ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

год двадцать девятый

номер 2 (114)

апрель - июнь 2025

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

*Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования*

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 2 (114), 2025 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2025 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 18.07.2025 г.
Стиль верстки разработан С.А. Кулешовым.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (114), апрель – июнь 2025 г.

Содержание

Актуальные вопросы математического образования

Диалектика, познание, образование и психология

К. А. Лебедев

Данная статья посвящена исследованию связи диалектики, познания, образования и психологии. В ней рассмотрено, каким образом диалектический подход объясняет развитие природы и метод её познания, каким образом обогащает наше понимание образовательных процессов, а также как он соотносится с современными психолого-педагогическими теориями. Мы постараемся показать, что диалектика не только остаётся актуальной в мире науки и образования, но и является единственно верным инструментом для формирования современной концепции математического и естественно-научного образования.

Диалектика — это наука о развитии природы, общества, познания, о законах отыскании объективной истины. Ее законы были в общезначимом для человечества виде впервые сформулированы Гегелем [1], всего 200 лет назад и затем дважды Ф. Энгельсом [2] и В.И. Лениным [3] применены с большим успехом в науке, когда ее поражает кризис, вызванный переломом в сознании под воздействием новых открытий и достижений в новых исторических условиях.

Современные трудности в системе образования во многом обусловлены быстрым развитием информационных технологий и огромным объёмом доступной информации. Эти факторы привели к ситуации, в которой педагогическая наука растерялась и не знает, какие образовательные направления следует выбирать и как организовать процесс обучения, особенно в таких ключевых предметах, как математика, без которой не может осуществляться и глубокое изучение других дисциплин. В результате методисты, авторы учебников и преподаватели стремятся найти новые подходы, однако ищут решения там, где они в принципе не могут быть найдены — поэтому это не приводит и не может привести к каким-либо ощутимым результатам.

Законы диалектики дают ясные указания на то, где следует искать решения и где это делать бессмысленно. В условиях общего кризиса диалектика становится особенно актуальной, поскольку она объясняет процессы познания и развития. Несмотря на то, что на сегодняшний день появляется множество публикаций о процессе развития в образовании, но определения и основные формулы развивающего процесса остаются вне обсуждения, а ключевые диалектические законы развития игнорируются. Это приводит к созданию множества неуместных и нелепых идей. Диалектика является фундаментом для любого научного прогресса и представляет собой единственный принцип, который обеспечивает связь и необходимость в содержании науки. Основной закон диалектики, касающийся развития, был сформулирован Гегелем следующим образом: переход к новому тезису, с помощью анализа и синтеза, всегда происходит через разрешение противоречия между первоначальным тезисом и новым антитезисом [1].

Закономерный процесс постижения объективной истины осуществляется через тезис и антитезис в двух противоположных категориях: абсолютности и относительности знаний. Иерархия тезисов и антитезисов может быть длинной, однако главное основание всегда лежит в первоначальном тезисе. Хорошим примером служит сама математика, где иерархия разделов элементарной и высшей математики представляет собой иерархию появления новых тезисов [4-6].

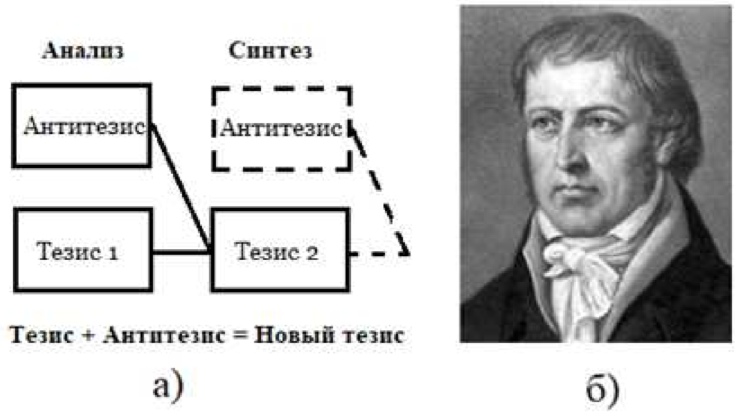


Рис. 1. а) Схема появления нового тезиса; б) Георг Гегель.

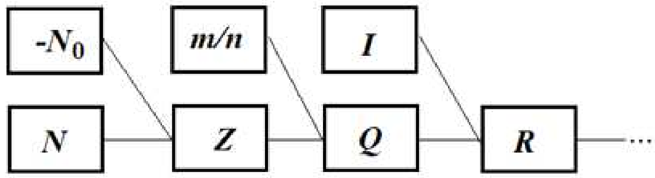


Рис. 2. Возникновение нового раздела в математике в виде присоединения новых записей, на фундаменте предыдущего раздела

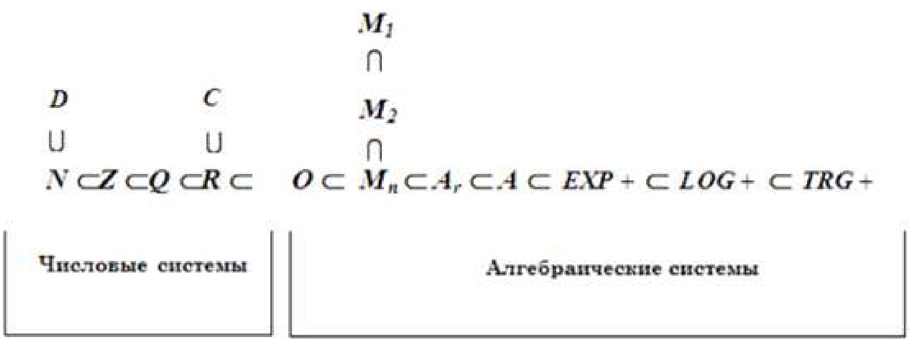


Рис. 3. Иерархия 15-ти разделов математики с использованием знака принадлежности [4-6]

Можно привести массу примеров того, что развитие осуществляется только так и никак иначе. Например:

1) Евклидова геометрия 2500 лет воспринималась как абсолютная истина в рамках пятого постулата (тезис), но в рамках отрицания пятого постулата (антитезис) появляется новая геометрия Лобачевского, а геометрия Евклида становится относительной истиной в новых рамках. Следует подчеркнуть, в рамках пятого постулата достигнута абсолютная истина, которая никогда, ни при каких обстоятельствах уже не может быть пересмотрена. Каких бы новых рубежей не достигнет человечество, евклидова геометрия войдет во все другие геометрии как основание, на которой только и может быть построено новое геометрическое знание.

2) Так было и с механикой Ньютона, которую поглотила теория относительности Эйнштейна. Механику Ньютона поглотила и квантовая механика. Но они построены на механике Ньютона, держатся на ней как на прочном фундаменте и не могут мыслиться без неё. Классическая механика Ньютона почти полностью и целиком вошла в теорию относительности Эйнштейна и мыслится как

предельный случай. Однако абсолютная истина механики Ньютона при низких скоростях становится относительной истиной при скоростях, сравнимых со скоростью света.

3) Математическая логика является вторичной формализацией формальной логики Аристотеля, что было продемонстрировано Д. Гильбертом в 1914 году, и включает целиком аристотелевскую логику в измененном виде.

4) И диалектическая логика включает в себя формальную логику Аристотеля и не могла появиться как результат свободного творчества или инновации, а поглотила и расширила аристотелевскую логику на процессы развития природы и познания.

В образовательной сфере мы можем наблюдать то же самое.

5) Работы И.П. Костенко и В.И. Рыжика представляют собой две диаметрально противоположные позиции в сфере педагогической философии и образовательной политики. В работе И.П. Костенко акцент делается на абсолютные и неизменные принципы образовательной системы. Автор фокусируется на важности возвращения к традиционным ценностям и методам, которые, сформировали прочный фундамент для российской образовательной системы в прошлом. Костенко утверждает [7, 8], что необходимо возродить принципы, заложенные в русской школе, и призывает к созданию образовательного процесса, насыщенного классическими подходами, предлагаемыми такими выдающимися педагогами, как А.П. Киселев. Итогом такой концепции становится категорический и недвусмысленный вывод: "Надо ясно и определенно заявить обществу стратегическую цель (пусть в ближайшее перспективе недостижимую) вернуть советскую СИСТЕМУ образования 1930-1950-х годов. вернуть программы, построенные на принципах системности, фундаментальности и доступности, единые понятные учебники, классическую методику" [7, с.174]. Это свидетельствует об абсолютности и определённости его подхода, который подчёркивает важность сохранения традиций в образовательной сфере.

Напротив, В.И. Рыжик в своей работе смотрит на образование с относительной перспективы, подчёркивая множественность подходов и отсутствие универсального решения для системы образования. В отличие от Костенко, который выступает за восстановление традиционных принципов, Рыжик занимается деконструкцией существующих идеалов и ставит под сомнение необходимость старых рамок и правил в образовательной политике. Он отмечает, что в условиях быстро меняющегося общества невозможно точно предсказать, каким должно быть образование. Эта неопределённость порождает основное утверждение его работы: "Многие нынешние проблемы преподавания канут в Лету, но появятся новые, не менее сложные. Будут учить по-другому и иначе. В чем — по-другому? Как — иначе? На эти вопросы придётся отвечать уже в XXI веке" [9, с 383]. Его подход акцентирует идею открытости к новациям и необходимости учитывать современные реалии.

Таким образом, работы И.П. Костенко В.А. Рыжика не только представляют собой два противоположных подхода к образованию, но и отражают более широкую платформу на тему образовательной философии, составляют внутреннее противоречие, чувствительный нерв современного этапа развития педагогики. Костенко стремится к восстановлению устоявшихся норм и традиций, тогда как Рыжик настаивает на важности адаптации к изменяющимся условиям и возможности нахождения нового пути в образовании. Эти взгляды отражают объективно существующие противоположности в самом процессе движения вперед, старое и новое всегда находятся в антагонизме и создают богатое поле для обсуждения и дальнейших исследований в области педагогической практики и теории. На самом деле, с точки зрения диалектики, эти две крайние точки зрения, выраженные с твердой убедительностью, отражают две стороны нашего познания и развития. Новое всегда приходит в противоречие со старым, тезис всегда отрицается антитезисом, но происходит это по трем законам диалектики, а не по желаниям и фантазиям авторов новаций.

Можно еще привести массу примеров в истории науки, когда старое поглощается новым и ни одного примера нельзя привести успешного, голого фантазирования на пустом месте. От практики к теории и от неё снова к практике на новом уровне — это научный путь познания в рамках трех законов [2, с. 44]:

I. В виде тезиса и антитезиса осуществляется закономерный процесс постижения объективной истины (природы), познаваемой в двух противоположных категориях: абсолютности и относительности истины, которые связаны рамками достигнутого прогресса человечества. Они взаимопроникают друг в друга. Тезис и антитезис тесно связаны, образуют неразделенное единство, но являются противоположностями, в их противостоянии и борьбе возникает новый тезис.

II. Тезис подвергается длительному испытанию на устойчивость, но обречен на замену новым тезисом, под воздействием антитезиса. При этом все полезное, накопленное человечеством, не теряется, наоборот сохраняется и обогащается, путем медленного и постепенного накопления количественных изменений (иногда и тысячи лет) и в момент отрицания, тезис скачком переходит в качественно новое состояние — новый тезис, в котором старый тезис содержится как база, как основание (**а не отбрасывается!**).

III. Старый тезис всегда заменяется на новый тезис, а новый отрицается еще более новым, путем присоединения антитезиса. Происходит систематическое отрицание отрицания старого и появление нового тезиса, при этом движущей силой развития служит внутреннее **противоречие** между тезисом и антитезисом.

Например, в приведенной выше иерархии разделов математики, рис. 2 и 3, переход от одного раздела к другому осуществляется всегда вследствие противоречия между узостью рассматриваемого множества и стремлением обеспечить выполнимость нового обратного действия. К примеру, в целых числах выполнимы три прямых действия, но не всегда выполнимо деление, и желание получить возможность всегда выполнять деление, приводит к множеству дробных чисел и подобным образом 15 раз, порождая 15 основных разделов математики, рис. 3. Иерархию разделов можно усмотреть и в любых других дисциплинах, особенно в химии, в которой таблица Менделеева, по сути дела, отражает такую же периодичность, как и две таблицы разделов математики, рис. 3 [4-6]. В физике [10, 11] также необходимость развертывания последовательности разделов просматривается с жесткой необходимостью, как в математике и химии.

Таковы кратко суть формула развития и три закона диалектики.

После их формулировки они были использованы Ф. Энгельсом [2] при первом кризисе естествознания 180 лет назад, для основательной критики того оптимизма, которому были подвержены масса ученых в 19 веке, унаследовавшие метафизический способ мышления средневековой науки. После великих географических открытий, под влиянием впечатляющих успехов естествознания (клеточная теория, закон сохранения и превращения энергии, теория Дарвина) порочность оптимизма, мнящего взять у природы последние абсолютные истины практически голыми руками, стал очевиден философам, владеющих открытыми Гегелем законами диалектики. Энгельс показал, что те истины, которые мнилось ученым конечными, абсолютными, последними инстанциями, на самом деле таковыми не являются, а тут же переходят в свою противоположность, как только рамки науки расширяются. Все это хорошо подтвердилось дальнейшим развитием естествознания.

Второй кризис естествознания возник 120 лет назад, когда человечество стало проникать в тайны ядра атома и это вызвало кризис в науке, в гносеологическом смысле обратный первому. Даже такой гений, как Пуанкаре, совершенно растерялся, а историки причисляют Анри Пуанкаре к величайшим математикам всех времен. Они считают его, наряду с Гильбертом, последним математиком-универсалом, ученым, способным охватить все математические результаты своего времени. Его перу принадлежат более 500 статей и книг. Обе области современной ему математики, "чистой" и "прикладной", он обогатил замечательными методами и результатами. В августе 1900 года Пуанкаре руководил секцией логики Первого Всемирного философского конгресса, проходившего в Париже. Там он выступил с программным докладом "О принципах механики", где изложил свою конвенционалистскую философию: принципы науки суть временные условные соглашения, приспособленные к опыту, но не имеющие прямых аналогов в реальности. Эту платформу он впоследствии детально обосновал в книгах «Наука и гипотеза» (1902), "Ценность науки" (1905) [12] и "Наука и метод" (1908). В них он также описал свое видение сущности математического творчества, в котором главную роль играет интуиция, а логике отведена роль строгого обоснования интуитивных прозрений. Например: “Одно из самых удивительных открытий, о котором физики объявили в эти последние годы, состоит в том, что материи не существует” [12].

И тем не менее, каким великим талантом не обладал бы математик, физик, естествоиспытатель в своей области, он и другие писали сотни страниц гносеологического вздора [3], исключительно по незнанию диалектики развития. Начали говорить об “исчезновении материи”, о “нарушении принципа сохранения энергии”, “исчезновении массы”, о “подрыве принципов механики”, “принципы не копии и снимки с природы по отношению к сознанию, а продукты этого сознания”, “законы есть удобные соглашения”, о “всеобщем разгроме принципов” и договорились о “непознаваемости Бога, который знает бесконечно больше нас” и т.п. Если до начала 20 века верили в чисто механическое устройство природы, представляли, что вся физика — только более хитро устроенная механика и разногласия касались лишь о приемах сведения физики к механике, то после наступления 20 века наблюдается совершенно противоположная картина. Всеобщее единодушие сменилось крайними разногласиями, причем не по второстепенным вопросам, а по коренным основополагающим идеям. Встал вопрос: наука внезапно поворачивает назад и покидает окончательно ту широкую, прямую столбовую дорогу, по которой она успешно шла тысячелетия и требуется создать нечто совершенно новое, или все же идти по старой дороге, но в расширенных рамках нового, которое поглотит и не перечеркнет старое.

Известный революционер и политический деятель В.И. Ленин в своей книге “Материализм и эмпириокритицизм” [3] дал, с точки зрения материалистической диалектики, точную гносеологическую характеристику подобным изысканиям, в свойственной ему издевательской форме. “Крупный физик и мелкий философ”, такова грубая характеристика гения физики и это суждение оказалось верным в свете дальнейшего развития науки, сделанное трезво мыслящим человеком, хотя В.И. Ленин не был ни философом (никаких достижений в философии у него нет, зато есть тщательное изучение философии всех времен от античности до ему современной и умелое применение на практике результатов чистой мысли) и тем более не был физиком. Если Ф. Энгельсу приходилось подчеркивать относительность наших знаний, то при втором кризисе В.И. Ленину пришлось напомнить естествоиспытателям, что в знаниях содержится и **абсолютная** составляющая и что абсолютная составляющая равно важна, как и **относительная**. Это противоположные, но неразделяемые, взаимопроникающие категории познания.

Его вывод: ученые должны понимать диалектику, это наука отыскания истины. Должны понимать соотношение между абсолютной и относительной истинами. Принципы физики не нарушаются, масса не исчезает, не исчезает энергия, не исчезает материя, а исчезает тот предел, до которого мы знали материю. Исчезают те свойства материи, которые казались раньше абсолютными, первоначальными, неизменными и теперь они обнаруживаются как переменные, относительные. Диалектика природы признает абсолютную истину в строго очерченных рамках, как только эти рамки расширяются, абсолютная истина в новых рамках оказывается относительной, но никуда не исчезает, а остается как **составная часть** нового более широкого знания. Чтобы создать новое, нужно досконально и глубоко знать старое и только **на старом**, как на фундаменте, можно построить новое знание.

Тенденция в науках, которая при каждом кризисе стремиться изобретать велосипед (современная педагогика как раз пытается в условиях информатизации на голом месте изобрести нечто невиданное и неслыханное, хотя эффективные методики давно существуют и они воспроизводимы в новых условиях, пример выдающегося качества в физике есть [11], ничего подобного в математике нет), противоречит законам диалектики. Всегда оказывается единственно продуктивным строить новое на основе существующего достигнутого уровня (производительных сил, знаний, опыта), синтезируя новое, отвечающее современным вызовам и технологиям, а не фантазировать все с нуля.

Ход истории полностью подтвердил истинность философского вывода [3] в виде тезиса “электрон неисчерпаем, как и атом”, а философские творения Пуанкаре преданы забвению, но в интернете легко отыскиваются и можно, с высоты 100–летних достижений, воочию убедиться в его путанных, туманных гносеологических рассуждениях. История действительно показывает, что основополагающие идеи или подходы становятся не только вечными, но и крайне ценными на протяжении тысячелетий. Догадка древнегреческого ученого Демокрита об атомном строении вещества оказалась верной, также верны и вечны методы обучения в древнегреческой Академии Платона.

В настоящее время очевиден вполне аналогичный третий кризис в методике образования. Рамки старых методов обучения расширились, появились новые информационные средства. Основополагающий природосообразный принцип обучения как бы исчезает, как бы исчезают эффективные принципы обучения прошлого. В методике обучения появляется масса всяких поверхностных новаций, которые часто противоречат друг другу, новации сменили традиционно-устойчивое, характерное для русской школы и школы социализма обучение школьников и студентов. Новые информационные ресурсы создают иллюзию того, что старые формы обучения должны быть забыты, а должны быть созданы совершенно новые способы, мы видим всеобщий разгром классических проверенных временем методических основ эффективного обучения. Дело представляют так, что нужно на голом месте изобрести, нафантазировать какой-нибудь удобный, новый, по сути, способ, выпячивая то ВТУ-принцип, то деятельностный принцип, то принцип развития, то компетентностный подход, которые никак не связаны с прошлыми достижениями, проверенными практикой, причем эти новации изобретают, не выходя из кабинета. Но, разумеется, все это преходящие явления. Вывод науки диалектики о достижении новой истины состоит в том, что в проверенном практикой старом непременно содержится абсолютная истина, а новое может строится только на старых достижениях, на старых традициях. Наиболее существенные принципы (если не все) должны войти в новое практически в неизменном виде.

Теория относительности Эйнштейна поглотила механику Ньютона, механику Ньютона поглотила и квантовая механика. Но они построены на механике Ньютона, держатся на ней как на прочном фундаменте и не могут мыслиться без нее. Геометрия Лобачевского и Римана немыслимы без геометрии Евклида и тоже построены на ней как на фундаменте, и новые геометрии не мыслимы без евклидовой геометрии. Математическая логика явилась вторичной формализаций формальной логики Аристотеля, и математическая логика содержит в себе аристотелевскую логику в незыблемом виде. Диалектика, конечно, целиком поглотила логику Аристотеля, добавив только три диалектических закона, которым следует история и в критические переломные моменты появления нового, исторический процесс становится иррациональным и выходит за рамки формальной логики. Можно еще привести массу примеров такого развития в истории науки и ни одного примера нельзя привести успешного, голого фантазирования на пустом месте.

Только на природосообразности может быть построена эффективная система обучения. Она подчиняется законам психологии человека. Во главу угла в ней положена речь, как самое важное отличие человека от животного. Речь (письменная и особенно устная) и мышление — это одно и то же. В речи осуществляется связь образно-наглядного и абстрактно-логического мышления, которые питают эмоции (это топливо для огня!). В ней присутствует система, систематичность, предметность, учет возрастных особенностей. В то же время это совершенно не означает, что развитие педагогической мысли остановилось, однако направление его вполне определено прошлым. Новые информационные технологии ставят трудно решаемую проблему использования этих технологий (антитезис) в образовании в рамках природосообразного подхода (тезис). Наиболее эффективной образовательной системой будет та, которая сохраняет в себе достижения академии Платона, русской (советской) школы, школы Шаталова, в творчески преобразованном виде, в соединении с информационными технологиями. Три исторически состоявшихся школы содержат в себе много общего и на практике показали свою высочайшую эффективность. В них речь (и следовательно мышление) является основой природосообразного обучения, но в новых условиях информационного века, с использованием могучих средств информационного воздействия эффективность должна еще больше возрасти.

1. Академия Платона просуществовала 915 лет, готовила руководителей рабовладельческого государства, сенаторов, политиков, законодателей, военных начальников, — основанная на выработке

красноречия, устных диалогах и устного ораторского искусства и открытой устной полемике.

2. Русская школа, унаследовавшая некоторые черты Академии, основанная на письменной и устной речи и существующая и по сей день в виде Русской классической школы (рук. Т.А. Алтушкина).

3. Система обучения В.Ф. Шаталова, расширившая принципы русской школы законами психологии и психолингвистики, основанная на систематическом использовании письменной и устной речи, с применением опорных сигналов, которые значительно повышают продуктивность мышления.

Других реализаций эффективной образовательной системы нет, остальные узкие попытки заменить принцип природосообразности другими узкими принципами: ВТУ-принципом, принципами строгости, научности, принципами деятельности и развития, компетентностными подходами в отрыве от принципа природосообразности и законов психологии закономерно терпят и в будущем будут терпеть неудачу.

Методы в академии Платона [13].

Академия Платона готовила политиков и руководителей государства; по-видимому, щедро и целенаправленно финансировалось государством и потому просуществовала 915 лет. Изучалось ораторское искусство **красноречия** (риторика) как главный инструмент руководства государством в различных государственных институтах (сенате, суде, народных собраний, коллегиях). Надо говорить грамотно, поэтому учились языки, родной и иностранные. Надо говорить убедительно, для этого надо ум в порядок привести, изучались математические дисциплины: арифметика, геометрия (создана Евклидом). Надо говорить логично, для этого изучалась формальная логика (создана учеником Платона — Аристотелем). Надо уметь искать, добывать истину в прениях, вести диалоги, споры, дискуссии, причем прилюдно, при большом количестве слушателей. Изучались законы диалогов, споров, возникла **диалектика** (законы отыскания истины). Оратор должен уметь перевоплощаться, надо быть артистичным, уметь играть разные роли: и руководителя, и подчиненного, оратора и слушателя, ценить искусство, понимать красоту. Поэтому изучалось театральное искусство перевоплощений, законы драматического искусства, учили понимать законы театра и принимать участие в театральных постановках. Изучались также эстетика, поэзия, законы стихосложения. Надо уметь петь и играть на музыкальных инструментах. Надо еще быть высокообразованным человеком, поэтому изучались: начала механики, география, астрономия, политические науки, военные науки, налогообложение. Надо еще быть порядочным человеком. Изучалась также этика. Что такое нравственность, долг, счастье, истина, честь, свобода, достоинство, справедливость, доброта, красота, сейчас этому вовсе не учат, со всех сторон выпирает только безобразное. Таким образом формировалась и существовала идеология рабовладельческого государства, демократической природы для рабовладельцев, которая впитывалась сознанием. Надо еще быть мудрым человеком. Изучалась философия (переводится как “любовь к мудрости”). Общие законы мышления и бытия, закономерности познания. Уметь видеть общее в конкретном и наоборот, конкретное в общем. Иметь мировоззрение (Платон был идеалист, его ученик Аристотель — материалист). Любить истину и неутомимо искать к ней дорогу. Надо быть здоровым, выносливым, поэтому занимались атлетикой, закаливанием. Надо вести здоровый образ жизни. Только в здоровом теле — здоровый дух, способный идти дорогой свободы и истины. В итоге надо быть гармонично развитым человеком, творческим руководителем на благо своего родного, кровного, рабовладельческого государства.

Две другие системы не столь сложны и в значительной мере урезаны в объеме.

Методические принципы русской школы [7, 8].

Принцип систематического использования устной и письменной речи (чтение, сочинение, пересказ, свободное говорение и литературное творчество). Не изучались в должной мере красноречие, диалектика, философия, формальная логика, не уделялось достаточного внимания физическим упражнениям). Принцип сознательности (понимания) усвоения знаний, отсутствие формальной излишней информации. Знания, которые наделены смыслами, умениями отвечать на вопросы: почему? как? сколько? Принцип отсутствия перегрузки программ. (Нет нужды в школе изучать второстепенную и третьестепенную информацию, а только строго упорядоченное ядро знаний. Существует правило 20/80 которое гласит: 20% усилий дают 80% результата, а остальные 80% усилий — лишь 20% результата). Принцип системности: знания и навыки, сообщаемые учащимся, должны располагаться в определенной системе и строгой последовательности, отсутствие хаоса в ядре знаний. Это означает, что последующее должно быть тесно связано с предыдущим, базироваться на предыдущем, в виде тезиса и антитезиса. Принцип постепенности от простого к сложному: "переход от одной ступени к другой может совершаться лишь тогда, когда хорошо усвоена предыдущая ступень, ядро знаний должно быть плотным. Например, нужно "медленно, тщательно выяснять и осваивать каждую произведенную операцию, пока выполнение не станет прочно усвоенным навыком". Нужно достаточное время для повторения и усвоения, нет перегрузки программы ненужными, второстепенными сведениями и информацией. Принцип объективности системы и последовательности знаний. Последовательность и принципы не придумываются методистами, а вырабатываются длительной практикой обучения в течении столетий, а также объективным содержанием дисциплин. Принцип предметного цельного обучения рекомендует строить обучение последовательными цельными малыми и большими учебными блоками (один блок поглощает другой, основывается на предыдущем [4-6]), а не хаос из разнородных предметов. Предметная цельность обеспечивает внутреннюю взаимосвязь всех элементов учебного предмета и является необходимой предпосылкой неформального, сознательного и прочного усвоения. Отдельные дисциплины не смешиваются: арифметика, алгебра, текстовые задачи, планиметрия, стереометрия, тригонометрия, теория вероятностей, статистика, векторная алгебра, аналитическая геометрия, программирование — все это разные дисциплины с особенной целью, со своим предметом и своими методами, не подлежащие никакому смешению. Хаос в обучении, несомненно, оборачивается хаосом в головах. Разумеется, в разных дисциплинах есть много общего и между ними есть тесная связь, конечно, на это можно и нужно обращать внимание учащихся. Цельность предмета обуславливает цельность и прочность знаний, что является предпосылкой сознательного их применения, выработке твердых навыков и умений. Без арифметики натуральных чисел нельзя глубоко понять алгебру букв. Принцип достаточного учебного времени предполагает взаимообусловленность содержания обучения и учебного времени, отводимого учебным планом на полноценное усвоение этого содержания. Принцип определяет необходимое условие для сознательного обучения, для преодоления главного недостатка — формализма в математических знаниях учащихся. Он предостерегает от перегрузки программ и указывает путь преодоления этой перегрузки, который выверяется опять-таки длительной практикой. С одной стороны, — сокращением содержания до минимально необходимых основ наук (ядру знаний), с другой — добавлением числа учебных часов, достаточных для сознательного и прочного усвоения этих основ. Принцип учета возрастных особенностей, возрастной психологии, в частности недопустимость непосильных абстракций в обучении и соответствующий детскому опыту язык преподавания и учебников (язык задачи обязательно надо приспособить к детям). Учет того, что до 14 лет доминирует первая сигнальная система (наглядно образное мышление, предметное мышление), а после 14 начинает формироваться вторая сигнальная система (абстрактно-логическое мышление). После 14 лет все знания, полученные в начальных классах, должны быть переучены, переосмыслены. Поэтому бессмысленно в начальных классах изучать высокие абстрактные понятия. Весьма важен принцип систематического решения текстовых задач. Текстовые задачи учат логическому мышлению, догадке, устанавливают связь практики с абстрактными понятиями, развивают речь, вызывают интерес (попутно проводятся устные вычисления), приводят к понятиям уравнения, функции, знакомят с явлениями и закономерностями окружающего мира, сочетаются с текстовыми задачами физики, химии. Их надо решать арифметическим способом (по действиям) и затем алгебраическим (с помощью уравнений), выясняя и усваивая теснейшую их взаимосвязь с 1 по 11 класс, (причем полезно бы выделить эту тему решения текстовых задач как самостоятельную дисциплину, коррелирующую с задачами физики, химии). Имеется принцип систематического применения устного счета, как основы математических знаний. Устный счет формирует внутреннее внимание, способность сосредотачиваться, держать несколько элементов мысли и выполнять над ними мыслительные операции, базовые качества ума, нужные и в алгебре, геометрии, физике, химии и др. При этом умение вычислять на калькуляторе, разумеется, сочетается с устными вычислениями, особенно в физике, где постоянно используются как очень маленькие величины, так и очень большие, которые в уме не посчитать с нужной точностью. Важнейший принцип систематического повторения и закрепления пройденного развивает в первую очередь гибкость и точность мышления (**а не память!**). В частности, повторение в начале учебного года материала, пройденного в предыдущем учебном году, и повторение, углубление изучаемой дисциплины в каждом классе, в конце учебного года. Принцип систематической самостоятельной (в частности, домашней) работы учащегося с учебником и задачником, которые должны соответствовать возрастной психологии. Принцип стабильной организации учебного процесса. Требуется дисциплина учащихся и учителей, ответственность за процесс обучения, готовность и способность преодолевать трудности. Учение — это не развлечение (придумываются нелепейшие изобретения, вроде геймификации), а тяжелый, но интересный труд и только от преодоления трудностей ученик должен испытывать удовлетворение. Для системы характерна стабильность, только стабильная система дает эффект в обучении. Имеются и другие психологически обоснованные принципы: наглядности, самосогласованности учебных предметов (математики и физики, математики и химии, литературы и истории, истории и географии и т.д.), методика понятного и сжатого (**но не краткого!**) изложения учебного материала. Для русской школы была характерна забота об ученике, понимания его трудностей, искание путей преодоления трудностей.

