 51432 (c) 51324 (d) 51342

Ответ: d.

37. Решения на $\mathbb{R}$ дифференциального уравнения $\pi y' = y$ — это функции, определённые как:

(a) $f(x) = Ce^{-\pi x}$, где $C \in \mathbb{R}$ (b) $f(x) = Ce^{\frac{x}{\pi}}$, где $C \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = Ce^{-\frac{x}{\pi}}$, где $C \in \mathbb{R}$ (d) $f(x) = Ce^{\pi x}$, где $C \in \mathbb{R}$

[1] Variance — дисперсия, которую в русскоязычной литературе принято обозначать $D(x)$.

Ответ: b. Из предложенных ответов легко угадать правильный. Если не смотреть на ответы, то угадать его можно из следующих соображений. Заметим, что решением уравнения $y' = y$ является $y = Ce^x, c \in \mathbb{R}$. Легко видеть из формулы производной суперпозиции, что поправка на некоторый коэффициент A в уравнении $y' = Ay, A \in \mathbb{R}$ означает замену $x \mapsto Ax$ для решения $y = Ce^x$.

38. Решение f на $\mathbb{R}$ дифференциального уравнения $y' + \frac{1}{e}y = e$ с условием $f(1) = 1$:

(a) $f(x) = e^{\frac{x-1}{e}}(1 - e^2) + e^2$ (b) $f(x) = e^2$

(c) $f(x) = e^{\frac{1-x}{e}}(1 - e^2) + e^2$ (d) $f(x) = e^{\frac{-x}{e}}(1 - e^2) + e^2$

Ответ: c. Умножим уравнение на некую функцию μ и попробуем подобрать ее так, чтобы левая часть была равна $(\mu y)'$. То есть $\mu y' + \mu' y = \mu y' + \frac{\mu}{e}y$. Для этого достаточно выбрать μ так, чтобы выполнялось $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{e}$, а для этого достаточно выбрать любое μ такое, что $(\ln \mu)' = \frac{1}{e}$. Интегрируя с константой 0, получаем $\mu = e^{x/e}$. После умножения исходное уравнение примет вид $(e^{x/e}y)' = e^{x/e+1}$. Проинтегрировав обе части этого уравнения и преобразовав его с учетом условия $f(1) = 1$, имеем ответ c.

39. Решения на $\mathbb{R}$ дифференциального уравнения $y' + y = x^2$ — это функции, определённые как:

(a) $f(x) = Ce^x + x^2 + 2x + 2$, где $C \in \mathbb{R}$ (b) $f(x) = Ce^x + x^2 - 2x + 2$, где $C \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = Ce^{-x} + x^2 + 2x + 2$, где $C \in \mathbb{R}$ (d) $f(x) = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2$, где $C \in \mathbb{R}$

Ответ: d.

40. Пусть f — решение дифференциального уравнения $y' - 2y = e^x$. Пусть g определена на $\mathbb{R}$ как $g(x) = f(x) + e^x$. Тогда можно утверждать, что:

(a) g — решение уравнения $(E) : y' - 2y = 2e^x$ (b) g — решение уравнения $(E) : y' - 2y = e^x$

(c) g — решение уравнения $(E) : y' - 2y = -e^x$ (d) g — решение уравнения $(E) : y' - 2y = 0$

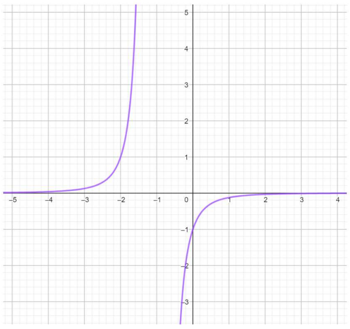
Ответ: d. Ответ можно получить, вычислив $g' - 2g$ с учетом определения f.

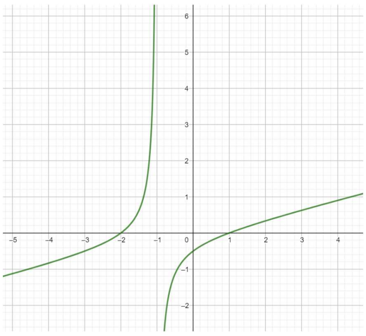
41. Первообразная функции f, определённой на $]1; +\infty[$ как $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$, может быть определена как:

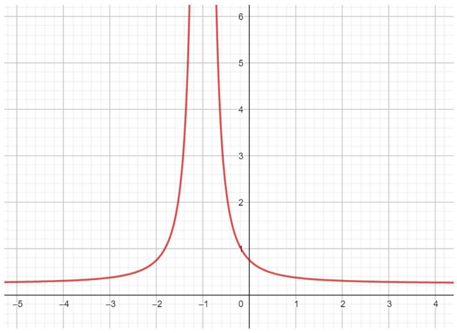
(a) $F(x) = 2\sqrt{\ln(x)}$ (b) $F(x) = \ln\left(\sqrt{\ln(x)}\right)$ (c) $F(x) = \sqrt{\ln(x)}$ (d) $F(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$

Ответ: a. Так как $\frac{dx}{x} = d\ln x$, то $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{d\ln x}{\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x}$.

42. Даны три функции f, g и h, определённые и дифференцируемые на $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, графики которых приведены ниже (левый график соответствует функции f, средний — функции g, правый — функции h). Какое утверждение может быть верным?





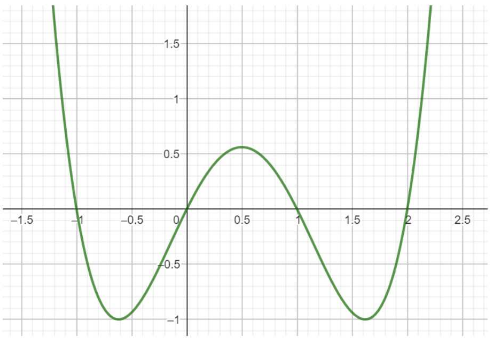


(a) f — первообразная g, и $h' = f$ (b) h — первообразная f, и $h' = g$

(c) f — первообразная h, и $g' = f$ (d) g — первообразная h, и $h' = f$

Ответ: d. Вариант c неверен, так как $g' = f$ невозможно (в противном случае имеем $f < 0$ на $(-1, +\infty)$ и функция g на этом промежутке должна убывать, что неверно). Аналогично, вариант a неверен, так как f не может быть первообразной g (функция f монотонна на лучах $(-\infty; -1)$ и $(-1; +\infty)$, а g меняет на них знак). По той же причине не верен и вариант b. Остаётся вариант d, для которого свойства производной не приводят к противоречиям.

43. Пусть f — непрерывная функция на $\mathbb{R}$, график которой приведён ниже.



Пусть F — одна из её первообразных на $\mathbb{R}$. Тогда можно утверждать, что:

(a) F положительна на $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ (b) $F(0) = 0$

(c) F убывает на $[1; 2]$ (d) $f' = F$

Ответ: c. Задача проверяет знание свойств производной.

44. Интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$ равен:

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) 2

Ответ: a. Задача проверяет знание формулы Ньютона-Лейбница.

45. Пусть F — дифференцируемая функция на $]0; +\infty[$, определённая как $F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt$. Тогда можно утверждать, что:

(a) F меняет знак на $]0;+\infty[$ (b) $F(e)=\frac{\ln(e^2)}{2}$

(c) $F(e)=\frac{1}{2}$ (d) $\forall x>0, F(x)=\frac{(\ln(x))^2}{2}-\frac{1}{2}$

Ответ: c. Вычисляя интеграл, получаем $F(x)=\frac{\ln^2 x}{2}$. Тогда $F(e)=\frac{1}{2}$.

46. Среднее значение функции f, определённой как $f(x)=xe^{x^2}$, на интервале $[0;2]$ равно:

(a) $\dfrac{e^2-1}{2}$ (b) $\dfrac{e^4-1}{2}$ (c) $\dfrac{e^2-1}{4}$ (d) $\dfrac{e^4-1}{4}$

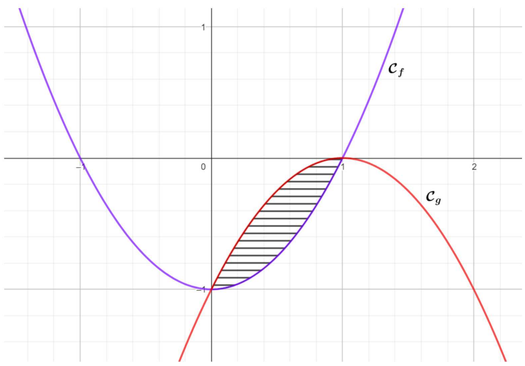
Ответ: d. Нужно найти $\frac{1}{2}\int_0^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{e^4-e^0}{2}\right)=\frac{e^4-1}{4}$.

47. Пусть функция f определена на $\mathbb{R}$ как $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$. Пусть $\mathcal{C}_f$ — её график в системе координат $(O;I;J)$, где $OI=0,5$ см и $OJ=4$ см. В этой системе координат площадь области, ограниченной графиком $\mathcal{C}_f$, осью абсцисс и прямыми $x=0$ и $x=1$, равна:

(a) $\ln(2)$ см^2 (b) $\frac{\ln(2)}{2}$ см^2 (c) $\frac{\ln(2)}{4}$ см^2 (d) $2\ln(2)$ см^2

Ответ: b. Задача проверяет знание геометрического смысла интеграла и формулы Ньютона-Лейбница.

48. Ниже приведены графики двух квадратичных функций, обе обращаются в ноль в точке 1. Пусть $\mathcal{A}$ — площадь заштрихованной области.



Тогда можно утверждать, что:

(a) $\mathcal{A}=\int_0^1 x(1-x)dx$ (в условных единицах) (b) $\mathcal{A}=\int_0^1 2x(x-1)dx$ (в условных единицах)

(c) $\mathcal{A}=\frac{2}{3}$ (в условных единицах) (d) $\mathcal{A}=\frac{1}{3}$ (в условных единицах)

Ответ: d. Эта задача снова проверяет знание геометрического смысла интеграла.

49. Пусть функция f определена как $f(x)=\frac{\sqrt{2}\sin(x)\cos(x)}{1+\cos(x)^2}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Пусть $\mathcal{A}_1$ — площадь области, ограниченной графиком функции $-f+0,2$, графиком $-f$ и прямыми $x=-\frac{\pi}{2}$ и $x=\frac{\pi}{2}$. Пусть $\mathcal{A}_2$ — площадь области, ограниченной графиком функции $f+0,2$, графиком f и теми же прямыми. Логотип конкурса Avenir представлен жирной сплошной линией (график f) и жирной пунктирной линией (график $-f$) на $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Приближённая площадь $\mathcal{A}$ для закрашивания логотипа равна $\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2$. Тогда приближённое значение:

(a) $\mathcal{A} \approx \frac{\pi}{5}$ (в условных единицах) (b) $\mathcal{A} \approx \frac{\pi}{4}$ (в условных единицах)

(c) $\mathcal{A} \approx \frac{2\pi}{5}$ (в условных единицах) (d) $\mathcal{A} \approx \frac{3\pi}{4}$ (в условных единицах)

Ответ: c. Задача проверяет знание геометрического смысла интеграла.

50. В прямой конус высотой 10 см и радиусом 10 см помещён шар диаметром 2 см. Какой процент объёма конуса занимает шар?

(a) 4% (b) $3,2\%$ (c) $0,8\%$ (d) $0,4\%$

Ответ: b. Задача на формулы объема конуса и шара.

51. В ортонормированной системе координат плоскости даны точки $A(0;2)$, $B(1;3)$ и $C(5;0)$. Кроме того, C — середина отрезка $[BD]$. Тогда скалярное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ равно:

(a) 4 (b) -14 (c) $\dfrac{5}{2}$ (d) 0

Ответ: a. Точка $D(9;-3)$. Имеем $\overrightarrow{AB} = (1;1), \overrightarrow{AD} = (9;-5)$. Скалярное произведение этих векторов равно 4.

52. Пусть треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный в B, с $AC = \sqrt{8}$. Тогда скалярное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ равно:

(a) 4 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 2 (d) 0

Ответ: c. Катеты имеют длину 2. Скалярное произведение катета и гипотенузы равно 2.

53. В пространстве даны три неколлинеарные точки $A(1;2;1)$, $B(1;-1;3)$ и $C(0;6;-2)$. Уравнение плоскости (ABC):

(a) $-x+3y-z-4=0$ (b) $2x-2y-3z+5=0$

(c) $x-2y-3z+6=0$ (d) $x+4y+6z-15=0$

Ответ: c. Достаточно подставить координаты точке A, B и C в каждое из данных уравнений.

54. В пространстве даны три неколлинеарные точки $A(-1;0;0)$, $B(1;2;0)$ и $C(0;0;-1)$. Какая из следующих точек принадлежит плоскости (ABC)?

(a) $D(0;0;0)$ (b) $D(1;0;0)$ (c) $D(0;1;0)$ (d) $D(0;0;1)$

Ответ: c. Точки A и C диктуют уравнение плоскости ABC в виде $x+by+z=-1$. Координаты точки $B(1;2;0)$ удовлетворяют этому уравнению, отсюда $b=-1$. Уравнение плоскости $x-y+z=-1$.

55. В пространстве дана прямая $\mathcal{D}$ с параметрическим уравнением:

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Какая из следующих прямых, заданных параметрически, перпендикулярна $\mathcal{D}$?

(a) $\mathcal{D}_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = -2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$ (b) $\mathcal{D}_2: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

(c) $\mathcal{D}_3: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$ (d) $\mathcal{D}_4: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

Ответ: d.

56. В пространстве даны прямые $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ с параметрическими уравнениями:

$$\mathcal{D}_1: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \mathcal{D}_2: \begin{cases} x = t \\ y = -2t - 3 \\ z = -t - 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

а также плоскости $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ с уравнениями:

$$\mathcal{P}_1: x + y - z + 2 = 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{P}_2: 3x + y + z + 4 = 0.$$

Тогда можно утверждать, что:

(a) плоскости $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ параллельны (b) $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ пересекаются по прямой $\mathcal{D}_1$

(c) прямые $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ пересекаются (d) $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ пересекаются по прямой $\mathcal{D}_2$

Ответ: d. Для точек пересечения плоскостей $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ справедливо равенство $x + z = -1$. Этому уравнению удовлетворяют точки прямой $\mathcal{D}_2$.

57. В пространстве даны точка $A(1;1;1)$ и плоскость $\mathcal{P}$ с уравнением:

$$\mathcal{P}: x + y = 0.$$

Чему равно расстояние от точки A до плоскости $\mathcal{P}$?

(a) 0 (b) 1 (c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{3}$

Ответ: c.

58. Рассмотрим пирамиду $SABCD$ с квадратным основанием, вершиной S и всеми рёбрами одинаковой длины. Точка O — центр квадрата $ABCD$. Предположим, что $OA = OB = OS = 1$. Пространство снабжено ортонормированной системой координат $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS})$. Какое из следующих утверждений верно?
    (a) Пересечение плоскостей (SAB) и (SCD) — это точка S
    (b) Пересечение плоскостей (SAB) и (SCD) — это плоскость (ABC)
    (c) Пересечение плоскостей (SAB) и (SCD) — это прямая (SO)
    (d) Пересечение плоскостей (SAB) и (SCD) — это прямая, проходящая через S и параллельная (AB)

    Ответ: d.

59. Вектор, нормальный к плоскости (SBC), задаётся как:

$$(a)\ \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\quad (b)\ \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\quad (c)\ \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\quad (d)\ \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

    Ответ: d.

60. Каковы координаты ортогональной проекции точки C на плоскость (SAB)?

$$(a)\ \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\quad (b)\ \begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\quad (c)\ \begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\quad (d)\ \begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

    Ответ: d. Уравнение плоскости $SAB : x + y + z = 1$. Вектор нормали $\overrightarrow{N} = (1; 1; 1)$. Прямая, проходящая через точку C в направлении нормали,

$$x = -1 + t, \quad y = t, \quad z = t$$

    Пересекает плоскость SAB при $t = \frac{2}{3}$, то есть в точке $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

Чиликов Леонид Вячеславович,
студент факультета математики и компьютерных наук
Санкт-Петербургского государственного университета.

E-mail: chilikovleonid@gmail.com

Современные направления исследований в искусственном интеллекте: что нам ждать дальше?

С. П. Левашкин, К. Н. Иванов, О. И. Захарова, С. В. Кушуков

Умные чат-боты, генераторы изображений, продвинутые рекомендательные системы и поисковые технологии — это лишь некоторые из результатов ИИ-революции, которые мы наблюдаем сегодня. Современным тенденциям развития искусственного интеллекта посвящена эта статья.

Три важнейших направления развития ИИ

1. “Рассуждающие модели”. В сентябре 2024 г. OpenAI показали o1 — первую рассуждающую нейросеть. Перед ответом она пошагово анализирует запрос, что позволяет ей меньше ошибаться, а также решать сложные задачи, с которыми не справляются обычные чат-боты. Вскоре свои ИИ-модели, построенные на новой парадигме, начали представлять китайские компании: “дочка” корпорации Alibaba Qwen и стартап DeepSeek. В декабре к гонке подключился Google с экспериментальной рассуждающей версией Gemini 2.0. OpenAI вслед за Google анонсировала o3 — модель вошла в топ-200 программистов мира и прошла бенчмарк ARC AGI, оценивающий способность ИИ решать ранее незнакомые ему задачи лучше людей.

2. “ИИ-видео”. В декабре 2024 г. вышел генератор видео Sora от OpenAI, анонсированный почти год назад. Однако неожиданно OpenAI, по мнению многих пользователей, оказалась в позиции догоняющего. Veo 2 от Google лучше Sora справляется со сложной физикой, китайская Kling — как минимум не уступает в качестве. А Runway со своей Gen-3 тем временем покоряет Голливуд в партнерстве с Lionsgate. Темп прогресса в создании видео искусственным интеллектом опережает развитие текстовых моделей. У этого направления есть объективные причины: единица визуального контента содержит множество информации, тогда как с дискретным текстом работать сложнее. К тому же сделать качественный синтетический текст для обучения чат-бота — нелегкая задача, тогда как для создания множества видео приемлемого качества достаточно обычной камеры.

