ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

год двадцать девятый
номер 1 (113)
январь-март 2025 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.
Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)
Дубовицкий А.В.
Канель-Белов А.Я.
Комаров С.И.
Константинов Н.Н.
Костенко И.П.
Саблин А.И.

№ 1 (113), 2025 г.

© “Математическое образование”, составление, 2025 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2025 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 18.04.2025 г.
Стиль верстки разработан С.А. Кулешовым.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (113), январь – март 2025 г.

Содержание

Преподавание математики на естественных и гуманитарных факультетах МГУ

Г. Г. Малинецкий

Рассматриваются традиции преподавания математики на естественнонаучных и гуманитарных факультетах МГУ. Обсуждается, что удалось сохранить, а что было утрачено и почему в ходе образовательных реформ последних десятилетий. Показывается неразрывная связь между содержанием и методикой преподавания с большими научно-техническими проектами, выполняемыми в стране. Предлагаются меры, позволяющие изменить ситуацию к лучшему.

Статья основана на докладе в секции “Математическое образование” Межвузовской научно-практической конференции “Педагогические традиции Московского университета” 20.12.2024.

Университетские традиции

> Научное мировоззрение, проникнутое естествознанием и математикой, есть величайшая сила не только настоящего, но и будущего.
>
> *В.И. Вернадский*

В 1950–70-х гг. годах преподавание математики на физическом и ряде других факультетов МГУ определялось ключевыми научно-техническими проектами, формирующими будущее страны. Результаты выполнения Атомного и Космического проектов в те годы определяют суверенитет новой России.

Атомный проект, в ходе которого были созданы атомная и водородная бомбы, электростанции, ледоколы и подводные лодки, потребовал участия около 800 тысяч человек, из которых около 10 тыс. были учеными. Исследования динамики взрыва, решение задач газодинамики и гидродинамики, изучение свойств плазмы привели к развитию математической физики и вычислительной математики и подготовке специалистов, которые могли решать возникавшие проблемы. Это нашло отражение в преподавании — было издано несколько отличных курсов математической физики, а также вычислительной математики. Большинство решавшихся задач требовало активного вмешательства компьютеров.

Космический проект, в развитии которого участвовало 1,5 млн чел. и над воплощением которого работали 1,2 тыс. заводов, потребовал расчетов траекторий межконтинентальных баллистических ракет и космических аппаратов и маневров таких систем. Это стимулировало развитие теории динамических систем. Взлет в этой области, связанный с открытием странных аттракторов и динамического хаоса, произошел позже. Вероятно, именно поэтому хороших отечественных учебников для студентов, отражающих новую математическую реальность, связанную с обыкновенными дифференциальными уравнениями, не появилось.

Разработка систем управления сложными объектами потребовала создания программирования и его развития. За считанные годы сформировалась эта новая дисциплина.

Выдающийся математик, механик, организатор науки, президент АН СССР (1961–75) академик Мстислав Всеволодович Келдыш был первым директором Института прикладной математики (ИПМ) АН СССР. Этот институт сыграл огромную роль в реализации Атомного и Космического проектов. Создание сложных, дорогих, новых систем невозможно без множества компьютерных расчетов, позволяющих прогнозировать ход процессов в проектируемых объектах. В основании и развитии ИПМ большую роль сыграли главный конструктор космических аппаратов академик С.П. Королёв, основоположник атомной отрасли страны И.В. Курчатов и выдающийся математик М.В. Келдыш, которого часто называли “главным теоретиком космонавтики” (см. рис. 1).

Рис. 1. Создатели ракетно-ядерного щита России академики Сергей Павлович Королев, Игорь Васильевич Курчатов и Мстислав Всеволодович Келдыш

Академик М.В. Келдыш говорил, что сверхдержавы во второй половине XX в. должны владеть атомными и космическими технологиями и надежными шифрами. Это понимание тесной связи математики и её преподавания с задачами, решаемыми страной, было характерно для многих ученых. Например, академик В.И. Арнольд, подводя итог развития математики в XX в., пишет:

"Вся математика делится на три части: криптография (оплачиваемая ЦРУ, КГБ и им подобными), гидродинамика (поддерживаемая производителями атомных подводных лодок) и небесная механика (финансируемая военными и другими организациями, типа НАСА, имеющими отношение к ракетам).

Криптография привела к созданию теории чисел, алгебраической геометрии над конечными полями, алгебры[1], комбинаторики и компьютеров.

Гидродинамика породила комплексный анализ, уравнения в частных производных, теорию групп и алгебр Ли, теорию когомологий и методы вычислений.

Небесная механика дала начало теории динамических систем, линейной алгебре, топологии, вариационному исчислению и аналитической геометрии.

Существование таинственных связей между всеми этими различными областями — самая поразительная и прекрасная сторона математики (не имеющая никакого разумного объяснения)".

Само создание отрасли, выпускающей компьютеры, было связано с оборонными задачами. В СССР это баллистические расчеты, при наведении которых надо считать не только много, но и очень быстро, в США это задачи криптографии.

Важность математического образования прекрасно осознавалась руководителями страны. Это отношение характеризует следующий пример. В советское время «реформаторы от образования» решили избавить советских школьников от занятий геометрией и тригонометрией в силу бесполезности этих разделов для практической жизни. В ответ на это предложение министр обороны Д.Ф. Устинов написал, что ликвидация этих разделов приведет к снижению обороноспособности страны, а поэтому нецелесообразна. Вопрос был закрыт.

В свое время мне довелось беседовать с выдающимся просветителем России, заведующим кафедрой общей физики МФТИ Сергеем Петровичем Капицей. Он рассматривал образование как ключевой элемент развития общества. "Если бы вместо миллиардов, которые тратятся на вооруженные силы, нашлись бы миллионы на образование и здравоохранение, то для терроризма не было места!" — говорил он. на конференции по борьбе с терроризмом на Ближнем Востоке. Он предложил создать десяток университетов в этом регионе, что по его мысли полностью изменило бы ситуацию.

Обсуждая будущее нашей страны тридцать лет назад, он говорил, что ключевым элементом при таком горизонте прогноза является развитие в стране науки и образования. Поэтому на обложку

[1]Создатель современной алгебры Виет был криптографом короля Генриха IV во Франции.

нашей книги он советовал поместить улыбку Чеширского кота: "Сегодня мы видим только улыбку и не видим остального — будущее определится тем, что будет знать и уметь следующее поколение" [2] (см. рис. 2).

Рис. 2. На обложке книги, посвященной проектированию будущего, Сергей Петрович Капица предложил нарисовать улыбку Чеширского кота

С этими мыслями мне довелось беседовать с руководителями или ведущими представителями нынешних партий. К образованию в современной России имеют отношение более 70 млн чел. Сильная позиция партии по этому вопросу укрепит ее поддержку в обществе. Тем не менее, партийные программы обошли вниманием этот предмет, а на прямой линии с Президентом вопросы науки и образования не обсуждались.

Сильной стороной отечественного образования в целом и в МГУ в частности было активное участие в нем выдающихся ученых. Обращу внимание только на дела сотрудников ИПМ.

В 1970 г. по инициативе академика А.Н. Тихонова при активной поддержке президента АН СССР М.В. Келдыша был создан факультет вычислительной математики МГУ (ВМК). Андрей Николаевич привлек к работе на факультете многих ведущих специалистов в области математики и компьютерных наук. Он просил на основе лекций, которые будут читать эти люди, подготовить книги. Эти книги были написаны и изданы тиражами 60–100 тыс. экз. Факультеты ВМК после этого были созданы во многих университетах страны. Заметим, что на ВМК в тихоновские времена 2,5 года преподавали физику. Потом ее значительную часть вытеснило программирование. Не очевидно, что это разумно.

Андрея Николаевича очень беспокоили неудачные результаты реформ в преподавании математики в школе. Сразу после защиты докторской диссертации его учеником В.Ф. Бутузовым (в будущем заведующим кафедрой математики физфака МГУ) он позвонил ему и сказал, что пора заняться делом — написать школьный учебник геометрии. Учебник был написан, издан, рекомендован к массовому использованию [3]. По-моему, книга получилась очень удачной.

Поступить в МГУ было нелегко — конкурс был весьма высокий. Репетиторство было исключением, ребята готовились к вступительным экзаменам сами. Общий тираж пособия для поступающих, подготовленного профессорами МГУ Г.В. Дорофеевым, М.К. Потаповым, Н.Х. Розовым [4], превысил 2 млн экз. Стоит обратить внимание на Всероссийскую заочную математическую школу (ВЗМШ), созданную по инициативе ректора МГУ, математика И.Г. Петровского и сотрудника ИПМ академика И.М. Гельфанда. Эта школа позволила рассылать пособия и задания, а также проверенные решения школьникам всей страны. Сотрудники ВЗМШ говорят, что за время её существования эту школу закончило 70 тыс. ребят.

Огромную роль в выявлении и поддержке талантливых школьников сыграла система математических олимпиад, начиная со школьных соревнований и кончая национальным уровнем. Серия задачников, подготовленных Д.О. Шклярским, Н.Н. Ченцовым (сотрудником ИПМ), И.М. Ягломом [5], показывает, насколько высок был уровень предлагаемых заданий.

Советская школа была одной из ведущих в мире. “Советы обогнали нас в космосе за школьной партой”, — говорил в 1960 м г. американский президент Джон Кеннеди, предпринявший ряд мер по повышению уровня школьного образования.

Реализация Атомного и Космического проектов потребовала создания двух огромных министерств и быстрого привлечения владеющей математикой молодежи для работы в данной сфере. Это удалось сделать. Ряд экспертов связывает успехи не только с энергичной организационной работой. По их мнению были очень важны математические олимпиады, которые проводились в СССР с 1934 г. Олимпиады ясно показали кто, что и как из молодых может сделать.

Катастрофа средней школы

Мы ставим удивительный эксперимент — пытаемся дать высшее образование тем, кто не имеет среднего

Фольклор

Кризисы в истории средней школы в нашей стране бывали не раз. Чтобы понять нынешний, стоит оглянуться в прошлое. В 1931 г. Сталину доложили, что из выпускников советской средней школы не удастся вырастить врачей, инженеров, учителей, военных и представителей многих других профессий — пробелы в их знаниях слишком велики. Причина этого понятна — эксперименты в образовании. Например, один из них — “бригадный метод” учебы. Учитель вызывает отвечать не конкретного ученика, а члена некой бригады, а в бригаде ребята сами разбираются, кто будет отвечать. Полученную выбранным учеником отметку ставят всем членам бригады. Было и много других интересных новшеств.

После осознания сложившегося положения дел была предпринята сталинская реформа в образовании. В ее основе возврат к методам обучения и ряду учебников, принятых в гимназиях и реальных училищах. Анализ показывает, что в реальных училищах за 7 лет математику осваивали в большем объеме, чем в нашей 11-летке. Динамику этой реформы отражает рис. 3.

Рис. 3. Школьная реформа 1970 года привела к катастрофическому ухудшению качества знаний школьников

Видно, что ударников и отличников в советской школе было очень много. На Нюрнбергском процесс генерала Гудериана спросили, что не учитывал немецкий генеральный штаб при планировании войны с СССР, и что в этой связи стало причиной поражения. По мнению Гудериана одним из двух ключевых факторов стала культура и образованность советского солдата.

Заметим, что сейчас в серии "Сталинский учебник" переиздаются учебники той эпохи. В 1940 г. под влиянием Сталина было решено ввести логику и психологию в программу средней школы. Переизданный дореволюционный учебник логики Г.И. Челпанова, использовавшийся тогда, сейчас стал одним из бестселлеров издательства УРСС.

Дела с математическим образованием серьезно ухудшились в связи с "колмогоровской реформой". Приведу оценку известного педагога И.П. Костенко: "С 1917 года начал работать в техническом вузе и поразился негативному отношению к математике студентов. И стал мучить вопрос: почему студенты плохо понимают математику? Опыт привел к осознанию сложности принципа, на котором строились учебники (я назвал его принципом "ВТУ" — высокого теоретического уровня обучения). Он был искусственно внедрен в высшую техническую школу реформой 1960-х годов. Результат — резкое снижение успеваемости. Аналогичная реформа была проведена в общеобразовательной школе в 1970-х годах. Она уничтожила классические педагогические принципы, на которых строились русская и советская школа и которые обеспечили ей "феноменальные" (термин американцев) результаты, поразившие мир в конце 1950-х годов, когда 70% учащихся 9–10 классов верно решали задания по алгебре, геометрии и тригонометрии, то есть имели оценки не ниже «хорошо», и 80% — не ниже «посредственно»...

К сожалению, идеология ВТУ направляет наше образование по сей день. В 1997 г. академик В.И. Арнольд подтвердил диагноз: "Выхолощенное и формализованное преподавание математики на всех уровнях сделалось, к несчастью, системой" [6].

За "реформой-70" стояло решение Наркомпроса, требовавшее "коренной реорганизации постановки преподавания математики в начальной и средней школе", а также инициатива сложившейся в Академии наук "Группы-30", требовавшей реформ. Эти ученые считали, что нужно повысить "идейный уровень преподавания математики" и привести содержание обучения "в соответствии с требованиями жизни". С 1939 г. идеологом реформ, планируемых "Группой-30", стал А.Я. Хинчин. Он считал, что "программы должны быть построены так, чтобы идеи переменной величины и функциональной зависимости как можно ранее усвоились учащимся, становясь стержнем всего школьного курса математики", "самой категоричной необходимостью является введение в школьные программы оснований анализа бесконечно малых", что главной бедой является "недостаточный научный уровень подавляющего большинства нашего учительства" [7].

Ещё одним тезисом "группы-30" была замена классических школьных учебников А.П. Киселева и написание новых.

Когда пагубные последствия этой реформы стали понятны, академики А.Н. Тихонов, Л.С. Понтрягин, В.С. Владимиров и их единомышленники начали борьбу с реформаторами. По их инициативе бюро отделения математики АН СССР 10.05.1978 приняло постановление, в котором были следующие слова "Признать существующее положение со школьными программами и учебниками по математике неудовлетворительным как вследствие неприемлемости принципов, заложенных в основу программ, так и в силу недоброкачественности школьных учебников" [7].

Этот фрагмент приведен не только для того, чтобы обратить внимание на то, что и в старые добрые времена не всё в советском математическом образовании было идеально. Он показывает, что стоит осмыслить принципы, позволяющие избежать старых ошибок в новой реальности.

Сформулируем некоторые из них.

– Неразумно начинать школьные реформы, опираясь только на рекомендации ученых, и не соотнося их с мнением и опытом школьных учителей, достигших значимых успехов.

– Нововведения следует вносить, опираясь при этом на данные возрастной психологии и медицинские показатели. Наши возможности усвоить новое весьма ограничены, а у детей они во многих отношениях существенно меньше. Стоит обратить внимание, что специалисты Академии педагогических наук (АПН), которые должны были это ясно представлять, поддержали реформы, существенно повысившие нагрузку на ученика.

– Не должно быть усилий, направленных на то, чтобы "протащить" в школьную реформу фрагменты, понятия, а иногда и курсы высшей школы. Это дает обратный эффект — дети перегружены, с утра до вечера делают уроки, понимая, что всё заданное выучить всё равно невозможно, и на ряд заданий придется махнуть рукой. Многие из них приходят к выводу, что взрослые играют в странную игру, пытаясь научить их огромному объему знаний, который выходит за пределы их возможностей, и, скорее всего, им не пригодится. Очевидный пример — введение в среднюю школу элементов математического анализа, освоение которых и для студентов дело не простое.

– Математику в школах учат уже 25 веков и довольно хорошо разобрались, как это следует делать. Цель школьной математики — не дать огромный объем знаний, а развить мышление, следуя принципу: "Лучше меньше да лучше". Математика — школа свободы, показывающая, что во многих случаях можно не верить, а доказывать. Наконец, этот предмет позволяет выявить тех, у кого есть способности к таким занятиям, и поддержать их. Если старые учебники и методики хороши, то вполне можно обойтись и без новых. Стоит обратить внимание на Русскую классическую школу (РКШ), созданную в середине 2000-х гг. и охватывающую дошкольную подготовку детей 4–6 лет и 11 летний цикл обучения в школе. За основу взяты и модернизированы учебные книги К.Д. Ушинского (общая методология, дошкольная и школьная словесность), учебник А.С. Пчёлко и Г.Б. Поляка (арифметика в 1–4 классах), А.П. Киселёва (арифметика в 5 6 классах), П.А. Ларичева (алгебра), М.А. Рыбкина (геометрия и тригонометрия). Желающие учатся в этой школе и успехи её выпускников говорят сами за себя [8].

– Существует большая разница между "олимпиадниками" и средними школьниками. 20% будут испытывать трудности с математикой при любой школьной программе, для 70% ребят со средними способностями метод преподавания, учебники, личность учителя являются решающими факторами, 5–10% справятся с любой школьной программой. Именно за эти 70% идет борьба — без них самые талантливые олимпиадники не смогут изменить к лучшему ситуацию в стране.

Разница между средними школьниками и "олимпиадниками", связывающими своё будущее с наукой, может быть очень велика. По оценке экспертов только 0,18% населения планеты способно к созидательному научному творчеству. Эта оценка согласуется с данными президента РАН, по мнению которого только 50 человек из 10 000 (0,05%) жителей России являются исследователями, что в два-три раза ниже, чем в странах-лидерах [9]. Обществу очень важно найти этих людей, дать им прекрасное образование и возможность реализовать свои способности и проекты в нашем Отечестве на благо себе и всему обществу.

В 1963 г. по инициативе академика А.Н. Колмогорова была создана школа-интернат физико-математического профиля (ныне СУНЦ МГУ). Выступая на одном из заседаний педсовета, академик сказал: "Существенно, что здесь, в интернате, школьник приходит в соприкосновение с творческой мыслью. Это наш запрос, но по всем предметам!.. Метод работы — имитация научного исследования, шаг за шагом находить нечто, ...а не давать готовенькое" [10]. Работа этой школы за много лет принесла прекрасные результаты. Однако перенос методов работы с "олимпиадниками" и элементов их программ в обычные общеобразовательные школы оказался неэффективным. Колмогоровский эксперимент в преподавании математики в школе это наглядно показал.

Традицией МГУ было привлечение лучших школьников России в Университет. К сожалению, её сохранить не удалось. Прояснить это можно следующим примером: в 1970 х гг., среди поступивших на физический факультет МГУ большинство читало журнал "Квант". К удивлению автора, в прошлом году выяснилось, что среди 250 первокурсников физфака никто не знал о существовании этого журнала. Грустные мысли вызывает недобор на ряд факультетов, имевший место в МГУ в последние годы. Это одно из проявлений общего кризиса образования в России.