Почему забываются старые методические достижения? Например, много полезного находим у Пойя Дж. в его знаменитых книгах. Книги “Как решить задачу” [15], “Математическое открытие” [16], которые чрезвычайно богаты содержанием в рамках классической школы. Эти вопросы методики преподавания разве потеряли сегодня свое значение? Научились решать задачи? Разумеется нет, ничуть не потеряла актуальности. Но почему-то изобретаются немыслимые конструкции, начинают создавать тесты и заставляют осваивать ненужную информацию, учебники пересыщены второстепенной и третьестепенной информацией, которую никакой ученик не в состоянии осилить. Почему же изобретаются нелепые вещи? Причин много, но одна из причин — это незнание, непонимание законов диалектики, теории познания и развития, законов общей и возрастной психологии [17]. Как возникает диалектика нового, каким способом она может достигаться, и почему никак иначе. Есть в истории и третья правильная реализация природосообразной диалектической системы обучения.

Система обучения В.Ф. Шаталова [18] унаследовала практически все от русской школы, но обогатилась новыми элементами, которые составляют достижения современной психолингвистики и психологии. Речь — это абстрактно-логическое мышление и оно функционирует совместно с наглядно-образным мышлением и эмоциями. Шаталов поставил задачу, которую до него никто и никогда не ставил, и решил ее. Главное в системе, это решить проблему глубокой эмоционально-психической перестройки личности: “учиться победно (!)”, “солнцем полна голова”, “воспитание воли”, “самоутверждение”, “устремленность к успеху”, “скорость отрыва”, “вкус победы (!!!)” [18] и т.д. Оцените употребление яркого, богатого, эмоционально насыщенного языка В.Ф. Шаталова и сравните с унылыми, стереотипными заклинаниями о компетенциях, деятельности, развитии. Его система учит получать глубокое удовлетворение от преодоления серьезных трудностей, учение — это не развлечение, это тяжелый труд. Увлечь тяжелым трудом постижения знаний — вот главная и основная задача педагогики В.Ф. Шаталова. Остальное приложится, настоящую науку освоят потом и легко, когда освоят основы наук, когда научатся преодолевать трудности и получать от этого глубокое эмоциональное удовлетворение, когда натура А.В. Суворова, выраженная в науке побеждать, становится движущей силой. Совсем другим законам, чем проповедуют математики, следует эта система обучения любым наукам, не только математике.

Тогда как требования в виде ВТУ-принципа, принципа научности и строгости, принципа развития, деятельности, освоения информации в отрыве от основной, главной задачи образовательной системы (перестройки психики и сознания) имеют мало или вообще не имеют смысла.

В то же время, в современных образовательных учреждениях, включая школы и университеты, давно внедрены более плодотворные подходы, которые заключаются в ознакомлении учащихся с последними достижениями науки. Например, учителя физики знакомят школьников с важнейшими концепциями, такими как квантовая физика, теория строения атома и теория относительности. Такой подход к обучению, опирающийся на актуальные научные достижения, имеет реальное основание и множество преимуществ. Он не только делает образовательный процесс более живым и увлекательным, но и помогает учащимся видеть практическое воплощение тех знаний, которые они получают, учат адекватно воспринимать и анализировать сложные явления современного мира. Это создает прочную фундаментальную базу, на которой можно строить дальнейшее развитие аналитического и критического мышления. Сами математики смутно осознают неприменимость ВТУ-принципа в школе, учебники, написанные на основе этого принципа, не применяются, они остаются невостребованными. Невозможно в согласии с этим принципом, например, учить школьников геометрии Лобачевского, различным аксиоматическим основаниям геометрии. Знакомить можно, а учить этим сложным предметам психология не позволяет. Физики давно это осознали и знакомят школьников со сложнейшими дисциплинами, но диалектически иначе, соблюдая единство цели, средств и методов, соблюдая требования психологии и никогда, в течении 100 лет, не делали из этого проблемы.

Система В.Ф. Шаталова — это в миниатюре школа Платона. Она учит пользоваться описательной, объяснительной и доказательной речью, открытыми выступлениями в дискуссиях. Отличается применением опорных сигналов, что значительно повышает продуктивность мышления (а не памяти, как ошибочно полагают некоторые критики). Овладение описательной речью создает зону ближайшего развития в виде объяснительных текстов. Овладение описательной и объяснительной речью подготавливает зону ближайшего развития в виде доказательной речи. Доказательная речь наиболее трудна для освоения, поэтому две предыдущие фазы необходимы для успешного овладения третьей и эта проблема успешно решена им. Изучение гуманитарных дисциплин: литературы, истории, географии, с помощью описательных текстов. Обучение физике, с помощью объяснительных текстов и решением большого количества разноуровневых физических задач. Обучение арифметике, алгебре, геометрии с помощью доказательных текстов и решения большого количества разноуровневых задач, от стандартных до олимпиадных, по продуманной методике. Систематическое и системное, периодическое обобщающее и углубляющее повторение, углубляющее мышление, делающее его гибким, а не укрепление памяти, как это утверждают критики. Первичность знаний и на их основе отработка технических автоматизированных навыков. Сначала сообщаются и осваиваются знания (6 этапов), затем отрабатываются автоматизированные навыки (6 этапов). Овладение знаниями создает зону ближайшего развития в виде автоматизированных навыков. Формирование широких умений на основе комплекса навыков. Комплексы навыков подготавливают зону ближайшего развития для широких умений. Стремление к овладению дисциплинами формируется как единый сплав: знаний, навыков и умений. Освоенные знания и умения подготавливают зону ближайшего развития для владения дисциплиной, но, разумеется, владение есть удел учителей, после того как они 10-15 лет будут преподавать эту дисциплину, причем активно, заинтересовано и творчески. Обилие оценок и гласность оценок. Право (**обязанность**) исправлять низшую оценку на лучшую. Право на жизнь сначала (жизнь без груза прошлых ошибок), как средство огромной **побуждающей** силы. Постоянный, непрерывный, всесторонний контроль ситуации в виде листов, опорных конспектов, динамики оценок, магнитофонных записей (теперь почему не использовать более продуктивный вид контроля — видеозаписи?). Ежедневный и всеохватывающий контроль знаний, навыков и умений Воспитание привычки к самоконтролю. Самостоятельное оценивание (опять же можно использовать открытые видеозаписи). Участие родителей в процессе обучения и привычка к самостоятельному преодолению трудностей. Строгая систематизация учебных знаний (по разным дисциплинам), выделение главного и отбрасывание второстепенного и третьестепенного. (Очень мудро!). Активная форма сотрудничества в коллективе с товарищами и бесконфликтная состязательность. Уроки открытых мыслей, организация публичных интеллектуальных (и физических) соревнований, викторин, развитие публичной артистичности и способности к перевоплощению, способности длительно выступать с речью перед внимательной и критической публикой, умение отстаивать мысль, бороться за честь команды. Мышление изолированного учащегося и перед классом, на сцене, перед зрителями, да еще с импровизациями, — совершенно разное. Мышление перевоплощается, протекает по разным законам, включаются механизмы подсознательного (кроме Шаталова, этого, кажется, никто не отмечает и тем более не использует). Использование элементов внушения, массового гипноза. Ученику постоянно, настойчиво внушается мысль о его высокой способности к обучению, никаких сомнений в этом не допускается, что сопрягается с высокой, можно сказать жестокой требовательностью (кажется, эта двойственная природа методики — один из малозаметных, но ключевых факторов успеха всей системы обучения). Систематически, несколько раз в неделю (4-5 раз) проводились уроки физкультуры. Видно стремление к органическому слиянию физической и умственной культуры. Система обучения сверхэффективна только при одновременном обучении всем предметам по данной методике. Невозможно достичь сверхбольших успехов, обучаясь по системе одной дисциплине. Достигается синергетический эффект усиления, возрастания эффективности обучающего процесса взаимодействия, интеграции, слияния разрозненных процессов в мощную, исторически обусловленную слаженную систему. Все, что находится в системе, в равной мере относится и к учителю. Лекционное мастерство, словарный запас, выразительность и образность речи, умение рассказывать понятно и с разных точек зрения, владение словом, текстом, опорными сигналами (а не выступление по презентациям и писанному). Иметь твердые знания, вести несколько разнородных дисциплин (математика, физика, история, география, астрономия), помнить структуру тысячи задач и т.д. Есть в книге глава "Врачу — излечись сам"!!!

Но все же многое важное не изучается. Законы диалогов, законы ораторского красноречия, законы эмоциональной перестройки не изучались, не изучались законы стихосложения, не изучается и не используется театральная деятельность (а при наличии доступных средств видеозаписи, это становится намного полезней и интересней!!!). Не изучались философия, этика и эстетика. Формальная логика, диалектика не изучаются в системе Шаталова. Далеко, однако мы ушли назад за пару тысяч лет. Средневековье затмило мраком светлые образы греческой культуры, и так придавило цивилизацию, что до сих пор мы не можем оправиться и медленно встаем с колен.

Тем не менее, В.Ф. Шаталов более, чем кто-либо из современных педагогов, постиг и правильно применил в образовании диалектику старого и нового, правильно используя доступные для его времени информационные технологии (магнитофон, киноаппараты, наглядные пособия, в том числе электронные), и впоследствии видео аппаратуру, выражая большое сожаление, что в его время не было смартфонов, электронных досок, компьютеров. Сегодня все это есть, но отсутствует понимание их правильного использования.

Вообще алгоритм обучения В.Ф. Шаталова (некоторой достаточно широкой темы, (малого блока [4-6, 10]) таков: рассказ учителя, два, три, а то и четыре раза, с разными вариациями, под разным углом зрения и скоростью. Столько, сколько надо, чтобы услышал самый непонятливый (знакомство с новым материалом). Повторение учителем узловых моментов по плакатам (в настоящее время можно на электронной доске, на планшетах) с опорными сигналами. Фиксация основного, главного и отделение второстепенного, третьестепенного, выделение **логического каркаса**. Повторение учениками дома материала по уменьшенной копии опорных сигналов, у каждого должны быть цветные копии в бумажном и в настоящее время в электронном виде (упрочнение знаний, 1 этап). Работа с учебником и опорными сигналами, подготовка к письменному ответу (углубление знаний). Письменное воспроизведение (письменная речь) листов с опорными сигналами (упрочнение знаний, 2 этап). Ответы (устная речь) и прослушивание устных ответов товарищей по опорным сигналам в разных вариациях (развивается внутренняя речь, понимание речи, аудирование, придается гибкость знаниям и мышлению). Решение поясняющих примеров (осмысление навыка). Решение задач учителем и проба сил в самостоятельном решении (сознательные, но неумелые навыки). Практика в решении задач в соединении с опорными сигналами (автоматизация навыков). Обилие решаемых обязательных задач по плашкам (высокоавтоматизированный навык, формирование умений). Свободная работа с плашками, опорными сигналами, учебниками, пособиями, решение многих избыточных, сложных олимпиадных задач (высокоразвитые умения). Достижение главной цели — удовлетворения и наслаждения от учебы и познания, от преодоления познавательных трудностей (я все могу!).

Цель обучения достигается, тем, что цветные яркие опорные сигналы, письменная и живая устная речь, обширная разнородная деятельность в созданных условиях постоянно поддерживаемого эмоционального подъема, приводят к слаженному взаимодействию и взаимному усилению обоих сторон мышления, наглядно-образной и абстрактно-логической, опирающихся на эмоционально-волевую сферу.

Образно-наглядное мышление, образная память, а также связанные с образами эмоции (правое полушарие головного мозга) и абстрактно-логическое мышление (левое полушарие головного мозга) функционируют совместно (при использовании современных тестов все это богатство теряется). Методика природосообразности В.Ф. Шаталова предписывает работать с текстами, текстовыми задачами, развивает умение кодировать и раскодировать знания и информацию, вследствие чего появляется способность **генерировать** тексты, что является необходимым условием развития способностей к анализу и синтезу. При этом использует индукцию (при освоении нового) и дедукцию (при повторении) [4-6]. Система сложна по необходимости, но нельзя ожидать, что можно построить простую эффективную образовательную систему. Всякие поверхностные попытки изобрести простую эффективную систему обречены на провал.

Мнение о том, что система Шаталова представляет собой лишь натаскивание и способствует развитию репродуктивных методов мышления, иногда высказывают. Критики чаще всего обращают внимание на то, что в этом подходе большое значение придается запоминанию и воспроизведению информации (на самом деле знаний, а не информации!), что якобы ограничивает возможности для креативного и критического мышления. Критики системы Шаталова подчеркивают необходимость развития именно творческих методов мышления, которые позволяют учащимся не только усваивать знания, но и применять их в нестандартных ситуациях, генерировать новые идеи и находить оригинальные решения. Однако забывается при этом, что развития и качественных изменений, стадии творчества можно достичь только количественными накоплениями при изучении дисциплин, этим и занимается его система обучения. Качественные сдвиги появляются автоматически, как следствие количественных накоплений и не нужно никаких неестественных, надуманных, вымученных приемов, примеров которых полон и интернет, да и в учебниках много подобных "изобретений". Как говорил родоначальник философии Сократ, заставляйте учеников говорить и искать истину в спорах, и вы воспитаете гения. Он воспитал Платона, а тот, в свою очередь, Аристотеля.

Современные особенности информационного века состоят в том, что. начинают использовать видеоуроки, видеолекции, но без применения эффективной природосообразной методики. Применение ИТ аудио-, видео технологий становятся еще более разнообразными, но абсолютно игнорируются возможность развития речи, а значит, и мышления. Совсем не понимается диалектика обучения, напротив, получил распространение контроль знаний на надуманных, неинтересных тестах, вызывающих отвращение к тому, чтобы даже читать их, не то, что их решать. Современные, примитивные, по сути, выхолощенные по методическому содержанию новации абсолютно игнорируют последовательные три фазы овладения описательной, объяснительной и доказательной формами речи, и следовательно, не развивают три формы мышления, приводят к их примитивизации и деградации. Отсутствует широкое применение математических пакетов MathCAD, GeoGerba и др. Их практически не используют для формирования навыков и умений в практической образовательной деятельности.

Виртуальные физические лаборатории с успехом конкурируют с реальными лабораториями. Физики применяют виртуальные лаборатории по всем 26 разделам, **сочетая** с натурными экспериментами, и такое сочетание вызывает глубокий интерес у учащихся, сочетаются разные виды деятельности. В математике нет вовсе подобных систем, ни для одного из 15 разделов математики, ни для одного раздела геометрии или тригонометрии (но есть математические пакеты). В учебниках нет учета объективного строения математического знания в виде взаимосвязанных пятнадцати разделов и тем [6] (рис.3). Физики и химики учитывают объективное строение естественно-научного знания, математики не учитывают, наоборот наблюдается хаос в подаче учебного материала. Дистанционное образование начинает формироваться и стремительно осваивается, но без использования эффективной методики, стихийно, сумбурно, как правило, без учета психологических закономерностей освоения нового учебного материала. Идея о центральной роли функциональной зависимости в математике и в естествознании практически не используется или используется неудачно, без взаимосвязи с пятнадцатью разделами математики и решением текстовых задач. Весьма слабо используется идея о том, что решение текстовых задач является едва ли не самым главным при обучении математике, особенно при корреляции с физическими и химическими задачами, развивая речь и мышление. Изучение информатики и программирования используется в школе несистематично, отсутствуют яркие методические разработки в рамках эффективной природосообразности.

Вместо того, чтобы правильно реализовать методические, хорошо известные природосообразные принципы русской школы, дело представляют так, что нужно на голом месте изобрести, нафантазировать какой-нибудь удобный, новый по сути способ, выпячивая, то деятельностный принцип, то принцип развития, компетентностный подход, тесты, разноуровневое обучение, метод проектов, проблемное обучение, исследовательские методики, технология дебатов, блочно-модульное обучение, игровые методы, методы сотрудничества, индивидуальные траектории, коммуникативно-информационные методы, то здоровье сберегающие методики, то кейс-методы, то технология мастерских, метод обратных классов, геймификация и тому подобный несусветный вздор. Ничто из перечисленного не доводится “до ума”. Разумеется можно, при должной настойчивости, превратить каждый из способов в некоторый полезный методический прием, но не более того. Еще можно легко найти и придумать методики, которые никак не связаны с прошлыми достижениями, проверенными практикой, и которые никакого особого содержания не имеют и являются впечатляющими наглядными примерами, до какого абсурда доходят педагоги, дилетантски подходя к таким серьезным вопросам, как построение эффективной образовательной системы в условиях информатизации, не желая понять диалектику старого и нового, без знаний психологии обучения.

В последнее время появились новации в виде проблемного обучения или развивающего обучения. Ученика пытаются поставить в условия первооткрывателя, исследования некоторых новых для него проблем. Но беда в том, что невозможно найти ту грань, где кончается посильные проблемы и начинаются непосильные, как правило даются проблемы, далеко превосходящие силы учащегося и кроме вреда такое проблемное обучение ничего не может принести, никакого развития не происходит, а происходит как раз обратное тому, чего хотят добиться, происходит дебилизация учащихся. Это в диалектике происходит часто, причина и следствие меняются местами, истина становится ложью, и наоборот, тогда как количественные накопления сразу автоматически приводят к развитию.

В рамках обсуждения обучения математике часто высказывают мнения, в частности, “чистые” математики. Они подчеркивают важность того, чтобы учащиеся научились различать, что является верным, а что — неверным, уметь отличать предположения от строгих доказательств и знать, какой уровень строгости необходим для различных математических утверждений. Все это, разумеется, так, имеет огромное значение. Но дело в том, что наиболее эффективным методом передачи этих способностей, является диалектический подход, основанный на накоплении количественного опыта. Это означает, что ученики должны постепенно осваивать математические концепции через накапливание знаний, решение многочисленных задач и проведение анализа. До самой науки, до ее оснований нужно “дорасти”. Тогда как попытки сразу научить строгой математике, начиная с оснований, ни к чему не приводят, вызывают непонимание и как следствие нежелание ее учить. Нет никакой необходимости выдумывать противоречащие диалектике познания и психологии принципы.

Сделаем замечание общего характера: дело обстоит не в том, что виноваты информационные технологии и их надо запретить, это невозможно сделать. Они действительно несут в себе отрицательные качества, но так было всегда, проникновение в тайны ядра породило ядерное и термоядерное оружие, способное тысячу раз уничтожить все живое на земле, выход человека в космос грозит переносом ядерного оружия за пределы земли. Создание быстродействующих компьютеров тоже привлекается на службу для достижения военных целей, решения в будущей войне будут принимать компьютеры. Прогресс — это не только положительная динамика, прогресс, антитезис объективно всегда несет в себе как положительные качества, так и отрицательные, вопрос упирается в правильное использования новых достижений: как использовать достижения науки, на благо или во вред человечеству?

Диалектические методы эффективного, природосообразного обучения стоят выше над всякого рода частными изолированными принципами, они поглощают такие принципы, как: принцип высокого теоретического уровня, принцип развития, деятельностный принцип, принцип формирования компетенций или универсальных компетенций. Эффективность систем обучения зависит от правильного использования психологии, ее законов: законов взаимодействия первой и второй сигнальных систем, законов функционирования эмоционально-волевой сферы, законов теоретической и практической деятельности и прочее.

На развитие личности решающим образом влияет эмоционально-волевая сфера, о которой мало стали вспоминать. Советский психолог академик К.К. Платонов практически готовил летчиков-испытателей и первых космонавтов, руководил институтом, авиашколой, работал в академии наук. Его труды включают и деятельность, и развитие и многое другое, труды коллектива глубоки и содержательны. У него отражены и знания, и навыки, и умения, и анализ, и синтез, внимание и память, опыт личности, характер, способности, психические состояния, психические процессы, и деятельность тоже есть. Богатое наследие он оставил [17], и разумеется, кто читал и сопоставлял достижения Платонова и надуманные теории Пиаже и Выготского [19-21], несомненно убедятся, что ни о каком сравнении не может идти и речи. Связь наглядно-образной и абстрактно-логической сфер, кроме В.Ф. Шаталова, еще хорошо осмыслила Е. Васильева — доктор педагогических наук, выпускница Кубанского государственного университета [22]. Это поняла еще один автор — Татьяна Камянова [23], сама она владеет 8 языками и преподает в университетах в Германии, обучает русскому и английскому, а в России учит английскому и немецкому, деятельность осуществляется в университетах. Мы не можем здесь углубляться в вопросы психологии, поэтому ограничимся выводом.

Диалектика и психология утверждают, что все эффективные достижения классических способов обучения в неизменном виде войдут в будущую эффективную систему обучения как фундамент, на котором строится новая, более широкая и разнообразная система, с использованием новейших инструментов информационных технологий и действительно новых проверенных практикой достижений психологии и психолингвистики. Тезис: принцип природосообразности приводит к развитию и прогрессу. Антитезис: новейшие информационные технологии вне рамок природосообразности приводят негативным последствиям, к обратному процессу — регрессу. Новый тезис: информационные технологии в рамках природосообразности приведут к более значительному и устойчивому развитию. Это подразумевает, что IT-технологии могут действовать как катализаторы прогресса в обучении, тогда только, если они будут внедряться с учетом естественных процессов обучения и развития.

Если информационные технологии не помогают создать более эффективную систему обучения, возникает вопрос: “В чем тогда их ценность?” Это подчеркивает важность продуманного подхода к внедрению новых технологий в образование. Часто утверждается, что природосообразные методы обучения несовместимы с современными технологиями. Однако следует помнить, что вся человеческая деятельность исторически имеет и антиприродную сторону и порождает негативные последствия, примеров чему множество. Информационные технологии не являются исключением. Главная задача заключается в том, чтобы использовать все изобретения с пользой и блокировать их негативные последствия.

У нас есть все необходимые части для создания эффективной образовательной системы, концепции математического и естественно-научного образования. Основой должно быть классическая русская школа, классическая психология К.К. Платонова [13]. Есть уникальная система В.Ф. Шаталова, построенная на классике и обогащенная достижениями психолингвистики [18]. Есть методика петербургской школы 239 обучения способных школьников [9]. Мы также знаем природосообразные методики обучения математики Г.Г. Левитаса [24], Р.Г. Хазанкина [25], А.А. Окунева [26], в которых содержится много действительно ценного, которые интегрируют естественные принципы в образовательный процесс, делая его доступным и понятным. Павел Виктор создал на основе информационных технологий систематический структурированный курс физики [11], основанный на классических принципах, при этом адаптируясь к современным условиям, которые предоставляет информационно-коммуникационная среда. Есть старые учебники, проверенные методики, актуальность которых в настоящее время значительно возросла. Эти перечисленные подходы действительно построены на диалектическом природном развитии, а не на узко-научных принципах развития, искусственно сконструированных Ж. Пиаже и Л.С. Выготским и оторванных от классики. Есть современные учебники "МГУ — школе", отвечающие требованиям диалектики и принципам познания, претендующие на универсальную методику, но они требуют значительной переработки части алгебраических систем для соответствия диалектическому закону периодичности (рис. 3), бо́льшему соответствию природосообразным принципам русской школы в условиях информатизации и цифровизации всех сторон жизни [4, 5].

В основе системы обучения лежит психология и диалектика, освоенная еще Платоном 2500 лет назад и сформулированная в общезначимом виде Гегелем 200 лет назад, и успешно примененная уже дважды в условиях кризиса науки. Современное образование лежит в родах и, корчась в страшных муках, в четвертый раз рожает диалектику уже более 50 лет и никак выдавить из себя ее не может. Ее надо применить в четвертый раз. Стремительное развитие ИТ несут в себе и большой вред, и большую пользу. Стоит задача нивелировать отрицательные стороны и использовать сильные стороны информационных технологий.

История и прогресс, движущими силами которых являются внутренние противоречия между противоположностями, направлены только вперед. Они не возвращаются назад, каждая новая историческая ситуация находится на односторонней оси времени и порождает свои характерные проблемы. Какие бы трудности впереди не ожидались, можно двигаться только, через тернии, вперед. Противоположные тезисы И.П. Костенко и В.А. Рыжика, могут быть объединены в новый, целостный тезис: на основе прошлых эффективных систем обучения (прежде всего русской и советской), построить новую еще более эффективную систему образования с использованием средств информационных технологий. Да, будут учить по-другому, мы не знаем в деталях, чему и как, но определенно знаем, что без фундамента прошлого нельзя построить ничего ценного.

Автор подчеркивает, что данная статья является результатом продолжительных дискуссий с двумя известными педагогами России — Игорем Петровичем Костенко и Валерием Адольфовичем Рыжиком. Их влияние на формирование взглядов автора настолько значимо, что они могли бы считаться соавторами этой работы. Однако следует отметить, что статья не отражает единую общую точку зрения.

Послесловие

Важно отметить, что формальная и диалектическая логики представляют собой два разных подхода к пониманию того, как развиваются знания. Формальная логика основана на законе исключённого третьего, который утверждает, что для любого суждения истинно либо само суждение, либо его отрицание, исключая любую третью возможность. Диалектическая логика, напротив, рассматривает реальность как динамический процесс развития во времени. В ней закон исключённого третьего трансформируется: противоречие между противоположностями (тезисом и антитезисом) является движущей силой, порождающей синтез и возникновение третьего как результата развития. Диалектический синтез предполагает творческое снятие противоположностей, что невозможно в рамках статической формальной логики. Таким образом, формальная логика анализирует «как мы мыслим», а диалектическая — «как мы познаём мир». В сфере образования это различие проявляется следующим образом: Тезис (A) классическая природосообразная педагогика с её традиционными ценностями и методами. Антитезис ($\neg A$) — антиприродные современные информационно-ориентированные, цифровые образовательные методики. Формально-логический подход требует признания одной из парадигм исключительно истинной, а другой — ложной. Диалектический же подход интерпретирует обе парадигмы как противоположные стороны (полюса) в едином временно́м процессе исторического развития. Развитие образовательной системы лежит на пути синтеза — творческого преобразования, интегрирующего сильные стороны обеих парадигм. Обе парадигмы верны (смотря с какой точки зрения, в каких рамках посмотреть). Следует отметить, что закон исключённого третьего не выполняется в многозначных логиках, интуиционистской логике, квантовой логике, при анализе парадоксальных или нечётко определённых высказываний.

Принцип диалектического развития применим и к самой диалектике. Тезисом является утверждение об истинности и абсолютности законов диалектики в рамках достигнутого уровня познания. Однако с развитием производительных сил и под давлением новых научных достижений неизбежно возникнет антитезис, указывающий на ограниченность или неполноту этих законов. Синтезом станет создание новой (мета)теории развития, которая интегрирует достижения формальной и диалектической логик (вберёт их в себя) и объяснит явления, не полностью охватываемые современными законами диалектики. Как справедливо отмечал Ф. Энгельс, абсолютная истина есть процесс, а не догма, данная навсегда. Законы диалектики не будут отброшены, но подвергнутся диалектическому "снятию" противоречия — уточнению и включению в более общую и совершенную систему познания.

Литература

[1] Гегель Георг. - Инфориационный ресурс.

[2] Энгельс Ф. Диалектика природы. - 2017. - 343 с.

[3] Ленин В.И. Материализм и эмпириокритицизм. - 2021. - 377 с.

[4] Лебедев К.А. Применение педагогических ценностей русской школы для изучения математики // Математическое образование. - 2023. - № 2 (106). - с. 3-11.

[5] Лебедев К.А. Применение педагогических ценностей русской школы для изучения математики. (Окончание) // Математическое образование. - 2023. - № 3 (107). - с. 5-13.

[6] Электронный учебник-справочник. - Информационный ресурс.

[7] Костенко И.П. Реформы образования России 1918-2018 годы. - 2018. - 191 с.

[8] Костенко И.П. Качество математического образования в свете исторической ретроспективы. - 2013. - 502 с.

[9] Рыжик В.И. Задача для учителя математики. - 2017. - 400 с.

[10] Лебедев К.А. Видео-доклад "Применение педагогических ценностей русской школы для изучения математики". - Научно-методический семинар при МГУ "Математика и информатика в средней и высшей школе", 14 декабря 2023 года.

[11] РЛ Физика. Электронный видеокурс Павла Виктора. - Информационный ресурс.

[12] Пуанкаре А. Избранные труды. - Информационный ресурс. - 395 с.

[13] Платоновская Академия. Википедия. - Информационный ресурс.

[14] Костенко И.П. - Информационный ресурс.

[15] Пойя Д. Как решить задачу. - 1959. - 206 с.

[16] Пойя Д. Математическое открытие. - 1970. - 430 с.

[17] Платонов К.К., Голубев Г.Г. Психология. - 1977. - 246 с.

[18] Шаталов В.Ф. Соцветие талантов. - 2001, Т1. - 380 с. - Т2. - 352 с.

[19] Пиаже Ж. Речь и мышление ребенка. - 1994. - 526 с.

[20] Пиаже Ж. Психология интеллекта. 2004. 192 с.

[21] Выготский Л.С. Мышление и речь. - 1995. - 352 с.

[22] Васильева Е. Суперпамять, или как запомнить, чтобы вспомнить. - Краснодар, 2003. - 334 с.

[23] Камянова Т. Успешный английский. Системный подход. - 2008. - 507 с.

[24] Левитас Г.Г. Математическое образование. Общедоступная электронная библиотека. - Инфориационный ресурс.

[25] Хазанкин Р.Г. Математическое образование. Общедоступная электронная библиотека. - Инфориационный ресурс.

[26] Окунев А.А. Математическое образование. Общедоступная электронная библиотека. - Инфориационный ресурс.

Лебедев Константин Андреевич,
заведущий кафедрой "Теоретическая физика
и компьютерные технологии", физико-
технического факультета Кубанского
государственного университета, г. Краснодар,
доктор физико-математических наук.

E-mail: klebedev@yandex.ru

К реалистическим традициям преподавания математики

В. М. Федосеев, Э. В. Карпухин

В статье авторы обращают внимание на значимость сохранения и развития реалистических традиций как одной из опор математического образования и школьников и студентов. Суть реалистических традиций заключается в привлечении для объяснения базовых математических понятий их эмпирических источников, а также в использовании лабораторного и конкретно-индуктивного методов обучения.