3. “Агенты”. Это следующий уровень развития ИИ-систем. Модели будут не просто обрабатывать и выдавать информацию по принципу “черного ящика”, а смогут взаимодействовать с окружением, принимать решения и работать автономно, заменяя сотрудников-людей. Крупнейший венчурный фонд Sequoia выпустил доклад, где оценил рынок ИИ-агентов в триллионы долларов. Работать с интерфейсами компьютера, как человек, уже умеет Claude от Anthropic, над аналогичной системой работают OpenAI и другие игроки. Deloitte прогнозирует, что в 2025 году 25% из компаний, уже использующих генеративный ИИ, начнут внедрять ИИ-агентов.

Агенты и большие языковые модели

“*Зачем нам большие языковые модели?*” Когда вы общаетесь с искусственным интеллектом, может показаться, что он действительно понимает вас, как человек. На самом деле, это результат сложных математических вычислений, лежащих в основе так называемых больших языковых моделей (LLM). Они анализируют огромные объемы текстов и учатся на них, выявляя закономерности в языке. Но как именно это работает?

В основе моделей лежит механизм предсказания слов. Когда вы вводите текст, нейросеть не “размышляет”, а вычисляет, какое слово или фраза с наибольшей вероятностью должны идти дальше.

Она делает это на основе огромного количества примеров, которые были использованы в процессе ее обучения. Если очень упростить, модель оценивает контекст, сравнивает его с известными ей текстами и выбирает наиболее вероятное продолжение. Чем больше данных и сложнее модель, тем точнее и логичнее оказываются ее ответы.

Такие модели уже применяются повсеместно: они помогают автоматизировать клиентскую поддержку, анализируют и резюмируют большие массивы документов, улучшают поисковые системы, создают тексты и даже помогают программистам писать код. Их главная ценность — это способность работать с естественным языком, обрабатывать сложную информацию и представлять ее в удобном формате. Вместо того чтобы вручную искать нужные данные, человек может просто задать вопрос модели и получить развернутый ответ. В основе множества современных разработок лежат модели вроде GPT, DeepSeek, GigaChat, Llama, Gemini, Mistral и т.д. Каждая из них имеет свои особенности: например, одни оптимизированы для локальной работы, а другие требуют мощных серверов.

Интересный факт: большие языковые модели не хранят всю прочитанную информацию как базу данных, а оперируют статистическими связями между словами. Например, если модель обучалась на текстах объемом в сотни терабайтов, она не сможет воспроизвести дословно книгу или статью, но сможет пересказать их с высокой степенью точности. При этом на генерацию каждого ответа уходит всего доли секунды, хотя сама разработка и обучение таких моделей занимает месяцы и требует суперкомпьютеров стоимостью в сотни миллионов долларов.

"*Агенты: как ИИ учится действовать сам*". Большие языковые модели лежат в основе современных систем ИИ, помогая отвечать на вопросы, писать тексты и анализировать информацию. Но что, если бы искусственный интеллект мог не только выдавать ответы, но и сам искать нужные данные, выполнять команды и даже принимать решения? Именно так работают ИИ-агенты.

ИИ-агенты — это автономные системы, которые могут управлять своими действиями. Они используют языковые модели, но дополнительно имеют инструменты для поиска информации, выполнения команд и анализа данных. Например, агент может получить задание "найти актуальные новости по теме", сам отправить запросы в интернет, обработать данные и представить краткий отчет.

Такие технологии применяются в самых разных сферах. В бизнесе агенты помогают анализировать данные, автоматизировать рутинные задачи и взаимодействовать с клиентами. В научных исследованиях они обрабатывают большие массивы информации, структурируют данные и даже формируют гипотезы. В программировании агенты могут находить ошибки в коде, предлагать исправления и даже писать целые фрагменты программ.

Главное преимущество ИИ-агентов — их способность работать автономно, без постоянного вмешательства человека. Они могут комбинировать несколько инструментов, адаптироваться к новой информации и даже разбивать сложные задачи на более мелкие этапы, планируя свою работу. Это делает их мощными помощниками для решения широкого спектра задач.

"*Интересный факт*". Агенты могут взаимодействовать друг с другом в так называемых мультиагентных системах. В них несколько ИИ-агентов работают вместе, обмениваясь данными и распределяя задачи между собой. Например, один агент может искать информацию, другой анализировать ее, а третий — формировать итоговый отчет. Такой подход позволяет быстрее и эффективнее решать сложные задачи, подобно тому, как команда специалистов объединяет усилия для достижения общей цели. К таким системам относятся проекты: AutoGPT, AutoGen, LangGraph.

Семантический анализ текстов: от теории к практике

"*Что это такое?*" Семантический анализ текстов — это процесс автоматического извлечения смысла из текстовой информации с помощью технологий искусственного интеллекта (ИИ) и обработки естественного языка (NLP). В отличие от простого поиска ключевых слов, семантический анализ стремится понять глубинные связи между словами, фразами и даже целыми абзацами, учитывая контекст, структуру и логические отношения.

С развитием интернета, социальных сетей, IoT (Интернета вещей) и других технологий объем данных, генерируемых ежедневно, растет экспоненциально. Эти данные часто не структурированы (тексты, изображения, аудио), и семантический анализ позволяет извлекать из них смысл, что критически важно для их эффективного использования.

Пример: если в тексте встречается слово "банка", алгоритм должен определить, речь идет о финансовой организации или о таре для хранения продуктов. Это достигается за счет анализа окружающих слов и контекста.

"*Где используется?*" Семантический анализ применяется практически во всех областях, где требуется работа с большими объемами текстовых данных:

– Поисковые системы: Google и другие поисковики используют его для точного понимания запросов пользователей и предоставления релевантных результатов.

– Клиентский сервис: чат-боты и системы поддержки анализируют сообщения клиентов, чтобы предложить наиболее подходящие ответы.

– Маркетинг: анализ отзывов, социальных сетей и комментариев для выявления трендов, настроений и предпочтений аудитории.

– Наука и медицина: обработка научных публикаций и клинических исследований для выявления новых гипотез или взаимосвязей.

"*Для чего это нужно?*" Основная цель семантического анализа — сделать работу с текстом более эффективной и точной. Он помогает:

- выявлять скрытые смысловые связи между различными частями текста;

- упрощать доступ к информации в больших массивах данных;

- оптимизировать процессы принятия решений на основе содержательного анализа текстов;

- повышать качество взаимодействия между человеком и машиной через лучшее понимание намерений пользователя.

Современные системы обработки данных должны не только анализировать факты, но и понимать контекст, тонкости языка, иронию, сарказм, многозначность слов и т.д. Семантический анализ помогает машинам лучше "понимать» человеческий язык и взаимодействовать с людьми.

"*Чем конкретно этот ИИ полезен?*" Семантический анализ текстов имеет множество практических преимуществ:

- Экономия времени: автоматическое извлечение важной информации из документов позволяет специалистам сосредоточиться на стратегических задачах.

- Повышение точности: алгоритмы могут обнаруживать нюансы, которые могут быть упущены человеком при ручной обработке текста.

- Персонализация: на основе анализа поведения и предпочтений пользователей можно создавать более релевантный контент или предложения.

- Автоматизация: многие рутинные задачи, такие как классификация документов или переводы, могут быть полностью автоматизированы.

"*Интересные факты*". Одним из самых интересных применений семантического анализа является создание **литературных произведений** с помощью ИИ. Например, алгоритмы могут генерировать рассказы, стихи или даже целые книги, основываясь на анализе существующих текстов. Одним из таких проектов стал роман "*The Day a Computer Writes a Novel*" ("Тот день, когда компьютер написал роман"), который был создан японскими исследователями и даже прошел первый этап литературного конкурса.

Более того, современные модели, такие как GPT, способны не только воспроизводить текст, но и адаптироваться под стиль автора, сохраняя последовательность мыслей и эмоциональную окраску.

Еще интересные факты из области семантического анализа:

1. **Модели ИИ могут "читать между строк"** Современные системы понимают не только

слова, но и контекст, иронию и сарказм. Например, фразу “Ну конечно, это было просто прекрасно!” они могут распознать как негативную, даже если там нет явных отрицательных слов.

2. **Одна модель знает 100+ языков**

Модели, такие как GPT или BERT, могут работать с десятками языков одновременно. Они “учатся” на одном языке и переносят знания на другие, что делает их универсальными переводчиками и аналитиками.

3. **ИИ может писать стихи и музыку**

Благодаря семантическому анализу, ИИ создает тексты, которые звучат как написанные человеком. Например, GPT-4 может написать стихотворение или сценарий, а нейросети вроде ChatGPT — поддержать диалог на любую тему.

4. **Слова — это числа**

Для машин слова — это просто числа (векторы). Например, слово “король” может быть представлено как набор чисел, и если вычесть из него вектор “мужчина” и добавить “женщина”, получится “королева”. Магия математики!

5. **ИИ понимает, что “кошка” ближе к “собаке”, чем к “автомобилю”**

Модели семантического анализа “знают”, что кошки и собаки — это животные, а автомобили — нет. Они группируют слова по смыслу, даже если их этому явно не учили.

6. **ИИ может анализировать эмоции**

Семантический анализ позволяет определять настроение текста: радость, грусть, гнев. Это используется, например, для анализа отзывов о фильмах или продуктах.

7. **ИИ “читает” быстрее человека**

Современные модели могут обрабатывать миллионы страниц текста за секунды, извлекая из них ключевые идеи. Это помогает в анализе больших данных, например, в научных исследованиях.

8. **ИИ может “обманывать”**

Некоторые модели настолько хорошо понимают контекст, что могут генерировать убедительные, но ложные утверждения. Это называется “галлюцинациями ИИ”, и это одна из проблем, над которой работают исследователи.

9. **ИИ “учится” на ошибках**

Если модель неправильно поняла текст, её можно “дообучить”, показав больше примеров. Это делает её умнее с каждым днем.

Семантический анализ является ключевым компонентом для создания интеллектуальных систем, таких как чат-боты, виртуальные помощники, системы автоматического перевода и рекомендательные системы. Без понимания семантики невозможно достичь высокого уровня точности и естественности в таких системах. Таким образом, семантический анализ данных продолжает оставаться одним из самых важных направлений исследований благодаря его способности преобразовать сырые данные в осмысленную информацию.

Семантический анализ текстов — это мощный инструмент, который открывает новые горизонты для работы с информацией. Благодаря ему машины становятся не просто хранилищами данных, а активными помощниками в понимании и интерпретации человеческой речи. Прорывные работы, такие как BERT, GPT и Transformer модели, показывают, насколько далеко мы продвинулись в этом направлении, но потенциал для дальнейшего развития остается огромным. Будущее за интеграцией семантического анализа с другими технологиями, такими как искусственный интеллект, интернет вещей и блокчейн, что позволит создать более умные и автономные системы.

Feature Engineering

Мир искусственного интеллекта (ИИ) стремительно развивается, и каждая инновация в этой области имеет огромное значение. Одним из таких ключевых понятий, которое стало важнейшим инструментом для специалистов по данным, является Feature Engineering — создание и улучшение признаков для машинного обучения. Но что стоит за этим термином и почему он так важен для развития ИИ?

“*Что такое Feature Engineering и почему это важно*?» Feature engineering — это процесс преобразования исходных данных в такие признаки, которые помогут модели машинного обучения работать более эффективно. Признаки (или фичи) — это данные, которые ИИ использует для принятия решений. Например, если ИИ обучается на предсказании, будет ли человек покупать товар, фичами могут быть возраст, пол, история покупок и многие другие факторы.

Важно понимать, что, если данные плохо подготовлены или неправильно интерпретированы, даже самая продвинутая модель машинного обучения может дать неудачные результаты. Вот почему feature engineering играет ключевую роль в создании точных и эффективных предсказаний.

“*Как работает Feature Engineering*?» Когда вы работаете с данными, часто бывает так, что исходная информация не сразу готова для подачи в модель. Признаки могут быть не в том формате, не учитывать все аспекты или быть недостаточно полными. Именно тут и вступает в игру feature engineering.

Примеры эффективного использования feature engineering:

1. *Обработка пропущенных данных*: Пропущенные значения в данных могут помешать обучению модели. В случае, если у вас есть пропущенные значения, их можно либо удалить, либо заменить на средние значения или медианы для числовых данных, либо использовать более сложные методы заполнения на основе других признаков.

2. *Преобразование категориальных признаков*: например, у вас есть данные о странах, и они представлены в виде строк (Россия, США, Индия). Для модели машинного обучения лучше представить эти страны в виде чисел, например, используя технику кодирования One-Hot Encoding, где каждая страна становится отдельным бинарным признаком.

3. *Создание новых признаков*: иногда из исходных данных можно создать более информативные признаки. Например, если у вас есть дата рождения человека, вы можете извлечь из нее возраст. Это уже будет более полезный признак для модели, чем сама дата рождения.

4. *Нормализация и стандартизация данных*: когда данные разных типов и масштабов (например, один признак измеряется в килограммах, а другой — в метрах), важно привести их к единому масштабу. Это позволяет модели легче анализировать и выявлять закономерности.

5. *Создание взаимодействий между признаками*: например, взаимодействие между возрастом и полом может быть более полезным, чем использование этих признаков по отдельности. Вы можете создать новый признак, который будет комбинировать эти два, и это может повысить точность модели.

Важные тренды в Feature Engineering

1. *Автоматизация процесса с помощью AutoML.* Современные технологии делают feature engineering более доступным даже для людей, не имеющих глубоких знаний в области математического моделирования. AutoML (автоматическое машинное обучение) помогает автоматически создавать и оптимизировать признаки. Это ускоряет процесс разработки и делает его более эффективным, особенно в сложных проектах с большими объемами данных.

2. *Глубокое обучение и сложные признаки.* В последние годы с развитием нейронных сетей, особенно в контексте глубокого обучения, важность традиционного feature engineering несколько уменьшилась. Однако, даже в таких моделях важно делать предварительную обработку данных. Более того, современные методы могут выявлять скрытые зависимости в данных, которых невозможно было бы заметить без тщательной работы с признаками.

3. *Визуализация данных для улучшения признаков.* Визуализация данных помогает не только лучше понять данные, но и выделить важные признаки, а также выявить взаимосвязи, которые можно использовать для создания новых, более информативных фич. Для этого используются такие инструменты, как диаграммы рассеяния, тепловые карты и гистограммы.

4. *Модели с объяснимым ИИ.* С увеличением популярности моделей машинного обучения, которые принимают важные решения (например, в медицинской диагностике или финансовых приложениях), возникает необходимость сделать их "прозрачными". Эффективный feature engineering помогает не только повысить точность, но и сделать модели более интерпретируемыми для человека.

"*Пример из реальной жизни: как feature engineering влияет на бизнес*". Возьмем компанию, которая использует ИИ для прогнозирования того, купит ли клиент определенный товар. Если изначально данные о клиентах представлены простыми признаками, как возраст и пол, то, применяя методы feature engineering, можно добавить признаки, как средний чек покупок, предпочтения по времени суток, историю просмотров товаров и даже время, проведенное на сайте. Эти дополнительные признаки могут значительно улучшить точность предсказания, что в свою очередь повысит продажи и удовлетворенность клиентов.

"*Заключение*". Feature engineering — это не просто технический шаг в разработке модели ИИ, а ключевая составляющая, от которой во многом зависит успех всего проекта. С правильными признаками модель может принимать более точные решения, что приводит к лучшим результатам. В этом процессе важно использовать как традиционные подходы, так и современные автоматизированные инструменты. Независимо от того, работаете ли вы с маленькими наборами данных или строите сложные модели для крупных компаний, эффективный feature engineering всегда остается важнейшим фактором для достижения успеха.

Мир ИИ не стоит на месте, и за каждым шагом вперед стоит целый ряд инноваций, которые помогают извлекать больше ценности из данных и улучшать прогнозы. Ожидаем, что в ближайшем будущем методы feature engineering будут только улучшаться, делая ИИ еще более мощным инструментом.

Литература

[1] Левашкин С.П. Колмогоров и современная информатика // Математическое образование. - 2020. - № 96. С.42-54.

[2] Левашкин С.П. О ключевых инструментах цифровой трансформации экономики // Математическое образование. - 2023. - № 106. С.25-27.

Левашкин Сергей Павлович,
заведующий Научно-исследовательской
Лабораторией Искусственного Интеллекта
Поволжского государственного университета
Телекоммуникаций и информатики, Самара;
Действительный член Мексиканской Академии Наук
(Sistema Nacional de Investigadores),
кандидат физ.-мат. наук, PhD in CS;
выпускник ФМШ №18 при МГУ 1978 г.

E-mail: ai_lab@psutil.ru

Иванов Константин Николаевич,
аспирант Научно-исследовательской
Лаборатории Искусственного Интеллекта
Поволжского государственного университета
Телекоммуникаций и информатики, Самара, Россия.

E-mail: k.ivanov@psutil.ru

Захарова Оксана Игоревна,
заместитель заведующего
Научно-исследовательской
Лабораторией Искусственного Интеллекта
Поволжского государственного университета
Телекоммуникаций и информатики, Самара, ктн.

E-mail: o.zaharova@psutil.ru

Кушуков Сергей Владимирович,
инженер Научно-исследовательской
Лаборатории Искусственного Интеллекта
Поволжского государственного университета
Телекоммуникаций и информатики, Самара.

E-mail: s.kushukov@psutil.ru

Лев Генрихович Шнирельман (15.01.1905 – 24.09.1938)

А. Э. Атаманчук

Статья посвящена 120-летию со дня рождения Л.Г. Шнирельмана. В ней рассматриваются ключевые этапы его жизни и значительные научные достижения, включая теорему Шнирельмана в теории чисел и разработку теории Люстерника-Шнирельмана в топологии. Отдельное внимание уделено его личным качествам, библиографии и трагической судьбе.