– Традиционно рейтинг МГУ был очень высок. В него обычно поступали победители национальной и международных олимпиад по математике. К сожалению, эту традицию сохранить не удалось. Даже из Первого университетского лицея им. Н.И. Лобачевского в Усть-Лабинске в 2024 г. в МГУ поступило всего несколько школьников. Остальные предпочли Высшую школу экономики (ВШЭ) и Московский физико-технический институт (МФТИ). В чем же дело? По словам самих школьников, с которыми удалось побеседовать, МГУ, в отличие от ВШЭ и МФТИ, слабо представлен в Интернете. Кроме того, в ВШЭ "модно, стильно, молодежно" и есть "мерчи" (по-русски говоря, это одежда, в частности толстовки, сувениры, аксессуары, подарки с символикой организации). Остается удивляться, что ключевые решения, которые могут определить судьбу, принимаются школьниками и их родителями на такой основе. Однако если не удается заинтересовать современной математикой по существу, то остается форма, а по этой части МГУ значительно уступает конкурентам. Слабо у нас с "мерчами".

Контекст высшего образования

Целое больше суммы его частей.

Аристотель

Ключевой стороной образования новой России является его тотальная бюрократизация. Впечатляет даже одно перечисление министров образования: Эдуард Днепров (1990–92), Евгений Ткаченко (1992–96), Владимир Кинелев (1996–98), Александр Тихонов (1998), Владимир Филиппов (1998–2004), Андрей Фурсенко (2004–12), Дмитрий Ливанов (2012–16), Ольга Васильева (2016–20), Михаил Котюков (2018–2020), Валерий Фальков (с 2020 г. по настоящее время), Сергей Кравцов (с 2020 г. по настоящее время министр просвещения) [11]. За 30 лет сменилось 11 министров. Видимо, очень трудно удержаться на этой "проклятой должности" (как говорится в известной сказке) больше трех лет. И министры без дела не сидели — за время их неустанной работы были провозглашены и выполнялись программы информатизации, гуманизации, фундаментализации, гуманитаризации, интернетизации, болонизации, егэзации и множество других. Впечатляют аттестация и аккредитация — чтобы перейти от программы 3+ к 3++ университету, с которым я сотрудничаю, потребовалось привезти в министерство 1,5 т документов. Другими словами, это 1,5 тыс. томов. На мой вопрос к заместителю министра, кто же читает эти бесценные документы, был дан категоричный и исчерпывающий ответ: "Искусственный интеллект".

Может быть, у нас никудышные министры и эксперты, советовавшие им, и просто плохих надо заменить на хороших? Так, например, мыслит известный педагог и математик А.В. Савватеев: "Нам нужно серьезное разоблачение группы экспертов, которых я называю "30 на 30". Это 30 экспертов, которые 30 лет говорили чушь про образование, тем самым поддерживая его развал. На самом деле 40 лет, это всё началось ещё до распада СССР, когда советское образование стало угрозой для всего остального мира. Это вопрос суверенитета, у нас он есть или нет? Если нет, давайте его вернем" [12].

Не согласен. Мне довелось работать со многими из этих министров — это вполне разумные люди, да и где гарантия, что "новые" будут лучше "старых"? На одной из конференций А.А. Фурсенко (ныне советник Президента) разъяснил мне ситуацию. Он обратил внимание, что на его погонах много звезд и в такой должности решения не обсуждают, а выполняют, будут другие решения — чиновники будут выполнять их.

Система образования — иерархическая структура. Те, кто находится на нижних этажах, должны выполнять то, что им велят на верхних. Конечно, можно, а во многих случаях и нужно, предлагать альтернативные подходы. Но тогда, скорее всего, таких людей не услышат или сделают вид, что не услышали, либо система освободится от сотрудников, не понимающих своего места в ней.

Дело не в тактике, а в стратегии, в представлении лиц, принимающих решения, о том, каким должно быть отечественное образование и каких людей оно должно готовить. Исходная идея реформ состояла в том, чтобы разрушить советскую школу и сделать всё, как на Западе. Далее дело свелось к тому, что ломать и строить надо так, как велят западные эксперты. Интерес этих людей и стоящих за их спинами структур тоже понятен. Сильное образование, в частности математическое, было важным стратегическим преимуществом нашего Отечества. Западу в преддверии активных действий по развалу России было важно нас этого преимущества лишить. Эта задача в ходе реформ в огромной степени была выполнена. Но схватка не закончена, и нам надо постараться вернуть утерянное.

Наглядное подтверждение сказанного — исключение опыта советского образования из материалов, по которым сейчас в России учат будущих учителей. В хрестоматии, изданной ВШЭ "Пятьдесят крупнейших мыслителей об образовании" не нашлось места для мыслей ни одного советского или русского педагога. Места для идей Ушинского, Макаренко или Выготского в ней не нашлось [13]. Наверно, излишне говорить, что о советском опыте в образовании предпочитают не думать и не говорить в Академии педнаук...

Очень серьезную проблему представляет ситуация с молодыми учителями. Вновь процитируем А.В. Савватеева: "Новопришедшие учителя иногда являются проблемой, но тоже не из-за того, что они плохие. Конкурс сегодня в педвузы нулевой. Там нижняя граница пропускных баллов — 35 из 100 по ЕГЭ. Это оценка в районе двойки с плюсом, тройки. Приходят и с более высокими баллами — те, кто реально хочет быть учителем. Но это какие-то фантастические подвижники, их единицы. Большинство пошло, потому что просто так вышло, никуда не попали, пошли в школу. Двойной отрицательный отбор...

Родители являются проблемой... С появлением родителей-недоучек проблема многократно усиливается. Родителей придется тоже переучивать когда-нибудь в школах для родителей" [12].

Проблема заключается и в том, что учителя сейчас днем с огнем не найти, и в том, что огромная часть образовательной и воспитательной деятельности, которой в советские времена занималась школа, оказались переложена на плечи родителей. "Мамочки" оказались ключевым звеном и в средней, и в высшей школе. Время бесплатных секций и дополнительных занятий прошло — родители вынуждены "покупать" образование для своих детей — платить, платить, платить. Образование становится фактором, проявляющим и во многом определяющим социальное неравенство, а также уменьшающим долю талантливых ребят, пробивающихся в ведущие вузы... Естественно, МГУ является частью системы образования, и происходящее в ней немедленно отражается на том, что делается в Университете.

В чем же заключается стратегия реформирования российского образования? Кто-то из мудрецов сказал, что от выдающихся ученых в истории остается одна работа и одна фраза. От бывшего министра образования, а ныне помощника Президента А.А. Фурсенко, видимо, в историю войдет одна фраза, выражающая императив проводившихся реформ: "Недостатком советской системы образования была попытка формировать человека-творца, а сейчас задача заключается в том, чтобы взрастить квалифицированного потребителя, способного квалифицированно пользоваться результатами творчества других" [14]. Логика понятна — другие должны делать бусы, а мы в ходе обмена должны предоставлять им невосполнимые природные ресурсы и оказывать прочие услуги. Для математики такой подход разрушителен. Эта наука состоялась именно потому, что многие века поколения исследователей штурмовали нерешенные задачи, не думая, что это сделает кто-то другой за них и не надеясь на материальное благополучие.

Не секрет, что Минобраз в течение многих лет проводил реформы под диктовку ВШЭ, ректором которого много лет был Я.И. Кузьминов, а научным руководителем Е.Г. Ясин. О "новациях", предложенных этими деятелями, которые привели к развалу российской школы, уже говорилось много, и в ходе реанимации российского образования будет сказано ещё больше. Обращу внимание только на один момент — введение в российские школы единого государственного экзамена (ЕГЭ). На одном из заседаний Ясин с гордостью объяснял нам, что это его идея, что он очень рад, что она стала реальностью и что это уничтожит коррупцию в средней школе. Лекарство оказалось гораздо хуже болезни.

У этой реформы много перекосов, и обращу внимание лишь на несколько:

– То, что не спрашивается, то не учится. Старшие классы сводятся к "дрессировке" ребят на предметы, которые будут сдавать на ЕГЭ, при игнорировании остальных дисциплин. Рост невежества и падение культурного уровня налицо.

– Немецкий ученый Г.К. Лихтенберг писал: "Кто не понимает ничего, кроме химии, тот и её понимает недостаточно". Заметим, что советские школьники, чтобы получить аттестат зрелости, сдавали 8 экзаменов по разным предметам. Китайские для получения аттестата зрелости сейчас сдают 6.

– ЕГЭ стимулировал раннее разделение школьников на "естественников" и "гуманитариев", что противоречит самой цели школьного образования и является инструментом его деградации.

– ЕГЭ "раздел" провинцию. Талантливые, подготовленные школьники уезжают в Москву или Санкт-Петербург и уже не возвращаются домой. Россия оказывает "страной столиц", реализуя императив героинь Чехова: "В Москву, в Москву, в Москву".

– Расходы родителей многократно увеличились — очень многим из них приходится нанимать репетиторов для сдачи ЕГЭ.

– ЕГЭ порождает безответственность руководства вузов. В советские времена именно вуз определял среди абитуриентов тех, из кого они смогут вырастить специалистов. Сейчас в ректоратах объясняют, что из тех, кого они обязаны принять по ЕГЭ, часть невозможно полноценно обучить. Контрольные для поступивших, регулярно приводящиеся на факультетах МГУ, показывают, что реальные знания ребят очень далеки от того, что показывает тест ЕГЭ.

– Разделение ЕГЭ на "базовую" и "профильную" части уничтожило математические знания б*о*льшей части выпускников нашей страны. Сдача "базовой" части, на мой взгляд, требует знаний, не слишком выходящих за пределы школьной программы 5-го класса.

Впрочем, есть и много других инициатив руководства ВШЭ, определивших развал образования в нашем Отечестве.

Инструментом развала российского образования стало воплощение идей психолога от образования А.Г. Асмолова. Одна из самых разрушительных среди них — переход от советской предметоцентричной модели образования с акцентом на знания, умения, навыки, которые получит человек, к "личностно-ориентированной" модели. В последней знания учителя и ученика не очень важны, а нужно, чтобы развивалась личность последнего, впрочем, критерии этого развития так и остались неясными. Императив развала таков: "Моё кредо — это движение от культуры полезности к культуре достоинства. Как только образование станет культурой достоинства, в мире обретут самостоятельность личности, которые смогут стать самостоятельными людьми с критическим мышлением и чувством ответственности за свои поступки, у нас всё получится — и в стране, и в семье, и в мире". [15: 13]. Другими словами, можно ничего не знать, но делать это очень достойно. Но откуда у незнайки возьмется это достоинство, если он проигнорировал усилия множества людей, вложенные в его образование?!

Помнится, в стихотворении В.В. Маяковского есть такой фрагмент: "Крошка сын к отцу пришел, и спросила кроха: — Что такое хорошо и что такое плохо?". Отец ясно и просто ответил на вопрос малыша. С этой ясностью и простотой и решил покончить А.Г. Асмолов и его единомышленники: "Пришли времена школы неопределенности. Мир Яна Амоса Каменского с дискретной поурочной системой при всей его великости имеет исчерпанный диапазон в наши дни. Стандарты заложили вектор жизни в неопределенном изменчивом сложном мире. И, как никогда, надо понять, что система подготовки этих стандартов — это система перерождения тех, кто будет их воплощать в реальную жизнь. А эта задача, с моей точки зрения, не менее сложная, чем задача, которая стояла перед Курчатовым в контексте атомного проекта. Образовательные стандарты — это атомный или космический проект для России" [15: 12–13].

Конечно, сказанное противоречит возрастной психологии. Ребенок должен вступать в устойчивый, определенный, ясный мир, который сформировали старшие, и в котором есть на что и на кого опираться. В этом мире $2 \times 2 = 4$ и $a + b = b + a$ и ребенок вполне может не задавать себе вопрос, мальчик он или девочка.

И о какой новизне может идти речь, если в школе мы во множестве предметов имеем дело с истинами и, не побоимся этого слова, с абсолютными истинами? В аксиоматике Евклида верна старая добрая теорема Пифагора, и корни квадратного уравнения находятся по старинке. Много веков (до появления асмоловщины, конечно) педагогов это не смущало. В школьной геометрии мы учим детей тому же, чему учили древние греки за три века до нашей эры, в алгебре — тому, что было ясно в XV в., в высшей школе, как правило, преподаватели счастливы, если студенты уверенно владеют тем, что математики выяснили в XVII в., а если ещё удастся "прихватить" что-то из XVIII в., то тогда надо ставить "5+". Неуместно сопоставление с Космическим и Атомным проектом, в которых ученые и инженеры имели дело с неведомым. Опыт царских гимназий и советских школ показывает, что педагоги в то время прекрасно понимали, чему и как учить, отвечая на потребности общества. Впрочем, нет такой простой вещи, которую нельзя сделать сложной. Это прекрасно показали портные из сказки о голом короле. Крики малыша, что король-то голый, при современной бюрократии просто не услышат или сделают вид, что не поняли, либо объяснят, что "это неформат".

"Недавно, выступая на объединенной заключительной коллегии Министерства образования и науки РФ, Евгений Ямбург сказал: "Мы ввели революционные образовательные стандарты". И пошутил: это стандарты от А до Я — от Асмолова до Ямбурга. *Стандарты – это, прежде всего, институализация определенной идеологии в нормах жизни общества.* Усвоение стандартов — это усвоение нового поведения школьной жизни в мире, где ключевыми вызовами является вызов неопределенности, сложности, разнообразия", — говорил А.Г. Асмолов [15].

Результаты произошедшей "контрреволюции в образовании" и попыток внедрить асмоловщину в школу налицо. В отличие от андерсеновской сказки, это говорит не мальчик, об этом кричат ученики, родители, учителя, педагоги, преподаватели. Это показывают результаты международных сравнений. Но всего этого не слышат, не видят и не знают ни Министерство науки и образования, ни Академия педагогических наук, ни другие структуры, руководящие российским образованием. Другое время — другие сказки.

Среди могильщиков российского образования следует назвать председателя правления Сбербанка Г.О. Грефа. Беда в том, что образовательная система в России распалась, что этой важнейшей для общества сферой стали заниматься случайные люди. По своему усмотрению Греф создал "сберклассы", призванные заменить компьютерами учителей, создал "хорошколу", а также возглавил исследования искусственного интеллекта. Видимо, экономическая сфера слишком узка для людей такого масштаба. Он же организовал сбор биометрии, запустив программу "Ладушки" в школах России, вовлекающую детей в гигантскую систему маркетинга. Лучше, чем он сам, о его императивах не скажешь. По его мысли, Россия и русские "проиграли конкуренцию": "Мы просто оказались в стане стран, которые проигрывают. В стане стран-дауншифтеров. Страны и люди, которые сумели вовремя адаптироваться и проинвестировать в это — они победители сегодня. Страны, которые не успели адаптировать свои собственные экономики и всю социальную сеть, все институты, они очень сильно будут проигрывать" [16]. В чем же дело? В ходе Гайдаровского форума Греф объяснил, что всё дело в образовании: "Ключевая роль во всем этом процессе (я не устаю об этом говорить) — образование: от детских садов до вузов. Вся модель образования должна быть изменена. Здесь говорилось об онлайн образовании. Но оно сейчас пока такое же традиционное. То есть люди перевели систему традиционного образования в онлайн. На мой взгляд, и те, и другие — лузеры. Онлайн будет использоваться, но содержание образования будет абсолютно другим. И методы образования будут абсолютно другими. Нам нужно успеть поменять модель образования" [17].

Программа "Образование 2030" предусматривает отказ от учителя. Она воплощается в сберклассах. Много лет протаскивал мысль об отказе от преподавателей и заменой их "электронкой" Я.О. Кузьминов, поскольку это, по его мнению, гораздо выгоднее экономически. В самом деле, профессора может заменить видео его лекции, доцента — записи его занятия, контрольные — электронные тесты. Образование — диалог, его компьютерный суррогат, как правило, — монолог. Критическим экспериментом стало массовое использование электронных средств обучения у школьников и студентов в период пандемии COVID-19. Для большинства из них эти годы оказались потерянным временем.

Наказанием для школьников, студентов, родителей и преподавателей оказались мобильники. Урок, семинар, лекция и мобильник — вещи несовместимые. Стоит обратить внимание на опыт Китая, который, судя по исследованиям PISA, является лидером в мировом образовательном пространстве. В 2021 г. в Китае ввели правило, согласно которому игровые платформы могут предоставлять услуги несовершеннолетним только с 20:00 до 21:00 по пятницам, выходным и праздничным дням. В проекте по вопросам киберпространства Китая детям до 8 лет разрешается работать со смартфонами не более 40 минут в день, детям от 8 до 15 лет — не более часа в день, а подросткам от 16 до 17 лет — не более двух часов в день [17].

В городе Чжэнчжоу (провинция Хэнань) 27.12.2024 ввели полный запрет на использование мобильных телефонов в начальных, средних и профессиональных школах. Учителя теперь не имеют права отправлять домашние задания через мессенджеры и требовать использования мобильников для выполнения домашних заданий. Принятый закон направлен на борьбу с интернет-зависимостью, на улучшение здоровья и, в частности, зрения учеников, на повышение способности ребят к концентрации [18].

Подводя итог, можно сказать, что МГУ является важной неотъемлемой частью всей системы российского образования и разрушительные нововведения в этой сфере не обошли его стороной. Некоторые из перемен вызывают особую тревогу.

– МГУ, по сути, утратил статус университета, превратившись в набор учебных заведений, дающих узкую профессиональную подготовку. Само название происходит от латинского universitas — совокупность, общность. Эта общность утрачена — студенты не представляют контуры научного пространства, ограничиваясь освоением конкретной профессии. Межфакультетские курсы, на которых студенты одного факультета должны прослушать и сдать курс на другом, не изменили этой общей картины.

– Переход к Болонской системе резко снизил качество образования. На многих факультетах МГУ, как и в большинстве вузов России, так и не поняли, чему и как следует учить магистров, тем более, что люди, получившие образование по одной специальности, могут приниматься в магистратуру по другой, весьма далекой. Поэтому преподаватели не могут опираться на багаж из предыдущих знаний, а “напомнить” за считанные месяцы то, что они должны были освоить в течение 4 лет, невозможно.

– Бюрократизация гигантского университета привела к потере управляемости. Обратная связь не работает. “Достучаться” до ректората, численность которого превысила все разумные пределы, как правило, невозможно. В результате этого появляются и живут “мертвые” факультеты и кафедры. Бюрократизация привела к формализации. Система “Истина”, фиксирующая достижения сотрудников и влияющая на их зарплату, ориентирует сотрудников на “научный вал” — увеличение числа публикаций “числом поболее, ценою подешевле”. Бюрократизация приводит к ошибкам в кадровой политике — В МГУ приходят люди, профессиональные возможности которых и взгляды на образование и свою работу не соответствуют императивам ведущего университета страны.