В качестве примера рассматривается применение лабораторного исследования при изучении темы "Способы задания функции".

Характеристика проблемы

Одному человеку, который не знал ни музыки, ни геометрии, ни астрономии, но желал стать его учеником, древнегреческий философ Ксенократ ответил: "Ступай прочь: тебе не на что опереться для овладения философией!". А на что можем опереться мы при обучении математике? Вопрос вовсе не риторический, а сугубо практический и насущный, потому что в настоящее время многие традиции, на которые опиралось преподавание математики, нарушены.

Неоднократно приходилось слышать жалобы своих коллег, что современные учащиеся не понимают базовых понятий науки, да так, что просто непонятно, как такое вообще возможно. Ведь здравый-то смысл у них, по крайней мере, должен быть! На производстве жалуются, что выпускники колледжа затрудняются в съёме показаний приборов с указателем в виде стрелки. Проблема возникает в тех случаях, когда стрелка находится в промежуточном положении между делениями, обозначенными цифрами. Как обстоят дела с математикой у нынешних школьников, смотри, например, красноречивую журнальную заметку [1] Е. Бунимовича. Как преподаватели со стажем работы, можем засвидетельствовать, что столь глупые ошибки студентами делались и ранее, то есть до широкого распространения персональных компьютеров и всякого рода электронных гаджетов. Но они не были столь удручающими и не носили столь массового характера. По крайней мере, большинство школьников знало, какое математическое действие нужно выполнить, чтобы найти половину длины отрезка.

А может не стоит так уж строго винить учащихся и, возможно, в современной методике учения математике тоже допускается ошибка? Не упускаем ли мы чего-то важного, без чего понимание математики большинством студентов становится крайне затруднительным, а может быть и невозможным? Попробуем разобраться.

Для чего студентов технологического колледжа учат математике? Ведь не только для того, что "она ум в порядок приводит", но и потому, что это объективная наука, формирующая теоретическое мышление как инструмент познания реальности. Следовательно и в курсе математики до́лжно исходить из того положения, что математика — это наука о свойствах окружающего мира. Как писал академик В.И. Арнольд: "Математика — это часть физики, эксперимент в которой дёшев. Теоремы математики суть законы природы". Дж. Фон Нейман считал, что "эмпирическая подпитка была необходимым условием сохранения неувядаемой молодости и жизнеспособности математики в прошлом и что аналогичное утверждение останется верным и в будущем» [2, с. 95]. Дидактическое значение такого подхода к математике состоит в том, что в нём приобретается надёжная опора преподавания этой науки. На практике это значит, что при обучении нужно внимательнее относиться к методическому применению моделей реальных объектов и явлений, опытно-индуктивного подхода к исследованию задачи и других атрибутов эмпирических наук. Не следует забывать также старый дидактический принцип: "В голову попадает только то, что проходит через руки". По нашему убеждению, добиться усвоения математических понятий и теорем большинством студентов по-другому вряд ли и возможно. Абстракции математики зачастую слишком сложны для понимания, их назначение неясно и здесь требуются ссылки на эмпирические источники, необходима работа ученика не только "головой", но и "руками". Наконец, как ещё убедить учащихся и студентов в том, что математика это не вид спорта, не забава, а объективная наука, имеющая безусловное практическое значение.

Рассмотренный подход к преподаванию математики не является новым. О нём многократно писали и пишут в учебно-методической литературе. С начала XX века он методически разрабатывался под именем реалистического образования и лабораторного метода обучения. Ещё полвека тому назад автора учили, в целом, методически следуя этому направлению. В советском математическом образовании традиции реалистического образования были очень сильны и служили надёжной опорой преподавания. Однако в настоящее время принципы реалистического образования не то чтобы совсем уж забыты. Лабораторные работы по математике для школьников включены, например, в учебник алгебры и анализа М.И. Башмакова [3, с. 322—328]. Но на практике они в значительной степени игнорируются и, самое главное, методически не развиваются. Свою задачу авторы видят в том, чтобы в очередной раз напомнить своим коллегам о целесообразности сохранения реалистических традиций преподавания математики, которые на всех уровнях следует методически поддерживать и развивать, как одну из значимых опор математического образования.

Пример лабораторного исследования

Некоторые вопросы методологии и методики лабораторного метода обучения математике школьников и студентов авторами ранее уже обсуждались в работах [4, 5]. В настоящей статье рассматривается методика, по которой для изучения смыслового содержания математического понятия используются элементы эмпирического исследования. В виде примера выбрано понятие функции. В математическом анализе — это центральное понятие, вокруг которого и строится весь учебный курс. Рядом методистов [6] было отмечено, что одного только формального определения совершенно не достаточно, чтобы объяснить, что такое функция. По своему происхождению это понятие имеет не только абстрактно-математическую, но и эмпирическую природу. Поэтому вполне естественно изучение функциональной зависимости начинать с задач, в которых следует устанавливать связи между переменными опытным путём, то есть методом измерений, и только после такой вводной части переходить к аналитическим исследованиям и преобразованиям. С учётом сказанного предлагается задание следующего содержания.

> Имеется квадрат $ABDO$ (см. рис. 1) с длиной стороны 6 см. Примем за независимую переменную x (аргумент) длину отрезка прямой OD; за зависимую переменную y (функцию) — длину отрезка, по которому прямая AX пересекает квадрат $ABDO$. Требуется исследовать функциональную зависимость между переменными x и y. С этой целью:
>
> 1) сделайте необходимые геометрические построения, определяющие значения переменных;
>
> 2) путём измерения длин указанных отрезков составьте таблицу значений заданной функции;
>
> 3) по численным данным составленной таблицы постройте эмпирическую кривую — график функции;

4) определите свойства и выведите аналитическое выражение зависимости $y = f(x)$;

5) найдите значение предела функции при $x \to \infty$;

6) сравните эмпирическую и теоретическую кривую графика исследуемой функции.

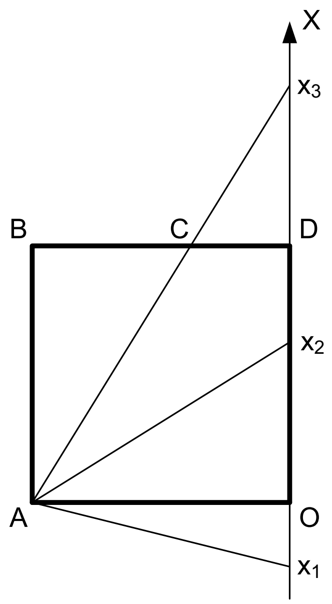


Рис. 1.

Решение

Для решения задачи делаем геометрические построения, аналогичные показанным на рис. 1. При выполнении чертежей принимаем, например, сторону квадрата равной 6 см и делаем их как можно аккуратнее, потому что от этого зависит точность определения значений функции. Отсчёт значений аргумента будем вести от точки O. Очевидно, при любом отрицательном $x < 0$ (на рисунке этому соответствует положению точки X_1) будет $y = 0$. Задаваясь значениями аргумента и выполняя необходимые построения и измерения, составим следующую таблицу исследуемой функции $y = f(x)$ (все измерения выполнены в сантиметрах с точностью до миллиметра).

Таблица

x	0	2	4	6	8	10	12	14
y	6	6,3	7,2	8,5	7,5	7.0	6,7	6,5

На этом, собственно, заканчивается опытно-экспериментальная часть исследования. Назначение этого этапа пропедевтическое, имеющее целью показать механизм, по которому возникает зависимость между переменными задачи. Геометрический смысл переменных позволяет придать решению наглядное представление. Поделимся впечатлениями от применения подобной формы учебной работы на занятиях. Главное, студенту удаётся втолковать, что понятие функции, вообще говоря, не только математическое. Функция — это процесс, и функциональную зависимость между переменными можно исследовать экспериментальным путём. А для студентов технологического колледжа результаты эксперимента, как правило, более убедительны, чем выводы, полученные путём дедукции. Что вполне естественно при их выборе специальности. Но не следует забывать об интересах преподаваемой дисциплины и для этого нужно убедить студента в целесообразности этапа математического исследования, после которого и получают то, что в математике принято называть функцией. Таким действиям посвящены дальнейшие этапы работы, носящие традиционно теоретический характер.

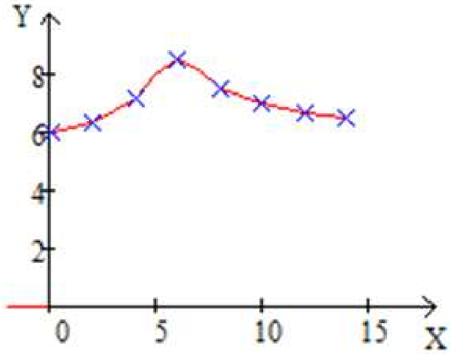


Рис. 2.

На рис. 2 приведён график (эмпирическая кривая) исследуемой функции, построенный по данным приведённой выше таблицы. По графику сформулируем свойства рассматриваемой функции согласно стандартной схеме исследований:

1) Функция $y = f(x)$ определена для любых действительных значений аргумента x. В точке $x = 0$ график функции имеет разрыв, и понятно, почему он возникает;

2) При $x < 0$ очевидно имеем $y = 0$, при неотрицательных значениях аргумента значения функции ограничены интервалом [6; 8,5);

3) Функция возрастает на интервале $[0; 6)$ и убывает на интервале $(6; +\infty)$;

4) При $x = 6$ функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение, равное длине диагонали квадрата (примерно 8,5);

5) При законе стремления аргумента $x \to +\infty$ согласно рис. 1 значения функции приближаются к длине стороны квадрата, равной 6 см. В этом случае говорят, что прямая $y = 6$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$, и пишут предельное равенство

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 6.$$

Важное в анализе понятие предела функции возникает естественным путём, как инструмент исследования поведения функции, и к тому же получает наглядное толкование.

Вывод аналитического выражения проводим с учётом того, что рассматриваемая функция имеет три ветви в зависимости от того, на какой отрезок попадает точка X. По рис. 1 прямая AX_1 не пересекает квадрата $ABCDO$, поэтому первая ветвь кривой имеет уравнение: $y = 0$. Длину отрезка AX_2 находим по теореме Пифагора

$$AX_2 = \sqrt{36 + x^2} = 6\sqrt{1 + \left(\frac{x}{6}\right)^2}.$$

Прямая линия AX_3 пересекает квадрат по отрезку AC, длину которого находим из подобия треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle AX_3O$:

$$AC = \frac{AB}{OX_3} \cdot AX_3 = 6\sqrt{1 + \left(\frac{6}{x}\right)^2}.$$

Объединяя все три ветви, аналитическое выражение исследуемой функции запишем в виде следующего равенства

$$y = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 6\sqrt{1 + \left(\frac{x}{6}\right)^2} \text{ при } 0 \le x < 6, \\ 6\sqrt{1 + \left(\frac{6}{x}\right)^2} \text{ при } x \ge 6. \end{cases}$$

Воспользуемся теперь графическим редактором и построим точный график функции $y = f(x)$ (для этого как раз нужно аналитическое выражение зависимости между переменными). Вид теоретической кривой показан на рис. 3.

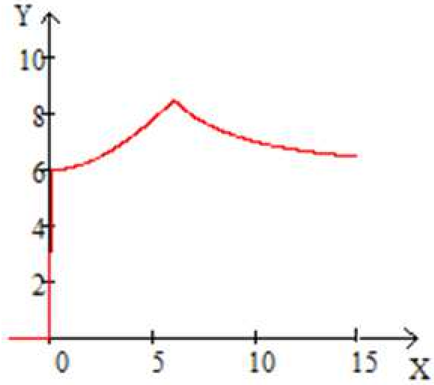


Рис. 3.

Теоретическая кривая по сравнению с эмпирической кривой на рис. 2 имеет то отличие, что в точке $x = 6$ график исследуемой функции имеет угловую точку. Удалось обнаружить новое качество объекта задачи, что является хорошим аргументом в пользу теоретического исследования.

Таким образом, все части задания выполнены, и задача полностью решена. Итоговым результатом работы является аналитическое выражение для исследованной функциональной зависимости и выводы по работе.

В процессе выполнения лабораторной работы мы исходили из текстового описания переменных, имеющих геометрический смысл. Путём измерений получили таблицу значений рассматриваемой функции, а затем применяли имеющийся математический арсенал для аналитического исследования зависимости между переменными задачи. Данный вид учебной деятельности может быть использован на практическом занятии при изучении темы “Способы задания функции”. Варьируя размеры квадрата $ABCDO$ или, используя вместо квадрата прямоугольники, можно обеспечить многовариантность заданий.

Упражнение

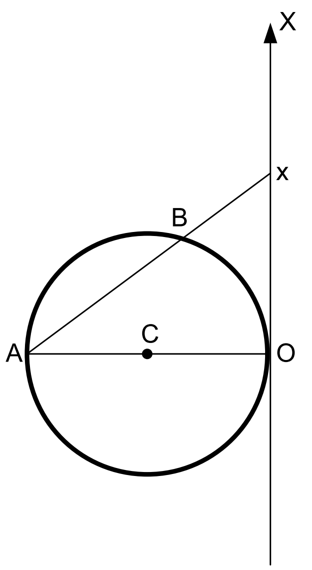


Рис. 4.

В качестве упражнения рекомендуется по фигуре, приведённой на рис. 4, исследовать аналогичным образом зависимость между переменными: аргумент x — длина отрезка OX и функция y — длина хорды AB окружности. Предполагается сначала путём измерений составить таблицу значений заданной функции, построить её график, определить свойства и только потом приступить к выводу аналитического выражения функции. Отличительной особенностью задачи является использование в качестве образующей функцию геометрической фигуры не квадрата, а окружности.

Ответ: $y = \dfrac{4R^2}{\sqrt{4R^2 + x^2}}$, где R — радиус окружности.

Литература

[1] Бунимович Е. Потому что перпендикуляр. Записки на полях школьных тетрадей // Дружба народов. - 2018. - № 11. - С. 228-234.

[2] Нейман Дж. фон. Математик // Природа. - № 2 (810). - С. 88-95.

[3] Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. - М.: Просвещение, 1993. - 351 с.

[4] Федосеев В.М. Лабораторные работы по математике с развитием темы // Математика в школе. - 2010. - № 6. - С. 62-69.

[5] Федосеев В.М. Компетентностный подход к профессиональному образованию и реалистические традиции математического образования // Профессиональное образование в России и за рубежом. - 2016. - № 3. - С. 182-188.

[6] Костенко И.П. Вузовский учебник математики: узел проблем // Педагогика. - 2005. - № 5. - С. 98–109.

Федосеев Виктор Михайлович,
преподаватель математики Технологического колледжа
Пензенского государственного технологиче6ского
университета, кандидат технических наук, доцент.
Почётный работник Высшей школы.

E-mail: fedoseev_vik@mail.ru

Карпухин Эдуард Владимирович,
доцент кафедры “Математика и физика”
Пензенского государственного технологического
университета, кандидат технических наук, доцент.

E-mail: edvar1@rambler.ru

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца и его применение для решения экстремальных задач

А. Э. Атаманчук

В данной статье представлено детальное исследование неравенства Коши-Буняковского-Шварца (КБШ), его различных форм, способов доказательства и, главное, эффективного применения для решения экстремальных задач. Рассмотрены как классические, так и более сложные задачи, демонстрирующие мощь и гибкость этого неравенства в различных областях математики.

1. Введение

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ) является одним из фундаментальных неравенств играющих важную роль в различных областях высшей математики. Его мощь заключается в возможности оценивать верхнюю границу скалярного произведения векторов (или интеграл произведения функций), что позволяет находить максимальные и минимальные значения выражений в широком спектре задач. Далее будут рассмотрены различные формулировки КБШ, методы его доказательства и примеры применения для решения экстремальных задач.

2. Формулировка неравенства Коши-Буняковского-Шварца

Существуют различные формы неравенства КБШ, адаптированные к конкретным ситуациям. Наиболее распространенными являются:

1. Неравенство КБШ для конечных сумм.

Для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполняется неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

или, в более компактной форме:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ коллинеарны, то есть существуют числа λ и μ, не равные одновременно нулю, такие, что $\lambda a_i + \mu b_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. Неравенство КБШ для интегралов.

Для любых квадратично интегрируемых функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a, b]$ выполняется неравенство

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right) \cdot \left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right).$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ пропорциональны, то есть существует константа λ такая, что $f(x) = \lambda g(x)$ или $g(x) = \lambda f(x)$ почти всюду на интервале $[a, b]$.

3. Векторная форма.

Для любых векторов a и b в евклидовом пространстве имеем: $|\langle a, b\rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$, где $\langle a, b\rangle$ — скалярное произведение векторов a и b, а $\|a\|$ — норма вектора a ($\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$). Векторная форма является наиболее общей формулировкой КБШ, из которой легко выводятся предыдущие формы неравенства.

3. Доказательство неравенства Коши-Буняковского-Шварца

1. Доказательство для конечных сумм.

Рассмотрим квадратичную функцию от переменной λ:

$$Q(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (a_i\lambda - b_i)^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Поскольку $Q(\lambda)$ является суммой квадратов, она всегда неотрицательна, то есть $Q(\lambda) \geq 0$ для любого λ. Если $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$, то это квадратичная функция, и её дискриминант должен быть неположительным:

$$D = \left(2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0.$$

Разделив на 4 и перенеся члены, получаем неравенство КБШ для конечных сумм:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Если $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$, то все $a_i = 0$, и неравенство тривиально выполняется. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $Q(\lambda) = 0$ для некоторого λ, что означает, что векторы $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ линейно зависимы, то есть существуют числа λ и μ, не равные одновременно нулю, такие, что $\lambda a_i + \mu b_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. Доказательство для интегралов.

Доказательство для интегралов аналогично доказательству для сумм. Рассмотрим функцию:

$$Q(\lambda) = \int_a^b (f(x)\lambda - g(x))^2 \, dx.$$

Эта функция также неотрицательна, и её можно представить как:

$$Q(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b f(x)^2 \, dx - 2\lambda \int_a^b f(x)g(x) \, dx + \int_a^b g(x)^2 \, dx.$$

Применяя рассуждения, аналогичные случаю сумм, получаем неравенство КБШ для интегралов.

3. Доказательство через неравенство треугольника.

Используя векторную форму, видим, что неравенство КБШ следует непосредственно из неравенства треугольника для векторов:

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

Рассмотрим вектор $a = xu$ и вектор $b = v$. Тогда неравенство треугольника дает:

$$\|xu + v\| \leq \|xu\| + \|v\| = |x|\|u\| + \|v\|.$$

Выбирая x таким образом, чтобы $x = -\dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|^2}$, получаем:

$$\|xu + v\|^2 = \langle xu + v, xu + v\rangle = x^2\langle u, u\rangle + 2x\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle =$$

$$= x^2\|u\|^2 + 2x\langle u, v\rangle + \|v\|^2 = \left(\frac{\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^4}\right)\|u\|^2 - 2\left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|^2}\right)\langle u, v\rangle + \|v\|^2 = -\frac{\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2} + \|v\|^2.$$

Поскольку $\|xu + v\|^2 \geq 0$, получаем:

$$\|v\|^2 \geq \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|u\|^2} \quad \text{или} \quad \langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2.$$

Извлекая корень из обеих частей, получаем:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Это и есть неравенство КБШ в векторной форме.

4. Применение неравенства Коши-Буняковского-Шварца для решения экстремальных задач

Неравенство КБШ является мощным инструментом для нахождения максимальных и минимальных значений функций, удовлетворяющих определенным ограничениям. Ключевым моментом является выбор подходящих векторов (или функций) a_i и b_i (или $f(x)$ и $g(x)$), чтобы выразить целевую функцию (ту, максимум или минимум которой ищем) как скалярное произведение (или интеграл произведения).

Пример 1. Найти максимум выражения $x + 2y + 3z$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

Решение. Применим неравенство КБШ к векторам $(a, b) = ((x, y, z), (1, 2, 3))$:

$$(x \cdot 1 + y \cdot 2 + z \cdot 3)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2) \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2).$$

Подставляя данное ограничение, получаем: $(x + 2y + 3z)^2 \leq 14 \cdot (1 + 4 + 9) = 14 \cdot 14 = 196$.
Следовательно: $|x + 2y + 3z| \leq 14$.

Таким образом, максимальное значение выражения равно 14. Равенство достигается тогда, когда векторы (x, y, z) и $(1, 2, 3)$ коллинеарны, то есть $(x, y, z) = \lambda(1, 2, 3)$ для некоторого λ. Подставляя это в ограничение, получаем $\lambda^2 + 4\lambda^2 + 9\lambda^2 = 14$, то есть $\lambda^2 = 1$. Следовательно, $\lambda = 1$ (чтобы получить максимальное значение) и $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Тогда $x + 2y + 3z = 1 + 4 + 9 = 14$.

Пример 2. Найти минимум выражения $x^2 + y^2 + z^2$, если $x + 2y + 2z = 18$.

Решение. Применим неравенство КБШ к векторам $(a, b) = ((x, y, z), (1, 2, 2))$:

$$(x \cdot 1 + y \cdot 2 + z \cdot 2)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2) \cdot (1^2 + 2^2 + 2^2).$$

Подставляя данное ограничение, получаем:

$$324 \leq (x^2 + y^2 + z^2) \cdot 9.$$

Следовательно:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 36.$$

Минимальное значение выражения равно 36. Равенство достигается тогда, когда векторы (x, y, z) и $(1, 2, 2)$ коллинеарны, то есть $(x, y, z) = \lambda(1, 2, 2)$ для некоторого λ. Подставляя это в ограничение, получаем $\lambda + 4\lambda + 4\lambda = 18$, то есть $\lambda = 2$. Тогда $(x, y, z) = (2, 4, 4)$, и $x^2 + y^2 + z^2 = 4 + 16 + 16 = 36$.

Пример 3. Найти максимум интеграла $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx$, если $\int_0^1 f(x)^2\,dx = 1$.

Решение. Применим неравенство КБШ к функциям $f(x)$ и $g(x) = x^2$:

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f(x)^2\,dx\right) \cdot \left(\int_0^1 x^4\,dx\right).$$

Подставляя данное ограничение, получаем:

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\,dx\right)^2 \leq 1 \cdot \left(\int_0^1 x^4\,dx\right) = \int_0^1 x^4\,dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5}.$$

Следовательно:

$$\left|\int_0^1 x^2 f(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом, максимальное значение интеграла равно $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Равенство достигается тогда, когда функции $f(x)$ и $g(x) = x^2$ пропорциональны, то есть $f(x) = \lambda x^2$. Подставляя это в ограничение, получаем:

$$\int_0^1 \lambda^2 x^4\,dx = 1 \;\Rightarrow\; \lambda^2 \int_0^1 x^4\,dx = 1 \;\Rightarrow\; \lambda^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = 1 \;\Rightarrow\; \lambda = \pm\sqrt{5}.$$

Поскольку мы ищем максимальное значение интеграла $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx$ а $x^2 \geq 0$ на $[0, 1]$, мы выбираем положительное значение для λ, то есть $\lambda = \sqrt{5}$. Таким образом, $f(x) = \sqrt{5}x^2$. Тогда

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{5}x^4\,dx = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Неравенство КБШ часто используется в сочетании с другими математическими приемами. Например, его можно комбинировать с методом множителей Лагранжа.

5. Заключение

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца является мощным инструментом для решения экстремальных задач в различных областях математики. Владение этим неравенством позволяет значительно упростить решение многих задач, а также развивает математическую интуицию и способность к поиску оптимальных решений. Понимание различных форм неравенства, методов его доказательства и, главное, умение правильно применять его в конкретных задачах является важным навыком для студентов и школьников, изучающих математику.

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
3. Прасолов В.В. Задачи и примеры по алгебре. - М.: МЦНМО, 2007.
4. Шарыгин, И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач. - М.: Просвещение, 1989.

Атаманчук Артём Эдуардович,
учитель математики,
Средняя Школа № 10, г. Речицы (Беларусь).

E-mail: artem.atamanchuk0@gmail.com

Медленно сходящиеся итерации

Е. И. Знак

В статье выводятся асимптотические оценки скорости сходимости итерационных последовательностей точек конечномерного пространства в случаях, когда последовательность сходится существенно медленнее, чем любая геометрическая прогрессия.

Регулярно используемое ниже понятие эквивалентных числовых последовательностей определяется здесь следующим образом. Последовательности $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(w_k)_{k=1}^{\infty}$ называются *эквивалентными* (обозначение: $u_k \sim w_k$), если существует такая стремящаяся к единице последовательность $(\gamma_k)_{k=1}^{\infty}$ и такое натуральное m, что $u_k = w_k\gamma_k$ для всякого $k \geq m$.

Сначала проанализируем следующую вариацию на тему современных олимпиадных задач про рекурсивно заданные числовые последовательности. Для произвольных положительных a, b, c с условием $c^a < \frac{\pi}{2}$ рассмотрим последовательность $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ с рекурсивным определением посредством системы

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_{m+1} = x_m(\cos(x_m^a))^b \end{cases}$$

Требуется показать, что

$$x_n \sim \frac{A}{n^s} \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

для некоторых положительных A и s.

Напомним, что для всякой исчезающе малой последовательности $(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}$ последовательность её частичных средних арифметических также является исчезающе малой:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Действительно, если $\delta > 0$, $|\varepsilon_j| < \frac{\delta}{2}$ при $j > m_1$ (для некоторого целого положительного m_1) и $m_2 = 1 + \left[\frac{2(|\varepsilon_1| + \ldots + |\varepsilon_{m_1}|)}{\delta}\right]$, то при $N > m_1 + m_2$ получается, что

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k\right| \leq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m_1}|\varepsilon_j| + \frac{1}{N}\sum_{j=m_1+1}^{N}|\varepsilon_j| \leq \frac{\delta}{2N}\cdot\frac{2}{\delta}\sum_{j=1}^{m_1}|\varepsilon_j| + \frac{1}{N}\sum_{j=m_1+1}^{N}\frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2N}\cdot m_2 + \frac{N-m_1}{N}\cdot\frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2},$$

что и требовалось.

Переходя непосредственно к заданной последовательности, отметим, что поскольку $0 < x_{k+1} < x_k < \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{a}}$ для любого номера k (легко обосновывается по индукции), то положительная последовательность $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ имеет некоторый неотрицательный предел l и, при этом, $l < \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{a}}$.

Из уравнения $l = l \cdot (\cos(l^a))^a$ и неравенств $0 \leq l^a < c^a < \frac{\pi}{2}$ следует, что эта последовательность является исчезающе малой. Используя теперь классическую условную символику, получаем, что

$$(\cos(t^a))^b = \left(1 - \frac{t^{2a}}{2} + t^{2a}o(1)\right)^b = 1 - \frac{b}{2}t^{2a} + t^{2a}o(1)$$

при $t \to 0$. Поэтому $x_{j+1} = x_j - \frac{b}{2}\, x_j^{2a+1} + x_j^{2a+1} \cdot \alpha_j$ для некоторой исчезающе малой последовательности $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ (заметим дополнительно, что здесь очевидно $\frac{x_{j+1}}{x_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} 1$). Отсюда получается, что

$$\frac{1}{x_{j+1}^{2\alpha}} - \frac{1}{x_j^{2\alpha}} = \frac{1 - \left(\frac{x_j+1}{x_j}\right)^{2\alpha}}{1 - \frac{x_{j+1}}{x_j}} \cdot \frac{x_j - x_{j+1}}{x_j x_{j+1}^{2\alpha}} = \frac{1 - \left(\frac{x_j+1}{x_j}\right)^{2\alpha}}{1 - \frac{x_{j+1}}{x_j}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{x_j}{x_{j+1}}\right)^{2\alpha} \left(\frac{b}{2} - \alpha_j\right) \xrightarrow[j\to\infty]{} 2\alpha \cdot 1^{2\alpha} \cdot \left(\frac{b}{2} - 0\right).$$

Итак,

$$\frac{1}{x_{j+1}^{2\alpha}} - \frac{1}{x_j^{2\alpha}} = ab + \varepsilon_j$$

для некоторой исчезающе малой последовательности $(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}$. Отсюда для всякого $n \geq 2$ имеем

$$\frac{1}{x_n^{2\alpha}} - \frac{1}{x_1^{2\alpha}} = ab(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k = n\left(ab + \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_k\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Поэтому

$$n^{\frac{1}{2\alpha}} \cdot x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (ab)^{-\frac{1}{2\alpha}}.$$

Разобранный пример примыкает к известным (см. [2] на странице 14 и [3] на странице 87) асимптотическим представлениям для последовательностей, задаваемых рекурсиями

$$x_{n+1} = \sin(x_n)\ (0 < x_1 < \pi), \qquad y_{n+1} = \ln(1 + |y_n|), \qquad z_{n+1} = \operatorname{arctg}|z_n|, \qquad t_{n+1} = \frac{|t_n|}{1 + \sqrt{|t_n|}},$$

а именно,

$$x_k \sim \sqrt{\frac{3}{k}}, \qquad y_k \sim \frac{2}{k}, \qquad z_k \sim \sqrt{\frac{3}{2k}}, \qquad t_k \sim \frac{4}{k^2},$$

Рассмотренное выше допускает развитие и обобщения в разных направлениях. Во-первых, имеются возможности выхода далеко за пределы степенных зависимостей — этому посвящены нижеследующие теорема 1 и теорема 2. Во-вторых, имеются пути конструирования многомерных обобщений — этому посвящены три последние теоремы.