Введение

В 2025 году исполнилось 120 лет со дня рождения Льва Генриховича Шнирельмана — выдающегося советского математика, гения, трагически рано ушедшего из жизни. Его фундаментальные работы в топологии, вариационном исчислении и теории чисел не только оказали огромное влияние на развитие этих дисциплин, но и продемонстрировали мощь математической мысли. Шнирельман был не просто математиком — он был творцом, чьи открытия позволили решать сложнейшие задачи.

I. Ранние годы

Лев Генрихович Шнирельман родился 15 января 1905 года в Гомеле (ныне Республика Беларусь), в семье учителя русского языка и литературы. После смерти отца, воспитание Льва легло на плечи его матери Елизаветы Львовны — хрупкой женщины с тонкими чертами некогда красивого лица [1]. С детства Лев проявлял исключительные способности. Уже в 12-летнем возрасте он вел две тетради, одна из которых содержала стихи, в которых он, с недетской зрелостью, пытался осмыслить трагические события мировой войны и надвигающейся революции. Другая же тетрадь содержала математические рукописи, где он, исходя из соображений однородности, выводил формулы для решения алгебраических уравнений первых четырех степеней и пытался доказать невозможность решения в радикалах общего уравнения пятой степени. Этот факт свидетельствует о необычайной математической одаренности Льва, проявившейся в самом раннем возрасте.

В 1920 году местный отдел народного образования направил Шнирельмана в Москву для обучения в Московском государственном университете. К этому времени он уже овладел рядом разделов высшей математики. Однако возникла проблема: по существовавшим правилам, для поступления в университет необходимо было достигнуть 16-летнего возраста, а Льву было меньше. Проблему удалось решить благодаря вмешательству Н.Н. Лузина[1], который лично обратился в ректорат.

II. Университетские годы

Шнирельман поступил в Московский государственный университет в период расцвета советской математической школы, когда МГУ был одним из ее центров. Он попал в окружение ярких и талантливых ученых, среди которых особенно выделялись Н.Н. Лузин, П.С. Александров[2], П.С. Урысон[3] и А.Я. Хинчин[4]. Благодаря своим выдающимся способностям, Л.Г. Шнирельман окончил физико-математический факультет МГУ всего за два с половиной года [2].

Н. Н. Лузин, выдающийся математик и педагог, оказал огромное влияние на Шнирельмана. Он руководил его первыми научными работами и всячески поддерживал его творческие начинания. Лузинская школа отличалась высоким уровнем математической культуры, требовательностью к строгости доказательств и стремлением к решению сложных и актуальных задач.

П.С. Александров, один из основоположников советской топологической школы, также сыграл важную роль в формировании научных интересов Шнирельмана. Он привлек его внимание к проблемам топологии и вариационного исчисления, в которых тот впоследствии достиг выдающихся результатов, кроме того, Лев Генрихович посещал лекции П.С. Урысона по топологии, оставив аккуратные записи с чертежами.

А.Я. Хинчин, преподававший Шнирельману теорию чисел, высоко оценил его дипломную работу, посвященную теории алгебраических единиц.

После успешного окончания университета, в 1924 году, Шнирельман сразу же поступил в аспирантуру Научно-исследовательского института математики и механики МГУ, которую окончил в 1929 году. Впечатляет, что уже в 24 года, в 1929 году, он стал доктором физико-математических наук и был утвержден в звании профессора.

Университетские годы стали для Шнирельмана периодом интенсивного научного роста. Он активно участвовал в семинарах по топологии и теории чисел. Лев Генрихович «с большим уважением отзывался о своих одаренных однокурсниках. Помню его рассказ о Г.Е. Селиверстове, математическое дарование которого, к сожалению, вследствие неблагоприятных обстоятельств, полностью не раскрылось. Л.Г. Шнирельман подчеркивал тонкость его математических рассуждений» [1]. В это время в университете появились Л.С. Понтрягин[5] и А.О. Гельфонд[6], которым было суждено стать выдающимися математиками.

[1]Николай Николаевич Лузин (1883-1950) — математик, академик АН СССР (1929). Почётный член математических обществ ряда европейских стран.

[2]Павел Сергеевич Александров (1896-1982) — математик, академик АН СССР (1953). Президент Московского математического общества (1932—1964), вице-президент Международного математического союза (1958—1962).

[3]Павел Самуилович Урысон (1898-1924) — математик, один из создателей общей топологии. Погиб в возрасте 26 лет во Франции.

[4]Александр Яковлевич Хинчин (1894-1959) — математик, профессор МГУ, один из наиболее значимых учёных в советской школе теории вероятностей. Член-корреспондент АН СССР (1939).

[5]Лев Семенович Понтрягин (1908-1988) — математик, академик АН СССР (1958), один из крупнейших математиков XX века. Лауреат Ленинской (1962) и Государственной (1975) премий.

[6]Александр Осипович Гельфонд (1906-1968) — математик, член-корреспондент АН СССР (1939). Известен решением седьмой проблемы Гильберта.

Будучи студентом, Шнирельман выполнил несколько математических работ, в том числе посвященную внутреннему определению плоскости и вопросам разбиения n-мерного шара.

III. Научные достижения

Научные работы Шнирельмана отличались исключительной глубиной, оригинальностью и техническим мастерством. Он умел находить новые подходы к решению сложных проблем и создавать мощные математические инструменты.

Наибольшую известность Льву Генриховичу принесла его работа в теории чисел, связанная с проблемой Гольдбаха[7]. Он не смог решить эту проблему полностью, но его результаты стали важным шагом на пути к ее решению.

В 1930 году Шнирельман доказал, что существует константа C такая, что каждое натуральное число можно представить как сумму не более C простых чисел. Это был выдающийся результат, так как до этого было известно лишь, что каждое натуральное число можно представить как сумму некоторого количества простых чисел.

Для доказательства этого результата Шнирельман ввел понятие *плотности множества натуральных чисел.* Это понятие оказалось очень полезным инструментом в теории чисел и нашло применение в других областях математики [3].

Шнирельман показал, что если множества A и B натуральных чисел имеют положительную плотность, то их сумма имеет плотность, строго большую, чем плотность хотя бы одного из этих множеств. Этот факт позволил ему построить последовательность множеств простых чисел, плотность которых постепенно увеличивалась, что привело к доказательству его знаменитой теоремы [2,4].

Хотя теорема Шнирельмана не давала конкретной оценки для числа C, она стала важным шагом вперед и стимулировала дальнейшие исследования в этой области. Впоследствии другие математики улучшили оценку, полученную им, но этот труд остается основополагающим в этой области.

Совместно с Л.А. Люстерником[8] Шнирельман разработал новый метод в вариационном исчислении, основанный на топологических идеях [2,5]. Данная теория стала одним из самых значительных достижений советской математической школы в 1930-е годы.

Эта теория позволяет находить критические точки функционалов на многообразиях. Критические точки функционала соответствуют решениям вариационных задач. Например, геодезические линии на поверхности являются критическими точками функционала длины.

Люстерник и Шнирельман доказали, что на любой гладкой замкнутой поверхности, гомеоморфной сфере, существует не менее трех замкнутых геодезических. Этот результат был значительным продвижением в решении проблемы о существовании замкнутых геодезических на римановых многообразиях.

Теория Люстерника-Шнирельмана нашла применение в различных областях математики и физики, включая теорию динамических систем, теорию устойчивости и квантовую механику.

IV. Этапы карьеры

После защиты докторской диссертации и получения звания профессора в 1929 году, Шнирельман переехал в Новочеркасск. Там в 1929-1934 годах он преподавал в Донском политехническом институте, занимая должность профессора математики [6]. В 1931 году он был командирован с научной целью в Германию на трехмесячный срок [7], что свидетельствует о признании его научного

[7] Проблема Гольдбаха — одна из самых известных нерешенных задач теории чисел. Утверждает, что любое чётное число, начиная с 4, можно представить в виде суммы двух простых чисел. Сформулирована Х. Гольдбахом в 1742 году в письме к Л. Эйлеру.

[8] Лазарь Аронович Люстерник (1899-1981) — математик, член-корреспондент Академии наук СССР (1946). Лауреат Сталинской премии (1946) за цикл работ по топологии и вариационному исчислению.

авторитета на международном уровне. В период с 1931 по 1934 год также числился действительным членом Института математики и механики МГУ.

В 1933 году Лев Генрихович был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР [8].

В 1934 году Шнирельман возвратился в Москву, где до конца жизни преподавал в МГУ, занимая должность профессора. В 1935-1938 годах он стал первым заведующим кафедрой теории чисел механико-математического факультета, читая курс теории чисел и ряд других курсов. Параллельно с преподаванием в МГУ, Шнирельман с 1934 года и до конца жизни работал научным сотрудником в Математическом институте имени В.А. Стеклова Академии наук СССР (МИАН).

В 1937 году был удостоен высшей премии Президиума АН СССР [9].

V. Личность и окружение

«Л.Г. Шнирельману свойственно было тонкое чувство юмора, причем часто объектом его юмористических рассказов был он сам. Он чуть-чуть сгущал краски, и какой-нибудь эпизод обретал большую юмористическую ценность» [1]. Лев Генрихович был не только гениальным математиком, но и человеком с широким кругом интересов. Он любил литературу, хорошо знал русскую и зарубежную классику, особенно ему нравились произведения Н.В. Гоголя, отрывки из которых он часто декламировал.

Современники отмечали его необычайную скромность и отсутствие какой-либо надменности, несмотря на его выдающиеся интеллектуальные способности. Хотя Лузин всячески опекал молодого математика, Шнирельман, по свидетельствам современников, был "очень скромный и совершенно беспомощный в житейских делах", остро ощущая отсутствие семьи. Он всегда пользовался уважением со стороны людей более низкого культурного уровня, которые часто говорили о нем: "Вот это, должно быть, настоящий ученый!"

Вспоминая о совместной работе над топологическими методами, Лазарь Люстерник писал: «Л.Г. Шнирельман очень любил гулять. Иногда он гулял всю ночь. Когда мы занимались топологическими методами, мы иногда ходили всю ночь и возвращались домой на рассвете, когда дома казались вымытыми и дворники подметали улицы...» [1]. Этот факт свидетельствует о том, что для Шнирельмана наука была не просто работой, а неотъемлемой частью жизни.

Его наблюдательность и острая ирония ярко проявились в восприятии окружающей действительности. «В 1923 году Л.Г. Шнирельман присутствовал на заседании в Госиздате, где обсуждался вопрос создания научно-популярной серии для широкого читателя. Это было время увлечения "комплексным методом". Л.Г. Шнирельман очень забавно передал выступление докладчика, который с пафосом утверждал: "Мы должны исходить из того, что окружает рабочего человека. Что же его в первую очередь окружает? Ясно что – воздух. Будем исходить из воздуха", и далее следовал уже план создания литературы по всем предметам "исходя из воздуха"» [1]. Этот эпизод демонстрировал его тонкий юмор и наблюдательность.

VI. Трагический финал

Жизнь Льва Генриховича Шнирельмана трагически оборвалась в 1938 году, в разгар сталинских репрессий.

Незадолго до этого Шнирельман был арестован органами НКВД и подвергнут допросам. В ходе следствия ему было предъявлено сфабрикованное обвинение, содержавшее доносы на его коллег и друзей, и он был вынужден подписать этот документ. Вскоре после этого его освободили. Однако, как свидетельствуют источники, пережитое и вынужденное предательство нанесли ему глубокую психологическую травму. Своему близкому другу и коллеге Лазарю Люстернику он признался, что совершил "что-то очень плохое под давлением".

24 сентября 1938 года, в возрасте 33 лет, Лев Генрихович добровольно ушел из жизни, отравившись газом в своей московской квартире. Обстоятельства его кончины до сих пор остаются

предметом дискуссий. Предположительно, причиной самоубийства стала невыносимая атмосфера подозрительности, страха и преследований [10]. Гибель Шнирельмана стала невосполнимой утратой для советской науки.

Литература

1. Люстерник Л.А. Молодость Московской математической школы.
URL: https://www.mathnet.ru/links/84dca87baa60fcc2f12a81fb5c8564ca/rm5779.pdf

2. Тихомиров В.М., Тихомиров В.А. Лев Генрихович Шнирельман // Квант. - 1996. - № 2. - с. 2-6.

3. Математика в СССР за тридцать лет. 1917—1947 / Под ред. А.Г. Куроша, А.И. Маркушевича, П.К. Рашевского. - М.-Л.: Гостехиздат, 1948. с. 56-57.

4. Шнирельман Л.Г. Об аддитивных свойствах чисел // Известия Донск. политехн. ин-та. - 1930. - Т. 14. - вып. 2-3. - С. 3-28.

5. Lusternik L., Schnirelmann L. Sur un principe topologique en analyse // Comptes Rendus Acad. Sci[англ.]. - 1929a. - Vol. 188. - P. 295-298.

6. Боголюбов А.Н. Математики. Механики. Биографический справочник. - Киев: Наукова думка, 1983. - с. 535-536.

7. Тихомиров В.М. Лев Генрихович Шнирельман. - 2005. - с. 20-28.

8. Шнирельман Лев Генрихович. Историческая справка.
URL: https://new.ras.ru/staff/chlen-korrespondent-ran/shnirelman-lev-genrikhovich/

9. Шнирельман Лев Генрихович / Зимин Э.П., Кисляков С.В., Мохнаткина Г.С., Павлов В.П. // Члены Российской академии наук в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН. - 2009. - с. 239-241.

10. Graham L., Kantor J.-M. Naming Infinity. A True Story of Religious Mysticism and Mathematical Creativity. - Cambridge, MA: The Belkman Press of Harvard University Press, 2009. - P. 295-298.

Атаманчук Артём Эдуардович,
учитель математики,
Средняя Школа № 75, г. Гомель (Беларусь).

E-mail: artem.atamanchuk0@gmail.com

Фрагмент истории математики: через Лобачевского, теорию множеств к глубокому обучению

В. А. Сердюков, А. В. Сердюкова

В статье кратко излагается история отдельных математических дисциплин в единой логической последовательности вплоть до сегодняшних дней.

В большинстве стран западной Европы функционировали университеты, в которых преподавали уважаемые профессора, амбициозная научная молодежь рвалась окунуться в сообщество учёных передовых стран. Громадная Россия относилась к странам научного захолустья.

Зарождение российской науки начинается с М.В. Ломоносова — XVIII век. Однако, идея "Что может собственных Платонов/ И быстрых разумом Ньютонов (*Невтонов у автора*)/ Российская земля рождать" озвученная Михаилом Васильевичем одой, посвященной императрице Елизавете, принадлежала Петру I.

Именно он для возникновения Российской науки пригласил европейских специалистов. Позже (1755 г.) возник первый российский университет (МГУ).

Если рассматривать XVIII век в плане ученых России, то кроме М.В. Ломоносова и Л. Эйлера — никого нет. Причем Эйлер не совсем российский, а Ломоносова нельзя отнести к математикам. Ученые были, но на фоне европейских, — не заметны.

Следует отметить, что в этом веке в мире было не так много ученых. Отдельным периодом для развития математики (и науки) принято выделять революцию во Франции, наполеоновскую эпоху, промышленную революцию в Европе. В XIX веке — бурное развитие наук во всем мире.

В качестве характеристики периода развития математики можно взять количество биографий, опубликованных в работах по истории математики разных авторов. Конечно, выбор автором конкретного ученого, биографию которого следует приводить, субъективен и зависит от его предпочтений.

Вот приблизительный список XVIII века: И. Ньютон, Г. Лейбниц, братья Бернулли, Л. Эйлер, Ж. Даламбер, Ж. Лаплас, Г. Монж.

Бурное развитие математики XIX века характеризует количество биографий, приведенных в книгах по истории математики XIX века [1,2,3,4].

Лучшей работой по истории математики XIX века является: Феликс Клейн "Лекции о развитии математики XIX столетия", 1926.

Клейн, сам выдающийся немецкий ученый, активный участник создания математики XIX века (1849–1925). Его яркое изложение истории — практически как "взгляд изнутри", поэтому во многом очень субъективно, отражает склонности и симпатии автора. Возможно, из-за этого русская математика оказалась вне его поля зрения [1,2].

В качестве примера "взгляда со стороны" на развитие математики XIX века подходит Джордж Сартон (1884–1956) — признанный основатель такой области исследований, как история науки, который по образованию химик, бельгиец, переехавший в Великобританию, а затем в 1915 году в США.

Д. Сартон планировал написать историю науки в девяти томах, но успел написать только три. Первые его публикации из научного захолустья XIX века США (единственный американский ученый того времени — Дж. Гиббс) появляются в 1927 году.

Библиография ведущих математиков XIX века приведена в книге: Sarton G. The Study of the History of Mathematis, 1936. Весь список — 108 ученых.

К этому списку тоже можно предъявить претензии. Например, почему в него входит Э. Неттер (1882–1935), но нет Д. Гильберта (1862–1943). В то же самое время есть малоизвестный норвежский математик Силов (П-Л. Сюлов)...

Россиян в этом списке всего три: Лобачевский Н.И., Ковалевская С.В. и Чебышев П.Л. Нет Буняковского В.Я., Остроградского М.В.

Возможно, искажения связаны с химическим происхождением ученого и с научным захолустьем США. Тем не менее, вывод: соотношение вклада российской математики в математику XIX века можно условно оценить как менее 3%! по показателю: биографии.

Коротко остановимся на одном из этих трех научных российских "всплесках". Первым российским математиком, о котором заговорили в Европе XIX века, оказался Н.И. Лобачевский.

Лобачевский и теория множеств

Принято считать, что теория множеств появилась в XIX веке. На самом деле изложение надо начинать с Эвклида. III век до нашей эры. В чем его главная заслуга для науки? Можно было поставить памятник уже за то, что он собрал разрозненные сведения из геометрии в один научный фолиант. Но самое важное: как он это сделал!