– Создание множества филиалов привело к падению авторитета МГУ. Формирование сильных филиалов требует иной кадровой политики, а не эпизодических командировок штатных сотрудников университета, направленных в филиалы, чтобы они за неделю-две прочитали то, что ребята должны были бы освоить в течение полугода или года, а затем принять у них соответствующий экзамен. С точки зрения образования и престижа МГУ “лучше никак, чем плохо”.

– Недооценка труда преподавателей. Цель университета — учить студентов. И преподавателей, прежде всего, следует оценивать по тому, насколько хорошо они это делают, а не по имитации научной деятельности, организационной суете, степеням и званиям. Болезнь отодвигать, собственно, преподавателей на задний план характерна для многих вузов России и, к сожалению, для МГУ.

– Подготовка квалифицированных специалистов требует большой, серьезной работы от тех, кто получает знания, умения и навыки и высокой требовательности тех, кто проверяет усвоенное. К сожалению, здесь планка оказалась резко снижена по сравнению с советскими временами. На ряде факультетов традиционными стали заявления магистров, что они "заняты", что им "некогда", что "не надо терять времени", что "нам обещали, что и так поставят", что "они работают". Поразительно, что написавшие зачет приходят во многих случаях с зачетками, не дожидаясь, когда преподаватель проверит, что же они написали.

Конечно, в жизни Университета были разные времена, и многие недостатки можно исправить. Однако для этого вначале надо осознать, что представленные проблемы существуют, и что нужно прикладывать серьезные систематические усилия, чтобы изменить ситуацию к лучшему.

Два стиля преподавания математики в МГУ

Природа не храм, а мастерская и человек в ней работник...
И.С. Тургенев

В качестве примера первого стиля преподавания математики можно привести содержание и форму организации работы кафедры математики физического факультета МГУ во времена, когда её заведующим был профессор А.Г. Свешников (рис. 4).

Цикл математических дисциплин был лучшим и наиболее важным на всем физическом факультете. Математика — это океан. При организации учебного процесса очень важно выбрать то немногое, наиболее важное и содержательное из этого океана, что сможет освоить студент и что позволит ему двигаться дальше.

На кафедре математики в те времена этот выбор был связан с большими научно-техническими проектами, которые выполнялись в стране. Создание ядерного оружия, развитие всего Атомного проекта потребовало специалистов, отлично владеющих математической физикой и вычислительной математикой. Академики А.Н. Тихонов и А.А. Самарский, преподававшие на этой кафедре, работали также в Институте прикладной математики, возглавляли работы по моделированию ядерных взрывов. В США создание атомной бомбы заняло около четырех лет, и примерно столько же времени эта работа потребовала в СССР, несмотря на огромные потери нашей страны в ходе Великой Отечественной войны. Александр Андреевич Самарский не раз говорил мне и другим сотрудникам, работавшим в его отделе, что быстрый успех связан с тем, что к этой работе активно привлекали физиков, в то время как в США опирались на "чистых математиков". Дело в том, что физики не только владеют необходимыми математическими инструментами, но и представляют ход изучаемых процессов и могут отделить наиболее важное от второстепенного, что является решающим при построении математических моделей. Научная школа А.Г. Свешникова активно и успешно занималась математическими проблемами электродинамики и теории дифракции.

Исходя из накопленного опыта и преподавания на физфаке, А.Н. Тихонов и А.А. Самарский подготовили большой (на 735 страниц) курс "Уравнения математической физики". В аннотации к книге они писали: "Изучение каждого типа уравнений начинается с простейших физических задач, приводящих к уравнениям рассматриваемого типа. Особое внимание уделяется математической постановке задач, строгому изложению решения простейших задач и физической интерпретации результатов. В каждой главе помещены задачи и примеры. В основу книги положены лекции, читавшиеся на физическом факультете МГУ" [19: 2]. К этому учебнику был приложен задачник объемом 699 страниц [20].

Мне довелось пользоваться и учебником, и задачником. Конечно, их объем не позволяет освоить весь материал в деталях, тем не менее, эти ясные, простые книги со множеством примеров и решений оказались очень полезными для физиков. Создавать устройства, приборы, строить модели гораздо легче, если есть "конструктор" из уже решенных задач.

Рис. 4. Профессор Алексей Георгиевич Свешников — заведующий кафедрой математики физического факультета МГУ с 1971 по 1993 гг.

Разумеется, выбор связан с тем, что если на чем-то делать акцент, то что-то следует излагать кратко либо не рассматривать. Теория функций комплексного переменного — гигантская отрасль, опирающаяся на многочисленные исследования, сделанные после того, как великий Леонард Эйлер заложил её основы в Санкт-Петербурге. По этому предмету есть огромные, прекрасно написанные учебники. Тем не менее, ограничения этого замечательного подхода тоже понятны. Конформные отображения[2] — это класс двумерных отображений специального вида на плоскости. В нем есть удивительные приложения и замечательные задачи. Один из преподавателей МФТИ на экзаменах временами просил студентов отобразить внешность креста на внутренность горба. Тем не менее возможности обобщить эту теорию на более сложный класс задач весьма ограничены. Поэтому на физфаке этот курс излагался кратко, а учебник по нему А.Г. Свешникова и А.Н. Тихонова я считаю одной из лучших книг по математике — она читается на одном дыхании [21].

Успехи в математическом моделировании привели А.А. Самарского к идее *вычислительного эксперимента* [21]. Эта концепция была популярна несколько десятилетий. Во многих случаях натурный эксперимент сложен, опасен или невозможен. Теоретический анализ с помощью карандаша и бумаги можно использовать для очень небольшого круга задач. Однако, когда мы знаем уравнения, описывающие изучаемый процесс или систему, то компьютер позволяет во многих случаях провести необходимые расчеты и получить ответ на заданный вопрос, а иногда и получить принципиально новые результаты, сделать открытие. Однако, для этого надо замкнуть цикл: *Исследуемый объект* $\rightarrow$ *Математическая модель* $\rightarrow$ *Алгоритм* $\rightarrow$ *Программа* $\rightarrow$ *Исследуемый объект.*

Эта идея долго встречалась в штыки. “Положение безальтернативно, — так или иначе ученым и инженерам придется прийти к вычислительному эксперименту”, — не раз говорил мне А.А. Самарский в 1980-е гг. Он был прав — эта технология познания проложила себе дорогу во многих областях, без неё ряд используемых высоких технологий был бы невозможен.

Тем не менее, и этот подход столкнулся с принципиальными ограничениями. Это “проклятие размерности” — сложные модели, описываемые не схожими, а различными уравнениями, выходят за пределы вычислений, доступных компьютерам. Набор коэффициентов и количественных данных, необходимых для вычислительного эксперимента, может оказаться слишком мал, так что натурных экспериментов, необходимых для того, чтобы всё это выяснить, может оказаться слишком много. Наконец, редкие события, которыми нельзя пренебречь, малые и большие параметры, а также нелинейность многих процессов дополняет эту картину.

Стоит сказать несколько слов о кафедре математики в те добрые старые годы. Алексей Георгиевич Свешников утверждал, что на кафедре работают очень талантливые люди, занимающиеся интересными, перспективными задачами, и мы — студенты — были в этом уверены. На первом курсе

[2] Отображения областей на плоскости, сохраняющие углы между линиями. — *Прим. ред.*

математический анализ — основополагающий курс для физиков и математиков — читал профессор Юрий Николаевич Днестровский. Простота, ясность и точность. В конце каждой лекции был пример с числом 27. На 27-й лекции наш поток подарил ему свиток с благодарностью за эти лекции. Позже мне довелось знакомиться со многими курсами матанализа, но курс Днестровского был лучшим. Очень жаль, что Юрий Николаевич не представил его в виде книги.

Нашим семинаристом был Вячеслав Иванович Телегин. Конечно, мы решали примеры из классического задачника Демидовича. Эта книга пользуется международной известностью. Китайцы выпустили "Антидемидовича" в 6 томах. После многих задач В.И. Телегин показывал, как без громоздких вычислений можно получить такой же или приближенный ответ. Это напоминало магию.

Компьютерный эксперимент требует эффективных численных методов. Их нам читал сотрудник ИПМ Николай Николаевич Калиткин [23]. Он излагал всё настолько наглядно и ясно, что сразу возникал соблазн не ходить на лекции. Потом был зачет, на котором каждому давали задачу. После правильно решенной давали следующую, после неправильный объясняли, почему это не то, что нужно, и отправляли думать дальше. При этом никакой "дисциплины" не было, — можно было ходить, пользоваться любыми книгами, консультироваться у всех, готовых обсуждать численные алгоритмы. Задачи были не простыми, особенно для тех, кто не ходил на лекции. Зачет, как я помню, продолжался с утра до вечера. Когда кончилось время, на которое нам выделили аудиторию, то зачет был перенесен на скамейки вокруг памятника Ломоносову. Огромное уважение и доброжелательность к студентам и понимание, что решая задачу, студент здесь и сейчас может придумать что-то неожиданное и интересное, отличало эти зачеты. Через много лет я поинтересовался у Николая Николаевича, стоит ли так организовывать прием зачетов. "Конечно, стоит. Мой опыт показывает, что 30% знаний по численным методам студенты получают в ходе зачетов и экзаменов", — услышал я в ответ.

Есть и другой подход к преподаванию математики, которому следуют многие преподаватели механико-математического факультета МГУ. Разницу очень легко увидеть, просто взяв задачи вступительных экзаменов на физфак и мехмат. Не следует думать, что один хуже, другой лучше. Прекрасно, что есть оба. И работа писателя, и работа филолога заслуживают уважения, если люди хорошо этим занимаются.

Что такое "понять"? Это, на мой взгляд, значит построить цепочку рассуждений и аналогий, которая позволяет свести сложный вопрос или задачу к простейшим сущностям, очевидным для понимающего. Дело в том, что у математиков с мехмата и физфака эти сущности различны. Первых привлекают общность, строгость, единство с другими областями математики. Таков их выбор. Судя по биографии Эйнштейна, он делал выбор между занятиями физикой и математикой. Последняя по его представлениям слишком велика и трудно понять, какие задачи являются главными. С физикой проще — главными сущностями в ней являются время и пространство. Поэтому и выбор он сделал в пользу физики.

Для примера можно привести книгу академика В.И. Арнольда "Лекции об уравнениях с частными производными" [24]. В ней фигурируют идеи аналитической геометрии, понятие лежандровости, прослеживается связь с теорией групп и алгебраической геометрией. Вероятно, это очень близко абстрактным математикам, имеющим дело с таким сущностями, но далеко от наглядных образов и физической конкретики, с которой имеют дело математики, связанные с физикой, химией и многими другими дисциплинами. Конечно, это прекрасный факультативный курс. Как сказал мне один студент, которому я рекомендовал эту книгу: "Всё очень интересно, но это курс для тех, кто и так всё знает".

Математику XX века определили две больших исследовательских программы. Первую предложил Гильберт, предложив 23 задачи, которые исследователи должны были решить в XX в. Во многом она ориентирована на решение внутренних проблем математики, на приоритет алгебры. Положив в основу понятие множества, группа французских математиков под псевдонимом Бурбаки выпустила более 30 томов, выстраивающих математическое знание и не озабоченных чертежами и пояснениями связи вводимых сущностей с тем, что лежит вне математического пространства.

Программа Пуанкаре, напротив, исходила из того, что источником развития математического знания станут задачи квантовой механики и теории относительности и делала акцент на геометрических сущностях. Именно программа Пуанкаре оказала огромное влияние на развитие математики и всего естествознания в XX в. Однако приоритеты меняются и исследования продолжаются.

В каком стиле надо преподавать математику на химическом и психологическом факультетах, у экономистов, историков, на многих других факультетах МГУ, включая подготовку механиков на мехмате МГУ? Ответ очевиден — в стиле физического факультета, сообразуясь с теми моделями, алгоритмами и проблемами, с которыми столкнутся выпускники соответствующих факультетов. К сожалению, убедить ректора и ректорат в этом не удается. На всех этих факультетах работают преподаватели мехмата, делая акцент на абстрактных понятиях и на "мехматовском видении" математики.

К чему это приводит? Приведу поразивший меня пример. Мне довелось консультировать по матанализу первокурсника химфака, в прошлом победителя Всероссийской олимпиады по химии. В самом начале занятий он поинтересовался у меня: "Математика сейчас как теология? Надо точно выучить все мантры и пересказать их преподавателю, когда он попросит? " Я попросил конспект лекций и убедился, что нужно вложить большие усилия, чтобы перевести используемые абстракции на понятный вчерашнему школьнику язык. В конце концов, мы разобрались с отличиями теологии от курса матанализа, который им читали, но это было нелегко. Большинство же выпускников химфака по-прежнему считают, что самый сложный предмет на факультет — квантовая химия, потому что "там много математики".

Но, может быть, "химическое мышление", складывающееся у студентов, отторгает математические сущности? Например, философ, социолог и автор классификации наук Огюст Конт (1798–1857) считал, что вредно и разрушительно использование математических понятий в химии, а также, что математикам ни в коем случае не следует разбираться с тем, что делают химики.

Замечательный ученый и педагог Юлий Александрович Данилов, читавший курс нелинейной динамики и теории самоорганизации на химфаке МГУ, убедил меня в обратном (см. рис. 5).

Рис. 5. Юлий Александрович Данилов — прекрасный преподаватель и блестящий лектор, подаривший нам переводы 112 книг классиков математики и физики

Теория самоорганизации или *синергетика* имеет в своей основе аналогию или совпадение математических моделей, описывающих открытые нелинейные системы, далекие от равновесия. Модели, алгоритмы, подходы, рассматриваемые в синергетике, используются в физике, химии, механике, социологии, психологии, экономике и во многих других дисциплинах [25]. Юлий Александров был очень активным и талантливым человеком — им было переведено 112 книг по физике и математике с разных языков, включая венгерский. На его лекциях на химфаке был аншлаг — студенты от 1 го до 5 го курса, аспиранты и преподаватели занимали весь зал, а иногда стояли и в проходах. Он рассматривал очень простые, базовые модели, связывал их с задачами, которые решают химики, и рассказывал о творцах этих новых представлений. Очень жаль, что не осталось видеозаписей этих блестящих лекций, но даже и их краткий конспект производит большое впечатление [26].

Критический эксперимент, на мой взгляд, был поставлен выпускником мехмата МГУ, одним из создателей математической психологии Владимиром Юрьевичем Крыловым (см. рис. 6).

Рис. 6. Владимир Юрьевич Крылов — профессор, один из создателей математической психологиив России и автор блестящего курса математики для студентов-психологов в МГУ

Он работал в ИПМ, а позже в Институте психологии РАН. Его попросили прочитать курс математики будущим психологам, которые, следуя сложившейся традиции, боялись этой дисциплины как огня. В аудитории напротив тот же курс читал преподаватель мехмата, начиная его с понятия числа, пределов, бесконечно малых.

Крылов начал курс с простейших моделей рефлексивных процессов, с “алгебры совести”[3]. Вначале, следуя расписанию, число студентов в обеих аудиториях было одинаковым, но довольно быстро студенческая масса психологов “перетекла” в аудиторию где читал Владимир Юрьевич, а кое-кто начал работать в его лаборатории.

Математика велика и прекрасна. На каждом факультете МГУ её можно преподавать отлично, делая ее опорой для будущего специалиста. Важно это осознать и вложить необходимые усилия.

Перспектива

Лучший способ предсказать будущее — создать его.

А. Линкольн

В 1960-х гг. имела место дискуссия между президентом АН СССР академиком М.В. Келдышем и выдающимся физиком А.Л. Арцимовичем. Последний считал, что “Наука — лучший способ удовлетворять личное любопытство за государственный счет”. Он следовал *ценностной ориентации*

[3]Интересна книга с таким названием, автор — Владимир Александрович Лефевр. — *Прим. ред.*

исследований — неважно, чем заниматься — главное делать это на высоком уровне. В то время наука в СССР считалась непосредственной производительной силой, страна была научной сверхдержавой, а научное сословие пользовалось большим уважением и поддержкой.

По мнению М.В. Келдыша, если рассматривать науку не как занятие любознательных профессоров, а как важный социальный институт, то ситуация должна быть совершенно иной. Следует выбрать один-два крупных научно-технических проекта, поддержанные руководством страны и народом, которые позволят выйти обществу на новый, более высокий уровень развития. Эти проекты определят и направления фундаментальных исследований.

Наличие одного или двух проектов определяется не дефицитом денег, а трудностью найти эффективную руководящую команду для программ такого масштаба, а также ограниченностью возможностей государственных структур поддерживать большие проекты. Это *целевой подход* к научным исследованиям.

История показала, что М.В. Келдыш был прав. Большими советскими проектами были Атомный и Космический. Именно им на посту президента АН СССР М.В. Келдыш уделял основное внимание. Результаты их выполнения определяют сейчас суверенитет новой России. Велика роль математики в выполнении этих программ. К этому времени относится и взлет математического образования. В 1960-х гг. не мехмате работало около 400 научных семинаров.

Какими же могут быть большие проекты новой России, которые определят среди прочего и развитие математического образования в МГУ и в других вузах страны?

Первый проект — освоение и развитие компьютерного пространства, начиная от создания собственных компьютеров и алгоритмов работы с данными и кончая искусственным интеллектом.

Если считать биосферу первой природой, техносферу — второй, то сейчас на наших глазах развивается третья природа — информационно-телекоммуникационное пространство. В мире работает 6,2 млрд компьютеров, в 2025 году 5,44 млрд человек пользуются Интернетом, из них 131 млн — в России. Современные компьютеры стали считать в 10^{18} раз быстрее, чем первые вычислительные машины. При этом быстродействие компьютеров Q растет со временем t по закону Мура, то есть в геометрической прогрессии (в одинаковой число раз за одинаковые промежутки времени) (см. рис. 7): $Q \sim 2^{t/\tau}$, где $\tau \approx 2$ года.