Теорема 1. *Для некоторого $a > 0$ рассмотрим возрастающую в некоторой окрестности нуля функцию $g \in C[0;\, a]$, удовлетворяющую условиям $g(0) = 0$ и $0 < g(x) \leq x$ при $x \in (0; a]$.*

Далее, для некоторого $x_1 \in (0; a]$ определим рекурсивным равенством $x_{k+1} = x_k - g(x_k)$ последовательность $(x_j)_{j=1}^{\infty}$. Эта последовательность является исчезающе малой и если, при этом, две последовательности $(g(x_{i+1}))_{i=1}^{\infty}$ и $(g(x_i))_{i=1}^{\infty}$ (сдвиг нумерации на единицу) эквивалентны, то существует такая положительная и стремящаяся к единице последовательность $(\gamma_j)_{j=1}^{\infty}$, что имеет место тождество $x_n \equiv f(n\gamma_n)$, где определённая на луче $[0; +\infty)$ функция f является обратной к функции h, определяемой на промежутке $(0; a]$ тождеством

$$h(t) \equiv \int_t^a \frac{dt}{g(\tau)}.$$

Доказательство. Из заданных неравенств достаточно просто вытекает то, что данная итерационная последовательность является невозрастающей и неотрицательной. Предельный переход с учётом заданных условий показывает, что эта последовательность стремится к нулю. Отметим теперь равенства

$$h(x_{k+1}) - h(x_k) = h'(y_k)(x_{k+1} - x_k) = -\frac{1}{g(y_k)} \cdot (-g(x_k)) = \frac{g(x_k)}{g(y_k)}, \text{ где } x_{k+1} < y_k < x_k.$$

Согласно условию монотонности, начиная с некоторого номера в некоторой окрестности нуля выполняется двойное неравенство $g(x_{k+1}) < g(y_k) < g(x_k)$. Переходя к пределу в двойном неравенстве

$$\frac{g(x_{k+1})}{g(x_k)} < \frac{g(y_k)}{g(x_k)} < 1$$

и используя эквивалентность $g(x_{k+1}) \sim g(x_k)$ из условия, получаем, что разность $h(x_{k+1}) - h(x_k)$ стремится к единице при $k \to \infty$. Это означает, что существует такая положительная исчезающе малая последовательность $(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}$, что $h(x_{k+1}) - h(x_k) \equiv 1 + \varepsilon_k \quad (k \in N)$.

Следовательно, для любого целого $n \geq 2$ выполняется равенство

$$h(x_n) = n\left(1 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\varepsilon_j + \frac{h(x_1)}{n}\right),$$

что и доказывает утверждение теоремы.

В некотором роде типичным примером функции g из условия теоремы может служить функция, определяемая для некоторого $0 < a$ на отрезке $[0; a]$ тождеством

$$g(x) \equiv \begin{cases} cx^s e^{-\frac{b}{x^p}}, & 0 < x \leq a; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

для произвольно взятых действительных положительных b, c, p и любого действительного s.

Нетрудно проверить, что для всякого $a > 0$ функция g является бесконечно дифференцируемой на отрезке $[0; a]$, $g^{(j)}(0) = 0$ для любого $j \geq 0$ и в некоторой окрестности нуля эта функция возрастает и выпукла вниз. Поэтому найдётся такое $a > 0$, что $0 < cx^s e^{-\frac{b}{x^p}} < x$ при $x \in [0; a]$. Это обеспечивает убывание и стремление к нулю последовательности $(x_j)_{j=1}^{\infty}$, определяемой рекурсивным равенством $x_{k+1} = x_k - g(x_k)$. При этом

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = 1 - \frac{g(x_k)}{x_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 - g'(0) = 1 - 0 = 1, \quad \frac{g(x_{i+1})}{g(x_i)} = \left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)^s e^{b\left(\frac{1}{x_i^p} - \frac{1}{x_{i+1}^p}\right)},$$

$$\frac{1}{x_i^p} - \frac{1}{x_{i+1}^p} = \frac{\left(\frac{x_i+1}{x_i}\right)^p - 1}{\frac{x_{i+1}}{x_i} - 1} \cdot \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i x_{i+1}^p} = \frac{\left(\frac{x_i+1}{x_i}\right)^p - 1}{\frac{x_{i+1}}{x_i} - 1} \cdot \frac{-cx_i^s e^{-\frac{b}{x_i^p}}}{x_i x_{i+1}^p} =$$

$$= \frac{\left(\frac{x_i+1}{x_i}\right)^p - 1}{\frac{x_{i+1}}{x_i} - 1} \cdot \left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)^{-p} \cdot (-c)x_i^{s-1-p} e^{-\frac{b}{x_i^p}} \xrightarrow[i\to\infty]{} p \cdot 1^{-p} \cdot (-c) \cdot 0 = 0.$$

Таким образом, последовательности $(g(x_{i+1}))_{i=1}^{\infty}$ и $(g(x_i))_{i=1}^{\infty}$ (сдвиг нумерации на единицу) эквивалентны.

Например, для последовательностей $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(w_k)_{k=1}^{\infty}$ с рекурсиями

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - u_n^2 e^{-\frac{1}{u_n}} \\ u_1 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} w_{n+1} = w_n - \frac{1}{2} w_n^3 e^{-\frac{1}{w_n^2}} \\ w_1 = 1 \end{cases}$$

имеют место эквивалентности

$$u_k \sim \frac{1}{\ln k} \quad \text{и} \quad w_k \sim \sqrt{\frac{1}{\ln k}}$$

соответственно.

Определённая в некоторой окрестности нуля U функция φ будет называться *асимптотически однородной*, если для любых эквивалентных исчезающе малых последовательностей $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(\beta_k)_{k=1}^{\infty}$ точек из U последовательности $(\varphi(\alpha_k))_{k=1}^{\infty}$ и $(\varphi(\beta_k))_{k=1}^{\infty}$ также являются эквивалентными исчезающе малыми.

Например, для всякого $p > 0$, любого $s \in R$ и любой $\gamma \in C[0;1]$ с условием $\gamma(0) \neq 0$, определённая на $(0;1)$ посредством тождества $\varphi(x) \equiv x^p(-\ln x)^s\gamma(x)$ функция φ является асимптотически однородной.

Теорема 2. *Для некоторого $a > 0$ рассмотрим возрастающую в некоторой окрестности нуля функцию $g \in C[0;a]$, дифференцируемую в нуле, являющуюся асимптотически однородной и удовлетворяющую условиям*

$$g(0) = g'(0) = 0 \quad \text{и} \quad 0 < g(x) \leq x \quad \text{при} \quad x \in (0;a].$$

Затем для некоторого $x_1 \in (0;a]$ определим рекурсивным равенством $x_{k+1} = x_k - g(x_k)$ последовательность $(x_j)_{j=1}^{\infty}$. Эта последовательность является исчезающе малой и существует такая положительная и стремящаяся к единице последовательность $(\gamma_j)_{j=1}^{\infty}$, что имеет место тождество $x_n \equiv f(n\gamma_n)$, где определённая на луче $[0;+\infty)$ функция f является обратной к функции h, определяемой на промежутке $(0;a]$ тождеством

$$h(t) \equiv \int_t^a \frac{dt}{g(\tau)}.$$

Доказательство. Выделим лишь те детали, которые отличают это доказательство от доказательства предыдущей теоремы. Отметим, что из условия следует, что

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = 1 - \frac{g(x_k)}{x_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 - g'(0) = 1 - 0 = 1,$$

то есть последовательности $(x_{i+1})_{i=1}^{\infty}$ и $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ (сдвиг нумерации на единицу) эквивалентны. Опять рассмотрим равенства

$$h(x_{k+1}) - h(x_k) = h'(y_k)(x_{k+1} - x_k) = -\frac{1}{g(y_k)} \cdot (-g(x_k)) = \frac{g(x_k)}{g(y_k)},$$

где $x_{k+1} < y_k < x_k$.

По условию монотонности, начиная с некоторого номера, в некоторой окрестности нуля выполняется двойное неравенство

$$g(x_{k+1}) < g(y_k) < g(x_k).$$

Переходя теперь к пределу в двойном неравенстве

$$\frac{g(x_{k+1})}{g(x_k)} < \frac{g(y_k)}{g(x_k)} < 1$$

и используя асимптотическую однородность функции g (из условия этой теоремы), получаем, что разность $h(x_{k+1}) - h(x_k)$ стремится к единице при $k \to \infty$. Остальная часть рассуждений совпадает с окончанием доказательства предыдущей теоремы.

Например, для последовательности $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ с рекурсией

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n}{2\ln x_n} \\ \\ x_1 = \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

имеет место эквивалентность

$$x_k \sim e^{-\sqrt{k}}.$$

Эта последовательность итераций стремится к нулю быстрее любой степенной последовательности, но медленнее любой геометрической прогрессии.

Переходя к многомерным обобщениям, рассмотрим некоторые итерационные последовательности в $\mathbb{R}^m$, для которых асимптотическая оценка скорости сходимости имеет степенной тип. Рекурсия $z_{(n+1)} = g(z_n)$ будет задаваться с помощью гладкого отображения $g : D \to D$, которое в рассматриваемой замкнутой области $D \subset R^m$ имеет единственную неподвижную точку.

В данном контексте можно, не умаляя общности, считать эту неподвижную точку нулём $\mathbf{0} = (0; \ldots; 0) \in \mathbb{R}^m$. Как хорошо известно, неравенство $\sup\limits_{x \in D \setminus \{0\}} \frac{||g(x)||}{||x||} < 1$ легко приводит к показательной оценке сходимости итерационной последовательности. В этой же статье отображение g, как правило, будет обладать свойством $\overline{\lim} \frac{||g(x)||}{||x||} \geq 1$ при $x \to \mathbf{0}$.

Теорема 3. *Положим $\tau > 0$ и отображение φ: $x \to (\varphi_1(x); ...; \varphi_m(x))$ куба $[0;1]^m$ в незамкнутый куб $(0;1]^m$ является непрерывным. Рассмотрим на $[0;1]^m$ отображение*

$$f : (x_1; \ldots; x_m) \to (y_1; \ldots; y_m),$$

определённое равенствами

$$y_i = x_i - x_i^{1+\tau} \cdot \varphi_i(x_1, \ldots, x_m) \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Тогда для любой точки $z_1 \in (0;1)^m$ последовательность $(z_j)_{j=1}^{\infty}$, задаваемая рекурсивно равенством $z_{k+1} = f(z_k)$, сходится к $\mathbf{0} = (0; \ldots; 0) \in \mathbb{R}^m$ и для некоторого положительного $\rho > 0$ имеет место эквивалентность

$$||z_n|| \sim \frac{\rho}{n^{\frac{1}{\tau}}}$$

при $n \to \infty$. И при этом $\rho \geq \left(\frac{m^{\frac{1+\tau}{2}}}{||\varphi(0)||\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}}$

Доказательство. Положим $z_j = (z_{j1}; \ldots; z_{jm})$, тогда

$$z_{k+1,i} = z_{ki} - z_{ki}^{1+\tau} \cdot \varphi_i(z_k).$$

Так как $0 < z_{1i} < 1$, то

$$z_{ki} - z_{ki}^{1+\tau} < z_{2i} < z_{1i}$$

и, следовательно, $z_{2i} < 1$ и $z_{2i} > z_{1i}(1 - z_{1i}^{\tau}) > 0$.

Аналогичным образом получается (рассуждением по индукции), что

$$z_{j+1,i} < z_{ji} < 1 \quad \text{и} \quad z_{j+1,i} > 0$$

для всякого j.

Итак, $z_{ji} \xrightarrow[j \to \infty]{} u_i$, где $u_i \in [0;1]$. Предельный переход в рекурсивном тождестве из условия теоремы приводит теперь к равенствам

$$u_i = u_i - u_i^{1+\tau} \cdot \varphi_i(u_1, \ldots, u_m) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Поскольку $\varphi_i > 0$, то $u_i = 0$ для каждого номера i.

Положим $a_{ji} = \varphi_i(z_{j1}, \ldots, z_{jm})$ и $\varphi_i(0, \ldots, 0) = b_i$.

В силу непрерывности отображения $\varphi : [0;1]^m \to 0;1]^m$ последовательность $(a_{ji})_{j=1}^{\infty}$ сходится к b_i (и, при этом, $b_i > 0$). Таким образом,

$$z_{k+1,i} = z_{ki} - z_{ki}^{1+\tau} a_{ji}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{z_{k+1,i}^{\tau}} - \frac{1}{z_{ki}^{\tau}} = \frac{z_{ki}^{\tau} - z_{k+1,i}^{\tau}}{z_{ki}^{\tau} z_{k+1,i}^{\tau}} = \frac{z_{ki}^{\tau}(1 - (1 - z_{k+1,i}^{\tau})^{\tau})}{z_{ki}^{\tau} z_{k+1,i}^{\tau}} =$$

$$= \frac{1 - (1 - \tau z_{ki}^{\tau} a_{ki} + z_{ki}^{\tau} \varepsilon_{ki})}{z_{ki}^{\tau}(1 - z_{ki}^{\tau} a_{ki})} = \frac{\tau a_{ki} - \varepsilon_{ki}}{1 - z_{ki}^{\tau} a_{ki}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\tau b_i - 0}{1 - 0 \cdot b_i} = \tau b_i$$

$((\varepsilon_k i)_{k=1}^{\infty}$ — некоторая исчезающе малая последовательность). Итак,

$$\frac{1}{z_{k+1,i}^{\tau}} - \frac{1}{z_{ki}^{\tau}} = z b_i + \gamma_{ki}$$

для некоторой исчезающе малой последовательности $(\gamma_k i)_{k=1}^{\infty}$. Отсюда для всякого $n \geq 2$ имеем

$$\frac{1}{z_{ni}^{\tau}} - \frac{1}{z_{1i}^{\tau}} = z b_i (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{ki} \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n z_{ni}^{\tau}} = z b_i \quad \text{и} \quad ||z_n||^{2\tau} n^2 = (z_{n1}^2 + \ldots + z_{nm}^2)^{\tau} n^2 =$$

$$= \left(\left(z_{n1} n^{\frac{1}{\tau}} \right)^2 + \ldots + \left(z_{nm} n^{\frac{1}{\tau}} \right)^2 \right)^{\tau} \xrightarrow[k\to\infty]{} \left(\left(\frac{1}{\tau b_1} \right)^{\frac{2}{\tau}} + \ldots + \left(\frac{1}{\tau b_m} \right)^{\frac{2}{\tau}} \right)^{\tau}.$$

Следовательно,

$$||z_n|| \quad \sim \quad \frac{\rho}{n^{\frac{1}{\tau}}} \text{ при } \quad n \to \infty, \quad \text{где}$$

$$\rho = \tau^{-\frac{1}{\tau}} \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^{-\frac{2}{\tau}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Неравенство $\rho \geq \left(\frac{m^{\frac{1+\tau}{2}}}{||\varphi(\mathbf{0})||^{\tau}} \right)^{\frac{1}{\tau}}$ является простым следствием неравенства между обобщёнными средними.

Например, при $m = 2$, система рекурсивных соотношений

$$\begin{cases} z_{k+1,1} = \sin z_{k1} + \left(\sin \frac{z_{k1}}{2} - \frac{1}{2} \sin z_{k1} \right) \cos z_{k2} \\ z_{k+1,2} = \sin z_{k2} + \left(\sin \frac{z_{k2}}{3} - \frac{1}{3} \sin z_{k2} \right) \cos z_{k1} \end{cases}$$

может быть представлена в формате условия теоремы в виде

$$\begin{cases} z_{k+1,1} = z_{k1} - z_{k1}^3 \varphi_1(z_{k1}, z_{k2}) \\ z_{k+1,2} = z_{k1} - z_{k2}^3 \varphi_2(z_{k1}, z_{k2}) \end{cases} \quad \left(\varphi_1(z_{k1}, z_{k2}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{5}{48}, \qquad \varphi_1(z_{k1}, z_{k2}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{19}{162} \right)$$

и, следовательно,

$$z_{n1} \sim \frac{12}{\sqrt{30n}} \quad \text{и} \quad z_{n2} \sim \frac{9}{\sqrt{19n}}$$

(при z_{11}, $z_{12} \in (0;1)$).

Рассмотрим, наконец, две итерационные последовательности в $\mathbb{R}^2$, рекурсивное задание которых имеет принципиальное отличие от конструкции из предыдущей теоремы 3.

В первом случае рассмотрим рекурсию

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - a x_k^{1+p} y_k^{1+q} \\ \\ y_{k+1} = y_k - b x_k^{1+p} y_k^{1+q} \end{cases}$$

с положительными параметрами a, b, p, q.

Положим $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, $bx_1 - ay_1 = \delta$ и $x_1^{1+p} y_1^{1+q} < \min\left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{a}\right)$

Теорема 4. *Порождённые данным рекурсивным описанием последовательности* $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ *и* $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ *являются положительными и убывающими. Если* $\delta < 0$*, то*

$$x_n \sim \frac{A}{n^{\frac{1}{p}}} \quad \text{и} \quad y_n \longrightarrow -\frac{\delta}{a} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

если $\delta > 0$*, то*

$$y_n \sim \frac{B}{n^{\frac{1}{q}}} \quad \text{и} \quad x_n \longrightarrow \frac{\delta}{b} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

если $\delta = 0$*, то*

$$x_n \sim \frac{aC}{n^{\frac{1}{1+p+q}}} \quad \text{и} \quad y_n \sim \frac{bC}{n^{\frac{1}{1+p+q}}} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

для некоторых положительных постоянных A, B, C.

Доказательство. Докажем, что для любых натуральных n и j из неравенств $1 \le j \le n$ следуют неравенства $0 < x_{j+1} < x_j$ и $0 < y_{j+1} < y_j$. Если $n = 1$, то $x_2 < x_1$, $y_2 < y_1$, $x_2 = a\left(\frac{x_1}{a} - x_1^{1+p} y_1^{1+q}\right) > 0$, и $y_2 = b\left(\frac{y_1}{b} - x_1^{1+p} y_1^{1+q}\right) > 0$. Допустим для некоторого натурального m утверждение верно при $n = m$. Тогда $x_m > 0$, $y_m > 0$ и поэтому $x_{m+1} < x_m$, $y_{m+1} < y_m$.

Кроме того, $x_1 > x_m$, $y_1 > y_m$ и, следовательно,

$$x_{m+1} = \frac{ax_m}{x_1}\left(\frac{x_1}{a} - x_1 \cdot x_m^p y_m^{1+q}\right) > \frac{ax_m}{x_1}\left(\frac{x_1}{a} - x_1^{1+p} y_1^{1+q}\right) > 0 \quad \text{и}$$

$$y_{m+1} = \frac{by_m}{y_1}\left(\frac{y_1}{b} - y_1 \cdot x_m^{1+p} y_m^q\right) > \frac{by_m}{y_1}\left(\frac{y_1}{b} - x_1^{1+p} y_1^{1+q}\right) > 0.$$

Таким образом, обе последовательности состоят из положительных чисел и являются убывающими. Из системы рекурсивных соотношений непосредственно вытекает тождество $bx_{k+1} - ay_{k+1} \equiv bx_k - ay_k$. А следовательно, и тождество $bx_n - ay_n \equiv \delta$. Это означает, что при $\delta \ne 0$ хотя бы один из пределов отличен от нуля. С другой стороны, предельный переход в рекурсивных соотношениях позволяет легко сделать вывод, что один из пределов обязательно равен нулю. При $\delta = 0$ имеем две пропорциональные последовательности, каждая из которых фактически (с точностью до несущественных деталей) соответствует условиям теоремы 3. При $\delta \ne 0$ имеем только одну исчезающе малую последовательность. А поскольку вторая последовательность имеет положительный предел, то соответствующая асимптотика первой, исчезающе малой, последовательности обосновывается с помощью выкладки вполне аналогичной выкладке из доказательства теоремы 3.

Во втором случае рассмотрим рекурсию

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - a x_k^{1+p} y_k^q \\ y_{k+1} = y_k - a x_k^p y_k^{1+q} \end{cases}$$

с положительными параметрами a, p, q. Положим $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, $x_1^p y_1^q < \frac{1}{a}$ и $\frac{y_1}{x_1} = b$.

Теорема 5. *Порождённые данным рекурсивным описанием последовательности* $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ *и* $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ *являются положительными и убывающими к нулю. Имеют место эквивалентности*

$$x_n \quad \sim \quad \frac{B}{n^{\frac{1}{p+q}}} \quad \text{и} \quad y_n \quad \sim \quad \frac{C}{n^{\frac{1}{p+q}}} \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

для некоторых положительных постоянных B, C.

Доказательство. Докажем, что для любых натуральных n и j из неравенств $1 \le j \le n$ следуют неравенства $0 < x_{j+1} < x_j$ и $0 < y_{j+1} < y_j$. Если $n = 1$, то $x_2 < x_1$, $y_2 < y_1$, $x_2 = a x_1 \left(\frac{1}{a} - x_1^p y_1^q\right) > 0$, и $y_2 = a y_1 \left(\frac{1}{b} - x_1^p y_1^q\right) > 0$. Допустим для некоторого натурального m утверждение верно при $n = m$. Тогда $x_m > 0$, $y_m > 0$ и, поэтому, $x_{m+1} < x_m$, $y_{m+1} < y_m$.

Кроме того, $x_1 > x_m$, $y_1 > y_m$ и, следовательно,

$$x_{m+1} = a x_m \left(\frac{1}{a} - x_m^p y_m^q\right) > a x_m \left(\frac{1}{a} - x_1^p y_1^q\right) > 0 \quad \text{и}$$

$$y_{m+1} = a y_m \left(\frac{1}{a} - x_m^p y_m^q\right) > a y_m \left(\frac{1}{a} - x_1^p y_1^q\right) > 0.$$

Таким образом, обе последовательности состоят из положительных чисел и являются убывающими. Предельный переход в рекурсивных соотношениях приводит к очевидному выводу, что один из пределов обязательно равен нулю.

Из системы рекурсивных соотношений непосредственно вытекает тождество $\frac{y_{k+1}}{x_{k+1}} \equiv \frac{y_k}{x_k}$. А значит, и тождество $y_n \equiv b x_n$. Таким образом, оба предела равны нулю и первая последовательность, в частности, удовлетворяет рекурсии $x_{k+1} = x_k - a b^q x_k^{1+p+q}$, следовательно, с точностью до несущественных деталей может рассматриваться как частный случай конструкции из теоремы 3, что и доказывает эквивалентности.

Литература

[1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1989.

[2] Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. - М.: Наука, 1980.

[3] Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А., Подкорытов А.Н. Избранные задачи по вещественному анализу. - М.: Наука, 1992.

Знак Евгений Иосифович,
доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Михайловской Военной Артиллерийской Академии, Санкт-Петербург.

E-mail: evgematem@mail.ru

Аксиоматический метод в образовании будущих учителей математики: эквивалентность двух систем аксиом исчисления высказываний

В. И. Игошин

Введение. Чтобы повысить уровень логической грамотности выпускников средних школ, нужно целенаправленно обучать логике будущих учителей математики как на уровне высшего образования, так и на уровне высшего специального образования, и методике её применения при обучении математике.

Цель. Одним из компонентов логической компетентности учителя математики является владение понятиями строгого логического доказательства математических теорем, аксиоматического метода и аксиоматической теории. Эти понятия у будущего учителя математики необходимо сформировать.

Методология, методы, методики. Для формирования этих понятий предлагается использовать формализованное исчисление высказываний.

Результаты. В работе даётся формальное доказательство эквивалентности двух систем аксиом формализованного исчисления высказываний, в процессе которого эти понятия обретают для обучаемого наглядное содержание.

Научная новизна. Дано новое доказательство эквивалентности двух систем аксиом формализованного исчисления высказываний.

Практическая значимость. Технология приводимого доказательства, изучаемая будущими учителями математики, позволит эффективнее сформировать у них владение понятиями строгого логического доказательства математических теорем, аксиоматического метода и аксиоматической теории. После того, как будущие учителя математики сами овладеют этими понятиями, они смогут передать эти знания и умения своим будущим ученикам.

Введение

В статьях [1–3] обсуждается проблема падения уровня логической грамотности (логической культуры, логической компетентности) выпускников средней школы. Многие из них не могут логически грамотно выразить в словесной форме свои мысли и рассуждения. Они не могут понять и воспроизвести чужое доказательство математической теоремы, логически грамотно построить отрицание данного высказывания, обнаружить логическое противоречие в чужих и собственных рассуждениях. Возросло число молодых людей, у которых потребность что-либо доказывать и обосновывать вообще отсутствует.

Одну из причин сложившейся ситуации автор статьи [4, с. 143] видит в том, что “наша школа фактически не уделяет внимания систематическому воспитанию логического мышления учащихся. В школе отсутствует целостный курс логики, и в этом один из печальных недостатков нашего среднего образования”. Автор считает, что “нужно обеспечить целенаправленное ознакомление школьников с основными классическими универсальными законами мышления, добиваться, чтобы учащиеся их понимали и умели применять в своей деятельности”.

Еще одной из причин падения логической грамотности выпускников средних школ, несомненно, является сложившаяся за последние четверть века система преподавания и изучения курса геометрии в школе. Геометрия – важнейшая образовательная, развивающая и воспитывающая учебная дисциплина в школе.

Выдающийся советский математик-геометр и педагог академик АН СССР А.Д. Александров писал об этой дисциплине: “Разворачиваясь в строгой системе точных понятий и выводов, геометрия даёт представление о строго установленной истине, о заключенной в ней необходимости, так что её нельзя ни изменить, ни подделать, ни обойти. Так курс геометрии воспитывает уважение к истине, воспитывает требование доказывать то, что утверждается в качестве истины... В уважении к истине, в требовании доказательства заключается чрезвычайно важный нравственный момент” [5, с. 60].

Аналогично мнение о геометрии как учебной дисциплине известного математика и педагога Д. Пойа: “Необходимо делать различие между более важным и менее важным. Если учащемуся не пришлось ознакомиться с тем или иным частным понятием геометрии, он не так уж много потерял. В дальнейшей жизни эти знания могут не пригодиться. Но если ему не удалось познакомиться с геометрическими доказательствами, то он упустил лучшую возможность ознакомиться вообще с понятием “строгое рассуждение”. Без этого понятия у него не будет настоящей мерки, при помощи которой он сможет оценить претендующие на истинность доказательства, преподносимые ему современной жизнью” [6, с. 87].

Что же происходит сейчас? В современной средней школе понятия доказательства, аксиоматического метода, аксиоматической теории, свойственные, прежде всего, школьному курсу геометрии, практически полностью исчезли. Система ЕГЭ привела к тому, что теоретический материал на уроках геометрии излагается без доказательств, директивно. Отмена устного экзамена по геометрии привела к тому, что учащиеся перестали воспроизводить доказательства, демонстрирующие им логические способы рассуждений, в устной форме, и тем самым перестали обучаться искусству рассуждений, необходимому в любой области деятельности. Основное внимание в курсе геометрии уделяется утилитарному применению теоретических фактов и формул к решению типовых задач, аналогичных тем, которые предлагаются в ЕГЭ. В результате такого реформирования геометрия оказалась отделена от логики и перестала учить доказательствам и рассуждениям.

Но даже если курс математики будет восстановлен в школе на прежнем уровне, тем не менее, автор статьи [4, с. 144] утверждает, что “школьный курс математики ни в коей мере не покрывает общую логику мышления, а затрагивает лишь некоторые, весьма фрагментарные моменты ее специфической части — математической логики”. Следовательно, для того, “”чтобы привести ум в порядок”, математику изучать необходимо, но не достаточно”. “Воспитание подлинной логической культуры должно быть отдано дисциплине “Логика”, содержащей основы науки, которая веками занималась этим” [4, с. 149].

Все же в статье [4] не отрицается полностью роль и значение курса математики в воспитании логического мышления учащихся: “Будем объективны: конечно же, школьная математика в определенном смысле действительно вносит свой вклад в развитие у учащихся умения рассуждать, делать правильные выводы, обосновывать утверждения. Ведь она неотделима от логических математических построений, подспудно опирается на “общелогические” законы. Но с сожалением заметим: это специально никогда явно не акцентируется, не объясняется и не развивается — ни на уроках, ни в учебниках. Увы, общелогические правила не обсуждаются даже тогда, когда в ходе математического доказательства появляется повод, возможность и даже необходимость о них поговорить специально”. И вот здесь автор делает важнейший вывод: “Что, впрочем, не удивительно, ибо сами учителя математики с наукой “Логика” не знакомы” [4, с. 144].

К этому можно добавить, что сами современные молодые учителя, выпускаемые по четырехлетней программе бакалавриата направления “Педагогическое образование” из современных классических университетов, в которых бесследно растворились бывшие педагогические институты, не обладают фундаментальной логической и логико-математической подготовкой, они не владеют логическими понятиями доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории. Курсы геометрии и математической логики сокращены в этих университетах до катастрофических объёмов, а в некоторых университетах курс математической логики для будущих учителей математики исключён вовсе. Это во многом обусловлено тем, что современный ФГОС отпустил составление конкретных учебных планов по направлениям бакалавриата на откуп самим университетам. Мощный сокрушительный удар в этом направлении нанесло бездумное применение очередной образовательной инновации — прикладного бакалавриата.

Спасительной соломинкой в этой катастрофической ситуации мог бы служить внедряемый уровень высшего специального образования, призванный расширить и углубить знания и компетенции, приобретенные на уровне. Но для этого должна быть глубоко продумана преемственная взаимосвязь в образовательных системах двух уровней — высшего образования и высшего специального образования. Некоторые соображения на этот счет в части подготовки учителей математики высказывались автором в [7] — [11].

Возникает фундаментальная методическая проблема: учить логике будущих учителей математики, формировать их логические и логико-дидактические компетенции. При этом, учить как на уровне высшего образования, так и на уровне высшего специального образования, осуществляя преемственную взаимосвязь между этими двумя образовательными уровнями.

Методическая проблема логической подготовки будущих учителей математики в педагогике математики существует давно. На протяжении ряда лет различные авторы направляли свои усилия на рассмотрение различных аспектов этой проблемы. Названия работ [12-21] дают представление о том, каким вопросам логической подготовки будущих учителей математики они посвящены.

В работах [22], [23] автором были сформулированы четыре фундаментальных принципа логики, связанные с обучением математике. Эти принципы, по мнению автора, должны постоянно находиться в поле внимания каждого учителя математики. Учитель должен уметь находить проявления этих принципов при подготовке к каждому уроку по любой теме и демонстрировать их своим ученикам. Эти принципы следующие.

1) Уметь и учить учеников анализировать структуру (строение) математических предложений — определений и теорем, и логически правильно составлять такие предложения.

2) Понимать и учить учеников понимать существо строгого доказательства математической теоремы.

3) Учить методам доказательства математических теорем; уметь и учить учеников отличать строгие математические доказательства от нестрогих, правдоподобных, наглядных, эвристических.

4) Обучать строению и способам построения математических теорий. Здесь, прежде всего, имеется в виду знание и владение аксиоматическим методом — основным методом построения математических (аксиоматических) теорий; владение методами изучения свойств аксиоматических теорий, т.е. методами *метаматематики*.

Некоторым методическим аспектам реализации второго и третьего принципов посвящены работы [12-21] и автора [24], [25], четвёртого — работы автора [26-30].