Эвклид в самом начале изложил пять постулатов-аксиом, и, опираясь на них, последовательно логически вывел все остальные сведения, формулы, теоремы, утверждения. Получилось красивое здание науки-геометрии, в основании которой всего пять свай!

Все сваи были как сваи, ровненькие, простенькие, красивенькие. Пятая свая была какая-то корявая и неказистая (про параллельные прямые), чем и привлекала внимание математиков почти два тысячелетия.

В конце XVIII века уже нашей эры у математиков появилась мода пытаться доказывать этот корявый постулат. Зачем? Ответ достаточно простой: в математике все должно быть красиво, а этот, кривой и кособокий, портит всю архитектуру. К тому же классические здания имеют четыре угла, а не пять.

В XIX веке наш Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) тоже по молодости поддался математической моде, но вскоре придумал другой ход.

Может, этот постулат необходим для геометрии и доказать его невозможно. Следует попробовать обойтись без него: если в доказательствах возникнет противоречие, тогда с корявостью следует смириться. Ну, пять, так пять. Проблема будет закрыта. Бессмысленно пытаться доказывать.

Лобачевский стал строить новое здание геометрии, а противоречий нет и нет! Конечно, это другое сооружение, но оно не рушится, а растет и растет... Получается, что имеет право на существование другая геометрия, которая опирается на четыре сваи. Вывод: геометрий может быть несколько.

Лобачевский опубликовал свою научную работу в российской (несколько статей начиная с 1829 года) и в иностранной математической печати (1840 г.). Главное — в иностранной! Россия была жуткой ла́потной математической провинцией, и никто в Европе российские издания не читал.

Его работу прочитали некоторые российские математики, ничего не поняли и, считая себя великими, начали травлю Лобачевского во всевозможных газетах и журналах, в интервью и статьях. В России никто не выступил в защиту ученого. А самый авторитетный российский математик того времени М. Остроградский на прямой вопрос о геометрии Лобачевского от корреспондента желтой газетенки изрек: "По-моему, это глупость: через точку можно провести несколько прямых, параллельных данной; сумма углов в треугольнике не равна 180 градусов. Господа, в гимназиях учат другому!"

После такой рецензии травля усилилась; писали, что Лобачевский сошел с ума, пора ему в психбольницу. В это время он был ректором Казанского университета (с 1827 года), очень уважаемым человеком, талантливым ученым, имел множество наград за свою деятельность.

За границей статья имела успех. Но это не потому, что там умнее в массе математики были, а потому что умный король математиков Карл Гаусс объяснил. Оказывается, он в молодости проделал точно такую же работу, что и Лобачевский, но без особого труда "вычислил", что его не поймут и могут объявить психом. Однако Гаусс решил для себя проверить: если геометрий несколько, то в какой мы живем? Для ответа на этот вопрос он решил проверить сумму углов треугольника, образованного вершинами ближайших гор. О том, что Гаусс собирается проверить сумму углов в треугольнике, разнеслась по научному миру, который с сожалением констатировал, что Гаусс свихнулся. Пришлось остановить измерение.

У Гаусса еще по учебе в университете был друг венгр Бойяи, который обратился к нему с просьбой: ознакомиться с научной работой своего сына Яноша и проверить результат, оценить значимость, где опубликовать.

Гаусс ознакомился, с удивлением узнал свои исследования в молодости. Помня насмешки по поводу своих измерений треугольника, посоветовал отцу не публиковать результат. Не поймут!

Отец отговаривал сына от публикации, тот ерепенился, рвался в бой за научные истины. Готов был принести себя в жертву.

Отец разрешил сыну в качестве приложения (Аппендикс) поместить работу по неэвклидовой геометрии (24 стр.) в своем издании: "Опыт введения учащегося в начала чистой математики". К этому времени уже вышла аналогичная статья Лобачевского.

Для венгра Яноша Бойяи (1802—1860) математика — хобби. По профессии — кавалерийский офицер (рано ушел в отставку). Математикой его увлек отец еще в 13 лет. Янош виртуозно играл на скрипке (выступал с концертами в Вене), говорил на девяти языках (включая китайский и тибетский). Являлся лучшим фехтовальщиком и танцором в императорской австро-венгерской армии.

Работа Я. Бойяи по глубине и масштабам исследований уступает научным статьям Лобачевского и вышла позже, но он сам осуществил идею новой геометрии, поэтому в зарубежных историях математики имя Бойяи упоминается как имя автора новой геометрии наравне с Лобачевским, но вторым номером. В отличии от геометрии Эвклида новую геометрию назвали *неэвклидовой* или *геометрией Лобачевского.* (Позже появилось еще несколько вариантов неэклидовых геометрий, а эту стали называть "геометрия Лобачевского".)

Гаусс восхищался не сколько работой неизвестного русского математика, сколько его мужеством. Объяснил научному миру ее значение для мировой математики. Ученые мира поверили Гауссу. Больше того, стало модой строить науку на нескольких аксиомах.

А на Яноша статья Лобачевского подействовала удручающе.

За свою жизнь он опубликовал только одну статью по математике, но после смерти Яноша Бойяи было обнаружено более 20000 рукописных страниц с формулами и без, которые хранятся в музее Публичной библиотеки города Тыргу-Муреш ("Последняя столица Трансильвании", Румыния).

Среди математиков возникла тенденция строить различные теории на аксиомах, даже если раздел математики давно уже признан и "работает" (доказал свою истинность).

Например, в XIX вовсю развивается теория вероятностей, множество ученых работают в этом направлении. Возникла идея аксиоматики теории вероятности, но ... не удается. Только в XX веке соответствующая аксиоматика была создана советским ученым Андреем Николаевичем Колмогоровым.

Через несколько лет после Лобачевского в Германии по такому же принципу (на аксиомах) математик Георг Кантор (1845—1918) построил свою теорию множеств, которая держалась всего на одной аксиоме-свае! Какая красота!

Однако, так же, как неевклидова геометрия Лобаческого в России, теория множеств оказалась "яблоком раздора" всего математического сообщества. Только ситуация оказалась гораздо хуже, поскольку яростными оппонентами являлись не безграмотные журналисты (как в России), а величайшие математики того времени.

Канторовская теория множеств натолкнулась на резкую критику со стороны ряда математиков-современников — Анри Пуанкаре; позднее — Германа Вейля. Они напоминали, что до Кантора все корифеи математики, от Аристотеля до Гаусса, считали *актуальную бесконечность* недопустимым научным понятием. Положение усугубило обнаружение в первой версии теории множеств противоречий. Критика была порой очень агрессивна. Например, Пуанкаре называл "канторизм" тяжелой болезнью, поразившей математическую науку, и выражал надежду, что будущие поколения от нее излечатся; а в публичных заявлениях и личных выпадах Кронекера в адрес Кантора мелькали иногда такие эпитеты, как “научный шарлатан”, “отступник” и “развратитель молодежи”. Кронекер очень хорошо знал Кантора поскольку был его главным наставником во время учебы. Кантор — лучший ученик Кронекера.

Были и приверженцы новой теории, но они не были столь яростны.

Георг Кантора родился в Санкт-Петербурге. В одной из энциклопедий написано: «Оба его родителей были евреями. Отец португальско-датского происхождения (коммерсант, биржевой маклер), мать венгерско-российского (дочь дирижера оркестра Санкт-Петербургской оперы, несколько поколений музыкантов). Когда Георгу было 11 лет, родители решили, что суровый климат Петербурга не подходит для слабого здоровья Канторов. Они переехали в Германию, в которой задержались ненадолго. Отправились в Данию, когда Георг уже учился в университете. Отец догадывался, что его сын очень талантливый математик. Писал ему письма приблизительно такого содержания: “Три страны: Германия, Россия и Дания ожидают, что твоя звезда ярко засияет на небосводе науки!”». (Израиля тогда еще не было)

Георг Кантор был очень талантливым плодовитым математиком. Журнал “Analli Mathematica” регулярно выходил в свет, печатал только статьи Кантора. В одном из его номеров и увидела свет теория множеств. [1, 2, 4]

Таким образом, математическое общество ознакомилось с новой теорией и восхитилось — так красиво и на одной свае!

К тому же новая теория приоткрывала тайну самого мистического математического объекта — бесконечности.

Получилось как в сказках: Кантор зашел в “комнату”, в которую под страхом проклятия, смерти запрещено было даже заглядывать. На новой “площади” по-хозяйски развернул активную деятельность талантливого математика.

Единственная аксиома-постулат — определение понятия “множество”. Ввел понятие мощности множества. Доказал, что мощность целых чисел ($\aleph_0$ алеф-нуль — счетное множество) строго меньше мощности действительных чисел ($\aleph_1$ алеф-один — континуум). Далее теорема [5]:

Мощность множества 2^X всех подмножеств множества X строго больше мощности X.

Виртуозно и остроумно было доказано, что *бесконечностей бесконечно много!* ($\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, $\ldots$) .

Далее представим историю теории множеств, изложенную на лекции одного крупного ученого-математика в МГУ, на механико-математическом факультете, аудитория 16-10.

> И вот в разгар всеобщего восхищения теорией Кантора в европейских СМИ публикуется открытое письмо Кантору от какого-то студента Бертрана. Письмо очень странное. Вот его содержание (сокращено).
>
> “В городе единственный брадобрей бреет только тех, кто себя не бреет. Кто бреет брадобрея?...”. Математический мир в шоке! С одной стороны наглость: какого-то студента... Великому Кантору; а с другой: чтой-то он спросил? И причем здесь цирюльники-брадобреи-парикмахеры?
>
> Все на всякий случай ждут с нетерпением очередной журнал "Analli…” и с недоумением поглядывают на парикмахеров.
>
> Дождались! Открывают — опять Кантор, но ответа студенту нет.
>
> Ладно, нет так нет. Ждут следующий журнал.
>
> Выходит журнал, яростно листают — нет ответа! Это неуважение к общественности! Публика выходит на демонстрацию с лозунгами: “Жорик, ответь Бертику”.

> В следующем журнале множество статей Кантора, а ответа нет. Лишь в самом конце скромненькая строчка: “В следующем номере Георг Кантор ответит ...”. Публика успокоилась и опять ждет!
>
> Пришло время выхода следующего номера журнала, ... а его просто нет!
>
> В чем дело? Оказывается журнал прекратил существование. А почему? Финансирование? Нет.
>
> Журнал был только для работ Кантора. Оказывается, Кантор перестал писать научные статьи! Навсегда!
>
> Он что, умер? Нет, у них (у Великих) это называется “впал в депрессию”. Это такое психическое заболевание.
>
> Стал психом? Ну, зачем так грубо! В настоящее время каждый третий болеет этим, остальные две трети болели, а потом выздоравливали, или еще заболеют. Впрочем, выздоравливать удается не всем. Вот и Кантору не удалось. Просто в таком состоянии невозможно делать в математике открытия, для которых требуется колоссальное умственное напряжение.
>
> Короче говоря, Кантор перестал заниматься математикой. И все это из-за какого-то письма про парикмахеров! Какого-то студента Бертрана!

Кантор прожил достаточно длинную по тем временам жизнь — 73 года. Почти половину которой — Великим ученым, а вторую половину — психически больным человеком. Как-то он писал своему другу Дедекинду: “Я потерял душевную свежесть”. Болезнь медленно прогрессировала. Вначале Кантор мог читать лекции студентам. Занялся даже доказательством ... нет, не математическим. Доказывал, что пьесы Шекспира писал Френсис Бекон.

У Кантора состояние постепенно ухудшалось. Умер он в психбольнице.

А что это за студентик такой? Своим письмом загнавший Кантора в депрессию! Знакомьтесь, (из энциклопедии): английский математик, логик, философ ... лорд (по рождению) Рассел Бертран Артур Вильям. Обратите внимание на годы: 1872—1970! 98 лет прожил студент! И как прожил!

Родился в аристократической семье (лорд), умер от гриппа в 98 лет!

Самый Великий английский ученый в XX веке! Общественный деятель!

Нобелевская премия...! Но известно, что по математике нет “Нобелевки”.

Существует легенда, что Альфред Нобель обиделся на всех математиков мира оптом за то, что один из них увел у него девушку, как говорил Остап Бендер, “прям из стойла”. Намекают на красавца шведа Миттаг-Лифлера (кстати, именно он редактировал и организовал те самые "Analli ..."). Правда историки доказали, что это не могло быть; был, якобы, молодой офицер, причем, русский (тоже не доказано), но ... легенду уже не исправишь.

Нобелевских премий всего: физика, химия, биология, медицина, литература и за мир (“обижены” не только математики). Потом появилась премия по экономике, основана банком Швеции в 1968 году по случаю своего 300-летия. Премия впервые была присуждена в 1969 году. Кстати, в 1975 году эта премия было присуждена советскому математику Леониду Витальевичу Канторовичу (Удивительное совпадение, можно было бы назвать статью “От Кантора до Канторовича”).

Находятся очень резкие журналисты, утверждающие, что деньги премии — на крови. Действительно, из всех своих научных разработок (355 патентов) наибольшую прибыль принесло Нобелю изобретение динамита — символа войн. Ситуация на самом деле еще более трагическая: две его фабрики в Швеции (но одна — точно) по производству динамита взлетели на воздух вместе с цехами, рабочими, инженерами ... уборщицами. Какая премия досталась в 1950 году Расселу?

По литературе! За научную работу “Брак и семья”! Вот такая литература! Рассел был одним из самых уважаемых людей в мире именно за свою общественную деятельность, за свои философские работы. Вот его некоторые высказывания и нестандартные действия:

"Я верю, что коммунизм необходим миру".

Называл себя социалистом.

Выступал против церкви.

В 80 лет четвертый брак.

Был в Советской России, встречался с Лениным в 1920 году, более часа длилась беседа. Встречался также с Троцким, Горьким и Блоком.

"Капиталистическая система обречена".

"Возможно, что российский коммунизм потерпит неудачу и погибнет, но коммунизм как таковой не умрет".

Рассел был выдающейся личностью планетарного масштаба. Про его математические научные работы мало кто знал.

Вышеизложенное про Кантора, возможно, не все соответствует общепринятым версиям, которые не обязательно верны. Может быть, никакого письма не было. Он раньше остальных заметил противоречия в своей теории. Называлось одно из них "Множество множеств" (это про "брадобрея"), в историю множеств вошло как "Парадокс Рассела" (на самом деле этот парадокс известен с античности).

Вот как это выглядит в учебниках [5].

Пусть S есть множество, элементами которого являются такие X, что X не является элементом X. Тогда

$$\forall X : X \in S \Leftrightarrow X \text{ не } \in X,$$

В том числе для $X = S$, что дает противоречие $S \in S \Leftrightarrow S \notin S$.

Депрессия могла начаться не от Рассела, а от Кронекера, который яростно выступал против теории множеств и ее автора. Кронекер публично называл своего лучшего ученика Кантора ренегатом, шарлатаном и совратителем учащейся молодежи.

Авторитет Кронекера был настолько велик, что ни один из научных журналов не принимал работы Кантора в Германии. Вот почему Миттаг-Лефлер публиковал статьи Кантора в своем журнале "Analli Mathematica", который организовал специально для Кантора. Журнал прекратил свое существование, когда Кантор перестал писать математические статьи. Через некоторое время (1882 г.) был создан, под редакцией Миттаг-Лефлера, новый журнал "Acta Mathematica", который существует по настоящее время.

Причиной депрессии Кантора могло стать смерть сына и младшего брата в это трудное для него время, возможно, всё вместе.

Пошатнувшееся знамя теории множеств подхватили другие ученые. Устранили противоречия, дополнили новыми аксиомами (всего — 9), идеями, теоремами, доказательствами [5].

Во времена гитлеровской Германии теория множеств была под запретом как "еврейская математика".

Глубокое обучение

В настоящее время во всевозможных СМИ часто мелькает "Искусственный интеллект" (ИИ, в иностранных изданиях — AI). От него большая польза, много где применяется. [6 – 14]

ИИ — что это такое?

Известно, что компьютер не умнее деревянных конторских счетов. Умеет только складывать 1 и 0, переключать. Но — очень быстро. Все действия производит по программе, придуманной человеком; или по электронной схеме, которую тоже создал человек.

ИИ — вид компьютерных алгоритмов, в основе которых заложены некоторые элементарные принципы работы человеческого мозга. (Нейрон, нейронные сети). И никакой это не интеллект. Просто так назвали программу.

Глубокое обучение — это как "обучать" компьютер Искусственному интеллекту. Другими словами: как создавать программу для компьютера, который будет работать как ИИ.

Получилась отдельная научная дисциплина, в основе которой информатика (программирование) и математика.

Почему так назвали странно? Назвали бы: Обучение машин ИИ.

Другое название этой дисциплины [11] "Машинное обучение", но оно не отражает всех особенностей, а понятие "глубокое" — отражает. Но в этом после разберемся.

Предвижу вопрос более продвинутого читателя, который знает суть дисциплины. "Как ты свяжешь это с Кантором, Расселом?"

Уважаемый оппонент, связь будет. Даже две.

Любая наука — детектив. Только в самых крутых детективах главный вопрос: "Кто убийца?". Сюжет разворачивается вокруг трупа. В науке — детектив на фоне зарождения и отмирания идей.

Как любая научная дисциплина, глубокое обучение имеет свою историю. Уже общепринято, что идея математической модели нейрона и нейронной сети впервые была изложена в работе, вышедшей в 1943 году в США: "Логическое исчисление идей, относящихся к нервной активности". Авторы: Уолтер Питтс (1923–1969) и Уорен Маккаллах (1898–1969). Статья прошла незамеченной, но на нее обратил внимание Норберт Винер, который оценил перспективы рассмотрения самопроизвольного возникновения мышления из простых логических элементов — нейронов.

Следует обратить внимание на логическое построение статьи. Как и у Эвклида, Лобачевского, Кантора вводятся необычные аксиомы: логико-математическая модель нейрона (несколько входов — один выход), соединение их в сеть. Это первая связь.