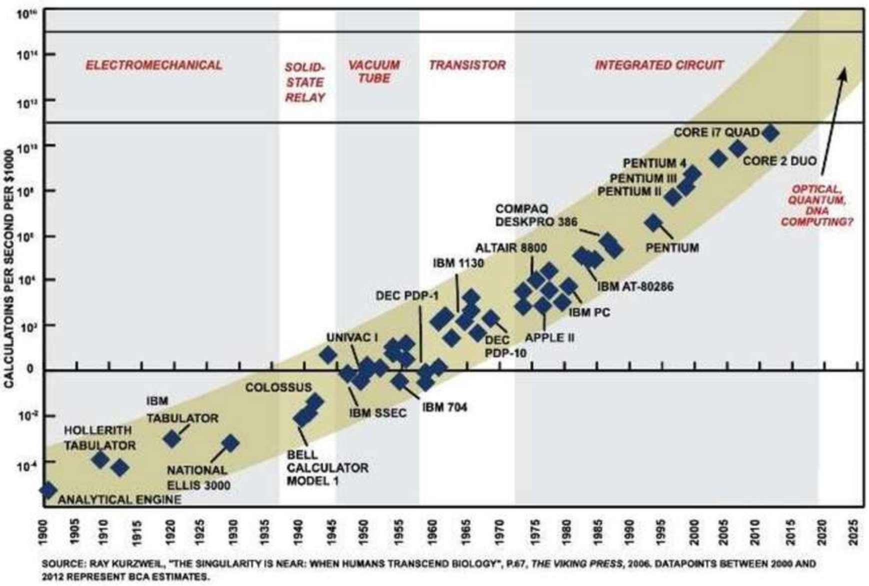

Рис. 7. График, иллюстрирующий закон Мура.
По оси абсцисс — время, по оси ординат — число операций, которое компьютеры производили за одну тысячу долларов

Математика из сферы науки преобразилась в гигантскую сферу экономики — *компьютерно-математическую промышленность*, капитализация ряда ведущих компаний в которой превышает триллион долларов.

К сожалению, Россия не участвует сегодня в этой компьютерной гонке — у нас нет своих мобильников, планшетов, персоналок, суперкомпьютеров, маршрутизаторов и многого другого. Это уже сейчас имеет серьезные геополитические, геоэкономические и геокультурные последствия. Когда некоторое время назад я поинтересовался у лауреата Нобелевской премии по физике Ж.И. Алферова, как, располагая определенными средствами, повысить обороноспособность страны, он ответил не задумываясь: "Эти средства надо вложить в создание своей элементной базы. От 80 до 95% возможностей современного оружия определяется электроникой, которая в него "зашита". Кроме того, это необходимо для новой индустриализации страны".

Естественно, развитие этого проекта существенно меняет математическое образование. Начиная с XVII в. в нем во главу угла ставился анализ бесконечно малых в разных ипостасях — математический и функциональный анализ, дифференциальные уравнения и математическая физика — непрерывная математика. Пришла пора дискретной математики — теории алгоритмов, комбинаторики, языков программирования, криптографии, теории графов, алгебры. Это другой мир и другие акценты в образовании. Представление о курсах, которые здесь возникают, дает, например, книга [27].

Особое внимание следует обратить на искусственный интеллект (ИИ). На принципиальное значение этой сферы указывает и Президент страны: "Искусственный интеллект — это будущее не только России, но и будущее всего человечества. Здесь колоссальные возможности и трудно прогнозируемые сегодня угрозы. Тот, кто станет лидером в этой сфере, будет властелином мира. И очень бы не хотелось, чтобы эта монополия была сосредоточена в чьих-то руках, поэтому мы, если мы будем лидерами в этой сфере, также будем делиться этими технологиями со всем миром, как мы сегодня делимся атомными технологиями, ядерными технологиями" [26]. Ещё президент добавил: "Но чтобы не стоять в конце очереди, нужно над этим работать уже сегодня".

Перспективы развития этого проекта огромны. Один из ведущих специалистов в области ИИ Кай-Фу Ли утверждает, что через 10–15 лет половина работающих в США останутся без того дела, которым занимаются сейчас. Их заменят компьютеры и ИИ [28]. Кай Фу Ли считает, что сверхдержавами искусственного интеллекта являются США и Китай. Естественно вложить усилия, чтобы в число сверхдержав вошла и Россия. Направление, связанное с ИИ, является междисциплинарным. В его основе лежат попытки отразить в алгоритмах принципы построения структуры и динамики головного мозга.

Математическая идея развития этого направления очень проста. Алгоритм обратного распространения ошибок, играющий в нем ключевую роль, является воплощением метода Ньютона решения алгебраического уравнения $x = \varphi(x)$. Однако потребовалось более 60 лет и большие усилия, чтобы на этой основе создать программы, переводящие на сотню языков, выигрывающие у людей в шахматы и го, способные писать картины и музыку в соответствии с заданием, сдавать экзамены, писать курсовые работы и речи в подтверждение или опровержение заданного тезиса.

Как и говорил академик М.В. Келдыш, большие проекты часто приводят к глубоким фундаментальным результатам. Нобелевская премия по физике в 2024 г. была присуждена Джону Хопфилду и Джеффри Хинтону "за открытия и изобретения, обеспечившие возможность машинного обучения нейросетей". Нобелевская премия по химии в 2024 г. была присуждена Дэвиду Бейкеру, Денису Хассабису и Джону Джамперу "за изучение структур протеинов". Ключевую роль в этом исследовании сыграл ИИ.

Второй большой проект — *освоение биологического пространства, новая медицина, биотехнологии.* Пандемия COVID-19 показала, что именно биологическое пространство является важнейшей сферой уязвимости человечества. Мы понимаем и умеем в этой области гораздо меньше, чем хотелось бы. Остается надеяться на прорыв в ней, самым тесным образом связанной с математикой и применением компьютеров. Цена секвенирования генома человека, определяющего его наследственную информацию, за 10 лет упала в 20 тыс. раз. Из исследования, находившегося на переднем крае науки, это стало стандартным медицинским анализом. Реализация проекта "Геном человека" дала огромный экономический эффект и кардинально изменила медицину, фармацевтику, правоохранительную и военную сферу, а также многие другие области.

В 2020 г. лауреатами Нобелевской премии по химии стали Дженнифер Дудна и Эммануэль Шарпантье за создание "генетических ножниц" — технологии CRISPR/Cas9 — инструмента, позволяющего изменять с высокой точностью молекулу ДНК, определяющую наследственность растений, животных, микроорганизмов, человека. Это ключ к стремительному ускорению эволюции, к созданию новых организмов с огромными возможностями и очень серьезными рисками.

Без компьютеров и здесь не обойтись. Геном — это гигантский текст, состоящий примерно из 3 млрд миллиардов букв А, Т, Г, Ц. Ближайшая аналогия — огромная библиотека из трех тысяч томов. Мы живем около 3 млрд секунд, поэтому не сами можем "прочитать" написанное в геноме. Естественно, на помощь приходят компьютеры. Здесь есть свои модели, алгоритмы, проблемы, достижения. Не стоит обходить вниманием этот стремительно развивающийся проект, роль которого со временем будет расти.

Заключение

Всматриваясь в величественное здание Университета — ведущего российского вуза, готовящего исследователей — обычно думаешь, что он является во многом схожим во всей Россией. И он, и вся наша страна имеет славное прошлое, решает сложные проблемы в настоящем и вкладывают усилия, чтобы построить достойное будущее. "Железный канцлер" Отто фон Бисмарк как-то сказал: "Русские долго запрягают, но быстро едут". Университету пришла пора "ехать", чтобы не отстать от стремительно меняющихся мировых реалий, чтобы не оказаться "последним в очереди", а, напротив, быть впереди.

Прошлое показывает, что мы добивались наибольших успехов, когда связывали научную деятельность с крупными научно-техническими проектами, которые определяли будущее страны. Видимо так же надо действовать и сейчас.

Со второй половины XX в. стало ясно, что системные свойства обычно оказываются важнее отдельных структур. Очевидно, это относится и к такой большой и сложной системе, каковой оказывается Университет. Отдельные исследования, курсы, люди не решат вставших проблем. Нужны системные изменения и курс на мобилизацию, которую требует нынешнее время.

Именно в этом контексте пересмотр математического образования в Университете будет естественным, понятным и необходимым. Императивы подобных перемен в свое время обозначил выпускник физфака, легендарный ректор МГУ академик Рэм Викторович Хохлов (1973–77). Под его началом Университет стал лидером в области нелинейной оптики, которой в то время в стране уделялось огромное внимание.

В историю вошли его фразы: "Вуз должен давать студенту не столько конкретные знания, сколько основу духовного богатства человечества и метод познания новых явлений, равно как и преобразования мира", "Надо набрать хороших ученых и не мешать им работать", "РАН не должна быть местом, где царит архаичность". Он обозначал в свое время перспективу развития широких межфакультетских связей, взаимодействия коллективов в решении системных задач науки и образования.

Проблемы, стоящие перед МГУ и нашей страной, гораздо масштабнее и сложнее, чем те, которые решались в хохловские времена. Впрочем, в истории есть времена, когда перед нами стояли ещё более серьезные вызовы, с которыми страна и Университет достойно справились. Будем надеяться, что справятся и сейчас.

Литература

[1] Арнольд В.И. Полиматематика: является ли математика единой наукой или набором ремесел / Математика: границы и перспективы. / Пер. с англ. под ред. Д.В.Аносова, А.Н.Паршина. - М.: ФАЗИС, 2005. - с. 1-18.

[2] Капица С.П., Курдюмов С.П. Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. Самоорганизация. История. Кн. 1. Изд 4-е. - М.: URSS, 2020. - 152 с. (Синергетика: от прошлого к будущему. - № 3).

[3] Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Юдина И.И., Позняк Э.Г. Атанасян Л.С. Геометрия 7-9. - М.: Просвещение, 2014. - 390 с.

[4] Дорофеев Г., Потапов М., Розов Н. Математика для поступающих в вузы. 8-е изд. - М.: Дрофа, 2007. - 666 с.

[5] Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом М.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Ч.1. - М.: Физматлит, 2016. - 604 с.

[6] Костенко И.П. Реформы школы и качество образования. // Эксперт. - 2022. - № 36. - с.61.

[7] Костенко И.П. Реформа школьной математики 1970-1978 гг. К 40–летию “Колмогоровской реформы” // Alma mater (Вестник высшей школы). - 2011. - № 8. - с.78-81. URL: https://almavest.ru/ru/node/1256

[8] Краснова В. Ура, завтра в школу! // Эксперт. - 2022. - № 36. - с. 58-71.

[9] РАН: доля ученых среди населения России в два-три раза ниже, чем в странах-лидерах. URL: https://nauka.tass.ru/nauka/6093679

[10] URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Специализированный_учебно-научный_центр_МГУ

[11] Кто возглавлял министерства образования науки и просвещения России. URL: https://tass.ru/info/20795179

[12] Массовое образование в РФ мертво: интервью с Алексеем Савватеевым у трупа русской средней школы. URL: https://www.business-gazeta.ru/article/528828

[13] Пятьдесят крупнейших мыслителей об образовании. От Конфуция до Дьюи / Пер. с англ. Н.Л. Мироновой; под науч. ред. М.С. Добронравовой; Нац. исслед. ун-т. “Высшая школа экономики”. - М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2012. - 424 с. - (Теория и практика образования).

[14] Мартынов Г. Квалифицированный потребитель. А кто это?
URL: https://proza-ru.turbopages.org/ proza.ru/s/2016/09/22/856

[15] Интервью А.Г. Асмолова И.М. Логвиновой: Учитель — мастер порождения смыслов в школе неопределенности. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/intervyu-a-g-asmolova-i-m-logvinovoy-uchitel-master-porozhdeniya-smyslov-v-shkole-neopredelennosti

[16] “Россия — страна-дауншифтер”. Три цитаты Германа Грефа, воспринятые как унижение и попытка захвата. URL: https://tsargrad.tv/news/rossija-strana-daunshifter-tri-citaty-germana-grefa-vosprinjatye-kak-unizhenie-i-popytka-zahvata_304260

[17] Джаббров Д. Китайским детям запретят свободно пользоваться смартфоном и интернетом. URL: https://www.gazeta.ru/tech/news/2023/08/02/20991974.shtml

[18] Новости Китая, 2 января: полный запрет на мобильные телефоны в школах, Huawei снизил цены. URL: https://ekd.me/2025/01/novosti-kitaya-2-yanvarya-polnyj-zapret-na-mobilnye-telefony-v-shkolax-huawei-snizil-ceny/

[19] Тихонов А.Н, Самарский А.А. Уравнения математической физики. изд. 5-е. - М.: Наука, 1977. - 736 с.

[20] Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. Изд. 3-е. - М.: Наука, 1980. - 688 с.

[21] Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. Изд. 6. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 336 с. - (Курс высшей математики и математической физики).

[22] Самарский А.А. Современная прикладная математика и вычислительный эксперимент // Коммунист. - 1983. - № 18, с.31-42.

[23] Калиткин Н.Н. Численные методы: учеб. пособие. Изд.2-е. - СПб:БХВ-Петербург, 2011. 592 с. - (Учебная литература для вузов).

[24] Арнольд В.И. Лекции об уравнениях с частными производными. - М.: МЦНМО, 2017. - 182 с.

[25] Малинецкий Г.Г. Синергетика — новый стиль мышления: Предметное знание, математическое моделирование и философская рефлексия в новой реальности. - М.: URSS, 2022. - 288 с. - (Синергетика: от прошлого к будущему. - № 105. Будущая Россия. - № 35).

[26] Данилов Ю.А. Лекции по нелинейной динамике: Элементарное введение. - М.: URSS, 2023. - 208 с. - (Синергетика: от прошлого к будущему).

[27] Применко Э.А. Алгебраические основы криптографии. - М.: URSS, 2022. - 288 с. - (Основы защиты информации № 9)

[28] Путин В.В. Открытый урок "Россия, устремленная в будущее".
URL: http://kremlin.ru/events/president/news/55493

[29] Ли Кай-Фу. Сверхдержавы искусственного интеллекта. Китай, Кремниевая долина и новый мировой порядок. / Пер. с англ. Н.К. Константинова, Ред. В. Лялин, О. Копит. - М.: Манн, Иванов и Фербер, 2019. - 240 с.

Малинецкий Георгий Геннадьевич,
заведующий отделом математического моделирования
нелинейных процессов Института прикладной
математики (ИПМ) им. М.В. Келдыша РАН,
доктор физико-математических наук, профессор,
действительный член Академии военных наук.

E-mail: gmalin@keldysh.ru

Учащимся и учителям средней школы

О началах анализа в школе

С. Р. Когаловский

Статья нацеливает изучающих математический анализ на осознание того факта, что начала анализа, его методы базируются на полноте упорядоченного множества действительных чисел $\mathbb{R}$, и что ведущие теоремы начал анализа равносильны утверждению о полноте $\mathbb{R}$. Приводимые доказательства отличаются от традиционных и доступны для старших школьников профильных классов.

Обучение школьников началам анализа не может не предполагать приведения учащихся к осознанию того, что начала анализа, его методы основаны на непрерывности, или полноте упорядоченного множества действительных чисел $\mathbb{R}$, что они пронизаны ею, что большинство ведущих теорем из начал анализа равносильны утверждению о полноте $\mathbb{R}$. Это делает необходимым преобразование интуитивных представлений о полноте $\mathbb{R}$ в эффективные орудия поисково-исследовательской деятельности и "средства производства" таких орудий.

Широкое многообразие исследуемых вопросов, относящихся к началам анализа, требует приобщения учащихся и к широкому многообразию форм представления полноты $\mathbb{R}$. Таковы, прежде всего, эффективно применимое ее представление с помощью дедекиндовых сечений, леммы Бореля и теоремы о вложенных отрезках.

Верно ли, что если функция возрастает в каждом из двух интервалов, покрывающих данный промежуток, то она возрастает на всем промежутке? Обсуждение этого, казалось бы, тривиального вопроса приводит учащихся к следующему вопросу: верно ли, что у промежутка, ограниченного справа (слева), есть правый (левый) конец (не обязательно ему принадлежащий)? Тем самым этот отправной вопрос побуждает их обратиться к вопросу о полноте $\mathbb{R}$.

Полнота $\mathbb{R}$ вначале полагается в качестве *Постулата*, и школьники приходят к осознанию того, что что начала анализа, его методы базируются на полноте $\mathbb{R}$. На этом пути находятся прямые, не опосредованные какими-либо промежуточными теоремами доказательства теоремы Вейерштрасса о непрерывных на отрезках функциях, теоремы о равномерной непрерывности на отрезке непрерывной на нем функции, теорем, дающих достаточные условия возрастания (убывания) и неубывания (невозрастания) функции. Их доказательства отличаются простотой и достаточным единообразием. Они доступны старшеклассникам. Находится настолько же строгое, насколько и простое и естественное доказательство теоремы Лагранжа о конечных приращениях. Отправляясь от представления действительных чисел бесконечными десятичными дробями, мы доказываем Постулат. В заключительной части статьи мы находим положения, относящиеся к числовой прямой, которые обеспечивают изоморфность множества ее точек и множества $\mathbb{R}$ как упорядоченных множеств.

За всем сказанным в началах анализа усматривается пример, демонстрирующий, что "субстратными" началами математики являются развивающиеся рациональные модели первопредставлений, первообразов, первоидей человека, что развитие математики сопровождается многократными погружениями в эти ее корни, из которых она, уподобляясь Антею, черпает все более глубокие идеи и энергию их реализации. За всем этим усматривается и то, что умственное развитие учащихся посредством их математического развития осуществляется не только как развитие их рационального мышления, но и как развивающееся взаимодействие рациональной и вне-рациональной форм мышления. А это заставляет в теоретическом мышлении видеть проявление развитых (и развивающихся далее) таких взаимодействий, осуществляемых при ведущей роли рационального мышления.

Многие излагаемые в статье результаты впервые были опубликованы в [1, глава 13] (см. также [2, глава 8]). Настоящая статья отличается от предыдущих наших публикаций, посвященных обсуждаемым здесь вопросам и результатам, большей методической проработанностью, новыми значимыми задачами-теоремами и полезными замечаниями. Она ориентирована в основном на учителей математики, но доступна и студентам-математиков педагогических вузов, а также старшим школьникам профильных классов.

Полнота $\mathbb{R}$

Мы будем предполагать известными начальные свойства упорядоченного множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и арифметических операций над ними. Эти знания (и соответствующие умения) входят в программу основной школы.

Действительные числа будем понимать как всевозможные, и конечные и бесконечные, *десятичные дроби.* И над действительными числами определены арифметические операции (исключая деление на ноль) и отношение порядка, согласованное с арифметическими операциями.

Напомним также следующее. Всякое рациональное число представимо подходящим действительным числом (но не наоборот) и отождествляется с ним. Сумма рациональных чисел как чисел действительных совпадает с их суммой как чисел из $\mathbb{Q}$. Аналогичное верно для всех других арифметических операций и для отношения порядка. Все рациональные числа и только они представимы *периодическими* десятичными дробями. А значит, все бесконечные *непериодические* десятичные дроби не являются рациональными числами. Такие числа называют *иррациональными.* Хорошо известный из школьной программы пример иррационального числа — квадратный корень из двух.

Введем важные для дальнейшего понятие числового промежутка и виды числовых промежутков.

Числовым промежутком или *промежутком* будем называть всякое такое множество действительных чисел, что вместе со всякими принадлежащими ему числами a и $b > a$ ему принадлежат все такие числа c, что $a < c < b$.