Целью настоящей статьи является рассмотрение одного аспекта общей проблемы — логико-дидактической подготовки будущих учителей математики, связанного с четвёртым из сформулированных принципов, а именно демонстрация того, как математическая логика формализует интуитивное понимание понятия доказательства математической теоремы. Таким образом, центральными в статье будут понятия аксиоматической теории, аксиоматического метода, строгого математического доказательства, а также способы их введения в процесс логической подготовки будущих учителей математики.

Фундаментальной основой формирования логико-математической культуры (компетентности) будущего учителя математики является курс математической логики. Он как раз и призван сформировать в будущем учителе математики научные основы тех логических понятий, которые лежат в основаниях сформулированных принципов логики в обучении математики. Этот курс делится на две основные части — содержательная математическая логика и формальная (или формализованная) математическая логика. Содержательная логика, берущая свое начало от Аристотеля и преобразованная в математическую логику трудами Дж. Буля и его последователей, развилась из решения практических задач анализа правильности рассуждений. Формальная (или формализованная) математическая логика — плод логико-математического осмысления результатов, полученных содержательной логикой на протяжении многовекового её развития.

В каждой из этих частей имеются разделы: логика высказываний, логика предикатов, аксиоматические теории. Первые два посвящены, образно выражаясь, "чистой логике" (изучаемой, впрочем, математическими методами, т.е. математической логике). Третий раздел посвящен взаимосвязи логики и математики, т.е., собственно, тому, для чего математическая логика и создавалась — анализу математико-логическими методами математических теорий. Основным инструментом анализа математических теорий является аксиоматический метод. В содержательной части курса аксиоматические теории рассматриваются с содержательной точки зрения, в формальной — аксиоматические теории носят формализованный характер. При этом для формализованных аксиоматических математических теорий доказываются теоремы (метатеоремы) большой математической и философской глубины. Эти результаты, полученные в XX веке, представляют собой величайшие достижения в области математического способа познания окружающего мира.

Если содержательные разделы курса математической логики студенты осваивают более или менее удовлетворительно, то с формальными разделами просто беда. Применительно к содержательной логике высказываний это означает, что студенты выучивают определения основных логических операций (вспоминая знания, полученные в курсе информатики), научаются составлять таблицы истинности формул, выявлять тавтологии, проверять формулы на логическое следование. Понятия логически строгого доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории возникают в формальной части курса, когда изучаются формализованные исчисления высказываний и предикатов, а также формальные аксиоматические математические теории.

Формализованное исчисление высказываний как логико-методическая модель, понятия доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории

Формализованное исчисление высказываний представляет собой уникальный пример формальной аксиоматической теории, на котором будущему учителю математики могут быть подробно и со всеми доказательствами продемонстрированы как процесс построения такой теории, так и процесс исследования ее свойств (*метатеория* такой теории). Подобными методическими возможностями не обладает ни курс геометрии, ни даже курс числовых систем [27], [28], который, впрочем, также играет чрезвычайно важную роль в формировании логической компетентности будущего учителя математики.

В настоящей работе рассматривается лишь один аспект исследования аксиоматической теории, связанный с построением этой теории на базе двух различных систем аксиом. При этом будут ярко представлены компоненты логических принципов в обучении математике — понятия доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории.

В качестве исследуемой аксиоматической теории рассмотрим формализованное исчисление высказываний. Выберем для него две системы аксиом. Обе они базируется на двух логических связках $\neg$, $\to$. Первая система Σ_1 состоит из трёх (схем) аксиом:

(A1) $F \to (G \to F)$,

(A2) $(F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$,

(A3) $(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$.

На этой системе аксиом базируется исчисление высказываний в [31, с. 36-48]. Будем называть Σ_1 *системой аксиом Мендельсона.* Вторая система Σ_2 также состоит из трех (схем) аксиом. Первые две — те же самые (A1) и (A2). Третья (схема) аксиом:

$(A3')$ $(\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$. Будем называть ее *системой аксиом Лукасевича-Розенблюма* [32].

Итак, $\Sigma_1 = \{(A1), (A2), (A3)\}$, $\Sigma_2 = \{(A1), (A2), (A3')\}$.

Каждая из приведенных (схем) аксиом представляет собой формулу алгебры высказываний в соответствующей сигнатуре. Из каждой из этих систем аксиом Σ_1 и Σ_2 выводятся (доказываются) новые формулы, которые называются *теоремами.* (Как это делается, подробно описано в учебниках

[33, с. 97-108], [34, с. 122-133], [35, с. 111-124], [36, с. 187-201]). Совокупность всех теорем, выводимых из системы аксиом Σ_1, обозначается $\mathbf{Th}(\Sigma_1)$, а выводимых из Σ_2 — $\mathbf{Th}(\Sigma_2)$. Эти совокупности теорем называются *аксиоматическими теориями, построенными на базе систем аксиом* Σ_1 и Σ_2 соответственно. Задача состоит в том, чтобы доказать, что эти аксиоматические теории совпадают, т.е. $\mathbf{Th}(\Sigma_1) = \mathbf{Th}(\Sigma_2)$. Это означает, что системы аксиом Σ_1 и Σ_2 логически эквивалентны.

Отметим, что в учебниках [33, с. 97-121], [34, с. 122-145], [35, с. 111-139], [36, с. 187-214] и сборниках задач [37, с. 85-95], [38, с. 143-161] построение формализованного исчисления высказываний основывается на системе аксиом Σ_1.

Чтобы доказать равенство $\mathbf{Th}(\Sigma_1) = \mathbf{Th}(\Sigma_2)$, нужно доказать два включения: $\mathbf{Th}(\Sigma_1) \subseteq \mathbf{Th}(\Sigma_2)$ и $\mathbf{Th}(\Sigma_2) \subseteq \mathbf{Th}(\Sigma_1)$.

Лемма 1. $\mathbf{Th}(\Sigma_1) \subseteq \mathbf{Th}(\Sigma_2)$.

Доказательство. Другими словами, требуется доказать, что всякая теорема теории $\mathbf{Th}(\Sigma_1)$ (выводимая из Σ_1) будет также и теоремой теории $\mathbf{Th}(\Sigma_2)$ (выводима из Σ_2). Ясно, что для этого достаточно доказать, что всякая формула из Σ_1 является теоремой теории $\mathbf{Th}(\Sigma_2)$, т.е. выводима из Σ_2, или символически $\Sigma_2 \vdash \Sigma_1$.

В самом деле, тогда каждая формула, выводимая из Σ_1 (т.е. принадлежащая теории $\mathbf{Th}(\Sigma_1)$), будет выводима и из Σ_2, (т.е. будет принадлежать теории $\mathbf{Th}(\Sigma_2)$), потому что в этом случае вывод формулы из Σ_1 легко преобразовать в ее вывод из Σ_2, заменив в нем всюду аксиомы (A1), (A2), (A3) их выводами из Σ_2. При этом аксиомы (A1), (A2) заменять не надо, так как они входят в Σ_2. Достаточно доказать, что (A3) выводима и из Σ_2. Другими словами, если $\Sigma_2 \vdash \Sigma_1$ и при этом $F \in \mathbf{Th}(\Sigma_1)$, т.е. $\Sigma_1 \vdash F$, то $\Sigma_2 \vdash \Sigma_1 \vdash F$, и, следовательно, $\Sigma_2 \vdash F$, т.е. $F \in \mathbf{Th}(\Sigma_2)$.

Итак, докажем, что (A3) выводима и из Σ_2. Для этого нам придётся развить аксиоматическую теорию $\mathbf{Th}(\Sigma_2)$.

Докажем сначала, что следующие пять формул являются теоремами теории $\mathbf{Th}(\Sigma_2)$, построив выводы этих формул из аксиом (A1), (A2), $(A3')$.

а) $\vdash \mathbf{F} \to \mathbf{F}$**,**

Вывод этой формулу опирается только на аксиомы (A1), (A2), и он приведен, например, в [34, пример 15.2, с. 124].

б) $\vdash \neg\mathbf{F} \to (\mathbf{F} \to \mathbf{G})$.

(1) $\neg F \to (\neg G \to \neg F)$ аксиома (A1)

(2) $(\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$ аксиома $(A3')$

(3) $((\neg G \to \neg F) \to (F \to G)) \to (\neg F \to ((\neg G \to \neg F) \to (F \to G)))$ аксиома (A1)

(4) $\neg F \to ((\neg G \to \neg F) \to (F \to G))$ MP: (2), (3)

(5) $(\neg F \to ((\neg G \to \neg F) \to (F \to G))) \to (\neg F \to (\neg G \to \neg F)) \to (\neg F \to (F \to G))$ аксиома (A2)

(6) $(\neg F \to (\neg G \to \neg F)) \to (\neg F \to (F \to G))$ MP: (4), (5)

(7) $\neg F \to (F \to G)$ MP: (1), (6)

в) $\vdash \neg\neg\mathbf{F} \to (\neg\neg\mathbf{F} \to \mathbf{F})$.

(1) $\neg\neg F \to (\neg F \to \neg\neg\neg F)$ теорема **б)**

(2) $(\neg F \to \neg\neg\neg F) \to (\neg\neg F \to F)$ аксиома $(A3')$

(3) $((\neg F \to \neg\neg\neg F) \to (\neg\neg F \to F)) \to [\neg\neg F \to ((\neg F \to \neg\neg\neg F) \to (\neg\neg F \to F))]$ аксиома (A1)

(4) $\neg\neg F \to ((\neg F \to \neg\neg\neg F) \to (\neg\neg F \to F))$ MP: (2), (3)

(5) $(\neg\neg F \to ((\neg F \to \neg\neg\neg F) \to (\neg\neg F \to F))) \to [(\neg\neg F \to (\neg F \to \neg\neg\neg F)) \to$
$\to (\neg\neg F \to (\neg\neg F \to F))]$ аксиома (A2)

(6) $(\neg\neg F \to (\neg F \to \neg\neg\neg F)) \to (\neg\neg F \to (\neg\neg F \to F))$ MP: (4), (5)

(7) $\neg\neg F \to (\neg\neg F \to F)$ MP: (1), (6)

г) $\vdash \neg\neg\mathbf{F} \to \mathbf{F}$.

(1) $\neg\neg F \to (\neg\neg F \to F)$ теорема **в)**

(2) $(\neg\neg F \to (\neg\neg F \to F)) \to ((\neg\neg F \to \neg\neg F) \to (\neg\neg F \to F))$ аксиома (A2)

(3) $(\neg\neg F \to \neg\neg F) \to (\neg\neg F \to F)$ MP: (1), (2)

(4) $\neg\neg F \to \neg\neg F$ теорема **а)**

(5) $\neg\neg F \to F$ MP: (4), (3)

д) $\vdash \mathbf{F} \to \neg\neg\mathbf{F}$.

(1) $\neg\neg\neg F \to \neg F$ теорема **г)**

(2) $(\neg\neg\neg F \to \neg F) \to (F \to \neg\neg F)$ аксиома $(A3')$

(3) $F \to \neg\neg F$ MP: (1), (2)

Далее, отметим, что в теории $\mathbf{Th}(\Sigma_2)$ справедлива теорема о дедукции: *Если* $\Gamma,\ F \vdash G$, *то* $\Gamma \vdash F \to G$. Доказательство этой метатеоремы в теории $\mathbf{Th}(\Sigma_1)$, приведенное в учебниках [33, с. 101-102], [34, с. 125-127], [35, с. 115-117], [36, с. 190-192], опирается только на аксиомы (A1) и (A2), входящие также и в систему аксиом Σ_2).

Используя метатеорему о дедукции, докажем выполнимость в теории $\mathbf{Th}(\Sigma_2)$ следующих трёх выводимостей:

е) $\mathbf{F} \to \mathbf{F},\ \mathbf{G} \to \mathbf{H} \vdash \mathbf{F} \to \mathbf{H}$.

Её доказательство опирается только на аксиомы (A1), (A2) (и на метатеорему о дедукции), и оно приведено, например, в [34, лемма 15.7, с. 128].

ж) $\mathbf{F} \to \mathbf{G} \vdash \neg\mathbf{G} \to \neg\mathbf{F}$.

Обоснуем эту выводимость с помощью следующих утверждений:

(1) $\neg\neg F \to F,\ F \to G,\ G \to \neg\neg G \to \neg\neg F \to \neg\neg G$ дважды применена **е)**

(2) $F \to G \to \neg\neg F \to \neg\neg G$ из (1) ввиду **г)** и **д)**

(3) $\neg\neg F \to \neg\neg G \to \neg G \to \neg F$ из аксиомы $(A3')$ по правилу MP

(4) $F \to G \to \neg G \to \neg F$ из (2) и (3) в силу транзитивности отношения

выводимости $\vdash$ (см. [34, теорема 15.3 в, с. 125])

Чтобы сформулировать следующие выводимости, нам понадобятся два новых понятия в теории $\mathbf{Th}(\Sigma_2)$. Среди исходных логических связок теории $\mathbf{Th}(\Sigma_2)$ отсутствуют конъюнкция $\wedge$ и дизъюнкция $\vee$. Эти связки определяются следующим образом (определения основываются на соображениях, идущих из содержательной алгебры высказываний):

$$(F \wedge G) \quad \textit{означает} \quad \neg(F \to \neg G),$$

$$(F \vee G) \quad \textit{означает} \quad \neg(F \to \neg G).$$

Формулируем третью выводимость:

з) $\mathbf{F},\ \mathbf{G} \vdash \mathbf{F} \wedge \mathbf{G}$.

Обоснуем её с помощью следующих утверждений:

(1) $F,\ \neg\neg(F \to \neg G) \vdash F \to \neg G$ — из теоремы г) по правилу MP

(2) $F,\ F \to \neg G \vdash \neg G$ — правило MP

(3) $F,\ \neg\neg(F \to \neg G) \vdash \neg G$ — из (1) и (2) в силу транзитивности отношения выводимости $\vdash$ (см. [34, теорема 15.3в, с. 125])

(4) $F \vdash \neg\neg(F \to \neg G) \to \neg G$ — по теореме о дедукции из (3)

(5) $\neg\neg(F \to \neg G) \to \neg G \vdash G \to \neg(F \to \neg G)$ — из аксиомы $(A3')$ по правилу MP

(6) $F \vdash G \to \neg(F \to \neg G)$ — из (4) и (5) в силу транзитивности отношения выводимости $\vdash$ (см. [34, теорема 15.3в, с. 125])

(7) $F,\ G \vdash \neg(F \to \neg G)$ — из (6) по правилу MP

Последняя формула $\neg(F \to \neg G)$ и есть $F \wedge G$.

Наконец обоснуем в теории $\mathbf{Th}(\Sigma_2)$ два производных правила вывода.

и) *Правило удаления дизъюнкции по Клини ($\vee$-уд)*:

Если $\mathbf{\Gamma},\ F \vdash H$ и $\mathbf{\Gamma},\ G \vdash H$, то $\mathbf{\Gamma},\ F \vee G \vdash H$.

Чтобы сделать записи более компактными, будем считать, что множество $\Gamma = \varnothing$

(1) $F \vdash H$ — условие

(2) $\vdash F \to H$ — из (1) по теореме о дедукции

(3) $F \to H \vdash \neg H \to \neg F$ — выводимость **ж)**

(4) $\vdash \neg H \to \neg F$ — из (2) и (3) в силу транзитивности отношения выводимости $\vdash$ (см. [34, теорема 15.3в, с. 125])

(5) $\neg H \vdash \neg F$ — из (4) по правилу MP

(6) $G \vdash H$ — условие

(7) $\neg H \vdash \neg G$ — из (6) аналогично (1) — (5)

(8) $\neg F, \neg G \vdash \neg F \wedge \neg G$ выводимость **з)**

(9) $\neg H \vdash \neg F \wedge \neg G$ (т.е.$\neg H \vdash \neg(\neg F \to \neg\neg G)$) из (2) и (3) в силу транзитивности отношения выводимости $\vdash$ (см. [34, теорема 15.3в, с. 125])

(10) $\vdash \neg H \to \neg(\neg F \to \neg\neg G)$ из (9) по теореме о дедукции

(11) $\vdash (\neg H \to \neg(\neg F \to \neg\neg G)) \to ((\neg F \to \neg\neg G) \to H)$ аксиома $(A3')$

(12) $\vdash (\neg F \to \neg\neg G) \to H$ MP: (10), (11)

(13) $\neg F \to \neg\neg G \vdash H$ из (12) по MP

(14) $\neg F \to G, G \to \neg\neg G \vdash \neg F \to \neg\neg G$ выводимость **е)**

(15) $\neg F \to G \vdash \neg F \to \neg\neg G$ из (14) с учетом теоремы **д)**

(16) $\neg F \to G \vdash H$ из (15) и (13) в силу транзитивности отношения выводимости $\vdash$ (см. [34, теорема 15.3в, с. 125])

и) *Правило введения отрицания* ($\neg$*-введ)*:

Если $\mathbf{\Gamma}$, $F \vdash G$ и $\mathbf{\Gamma}$, $F \vdash \neg G$, то $\mathbf{\Gamma}$, $F \vdash \neg F$.

Также будем считать, что множество $\Gamma = \oslash$

(1) $F \vdash G$ условие

(2) $\vdash F \to G$ из (1) по теореме о дедукции

(3) $F \to G \vdash \neg G \to \neg F$ выводимость **ж)**

(4) $\vdash \neg G \to \neg F$ из (2) и (3) в силу транзитивности отношения выводимости $\vdash$ (см. [34, теорема 15.3в, с. 125])

(5) $\neg G \vdash \neg F$ из (4) по правилу MP

(6) $F \vdash \neg G$ условие

(7) $\neg\neg G \vdash \neg F$ из (6) аналогично (1) — (5)

(8) $\neg G \vee \neg\neg G \vdash \neg F$ из (5) и (7) по правилу и)

(9) $\vdash \neg G \vee \neg\neg G$ (т.е. $\vdash \neg\neg G \to \neg\neg G$) теорема а)

(10) $\vdash \neg F$ из (9) и (8) в силу транзитивности отношения выводимости $\vdash$ (см. [34, теорема 15.3в, с. 125])

Теперь наконец, используя правило введения отрицания, можем обосновать следующую выводимость в аксиоматической теории $\mathbf{Th}(\Sigma_2)$:

л) $\neg\mathbf{G} \to \neg\mathbf{F}, \neg\mathbf{G} \to \mathbf{F} \vdash \mathbf{G}$.

(1) $\neg G \to \neg F,\ \neg G \to F,\ \neg G \vdash F$ по правилу МР

(2) $\neg G \to \neg F,\ \neg G \to F,\ \neg G \vdash \neg F$ по правилу МР

(3) $\neg G \to \neg F,\ \neg G \to F \vdash \neg\neg G$ из (1) и (2) по правилу **к)** $\neg$-введ

(4) $\neg\neg G \vdash G$ из теоремы **г)** по правилу МР

(5) $\neg G \to \neg F,\ \neg G \to F \vdash G$ из (3) и (4) в силу транзитивности отношения выводимости $\vdash$ (см. [34, теорема 15.3в, с. 125])

Применив к полученной выводимости л) дважды теорему о дедукции, получим, что следующая формула (А3) является теоремой аксиоматической теории $\mathbf{Th}(\Sigma_2)$:

м) $\vdash (\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$.

Лемма 1 полностью доказана.

Лемма 2. $\mathbf{Th}(\Sigma_2) \subseteq \mathbf{Th}(\Sigma_1)$.

Доказательство. Другими словами, требуется доказать, что всякая теорема теории $\mathbf{Th}(\Sigma_2)$ (выводимая из Σ_2) будет также и теоремой теории $\mathbf{Th}(\Sigma_1)$ (выводима из Σ_1). Ясно, что, как и в лемме 1, для этого достаточно доказать, что всякая формула из Σ_2 является теоремой теории $\mathbf{Th}(\Sigma_1)$, т.е. выводима из Σ_1.

Здесь нужно доказать, что формула $(A3')$ является теоремой аксиоматической теории $\mathbf{Th}(\Sigma_1)$, т.е. выводима из Σ_1. Установим сначала в теории $\mathbf{Th}(\Sigma_1)$ следующую выводимость:

$\neg\mathbf{G} \to \neg\mathbf{F},\ \mathbf{F} \vdash \mathbf{G}$.

Вот соответствующий вывод:

(1) $\neg G \to \neg F$;

(2) F;

(3) $(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$;

(4) $(\neg G \to F) \to G$;

(5) $F \to (\neg G \to F)$;

(6) G.

Двукратное применение к доказанной выводимости метатеорема о дедукции, которая, как отмечалось выше, справедлива в формализованном исчислении высказываний $\mathbf{Th}(\Sigma_1)$, даёт теорему

$\vdash (\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$.

Итак, формула $(A3')$ выводима из системы Σ_1 и значит, $\mathbf{Th}(\Sigma_2) \subseteq \mathbf{Th}(\Sigma_1)$. Лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 вытекает следующая

Теорема. $\mathbf{Th}(\Sigma_1) = \mathbf{Th}(\Sigma_2)$.

Сама эта теорема представляет собой утверждение о равенстве двух аксиоматических теорий, о совпадении двух множеств теорем, т.е. теорему об аксиоматических теориях, или теорему о теоремах.

Такие теоремы называют *метатеоремами.*

Об аксиоматической теории могут быть доказаны и другие (мета)теоремы. Все вместе они образуют *метатеорию* данной аксиоматической теории.

Как уже отмечалось, в учебниках [33, с. 97-121], [34, с. 122-145], [35, с. 111-139], [36, с. 187-214] и сборниках задач [37, с. 85-95], [38, с. 143-161] довольно подробно строится и изучается аксиоматическая теория $\mathbf{Th}(\Sigma_1)$. В частности, устанавливается важнейшее свойство этой теории — её полнота, утверждающее, что теоремами этой теории являются тождественно истинные формулы (тавтологии) соответствующей содержательной алгебры (логики) высказываний и только они. Отсюда вытекают и другие важные свойства аксиоматической теории $\mathbf{Th}(\Sigma_1)$ — непротиворечивость и разрешимость.

Доказанная теорема позволяет сделать вывод о том, что и аксиоматическая теория $\mathbf{Th}(\Sigma_2)$, построенная на базе системы аксиом Σ_2, также обладает этими свойствами — полна, непротиворечива и разрешима. Остаются вопросы, связанные с независимостью систем аксиом Σ_1 и Σ_2, но они уже требуют отдельного решения.

Отметим, что в сборнике задач [39] формализованное исчисление высказываний строится на базе третьей системы аксиом, а в монографиях [40, с. 316-334], [41, с. 470-491] приведён ещё ряд систем аксиом, на базе которых может быть построено формализованное исчисление высказываний. В статьях [30] и [42] приведены по две такие системы аксиом и также доказана их эквивалентность.

Таким образом, формализованное исчисление высказываний представляет собой логико-методическую модель понятий доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории. При работе с этой теорией у будущего учителя математики происходит формирование логических понятий строгого математического доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории. Эти понятия должны затем служить для него ориентиром при изучении и изложении различных разделов математики и, прежде всего, геометрии, которые он будет преподавать своим ученикам.

Заключение

При рассмотрении вопроса о том, как сформировать курс математической логики для будущих учителей математики, целесообразно руководствоваться следующими соображениями. Если состав студентов уровня высшего образования достаточно слабый, то можно ограничиться лишь содержательными разделами курса; если сильный — добавить раздел “Формализованное исчисление высказываний”.

Формальные разделы курса “Формализованное исчисление высказываний”, “Формализованное исчисление предикатов”, “Формальные аксиоматические математические теории” целесообразно изучать на уровне высшего специального образования. Предложить там, в частности, разнообразные системы аксиом для построения формализованных исчислений высказываний и предикатов, доказать их эквивалентность, исследовать системы аксиом на независимость, а возникающие аксиоматические теории на непротиворечивость, полноту, разрешимость. Такая работа с формальными логическими теориями позволит будущим учителям математики взглянуть на понятия строгого математического доказательства, аксиоматического метода, аксиоматической теории с новой необычной точки зрения и тем самым несомненно поможет им лучше понять и осознать эти важнейшие логические понятия, пронизывающие всю математическую науку, неразрывно связанные с каждым ее разделом, без которых не может происходить ни обучение математике учителем, ни изучение математики учащимся.

На уровне высшего специального образования должно произойти знакомство будущего учителя математики с феноменальными результатами в области математической логики, полученными в первой половине XX века, включая теоремы К. Гёделя, А. Тарского, А. Чёрча. Имея в виду именно эти результаты, английский математик и педагог Р.Л. Гудстейн [43, с. 11-12] так написал об их значении для будущего учителя математики:

“Математическая логика имеет своей целью выявление и систематизацию логических процессов, употребляемых в математическом рассуждении, а также разъяснение математических понятий. Сама она является ветвью математики, использующей математическую символику и технику, ветвью, развившейся в целом в течение последних ста лет, и притом такой, которая по своей плодотворности, по силе и важности своих открытий вполне может претендовать на место в авангарде современной математики.

В силу той роли, которую она играет в освещении природы математики, математическая логика особо важна для преподавателя математики. Новые открытия почти во всякой ветви математики проливают свет на какие-либо основные проблемы, обнаруживая неожиданные связи или ограничения; открытия же, сделанные в математической логике, освещают не просто отдельные проблемы, а почти все стороны математики.

Молодой учитель, который только что закончил свое педагогическое образование, скоро обнаруживает, что оно ничего не добавило к тем знаниям по элементарной арифметике, которые он приобрел в школе. Он знает теперь не лучше, чем он знал прежде, почему для того, чтобы разделить на дробь, нужно умножить на перевернутую дробь, но если его университетский курс был хорошим, то он должен быть в состоянии без посторонней помощи найти этому объяснение... Однако если его ученики спросят его, ... каким образом доказательство доказывает что-либо, является ли истинность доказательством и можем ли мы быть уверены в том, что только истинные теоремы могут быть доказаны, — тогда, если только его подготовка не являлась чем-то исключительным, он не будет знать, что ему ответить, и не сможет самостоятельно найти ответа. Конечно, ответы, которые дает на эти вопросы современная математическая логика, являются ответами для учителя, а не для его учеников, и уже от опытности учителя и от зрелости его учеников зависит, в какой мере они могут быть сообщены ученикам; но самым важным является то, что ответы на эти вопросы теперь известны, хотя в некоторых случаях они были найдены совсем недавно".

В работах автора [44], [45], [46] представлена авторская целостная концепция логико-дидактического образования будущих учителей математики в условиях двухуровневой системы высшего педагогического образования. Существенную роль в этой подготовке сыграет авторский учебник [47]. Значительная роль в этой концепции отводится высшему специальному образованию.

Что касается общей системы высшего педагогического математического образования, то одним из мощных сокрушительных ударов, нанесённых ей в XXI веке, было принятие парадигмы компетентностного подхода. (Более подробно см. [8].) При таком подходе составление учебных планов и отбор содержания обучения по направлениям бакалавриата и магистратуры, призванных сформировать у будущих специалистов компетенции, провозглашенные образовательным стандартом, этот стандарт предоставили в распоряжение вузов.

Это привело к тому, что если не уничтоженные педагогические вузы ещё как-то пытаются сохранить положительные содержательные традиции высшего педагогического образования, то современные классические университеты, в которых бесследно растворились бывшие педагогические институты, не имея опыта подготовки школьных учителей, действуют куда более решительно в худшем смысле этого слова, и действия их напоминают поведение слона в посудной лавке. При составлении учебных планов по собственному разумению резко сокращают курс геометрии, также решительно сокращают, а порой и исключают из образования будущих учителей математики курсы математической логики, теории алгоритмов, дискретной математики. Давно исключен из учебных планов методологически важный для будущих учителей математики курс "Числовые системы". Бездумное применение очередной инновации — прикладного бакалавриата — нанесло новый мощный сокрушительный удар по педагогическому и математическому образованию будущих учителей математики.

В итоге современные молодые учителя, выпускаемые по четырехлетней программе бакалавриата направления "Педагогическое образование" из современных классических университетов, в большинстве своём не владеют методологией математической науки — понятиями аксиоматического метода и аксиоматической теории, теорией определений математических понятий, логических методов доказательства математических теорем, не имеют представления о геометрии как научной теории, о происхождении и значении неевклидовых геометрических теорий, не видят глубинных связей и эквивалентности геометрического и векторного языков и т.д.

Таким образом, можно с полным основанием сказать, что система высшего педагогического образования будущих учителей математики находится в глубоком кризисе. Что же делать для исправления сложившейся ситуации?

Здесь нелишне будет вспомнить о том опыте, который имеется в багаже отечественного математического образования, и от которого не только не следует отказываться, но следует изучать и разумно использовать. В 20-ые годы XX века наша страна также оказалась в состоянии упадка отечественного образования: дореволюционная система образования была разрушена, а новая пребывала в поиске. “В ноябре 1929 г. пленум ЦК ВКП(б) поставил перед Наркомпросом задачу повысить уровень общеобразовательной подготовки учащихся. Решение задачи было найдено не на пути инноваций, а на пути восстановления традиций русской школы. Произошел возврат к предметной системе обучения, “точно очерченному кругу систематизированных знаний” в программах [48, с. 161] и единым стабильным учебникам. В 1935 г. выступая на Всероссийском совещании по вопросам преподавания математики в средней школе, инспектор ЦИК СССР проф. Фурсенко доложил: “Приемные испытания в высшую техническую школу Союза ССР и наблюдения над работой студентов 1 и 2 курсов показали, что с каждым годом имеется несомненное повышение уровня знаний поступающих в высшую школу по математике” [49, с. 32]”, [50, с. 43].

Итак, первое, с чего следует начать — разработать единые для всех педагогических вузов и педагогических отделений классических университетов учебные планы подготовки учителей высшего образования и учителей высшего специального образования. Эти планы должны быть профессионально педагогически ориентированы, тщательно сбалансированы и скоординированы. Они должны удовлетворять важнейшему педагогическому принципу — принципу преемственности: в них должна быть глубоко продумана преемственная взаимосвязь в образовательных системах двух уровней — высшего образования и высшего специального образования с тем, чтобы подготовка учителя уровня высшего образования явилась естественным продолжением, развитием и углублением подготовки учителя уровня высшего специального образования в соответствии с теми задачами, которые предстоит решать будущему специалисту в образовательном процессе.

Если такие учебные планы будут разработаны высококомпетентными комиссиями, составленными из ведущих математиков-учёных и математиков-педагогов нашей страны, то можно надеяться, что и логико-дидактическая подготовка будущих учителей математики найдёт в них подобающее место, и общий уровень подготовки выпускаемых учителей повысится, а вместе с ним будет повышаться математическая грамотность их будущих учеников.

Литература

[1] Богомолова Е.П. Диагноз: математически малограмотный // Математика в школе. - 2014. - № 4. - С. 3-9.