Следует обратить внимание еще на одну личность, которая способствовала образованию группы по развитию идей, изложенных в статье. Джером Леттвин (1920—2011) — в то время организовывал всевозможные встречи ученых разных специальностей, в том числе философов, политиков и поэтов. Об этих "конференциях" каким-то образом давались объявления, приезжали ученые... и даже из Великобритании.

Именно на этом "симпозиуме" произошла встреча с Норбертом Винером, впоследствии образовалась группу из пяти человек, в которую вошли: Винер, Питтс, Маккаллох, фон Нейман (великий ученый, участник создания атомной бомбы, автор теории игр... и причастный к решению "парадокса Рассела" в теории множеств) и Джером Леттвин. Началась работа по созданию алгоритма моделирования мышления для электронной вычислительной машины (ЭВМ), которой еще не было. (слово "компьютер" тогда уже было, но не соответствовало сегодняшнему его пониманию).

В этой группе самым молодым являлся Питтс, но считался самым гениальным. Это признавали все остальные. Жене Винера Маргарет категорически не нравились эти "вечеринки" на территории Маккаллоха. Она ничего не понимала в их делах, но заметила, что Норберт часто на них пропадает и от него исходит аромат спиртного. Спиртное было, главным инициатором скромного алкоголя являлся Питтс, для "подстегивания" вдохновения. Было "веселье идей", но не было пьянства.

Маргарет придумала историю для Винера, что эти "мальчики" соблазнили их дочь Барбару. Естественно, ничего такого не было, но Норберт поверил, состоялся неприятный разговор, и группа распалась. Питтс впал в депрессию, стал больше пить, умер от цирроза печени в 46 лет в своем доме в Кембредже (под Бостоном).

Норберт Винер является "отцом кибернетики" [6]. Уолтера Питтса можно назвать "отцом искусственного интеллекта".

Их судьбы имеют некоторые схожие черты.

Известно, что Н. Винер был вундеркиндом, о чем сам написал в книге "Я вундеркинд'. Профессорская семья; отец филолог, перевел Льва Толстого для американцев. Громадная домашняя библиотека, в которую Норберта допустили в 4 года. Отец способствовал развитию ребенка.

Про У. Питтса написано: родился в неблагополучной семье в Детройте. Так написано, действительность трудно представить. Окружение и район бандитские, родители всякими способами мешали развитию талантливого ребенка. Со сверстниками еще хуже, сейчас это называется "буллинг". Спасало посещение библиотеки, достаточно приличной для такого пригорода. Большинство наук осваивал сам. Написано: обучался логике и математике самостоятельно. Тут у некоторых критически настроенных читателей возникает недоверчивая ухмылка. Как это самостоятельно?!

Теперь факт из биографии.

В 12 лет Питтс в библиотеке увлекся трехтомником Бертрана Рассела и Норта Уайтхеда "Принципы математики". За три дня его прочитал (это около 2000 стр.)

И написал критическое письмо Расселу.

Вот вам повторение сюжета Кантор-Рассел, тоже письмо. Связь два!

Ну что мог написать 12-летний пацан выдающемуся ученому!

Какие могут быть варианты дальше:

1. В ворохе бумажной корреспонденции письмо затерялось.

2. Рассел прочитал детский лепет и выбросил.

3. (Самый фантастический) Рассел прочитал, критика оказалась существенная. Рассел аналогично Кантору впал в депрессию (как наказание за подорванное здоровье Кантора).

На самом деле: Рассел прочитал и ответил! Поблагодарил за существенные замечания и предложил автору письма поступать к нему в аспирантуру в Великобритании! (Питтс не написал ничего о себе).

Критика была существенная!

Через три года Рассел прибыл в США, в Чикаго с лекциями. Питтсу — 15 лет, он сбегает из дома. Насовсем! От Детройта до Чикаго 451 км. И сейчас добраться стоит приличных денег, а тогда — большая проблема. В истории ИИ не написано, как Уолтер ее решил.

Была судьбоносная встреча с Расселом, который помог бомжевидному подростку встретиться с нужными людьми. Тот получил кров, работу и даже смог посещать занятия в Чикагском университете.

Более подробно история ИИ изложена в [14].

Пару слов про глубокое обучение. Что это такое? Почему глубокое?

Для понимания этой науки следует разобраться: что такое мозг?

Вот что написано в одной из статей: "...мозг человека состоит из 98 миллиардов нейронов (по другим источникам 86), все они связаны друг с другом сложным образом...".

Слово "связаны" определяет нейронную сеть, которая в человеке отвечает за все! Мысли, речь, мышцы, глаза, слух, дыхание, вкус, осязание, обоняние...

Причем, некоторые действия мозг выполняет без участия сознания, мы при желании не можем управлять. Несколько примеров. Вестибулярный аппарат работает без нашего участия, поддерживает человека на двух ногах. Зрение: хрусталик специальными мышцами в зависимости от расстояния рассматриваемого предмета либо растягивается, либо утолщается.

Самая элементарная частица мозга — нейрон. Его строению, работе, особенностях работы описаны в томах (тоннах) научных работ.

Если абстрагировать функции одного нейрона, то: на несколько входов поступают разные сигналы, в зависимости от их суммы, на единственный выход (аксон) выдается либо 1, либо -1. Этот сигнал передается в сеть, на другие нейроны. Еще важно: нейроны имеют "веса", т.е. существует иерархия важности нейронов. Если "вес" маленький, то на его реакцию можно не обращать внимания на фоне более важных. (Это одна из версий модели нейрона).

Нематоды (черви) — самые изученные, потому что у них меньше всего нейронов, всего 302 (+ 95 мышечных). Вполне реально создать искусственную сеть с искусственными нейронами, что и было сделано участниками проекта в 2014 году, группа Open Worm.

Нейронные сети бывают простые: несколько входов, внутренние нейроны, несколько выходов. Когда внутренних нейронов немного, связей между ними мало. Они представляют как бы один слой. Это мало возможностей. Как бы "поверхностное обучение".

Когда сеть большая, много входов и выходов, то внутренние нейроны имеют несколько слоев. Для решения простой задачи, возможно, достаточно одного слоя, поверхностного. При решении сложных задач приходится переходить на второй слой или еще более "глубокие" слои. Вот в этом случае обучение более сложное, именно оно называется "глубокое обучение".

В результате эволюции жизни на земле из каких-то примитивных животных появился человек. Вместе с животными эволюционировал и мозг.

Когда человек рождается, то у него уже есть какая-то нейронная сеть, но она достаточно "бедная". Мало функций может выполнять. В процессе развития человека сеть *самообучается*.

Никто естественную нейронную сеть в человеке или животном не программирует!

После группы ученых с участием Н. Винера и У. Питсса идею с нейронными искусственными сетями подхватили другие ученые. На первых порах работы хорошо финансировались, но из-за того, что воплощения научных разработок отсутствовало, финансирование сильно ослабло. А отсутствия воплощения связано было с тем, что для создания искусственной сети требовались мощные компьютеры с громадной памятью. Научные исследования сократились. Этот период историки глубокого обучения назвали "зима".

Через некоторое время появились успехи в теории создания ИИ — возобновилось финансирование. Успехи в теории не дали успехов в практике — наступила вторая "зима".

Только к началу XXI века компьютерная база подтянулась и произошли существенные сдвиги в создании программ, которые получили название "Искусственный интеллект". "Зимы" закончились.

На рис.1 обложка одной из книг по глубокому обучению [12].

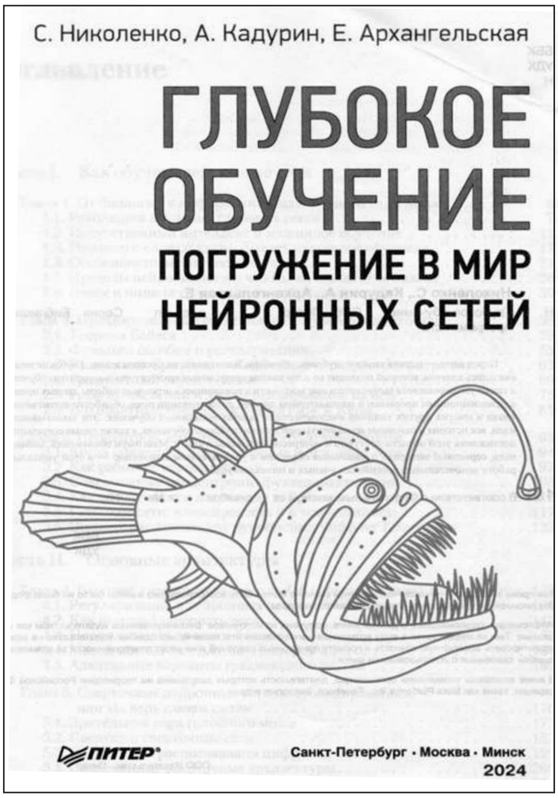


Рис. 1. Первая страница книги по глубокому обучению с символом науки — рыбой удильщиком

Символ науки глубокого обучения — рыба удильщик, хищник. Их несколько разновидностей, но все отличаются от остальных рыб способом добычи пиши. Большинство хищников — быстрые. Жертву нужно догнать. Удильщик не торопится, жертву "выуживает" на наживку ввиде "фонаря на удочке". Жертва приплывает на свет — удильщик резко "вдыхает" воду вместе с любопытствующей рыбкой, которая может быть соизмерима с удильщиком.

Поскольку фонарь должен привлекать светом, то охота производится на глубине, поэтому удильщик — символ глубокого обучения.

Еще одна особенность удильщика: охотой занимаются самки, а самцы ведут паразитический образ жизни на теле самки и по своим "габаритам" уступают ей в 5-20 раз. (Это тоже как-то относится к символике: компьютер — математика).

Наука глубокого обучения достойна пристального внимания, т.к. является основой всех алгоритмов обучения машины. Искусственному интеллекту требуется математика высочайшего уровня.

Идея, заложенная Эвклидом при создании геометрии, в истории математики за две с лишним тысяч лет нашла применение в различных математических дисциплинах и вышла на просторы XXI века.

Литература

[1] Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии / Под ред. В.А.Успенского. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. - 224 с.

[2] Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. Пер. с нем. - 5-е изд., испр. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. - 256 с.

[3] Левитин Е.С. Математическое образование и математика в современной цивилизации: В 6 томах. - М.: ПОЛИ ПРИНТ, 2013.

[4] Жуан Гомес. Когда прямые искривляются. Неэвклидовы геометрии. Мир математики: в 40 т. Т.4. / Пер. с англ. - М.: Де Агостини, 2014. - 160 с.

[5] Босс В. Лекции по математике. Т.16: Теория множеств: От Кантора до Коэна. Учебное пособие. - М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2011. - 208 с.

[6] Винер Н. Кибернетика или управление и связь в животном и машине. 2-е изд. / Пер. с англ. Г.Н.Поваров. - М.: "Советское радио», 1968. - 276 с.

[7] Эшби У.Р. Введение в кибернетику. / Пер. с англ., Д.Г.Лахути, предисл. А.Н.Колмогорова. - М.: Изд-во иностр. лит., 1959. - 432 стр.

[8] Арбиб М. Мозг, машины, математика. / Пер.с англ. А.Д.Коршунов - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. - 224 с.

[9] Белда Игнаси. Разум, машина и математика. Искусственный интеллект и его задачи. Мир математики: в 45 т. Т.33. / Пер. с исп. - М.: Де Агостини, 2014. - 160 с.

[10] Гудфеллоу Я., Бенджио И., Курвиль А. Глубокое обучение / пер. с англ. А.А.Слинкина. - 2-е изд. испр. - М.: ДМК Пресс, 2018. - 652 с.

[11] Дайзенрот М., Альдо Ф., Чень Сунь Он. Математика в машинном обучении. - СПб.: Питер, 2024. - 512 с.

[12] Никоненко С., Кадурин А., Архангельская Е. Глубокое обучение. - СПб.: Питер, 2024. - 480 с.

[13] Овидиу Калин. Архитектура глубокого обучения. Математический подход. / пер. с англ. А.Н.Киселев. - М.: ДМК Пресс, 2024. - 700 с.

[14] Черняк Леонид. Об ИИ без мифов. Путеводитель по истории Искусственного Интеллекта. Интернет. 2021. - 260 с.

Сердюков Владимир Алексеевич,
доцент экономического факультета
Государственного академического университета
гуманитарных наук, кандидат
педагогических наук, PhD по
информатизации образования.

E-mail: serdukwa@mail.ru

Сердюкова Алла Владимировна,
доцент факультета естественных наук
Государственного университета просвещения,
кандидат биологических наук.

E-mail: sekrbara@mail.ru

Елизавета Фёдоровна Литвинова, 1845 – 2025. Вторая женщина-математик в России

Г. Л. Эпштейн

Рассказ о жизни и деятельности Е.Ф. Литвиновой — математика, педагога и общественного деятеля.

Елизавета Фёдоровна Литвинова, 1845 – 1919-22(?) [1, 2] — вторая в мире женщина, получившая учёную степень доктора философии (PHD) по математике (первая — Софья Васильевна Ковалевская, 1850 – 1891)

Елизавета Литвинова родилась в 1845, 21 сентября (3 октября по григорианскому календарю). Её отец, тульский помещик Алексей Фёдорович Ивашкин, принадлежал к старинному роду столбовых дворян Ивашкиных, известному с 1560 года, хотя есть сведения о его происхождении ещё в XV веке. Ивашкины служили полковыми и городовыми воеводами на южных окраинах Московского царства, а также стольниками и стряпчими при царском дворе [3].

Е.Ф. Литвинова

Е.Ф. вспоминала: "Моё раннее детство прошло среди установленных веками патриархальных порядков крепостного права" [4]. Ивашкин относился к числу землевладельцев, имевших не менее 100 душ крепостных. При этом все его земли были заложены в Опекунском совете, и проценты по ссудам выплачивались им очень неохотно, обычно, только после прибытия в имение станового пристава. Жили в основном натуральными приношениями крепостных, которые хранились в кладовой. Дворовые девушки называли её "колдовой". "Мать по своему происхождению не принадлежала к столбовым дворянам. Она всегда приходила в отчаяние, когда отец сильно бил крепостных" [4]. При этом в его письменном столе за тремя замками хранился портрет Герцена. "Отец мой, сколько я помню, не разделял идей Герцена, но любил похвастать тем, что и у него есть "запрещённое", которое так трудно достать в провинции" [5].

После отмены крепостного права, как пишет Литвинова, "Наша мать вообще стала неузнаваема; она, забитая и запуганная отцом, как будто вместе с крепостными получила свободу и приобрела значение в семье" [4]. Руководство имением перешло к ней, а отец, потеряв право бить крепостных, совсем утратил интерес к делам имения, читал или играл на арфе у себя в кабинете. Правда, чаще, чем раньше, стал угощать детей затрещинами. "Теперь мы росли, завидуя вольным дворовым и крестьянам, но утешая себя тем, что и мы только «временно обязанные»" [4].

В тринадцать лет Елизавету привезли в Петербург и определили в только что открывшееся (1858) Мариинское женское училище. (с 1862 Мариинская женская гимназия). К моменту поступления в училище девочка, конечно, получила первоначальное домашнее образование, но как это происходило, неизвестно. Только судя по тому, как быстро она стала авторитетной среди своих соучениц [6], можно заключить, что была начитана и обладала хорошими способностями. Елизавета Ивашкина быстро впитывала знания и писала стихи.

Это же училище посещала воспитанница Н.А. Некрасова[1], которая подружилась с Ивашкиной и стала приглашать её по выходным дням в семью Некрасова-Панаевых. А там её тепло встретила Авдотья Яковлевна Панаева (1820 – 1893). Как писал Корней Чуковский (1882 – 1969): "...И Тургенев, и Гончаров, и Грановский, и Кавелин, и Лев Толстой — все у неё за столом... Её гостиная или, вернее, столовая — двадцать лет была русским Олимпом, и сколько чаю выпили у неё олимпийцы, сколько скушали великолепных обедов. ..." [7]. Сельская девушка из Тульской губернии также попробовала олимпийский чай и обед, но главное, через Панаеву передала свои стихи Некрасову. Видимо, это произошло осенью 1862, так как Авдотья Яковлевна сожалела, что не может познакомить Ивашкину с Н.Г. Чернышевским, поскольку он находится в крепости.

А.Е. Панаева

Прочитав стихи, Николай Алексеевич Некрасов принял Елизавету и сказал ей: "Вам стоит заняться обработкой Вашего таланта и писать, Вы умеете наблюдать У Вас есть воображение и оригинальные мысли. ...Виден живой родник, из которого всё это бьёт ключом. ...А главное, учитесь, учитесь, учитесь, чтобы не жалеть потом" [6]. К женскому образованию в те времена относились весьма снисходительно. Е.Ф. вспоминала, что они "...не столько учились, сколько проникались новыми идеями о равенстве и братстве... читали передовые журналы и учили наизусть некрасовские стихи" [6]. В гимназические годы у Елизаветы Ивашкиной возникло и укрепилось стремление к полноценному образованию университетского уровня.

Для этого надо было получить документ о среднем образовании. Не кончив семилетний курс женской гимназии, Ивашкина вернулась домой и стала самостоятельно готовиться к сдаче экзаменов на аттестат зрелости. В 1864 она была уже готова к таким экзаменам, но в мае этого года состоялась гражданская казнь Н.Г. Чернышевского, вызвавшая усиление протестного движения. Родители Елизаветы, опасаясь, "как бы она не попалась", не пустили её в Петербург. Продолжая самообразование, Елизавета Ивашкина получила аттестат в Москве в 1866 и вместо возвращения в семью уехала в Петербург. Стремление к углублению знаний соединилось теперь с горячим желанием самостоятельной, самодостаточной жизни. В эти годы поиска своей цели и своего пути на Е.Ф. оказали большое влияние руководители женского движения Надежда Васильевна Стасова[2] и Екатерина Ивановна

[1]Елизавета Алексеевна Иванова (1848 – 1935) внебрачная дочь А.С. Некрасова и Федосьи Анисимовны Полетаевой, единокровная сестра Н.А. Некрасова. С 1868 по 1877 замужем за музыкантом Львом Александровичем фон Фохтом (1844 – 1877), потом замужем за Эмилем Рюмлингом.