Промежуток I называется *ограниченным справа (слева)*, если имеется число, большее (меньшее) всех чисел из I. Промежуток называют *ограниченным*, если он ограничен и справа, и слева.

Промежуток называют *открытым*, если у него нет ни наименьшего, ни наибольшего числа.

Интервалом называется промежуток, состоящий из всех таких чисел c, что $a < c < b$ для каких-то чисел a и b.

Открытым слева (справа) полуинтервалом называется промежуток, состоящий из всех таких чисел c, что $a < c \leq b$ ($a \leq c < b$) для каких-то a и b.

Отрезком называется промежуток, состоящий из всех таких чисел c, что $a \leq c \leq b$ для каких-то a и b.

– Зачем вводить, например, термин "открытый промежуток", если уже есть термин "интервал"? Ведь очевидно, что открытый промежуток — это интервал.

– Так ли это очевидно? Будем рассматривать промежутки на множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. (Под промежутком на Q мы понимаем всякое такое множество рациональных чисел, что вместе со всякими принадлежащими ему числами a и $b > a$ ему принадлежит всякое такое число c, что $a < c < b$). Является ли интервалом на $\mathbb{Q}$ промежуток на $\mathbb{Q}$, состоящий из всех (рациональных) чисел, заключенных между 0 и $\sqrt{2}$, т.е. из всех положительных рациональных чисел, квадрат которых меньше 2? Иначе говоря, существует ли такое рациональное число a, что этот промежуток есть $(0, a)$?

– Таким a является наименьшее из рациональных чисел, бóльших $\sqrt{2}$ или наибольшее из рациональных чисел, мéньших $\sqrt{2}$.

– Но такие числа не существуют. Так, для всяких иррационального числа α и рационального числа $a > \alpha$ существует такое рациональное число b, что $\alpha < b < a$. Действительно, пусть β — среднее арифметическое a и α. Среди десятичных приближений этого числа (которое меньше a) имеются такие, которые больше α. Уже отсюда ясно, что среди рациональных чисел, меньших α, нет наибольшего. Аналогично показывается, что среди рациональных чисел, больших α, нет наименьшего. Таким образом, рассматриваемый промежуток на $\mathbb{Q}$ является открытым, но не является интервалом.

– Но ведь всякий открытый промежуток на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел является интервалом, не так ли?

– Прежде чем попытаться найти обоснованный ответ на этот вопрос, обратимся к следующей задаче:

Задача 1.1. Верно ли, что если промежуток K покрывается парой открытых промежутков I и J, на которых функция f возрастает, то f возрастает на K?

– Конечно, это верно. Докажем, что $f(b) > f(a)$ для всяких чисел a и $b > a$ из K. Если a и b оба принадлежат I или J, то это неравенство имеет место по условию. Пусть а принадлежит I и не принадлежит J, b принадлежит J и не принадлежит I и пусть c — какое-нибудь число из общей части I и J, такое, что $a < c < b$. Так как a и c принадлежат I, в котором f возрастает, то $f(a) < f(c)$. А так как c и b принадлежат J, в котором f тоже возрастает, то $f(c) < f(b)$. Из $f(a) < f(c)$ и $f(c) < f(b)$ следует $f(a) < f(b)$.

– Это доказательство опирается на предположение о существовании общих чисел у I и J. Но верно ли, что если два открытых промежутка покрывают какой-нибудь промежуток, то они налегают друг на друга, то есть имеют общие числа?

– Предположим, что I и J не налегают друг на друга. Тогда правый конец c левого из них и левый конец d правого совпадают. (Ведь в противном случае интервал (c, d), входящий в K, не покрывался бы этими промежутками). И этот общий их конец не принадлежит ни I, ни J. Но ведь он принадлежат промежутку K, покрываемому I и J. Пришли к противоречию.

–Это доказательство опирается на предположение, что у промежутка, ограниченного справа, то есть такого, что имеются числа, расположенные справа от него, есть правый конец (не обязательно ему принадлежащий), а у промежутка, ограниченного слева, — левый конец.

– Всякий промежуток есть отрезок, интервал или полуинтервал. В самом деле, если у промежутка есть принадлежащие ему концы, то есть самое меньшее и самое большее его числа, то он отрезок. Если у него, например, нет принадлежащего ему правого конца, но есть левый, то он полуинтервал. Если же у него нет ни левого, ни правого конца, ему принадлежащего, то он интервал. Пусть, например, I — ограниченный промежуток, a — самое большее из чисел, ме́ньших всех чисел из I, а b — самое меньшее из чисел, бо́льших всех чисел из I. Ясно, что I — интервал (a, b).

– Но откуда видно, что такие числа a и b существуют, то есть что всякий открытый промежуток есть интервал?

– Если бы такого числа b не было, то на множестве всех чисел была бы "щель" между I и куском, состоящим из всех чисел, лежащих справа от I. Но множество действительных чисел сплошное. Оно представимо как прямая — как числовая прямая. В нем нет "щелей". Иначе говоря, если два ее промежутка "примыкают" друг к другу, то они имеют общий конец, принадлежащий одному из них. Сомнение в истинности этого утверждения — это сомнение и в том, что точную длину отрезка при заданном единичном отрезке можно выразить конечной или бесконечной десятичной дробью. Это и сомнение в надежности метода интервалов. Не естественно ли поэтому принять это утверждение в качестве постулата, а позднее попытаться его доказать?

– Так и поступим.

Говорят, что два числовых промежутка, покрывающие третий числовой промежуток, образуют его *сечение*, если у них нет общих чисел. Примем следующий

Постулат. *Всякое сечение числового промежутка таково, что либо в левом из образующих его промежутков есть наибольшее число, либо в правом есть наименьшее.*

Постулат выражает, что между промежутками, образующими сечение какого-либо промежутка, нет “щели”, а значит, что для таких промежутков не может быть, что левый открыт справа, а при этом правый открыт слева, в частности, что оба таких промежутка не могут быть интервалами. Тем самым он выражает “сплошность”, или, что то же, полноту $\mathbb{R}$.

Заметим, что Постулат не выполняется на множестве $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел. Действительно, промежутки на $\mathbb{Q}$, один из которых состоит из чисел, ме́ньших $\sqrt{2}$, а другой — из чисел, бо́льших $\sqrt{2}$, образуют сечение $\mathbb{Q}$, не удовлетворяющее постулату.

Нижней (верхней) гранью непустого множества чисел M будем называть всякое такое число, которое не больше (не меньше) любого числа из M. Например, всякое число $c \geq b$ является верхней гранью интервала (a, b) и отрезка $[a, b]$.

Пусть промежутки I и J образуют сечение некоторого промежутка. Тогда наибольшее в I или наименьшее в J число есть одновременно наименьшая верхняя грань I и наибольшая нижняя грань J.

Легко доказывается, что следующая теорема равносильна Постулату:

Теорема 1.1. *Всякое ограниченное справа (слева) множество чисел имеет наименьшую верхнюю грань (наибольшую нижнюю грань).*

Так же легко доказывается, что и следующая теорема равносильна Постулату:

Теорема 1.2. *Числовой промежуток есть отрезок, интервал или полуинтервал.*

Теорема 1.3. *Верхняя (нижняя) грань множества чисел M тогда и только тогда является его наименьшей верхней (наибольшей нижней) гранью, когда в любой ее окрестности имеются числа из M.*

Доказательство. Пусть, например, x_0 — наименьшая верхняя грань M. Если x_0 принадлежит M, то любая окрестность x_0 содержит число, принадлежащее M. Ведь само x_0 является таким числом. Пусть x_0 не принадлежит M. Если бы какая-нибудь окрестность U этого числа не содержала чисел из M, то все числа из U, в частности, те из них, которые расположены слева от x_0, были бы верхними гранями M. Но тогда x_0 не было бы наименьшей из верхних граней M.

Пусть в любой окрестности числа x_0, являющегося верхней гранью M, имеются числа из M. Тогда слева от него нет верхних граней M. А значит, это число является наименьшей верхней гранью M. Теорема доказана.

Теорема 1.4. *Из Постулата следует выполнимость аксиомы индукции.*

Доказательство. Действительно, пусть M — непустое множество натуральных чисел. Согласно теореме 1.1 существует наибольшая нижняя грань m множества M. Согласно теореме 1.3 в любой окрестности m имеются числа из M. А это возможно только тогда, когда m само принадлежит M. Таким образом, m есть наименьшее число в M. Теорема доказана.

Говорят, что набор промежутков является *покрытием множества чисел M*, если всякое число из M принадлежит какому-нибудь промежутку из этого набора.

Задача 1.2. Пусть промежуток покрывается набором интервалов, в каждом из которых функция f возрастает. Доказать, что f возрастает на всем промежутке.

Решение. Пусть a и $b > a$ — какие-нибудь числа данного промежутка. Докажем, что $f(b) > f(a)$. Пусть A — множество всех таких чисел c из $(a, b]$, что $f(c) > f(a)$. Это множество непустое. В самом деле, пусть I — какой-нибудь интервал набора, содержащий a. По условию, для всякого числа $c > a$ из I имеет место $f(c) > f(a)$. Среди таких чисел имеются числа из $(a, b]$, а значит, входящие в A. Пусть d — наименьшая верхняя грань A (она существует согласно теореме 1). Докажем, что $d \in A$. Допустим противное. Пусть J — интервал заданного набора, содержащий d. Согласно теореме 1.3 в J имеются числа из A, входящие в J. Они меньше d. Пусть e — такое число. Из $f(a) < f(e)$ и $f(e) < f(d)$ следует $d \in A$, вопреки допущению. Докажем, что $d = b$. Так как в J существуют числа из $(a, b]$, большие d, а значит, принадлежащие A, то допущение, что d отлично от b, влекло бы, что d не является верхней гранью A. Таким образом, $b \in A$.

Пусть Σ — покрытие множества чисел M числовыми промежутками. Всякая часть Σ, также являющаяся покрытием M, называется *подпокрытием* этого покрытия.

Теорема 1.5 (лемма Бореля). *У всякого покрытия числового отрезка интервалами имеется конечное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть Σ — интервальное покрытие отрезка $[a, b]$. Обозначим через P множество всех таких точек $x_0 > a$ из $(a, b]$, что $[a, x_0]$ покрывается каким-нибудь конечным набором интервалов из Σ. Доказываемое утверждение равносильно утверждению, что $P = [a, b]$.

P не пусто. Ведь любой интервал из Σ, содержащий a, содержит точки из P. Так как P ограничено справа, то, согласно теореме 1, оно имеет наименьшую верхнюю грань c. Докажем, что c принадлежит P. Допустим противное. Пусть U — какая-нибудь окрестность c, принадлежащая Σ. Согласно теореме 3 в U имеются числа из P. Пусть d — какое-нибудь из них, Σ_1 — конечный набор интервалов из Σ, покрывающий отрезок $[a, d]$. Присоединив к нему U, получим конечный набор интервалов из Σ, покрывающий отрезок $[a, c]$. А значит, c принадлежит P. Докажем, что c есть b. В противном случае всякое число из U, бóльшее c и входящее в $[a, b]$, принадлежало бы P, что противоречило бы тому, что c — верхняя грань P. Теорема доказана.

Задача 1.3. Доказать, что теорема 1.5 равносильна Постулату.

Решение. Докажем, что из теоремы 1.5 следует Постулат. Иначе говоря, докажем, что из отрицания Постулата следует отрицание теоремы 1.5. Допустим, что существует разбиение $\mathbb{R}$ на два куска, левый из которых не имеет наибольшего числа, а правый — наименьшего. Пусть a_1 и $a_2 > a_1$ — точки левого куска, b_1 и $b_2 < b_1$ — точки правого. Рассмотрим всевозможные интервалы (a_1, c) из левого куска и всевозможные интервалы (d, b_1) из правого, где $c > a_2$ и $d < b_2$. Вся их совокупность образует покрытие отрезка $[a_2, b_2]$, но у этого его покрытия нет конечного подпокрытия.

Теорема 1.6. *Пусть S — множество вложенных числовых отрезков. Тогда существует хотя бы одно число, принадлежащее всем этим отрезкам.*

Доказательство. Пусть A — множество левых концов отрезков из S, B — множество правых их концов, a — точная верхняя грань A, b — точная нижняя грань B. (Они существуют согласно теореме 1.1). Так как всякое число из B больше всех чисел из A, то b не меньше a. Отрезок $[a, b]$ есть общая часть отрезков из S. Теорема доказана.

Задача 1.4. Доказать, что теорема 1.6 равносильна Постулату.

Решение. Докажем, что из теоремы 1.6 следует постулат. Иначе говоря, докажем, что из отрицания постулата следует отрицание теоремы 1.6.

Допустим, что существует разбиение $\mathbb{R}$ на два куска, левый из которых не имеет наибольшего числа, а правый — наименьшего. Пусть (a_n) — такая возрастающая последовательность чисел из левого куска, что для всякого числа a из левого куска неравенство $a_n > a$ выполняется для всех n, начиная с некоторого, (b_n) — такая убывающая последовательность чисел из правого куска, что для всякого числа b из правого куска неравенство $b_n < b$ выполняется для всех n, начиная с некоторого. Общими числами всех отрезков $[a_n, b_n]$ могут быть лишь такие, которые больше всех a_n и меньше всех b_n. Но таких точек нет ни в левом, ни в правом куске $\mathbb{R}$.

Использованием теоремы 1.1 легко доказывается

Теорема 1.7. *Всякая ограниченная монотонная последовательность имеет предел.*

Задача 1.5. Доказать, что теорема 1.7 равносильна Постулату.

Теорема Вейерштрасса

Насколько хорошей моделью непрерывности на промежутке в обыденном понимании является строгое понятие непрерывности на промежутке? В частности, действительно ли достаточно непрерывности (выражаемой строгим определением) в каждой точке промежутка для того, чтобы функция принимала на нем свои значения сплошь?

$E_I(f)$ будет обозначать множество всех значений функции f на промежутке I.

Лемма 2.1. *Если функция f непрерывна на промежутке I, то $E_I(f)$ — промежуток.*

Доказательство. Пусть a и $b > a$ — какие-нибудь числа из I. Пусть, например, $f(a) < f(b)$. μ — какое-нибудь число из интервала $(f(a), f(b))$. Докажем, что в (a, b) существует точка c такая, что $f(c) = \mu$. Тем самым лемма будет доказана.

Пусть M — множество всех таких чисел x из $[a, b]$, что $f(t) < \mu$ для всякого числа t из $[a, x]$. Согласно теореме 1.1 существует наименьшая верхняя грань c множества M. Если бы было $f(c) > \mu$, то, в силу непрерывности f в c, существовала бы такая окрестность точки c, что для любой ее точки x было $f(x) > \mu$. Но это противоречило бы тому, что c — наименьшая верхняя грань M. Если бы было $f(c) < \mu$, то существовала бы такая окрестность точки c, что для любой ее точки x было $f(x) < \mu$. Но и это противоречило бы тому, что c — наименьшая верхняя грань M. Таким образом, $f(c) = \mu$. Лемма доказана.

Задача 2.1. Доказать, что лемма 2.1 равносильна Постулату.

Решение. Докажем, что из отрицания постулата следует отрицание этой леммы. Допустим, что существует разбиение $\mathbb{R}$ на два куска, левый из которых не имеет наибольшего числа, а правый — наименьшего. Пусть f — функция, определенная на $\mathbb{R}$ так: $f(x) = 0$ для чисел левого куска и $f(x) = 1$ для чисел правого. Эта функция непрерывна на $\mathbb{R}$, но множество ее значений не есть промежуток.

Лемма 2.2. *Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на некотором отрезке. Тогда для каждой точки этого отрезка существует ее окрестность, в которой f ограничена. Значит, существует покрытие отрезка такими окрестностями. Согласно теореме 1.5 у этого покрытия существует конечное подпокрытие. Таким образом, отрезок покрываем конечным набором интервалов, в каждом из которых функция ограничена. Пусть $U_1, ..., U_n$ — интервалы, покрывающие отрезок, и пусть $a_i < f(x) < b_i$ для всякой точки x интервала U_i $(i = 1, \ldots, n)$. Обозначим через a наименьшее из чисел a_i, а через b — наибольшее из чисел b_i. Ясно, что $a < f(x) < b$ для всякой точки x отрезка. Значит, f ограничена на рассматриваемом отрезке. Лемма доказана.

В действительности нами доказана более общая

Теорема 2.1. *Если в каждой точке отрезка функция имеет предел, то она ограничена на нем*[1].

Задача 2.2. Доказать, что лемма 2.2 равносильна Постулату.

Теорема 2.2. *Пусть функция f непрерывна на отрезке I. Тогда $E_I(f)$ — отрезок.*

Доказательство. Согласно леммам 2.1 и 2.2 $E_I(f)$ — ограниченный промежуток. Отсюда и из теоремы 1.1 следует, что существует его наименьшая верхняя грань m. Докажем, что она принадлежит $E_I(f)$. Допустим противное, то есть что $f(x) < m$ для всякой точки x из I. Тогда для всякой точки x_0 из I найдутся такая ее окрестность $U(x_0)$ и такое число $\alpha(x_0) < m$, что $f(x) < \alpha(x_0)$ для всякой точки x из $U(x_0)$. Окрестности $U(x_0)$ образуют покрытие отрезка I. Пусть $U(x_1), ..., U(x_n)$ — конечное его подпокрытие и β — наибольшее из чисел $\alpha(x_1), ..., \alpha(x_n)$. Тогда $f(x) < \beta$ для всякой точки x из I. А так как $\beta < m$, то m не является наименьшей верхней гранью $E_I(f)$. Пришли к противоречию. (Аналогично доказывается, что наибольшая нижняя грань $E_I(f)$ принадлежит $E_I(f)$). Теорема доказана.

А вот доказательство принадлежности m множеству $E_I(f)$, использующее другую форму представления полноты $\mathbb{R}$. Среди значений f на $[a, b]$ существуют как угодно близкие к m. Кусок отрезка $[a, b]$ будем называть *хорошим*, если в нем функция принимает значения, как угодно близкие к m.

---

[1]Представляется естественным вопрос о том, насколько близки следующие условия:

А) в каждой точке промежутка функция имеет предел;

Б) в каждой точке промежутка функция непрерывна.

Верно ли, что функция, удовлетворяющая условию А) на заданном отрезке, имеет на нем разве лишь дискретное множество точек разрыва?

Разобьем $[a, b]$ на две половины. Какая-нибудь из них с присоединенной к ней точкой разбиения является хорошим отрезком. Этот отрезок разобьем подобным образом на две половины и выберем из них хороший отрезок. Продолжая этот процесс, получим последовательность хороших вложенных отрезков. Пусть c — их общая точка (такая точка существует согласно теореме 1.6). В любой ее окрестности имеются точки, в которых f принимает значения, как угодно близкие к m. Отсюда и из непрерывности f в точке c следует: $f(c) = m$.