[2] Богомолова Е.П. От математической малограмотности к математическим компетенциям // Вестник Моск. ун-та. Сер. 20. Пед. образование. - 2015. - № 3. - С. 3-20.

[3] Клековкин Г.А. Обучение геометрии и логическая грамотность // Стандартизация математического образования: проблема внедрения и оценка эффективности. Материалы XXXV Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. - 22-24 сентября 2016. - Ульяновск: УлГПУ. - 2016. - С. 197-200.

[4] Розов Н.Х. Логика и школа // Наука и школа. - 2016. - № 1. - С. 143-149.

[5] Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 432с.

[6] Электронный учебник-справочник [Информационный ресурс].

[7] Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Часть 1. - СПб.: Издательство "Лань", 2002. - 448 с.

[8] Игошин В.И. О качестве подготовки бакалавров и магистров педагогического образования по профилю "Математическое образование" // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Философия. Психология. Педагогика. - 2018. - Т. 18. - вып. 4. - С. 474-477.

DOI: https://doi.org/10.18500/1819-7671-2018-18-4-474-477.

[9] Игошин В.И. Подготовка будущих учителей математики и информатики в области дисциплин дискретной математики в условиях бакалавриата и магистратуры // Образование и наука. - 2013. - № 7 (106). - С. 85–100.

[10] Игошин В.И. Формирование логико-философской культуры будущих учителей математики в условиях магистратуры // Известия Самарской государственной сельскохозяйственной академии. - 2012. - Т. 2. - С. 153–157.

[11] Игошин В.И., Капитонова Т.А., Лебедева С.В. Содержательно-методические аспекты предметной подготовки бакалавров педагогического образования (профиль — математическое образование) // Гуманитарные науки и образование. (Мордовский государственный педагогический институт им. М.Е.Евсевьева (Саранск)). - 2012. - № 1 (9). - С. 14-17.

[12] Фетисов А.И. Элементы логики в преподавании математики // Известия АПН РСФСР. Вопросы общей методики математики. - М.: Изд. АПН РСФСР. 1958. - вып. 92. - С. 149-198.

[13] Болтянский В.Г. Как устроена теорема? // Математика в школе. - 1973. - № 3. С. 41-49.

[14] Болтянский В.Г. Использование логической символики при работе с определениями // Математика в школе. - 1973. - № 5. - С. 45-50.

[15] Столяр А.А. О некоторых применениях логики в педагогике математики / В кн.: Логика и проблемы обучения. - М.: Педагогика, 1977. - С. 125-139.

[16] Тимофеева И.Л. Некоторые замечания о методе доказательства от противного // Математика в школе. - 1994. - № 3. - С. 36-38.

[17] Тимофеева И.Л. Как устроено доказательство? // Математика в школе. - 2004. - № 8. - С. 73-80.

[18] Тимофеева И.Л. О логических эвристических средствах построения доказательств // Математика в школе. - 2004. - № 10. - С. 42-50.

[19] Тимофеева И.Л. Размышления об обратных теоремах и кванторах // Математика в школе. - 2005. - № 5. - С. 64-68.

[20] Тимофеева И.Л. Некоторые замечания об использование логической символики при обучении математике // Математика в школе. - 2005. - № 7. - С. 53-56.

[21] Маслова О.А. Формирование методических умений работать с понятиями у бакалавров педагогического образования по профилю "Математика" на занятиях по математической логике // Известия Волгоградского государственного педагогического университета. - 2013. - № 7 (82). - С. 119-122.

[22] Игошин В.И. Дидактическое взаимодействие логики и математики // Педагогика. - 2002. - № 1. - С. 51–55.

[23] Igoshin V.I. Mathematics and Logic: Their Relationship in the Teaching of Mathematics / Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Research, ICME-13 Monographs. E.W.Hart and J.Sandefur (eds.). - Springer International Publishing AG 2018. - 276 p. (P. 253-271).

DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-70308-4_16

[24] Игошин В.И. О применении математической логики при доказательстве обратных теорем // Математика в школе. - 2002. - № 10. - С. 26-28.

[25] Игошин В.И. О понятии доказательства математических теорем // Н.И.Лобачевский и мат. образование в России: Материалы междунар. форума по мат. образованию, посв. 225-летию Н.И.Лобачевского, IFME-2017, 18-22 окт. 2017 (XXXVI Междунар. науч. семинар преп-лей мат-ки и инф-ки университетов и пед. вузов / Отв. ред. Л.Р.Шакирова. - Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. - Т.2. - С. 83-88.

[26] Игошин В.И. О точках и векторах в геометрии // Математическое образование. - 2017. - № 2 (82). - С. 27-43.

[27] Игошин В.И. Курс числовых систем для педагогического вуза // Математика в высшем образовании. - 2010. - № 8. - С. 19–36.

[28] Игошин В.И. Курс числовых систем в формате двухуровневой подготовки учителей математики // Образование и наука. - 2017. - т. 19. - № 1. - С. 82-104.

DOI: 10.17853/1994-5639-2017-1-81-102

[29] Игошин В.И. Аксиоматический метод в обучении математике и в образовании будущих учителей математики // Известия ВГПУ. - 2022. - № 4.

[30] Igoshin Vladimir Ivanovich. To the question of the method of studying the concept of proof and the axiomatic method by bachelors and masters of pedagogical education // International Journal of Advanced Science and Technology. - Vol. 29. - No 06. - 2020. - P. 1964-1972.

[31] Мендельсон Э. Введение в математическую логику / Пер. с англ. - М.: Мир, 1976. - 320 с.

[32] Rosenblum P.C. The elements of mathematical logic. - N.Y.: Dover. Publ., 1950.

[33] Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. - 256 с.

[34] Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. - М.: Изд. центр "Академия", 2004, 2008, 2008, 2010. - 448 с.

[35] Игошин В.И. Математическая логика: Учебное пособие.- М.: ИНФРА-М, 2012, 2014, 2020. - 399 с. + CD-R.

[36] Игошин В.И. Элементы математической логики: Учебник для студ. учреждений сред. проф. образования. - М.: Изд. центр "Академия", 2016, 2019, 2021. - 320 с.

[37] Игошин В.И. Задачник-практикум по математической логике. - М.: Просвещение, 1986. - 160 с.

[38] Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. - М.: Изд. центр "Академия", 2005, 2006 (2-е изд.), 2007 (3-е изд.), 2008 (4-е изд.). - 304 с.

[39] Игошин В.И. Сборник задач по математической логике и теории алгоритмов: учебное пособие. - М.: КУРС: ИНФРА-М, 2017. - 392 с.

[40] Игошин В.И. Математическая логика как педагогика математики. (Научная монография). - Саратов: Издательский центр "Наука", 2009. - 360 с.

[41] Игошин В.И. Математическая логика в обучении математике. Логико-дидактическая подготовка учителя математики. (Научная монография). Saarbrüken, Deutschland / Германия. - Palmarium Academic Publishing, 2012. - 517 с.

[42] Milici C., Rachin N. The equivalence of two axiomatic systems of propositional calculus // Seminarul de Matematică şi Fisică al Istitutului Polytehnic "Traian Vuia", Timişoara. - 1985. - Mai. - P. 18-20.

[43] Гудстейн Р.Л. Математическая логика / Пер. с англ. - М.: ИИЛ, 1961. - 162 с.

[44] Игошин В.И. Учить логике будущих учителей математики. (Часть I) // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Философия. Психология. Педагогика. - 2019. - Т. 19. - вып. 1. - С. 113–117.

DOI: https://doi.org/10.18500/1819-7671-2019-19-1-113-117.

[45] Игошин В.И. Учить логике будущих учителей математики. (Часть II) // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Философия. Психология. Педагогика. - 2020. - Т. 20. - вып. 1. - С. 105–111.

DOI: https://doi.org//10.1850/1819-7671-2020-1-105-111.

[46] Игошин В.И. Учить логике будущих учителей математики. (Часть III) // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Философия. Психология. Педагогика. - 2022. - Т. 22, вып. 2. - С. 202-207.

[47] Игошин В.И. Логика с элементами математической логики. / Учебник. - М.: ИНФРА-М, 2023. - 418 с.

DOI 10.12737/1856361

[48] Колягин Ю.М. Русская школа и математическое образование. - М., 2001.

[49] Материалы Всероссийского совещания преподавателей математики средней школы, март – апрель 1935. - М., 1935.

[50] Костенко И.П. Кризис отечественного математического образования // Педагогика. - 2012. - № 7. - С. 41-49.

Игошин Владимир Иванович,
профессор кафедры геометрии Саратовского
национального исследовательского государственного
университета имени. Н. Г. Чернышевского
г. Саратов (Россия), профессор,
доктор педагогических наук,
кандидат физико-математических наук.

E-mail: igoshinvi@mail.ru

Об одном замечании в учебнике математического анализа

И. Г. Малышев

В статье рассмотрены задания на применение теоремы о достаточном признаке экстремума функции как одной переменной, так и двух переменных. Вопрос идёт об исследовании знака второй производной в точке возможного экстремума. На примере кубической параболы показано отличие заданий на экстремум у нас и на Западе. Дан комментарий на замечание в классическом учебнике математического анализа, где говорится об ошибках известных математиков на тему достаточного признака экстремума функции двух переменных.

При исследовании функций, как правило, фигурирует первая производная. Между тем хотелось бы обратить внимание на вторую производную и её роль. Сначала рассмотрим функцию одной переменной. Вторая производная появляется, когда нужно уточнить поведение функции и найти точки перегиба графика функции. В классической механике она играет фундаментальную роль, так как определяет ускорение тела. Более тонкие исследования предполагают нахождение кривизны кривой в каких-либо точках, т.е. использование формулы для радиуса кривизны, где присутствует вторая производная: $R = \frac{1}{K} = \frac{(1+(f')^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''|}$. В качестве примера можно взять кубическую параболу:

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2,\ y' = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3),\ y'' = 2x - 2$$

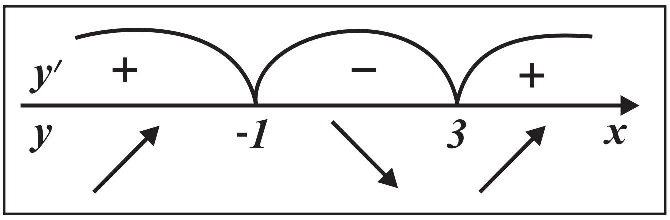


Рис. 1.

Таким образом, $y_{\max} = \frac{11}{3}$, $y_{\min} = -7$, $y_p = -\frac{5}{3}$. Наконец, кривизна линии в точках экстремума равна второй производной по модулю $K = |f''| = 4$. Можно в общем виде показать, что для кубической параболы точка перегиба есть среднее арифметическое точек экстремума, также, как и значение функции в точке перегиба — среднее арифметическое максимума и минимума функции. В экзаменах на Западе задание на кубическую параболу строится исходя из знания второй производной функции. Вот, например, задание из экзамена по системе Международного бакалавриата. Эта программа работает больше 50 лет и охватывает тысячи школ и многие страны мира. По состоянию на 25 июня 2016 года программы приняты в 4527 школах 135 государств (Википедия). Экзамены там приравниваются к национальным выпускным экзаменам и учитываются при поступлении в вузы большинства стран мира.

Задание (2010 г.): Пусть вторая производная функции $f(x)$ имеет вид $f''(x) = 3x - 1$. Функция $f(x)$ имеет минимум в точке $A(2;4)$ и максимум в точке $B\left(-\frac{4}{3};\frac{358}{27}\right)$.

1. Используя вторую производную, покажите, что точка B — точка максимума (3 балла).

2. Дано, что $f'(x) = \frac{3x^2}{2} - x + p$. Покажите, что $p = -4$ (4 балла).

3. Найдите $f(x)$ (7 баллов).

Как видим, под точками экстремума у них понимаются координаты точек, а не абсциссы как у нас.

Решение.

Так как $f''\left(-\frac{4}{3}\right) = -5 < 0$, то B — это точка максимума. В нашем понимании $x = -4/3$ — точка максимума. Таким образом, предполагается знание выпускниками достаточного условия экстремума для дважды дифференцируемой функции:

$$\text{в точке минимума } \begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) > 0 \end{cases} \text{ и в точке максимума } \begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) < 0. \end{cases}$$

Между прочим, эти теоремы в российских школах игнорируются, хотя они важны при нахождении экстремумов функций двух переменных на первом курсе в вузе. Больше того, в условиях тотального давления на учебу со стороны грядущего в конце года ЕГЭ, в некоторых школах не изучается даже вторая производная, а при построении графиков обходятся только первой производной, да и рассматриваются только многочлены.

Кстати сказать, в старом классическом задачнике для вузов (первое издание 1947 г.) [1] есть с десяток задач на применение этих теорем. Второй пункт задания легко выполняется, если учесть, что производная в точке A или B равна нулю. В третьем пункте находится интеграл от производной и по точке A находится константа интегрирования.

В итоге, $f(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - 4x + 10$. И здесь также нужно подчеркнуть то, с чем я столкнулся на первом курсе вуза. Половина студентов даже не касались в школе темы "Интеграл". И не мудрено, так как эксклюзивные задания в тестовой части ЕГЭ на первообразные, во-первых, не делают никакой погоды, а во-вторых, предполагают простой алгоритм выполнения, где основная трудность в том, чтобы аккуратно выполнить арифметические действия и не ошибиться.

Например, найти площадь закрашенной фигуры в одном из заданий тренировочного варианта ЕГЭ, если первообразная $f(x) = -\frac{x^3}{4} - \frac{21x^2}{4} - \frac{135}{4}x - \frac{13}{2}$, а формулу для вычисления $F(-5) - F(-9)$ всегда можно предоставить. Таким образом, имеем три задания из математического анализа, два из которых в перспективе не сможет выполнить ни один выпускник обычной школы. Это ли не финиш, к которому подошли за 16 лет господства ЕГЭ.

Последний раз, когда вторая производная фигурировала на экзамене — это был выпускной экзамен для матклассов в 2001 г. Это было пятое задание из шести: Исследуйте на выпуклость функцию $y = \sqrt[50]{x}$ и, используя полученный результат, сравните числа $\frac{\sqrt[50]{2} + \sqrt[50]{3}}{2}$ и $\sqrt[50]{2,5}$ $\left(y = x^{100},\ \frac{2^{100} + 3^{100}}{2}\right.$ и $\left.\left(\frac{5}{2}\right)^{100}\right)$.

Поскольку $f''(x) = -\frac{49}{2500x \cdot \sqrt[50]{x^{49}}} < 0$, то график функции обращён выпуклостью вверх, и, следовательно, $y\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{y(a) + y(b)}{2}$. Это небольшое задание большинство выпускников иллюстрировали эскизом графика.

В те времена на вступительных экзаменах в университет можно было ещё встретить исследования второй производной в задачах с параметром. Например, в задании: Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^5 - 5x^4 + ax + b = 0$ для любого b имеет ровно один корень.

Поскольку функция $y = x^5 - 5x^4 + ax$ должна быть монотонной, то производная $y' = 5x^4 - 20x^3 + a \geq 0$, а это значит, что минимум уже производной должен быть неотрицательным. Исследование второй производной функции $y'' = 20x^3 - 60x^2$ даёт ответ $y'(3) = a - 135 \geq 0$.

А теперь поднимемся на ступень выше в изучении второй производной — рассмотрим экстремумы функции двух переменных.

При прохождении раздела функции нескольких переменных есть теорема о достаточном условии экстремума. Во многих учебниках либо сразу без доказательства даётся алгоритм решения подобных примеров [2; 3], либо приводится доказательство в общем виде для нескольких переменных [4; 5]. И только в классическом учебнике 60-х годов [6] (первое издание было ещё в 1947 г.) есть доказательство для двух переменных. А замечание в этом учебнике, на которое хотелось бы обратить внимание, следующее:

"Эйлер первым отметил необходимость условий $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$ для того, чтобы функция $f(x; y)$ в точке (x_0, y_0) имела экстремум. Однако он ошибался, думая, что достаточным условием является наличие для функции однотипного экстремума по каждой переменной в отдельности (что будет иметь место, например, если производные $f''_{x^2}(x, y)$ и $f''_{y^2}(x, y)$ — одного знака). Лагранж понял ошибку Эйлера и в качестве достаточного условия установил неравенство $f''_{x^2} \cdot f''_{y^2} - (f''_{xy})^2 > 0$. Он же указал, что обратное неравенство обусловливает отсутствие экстремума, но обосновал это не полностью".

Получается, что величайший математик всех времён и народов ошибся (?), а основатель вариационного исчисления и теоретической механики что-то там не смог. На самом деле оба выдающихся математика были правы и вот почему.

Для этого рассмотрим другой вариант исследования на экстремум функции двух переменных. Начнём с параболы.

Имеем параболу

$$y = ax^2 + 2bx + c = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}.$$

В точке экстремума $x = -\frac{b}{a}$, при $ac - b^2 > 0$, если $a > 0$, то и $c > 0$.

Если $a < 0$, то и $c < 0$. В первом случае имеем минимум функции, во втором — максимум. Почему бы подобную логику не применить к функции двух переменных?

Имеем функцию двух переменных $z = z(x; y)$, тогда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \quad \text{и} \quad d^2z = Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2, \quad \text{где} \quad A = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x},\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}.$$

Преобразуем дифференциал второго порядка в два вида:

$$d^2z = \frac{(Adx + Bdy)^2 + (AC - B^2)dy^2}{A}, \quad d^2z = \frac{(Bdx + Cdy)^2 + (AC - B^2)dx^2}{C}.$$

Учитывая, что выражения:

$$Adx + Bdy = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) \quad \text{и} \quad Bdx + Cdy = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right),$$

а в точке возможного экстремума $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 0$, получаем, что $d^2z = \frac{(AC - B^2)dy^2}{A} = \frac{(AC - B^2)dx^2}{C}$.

Так как в стационарной точке $z - z_0 \approx \frac{1}{2}d^2z$, то можно по дифференциалу второго порядка говорить о знаке приращения функции. Таким образом, в точке возможного экстремума при $AC - B^2 > 0$, A и C одного знака, т.е. вдоль осей Ox и Oy одновременно, либо минимум, либо максимум. А что же будет при $AC - B^2 < 0$? Пусть z_0 — минимум функции. Тогда, поскольку дроби $\frac{(AC - B^2)}{A} > 0$, $\frac{(AC - B^2)}{C} > 0$, получаем, что A и C меньше нуля. Но это означает, что здесь максимум функции. Пусть z_0 максимум функции. Тогда, поскольку дроби $\frac{(AC - B^2)}{A} < 0$, $\frac{(AC - B^2)}{C} < 0$, получаем, что A и C больше нуля. Но это означает, что здесь минимум функции. В обоих случаях приходим к противоречию. Таким образом, вид формулы для приращения функции в точке экстремума $z - z_0 \approx \frac{(AC - B^2)dy^2}{2A} = \frac{(AC - B^2)dx^2}{2C}$ говорит о том, что критерий экстремума $AC - B^2 > 0$ без знания знаков и A и C не работает, причём оба параметра обязаны иметь один знак. Критерии Эйлера и Лагранжа дополняют друг друга.

Литература

[1] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Издательство “Наука”, 1977. - 416 с.

[2] Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. - М.: АЙРИС-пресс, 2022. - 608 с.

[3] Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. - СПб.: Издательство “Лань”, 1999. - 736 с.

[4] Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. - 736 с.

[5] Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 432с.

[6] Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Часть 1. - СПб.: Издательство “Лань”, 2002. - 448 с.

Малышев Игорь Геннадьевич,
доцент кафедры «Прикладная математика»
Нижегородского государственного технического
университета им. Р.Е. Алексеева, г. Нижний Новгород,
канд. техн. наук, доцент.

E-mail: migniro@mail.ru

Начальные сведения о тензорах

С. В. Шведенко

В заметке вводится, на алгебраическом языке, понятие тензора произвольного ранга. Показано, как различные объекты алгебры и анализа можно выразить через тензоры.

Отметим что координаты тензоров для простоты рассматриваются только относительно ортонормированных базисов, т.е. в пространстве с фиксированной евклидовой структурой. В этом случае нет необходимости различать ковариантные и контравариантные тензоры, поскольку векторы и ковекторы отождествляются.

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ — ортонормированные базисы в пространстве $\mathbb{R}^n$ (“старый” и “новый”), кратко обозначаемые $\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}'_i$, и $c_{ij} = (\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_j)$ — *матрица перехода* от “старого” базиса к “новому”: $\mathbf{e}'_i = c_{ij}\mathbf{e}_j$. В силу ортонормированности базисных векторов матрица c_{ij} является *ортогональной* (обратная к ней совпадает с транспонированной): $c_{ik}c_{jk} = c_{ki}c_{kj} = \delta_{ij}$.

Принимается следующее **правило**: в индексированных величинах и их произведениях единожды встречающийся индекс принимает (независимо от других) все значения от 1 до n, а по повторяющемуся индексу производится суммирование от 1 до n, при этом часто прибегают к переобозначению индексов (например, $c_{ik}c_{jk} = c_{iq}c_{jq} = \delta_{ij}$, $\delta_{ii} = \delta_{jj} = n$).

Для любого вектора $\mathbf{x}$ коэффициенты его разложений $\mathbf{x} = x_j\mathbf{e}_j = x'_i\mathbf{e}'_i$ по базисам $\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}'_i$ связаны равенствами $x'_i = c_{ij}x_j$, $x_j = c_{ij}x'_i$. Проверка: $x'_i = (\mathbf{e}'_i, \mathbf{x}) = (\mathbf{e}'_i, x_j\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_j)x_j = c_{ij}x_j$.

Билинейная функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, если перейти от векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ к их разложениям по любому базису, принимает вид *билинейной формы*: $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(x_i\mathbf{e}_i, y_j\mathbf{e}_j) = x_iy_jf(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = b_{ij}x_iy_j$. Как преобразуются коэффициенты $b_{ij} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ билинейной формы при переходе к другому базису? Ответ: $b'_{km} = f(\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}'_m) = f(c_{ki}\mathbf{e}_i, c_{mj}\mathbf{e}_j) = c_{ki}c_{mj}f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = c_{ki}c_{mj}b_{ij}$.

Действие *линейного оператора* $\hat{A}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ вполне определяется его координатами (матрицей оператора) $a_{ij} = (\mathbf{e}_i, \hat{A}\mathbf{e}_j)$ в любом ортонормированном базисе $\mathbf{e}_j$. Если $\mathbf{e}'_i$ — другой ортонормированный базис, то $a'_{km} = (\mathbf{e}'_k, \hat{A}\mathbf{e}'_m) = (c_{ki}\mathbf{e}_i, \hat{A}(c_{mj}\mathbf{e}_j)) = c_{ki}c_{mj}(\mathbf{e}_i, \hat{A}\mathbf{e}_j) = c_{ki}c_{mj}a_{ij}$.

Определение. Говорят, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ задан *тензор ранга* (или *валентности*) k, если в каждом ортонормированном базисе $\mathbf{e}_j$ определены n^k чисел $a_{j_1\cdots j_k}$ (их называют *компонентами*, или *координатами*, тензора), меняющиеся при переходе к другому базису $\mathbf{e}'_i = c_{ij}\mathbf{e}_j$ по правилу: $a'_{i_1\cdots i_k} = c_{i_1j_1}\cdots c_{i_kj_k}\,a_{j_1\cdots j_k}$. Скаляр (число, не зависящее от выбора базиса) называют *тензором нулевого ранга*, или *инвариантом*.

В соответствии с этим определением и предшествующими ему примерами *вектор* (в его представлении координатами в базисах) служит примером (а на самом деле являет собой общий вид) тензора ранга 1. *Линейный оператор* (в матричном задании) и *коэффициенты билинейной формы* являются примерами (и вариантами трактовки) тензора ранга 2.

Особое место среди тензоров ранга 2 занимает *δ-символ Кро́некера*[1] $\delta_{ij} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$ (в любом базисе); соотношение $\delta'_{ij} = c_{ik}c_{jm}\delta_{km}$ выполняется, так как $c_{ik}c_{jm}\delta_{km} = c_{ik}c_{jk} = \delta_{ij} = \delta'_{ij}$.

Пример тензора ранга 3 в пространстве $\mathbb{R}^3$ — так называемый *ε-символ Ле́ви-Чиви́ты*[2]

$$\varepsilon_{ijk} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } i\,j\,k \text{ - четная перестановка чисел } 1\ 2\ 3; \\ -1, & \text{если } i\,j\,k \text{ - нечетная перестановка чисел } 1\ 2\ 3; \\ 0, & \text{если среди значений } i\,j\,k \text{ есть совпадающие.} \end{cases} ,$$

[1] Kronecker, Leopold, 1823-1891, немецкий математик.
[2] Levi-Civita, Tullio, 1873-1941, итальянский математик.

становящийся *тензором* при отнесении его к каждому "правому" (а взятого со знаком минус — к каждому "левому") ортонормированному базису пространства $\mathbb{R}^3$.

Оперируя этим символом, можно выразить:

1) определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ как $\varepsilon_{ijk}\, a_{1\,i}\, a_{2\,j}\, a_{3\,k}$;

2) векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, где $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ (в "правом" ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) как $\varepsilon_{ijk}\,\mathbf{e}_i\, a_j\, b_k$, или (в тензорном виде) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k$;

3) смешанное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = a_i [\mathbf{b}, \mathbf{c}]_i = a_i\, \varepsilon_{ijk}\, b_j\, c_k$; окончательно: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \varepsilon_{ijk}\, a_i\, b_j\, c_k$; в частности, $\varepsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$ (независимо от ориентации базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$);

4) ротор векторного поля: $\mathrm{rot}\mathbf{F} = [\nabla, \mathbf{F}] = \mathbf{e}_i\, [\nabla, \mathbf{F}]_i = \mathbf{e}_i\, \varepsilon_{ijk}\, \dfrac{\partial}{\partial x_j} F_k$, т. е. $(\mathrm{rot}\mathbf{F})_i = \varepsilon_{ijk}\, \dfrac{\partial F_k}{\partial x_j}$.

Сложение тензоров. Складывать можно лишь тензоры одного ранга, при этом складываются их соответствующие координаты. Результатом оказывается тензор того же ранга.

Перемножение тензоров. Перемножать (покомпонентно) можно тензоры любых рангов; результатом является тензор суммарного ранга.

Свертывание тензоров. Свертыванием тензора ранга ≥ 2 по какой-то паре его индексов называется операция умножения его на символ Кронекера (с этой парой индексов) и последующим суммированием по обоим этим индексам при фиксированных остальных. Результатом оказывается тензор на две единицы меньшего ранга.

Например, результат свертывания (свертка) тензора a_{ijk} ранга 3 по двум его последним индексам есть тензор $a_{ijk}\delta_{jk} = a_{ijj}$ ранга 1. Свертка тензора a_{ij} ранга 2 (например, координат линейного оператора) есть инвариант — *след* тензора a_{ij} (матрицы оператора): $\mathrm{Sp}(a_{ij}) = a_{ij}\delta_{ij} = a_{ii}$. Запись билинейной функции $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b_{ij} x_i y_j$ следует понимать как результат свертывания произведения $b_{ij} x_p y_q$ тензоров b_{ij}, x_p и y_q (тензора ранга 4) по парам индексов i, p и j, q.

Более интересным является свертывание произведения $\varepsilon_{pqr}\varepsilon_{ijk}$ тензоров Леви-Чивиты (тензора ранга 6) по одной, двум и трем парам его индексов. Непосредственно проверяется, что

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{vmatrix}, \text{ и поэтому } \varepsilon_{pqr}\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{vmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} \delta_{p1} & \delta_{p2} & \delta_{p3} \\ \delta_{q1} & \delta_{q2} & \delta_{q3} \\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \delta_{r3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \delta_{p\alpha}\delta_{\alpha i} & \delta_{p\alpha}\delta_{\alpha j} & \delta_{p\alpha}\delta_{\alpha k} \\ \delta_{q\alpha}\delta_{\alpha i} & \delta_{q\alpha}\delta_{\alpha j} & \delta_{q\alpha}\delta_{\alpha k} \\ \delta_{r\alpha}\delta_{\alpha i} & \delta_{r\alpha}\delta_{\alpha j} & \delta_{r\alpha}\delta_{\alpha k} \end{vmatrix}, \text{ так что } \varepsilon_{pqr}\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{pi} & \delta_{pj} & \delta_{pk} \\ \delta_{qi} & \delta_{qj} & \delta_{qk} \\ \delta_{ri} & \delta_{rj} & \delta_{rk} \end{vmatrix}.$$

(При проведении выкладок учитывалось то, что определитель матрицы не меняется при ее транспонировании, а символ Кронекера — при перестановке индексов.)

Что будет сверткой произведения $\varepsilon_{pqr}\varepsilon_{ijk}$ по паре последних индексов сомножителей?

$$\varepsilon_{pqk}\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{pi} & \delta_{pj} & \delta_{pk} \\ \delta_{qi} & \delta_{qj} & \delta_{qk} \\ \delta_{ki} & \delta_{kj} & \delta_{kk} \end{vmatrix} = \delta_{ki} \begin{vmatrix} \delta_{pj} & \delta_{pk} \\ \delta_{qj} & \delta_{qk} \end{vmatrix} - \delta_{kj} \begin{vmatrix} \delta_{pi} & \delta_{pk} \\ \delta_{qi} & \delta_{qk} \end{vmatrix} + \delta_{kk} \begin{vmatrix} \delta_{pi} & \delta_{pj} \\ \delta_{qi} & \delta_{qj} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{pj} & \delta_{pk}\delta_{ki} \\ \delta_{qj} & \delta_{qk}\delta_{ki} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{pi} & \delta_{pk}\delta_{kj} \\ \delta_{qi} & \delta_{qk}\delta_{kj} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{pi} & \delta_{pk}\delta_{kj} \\ \delta_{qi} & \delta_{qk}\delta_{kj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{pj} & \delta_{pi} \\ \delta_{qj} & \delta_{qi} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{pi} & \delta_{pj} \\ \delta_{qi} & \delta_{qj} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \delta_{pi} & \delta_{pj} \\ \delta_{qi} & \delta_{qj} \end{vmatrix}; \quad \varepsilon_{pqk}\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{pi} & \delta_{pj} \\ \delta_{qi} & \delta_{qj} \end{vmatrix}.$$

Что будет сверткой произведения $\varepsilon_{pqr}\varepsilon_{ijk}$ по двум парам индексов сомножителей?