[2]Надежда Васильевна Стасова (1822 – 1895). Возглавляла женское движение в России, входила в число основных создателей и руководителей образовательных кружков и Бестужевских высших женских курсов.

Конради[3], с которой Ивашкина познакомилась в 1868.

Аттестат был формально необходимым документом, но не означал готовности к университетскому образованию. Полученных знаний всё ещё не хватало. Свою жизнь в Петербурге в 1866 – 1871 Е.Ф. описывала следующим образом: "Перед нами, менее счастливыми <чем Софья Ковалевская>, лежал трудный путь подготовки к университету, и многим из нас приходилось в то уже время для поддержания существования заниматься переводами и уроками. ... Сегодня, бывало, где-нибудь добудешь лист перевода по физиологии с английского языка; там урвёшь два листа политэкономии с немецкого, потом попадётся какой-нибудь французский роман. ... Физику мы слушали у Краевича[4] на Аларчинских курсах[5] и химию там же у Герда[6], ... практические занятия <по химии> происходили на другом конце города, в здании артиллерийской академии на Выборгской, под руководством профессора Н.П. Фёдорова[7]; математикой мы занимались в частном кружке у А.Н. Страннолюбского[8] в разных частных квартирах, преимущественно у Над. Вас. Стасовой на Пантелеймоновской" [8].

О Страннолюбском следует сказать особо, так как именно он повлиял на окончательный выбор Елизаветой Фёдоровной математики для приложения своих сил и способностей: "А.Н. Страннолюбский, в награду за прилежание, познакомил меня с началом аналитической геометрии и дифференциального исчисления. Эти последние его уроки привели меня в восторг и внушили мне такой интерес к математике, что я продолжала ею заниматься сама по книгам и университетским лекциям, которыми снабжали меня молодые математики" [8]. О Страннолюбском уважительно и тепло вспоминали и такие его ученики, как Софья Васильевна Ковалевская и академик Алексей Николаевич Крылов.

Александр Николаевич Страннолюбский закончил Морской кадетский корпус и офицерские классы при нём. Морской кадетский корпус закончили его дед Василий Васильевич Страннолюбский (1775 – 1846) и отец Николай Васильевич Страннолюбский (1802 – 1846).

А.Н. Страннолюбский

[3]Е.И. Конради (1838 – 1898). Одна из основательниц женского движения в России. Фактический главный редактор еженедельника "Неделя" с 1869 по 1874.

[4]Константин Дмитриевич Краевич (1833 – 1892). Профессор физики, автор самого популярного в России гимназического учебника физики, выдержавшего не менее 14 изданий, ученик академика Э.Х. Ленца.

[5]Аларчинские курсы были основаны в 1869 по инициативе педагога и общественного деятеля Иосифа Ивановича Паульсона (1825 – 1898) около Аларчина моста через канал Грибоедова.

[6]Александр Яковлевич Герд (1841 – 1888). Основоположник методики преподавания естествознания. Первый председатель педагогического совета в гимназии княгини Оболенской.

[7]Николай Павлович Фёдоров (1835 – 1912). Генерал от артиллерии, специалист в области порохов и взрывчатых веществ, выпускник и профессор Михайловской артиллерийской академии.

[8]Александр Николаевич Страннолюбский (1839 – 1903). Преподавал математику: С.В. Корвин-Круковской (Ковалевской) в 1866–68, в Морском училище, в Морской академии и в других учебных заведениях.

Можно сказать, что интерес Александра Николаевича к педагогике был наследственным. Есть архивная запись, что капитан второго ранга Николай Васильевич Страннолюбский “приказом по флоту 11 октября 1839 года назначен начальником Камчатки в состоянии по флоту” [9].

Протоиерей Прокопий Громов в книге “Историко-статистическое описание камчатских церквей", (С-Пб, 1857, стр. 84-85) писал: “Дети матросов, казаков, разночинцев, ничем не занятые, с утра до вечера заполняли немногие улицы петропавловского порта, оглашая их шумными играми, своеволием и буесловием. По предложению Страннолюбского я вызвался быть наставником сих жалких детей в законе Божием; морские офицеры приняли на себя обучение их чтению, письму, грамматике и арифметике. Изложен домашний устав заведения, распределены часы уроков; учреждены надзиратели; родители их радовались и благодарили начальство за доброе дело” [10].

В 1845 Н.В. Страннолюбский был произведён в капитаны первого ранга. Через сорок лет в 1885 А.Н. Страннолюбский также получил этот чин. В словаре Брокгауза и Ефрона сказано, что: “При возникновении проекта учреждения в СПб. высших женских курсов <Бестужевских> С. участвовал в разработке их организации, а когда в 1878 г. основалось особое общество для поддержания этих курсов[9], был одним из его учредителей, затем секретарем его в течение 12 лет, в самый трудный период жизни курсов”.

После кончины А.Н. авторы некролога отмечали: “Страннолюбский был одним из образованнейших и благороднейших представителей блестящей плеяды педагогов 60-х годов... Это был человек честных, твердых и глубоких убеждений, не знавший, что значит идти на компромисс со своею совестью в каком бы то ни было деле. Его благородная осанка, сильный ум и широкое образование, редкая гуманность и изящество, которыми дышала вся его личность, завоевали ему искреннее горячее расположение и глубокое уважение всех тех, с кем сталкивала его жизнь”[10].

При всей своей загруженности в шестидесятые годы XIX века Е.Ф. пробовала силы и в изящной словесности. В 1869 в нескольких номерах многостраничного философско-литературного еженедельника «Неделя» был опубликован под псевдонимом Д. Хитрово её очерк (лучше сказать, повесть) “Беспокойный человек”[11]. В повести показан путь к отрицанию окружающего общества, который проходит незаурядно способная девочка; беспощадно жёстко обрисованы, как крестьянские нравы (в духе И.А. Бунина), так и легковесно либеральные и несколько лицемерные порядки в женской гимназии. Литературный талант автора заметен и в том, как некоторые страницы предвосхищают аналогичные места в романе «Форпост» (1886) Болеслава Пруса и в пьесе “Баня” (1930) Владимира Маяковского. В 1870 также в “Неделе” опубликован рассказ “На чужих плечах”[12] за подписью Е. Ивашкиной. Если героиня упомянутого выше очерка приходит к отрицанию существующего общественного уклада, то героиня рассказа находит свою позитивную цель: “... я еду теперь за границу, потом вернусь сюда. Я ещё не знаю, что именно буду я делать, но я чувствую, что в состоянии работать единственно во имя того, чтобы люди жили, а не сгорали, и чтобы всё, что есть прекрасного в человеческой природе, было бы *кстати* и не было бы в *тисках*”[13].

В 1868 около четырёхсот молодых женщин, в том числе и Ивашкина, направили петицию министру просвещения с просьбой предоставить женщинам право обучения в российских университетах. Хотя многие университетские профессора отнеслись к этому положительно, министр просвещения ответил в 1869 категорическим отказом.

Пример доброжелательного отношения к высшему женскому образованию показывала Императорская медико-хирургическая академия в Петербурге (ИМХА). С конца пятидесятых до середины шестидесятых допускалось посещение лекций женщинами, и с 1863 по 1868 в ИМХА училась единственная женщина, получившая диплом врача, Варвара Александровна Кашеварова (Кашеварова-

[9]“Общество для доставления средств высшим женским курсам”.
[10]Кочина П.Я. Софья Васильевна Ковалевская 1850-1891. — Наука, 1981. — С. 35.
[11]Еженедельник “Неделя”, 1869, №№ 17 – 26.
[12]Еженедельник “Неделя”, 1870, №№ 13 и 14.
[13]В словах, выделенных курсивом, есть нечто похожее на анаграмму.

Руднева, 1841 – 1899), в 1876 защитившая диссертацию на степень доктора медицины. На базе ИМХА в 1872 был открыт “Особый женский врачебный курс для образования учёных акушерок”, преобразованный с 1876 в “Санкт-Петербургские высшие женские медицинские курсы”.

Е.Ф. по семейным обстоятельствам оказалась тесно связана с ИМХА: “…я живо помню, как относились к этим первым студенткам студенты медицинской академии, мой дядя и посещавшие его товарищи. Один из последних был истинным миссионером женского образования. Высокий, неуклюжий, застенчивый, он не отличался ни малейшей галантностью, но очень сильно стоял за допущение женщин в академию, и тотчас после того, как первые студентки появились в стенах академии, он, преодолевая свою природную застенчивость, явился на сходку и сказал своим товарищам речь о том, как они должны отнестись к такому знаменательному факту” [11]. Добавим ещё, что принимавший самое живое участие в судьбе Елизаветы Ивашкиной профессор физики генерал-майор Степан Александрович Усов (1825 – 1890) преподавал в Михайловской артиллерийской академии, в ИМХА и на открытых при ИМХА в 1872 женских медицинских курсах.

Видимо, не было случайностью бракосочетание (венчание) 30 октября 1871 в Троицком соборе Санкт-Петербурга[14] выпускника ИМХА 1870 лекаря[15] Михаила Павловича Литвинова (1846 - 1918) и дочери титулярного советника Елизаветы Фёдоровны Ивашкиной (архивное дело 19-126-819101). Мы знаем об этом событии благодаря энтузиастам истории, генеалогии и геральдики, выложившим на сайте генеалогического форума ВГД сохранившиеся в архивах Петербурга записи метрических книг[16].

бр	Литвинов лекарь	Михаил Павлович	Ивашкина дочь тит.сов.	Елизавета Федоровна		19-126-819 101	1871	Троицк.соб	31.окт

Рис. 1. Запись в метрической книге

Однако семейная жизнь, едва начавшись, скоро закончилась. В [8] Елизавета Фёдоровна (с 31 10 1871 Литвинова) писала: “Я была уже замужем и ученье в заграничном университете мне казалось для меня невозможным — несовместимым с моими обязанностями. Но весною 1872 сама судьба не только освободила меня от всех обязанностей, но вызвала настоятельную необходимость расстаться с Петербургом”.

В тех же воспоминаниях [8] Е.Ф. ещё дважды касается события 1872. Вспоминая о первом времени пребывания в Цюрихе, Литвинова жаловалась на “…сложные условия в жизни, которые особенно тяжелы для человека, только что вынесшего большой нравственный перелом”. Описывая свои беседы с Софьей Ковалевской в Цюрихе, Е.Ф. сообщает: “Мы говорили с нею о многом, бережно обходя вопросы личной жизни; у меня были на это свои причины и мне казалось, что и у неё должны были быть свои”; в другой беседе: “В ходе встречи Ковалевская сказала: “Мне в жизни очень везёт, но только в одном направлении, во всём, что касается научных занятий; всё остальное какая-то неведомая сила вырывает у меня из рук. …Вы этому не удивляетесь, — заключила она. — поэтому, что нечто подобное вам самой знакомо”. В ответ на это я в общих чертах передала ей все необыкновенные обстоятельства моего отъезда из Петербурга”.

По поводу приведённых цитат возникают следующие вопросы. Почему возникла настоятельная “необходимость расстаться с Петербургом”? Почему пришлось вынести “большой нравственный перелом”? В чём состоят “необыкновенные обстоятельства моего отъезда из Петербурга”, о которых

[14] Собор Святой Живоначальной Троицы лейб-гвардии Измайловского полка.

[15] Успешно окончившие ИМХА получали степень кандидата медицины, а проработавшим после этого год в военных госпиталях присваивалось звание лекаря.

[16] URL: https://forum.vgd.ru/post/3866/145769/101.htm?a=stdforum_view&o=

можно говорить только в “общих чертах”? Наконец, почему больше ни в одном опубликованном тексте Литвиновой нет упоминания о первом и единственном замужестве и даже имени супруга?

Стоит обратить внимание, что 1872 был не совсем обычным и в жизни её мужа. Во время учёбы он был одним из ближайших учеников Ивана Михайловича Сеченова (1829 – 1905): “…сидел то в одиночку, то с своими (Маткевич, Пашутин, Ворошилов, Тарханов, Литвинов и Спиро) учениками исключительно за нервной системой лягушки” [12]. После окончания ИМХА продолжал сотрудничать с основанной Сеченовым лабораторией, состоял на психиатрической службе под руководством основателя русской психиатрической школы Ивана Михайловича Балинского (1824 – 1902) и работал в частной психиатрической лечебнице Александра Яковлевича Фрея (1838 – 1899), ученика Балинского. В общем, жил в Петербурге, занимался научной работой и был обеспечен материально.

М.П. Литвинов

Однако в 1873 оказался земским врачом общей практики в маленькой больнице Весьегонского уезда Тверской губернии, далеко даже от самого Весьегонска. Через три года, “оставив по себе самую лучшую память” [13], возвращается в Петербург на должность заведующего психиатрическим отделением Кронштадтского военно-морского госпиталя, а также работает и в других медицинских учреждениях. В 1877 сдаёт экзамен на степень доктора медицины, но только через 15 лет в 1902 совет Юрьевского университета утверждает его в этой учёной степени honoris causa. В Российском медицинском списке вплоть до 1916 упоминается как лекарь. Таким образом, у Литвинова тоже оказалась настоятельная необходимость временно расстаться с Петербургом, с научной деятельностью, с клинической работой по своей специализации. Причины такого поворота биографы Литвинова не объясняют [14].

О том, что произошло весною 1872, можно строить только более или менее вероятные предположения. Приведу версию, которая представляется мне наиболее вероятной, по крайней мере, даёт правдоподобные ответы на все поставленные выше вопросы. Во второй половине XIX века студенты ИМХА отличались высокой общественной и протестной активностью, что неоднократно влекло политические репрессии царских властей. Так, 28 студентов академии были административно высланы в 1869 из Петербурга в различные отдалённые места российских губерний под гласный надзор полиции[17].

Ввиду своей общественной активности М.П. нередко подвергался политическим преследованиям и был под полицейским надзором. Когда он с 1883 по 1896 возглавлял созданную им Бурашевскую психиатрическую колонию, в жандармских донесениях сообщалось: “…начиная от врачей Литвинова и Яковенко и кончая последним сторожем, …весь персонал служащих в Бурашевской колонии, если не активно, то пассивно принадлежит к революционной среде” [14]. В 1889 г. по инициативе

[17] Алеаторов А.Е. Материалы к истории революционного движения в России. Императорская военно-медицинская академия. Харьков, тип. “Мирный труд”, 1913, стр. 33.

директора Департамента полиции П.Н. Дурново тверским властям было предложено выслать за пределы губернии ряд лиц, включая Литвинова. Тогда высылка не состоялась, но Литвинов был выслан из губернии по Высочайшему повелению от 8 января 1904 [15]. В революционных 1905 – 1906 годах М.П. был председателем Новоторжской земской управы Тверской губернии.

Учитывая политическую активность Михаила Литвинова, можно предположить, что неожиданный отъезд в Тверскую губернию в 1872 был вызван административной ссылкой под гласный надзор полиции. Эта версия сразу объясняет и все умолчания в подцензурных публикациях Литвиновой. Надо ещё учесть, что современники событий лучше умеют читать между строк, чем люди последующих поколений.

Если принять версию об административной высылке Литвинова, то становится понятной дилемма, возникшая перед Елизаветой Фёдоровной: уехать в ссылку вместе с мужем и расстаться с мечтой о высшем математическом образовании и женской самостоятельности или фактически расстаться с мужем и стать живым примером и активным деятелем женского движения и в особенности равноправного женского образования. Е.Ф. выбрала второе.

Примем во внимание, что к 1872 она потратила много времени и труда на подготовку к университету, посещала Аларчинские курсы и занятия А.Н. Страннолюбского, научилась обеспечивать себя частными уроками и переводами, подготовила к печати перевод с английского книги по физике Самуила Ньюта “Первоначальные сведения из физики, или Введение в изучение статики, динамики, гидростатики и оптики, с задачами для упражнения”[18] Литвинова писала: “Через два года после отъезда Ковалевской <в 1869> из России некоторые из нас “рядовых” успели основательно подготовить себя к университету” [8].

В такой трактовке событий 1872 года становятся понятными слова Литвиновой о “большом нравственном переломе”. Возможно, это было ещё и расставание с тем, что называют счастьем в личной жизни. В известных мне биографиях Е.Ф. и М.П. нет никаких упоминаний об их личной жизни и потомках.

Перед тем, как вернуться к жизненному пути и делам Елизаветы Фёдоровны, отметим, что Михаил Павлович всю свою жизнь посвятил облегчению участи самых обездоленных судьбою людей в России — душевно больных, сыграл выдающуюся роль в гуманизации отечественной психиатрии, а в конце жизни с 1908 по 1918 был директором Коронационного убежища в Москве для беспомощных неимущих людей, неизлечимых неврологических и психических больных, открытого в 1901 на средства Московской городской думы в память о коронации последнего российского императора.

Тверская областная психиатрическая больница с 1924 года носит имя М.П. Литвинова. Авторитетный историк русской психиатрии Юрий Владимирович Каннабих (1872 – 1939) включил Литвинова в список из четырёх имён, которые “должны быть в памяти каждого русского психиатра”.

В свете изложенной версии становится ясным и следующее место из воспоминаний Литвиновой: “Тогда <весной 1872> все мои друзья и знакомые заговорили в один голос: вы так любите математику, поезжайте за границу учиться. И они не только говорили, но содействовали, кто чем мог, моему отъезду. Конечно, я была очень им всем благодарна, но в то же время мне было и грустно, что меня торопили отъездом даже люди, принимавшие в моей участи самое большое участие. С.А. Усов твердил мне: “ теперь начинается новая глава вашей жизни; вы вполне подготовлены к университету”, но, говоря это, он с таким глубоким сожалением смотрел на меня, что мне хотелось заплакать” [8].