Заметим, что решение задачи 2.1 показывает, что теорема 2.2 равносильна Постулату.

Задача 2.3. Доказать, что для всякого промежутка I, не являющегося отрезком, и всякого промежутка J существует непрерывная функция с областью определения I и областью значений J.

Задача 2.4. Пусть функция f непрерывна на промежутке I и возрастает (убывает) на нем. Доказать, что если I — интервал (полуинтервал, отрезок), то $E_I(f)$ — интервал (полуинтервал, отрезок).

Задача 2.5. Пусть функция f возрастает (убывает) на промежутке I. Доказать, что она непрерывна на нем тогда и только тогда, когда $E_I(f)$ — промежуток.

Задача 2.6. Пусть функция f является невозрастающей или неубывающей на интервале I. Доказать, что она непрерывна на I тогда и только тогда, когда в каждой его точке она имеет предел.

Теорема 2.3. *Доказать, что между любыми двумя нулями непрерывной функции имеется хотя бы одна точка экстремума.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на промежутке I, a и $b > a$ — ее нули, лежащие в I. Если f постоянна на $[a, b]$, то всякая внутренняя точка этого отрезка является ее точкой экстремума. Пусть в какой-нибудь точке отрезка $[a, b]$ функция принимает, скажем, положительное значение. Из теоремы 2.2 следует, что в некоторой точке x_0 этого отрезка она принимает наибольшее значение. А так как $f(a) = f(b) = 0$, то x_0 — внутренняя точка $[a, b]$ и, значит, точка экстремума. Теорема доказана.

Задача 2.7. Доказать, что теорема 2.3 равносильна Постулату.

Решение. Допустим, что существует разбиение $\mathbb{R}$ на два куска, левый из которых не имеет наибольшего числа, а правый — наименьшего. Пусть a — какая-нибудь точка левого куска, b — какая-нибудь точка правого куска, f — определенная на $\mathbb{R}$ функция, такая, что $f(x) = x - a$ для точек левого куска и $f(x) = x - b$ для точек правого куска. На отрезке $[a, b]$ эта функция удовлетворяет условиям теоремы 2.3 но не имеет точек экстремума.

Равномерная непрерывность

Напомним, что *непрерывность функции f в точке* x_0 означает, что для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность точки x_0, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всякой точки x из этой окрестности. Среди таких окрестностей существует наибольшая. Будем ее обозначать через $U_\varepsilon(x_0)$.

Пусть f непрерывна в точке x_0. Тогда для всяких точек t и u из $U_\varepsilon(x_0)$ имеет место неравенство $|f(u) - f(t)| < 2\varepsilon$. В самом деле, $|f(u) - f(t)| = |(f(u) - f(x_0) + (f(x_0) - f(t)| \le |f(u) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(t)| < 2\varepsilon$.

С помощью этого замечания несложно найти решение следующей задачи:

Задача 3.1. Пусть функция f, определенная на некотором промежутке, непрерывна в его точках x_1 и x_2 и пусть $U_\varepsilon(x_1)$ и $U_\varepsilon(x_2)$ — пересекающиеся окрестности. Тогда для всяких точек t и u из $U_\varepsilon(x_1) \cup U_\varepsilon(x_2)$ имеет место неравенство $|f(u) - f(t)| < 4\varepsilon$.

С помощью теоремы 1.5 легко доказывается, что если функция f непрерывна на отрезке S, то для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число δ, что S покрывается конечным числом таких интервалов I_n длин, не меньших δ и таких, что $|f(b) - f(a)| < \varepsilon$ для любых точек a и b из I_n. Это делает естественным введение следующего понятия.

Говорят, что функция f, определенная на промежутке I, *равномерно непрерывна на нем*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всяких точек t и u из I имеет место: $|u - t| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(t)| < \varepsilon$.

Сказанное выше выражается как

Теорема 3.1. *Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. Вот более детализированное доказательство этой теоремы. Пусть функция f непрерывна на отрезке I. Зададимся каким-нибудь положительным числом ε_0. Докажем, что существует такое $\delta > 0$, что для всяких точек t и u из I имеет место: $|u - t| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(t)| < \varepsilon_0$. Пусть $\varepsilon = \varepsilon_0/4$. Каждой точке x_0 из I соотнесем $U_\varepsilon(x_0)$. Все эти окрестности образуют покрытие I. Согласно теореме 1.5 у этого покрытия имеется конечное подпокрытие I. Пусть $\Sigma*$ — минимальное конечное подпокрытие. Обозначим через δ наименьшую из длин интервалов из $\Sigma*$. Пусть t и u — такие точки из I, что $|u-t| < \delta$. Тогда они принадлежат либо какому-нибудь интервалу из $\Sigma*$, либо каким-нибудь двум пересекающимся интервалам из $\Sigma*$ и потому $|f(u) - f(t)| < 4\varepsilon$ (см. задачу 3.1), или $|f(u) - f(t)| < \varepsilon_0$.

Задача 3.2. Доказать, что функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

Задача 3.3. Доказать, что функция $y = 1/x$ не является равномерно непрерывной ни на каком на интервале $(0, a)$.

Задача 3.4. Доказать, что функция $y = \sin(1/x)$ не является равномерно непрерывной ни на каком интервале $(0, a)$.

Будем говорить, что функция f, определенная на промежутке I, *строго равномерно непрерывна на нем*, если существует такое число $\mu > 0$, что для всякого числа $\varepsilon > 0$ и всяких чисел t и u, принадлежащих I, из $|u - t| < \mu\varepsilon$ следует $|f(u) - f(t)| < \varepsilon$.

Очевидно, что функция, строго равномерно непрерывная на каком-нибудь промежутке, равномерно непрерывна на нем.

Задача 3.5. Доказать, что всякая функция $y = x^\alpha$, где $\alpha \leq 1$, строго равномерно непрерывна на промежутке $[1, +\infty)$.

Теорема 3.2. *Пусть функция f дифференцируема на промежутке I. Если ее производная ограничена на I, то f строго равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. Пусть $|f'(x)| < \lambda$ для всякой точки x из I. Согласно теореме Лагранжа, для всяких точек x_0 и $x_0 + \Delta x$ из I имеет место: $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c)\Delta x$, или $\Delta y = f'(c)\Delta x$, где c — некоторая точка, лежащая между x_0 и $x_0 + \Delta x$. Отсюда $|\Delta y| = |f'(c)| \cdot |\Delta x| \leq \lambda|\Delta x|$. Отсюда следует, что условие $|\Delta y| < \varepsilon$ будет выполняться, если будет выполняться условие $\lambda|\Delta x| < \varepsilon$, то есть если $|\Delta x| < \varepsilon/\lambda$. Значит, f — такая функция, что для всякого $\varepsilon > 0$ и всякой точки x_0 из I длина $U_\varepsilon(x_0)$ не меньше $\mu = \varepsilon/\lambda$. Иначе говоря, из $|\Delta x| < \varepsilon/\lambda$ следует $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0)$ с точностью до ε. Следовательно, f строго равномерно непрерывна на I.

Из теоремы 3.2 легко выводится

Теорема 3.3. *Функция f, непрерывно дифференцируемая на промежутке I, строго равномерно непрерывна на нем в точности тогда, когда ее производная ограничена на нем.*

Задача 3.6. Найти значение $\sqrt[3]{1,03}$ с погрешностью, не превосходящей $0,01$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Так как $|f'(x)| < 1/3$ на промежутке $[1, +\infty)$, то она строго равномерно непрерывна на этом промежутке, и из $|\Delta x| < 3\varepsilon$ следует $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0)$ с точностью до ε для всяких точек x_0 и $x_0 + \Delta x$ из этого промежутка. А значит, $\sqrt[3]{1,03} \approx 1$ с погрешностью, не превосходящей $0,01$.

Задача 3.7. Доказать, что $|\sin(x + \varepsilon) - \sin x| \leq \varepsilon$ для всякого $\varepsilon > 0$.

Признаки монотонности

Лемма 4.1. *Пусть x_0 — внутренняя точка области определения функции f и $f'(x_0) > 0$. Тогда $x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$ и $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ для всякой точки x из некоторой окрестности точки x_0.*

Пусть $f'(x) > 0$ для всякой точки x промежутка I. Покажем, что тогда f возрастает в I. Пусть a и $b > a$ — числа из I. Докажем, что $f(b) > f(a)$. Число x промежутка $(a, b]$ назовем *хорошим*, если $f(x) > f(a)$. Хорошие числа существуют. Пусть J — множество всех хороших чисел. Согласно теореме 1.1 существует его наименьшая верхняя грань d. Покажем, что $d = b$. Допустим противное. Тогда, согласно лемме 4.1, в интервале (d, b) существуют такие числа $e > d$, что $f(e) > f(d)$, а значит, такие, что $f(e) > f(a)$. Но это противоречит тому, что d — наименьшая верхняя грань J. Таким образом, $d = b$, а значит, $f(b) > f(a)$.

Пусть $f'(x) < 0$ для всякой точки x промежутка I. Тогда f убывает в этом интервале. Действительно, производная функции $y = -f(x)$ положительна в I. По доказанному эта функция возрастает в I. Но тогда функция f убывает в этом интервале. Таким образом, доказана

Теорема 4.1. *Если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всякой точки x промежутка, то функция f возрастает (убывает) на нем.*

Задача 4.1. Доказать, что теорема 4.1 равносильна Постулату.

Решение. Докажем, что из отрицания Постулата следует отрицание теоремы 4.1. Допустим, что существует разбиение $\mathbb{R}$ на два куска, левый из которых не имеет наибольшего числа, а правый — наименьшего. Рассмотрим функцию $y = f(x)$ такую, что $f(x) = x$ для чисел x левого куска и $f(x) = x - 1$ для чисел x правого куска. Эта функция всюду дифференцируема и ее производная всюду положительна. Но эта функция не является возрастающей. Действительно, пусть a — число из левого куска, b — число из правого куска (а значит, $b > a$) и $|b - a| < 1/2$. Тогда $f(b) < f(a)$. Следовательно, эта функция не является возрастающей.

Теорема 4.2. *Пусть $f'(x) \geq 0$ $f'(x) \leq 0$ для всякой точки x промежутка. Тогда функция f является неубывающей (невозрастающей) на нем.*

Доказательство. Пусть $f'(x) \geq 0$ для всякой точки x промежутка I. Тогда функция f является неубывающей на нем. Допустим противное, то есть что для некоторых точек c и $d > c$ из I имеет место $f(c) > f(d)$. Пусть k — какое-нибудь положительное число, для которого $k(d-c) < f(c) - f(d)$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) + kx$. Так как $g'(x) > 0$ в I, то, согласно теореме 4.1, эта функция — возрастающая на I, то есть такая, что $b > a \Rightarrow g(b) > g(a)$ для всяких a и b из I. В частности, $d > c \Rightarrow g(d) > g(c)$. С другой стороны, из предположения, что $f(c) > f(d)$, следует: $k(d-c) < f(c) - f(d)$ (в силу выбора k), или $f(c) + kc > f(d) + kd$, то есть $g(c) > g(d)$. Пришли к противоречию.

Пусть $f'(x) \leq 0$ для всякой точки x из I. Тогда, по доказанному, функция $y = -f(x)$ является неубывающей на I, а значит, функция $y = f(x)$ является невозрастающей на I. Теорема доказана.

Из теоремы 4.2 непосредственно следует

Теорема 4.3. *Пусть $f'(x) \equiv 0$ на промежутке I. Тогда f постоянна в I.*

Теорема Лагранжа о конечных приращениях

Из теоремы 2.3 и необходимого признака экстремума (теоремы Коши) непосредственно следует

Теорема 5.1 (теорема Ролля). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема внутри него и $f(a) = f(b)$. Тогда внутри этого отрезка существует точка, в которой производная равна* 0.

Заметим, что из равносильности теоремы 2.3 Постулату (см. решение задачи 2.6) следует равносильность теоремы 5.1 Постулату.

Задача 5.1. Доказать, что всякая функция f, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемая внутри него, представима как сумма линейной функции и функции F, удовлетворяющей на этом отрезке условиям теоремы 5.1.

Иначе говоря, требуется доказать, что существуют такие числа Q и m, что функция $F(x) = f(x) + Qx + m$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условиям теоремы 5.1. Эти Q и m легко находятся из условий $f(a) + Qa + m = 0$ и $f(b) + Qb + m = 0$: $Q = -(f(b) - f(a))/(b - a)$, $m = -Qa - f(a)$. В силу теоремы 5.1 внутри $[a, b]$ существует такая точка c, что $F'(c) = 0$, или $f'(c) - Q = 0$, или $f'(c) = Q$. Последнее равенство представимо в форме

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \tag{$*$}$$

несущей возможность его широкого применения для исследования поведения функций.

Вот как доказывается, например, теорема 4.1 использованием этого равенства. Пусть $f'(x) > 0$ на промежутке I. Тогда, по доказанному, между всякими точками a и b из I существует точка c, удовлетворяющая равенству (*). И так как $f'(c) > 0$, то знак $f(b) - f(a)$ совпадает со знаком $b - a$. А это значит, что функция f возрастает на I.

Уже этот пример показывает целесообразность выделения соотношения (*) и фиксации найденного выше условия его выполнимости:

Теорема 5.2 (Теорема Лагранжа). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри него. Тогда внутри этого отрезка имеется такая точка c, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.*

– Процедура доказательства теоремы 4.1 (как и теоремы 4.2), использующая теорему Лагранжа, весьма проста. А главное, — само соотношение (*) делает доказываемое почти самоочевидным.

– В действительности доказательство теоремы 4.1, использующее теорему Лагранжа, намного сложнее. Ведь оно опирается на теорему 5.1, доказательство которой использует теорему 2.3, а значит, теорему 2.2. Тем самым оно использует не столь уж короткую цепь рассуждений, ведущую к доказательству этой теоремы, тогда как приведенное ее доказательство прямым образом опирается на полноту $\mathbb{R}$ и не использует не только свойства непрерывных на отрезке функций, но и само понятие непрерывности.

– И тем не менее доказательство теоремы 4.1, использующее теорему Лагранжа, воспринимается легче. Выяснение того, почему, за счет чего это так, может открыть немало поучительного в методах обучения. Так, важно принять во внимание то, что уровень формальной сложности цепи рассуждений, приводящей к доказательству какого-либо предложения, и уровень сложности ее понимания — это совсем не одно и то же. Если, например, цепь рассуждений хорошо структурирована, если ее структура соответствует внутренней логике процесса движения к пониманию, его стратегическим линиям, то это создает возможность легче осваивать целостную структуру такой цепи и способствует возрастанию эффективности работы механизмов понимания.

Использование равенства (*) во многих случаях позволяет значительно свертывать цепи рассуждений. Важно и то, что обращенность к нему несет усмотрения, превращаемые в доказательства.

– Но все это не умаляет ценности прямого доказательства теоремы 4.1, отвечающего тем целям, о которых говорится в начале статьи. В связи с этим заметим, что теорема Лагранжа равносильна теореме 1. Ведь теорема 5.1 ей равносильна, так как ей равносильна теорема 2.3.

Задача 5.2. Доказать, что если в интервале $(a, +\infty)$ $f''(x) > 0$ и $f'(x) > 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Решение. Пусть в интервале $(a, +\infty)$ $f''(x) > 0$ и $f'(x) > 0$. В нем функция $y = f'(x)$ возрастает и принимает положительные значения. Пусть число m входит в $(a, +\infty)$. Тогда $f(m + k) - f(m) = (f(m + k) - f(m - (k - 1)) + (f(m - (k - 1)) - f(m - (k - 2)) + ... + (f(m + 1) - f(m))$.

Согласно теореме Лагранжа $f(m + 1) - f(m) = f'(c_1)$, где c_1 — некоторая точка из $(m, m + 1)$, $f(m + 2) - f(m + 1) = f'(c_2)$, где c_2 — некоторая точка из $(m + 1, m + 2)$, и т.д. Таким образом, $f(m+k)-f(m) = f'(c_1)+f'(c_2)+...+f'(c_k)$. А так как $f'(c_1) < f'(c_2) < ... < f'(c_k)$, то $f(m+k)-f(m) > kf'(c_1)$. Отсюда $\lim\limits_{t\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Задача 5.3. Доказать, что если в интервале $(a, +\infty)$ $f^{(n+1)}(x) > 0$ и $f^{(n)}(x) > 0$ для какого-нибудь n, то $\lim\limits_{t\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Доказательство Постулата

Возвратимся к вопросу о том, действительно ли верно то, что если ограниченный справа промежуток не имеет наибольшего числа, то существует наименьшее из чисел, больших всех чисел этого промежутка.

Пусть промежуток I не имеет наибольшего числа, K — промежуток, состоящий из чисел, больших всех чисел из I. Попытаемся доказать, что существует наименьшее число в K.

Вначале рассмотрим случай, когда I содержит положительные числа. Будем рассматривать их представления в виде десятичных дробей. Так как I ограничен справа, то среди целых частей чисел из I существует наибольшая (согласно принципу индукции). Обозначим ее через a_0. Через I_0 обозначим множество тех чисел из I, у которых целая часть равна a_0. Наибольший из первых десятичных знаков после запятой у этих чисел обозначим через a_1. Через I_1 обозначим множество всех чисел из I_0, у которых первый десятичный знак после запятой равен a_1. Наибольший из вторых десятичных знаков после запятой у чисел из I_1 обозначим через a_2. Через I_2 обозначим множество всех чисел из I_1, у которых второй десятичный знак после запятой равен a_2. Наибольший из третьих знаков после запятой у этих чисел обозначим через a_3. И т.д. Этот процесс является неограниченно продолжаемым. (Предположение, что для какого-то n окажется $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = ...$, означало бы, что $a_0, a_1 a_2 ... a_n$ — наибольшее число в I. А это противоречит условию). Продолжая этот процесс, мы будем один за другим определять десятичные знаки некоторого числа a. Ясно, что a не меньше любого числа из I. А значит, $a \in K$.

Покажем, что a — наименьшее число из K. Действительно, пусть $b = b_0, b_1 b_2 ...$ — какое-нибудь положительное число, меньшее a. Если $b_0 < a_0$, то b меньше каких-то чисел из I_0, а значит, не принадлежит K. Пусть $b_0 = a_0$. Если $b_1 < a_1$, то b меньше чисел из I_1, а значит, не принадлежит K. Пусть $b_0 = a_0, b_1 = a_1, ..., b_m = a_m$, но $b_{m+1} < a_{m+1}$. Тогда b меньше чисел из I_{m+1}, а значит, не принадлежит K. И т.д. Таким образом, никакое число, меньшее a, не принадлежит K. Следовательно, a — наименьшее из чисел, больших всех чисел из I.