Свёртку $\varepsilon_{pjk}\varepsilon_{ijk}$ можно получить как результат свертывания произведения $\varepsilon_{pqk}\varepsilon_{ijk}$ по вторым индексам сомножителей: $\varepsilon_{pjk}\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{pi} & \delta_{pj} \\ \delta_{ji} & \delta_{jj} \end{vmatrix} = \delta_{pi}\delta_{jj} - \delta_{pj}\delta_{ji} = 3\delta_{pi} - \delta_{pi}$. Итого: $\varepsilon_{pjk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{pi}$.

Как следствие, полная свертка произведения $\varepsilon_{pqr}\varepsilon_{ijk}$ (по трем парам индексов): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=6$.

Примером применения полученных соотношений служит запись с помощью тензора Леви-Чивиты двойного векторного произведения $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]=\mathbf{e}_i\,[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]_i$. Вычисление отдельной его компоненты $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]_i$ дает:

$$[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]_i=\varepsilon_{ijk}\,a_j[\mathbf{b},\mathbf{c}]_k=\varepsilon_{ijk}\,a_j\,\varepsilon_{kpq}b_p\,c_q=\varepsilon_{ijk}\,a_j\,\varepsilon_{pqk}b_p\,c_q=\varepsilon_{pqk}\varepsilon_{ijk}\,a_j\,b_p\,c_q=\begin{vmatrix}\delta_{pi}&\delta_{pj}\\ \delta_{qi}&\delta_{qj}\end{vmatrix}a_j\,b_p\,c_q=$$

$$=(\delta_{pi}\delta_{qj}-\delta_{pj}\delta_{qi})\,a_j\,b_p\,c_q=\delta_{pi}\,\delta_{qj}\,a_j\,b_p\,c_q-\delta_{pj}\,\delta_{qi}\,a_j\,b_p\,c_q=b_i\,a_j\,c_j-c_i\,a_j\,b_j=b_i(\mathbf{a},\mathbf{c})-c_i(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Остается умножить обе части полученного равенства $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]_i=b_i(\mathbf{a},\mathbf{c})-c_i(\mathbf{a},\mathbf{b})$ на $\mathbf{e}_i$ и просуммировать по i, чтобы получить знаменитую формулу двойного векторного произведения $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]=\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ — “**бац** минус **цаб**”.

Если каждой точке какой-то области $D\subset\mathbb{R}^3$ сопоставлен тензор одного и того же ранга k, то говорят, что в этой области задано *тензорное поле* (или *поле тензора*) ранга k. Например, тензорное поле ранга 2 задается девятью функциями $a_{ij}=a_{ij}(M)$ точки $M(x_1,x_2,x_3)\in D$. При переходе из точки M в “бесконечно близкую” точку M' положение точки M' относительно точки M определяется вектором $\overline{M\,M'}=d\mathbf{x}=dx_j\,\mathbf{e}_j$, координаты которого при переходе от “старого” ортонормированного базиса $\mathbf{e}_j$ к “новому” $\mathbf{e}'_i=c_{ij}\mathbf{e}_j$ преобразуются по закону $dx'_i=c_{ij}dx_j$.

Пусть компоненты тензора (для определенности ранга 2) a_{ij} являются дифференцируемыми функциями точки M. Получаемые ими приращения $\triangle a_{ij}$ при переходе из точки M в “бесконечно близкую” точку M' допускают выделение главных частей (дифференциалов) $da_{ij}=\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}dx_k$. Оказывается, что совокупность величин da_{ij} образует тензор ранга 2. Действительно, при переходе от базиса $\mathbf{e}_j$ к базису $\mathbf{e}'_i=c_{ij}\mathbf{e}_j$ компоненты тензора a_{ij} преобразуются по формулам $a'_{pq}=c_{pi}c_{qj}\,a_{ij}$. Их дифференцирование по координатам точки M (с учетом того, что от точки M зависят лишь компоненты тензора) приводит к равенствам $da'_{pq}=c_{pi}c_{qj}\,da_{ij}$, доказывающим, что преобразование величин da_{ij} при изменении базиса происходит по тензорному закону. Тензор $da_{ij}=\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}dx_k$ называют *абсолютным дифференциалом поля тензора* a_{ij} (в точке M).

Для описания изменения тензора a_{ij} при переходе от точки M к “бесконечно близкой” точке M' естественно привлечь совокупность частных производных $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$ (по координатам точки $M(x_1,x_2,x_3)$), при этом более удобной оказывается запись $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}=\nabla_k a_{ij}$. Равенства $da_{ij}=\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}dx_k$ показывают, что тензор da_{ij} есть свертка величин $\nabla_k\,a_{ij}$ с координатами dx_k вектора $d\mathbf{x}=\overline{M\,M'}$ (тензором ранга 1).

По какому закону происходит преобразование величин $\nabla_k a_{ij}$ при переходе от базиса $\mathbf{e}_j$ к базису $\mathbf{e}'_i=c_{ij}\mathbf{e}_j$? Поскольку “старые” координаты x_k радиуса-вектора $\mathbf{x}$ точки M выражаются через “новые” x'_l равенствами $x_k=(\mathbf{x},\mathbf{e}_k)=(x'_l\mathbf{e}'_l,\mathbf{e}_k)=x'_l(\mathbf{e}'_l,\mathbf{e}_k)=x'_l\,c_{lk}$, справедливы равенства

$$\nabla_r a'_{pq}=\frac{\partial a'_{pq}}{\partial x'_r}=\frac{\partial(c_{pi}\,c_{qj}\,a_{ij})}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x'_r}=c_{pi}\,c_{qj}\,\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\,\frac{\partial(x'_l\,c_{lk})}{\partial x'_r}=c_{pi}\,c_{qj}\,\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}c_{rk}=c_{pi}c_{qj}c_{rk}\nabla_k a_{ij},$$

говорящие о том, что величины $\nabla_k\,a_{ij}=\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$ являются компонентами *тензора*. Этот тензор называют *абсолютной производной поля тензора* a_{ij} (в точке M), при этом его ранг (равный трем) на единицу больше ранга поля тензора a_{ij} (разумеется, то же самое верно для тензорного поля любого ранга).

В случае *скалярного* поля $a=a(M)=a(x_1,x_2,x_3)$ его абсолютная производная $\nabla_k a=\dfrac{\partial a}{\partial x_k}$ в любой точке M есть тензор ранга 1, который можно рассматривать как вектор с теми же координатами. Этот вектор называют *градиентом скалярного поля*: $\operatorname{grad} a=\nabla_k a\cdot\mathbf{e}_k$

В случае *векторного* поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M) = a_j(M)\,\mathbf{e}_j$, или, что то же самое, *тензорного* поля $a_j = a_j(M) = a_j(x_1, x_2, x_3)$ ранга 1, его абсолютная производная $\nabla_k a_j = \dfrac{\partial a_j}{\partial x_k}$ есть тензор ранга 2, называемый *градиентом векторного поля.* Как и любой тензор ранга 2, он порождает зависящий от точки M линейный оператор $\mathbf{y} = \hat{A}\,\mathbf{x}$, выражаемый в координатной форме как $y_j = (\nabla_k a_j)x_k$. Это позволяет записать абсолютный дифференциал $da_j = \nabla_k a_j\,dx_k$ тензора поля a_j в векторном виде как $d\mathbf{a} = \hat{A}(M)\,d\mathbf{x}$, где $d\mathbf{a}$ — главная линейная часть приращения $\triangle\,\mathbf{a} = \mathbf{a}(M') - \mathbf{a}(M)$ векторного поля в точке M, а $d\mathbf{x} = \overline{M\,M'}$. След матрицы оператора $\hat{A}$ есть свертка тензора $\nabla_k a_j$ ранга 2, т. е. инвариант $\nabla_k a_k$, называемый *дивергенцией* (или *дифференциальным инвариантом*) *векторного поля* $\mathbf{a}$: $\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla_k a_k = \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial a_3}{\partial x_3}$.

Свертка тензора $\nabla_k a_j$ с взятым со знаком минус тензором Леви-Чивиты ε_{ijk} есть тензор $z_i = -\varepsilon_{ijk}\nabla_k a_j$ ранга 1 с координатами (в "правом" базисе)

$$\begin{aligned} z_1 &= \nabla_2 a_3 - \nabla_3 a_2 = \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ z_2 &= \nabla_3 a_1 - \nabla_1 a_3 = \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \,. \\ z_3 &= \nabla_1 a_2 - \nabla_2 a_1 = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Трактуемый как *вектор* (с теми же координатами) он называется *ротором векторного поля* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M) = a_i(M)\mathbf{e}_i$ и имеет обозначение $\operatorname{rot}\mathbf{a}$, т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{e}_i z_i = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$.

Литература

[1] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. - М.: "Наука", 1967.

[2] Акивис М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. - М.: "Наука", 1969.

[3] Малышев А. И., Максимова Г. М. Основы векторного и тензорного анализа для физиков. Электронное учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012.

Шведенко Сергей Владимирович,
доцент Национального исследовательского
ядерный университет (МИФИ),
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: sershvedenko@mail.ru

Олимпиада школьников "ТИИМ — Технологии. Интеллект. Информатика. Математика" 2024/2025

А. А. Андреев, А. А. Балабекян, А. В. Куприн,

Е. А. Максимова, Е. А. Скородумова

В статье рассказано об олимпиаде для школьников по математике и информатике "ТИИМ" 2024/25 учебного года. Приведены задачи отборочного тура по математике для 10-11 классов с ответами, задачи заключительного тура по математике для 11 класса с решениями, а также примеры задач отборочного и заключительного туров по информатике с решениями.

Олимпиады для школьников — это не просто соревнование в знаниях по конкретным дисциплинам, а ценнейший опыт, который оказывает глубокое влияние на развитие личности и будущую карьеру. Участие в олимпиадах стимулирует интерес к учебе, мотивирует к углубленному изучению предмета и расширяет кругозор.

Подготовка к олимпиадам требует от учеников усидчивости, самодисциплины и умения работать с информацией. Они учатся искать, анализировать и систематизировать знания, что является необходимым навыком в любой сфере деятельности.

Кроме того, олимпиады — это прекрасная возможность для знакомства с единомышленниками, обмена опытом и развития коммуникативных навыков. Победы в олимпиадах повышают самооценку, уверенность в своих силах и открывают двери в самые востребованные образовательные организации. Необходимо также отметить, что участие в олимпиадах — это инвестиция в будущее, которая приносит плоды в виде личностного роста, академических успехов и перспективных возможностей.

Разбор олимпиадных заданий прошлых лет является важным этапом подготовки школьников к будущим мероприятиям и тренировки навыков.

В 2024/25 учебном году отборочный тур олимпиады школьников «ТИИМ — Технологии. Интеллект. Информатика. Математика» прошел в ноябре 2024 — январе 2025 г., заключительный — в феврале 2025 г.

В состязании по математике принимали участие школьники 5-11 классов. Для удобства участников отборочный тур проходил как в очной, так и в дистанционной форме. Каждый из 4 вариантов отборочного тура содержал 10 задач. Вариант заключительного тура также включал в себя 10 задач и два варианта для различных часовых поясов.

Варианты заданий отборочного тура и финала по информатике (по два комплекта заданий на тур) включали в себя по 6 задач, рассчитанных на учащихся 8-11 классов. Олимпиада проводилась с применением системы автоматической проверки решений участников на наборе тестовых данных. Решения оценивались в соответствии с количеством верно пройденных тестов и принимались на языках C++, Python, Pascal, Java.

В олимпиаде по математике приняли участие 5985 школьников из 75 регионов РФ и ближнего зарубежья, по информатике — 1437 школьников из 70 регионов РФ и ближнего зарубежья. Заключительный тур прошел на 47 очных площадках, в том числе в Москве, Санкт-Петербурге, Владимире, Самаре, Белгороде, Омске, Тюмени, Ульяновске, Саранске, Калининграде, Улан-Удэ, Красноярске, Елабуге, Волгограде, Ивановской области, Республике Башкортостан, Вологде, Ростове, Нижнем

Новгороде, Новосибирске, Челябинске и Донецкой Народной Республике, а также в Абхазии и в дистанционном формате для удаленных регионов и лиц с ограниченными возможностями здоровья, с применением технологий, позволяющих идентифицировать участника и отслеживать его действия в реальном времени.

Полный текст заданий с ответами и решениями, сборник заданий, а также информация о победителях и призерах опубликованы на официальном сайте олимпиады https://тиим.рф

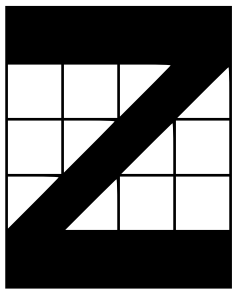
Задания отборочного тура по математике

Каждое из заданий отборочного тура по математике могло быть оценено в 0 или 1 балл. От участников принимался краткий ответ.

Здесь мы приводим по одному варианту заданий для 10 и 11 класса с ответами.

10 класс

Задача 1. Мальчик разукрасил клетчатую скатерть (см. рис.).



На этот стол случайным образом садится муха. Какова вероятность того, что муха сядет на узор? Ответ запишите в виде десятичной дроби.

Ответ: 0.55.

Задача 2. Зададим операции $\wedge$, $\bigoplus$ и $\vee$ с помощью таблиц:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Пусть имеется последовательность $\{a_n\}$, состоящая из нулей и единиц. Известно, что

$$a_1 = a_2 = 1,$$

а про следующие члены последовательности известно:

$$a_3 = a_1 \bigoplus a_2, a_4 = a_3 \vee a_2, a_5 = a_4 \wedge a_3,$$

затем снова

$$a_6 = a_5 \bigoplus a_4, a_7 = a_6 \vee a_5, a_8 = a_7 \wedge a_6$$

и так далее.

Найдите шесть последовательных членов, начиная с a_{2024}.

Ответ: 101011.

Задача 3. Пусть

$$a = \sqrt{2023} - \sqrt{2024}.$$

Вычислите значение $a^2 + \frac{1}{a^2}$.

Ответ: 8094.

Задача 4. Сумма длин сторон AB, BC треугольника ABC равна 11, величина угла ABC равна 60°. Радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен $2/\sqrt{3}$. Известно, что длина стороны AB больше длины стороны BC. Найдите квадрат длины высоты треугольника ABC, опущенной из вершины A.

Ответ: 48.

Задача 5.Найдите наибольшее и наименьшее пятизначные числа, делящиеся на 7, которые при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 дают одинаковый остаток 1. В ответе укажите разность между наибольшим и наименьшим найденными числами.

Ответ: 87360.

Задача 6. Площадь трапеции $ABCD$ равна S. Основание AB в 7 раз длиннее основания CD. На стороне AD выбрана точка K такая, что площадь треугольника ABK в два раза меньше площади треугольника BCK. Найти площадь треугольника CDK. В ответе запишите найденное значение при $S = 10240$.

Ответ: 832.

Задача 7. Разность арифметической прогрессии равна $\frac{1}{9}$. Определить ее первый член a_1, если известно, что он лежит в интервале $(12; 15)$ и существует число n такое, что отношение суммы первых n членов прогрессии к сумме последующих $n-1$ членов равно $1 - \frac{1}{n}$. В ответе записать $225a_1$.

Ответ: 3000.

Задача 8. На юбилее города Нью-Васюки известный гроссмейстер Бендер О.И. дал сеанс одновременной игры в шахматы на нескольких досках. В течение первых 2 часов он выиграл 50 % партий и проиграл несколько партий. За последующие 2 часа он из оставшихся партий выиграл 25 %, 21 партию проиграл и 30 партий закончил вничью. Найдите наименьшее число досок, на которых шла игра.

Ответ: 138.

Задача 9. Найдите целую часть наибольшего значения функции на промежутке $(0; 2024)$, которая при всех допустимых значениях x удовлетворяет равенству $f(x) - 2f(\frac{2}{x}) = x + 1$.

Ответ: -3.

Задача 10. Назовем множество чисел X *симметричным*, если в нем можно выбрать некоторое число m так, что для любого элемента x из множества X число $2m - x$ тоже является его элементом. Александр очень любит симметричные множества, поэтому сегодня он хочет узнать, сколько существует симметричных множеств, состоящих ровно из 5 натуральных чисел от 1 до 100 (включительно). Однако у Александра много дел, и у него мало времени. Помогите Александру успеть выполнить все дела и найдите количество указанных симметричных множеств.

Ответ: 32500.

11 класс

Задача 1. Последовательность натуральных чисел a_n задана следующим образом:

$$a_1 = 23, a_2 = 24$$

и

$$a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} - 10 \left[\frac{a_n \cdot a_{n-1}}{10} \right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x. Найдите $a_{100} + a_{101} + \cdots + a_{105}$.

Ответ: 36.

Задача 2. Найдите сумму всех целых x, удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 16} \leqslant 6 + \sqrt{x + 4}.$$

Ответ: 5.

Задача 3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$1+\cos 2x+\sin 2x = a\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

имеет на отрезке $[0;2\pi]$ ровно три решения. В ответе запишите сумму квадратов всех найденных значений a.

Ответ: 16.

Задача 4. Пусть

$$\alpha = -\sqrt{|\,40\sqrt{2}-57\,|}+\sqrt{40\sqrt{2}+57},\ \beta=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

— корни некоторого приведенного многочлена $P_n(x)$ с целыми коэффициентами степени n. Какое наименьшее натуральное значение может принимать n?

В ответе укажите $n \cdot P_n(n^2+1)$.

Ответ: -10.

Задача 5. Велосипедист выехал из точки А точно в полдень и спустя 2 часа 30 минут прибыл в пункт В. В 12 часов 30 минут из А вслед за велосипедистом выехал автомобиль. Найти время его прибытия в пункт В, если известно, что это случилось спустя 40 минут после того, как он обогнал велосипедиста. Если время прибытия находится неоднозначно, то в ответе укажите разность между наибольшим и наименьшим найденными значениями в минутах.

Ответ: 40.

Задача 6. Площадь трапеции $ABCD$ равна S. Основание AB в 7 раз длиннее основания CD. На стороне AD выбрана точка K такая, что площадь треугольника ABK в два раза меньше площади треугольника BCK. Найти площадь треугольника CDK, если $S=2240$.

Ответ: 182.

Задача 7. Найдите наибольшее и наименьшее шестизначные числа M и m, кратные 13, которые при делении на 3, 4, 5, 6, 7 дают остаток 2. В ответе запишите разность $M-m$.

Ответ: 895440.

Задача 8. Определить число членов конечной арифметической прогрессии, если известно, что первый ее член положительный, в 51 раз больше одного из членов прогрессии и равен сумме ее последних шести членов.

Ответ: 12.

Задача 9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость CPQ, где P — середина ребра A_1B_1, а Q — центр грани $ABCD$. В каком отношении $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь) делит эта плоскость объем куба?

В ответе запишите $10\cdot\frac{m+n}{|m-n|}$.

Ответ: 24.

Задача 10. Назовем множество чисел X *симметричным*, если в нем можно выбрать некоторое число m так, что для любого элемента x из множества X число $2m-x$ тоже является его элементом. Александр очень любит симметричные множества, поэтому сегодня он хочет узнать, сколько существует симметричных множеств, состоящих ровно из 5 натуральных чисел от 1 до 80 (включительно). Однако у Александра много дел, и у него мало времени. Помогите Александру успеть выполнить все дела и найдите количество указанных симметричных множеств.

Ответ: 19760.

Отборочный тур олимпиады ТИИМ по информатике

На отборочном туре по информатике участникам были предложены два комплекта по 6 заданий разной тематики: геометрия, криптография, динамическое программирование, теория чисел, работа со строками.

Для получения максимального балла (100) по каждой из задач программа должна была выдать верный ответ на всех тестовых данных. По каждой из задач таких тестов было не менее 25. Одной из самых сложных оказалась для участников задача "Громкие шкафы". С ней полностью справилось только двое участников.

Задача 6 (10-11 класс). Громкие шкафы.

Чем больше шкаф, тем громче он падает.
— Народная мудрость.

В магазине мебели есть отдел, в котором продаются шкафы. В этом отделе в ряд расположены n шкафов с высотами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ соответственно. Известно, что расстояние между любыми двумя соседними шкафами составляет 1 метр. Хулиган Петя захотел наделать шума в этом магазине. Поэтому он решил толкнуть один из шкафов влево или вправо. При этом, если шкаф падает, то он задевает другие шкафы, которые тоже начинают от этого падать в ту же сторону. Шкаф высотой x заденет все шкафы, которые находятся на расстоянии строго меньше x от него. Также, когда шкаф высотой x падает, то он издает x децибел шума. Это значит, что суммарный шум, наделанный падением каких-то шкафов, равен сумме их высот. Петя задался вопросом, какой максимальный суммарный шум он сможет наделать в магазине, если толкнет ровно один шкаф так, чтобы он начал падать влево или вправо.

Входные данные

В первой строке содержится число t ($1 \leq t \leq 10$) — количество наборов входных данных, для которых необходимо найти решение. Каждый набор входных данных начинается с числа n ($1 \leq n \leq 10^5$) — количества шкафов в магазине. В следующей строке каждого набора находится массив a из n чисел ($1 \leq a_i \leq n$), задающий высоты для шкафов.

Выходные данные

Для каждого набора входных данных выведите одно число в отдельной строке — максимальный шум, который может наделать Петя в магазине, толкнув ровно один любой шкаф влево или вправо.

Оценивание

Время выполнения программы ограничено 1 секундой. Решения, работающие корректно на тестах, где $n \leq 1000$, будут получать не менее 60 баллов.

Примеры

Входные данные	Результат работы программы
3 6 3 1 5 1 5 3 11 1 3 4 3 1 9 11 9 8 1 1 9 6 8 6 5 1 2 1 4 1	18 50 34
1 10 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1

Разбор

Представим, что мы толкнули какой-либо шкаф в какую-либо сторону (без ограничения общности считаем, что толкнули его влево). Это означает, что какой-то подотрезок шкафов левее упал. При этом первый шкаф левее, который не упал, находится достаточно далеко от каждого из свалившихся шкафов, поскольку они его не задели. Как найти первый шкаф левее, который не будет задет? За $O(n)$ можно просто идти влево по шкафам и поддерживать самое левое место, куда свалился какой-либо из упавших шкафов. Если следующий шкаф слева находится правее этого места, то он тоже свалится влево и возможно сделает самое левое место еще левее. Таким образом, научились решать задачу за $O(n^2)$: просто симулируем падение каждого шкафа влево и вправо за $O(n)$. Так как всего шкафов n, то суммарное количество действий для всех симуляций будет равно $O(n^2)$. Такое решение набирало 60 баллов. Далее опишем решение на 100 баллов. Посчитаем $dp[i]$ — самый левый шкаф, который упадет, если мы толкнем i-й шкаф. Будем пересчитывать dp слева направо. Изначально считаем, что $dp[i] = i$. Заметим, что $dp[i]$ можно пересчитать как $\min(dp[j])$ по всем j таким, что $i - j < a_i$, что равносильно $j > i - a_i$. С помощью вышеописанного способа эту динамику можно посчитать за $O(n^2)$. Научимся считать ее за $O(n \log n)$. Для этого нужно использовать структуру данных, называемую "дерево отрезков": она умеет находить минимум на подотрезке массива за $O(\log n)$ и обновлять значение по какому-то индексу массива за $O(\log n)$. Будем хранить все насчитанные состояния dp в дереве отрезков. Дальше для пересчета $dp[i]$ используем это дерево отрезков, чтобы найти искомый минимум $\min(dp[i - a_i + 1], dp[i - a_i + 2], \ldots, dp[i])$ за $O(\log n)$. После этого обновим через найденное число значение $dp[i]$ и пойдем вычислять следующие значения dp. Таким образом, ответ будет равен $\max(i - dp[i] + 1)$ по всем возможным i. Для того чтобы учесть случай, когда мы толкнули шкаф вправо, можно применить известный для такого типа задач трюк: перевернем изначальный массив и будем решать такую же задачу (толкать шкаф влево) уже на нем. Из двух полученных ответов для исходного и перевернутого массива выберем максимальный. В решении мы сделали $O(n)$ запросов в дерево отрезков, каждый из которых отработал за $O(\log n)$, значит итоговая асимптотика решения $O(n \log n)$.

Авторское решение на языке C++:

```
#include <bits/stdc++.h>
#define all(x) (x).begin(),(x).end()
typedef long long ll;
using namespace std;
#define int ll
const int INF = 1e9 + 100;
struct segtree {
    int size = 1;
    vector<pair<int, int>> tree;
        segtree(int n) {
        while (size < n) size *= 2;
        tree.assign(size * 2 - 1, {INF, INF});
    }
        void upd(int i, ll v) {
        upd(i, v, 0, 0, size);
    }
        pair<ll, int> get(int l, int r) {
        return get(l, r, 0, 0, size);
    }
    private:
    void upd(int i, ll v, int x, int lx, int rx) {
```

```
        if (rx - lx == 1) {
            tree[x] = {v, i};
        } else {
            int m = (rx + lx) >> 1;
            if (i < m) {
                upd(i, v, 2 * x + 1, lx, m);
            } else {
                upd(i, v, 2 * x + 2, m, rx);
            }
            tree[x] = min(tree[2 * x + 1], tree[2 * x + 2]);
        }
    }
    pair<ll, int> get(int l, int r, int x, int lx, int rx) {
        if (lx >= r || rx <= l) {
            return {INF, INF};
        }
                if (l <= lx && rx <= r) {
            return tree[x];
        }
        int m = (rx + lx) >> 1;
        return min(get(l, r, 2 * x + 1, lx, m), get(l, r, 2 * x + 2, m, rx));
    }
};
void solve() {
    int n;
    cin >> n;
    vector<int> a(n);
    for (auto &el: a) cin >> el;
    auto solve_60 = [](int n, vector<int> a) {
        auto solve_left = [&]() -> ll {
            // что если толкнем шкаф влево
            ll ans = 0;
            for (int i = 0; i < n; ++i) {
                int left = i - a[i] + 1;
                ll cur = 0;
                for (int j = i; j >= 0 && j >= left; --j) {
                    cur += a[i];
                    left = min(left, j - a[j] + 1);
                }
                ans = max(ans, cur);
            }
            return ans;
        };
        ll ans = solve_left();
        reverse(all(a));
        ans = max<ll>(ans, solve_left());
        return ans;
    };
    auto solve_100 = [](int n, vector<int> a) {
```

```
        auto solve_left = [&]() -> ll {
            vector<ll> pref(n + 1);
            for (int i = 0; i < n; ++i) pref[i + 1] = pref[i] + a[i];
            auto get_sum = [&pref](int left, int right) {
                return pref[right + 1] - pref[left];
            };
            segtree st(n);
            vector<ll> dp(n);
            dp[0] = a[0];
            st.upd(0, 0);
            for (int i = 1; i < n; ++i) {
                auto [mn_val, ind] = st.get(max<int>(0, i - a[i] + 1), i);
                if (ind == INF) {
                    assert(a[i] == 1);
                    dp[i] = a[i];
                } else {
                    if (mn_val >= i - a[i] + 1) {
                        dp[i] = get_sum(max<int>(0, i - a[i] + 1), i);
                    } else {
                        dp[i] = dp[ind] + get_sum(ind + 1, i);
                    }
                }
                st.upd(i, max<int>(0, i - a[i] + 1));
            }
            return *max_element(all(dp));
        };
        ll ans = solve_left();
        reverse(all(a));
        ans = max<ll>(ans, solve_left());
        return ans;
    };
    cout << solve_100(n, a) << '\n';
}
signed main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
    int t = 1;
    cin >> t;
    while (t--) {
        solve();
    }
    return 0;
}
```

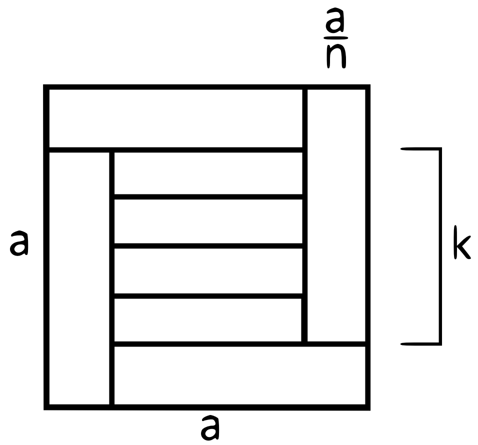
Заключительный тур по математике

На заключительном туре по математике участникам было предложено два варианта, каждый из которых содержал 10 заданий. Каждое из заданий могло быть максимально оценено в 10 баллов.

Вариант заданий для 11 класса

Задача 1. Разрежьте квадрат на 22 прямоугольника, необязательно одинаковых, таких, что периметр каждого из них равен полупериметру исходного квадрата.

Решение (*Условие и решение задачи представил методической комиссии Дворянинов С.В., к.ф.-м.н., доцент*):



Пусть периметр квадрата равен $P = 4a$. Разрежем квадрат, как показано на рисунке. Найдем периметр каждого из четырех окаймляющих прямоугольников. $P_1 = 2\left(\frac{n-1}{n}a + \frac{a}{n}\right) = \frac{P}{2} = 2a$ при любом n. Тогда каждый из k одинаковых прямоугольников, на которые разрезана внутренняя часть, имеет периметр $P_2 = 2a \cdot \left(\frac{n-2}{n} \cdot \frac{1}{k} + \frac{n-2}{n}\right) = P_1 = 2a$. Отсюда получим: $n - 2 + kn - 2k = kn,\ \ 2k = n - 2$. По условию, $k + 4 = 22$. Следовательно, $k = 18$, $n = 38$. Окаймляющие прямоугольники размера $\frac{a}{38} \times \frac{37a}{38}$, внутренние прямоугольники размера $\frac{a}{19} \times \frac{18a}{19}$.

Задача 2. Числа от 1 до N выписаны подряд в вершины правильного N-угольника (по часовой стрелке). Начиная с первого числа, отмечается каждое k-е число (т.е. числа $1,\ k+1,\ 2k+1,\ \ldots$), причем при повторных оборотах учитываются и отмеченные числа. Отметки продолжаются до тех пор, пока не окажется, что все числа, которые отмечаются, уже отмечены. Сколько чисел останется без отметки, если $N = 2025$, $k = 13$?