Для получения заграничного паспорта требовалось согласие супруга. Согласие репрессированного вряд ли было полезным в этом вопросе. Вероятно, друзья помогли Е.Ф. получить паспорт как вдове некоего внезапно умершего доктора Виктора Литвинова, что нашло отражение в её биографии, написанной О’Коннором и Робертсоном [16]. Выезд из России по подложному паспорту был в то время не таким уж редким явлением. Таким образом, за границей Литвинова была вдовой, а в России числилась женой здравствующего человека. Галина Ивановна Синкевич сообщила: “В

[18]Соч. Ньюта (Newth). Пер. с англ. Е.Литвиновой, под ред. С.Усова. — Санкт-Петербург: В.П. Печаткин, 1873.

адресной книге СПб, 1915 г. нашла следующее: Литвинова Елизавета Федоровна, жена дворянина, доктор математики. Лиговская ул., д. 53, тлф. гимназия кн. Оболенской. курсы — помощь учащимся. Писательница".

Конечно, представленное описание событий весны 1872, несмотря на всю логическую убедительность, остаётся только одной из возможных версий до тех пор, пока не найдены подтверждающие документы или заслуживающие доверия личные воспоминания. Достоверно только то, что имя доктора Виктора Литвинова не упомянуто в Российских медицинских списках шестидесятых и начала семидесятых годов, а имя Михаила Литвинова и дата венчания указаны в архивном документе.

В событиях весны 1872 нетрудно увидеть перекличку и с рассказом Е.Ф. "На чужих плечах", и с романом Н.Г. Чернышевского "Что делать?" (фиктивная смерть первого мужа Веры Павловны).

Уехав в 1872 в Швейцарию, Елизавета Федоровна поступила в Федеральную техническую высшую школу Цюриха (Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, ETHZ), и записалась на лекции французского профессора Эдуара Меке[19]. Хорошее знание французского облегчало ей общение с профессором. В дальнейшем Литвинова предполагала продолжить учёбу в Париже. Но тут в её судьбу вмешался сам Карл Вейерштрасс. Профессор ETHZ Герман Шварц[20], один из лучших учеников Вейерштрасса, написал своему учителю, что на механическом отделении у Меке, который только преподаёт, но совсем не занимается наукой, есть русская студентка. Шварц добавил, что хотел бы иметь ученицу с истинным интересом к науке. Вейерштрасс загорелся идеей осчастливить ученика второй Софьей Ковалевской и сказал Софье Васильевне: "Очень жаль, если ваша соотечественница не воспользуется готовностью Шварца быть ей полезным". В это время в Цюрихе жила Анна Васильевна Корвин-Круковская (1843 – 1887) со своим мужем Виктором Жакляром[21], эмигрантом. Софья Васильевна попросила сестру разыскать русскую студентку и сообщить ей слова Вейерштрасса [8].

Герман Шварц

[19]Édouard Armand Méquet (1821-1897).

[20]Karl Hermann Amandus Schwarz (1843 - 1921). Член Берлинской академии наук. Был выдающимся математиком, о чём свидетельствует список математических понятий, связанных с его именем. Инвариант Шварца, принцип симметрии для аналитического продолжения функций, формула для интегрального представления аналитической функции, лемма Шварца о гармоническом отображении круга в себя, теорема Шварца-Кристоффеля о конформном отображении на многоугольник, теоремы о минимальной поверхности, о дуге ограниченной кривизны, о треугольнике минимального периметра, вписанного в остроугольный треугольник. Наконец, сапог Шварца, который занял своё достойное место рядом с листом Мёбиуса (1790 – 1888) и бутылкой Клейна (1849 - 1926).

[21]Charles Victor Jaclard (1840 – 1903). Один из военных руководителей Парижской коммуны, приговорённый во Франции к смертной казни.

После этого Е.Ф. явилась к Шварцу: «Когда я рассказала Ш. о желании своём познакомиться с его лекциями и попросила указать, к кому из его студентов лучше за ними обратиться, он ответил мне вопросом: “А вас на самом деле они интересуют?” При этом профессор посмотрел мне в глаза, как бы насквозь пронизывая меня своим взглядом. Я выдержала этот взгляд и отвечала: “разумеется”. “В таком случае”, сказал Ш, как бы особенно отчеканивая каждое своё слово, — “нечего вам доставать и записок; я летом познакомлю вас с ними сам. Я не занимаюсь частным образом за деньги, и вы мне можете заплатить только своим усердием к занятиям”» [8].

Не лишена интереса и следующая встреча Е.Ф. со Шварцем: “Когда я на другой день пришла к Ш., он спросил меня первым делом: принадлежу ли я к партии социалисток? Я ответила отрицательно. Тогда он сказал: «Все социальные вопросы разрешить легко”. Услышав это, я сделала большие глаза, но он продолжал, не смущаясь, — “да легко, если бы каждый поставил себе за правило: работай как можно больше и довольствуйся возможно меньшим”» [8].

Под руководством Шварца Е.Ф. изучала теорию аналитических функций и конформных отображений. Шварц сформулировал тему её диссертации на степень PHD по математике: конформное отображение в круг двух областей, ограниченных кривой, для которой произведение расстояний между любой её точкой и двумя фиксированными точками, называемыми фокусами, должно быть одинаковым [16]. При переходе в Геттингенский университет в 1875 руководство диссертационной работой Литвиновой. он передал профессору Бернского университета Людвигу Шлефли[22].

Людвиг Шлефли

Диссертация Литвиновой “Одна задача отображения” была написана на немецком языке и опубликована в Петербурге в 1879 [32]. Других публикаций по теме диссертации не было. Только в 1901 на XI съезде русских естествоиспытателей и врачей Литвинова представила доклад “Превращение одной римановой поверхности в круг”. В материалах съезда этого доклада нет [17]. Подробный разбор диссертации сделан Н.С. Ермолаевой в статье “Е.Ф. Литвинова — одна из первых русских женщин-математиков” . - Математическое естествознание. Сборник научных трудов. - Киев: “Наукова думка”. - 1992. - С. 91–99.

Кривую, указанную в теме диссертации, называют овалом Кассини[23]. На рисунке[24] показано семейство овалов Кассини при различных значениях параметра a — квадратного корня из произведения расстояний от точки кривой до фокусов F_1 и F_2, отстоящих друг от друга на $2c$. Кривая

[22]Ludwig Schläfli; (1814 – 1895). Известен трудами по многомерной геометрии, в конце жизни переводил древнеиндийские гимны “Ригведа” с санскрита на немецкий.

[23]Giovanni Domenico Cassini, 1625 — 1712. Астроном и инженер.

[24]Zorgit, URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cassini_oval.svg.

$A_1\ M_1\ M_2\ A_2$ содержит точки максимума в верхней половине рисунка и точки минимума в нижней половине. Линия $B_1\ A_1\ L_1\ O\ L_2\ A_2\ B_2$ содержит точки, нулевой кривизны, в том числе и точки перегиба.

Наиболее просто и естественно выглядит уравнение овала Кассини в комплексной форме

$$|z-c||z+c| = |z^2-c^2| = a^2, \ \ z = x+iy$$

Уравнение в прямоугольных координатах

$$(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = a^4 - c^4. \ \ y = \pm\sqrt{\sqrt{a^4+4c^2x^2} - x^2 - c^2}$$

Уравнение в полярных координатах

$$\rho^4 - 2c^2\rho^2\cos 2\varphi = a^4 - c^4. \ \ \rho = \sqrt{\sqrt{c^4\cos^2 2\varphi + a^4 - c^4} + c^2\cos 2\varphi}$$

Вид овала Кассини зависит от соотношения вещественных параметров a и c. Зафиксируем c и будем изменять a. При $a = 0$ получим две симметричные точки $F_{1,2} = \pm c$; при $0 < a/c < 1$ — два непересекающихся выпуклых овала вокруг фокусов; при $a/c = 1$ — лемниската Бернулли с общей точкой и нулевой кривизной в начале координат; при $1 < a/c < \sqrt{2}$ — одна кривая с четырьмя точками перегиба; при $a/c \geq \sqrt{2}$ — выпуклая кривая с равенством нулю первой и второй производных на пересечении с осью ординат, в остальном, приближающаяся к окружности по мере дальнейшего роста a.

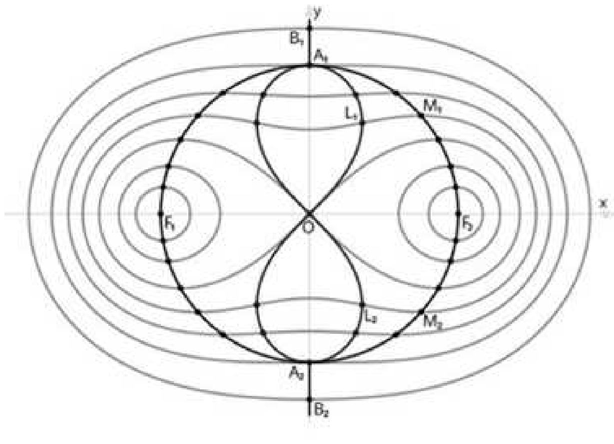


Рис. 2. Овал Кассини

Отображение $w = f(z) = (z/c)^2$, $w = u + iv$ конформно преобразует овал Кассини в окружность с центром в точке $(1 + i0)$ радиуса $(a/c)^2$.

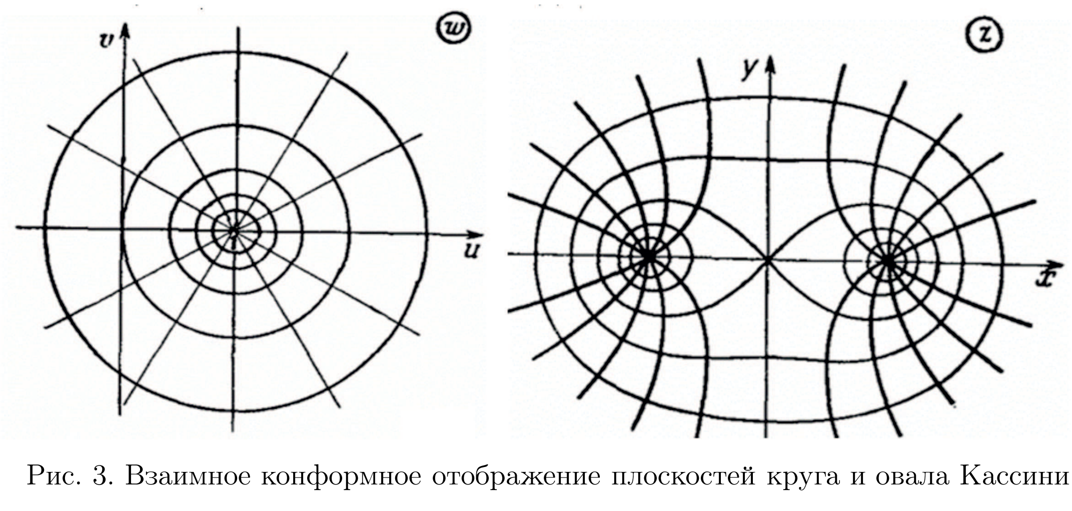


Рис. 3. Взаимное конформное отображение плоскостей круга и овала Кассини

Отображение $z = g(w) = \pm c\sqrt{w}$ указанную окружность преобразует в овал Кассини, а прямые, проходящие через $(1+i0)$, — в линии второго порядка, проходящие через точки $(c+i0)$ или $(-c+i0)$[25].

В диссертации была предпринята попытка отображения в круг внешности овала Кассини, когда он распадается на две несвязные кривые. Литвинова решает эту задачу, применяя трёхлистную поверхность Римана и принципы сохранения областей и соответствия границ, которые были теоретически обоснованы только в XX веке.

Заметим, что овал Кассини, как и его обобщения, используются в мемуарах А. Пуанкаре для построения топографической системы[26].

В 1876 Литвинова получила в Федеральной технической высшей школе Цюриха диплом бакалавра. В 1878 стала первой в мире женщиной, удостоенной степени доктора философии (PHD) по математике путём очной процедуры экзамена и апробации диссертационной работы в университете, в данном случае в Бернском. (С.В. Ковалевская получила эту степень в Геттингенском университете заочно по совокупности работ.).

Защитив диссертацию, Елизавета Фёдоровна в том же 1878 вернулась в Россию, но отечество встретило её не торжественными фанфарами, а проблемами с работой в соответствии с полученной квалификацией.

Когда Литвинова училась в Цюрихе, там жил знаменитый народоволец П.Л. Лавров[27], посещали город лидеры анархистов М.А. Бакунин[28] и П.А. Кропоткин[29], а также представители I Интернационала: "Когда в Цюрихе появлялась какая-нибудь вновь приезжая студентка, возникал вопрос, к какой она будет принадлежать партии. Так как у меня оказались знакомые во всех трёх группах, то меня особенно усердно тянули в разные стороны. Что касается моих стремлений, то я желала только учиться, но видела, что и здесь это святое право придётся отвоевать" [8]. Но случилось и более грозное покушение на "это святое право". В "Правительственном вестнике" 21 мая 1873 года был опубликован указ, который обязывал всех русских студентов, живших и учившихся в Цюрихе, покинуть этот город. В указе содержались угрозы ослушникам: "*Те из них, которые после 1 января будущего 1874 года будут продолжать слушание лекций в этих заведениях <Цюриха>, по возвращении в Россию не будут допускаемы ни к каким занятиям, разрешение или дозволение которых зависит от правительства, а также к каким бы то ни было экзаменам или в какое-либо русское учебное заведение*"[30].

Литвинова, будучи уже ученицей Шварца, не связанной с политической деятельностью, осталась в Цюрихе. Поэтому в России ей было запрещено преподавание в университетах, государственных гимназиях и даже на Высших женских курсах, существовавших на частные пожертвования. Возможно, что имело значение и полицейское досье с доносами об общении в Петербурге с Софьей Перовской, а в Цюрихе с Верой Фигнер.

Большее понимание и сочувствие нашла Литвинова в педагогическом сообществе. Е.Ф. была принята на работу в 1878 в частную женскую гимназию княгини Александры Алексеевны Оболенской (1831 – 1890) — престижное учебное заведение с преподавателями высочайшей квалификации, среди которых: А.Н. Страннолюбский, профессор, автор программы гимназии; Н.И. Билибин[31], профессор математики на Высших женских курсах; Я.И. Ковальский[32], член Русского физико-химического и Русского технического обществ; П.И. Вейнберг[33], переводчик Шекспира, Гёте, Гейне, всего свыше

[25] Лаврик В.И., Савенков В.Н. Справочник по конформным отображениям. – "Наукова думка", Киев: 1970. – 252 с.

[26] H.Poincaré Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Serie 3. – Volume 8. – 1882,. – pp. 251-296, page 279.

[27] Пётр Лаврович Лавров (1823 — 1900). Революционер, один из идеологов народничества.

[28] Михаил Александрович Бакунин (1814 — 1876). Революционер, один из теоретиков анархизма.

[29] Пётр Алексеевич Кропоткин (1842 — 1921). Революционер-анархист, географ и геоморфолог.

[30] Государственные преступления в России в XIX в. Под ред. В.Я. Богучарского, т.I. СПб., 1906, с.252-253.

[31] Николай Иванович Билибин (1846 — 1914). Автор учебников по математике.

[32] Яков Игнатьевич Ковальский (1845 — 1917). Работал в Педагогическом музее военно-учебных заведений.

[33] Пётр Исаевич Вейнберг; (1831 – 1908). Профессор русской литературы, позднее почётный академик.

60 авторов; Н.Г. Дебольский[34], философ, переводчик Гегеля; Г.В. Форстен[35], профессор истории в Петербургском университете. Стоит отметить, что Билибин и Ковальский в молодости прошли через аресты и ссылки.

Замечательный, университетского уровня преподавательский коллектив, и значительная доля среди гимназисток незаурядных целеустремлённых девочек создавали прекрасный плодотворный фон для её работы.

Судя по публикациям Литвиновой, она последовательно проходила с учениками арифметику, алгебру, геометрию и тригонометрию. Свой подход Е.Ф. описывала следующим образом: "Стараясь выполнить программы с наименьшею тратой времени, я употребляла оставшееся время на упражнения в решении более трудных задач и на другие необязательные работы, которые считала полезными для умственного развития учениц" [18]. Е.Ф. полагала, что пропорция учебного времени между теоретическими обсуждениями и решением задач должна быть 1 к 3.

А.А. Оболенская

Она очень образно сравнивала теорию и решение задач с экскурсией по арсеналу и практической стрельбой из орудий. При этом следует устранить доказательства истин, "которые большинством людей признаются за аксиомы". В [19] Е.Ф. предупреждает, что в подобных случаях ученики "начинают смотреть на доказательства, как на ряд манипуляций, не вызванных никакой необходимостью». Разумеется, такие рекомендации Литвиновой относятся только к тому уровню знания математики, который должен быть у каждого образованного человека, в том числе, и для понимания физики и космографии в объёме средней школы. К профессиональному математическому образованию у неё другие требования.

В геометрии Елизавета Фёдоровна предпочитала заменять доказательства от противного способом наложения фигур. Также она выражает желание, "чтобы вся планиметрия состояла из двух отделов: одного, состоящего из теорем, не зависящих от теории параллельных, ...и второго, заключающего теорию параллельных со всеми теоремами, на ней основанными" [19]. В другой статье Е.Ф. предлагает введение принципа движения в геометрию. Она пишет: "Идея движения, независимо от

[34] Николай Григорьевич Дебольский; (1842 – 1918). Член Петербургского философского общества.
[35] Георгий Васильевич Форстен; (Georg August Forstén; 1857 – 1910).

времени, в которое оно совершается, то есть “геометрического движения”, не сложнее идей величины или протяжённости” [20]. Эти предложения Литвиновой могут и сегодня несколько приблизить школьную геометрию к достижениям геометрической науки XIX и XX веков.