Теперь рассмотрим случай, когда I не содержит положительных чисел. Ясно, что существует такое натуральное число n, что промежуток $J = \{x + n : x \in I\}$ содержит положительные числа. Как и I, он ограничен и не имеет наибольшего числа. По доказанному выше, существует наименьшее число a, большее всех чисел из J. Очевидно, что тогда $a - n$ является наименьшим числом из K, состоящего из чисел, больших всех чисел из I.

Итак, справедливость теоремы 1.1 доказана без использования Постулата. Доказательство основывалось на представлениях действительных чисел бесконечными десятичными дробями и на том, что всякая такая дробь представляет число. А так как Теорема 1.1 равносильна Постулату, то тем самым доказан и Постулат, то есть доказана

Теорема 6.1. $\mathbb{R}$ *удовлетворяет Постулату.*

Отметим, что представимость действительных чисел бесконечными десятичными дробями и то, что всякое такое число есть наименьшая верхняя грань множества его конечных десятичных приближений, показывает, что $\mathbb{R}$ есть наименьшее полное множество чисел, содержащее все рациональные числа.

Пусть $\mathbb{R}*$ — какое-нибудь множество чисел, содержащее все действительные числа и, возможно, какие-то новые числа и такое, что вместе со всякими двумя его числами содержащее их сумму, разность и вместе со всяким числом а содержащее всевозможные числа a/n, где n — натуральные числа. (Будем также предполагать, что названные операции над числами обладают привычными для нас свойствами). Как обычно, будем полагать, что $a > b$, если $a - b > 0$. Наконец, будем предполагать, что $\mathbb{R}*$ удовлетворяет Постулату, то есть что всякое сечение $\mathbb{R}*$ таково, что либо в левом из образующих его промежутков есть наибольшее число, либо в правом есть наименьшее. Говоря о числах, будем иметь в виду числа из $\mathbb{R}*$. Для $\mathbb{R}*$ справедливы теоремы 1-3.

Число i будем называть *бесконечно большим*, если $|i|$ больше всякого рационального числа. Заметим, что если i — бесконечно большое число, то и число $i - 1$ бесконечно большое. Ведь если бы $i - 1$ не было бесконечно большим, то существовало бы рациональное число $r > i - 1$. Но тогда было бы $r + 1 > i$, что противоречило бы тому, что число i — бесконечно большое.

Утверждение. *В* $\mathbb{R}*$ *нет бесконечно больших чисел.*

Доказательство. Допустим противное. Множество M всех положительных бесконечно больших чисел ограничено слева. Тогда, согласно теореме 1.1, существует его наибольшая нижняя грань i. Она является бесконечно большим числом. (Ведь если бы это было не так, то существовало бы рациональное число, большее i. Но это означало бы, что i не является наибольшей нижней гранью M). А так как i — бесконечно большое число, то и $i-1$ бесконечно большое. Но это противоречит тому, что i — нижняя грань M. Утверждение доказано.

Число $j \neq 0$ будем называть *бесконечно малым*, если $|j|$ меньше всякого положительного рационального числа. Заметим, что бесконечная малость числа j равносильна тому, что число $1/j$ — бесконечно большое. Из того, что в $\mathbb{R}*$ нет бесконечно больших чисел, следует, что *в* $\mathbb{R}*$ *нет бесконечно малых чисел.* Тем самым доказано, что $\mathbb{R}*$ удовлетворяет аксиоме Архимеда.

Утверждение. *В любой окрестности всякого числа из* $\mathbb{R}*$ *имеются рациональные числа.*

Доказательство. Действительно, пусть, например, i — положительное число. Так как i не является бесконечно большим, существует рациональное число $a > i$, и потому i принадлежит отрезку $[0, a]$, концы которого рациональны. А значит, i принадлежит какому-то из отрезков $[0, a/2]$ и $[a/2, a]$ с рациональными концами. Далее, i приналежит какому-то из двух равных отрезков с рациональными концами, на которые разбивается 'njn отрезок. И т.д. Получаемая таким образом последовательность вложенных отрезков имеет единственное общее число — i. Допустим противное. Пусть j — отличное от i число, также принадлежащее всем этим отрезкам. Тогда $|j-i| < a/n$ для всякого натурального n, а так как все числа a/n рациональные, то $|j-i| < r$ для всякого положительного рационального r. И так как в $\mathbb{R}*$ нет бесконечно малых чисел, то $|j-i| = 0$, то есть $j = i$. В силу выполнимости в $\mathbb{R}$ Постулата в $\mathbb{R}$ существует наибольшая нижняя грань множества всех правых концов отрезков из названной последовательности отрезков. Она входит во все эти отрезки и, значит, совпадает с i. Утверждение доказано.

Следствие. *Всякое число из* R^* *есть действительное число.*

А значит, справедлива

Теорема 6.2. $\mathbb{R}* = \mathbb{R}$, *или не существует полного упорядоченного поля, являющегося (собственным) расширением* R.

Числовая прямая

Числовой прямой называют прямую с заданными на ней точкой, представляющей число 0, и точкой, представляющей число 1. Задание этих точек есть и задание направления на ней. Из каких геометрических положений о числовой прямой мы явно или неявно исходим и действительно ли эти положения влекут, что имеющееся нами в виду соответствие между числами и точками прямой таково, что всякое число представимо определенной точкой числовой прямой и что всякая точка числовой прямой представляет определенное число?

Мы исходим, в частности, из следующего **положения 1**: *Какой бы отрезок на числовой прямой мы ни взяли, от всякой ее точки можно и влево, и вправо отложить на ней единственные равные, или, что то же, конгруэнтные, ему отрезки.*

Из этого положения вытекает следующее: у числовой прямой (как и у всякой прямой) нет ни самой левой, ни самой правой точки.

Принципиальная (идеальная) возможность измерения с любой точностью длины всякого отрезка и ее выражения конечной или бесконечной десятичной дробью предполагает следование **положению 2**: *На любом отрезке прямой существуют точки, разбивающие его на десять равных отрезков.*

Из положения 2 следует, что между любыми двумя точками на прямой имеется бесконечно много ее точек. Положения 1 и 2 задают на числовой прямой множество точек, представляющее множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел (точнее говоря, они задают на числовой прямой поле, изоморфное полю рациональных чисел).

Наконец, мы исходим и из **положения 3**: *У прямой нет "щелей", или на какие бы два куска прямую ни "разбили", либо у левого куска будет самая правая точка, либо у правого — самая левая.*

Задание отношения порядка на числовой прямой позволяет распространить на множество ее точек понятия промежутка, правой и левой граней множества, точной правой (левой) грани и т.п. Нетрудно убедиться, что из положения 3 следуют аналоги теорем 1.1-1.7.

На базе положений 1 и 2 можно доказать, что напрашивающаяся процедура соотносит каждому рациональному числу числу единственную точку на числовой прямой и что для всяких чисел m и $n > m$ точка, относимая числу n, расположена "правее" точки, относимой числу m. А положение 3 позволяет распространить такое соотнесение на все множество $\mathbb{R}$. Оно же позволяет доказать, что числовая прямая удовлетворяет аксиоме Архимеда. Более того, использование рассуждений, доказывающих теорему 6.2, несет доказательство того, что множество всех точек на числовой прямой исчерпывается теми, которые представляют числа из $\mathbb{R}$. Это оправдывает термин "числовая прямая".

Литература

1. Когаловский С.Р. Поиски метода и методы поиска. – Шуя: изд-во ШГПУ, 2006. – 368 с.

2. Когаловский С.Р. Онтогенетический подход к обучению школьников математике. – Иваново: изд-во ИвГУ, 2018. – 315 с.

Когаловский Сергей Рувимович,
профессор кафедры математики, информатики
и методики обучения Шуйского филиала
Ивановского гос. университета,
кандидат физ.-мат. наук, профессор.

E-mail: askogal@yandex.ru

Элементы из истории развития математики как средство мотивации учащихся

Бахадур Омар оглы Тахиров, Шахин Мутариф оглы Агазаде

Современное общество испытывает большую потребность в выпускниках с глубоким мировоззрением и прочной системой знаний, умений и навыков. На протяжении одиннадцати лет их обучают основам наук, в том числе математике. Школьники должны не только осваивать вычисления и логику, но и углублять знания через историю математики. В наше время школа ответственна за интеллектуальный потенциал общества. В настоящее время ведется поиск новых, современных форм в школьном образовании для повышения качества математического образования, а включение в содержание обучения математике элементов из истории развития математики способствует мотивации, творческой деятельности учащихся.

Введение

Факты из истории математики помогают учащимся увидеть её развитие и связь с общечеловеческой культурой. Использование материалов из истории математики в обучении математике способствует превращению математических знаний в важную компоненту личностной культуры каждого человека [2], [11]. Гуманизация школьного курса математики реализуется путем формирования у учащихся представления о математике как части общечеловеческой культуры [6], [7]. Поэтому органическое дополнение содержания школьного курса математики определенными материалами из истории математики служит ознакомлению учащихся с борьбой идей, с судьбами великих открытий, с именами людей, развивших математику.

Проблема использования историко-научного материала в математическом образовании всегда была актуальной и остается актуальной.

Недостаток исторических материалов в учебниках делает математику для учеников “абстрактной реальностью” [13].

Это действительно интересная точка зрения. Если взглянуть на историю математики, можно увидеть, как она развивалась в результате практических потребностей и вызовов, стоявших перед человечеством. Например, основы алгебры развивались для решения задач торговли и земледелия, геометрия была необходима для измерения земельных участков и строительства, а арифметика — для учёта ресурсов и торговых операций.

Таким образом, математика рождалась из практики и применялась для решения повседневных задач. Этот цикл использования, анализа, систематизации и нового применения знаний помогал человечеству улучшать свои методы и расширять свои возможности [8].

Таким образом, математика постоянно развивается по двум основным причинам:

1) по жизненной необходимости;

2) по внутренней потребности самой математики.

Наконец, следует отметить, что включение в содержание обучения математике историко-научного материала позволяет учащимся составить полную картину развития математики и развить их математическое мышление [4].

Часто ученики воспринимают математику как статичное и законченное множество знаний, в то время как она на самом деле является постоянно развивающейся областью науки. Чтобы помочь студентам лучше понять этот аспект, можно внедрить в учебный процесс более интерактивные методы обучения, такие как использование прикладных задач, исследовательских проектов и исторических кейсов.

Например, можно включить в уроки примеры реальных математических проблем, которые решали ученые в прошлом, а также примеры современных приложений математики в различных областях, таких как машинное обучение, криптография, финансы и т.п. Такие примеры помогут студентам увидеть, как математика используется для решения актуальных проблем и как она постоянно развивается вместе с нашим миром [12].

Академик А.И. Маркушевич в 1950 году отмечал недостаток материалов по истории математики в учебниках для средней школы. С тех пор были предприняты попытки внедрить историко-научные материалы в содержание школьного курса математики. Однако, даже в современных учебниках этот аспект не всегда получает достаточное внимание [4].

В 1975 году в журнале "Математика в школе" введена рубрика "Математический календарь". Среди книг, изданных в 80-90 годы, можно отметить три книги В.П. Глейзера [3]. В этих книгах содержалось много материала по истории математики для школьников. Целью изданных книг автор видел в оказании конкретной помощи учителям в использовании материалов по истории математики, как на уроке, так и во внеклассных занятиях.

Наконец, следует особо отметить книги известного американского математика М. Клайна "Математика. Утрата определенности" (М. 1984) и "Математика. Поиск истины" (М. 1988). В этих книгах автор дает широкую картину формирования и развития математики с древнейших времен до наших дней.

Результаты психологических исследований, проведенных в последние годы, показывают, что создаются благоприятные условия для использования историко-научных материалов и хронологий для формирования и развития математики в подростковом возрасте. В настоящее время для поиска путей совершенствования математического образования, помимо открытия основ математической науки, необходимо использовать материалы, связанные с историей математики [9]. Таким образом, органическое включение элементов истории математики в школьный курс способствует не только углубленному пониманию дисциплины, но и развитию критического мышления учащихся, формируя мост между математическими знаниями и общечеловеческой культурой.

Методы исследования

Для достижения поставленных целей исследования был проведен теоретический анализ известных научных источников, а также рассмотрены примеры практического применения историко-математических материалов в образовательном процессе. Нами проведен теоретический анализ известных исследований авторов работ [3], [5], [6], [7].

Чтобы определить конкретное содержание историко-научного материала в обучении математике, следует руководствоваться следующими принципами:

1) Важно формировать учащихся диалектико-материалистического понимания условий и причин возникновения и развития математики как науки.

Математика должна использовать свою историю для объяснения логики своего развития.

2) Использование элементов истории в обучении математике может помочь создать проблемные ситуации.

3) Включение элементов истории в школьный курс математики должно осуществляться в органической связи с содержанием изучаемого материала.[5]

Примеры историко-научных материалов

Ниже приведены примеры историко-научных материалов [1]:

1. В книге А.Хорема "Китаб ал-Джабр ва аль Мукабала" приведено геометрическое решение уравнения $x^2 + ax = b$.

Для решения уравнения $x^2 + ax = b$ необходимо нарисовать квадрат, у которого длина стороны равна $\left(x + \frac{a}{2}\right)$ и, начиная из любой вершины этого квадрата, на смежных сторонах, выходящих из данной вершины, отделить отрезки $\frac{a}{4}$, x и $\frac{a}{4}$, затем провести через точки деления прямые, параллельные противоположным сторонам. После этого, площадь квадрата делится на девять частей:

4 квадрата со стороной $\frac{a}{4}$;

1 квадрат со стороной x;

4 прямоугольника со сторонами $\frac{a}{4}$ и x.

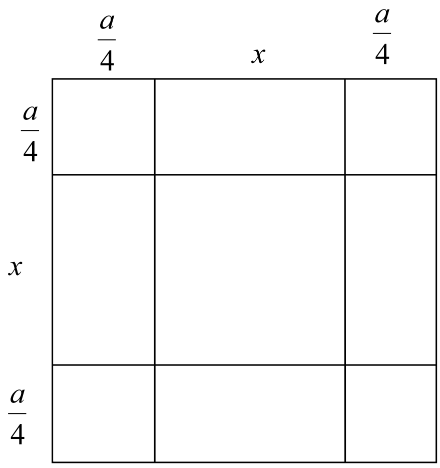

Рис. 1.

Если площадь квадрата обозначить через S, тогда

$$S = x^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 + 4 \cdot \frac{a}{4} \cdot x = (x^2 + ax) + 4 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4}.$$

Таким образом, имеем:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{a}{2} + \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

2. Для доказательства тождества $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ нужно нарисовать квадрат, у которого длина стороны равна $(a+b)$ и начиная из любой вершины этого квадрата, на смежных сторонах, выходящих из данной вершины, выделить отрезки a и b, затем провести через точки деления параллельные прямые противоположным сторонам. После этого площадь квадрата будет делиться на четыре части:

1 квадрат со стороной a;

2 прямоугольника со сторонами a и b;

1 квадрат со стороной b.

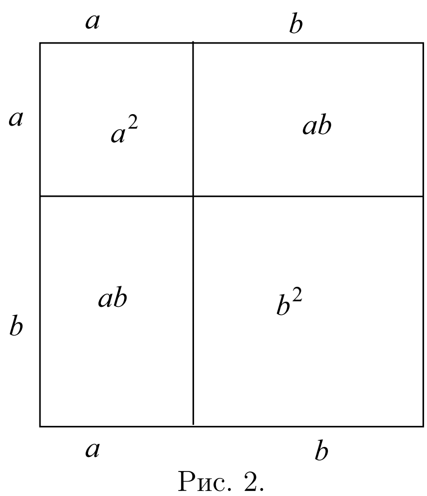

Рис. 2.

Если площадь квадрата обозначить через S, тогда

$$S = a^2 + 2ab + b^2$$

или

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

3. В арабской математике наблюдался большой научный интерес к операциям над алгебраическими иррациональностями. Например, восьмиклассникам хорошо известны формулы:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Их справедливость легко проверить: Пусть

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Тогда, возводя в квадрат обе части последнего равенства, получим:

$$\left(\sqrt{a + \sqrt{b}}\right) = \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}\right) = \frac{a + \sqrt{a^2 - b} + a - \sqrt{a^2 - b}}{2} = a + \sqrt{b}$$

или

$$a + \sqrt{b} = a + \sqrt{b}$$

4. Арабским математикам были известны различные формулы для вычисления приближенного квадратного корня из натуральных чисел. Например,

$$\sqrt{T^2 + r} \approx T + \frac{r}{2T + 1},$$

где $T \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $r < T$.

Отметим, что только в 19 веке О. Коши удалось обобщить эту формулу для любых действительных чисел.

Заключение

1) Использование исторических материалов в учебном процессе не только активизирует теоретическую деятельность учащихся, но и развивает их аналитические и критические навыки. Это возможно через создание проблемных ситуаций, исследование исторических задач и включение интерактивных методов обучения, таких как проекты и визуализация. Рекомендуется интегрировать исторические аспекты в содержание уроков математики, связывая их с современными прикладными задачами. Учебные пособия могут включать краткие истории великих математиков и их открытий для мотивации учащихся. Разработка интерактивных образовательных платформ, позволяющих ученикам визуализировать исторические математические открытия, может усилить интерес к предмету.

2) Тщательно продуманные и организованные научные дебаты на уроках, основанных на исторических материалах, способствуют не только воспитанию у учащихся толерантности, но и развитию их способности аргументировано выражать свои мысли, критически анализировать информацию и уважать чужую точку зрения. Такие дискуссии позволяют учащимся глубже понять исторический контекст математических открытий, связать их с реальными жизненными ситуациями и ощутить значение коллективного труда в развитии науки.

Литература

[1] Абдулакимова Љ.А. Рољеъ ба ташаккули саводи донишљӯён дар дарси таърихи математика // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Гуманитарные науки. - 2(43). - 2015. - С. 254-257.

[2] Моисеенко В.А., Прийменко С.А., Цапов В.А. Математическое образование как средство формирования мировоззренческих ориентиров будущих специалистов // Эвристическое обучение математике. - 2018. - P. 175-177.

[3] Винобер А.В. Этос математики. Очерк пятый. Социологическое исследование Рэндалла Коллинза // Биосферное хозяйство: теория и практика. - 2. - 2024. - P. 67

[4] Байков Н.М., Березутский Ю.В. Дальневосточный вектор подготовки управленческих кадров в системе партийного образования (1920-е–начало 1940-х гг.) // Власть и управление на востоке России. - 3. - 2024. - С. 153.

[5] Колокольникова З.У., Староверова М.В., Мосинцев, Д.Д. Подготовка педагогических кадров сибири в первые послевоенные годы (1945-1950) // Проблемы современного педагогического образования. - 74(4). - 2022. - С. 117-120.