Решение (*Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*):

$N = 2025,\ k = 13$

1 оборот $(1, 14, 27, \ldots, 2016)$ $2016 = 13 \cdot 155 + 1$

отмечены 156 чисел $2016 + 13 - 2025 = 4$

2 оборот $(4, 17, 30, \ldots, 2019)$ $2019 = 13 \cdot 155 + 4$

отмечены 156 чисел $2019 + 13 - 2025 = 7$

3 оборот $(7, 20, 33, \ldots, 2022)$ $2022 = 13 \cdot 155 + 7$

отмечены 156 чисел $2022 + 13 - 2025 = 10$

4 оборот $(10, 23, 36, \ldots, 2025)$ $2025 = 13 \cdot 155 + 10$

отмечены 156 чисел $2025 + 13 - 2025 = 13$

5 оборот $(13, 26, 39, \ldots, 2015)$ $2015 = 13 \cdot 155 + 0$

отмечены 155 чисел $2015 + 13 - 2025 = 3$

6 оборот $(3, 16, 29, \ldots, 2018)$ $2018 = 13 \cdot 155 + 3$

отмечены 156 чисел $2018 + 13 - 2025 = 6$

7 оборот $(6, 19, 32, \ldots, 2021)$ $2021 = 13 \cdot 155 + 6$

отмечены 156 чисел $2021 + 13 - 2025 = 9$

8 оборот $(9, 22, 35, \ldots, 2024)$ $2024 = 13 \cdot 155 + 9$

отмечены 156 чисел $2024 + 13 - 2025 = 12$

9 оборот $(12, 25, 38, \dots, 2014)$ $2014 = 13 \cdot 154 + 12$
отмечены 155 чисел $2014 + 13 - 2025 = 2$
10 оборот $(2, 15, 28, \dots, 2017)$ $2017 = 13 \cdot 155 + 2$
отмечены 156 чисел $2017 + 13 - 2025 = 5$
11 оборот $(5, 18, 31, \dots, 2020)$ $2020 = 13 \cdot 155 + 5$
отмечены 156 чисел $2020 + 13 - 2025 = 8$
12 оборот $(8, 21, 34, \dots, 2023)$ $2023 = 13 \cdot 155 + 8$
отмечены 156 чисел $2023 + 13 - 2025 = 11$
13 оборот $(11, 24, 37, \dots, 2013)$ $2013 = 13 \cdot 154 + 11$
отмечены 155 чисел $2013 + 13 - 2025 = 1$
$\Rightarrow$
1 оборот $(1, 14, 27, \dots, 2016)$ $2016 = 13 \cdot 155 + 1$
отмечены 156 чисел $2016 + 13 - 2025 = 4$
...
Значит, все числа отмечены.

Ответ: 0.

Задача 3. Найдите коэффициент при x^{11} у многочлена $\left(1 + x + x^3\right)^6$.

Решение (*Условие и решение задачи представил методической комиссии Яруллин Р.Н., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*):

Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{k-1} b + \dots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$(a+b+c)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} (b+c)^k = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} (b+c)^k = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \sum\limits_{s=0}^{k} C_k^s b^{k-s} c^s$.

Разложим $\left(1 + x + x^3\right)^6$, подставив $a = 1$, $b = x$, $c = x^3$, $n = 6$:

$\sum\limits_{k=0}^{6} C_6^k \sum\limits_{s=0}^{k} C_k^s x^{k-s} (x^3)^s = \sum\limits_{k=0}^{6} \sum\limits_{s=0}^{k} C_6^k C_k^s x^{k+2s}$. Отсюда следует, что

$\begin{cases} k + 2s = 11, \\ 0 \leqslant s \leqslant k \leqslant 6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 3, \\ k = 5. \end{cases}$ Коэффициент равен $C_6^5 \cdot C_5^3 = \frac{6!}{5!1!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = 60$.

Ответ: 60.

Задача 4. Найдите по крайней мере пару троек (m, n, k) различных натуральных чисел, таких что $\frac{1}{2025} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k}$.

Решение (*Условие и решение задачи представлила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*):

а) $\frac{1}{2025} = \frac{1}{x} + \frac{1}{25x} + \frac{1}{81x} = \frac{2025+81+25}{2025x} = \frac{2131}{2025x} = \frac{1}{2025}$, $x = 2131$.
Тогда $m = x = 2131$, $n = 25x = 53275$, $k = 81x = 172611$.

б) НОК$(a, b, c) = 2025$, $a = 81$, $b = 45$, $c = 75$.
$\frac{1}{2025} = \frac{1}{ax} + \frac{1}{bx} + \frac{1}{cx} = \frac{1}{81x} + \frac{1}{45x} + \frac{1}{75x} = \frac{25+45+27}{2025x} = \frac{97}{2025x} = \frac{1}{2025}$, $x = 97$.
Тогда $m = 81x = 7857$, $n = 45x = 4365$, $k = 75x = 7275$.

Ответ: $(2131; 53275; 172611)$, $(7857; 4365; 7275)$.

Задача 5. В каждой вершине треугольной пирамиды написаны некоторые числа. На каждом ребре написано число, равное сумме чисел, стоящих на его концах. Известно, что сумма чисел на всех ребрах равна a и сумма их квадратов равна b. Чему равна сумма их кубов, если $a = 3$, а $b = 3$?

Решение (*Условие и решение задачи представил методической комиссии Новицкий Н.В., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*):

Обозначим числа, записанные в вершинах x_i, $i = 1, \ldots, 4$. По условию

$$(x_1 + x_2) + (x_1 + x_3) + (x_1 + x_4) + (x_2 + x_3) + (x_2 + x_4) + (x_3 + x_4) = a,$$

откуда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{a}{3}$. Тогда

$$b = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_1 + x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2 + (x_3 + x_4)^2 =$$

$$= 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_3x_4) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2$$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{b-\frac{a^2}{9}}{2} = \frac{9b-a^2}{18}$.
$(x_1 + x_2)^3 + (x_1 + x_3)^3 + (x_1 + x_4)^3 + (x_2 + x_3)^3 + (x_2 + x_4)^3 + (x_3 + x_4)^3 =$
$= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4)+$
$+(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 + x_2^2 + 2x_2x_4 + x_4^2 - x_1x_2 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_3x_4)+$
$+(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1^2 + 2x_1x_4 + x_4^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_4 - x_3x_4) =$
$= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\left[3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\right] = \frac{a}{3} \cdot \frac{9b-a^2}{18} \cdot 3 = \frac{a(9b-a^2)}{18}$.

Для $a = 3,\ b = 3$ получим $\frac{a(9b-a^2)}{18} = \frac{3\cdot(9\cdot 3-3^2)}{18} = 3$.

Ответ: 3.

Задача 6. Дана прямоугольная пирамида $SABC$, известно, что SB — высота этой пирамиды, $\angle ABC = \alpha$ и $SB = AC$. На SB как на диаметре построили сферу, она пересекает SA и SC в M и L соответственно. Вычислите объем пирамиды $SMBL$, если $SB = h$ и объем $SABC$ равен V. Выполнить расчет для $\alpha = 60°, h = \sqrt[3]{3}, V = \frac{1}{3}$.

Решение (*Условие и решение задачи представил методической комиссии Майоров С.С., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*):

Решим задачу в общем случае. Проведем BM и BL в соответствующих боковых гранях, заметим то, что $\angle BMS$ и $\angle BLS$ вписанные углы, опирающиеся на диаметр, следовательно, они прямые, то есть BM и BL – высоты из прямого угла в $\triangle SAC$ и $\triangle ACB$ соответственно. Обозначим $AB = a$, $BC = b$, тогда из соотношений в прямоугльном треугольнике знаем, что

$$\frac{SM}{MA} = \frac{SB^2}{AB^2} = \frac{h^2}{a^2} \quad \text{и} \quad \frac{SL}{LC} = \frac{SB^2}{BC^2} = \frac{h^2}{b^2}.$$

Поскольку пирамиды $SABC$ и $SMBL$ имеют общий трехгранный угол, то их объемы связаны следующим соотношением:

$$\frac{V_{SMBL}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SL}{SC},$$

откуда $V_{SMBL} = \dfrac{h^4}{(h^2 + a^2)(h^2 + b^2)} \cdot V$. Запишем формулу объема $SABC$:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SB \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} \cdot h \cdot ab \sin\alpha, \quad ab = \frac{6V}{h \sin\alpha}.$$

По теореме косинусов для $\triangle ABC$: $h^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$, $a^2 + b^2 = h^2 + 2ab\cos\alpha$, $a^2 + b^2 = h^2 + \dfrac{12V\cos\alpha}{h\sin\alpha}$.

Теперь подставим получившиеся выражения в формулу для объема $SMBL$ и, применив теорему Пифагора, найдем

$$V_{SMBL} = \frac{h^4 V}{(h^2 + a^2)(h^2 + b^2)} = \frac{h^4 V}{h^4 + h^2(a^2 + b^2) + (ab)^2} =$$

$$= \frac{h^4V}{2h^4 + \frac{12Vh\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{36V^2}{h^2\sin^2\alpha}} = \frac{h^6V\sin^2\alpha}{2h^6\sin^2\alpha + 12Vh^3\cos\alpha\sin\alpha + 36V^2}.$$

Подставляя значения параметров из условия, получаем $\frac{9}{12\sqrt{3}+70}$.

Ответ: $\frac{9}{12\sqrt{3}+70}$.

Задача 7. Из полного набора трехзначных чисел наудачу выбирается одно (числа не могут начинаться с цифры 0). Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются:

а) в порядке убывания слева направо,

б) в порядке неубывания слева направо.

Решение (*Условие и решение задачи представил методической комиссии Балабекян А.А., студент 2-го курса ФКН ВШЭ.*):

а) Пусть событие A – получение трехзначного числа, цифры в записи которого расположены в порядке убывания слева направо (например, 320, 951). Общее количество трехзначных чисел N равно количеству чисел от 100 до 999, поэтому $N = 999 - 100 + 1 = 900$. Любые 3 различные цифры, извлеченные из данных 10 цифр $0, 1, \ldots, 8, 9$, можно единственным способом упорядочить по убыванию, поэтому число благоприятствующих событию A исходов

$$M = C_{10}^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120.$$

Следовательно,

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{120}{900} = \frac{4}{30}.$$

б) Все трехзначные числа, цифры которых расположены в порядке неубывания, могут содержать любые три цифры из следующих девяти: $9, 8, \ldots, 2, 1$, возможно, с повторениями. Следовательно,

$$M = C_9^1 + 2C_9^2 + C_9^3 = C_{10}^2 + C_{10}^3 = C_{11}^3 = \frac{11!}{3!8!} = 165.$$

Поэтому

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{165}{900} = \frac{11}{60}.$$

Ответ: а) $\frac{4}{30}$, б) $\frac{11}{60}$.

Задача 8. Пусть x, y, z – положительные вещественные числа, удовлетворяющие равенству $x+y+z=1$. Найдите наименьшее положительное значение a такое, что для любой тройки (x, y, z) выполняется неравенство $\frac{a^{1-x}}{1-x} + \frac{a^{1-y}}{1-y} + \frac{a^{1-z}}{1-z} \geqslant \frac{405}{2}\sqrt[3]{45}$.

Решение (*Условие и решение задачи представил методической комиссии Чиликов Л.В., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*):

Оценим наименьшее значение выражения $\frac{a^{1-x}}{1-x} + \frac{a^{1-y}}{1-y} + \frac{a^{1-z}}{1-z}$. Применим неравенство о средних для трех чисел:

$$\frac{a^{1-x}}{1-x} + \frac{a^{1-y}}{1-y} + \frac{a^{1-z}}{1-z} \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{a^{3-(x+y+z)}} \sqrt[3]{\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}} = 3a^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1-y)(1-z)}}.$$

Теперь заметим, что $1-x = y+z$, $1-y = z+x$, $1-z = x+y$. Обозначим $y+z = u$, $z+x = v$, $x+y = t$. Тогда $u+v+t = 2$ и $\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1-y)(1-z)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{uvt}}$. По неравенству о средних

$$\frac{2}{3} = \frac{u+v+t}{3} \geqslant \sqrt[3]{uvt}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{uvt}} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Таким образом, наименьшее значение данного выражения равно $\frac{9}{2}a^{\frac{2}{3}}$ (равенство при $x = y = z = \frac{1}{3}$). Это возрастающая функция, а потому теперь достаточно решить уравнение

$$\frac{9}{2}a^{\frac{2}{3}} = \frac{405}{2}\sqrt[3]{45},$$

откуда $a = 2025$.

Ответ: 2025.

Задача 9. Назовем *словом* любую последовательность любых символов. Андрей играет в игру: вначале ему выдается набор из 2026 слов, состоящих не более, чем из 2025 букв. Андрей может за один ход приписать к любому слову справа или слева последовательность, состоящую ровно из 2025 букв, тем самым изменив это слово. Игра заканчивается, если через несколько ходов Андрей может получить набор, в котором найдутся два одинаковых слова. Всегда ли Андрей может выиграть? Если ответ положительный, то найдите, за какое наименьшее число ходов Андрей выигрывает независимо от исходного набора слов.

Решение (*Условие и решение задачи представил методической комиссии Чиликов Л.В.,студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*):

Очевидно, что в данном наборе слов найдутся два слова s и w, состоящие из одинакового числа букв (всего слов 2026, а различных длин не более 2025, поскольку длины слов не превосходят 2025). Длину любого слова x будем обозначать $|x|$. Тогда получаем $|s| = |w|$. Если $s = w$, то Андрей выиграл. Если $s \neq w$, то он будет придерживаться следующей стратегии: первым ходом к слову s он припишет справа любую последовательность l из 2025 букв, оканчивающуюся словом w, тогда слово s превратится в слово sl. Вторым ходом Андрей припишет к слову w слева первые 2025 букв слова sl (пусть эти буквы составляют последовательность t.) Тогда получаем $tw = sl$.

Итак, уже доказано, что Андрею для победы требуется не более двух ходов. Докажем, что за один ход выиграть получится не всегда. Для этого рассмотрим набор из слов вида $a, aa, \ldots, a \ldots a$ (2025 букв a) и b. Андрею точно придется сделать хотя бы один ход, поскольку одинаковых слов в исходном наборе нет. Сделав первый ход, Андрей увеличит длину какого-то из слов на 2025. Тогда в этом слове будет не менее 2026 букв (поскольку в нашем наборе наименьшее число букв в слове равно 1). Это слово не будет равно ни одному остальных из имеющихся, поскольку оно длиннее всех слов исходного набора. Все остальные слова не равны по условию. Таким образом, за один ход добиться победы не получится, следовательно, потребуется не менее двух ходов для гарантированной победы.

Ответ: Андрей всегда может выиграть за два хода.

Задача 10. Сжё фщёьё мдчё ьёпгфщцлуёёё тщг тлюлцг фнервгг

$$f(x) = 33\left\{\frac{7x-1}{33}\right\} + 1.$$

Еёйбгжз зо езтлбугхедз жлирг.

Решение (*Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*):

В русском алфавите 33 буквы. Очевидно, функция $f(x) = 33\left\{\frac{7x-1}{33}\right\} + 1$ и есть ключ к шифровке. Здесь скобки $\{\ \}$ обозначают дробную часть числа. Функция $f(x)$ переводит целое число от 1 до 33 в другое целое число (т.е. букву по месту в алфавите в другую букву). Для расшифровки использовать функцию не получается, значит, она была использована для шифровки. Составим таблицу дешифровки:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
а	б	в	г	д	е	е	ж	з	и	й	к	л	м	н	о	п
с	д	ц	и	ы	н	а	т	е	ч	й	ь	о	б	у	ё	ш

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
р	с	т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ъ	ы	ь	э	ю	я
к	э	п	в	ф	ж	щ	п	ю	р	г	х	з	ъ	м	я

Получилось «Эта фраза была зашифрована при помощи функции $f(x) = 33\left\{\frac{7x-1}{33}\right\}+1$. Найдите её неподвижные точки.»

Найдем неподвижные точки, решив уравнение $f(x) = x$:

$$33\left\{\frac{7x-1}{33}\right\}+1 = x;\ \left\{\frac{7x-1}{33}\right\} = \frac{x-1}{33};\quad \frac{7x-1}{33} - \left[\frac{7x-1}{33}\right] = \frac{x-1}{33};\ \left[\frac{7x-1}{33}\right] = \frac{2x}{11}.$$

Обозначим $\left[\frac{7x-1}{33}\right] = n$, где n – целое число. Тогда $\frac{2x}{11} = n \Rightarrow x = \frac{11n}{2}$. Подставим в выражение

$$\left[\frac{\frac{77n}{2}-1}{33}\right] = n;\ \left[\frac{77n-2}{66}\right] = n;\ \left[n + \frac{11n-2}{66}\right] = n.$$

Следовательно, $0 \leqslant \frac{11n-2}{66} < 1$. Отсюда $\frac{2}{11} \leqslant n < \frac{68}{11}$, т.е. $1 \leqslant n \leqslant 6$. Получаем 6 точек: $\frac{11}{2}, 11, \frac{33}{2}, 22, \frac{55}{2}, 33$.

Ответ: $\frac{11}{2}, 11, \frac{33}{2}, 22, \frac{55}{2}, 33$.

Заключительный тур олимпиады ТИИМ по информатике

Задания заключительного тура превосходили по сложности задания отбора. Так же, как и на отборочном туре, участникам было предложено решить 6 задач. Задания оценивались по 100-балльной шкале.

Приводим здесь две задачи заключительного тура.

Задача 5. Римское произведение

В римской системе счисления можно представить любое число от 1 до 3999:

$$\mathrm{I} = 1;\ \mathrm{V} = 5;\ \mathrm{X} = 10;\ \mathrm{L} = 50;\ \mathrm{C} = 100;\ \mathrm{D} = 500;\ \mathrm{M} = 1000.$$

Гай Юлий Цезарь, один из правителей Римской империи, решил оптимизировать написание чисел в римской системе счисления. Он заметил, что иногда короче записывать число как произведение нескольких римских чисел. Длиной такой записи назовем суммарную длину строки без пробелов со знаками умножения. Например, длина представления XXI*XXX равна 7. При этом сама римская запись числа тоже является представлением (например, IX имеет длину 2). Он поручил вам написать программу, которая вычислит для T чисел длину самого короткого представления каждого из них. Для лучшего понимания смотрите тесты и примечания.

Формат входного файла

В первой строке содержится число T ($1 \leq T \leq 10^5$) – количество чисел, для которых нужно найти длину самого короткого представления. В каждой из следующих T строк записано по одному числу. Каждое из чисел может принимать значения от 1 до 10^5.

Формат выходного файла

Для каждого числа в отдельной строке выведите ответ на задачу – минимальное возможное количество символов в представлении числа в виде произведения римских чисел. Если число **невозможно** представить в виде произведения римских чисел от 1 до 3999, выведите для него в ответе 100001.

Оценивание

Решения, верно работающие для $t \leq 10$, будут получать не менее 30 баллов. Решения, верно работающие для $t \leq 1000$, будут получать не менее 60 баллов.

Пример

Входные данные	Результат работы программы
8 1 2 3 4 12 4000 38 3977	1 2 3 2 3 4 6 9

Замечание

Например, число 12 можно представить в виде XII (12) или VI*II (6 * 2) или как IV*III (4*3). Таким образом, самым коротким представлением числа 12 является XII, оно имеет длину 3. Для числа 4000 самым коротким представлением является IV*M. Длина такого представления равна 4. Для числа 38 самым коротким представлением является XIV*II. Оно имеет длину 6.

Разбор

Обозначим искомое минимальное количество символов в представлении (в виде произведения римских чисел) числа m за ans_m. Пусть мы хотим представить некоторое число n в виде произведения чисел, записанных в римской системе, минимальной длины. Есть два варианта: либо мы можем просто записать это число в римской системе, либо это число является произведением не менее двух чисел, которые записаны в римской системе. Давайте исходно считать ответом для числа n его длину представления в римской системе (если оно записывается в римской системе, а иначе 100001). Понятно, что от перестановки множителей произведение не будет меняться. Давайте переберем первый множитель среди делителей числа n. Тогда ans_n равен минимуму по всем возможным делителям числа n выражения $ans_d + ans_{\frac{n}{d}} + 1$, где d – это произвольный делитель числа n. Эта формула получается так: мы берем минимальную искомую запись числа d, добавляем к ней справа символ умножения и после этого приписываем справа минимальную возможную запись числа $\frac{n}{d}$. Мы не можем заранее знать, с какого делителя начинается минимальная запись, поэтому как раз перебираем все возможные делители числа n. Для того, чтобы мы знали корректные значения всех ans_i, где $i < n$, будем пересчитывать массив ans в порядке возрастания индексов. В зависимости от эффективности алгоритма поиска делителей числа решение могло набирать 30-100 баллов. На 100 баллов предполагалось решение за $O(A \log A + T)$ (где A – максимальное число в запросах) с использованием алгоритма нахождения всех делителей для каждого от 1 до A, в котором мы для каждого числа от 1 до A проходимся циклом по всем кратным ему числам и добавляем этот делитель в отдельный массив для каждого числа (таким образом, мы выполним $A + \lfloor \frac{A}{2} \rfloor + \lfloor \frac{A}{3} \rfloor + \ldots + \lfloor \frac{A}{A} \rfloor = O(A \log A)$ операций).

Авторское решение на языке C++:

```
#include <bits/stdc++.h>
```

```
#define all(x) (x).begin(),(x).end()
#define len(x) (int)(x).size()
typedef long long ll;
typedef long double ld;
using namespace std;
#define int ll
#define double ld
vector<int> digits = {1000, 900,
    500, 400,
    100, 90,
    50, 40,
    10, 9,
    5, 4,
    1};
vector<int> length = {1, 2,
    1, 2,
    1, 2,
    1, 2,
    1, 2,
    1, 2,
    1};
int roman_len(int x) {
    assert(len(digits) == len(length));
    int ans = 0;
    for (int i = 0; i < len(digits) && x > 0; ++i) {
        while (x >= digits[i]) {
            x -= digits[i];
            ans += length[i];
        }
    }
    return ans;
}
constexpr int maxn = 100'000 + 1;
void solve() {
     int t; cin >> t;
     vector<int> qs(t);
     for (auto &el : qs) cin >> el;

    vector<int> ans(maxn, maxn);
    vector<vector<int>> dels(maxn);

    for (int i = 2; i < maxn; ++i) {
        for (int j = i; j < maxn; j += i) {
            dels[j].push_back(i);
        }
    }
    for (int i = 1; i < 4000; ++i) {
        ans[i] = min(ans[i], roman_len(i));
    }
```

```
    for (int i = 1; i < maxn; ++i) {
        for (auto del : dels[i]) {
            ans[i] = min(ans[i], ans[del] + ans[i / del] + 1);
        }
    }
    for (auto el : qs) {
        cout << ans[el] << '\n';
    }
}
signed main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
#ifdef ONPC
    assert(freopen("input.txt", "r", stdin));
    assert(freopen("output.txt", "w", stdout));
#endif
    int TT = 1;
#ifdef MT
    cin >> TT;
#endif
    while (TT--) {
        solve();
    }
#ifdef ONPC
    cerr << "Time(ms): " << 1000 * clock() / CLOCKS_PER_SEC << endl;
#endif
    return 0;
}
```

Задача 3. Сходка музыкантов

Сразу после того, как Иннокентий получил в подарок на день рождения гитару, он решил организовать сходку музыкантов. Он решил позвать на сходку n своих друзей, попутно пронумеровав их от 1 до n (так как Иннокентий математик, он любит нумеровать все вокруг). Так как все друзья Иннокентия очень важные люди, то все они не смогут прийти к началу сходки, а придут только спустя некоторое количество минут после начала: i-ый друг обещал прийти спустя a_i минут после начала сходки. Иннокентий будет считать сходку классной, если в какой-то момент времени на сходке присутствует хотя бы k его друзей. Друзья хотят, чтобы сходка была классной, а также чтобы каждый человек пробыл на сходке равное количество минут, ведь так будет справедливее всего. Так как они очень занятые, то они хотят выбрать минимально возможное количество минут, которое каждый человек обязан провести на сходке, чтобы сходка была классной. Помогите друзьям определить, сколько минут каждый из них должен провести на сходке, чтобы Иннокентий считал ее классной.

Формат входного файла

В первой строке вводится два целых числа n и k ($1 \le k \le n \le 10^5$) – количество друзей Иннокентия, а также количество друзей Иннокентия, которые должны одновременно присутствовать на сходке, чтобы Иннокентий посчитал ее классной. Во второй строке вводится n целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($1 \le a_i \le 10^9$) – на сколько минут каждый друг опоздает на сходку. Гарантируется, что все друзья пришли в разное время, то есть все числа в массиве a различны.

Формат выходного файла

В ответе выведите одно число – минимальное количество минут, которое каждый обязан провести на сходке, чтобы Иннокентий считал ее классной.

Оценивание

Решения, правильно работающие для $n \times max(a_i) \leq 10^5$, будут набирать не менее 40 баллов.

Пример

Входные данные	Результат работы программы
5 3 1 10 3 13 16	7

Замечание

Обратите внимание, что в момент ухода со сходки человек не находится на ней. Другими словами, если человек пришел спустя x минут после начала и провел t минут на сходке, то он находился на сходке в полуинтервал времени $[x, x+t)$ спустя начала сходки.

Разбор

Авторское решение данной задачи использует решение за $O(n \log n \log A)$, где A — максимальный возможный ответ. Основная идея решения заключается в двоичном поиске по ответу: так мы сводим задачу нахождения ответа к задаче о проверке, является ли вечеринка классной при фиксированном ответе. Для того чтобы проверить, что ответ не превосходит определенного числа t, нам нужно проверить, что существует точка на координатной прямой, которая содержит хотя бы k полуинтервалов вида $[a_i, a_i + t)$. Понятно, что достаточно проверить все точки, которые являются началом какого-либо из этих полуинтервалов. Это можно сделать с помощью сканирующей прямой, пройдясь упорядоченно по точкам открытия и закрытия всех полуинтервалов $[a_i, a_i + t)$ и для каждой точки открытия проверяя, сколько открытых полуинтервалов содержат эту точку, а также изменяя счетчик текущих открытых полуинтервалов в зависимости от типа точки (началом или концом полуинтервала она является). Сложность проверки составляет $O(n \log n)$, т.к. для проверки мы сортируем $O(n)$ точек, являющихся началами и концами отрезков. Сложность всего решения составляет $O(n \log n \log A)$, т.к. проверка осуществляется на каждой из $O(\log A)$ итераций двоичного поиска по ответу. Для лучшего понимания рекомендуется посмотреть код в архиве с решениями.

Авторское решение на языке C++:

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
typedef long long ll;
using namespace std;
int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
    int n, k;
    cin >> n >> k;
    vector<int> a(n);
    for (auto &el : a) cin >> el;
    auto check = [&] (int time) {
        vector<pair<int, int>> events;
        for (int i = 0; i < n; ++i) {
            events.push_back({a[i], 1});
            // если кто-то уходит в то же время
            // как другой приходит, то он уйдет раньше
            events.push_back({a[i] + time, -1});
        }
        sort(events.begin(), events.end());
```

```
        int cnt = 0;
        for (auto [x, type] : events) {
            cnt += type;
            if (cnt >= k) {
                return true;
            }
        }
        return false;
    };
    int l = -1, r = 1e9 + 100;
    while (r - l > 1) {
        int mid = (r + l) >> 1;
        if (check(mid)) {
            r = mid;
        } else {
            l = mid;
        }
    }
    assert(r > 0);
    cout << r;
    return 0;
}
```

Андреев Александр Анатольевич
руководитель сектора олимпиад школьников
кандидат физ.-мат. наук, доцент.

E-mail: andre01071948@yandex.ru

Балабекян Андрей Александрович,
тренер-педагог по информатике
Самаркого Регионального Центра
для Одаренных Детей.

andrei.balabekyan@yandex.ru

Куприн Андрей Валентинович,
старший преподаватель кафедры
“Математический анализ” МТУСИ

mornaq@yandex.ru

Максимова Екатерина Алексеевна,
специалист сектора олимпиад
школьников МТУСИ.

E-mail: ekamaks@bk.ru

Скородумова Елена Александровна,
доцент кафедры “Теория вероятностей и
прикладная математика” МТУСИ,
кандидат физ.-мат. наук, доцент.

E-mail: eas@mtuci.ru

Об избрании нового члена редакционной коллегии

От редакции

Редакция журнала “Математическое образование” сообщает, что в результате прямого закрытого голосования членом редакционной коллегии журнала единогласно выбран **Дворянинов Сергей Владимирович**.

С.В. Дворянинов — постоянный автор нашего журнала, он активно участвует в распространении журнала на различных мероприятиях в области математического образования.

Краткая биография:

Учился в школе № 1 г. Протвино, окончил в Куйбышеве математическую школу № 12 с золотой медалью, Заочную математическую школу при МГУ, участник Всесоюзных олимпиад школьников по химии (г. Вильнюс, 1968) и математике (г. Симферополь, 1970).

Ппоступил на мехмат МГУ в 1970 г., окончил аспирантуру под руководством профессоров А.Б. Васильевой и Н.Х. Розова, кандидат физ.-мат. наук (диссертационный Совет мехмата МГУ, 1980 г.).

Работал на кафедре дифференциальных уравнений Самарского государственного университета и на кафедре прикладной математики Самарского государственного аэрокосмического университета (сейчас эти вузы объединены). Читал курсы лекций по математическому анализу, обыкновенным дифференциальным уравнениям, ТФКП, линейной алгебре, спецкурсы (теория устойчивости, асимптотические методы). Доцент.

От Николая Христовича Розова унаследовал интерес к преподаванию математики. Параллельно заведовал кафедрой математического образования Самарского института повышения квалификации работников образования.

Первая статья в журнале “Квант” опубликована в № 1 в 1981 г. Первая статья в журнале “Математика в школе” — в № 4 в 1988 г.

По настоящее время — постоянный автор статей по математике и физике, а также задач в журналах «Квант», «Потенциал», «Математика», «Физика для школьников», «Математическое образование», «Квантик».

В 2010-2018 гг. — редактор и автор журналов «Математика в школе», «Математика для школьников», «Фрактал».

По направлению издательства “Просвещение” читал лекции учителям математики в городах Калининград, Новосибирск, Кемерово, Новокузнецк, Нальчик, Терек, Владикавказ, Курск, Иваново, Саратов, Волгоград, Челябинск, Ульяновск, Казань, Набережные Челны, Иваново, Магнитогорск, Владивосток, Хабаровск, Псков, Белгород. В 2015 году — в образовательном центре “Сириус”. Записи некоторых лекций Малого мехмата МГУ есть в сети.

В настоящее время преподаватель лаборатории “2×2” и выездных школ Малого мехмата.

Поздравляем Сергея Владимировича с избранием в члены редколлегии и желаем дальнейших успехов и плодотворной работы!

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2025 год (1 экз., включая стоимость пересылки): 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2025 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.
Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки): 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!
Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. Редакция принимает материал к публикации или отклоняет без объяснения причины. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138