О стиле и эффективности преподавания Е.Ф. рассказывала Л.Н. Грацианской[36] дочь одной из руководительниц женского движения В.П.Тарновской[37] Варвара Ипполитовна Левинсон-Лессинг (1865 или 1868 – после 1950): “Литвинова, преподававшая у нас геометрию в старших классах, давала некоторые теоремы самим доказывать. Это очень увлекало учениц. В классе Литвинова разбирала различные способы доказательства и поэтому ученицы глубоко усваивали материал. Проходя курс кристаллографии на физико-математическом факультете, я часто вспоминала Литвинову, которая дала мне глубокие знания по геометрии и тем помогла легко усвоить кристаллографию. Литвинова устраивала соревнования в решении задач, давая нам задачи (на теперешнем языке) олимпиадного типа” [1]. В связи с этими словами Варвары Ипполитовны возникают сомнения в утверждении биографов, что Е.Ф. до 1887 могла преподавать только арифметику в младших классах. Варвара Ипполитовна 1868 года рождения вряд ли была гимназисткой в возрасте 19, 20 лет. Возможно, Е.Ф. вела в своём классе весь курс элементарной математики от арифметики до тригонометрии.

В 1884 началась публикация в журнале “Педагогический сборник” научно-методической работы Е.Ф. “Логика математических наук” общим объёмом около 129 журнальных страниц. Цель этой работы Литвинова определяет следующим образом: “Для того, чтобы сколько-нибудь содействовать развитию в среде преподавателей интереса к принципам и методам математики как науки, мы предприняли ряд статей, в которых намереваемся познакомить читателя со взглядами на этот предмет современных мыслителей” [21, 22]. По способу изложения работа Литвиновой построена в виде сопоставления общефилософских идей Вундта[38], конкретных математических примеров бельгийского математика Феликса Дожа[39] и комментариев автора.

В 1890 Литвинова приступила к публикации в “Педагогическом сборнике” ещё одной научно-методической работы “О влиянии точных наук на образование слога” [23], насчитывающей 81 страницу. Литвинова пишет: “Внушить должное уважение к слову есть первая задача преподавателя математики. ... Может быть, никакая другая наука не в состоянии так выучить человека знать меру в употреблении слов, как математика. ... Развитие мышления и усовершенствование языка должны быть неразрывны. ... Геометрия как учебный предмет представляет незаменимое средство для развития точной правильной речи”. Приведу ещё две выдержки: “Заменяя представление — понятием, понятие — словом <словесным определением>, мы приучим ученика к настоящему значению последнего. ... Слова в этом случае предназначены служить кредитными билетами, облегчая обмен мыслями ...”.

Е.Ф. описывает динамику освоения математического языка: “В начале курса надо приучить внимательно слушать и понимать сжатый и точный математический язык”. Как этого добиться? Литвинова считает, что ученик должен сначала “чертить под диктовку”, потом привыкнуть описывать надиктованные и собственные построения, а далее от описания построений переходить к самостоятельным доказательствам. Вот так, по мнению Елизаветы Фёдоровны, должен выглядеть “заботливый уход за бледными побегами человеческой мысли <ученика>”.

Отметив важную роль математики в образовании точной и содержательной речи, Литвинова всё-таки справедливости ради признаёт: “Математика, развивая правильность, ясность и сжатость языка, не может обогатить язык. Изучение же иностранных языков в значительной мере содействует последнему”.

---

[36]Любовь Николаевна Грацианская; 1894 – после 1979. Педагог-математик, историк математики. Окончила Киевские высшие женские курсы (1917). К.п.н. (1944), доцент (1946).

[37]Варвара Павловна Тарновская; (Зурова, 1844 – 1913).

[38]Wilhelm Maximilian Wundt; 1832 – 1920. Врач, физиолог, психолог и лингвист. В 1873 М.П.Литвинов опубликовал обзор собрания сочинений Вундта [24].

[39]Félix Dauge; (1829 – 1899). Leçons de méthodologie mathématique 1881 (Course 1883, pp. 417).

Вот тут хочется добавить, что и математика вносит свой вклад в языковую копилку такими оборотами, например, “мы с ней ортогональны”[40] вместо отсутствия общих тем и интересов или “я тебя на ноль умножу”[41] в качестве экзистенциальной угрозы, не говоря уже о “приведении к одному знаменателю”[42] как унификации внешнего облика и внутреннего мира человеческой массы.

Ещё одна заметная работа объёмом в 96 стр. увидела свет в 1896 – 97 годах: “Из области высшей арифметики” [25]. Литвинова рассказывает о работах Грассмана[43], заложивших основу аксиоматизации арифметики. Далее знакомит с исследованием Ганкелем[44] правил арифметики, аксиомами натуральных чисел Дедекинда[45], анализом свойств вещественных чисел Вейерштрасса и Дедекинда. Уделено внимание и особенностям операций над именованными числами.

Из перечисленных выше работ Литвиновой видно, что её научные интересы заметно сместились в области философии и педагогики математики. В этих областях ей присущи самостоятельность и независимость суждений от мнений общих авторитетов.

В [26] она цитирует Лобачевского: “Понятия не должны приобретаться навыком, но должны быть переданы с первого раза во всей своей обширности, с точностью, ясностью и определённостью”. Литвинова, конечно, преклоняется перед Лобачевским, однако уточняет: “Научный курс элементарной алгебры необходим только для того, кто готовит себя к профессии, делающей неизбежным знакомство с анализом». С другой стороны: “Арифметика <элементарная> необходима всем, поэтому надо заботиться о том, чтобы сделать её общедоступной, и преподавание её должно применяться к различным условиям и практическим требованиям”. В пору общего увлечения Шопенгауэром Е.Ф. указывает на существенное непонимание им роли логики в математике [27].

Л.Н. Грацианская приводит в [1] слова О.В. Орбели[46], преподававшей русскую литературу в гимназии Оболенской: “Не только в гимназии, но и вообще в среде петербургских учителей Литвинова пользовалась особым авторитетом. Елизавета Фёдоровна всегда говорила своё, смело и оригинально”.

Здравый смысл и чувство меры были свойственны Елизавете Фёдоровне во всех её суждениях и видах деятельности. Эти качества проявились и в её 11 обширных рецензиях учебников элементарной математики, в том числе “Элементарной алгебры” А.П. Киселёва в 1892 и задачника по алгебре Н.А. Шапошникова и Н.К. Вальцева в 1888 [1].

Е.Ф. после начала работы в гимназии Оболенской стала членом Петербургского общества преподавателей математики. На заседании 17 января 1892 была избрана членом Петербургского математического общества, основанного 20 октября 1890[47], в 1901 вошла в состав Философского общества при С.-Петербургском университете. В 1911 Литвинова “была командирована в Берлин, Геттинген, Страсбург, Нанси и Цюрих для ознакомления с постановкой преподавания геометрии в средней школе” [1].

Наиболее важным направлением общественной деятельности Е.Ф. было участие в женском движении, в том числе, в Русском женском взаимно-благотворительном обществе, первом союзе женщин России, созданным в 1895 году. Область деятельности этого Общества далеко выходила за рамки взаимной благотворительности, включая защиту женских прав, создание детских учреждений и обеспечение малоимущих женщин жильём, работой, медицинским обслуживанием и образованием[48].

---

[40] И. Грекова “Дамский мастер” // Новый мир. - 1963. - № 11.

[41] Геннадий Адольфович Кернес; 1959 — 2020. Городской голова Харькова с 2010 по 2020.

[42] Михаил Евграфович Салтыков-Щедрин; 1826 – 1889. Использовал это выражение в ряде произведений.

[43] Hermann Günther Grassmann; 1809 – 1877. Математик, физик и филолог, член-корреспондент Гёттингенской Академии наук.

[44] Hermann Hankel; 1839 – 1873. Математик, профессор ряда немецких университетов.

[45] Julius Wilhelm Richard Dedekind; 1831 – 1916. Математик, член Берлинской академии наук.

[46] Орбели Ольга Владимировна (Никольская; 1878-1953). Мать палеофилолога Русудан Рубеновны Орбели.

[47] Протоколы С.-Петербургского математического общества. - 1890 - 1899. - СПб, тип. В. Киршбаума. - 1899. - стр. 19.

[48] Литвинова Е.Ф. а) б) в) и г) русского женского взаимно-благотворительного общества // “Женское дело”. - 1899.

Е.Ф. сотрудничала с благотворительными организациями М.В. Трубниковой[49], принимала участие и в международных связях женских организаций, например, феминистическом конгрессе в Брюсселе 1897 года [1]. (В опубликованных материалах конгресса Литвинова не указана.)

Особой заботой Елизаветы Фёдоровны всегда оставалось женское образование. Обращаясь к собственному опыту, она писала, что "...не замечала в себе многих недостатков потому, что они были общи учившимся со мною многим молодым девушкам". Е.Ф. не уставала повторять очевидную для неё истину: "В отдельных женских университетах нет необходимости. И немногие женщины, желающие отдаться науке, могут быть без всякого вреда для себя и других приняты в мужской университет" [11].

С присущим Литвиновой пониманием жизненных ситуаций она признаёт: "Что касается профессиональных <средних> учебных заведений, то в этом случае желательны отдельные школы для женщин вследствие того, что эти школы предназначаются для лиц, одарённых обыкновенными способностями и получивших подготовку, уступающую мужской". И ещё: "Особый характер женских школ должен определяться теми внешними условиями, с которыми должны сообразовываться люди, не имеющие в виду прокладывать какие-либо новые пути, но желающие приобрести возможность зарабатывать собственным трудом средства к жизни" [11].

С 1891 по 1895 Е.Ф. опубликовала биографии Бэкона, Даламбера, Аристотеля, Лапласа и Эйлера (в одной книге), Локка, Струве, Ковалевской, Кондорсе, Лобачевского. В 1897 вышла её книга "Правители и мыслители", в которой уделено внимание отношениям Платона, Вольтера, Лазара Карно, Лагарпа, Жуковского, Лейбница, Декарта и Дидро с правителями их времён. Российская исследовательница Т.Н. Трофимова пишет: "Литвинова использовала такой ресурс, как биографии знаменитых философов и ученых, для проведения идеи о необходимости дальнейшего развития женского образования и расширения возможностей женской самореализации в обществе" [28]. В биографической статье Джой Дороти Харви и Мэрилин Бейли Огилви сказано: "Вклад Литвиновой в математику был двояким: как сторонника передовых педагогических методов и вдохновителя своих учеников, некоторые из которых впоследствии стали учеными, и как распространителя информации о культурных, социальных и других проблемах, которую она в эпоху жесткой цензуры вносила в свои биографические работы" [29].

Г.В. Форстман с женой

- I стр. 134. - II. - стр. 140. - IV стр. 141.- IV. - С. 145-151.

[49] Мария Васильевна Трубникова (Ивашева; 1835 — 1897). Активная деятельница женского движения.

Этические взгляды Литвиновой занимают важное место в её публикациях. Приведу два примера. В докладе "Памяти А.П. Философовой"[50] Е.Ф. особо отметила, что "она относилась враждебно к явлениям, а не к людям" [30]. В биографии Джона Локка Елизавета Фёдоровна видела идеал свободной самореализации: "Сама жизнь Локка, на первый взгляд не отличающаяся ничем особенным, представляет много замечательного, если вглядеться в нее попристальнее. Это глубоко нравственная жизнь просвещенного, веротерпимого христианина и в то же время независимый жизненный путь вполне свободного человека. Такое редкое сочетание свободы с религиозностью составляет исключительную особенность Локка" [31].

Седьмого декабря 1903 в гимназии Оболенской торжественно отметили двадцатипятилетие педагогической работы Литвиновой. Собрание открыл председатель педагогического совета профессор Форстен. Прочитали поздравительные адреса от Русского женского взаимно-благотворительного общества и от бывших учениц гимназии, который полностью воспроизведён в газете "Биржевые ведомости" 8.12.1903.

"Многоуважаемая Елизавета Фёдоровна!

В этот день, когда мы собрались здесь, в стенах всем нам дорогой гимназии, чествовать двадцатипятилетие Вашего служения родному обществу и школе, позвольте нам, Вашим бывшим ученицам, сказать Вам от себя несколько слов искреннего привета. Четверть века тому назад Вы были призваны жизнью на тяжёлый, неблагодарный педагогический труд, взамен той профессорской кафедры, которой Вы вправе были ожидать, и с тех пор мужественно, с неослабевающей энергией несли его, освещая лучом чистого знания пытливые детские умы. ..."

Надежд и замыслов лелея миллионы,
Мы в юности "глядим в Наполеоны".
Но смысл есть ещё и в том,
Чтоб стать связующим звеном
И бережно свечу принять,
Нести, не загасить и передать[51].

Литература

[1] Грацианская Л.Н. Елизавета Фёдоровна Литвинова // "Математика в школе". - 1953. - № 4.

[2] Бокова В.М, Белодубровский Е.Б. Литвинова. - "Русские писатели 1800 – 1917". Биографический словарь. Том 3. "Большая российская энциклопедия", 1994. - 610 с.

[3] Ивашкины. - "Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона", т. XIIa: - СПб., 1894.

[4] Литвинова Е.Ф. 19 февраля 1861 // "Северный Вестник". - 1898. - № 2.

[5] Литвинова Е.Ф. Нелегальная семья // "Наблюдатель". - 1901. - № 9.

[6] Литвинова Е.Ф. Воспоминания о Некрасове // "Научное обозрение". - 1903. - № 4.

[7] Чуковский К. Критические рассказы. Жена поэта // "Эпоха". - 1921.

[8] Ель Е. (Литвинова Е.Ф). Из времени моего студенчества // "Женское дело". - IV. - 1899. - стр. 34.

[9] URL: https://mail.kamlib.ru/resources/full_text_search/vydayushchiesya-lichnosti-v-istorii-kamchatki/detail/nikolay-vasilevich-strannolyubskiy/

[50] Анна Павловна Философова (Дягилева; 1837 – 1912), Одна из руководительниц женского движения в России.
[51] Автор стихотворения Е. Жилец.

[10] URL: http://www.kamchadaly.ru/index.php/kunena/city_pk/36-strannolyubskij-aleksandr-nikolaevich

[11] Литвинова Е.Ф. К реформе высшего и среднего женского образования // "Женское дело". - 1899. - VI.

[12] Сеченов И.М. Автобиографические записки Ивана Михайловича Сеченова // "Научное слово". - 1907. - XVI. - 195 с., стр. 134.

[13] Караванова Т.М. Памяти М.П. Литвинова // "Журнал неврологии и психиатрии им. С.С.Корсакова". - 1960. - № 8. - с. 1045-1047.

[14] Приклонская Л.А. История организации психиатрической помощи в Тверской губернии. - 2019.
URL: https://gbuz-okb-tver.ru/struktura/muzey-istorii-meditsiny/articles/istoriya-psyhol-pomoshi

[15] Ульянова Л.В. Колыбель российского либерализма: тверские либералы глазами политической полиции // "Вестник московского университета. Серия 8. История". - 2008. - № 6.

[16] O'Connor J.J. and Robertson E.F. Elizaveta Fedorovna Litvinova
URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Litvinova/

[17] Киро С.Н. Математика на съездах русских естествоиспытателей и врачей // Историко-математические исследования. - Вып. XI. - "Физматгиз», М.: 1958. - 792 с.

[18] Литвинова Е.Ф. К вопросу о преподавании математики в средних учебных заведениях // "Женское образование". - 1886. - №№ 6—7, 8.

[19] Литвинова Е.Ф. Некоторые теоремы об углах и треугольниках // "Педагогический сборник". - 1898. - VI.

[20] Литвинова Е.Ф. О влиянии точных наук на образование слога // "Педагогический сборник". - 1891. - IV.

[21] Литвинова Е.Ф. Логика математических наук // "Педагогический сборник". 1884. - I-VI.

[22] Литвинова Е.Ф. К логике математических наук // "Педагогический сборник". - 1885. - IV.

[23] Литвинова Е.Ф. О влиянии точных наук на образование слога// "Педагогический сборник". 1890, IX, 1891, I, II, IV, V, IX.

[24] Змеев Л.Ф. Русские врачи-писатели. - 1866, выпуск 1.
URL: http://books.e-heritage.ru/book/10078733

[25] Литвинова Е.Ф. Из области высшей арифметики // "Педагогический сборник". - 1896. - I, III, VII, XI. - 1897. - VI.

[26] Литвинова Е.Ф. Взгляд Лобачевского на преподавание элементарной математики // "Педагогический сборник". - 1895. - IV.

[27] Литвинова Е.Ф. Мысли Шопенгауэра о преподавании геометрии // "Русская школа". - 1892. - № 9. с. - 114—124.

[28] Трофимова Т.Н. Женский вопрос в биографиях учёных и философов Е.Ф. Литвиновой (1890-е гг.) // "Вопросы истории естествознания и техники". - 2022. - Т. 43. - № 4. - С. 728–746.

[29] Ogilvie M. and Harvey J. (eds.) “The Biographical Dictionary of Women in Science: Pioneering Lives from Ancient Times to the Mid-20th Century”. - New York: Routledge, 2003.

[30] Анна Павловна Философова // “Женское дело”. - 1912. - № 7-8.

[31] Литвинова Е.Ф. Джон Локк, его жизнь и философская деятельность // Санкт-Петербург: тип. Ю.Н. Эрлих, 1892. - 77 с. (Жизнь замечательных людей. Биографическая библиотека Ф. Павленкова).

[32] Litwinova-Iwaschkina E. Lösung einer Abbildungsaufgabe. - St Petersburg: 1879 Buchdruck der Kaiserl. Akad. der Wissenschaften, 1879. - 28 S.

Эпштейн Георгий Львович, г.Москва,
доцент, кандидат технических наук.

E-mail: egl413@gmail.com

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2025 год (1 экз., включая стоимость пересылки): 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2025 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.
Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки): 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!
Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. Редакция принимает материал к публикации или отклоняет без объяснения причины. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138
9 771992 613776