[6] Пермякова М.Ю. Использование исторических сведений на уроках математики // Проблемы управления качеством образования. - 2020. - P. 87-89.

[7] Петрусевич П.Ю. Гуманитаризация как одно из ведущих направлений развития современного образования // Наука и школа. - 2023. - 1. - С. 83-91.

[8] Дорофеев С.Н., Журавлева О.Н., Есетов Е.Н. Подготовка будущих бакалавров педагогического образования к проектированию уроков геометрии с использованием историко-научного потенциала // Дидактика математики: проблемы и исследования. - 2020. - 52. - С. 50-56.

[9] Арбабаева Н.А., Шемякина И.Е. Военно-прикладные задачи как метод формирования профессиональных компетенций курсантов военных вузов // Межвузовский сборник научных трудов. - 2020. - С. 189-192.

[10] Поляков Ю.В., Королева Е.В. Edn Sgtlsz Вак 5.8. 7. Методология и технология профессионального образования (педагогические науки) OECD 05.03. Hе. Education, special // Управление образованием. - С. 126.

[11] Третьякова О.А. Использование заданий историко-математического содержания в старшей школе // Молодой ученый. - 2022. - № 51(393). - С. 407-408.

[12] Степура Д.А. Применение исторического материала на уроках математики и во внеурочное время // Дневник науки. - 1. - 2021. - С. 12.

[13] Утеева Р.А., Мухамбетова Б.Ж. Профессионально ориентированные проекты по алгебре как средство подготовки бакалавров к педагогической деятельности учителя математики // Мир науки, культуры, образования. - 5(96). - 2022. - С. 169-173.

Тахиров Бахадур Омар оглы,
доцент кафедры математики
и методики её преподавания
Бакинского государственного университета,
кандидат физико-математических наук.
E-mail: qarabah48@mail.ru

Агазаде Шахин Мутариф оглы,
исследователь кафедры
преподавания математики
Бакинского государственного университета.
E-mail: shahinaghaze@bsu.edu.az

Школьные учебники математики Сергея Михайловича Никольского

А. В. Шевкин

30 апреля текущего года исполняется 120 лет со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского. В статье рассказано о школьных учебниках математики, написанных (в большинстве случаев в соавторстве) академиком С.М. Никольским. Эти учебники, ввиду их высокого качества, могут стать основой федерального комплекта учебников, взамен комплекта так называемых "единых учебников", качество которых значительно ниже.

Сергей Михайлович Никольский родился 30 апреля 1905 года в поселке Завод Талица Пермской губернии (ныне город Талица Свердловской области). В своей книге "Воспоминания" (М.: МИАН, 2003, 160 с.) он написал:

"До революции я успел проучиться 4 года в царской гимназии и потому имею возможность сопоставлять тогдашнее обучение с современным. Конечно, ученье постепенно прогрессирует. Но подчас бестолково и неуклюже. То, что было хорошо, нередко не закрепляется и даже изгоняется".

Через 20 лет после выхода книги эти слова удивительным образом можно отнести к последним изменениям в школьной программе по математике и в школьных учебниках. Об этом поговорим позже. Читаем там же:

"В молодости я нередко зарабатывал на уроках и даже преподавал математику в школе. В Стекловке мне пришлось много работать в комиссии по школьному преподаванию математики. Я узнал в деталях программы по арифметике, алгебре и началам анализа. У меня сложилась своя точка зрения на всё это дело. Однако, я понял: чтобы внедрять мои мысли, придётся писать учебники — статьи с призывами ничего не дают".

Книги для школьников Сергей Михайлович начал писать с того, что ему было ближе по опыту преподавания в вузах, а именно, с математического анализа. В 1981 г. вышла первая книга

Никольский С.М. Элементы математического анализа. — М.; Наука, 1981. — 160 с.

О ней Сергей Михайлович писал: "В двух массовых изданиях выходила (до перестройки) моя книжка "Элементы математического анализа", в которую я вложил свой опыт преподавания анализа на наивном языке". Это был первый набросок, ещё даже не учебник, а пособие для учителей. Затем вышла книга

Никольский С.М., Потапов М.К. Алгебра. Пособие для самообразования. — М.; Наука, 1984. — 288 с.

Это уже был проект учебника без разработанной системы упражнений, но в полном соответствии с программой по алгебре для 6-8 классов — в старой нумерации классов десятилетней школы.

Так началась реализация задуманного обновления школьных учебников для основной школы, если говорить в современных терминах.

Параллельно шла разработка учебников алгебры для 6-8 классов с участием Решетникова Н.Н., по которым НИИ содержания и методов обучения АПН СССР (НИИ СиМО АПН СССР) начал эксперимент в Днепропетровске и ещё в двух городах УССР.

К работе над учебниками Сергей Михайлович привлёк своего ученика профессора МГУ Потапова М.К., сотрудников НИИ СиМО АПН СССР, кандидата педагогических наук Решетникова Н.Н. В 1985 году к проекту создания новых учебников присоединился и автор этих строк. Мы с Николаем Николаевичем Решетниковым имели опыт преподавания математики в школе. У меня были идеи использования традиционных способов решения текстовых задач на первоначальном этапе обучения, что продолжало традиции учебника А.П. Киселёва и нравилось Сергею Михайловичу.

Были написаны учебники “Арифметика“ для 4 и 5 класса. Экспериментальные учебники для 4-5 классов издали в НИИ СиМО АПН СССР в виде четырёх частей (ротапринтное издание). По ним шёл педагогический эксперимент в Черноголовке.

В 1988 году вышел проект учебника “Арифметика“ с системой упражнений в качестве пособия для самообразования.

Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В., Арифметика. Пособие для самообразования. – М.; Наука, 1988. – 384 с. (Тираж 400 000 экз.).

Надо отметить, что все первые версии учебников были написаны Сергеем Михайловичем Никольским, кроме второй главы учебника для 11 класса “Уравнения. Неравенства. Системы“. Этот материал готовил М.К. Потапов с учётом потребностей школьников в подготовке к выпускным и конкурсным экзаменам.

Сергей Михайлович говорил о том, что он очень уважительно относился к учебникам А.П. Киселёва, по которым ему довелось учиться в гимназии. Он говорил, что мы продолжаем традиции А.П. Киселёва в том смысле, что придерживаемся научного подхода в развитии линии числа, но усовершенствовали его подход.

У А.П. Киселёва сначала полностью изучаются натуральные числа, называемые целыми, потом обыкновенные дроби, только потом — десятичные дроби.

В учебнике А.П. Киселёва в переработке А.Я. Хинчина (1951 г.) изучаются периодические десятичные дроби, включая обращение бесконечной периодической (чистой или смешанной) десятичной дроби в обыкновенную дробь. Обоснование этого перевода дано для учителя мелким шрифтом с использованием понятия “предел последовательности”. А учащихся проверкой полученного результата делением числителя дроби на её знаменатель уголком убеждали, что предложенное правило верно.

Сергей Михайлович обосновал этот вопрос не для учителя в конце учебника, как было сделано в учебнике А.П. Киселёва, а для учащихся при помощи решения уравнения на уровне, доступном пониманию шестиклассников, без доказательства факта, что при умножении бесконечной периодической десятичной дроби на 10 запятую надо перенести вправо на один знак, но с аналогичной проверкой, что этот перенос приводит к правильному результату.

Здесь использована аналогия с конечными десятичными дробями, которые можно представить как бесконечные периодические десятичные дроби с периодом нуль: например, $5,2 = 5,2(0)$.

Рассмотрим пример из п. 5.3* (необязательный, так как этого материала нет в программе).

Пример 1. Запишем периодическую дробь 0,(8) в виде обыкновенной дроби. Для этого обозначим искомую дробь через x:

$$x = 0,888\ldots\ .$$

Умножим это равенство на 10, получим $10x = 8,888\ldots$.

Вычтем первое равенство из второго, получим:

$$\begin{gathered} 10x - x = 8, \\ 9x = 8, \\ x = \tfrac{8}{9}. \end{gathered}$$

Разделив числитель дроби $\frac{8}{9}$ на её знаменатель уголком, убедимся, что эта дробь действительно равна периодической дроби 0,(8).

В примере 2 выполнен перевод смешанной периодической дроби 2,35(7) в обыкновенную дробь $x = \frac{2357-235}{900} = \frac{2122}{900}$ (с проверкой) и сформулировано правило перевода любой бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь.

В следующем пункте учебника вводится понятие *бесконечной непериодической десятичной дроби*, объясняется, что её нельзя представить в виде обыкновенной дроби, соответственно, она не может быть десятичным разложением какого-либо рационального числа. Далее идёт определение:

Число, которое можно записать в виде бесконечной непериодической десятичной дроби, называют *иррациональным (нерациональным) числом.*

Далее вводится понятие действительного числа:

Рациональные и иррациональные числа называют *действительными числами.*

Здесь вспоминается эпизод из личного опыта первого прохождения этой темы в 1988 году в авторском эксперименте в школе 679 г. Москвы. При отработке перевода бесконечных периодических десятичных дробей в обыкновенные сообразительная ученица Аня спросила:

— Александр Владимирович, вот вы всё время повторяете "бесконечные периодические десятичные дроби", а что, бывают и непериодические?

Я похвалил Анечку за хороший вопрос и не стал откладывать ответ на пару уроков, когда темой урока станут именно бесконечные непериодические десятичные дроби. Я сказал, давай сконструируем такие дроби, которые, очевидно, не являются периодическими:

0,1234567891011121314...

0,1011011101111011110...

В первом случае после запятой идут числа натурального ряда, записанные без пропусков и запятых, во втором случае идёт увеличение числа единиц на одну в каждой группе цифр, отделяемых друг от друга нулём. Аня смогла сконструировать свою бесконечную непериодическую десятичную дробь.

На следующих уроках мы уточнили, что любую обыкновенную дробь можно записать в виде бесконечной периодической десятичной дроби, а любую бесконечную периодическую десятичную дробь — в виде обыкновенной дроби. Бесконечная периодическая десятичная дробь является другой записью рационального числа. Но бесконечную непериодическую дробь нельзя записать в виде обыкновенной дроби, так как если бы это кому-то удалось, то мы ту обыкновенную дробь могли бы записать в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Получилось бы, что одно и то же число записывается и в виде периодической, и в виде непериодической дроби, что невозможно. Это был первый опыт рассуждения методом "от противного" у моих учащихся.

В сильном классе сильные учащиеся могли воспроизвести это рассуждение на следующем уроке, но даже если без умения провести такое доказательство слабый ученик просто узнает, что кроме периодических дробей есть ещё и непериодические, являющиеся записями новых чисел — иррациональных, то мы закладываем числовую основу для изучения математики с большим пониманием объекта изучения — чисел.

Новое звучание получит утверждение из геометрии: "Каждый отрезок имеет определённую длину". Это утверждение не вызывает сомнений у учащихся, но в более старшем возрасте они узнают, что длина диагонали единичного квадрата выражается как раз непериодической десятичной дробью.

Новое звучание получит и утверждение: "Каждая пара чисел $(x; y)$ в системе координат xOy задаёт единственную точку", и наоборот "Каждой точке в системе координат xOy соответствует своя единственная пара чисел".

Второе утверждение дети принимают на веру, хотя числовой базы по действующей программе для истинности этого утверждения нет, так как координатная ось остаётся "дырявой", как говорил Сергей Михайлович, на ней нет иррациональных точек.

Понятие действительного числа введено в конце 6 класса, потом мы повторяем это место в 7 классе. Это нужно для того, чтобы проводить доказательства формул сокращённого умножения, строить действительно непрерывные графики функций, осознанно говорить в геометрии, что каждый отрезок имеет определённую длину.

В воспоминания о первом опыте преподавания темы я ударился потому, что у многих учителей есть убеждение, что бесконечные непериодические дроби — это очень сложно, так как о них по действующей программе упоминается только в 9 классе, хотя до этого вводят понятие корня из числа, в сильном классе даже могут доказать, что длина диагонали единичного квадрата выражается числом, которое нельзя записать в виде обыкновенной дроби, но при этом замалчивают вопрос о непериодических дробях.

Добавим ещё одно наблюдение по действующей программе. Она построена в соответствии с идеей концентризма, то есть возвращения к одним и тем же вопросам в теории несколько раз. Вот как начинается программа для 6 класса.

Обыкновенная дробь, основное свойство дроби, сокращение дробей. Сравнение и упорядочивание дробей. Решение задач на нахождение части от целого и целого по его части. Дробное число как результат деления. Представление десятичной дроби в виде обыкновенной дроби и возможность представления обыкновенной дроби в виде десятичной.

Здесь нет ни одного вопроса, который не изучался бы в 5 классе. Делается это для того, чтобы организовать повторение. Но такое повторение является "мачехой учения", так как для сильного ученика это топтание на месте, повторение того, что он и так знает, а ради слабых учащихся можно вести повторение через систему упражнений, не отнимая драгоценного учебного времени, которого стало на 34 урока в году меньше, а ведь учителя жалуются на нехватку учебного времени.

И вот ещё один курьёз, который не заметили составители программы. Они в 6 классе вводят понятие числовых промежутков, которые потом изучают в 7 классе и используют в 8 классе при решении неравенств, но никого не смущает, что используемые числовые промежутки остаются "дырявыми" — без иррациональных чисел, так как о взаимно однозначном соответствии между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой программа говорит лишь в 9 классе.

Но вернёмся к учебнику А.П. Киселёва. У него сначала изучаются натуральные числа полностью, потом обыкновенные дроби полностью, только потом — десятичные дроби. Отрицательные числа, в соответствии с программой тех лет, изучали в курсе алгебры во втором полугодии в 6 классе. Но в курсе арифметики не упоминаются термины, связанные с названиями множеств чисел потому, что эти множества не были предметом изучения. В учебнике 1951 г. издания сказано: "Один, два, три и т.д. называют целыми числами". Здесь речь идёт о положительных целых числах, то есть натуральных числах.

В настоящее время в программе по математике есть натуральные числа. Их изучение построено весьма странно, но лучше, чем все предыдущие 50 лет и в те годы, когда мы взялись писать свои учебники. Многолетняя критика программы и наличие примера иного, более научного изложения материала в учебниках дали свои результаты. Но делители и кратные числа, наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное, делимость суммы и произведения, деление с остатком остались в 6 классе, хотя в пятом классе для записи неправильной дроби 37/5 в виде смешанной дроби требуется именно деление натуральных чисел с остатком.

Еще раз отметим, что в программу по математике заложен принцип концентризма, то есть возвращения в теоретическом плане к одним и тем же вопросам несколько раз. Такое построение изложения материала не развивает теоретическое мышление школьников, является шагом назад по сравнению с учебником А.П. Киселёва, в котором был линейный подход к изучению материала.

Так, например, понятие бесконечной десятичной дроби (конечной или бесконечной) впервые упоминается в программе для 9 класса, базовый уровень [1]. Вопрос о периодических и непериодических десятичных дробях, об иррациональном числе как непериодической десятичной дроби в программе не упоминается. Числовые промежутки вводятся ещё в 6 классе, хотя в этом нет никакой необходимости — нет функций и нет решений неравенств. Эти промежутки состоят из рациональных чисел, так как иррациональные числа появятся только в 8 классе при изучении квадратных корней.

К достижению программы 2023 года надо отнести перенос признаков делимости натуральных чисел, простых и составных чисел в 5 класс, но свойства делимости, с помощью которых только и можно обосновать признаки делимости, хотя бы на числовых примерах, остались в 6 классе. И это несмотря на мою неоднократную критику проекта программы при обсуждении проекта в Интернете и статью в предметном журнале. А представлять бесконечные периодические дроби в виде обыкновенных требуется только в 9 классе при углублённом изучении математики [2].

А тогда, когда в 1985 году автор этих строк присоединился к проекту создания учебников С.М. Никольского, программа по математике была ещё более запутанной. Натуральные числа изучали в 5 классе (тогда это был 4 класс), а завершали изучение (НОД и НОК натуральных чисел, простые и составные числа, признаки и свойства делимости натуральных чисел) в 6 классе. Два концентра вместо того, чтобы изучить натуральные числа в 5 классе.

Сравнение, сложение и вычитание обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями изучали в 5 классе, а с разными знаменателями — в 6 классе, там же изучали умножение и деление дробей, действия со смешанными дробями (тогда они назывались смешанными числами). Опять два концентра вместо того, чтобы изучить обыкновенные дроби целиком в 5 классе. Зато в 5 классе при недоученных натуральных числах и обыкновенных дробях вводились десятичные дроби. Программа закладывает таким образом формирование неполных умений.

В смысле формирования правильных научных представлений о линии числа это был винегрет. Обучение строились почти как в учебнике Л.Ф. Магницкого. Комментатор этого учебника В. Беллюстин так описывал старинную практику обучения решению текстовых задач в 1923 году. Сначала формулировали правило, потом задачу, которую надо было решать по правилу. Ученик мог сказать учителю: “Я решаю задачу по правилу, получаю ответ, но не понимаю, почему он правильный”.

“Это ничего, что ты ничего не понимаешь, ты и впереди также многого не будешь понимать, — утешал бывало наставник своего питомца, и вместо понимания рекомендовал не заноситься, а выучить наизусть всё, что задают, и потом стараться применить это к делу” [3]. Чтобы было понятно, о чём идёт речь, приведу пример одного европейского источника, которому следовал Л.Ф. Магницкий. “Тройным правилом называется regula magistralis, или regula aurea (т.е. магистерское правило, или золотое правило), с помощью которого совершаются все торговые расчёты всех ремесленников и купцов; оно называется в гражданском обиходе de try или de tree, ибо содержит в себе три величины, при помощи которых можно вычислить всё.

***

. . . Заметь ещё числа, стоящие сзади и спереди. Надо стоящее сзади число помножить на среднее и разделить на переднее”. Далее то же правило дано в зарифмованном виде и приведен пример на его применение:

Я купил 100 фунтов шерсти за 7 гульденов. Что стоят 29 фунтов?

фунты	*гульдены*	*фунты*
100	7	29

Помножь 29 на 7, затем раздели на 100, что получится и будет стоимостью 29 фунтов [4].

Удивительно, но более 50 лет в советской и российской школе именно по этому совету обучали и продолжают обучать школьников не только решению задач, но и при обучениях вычислениям. И это в то время, когда уже есть разумная альтернатива последовательного и обоснованного изложения математики в учебниках С.М. Никольского.

После введения “единых учебников”, которые по математике для 5-6 классов и алгебре для 7-9 классов оказались до боли знакомы, так как были введены более 50 лет назад, начались обсуждения этих учебников. Заметьте, не до введения, а после того. Их ввели, возможно, именно за то, что они знакомы большинству учителей, а многие из них сами по ним учились в школе. Не было никакого сопоставительного анализа научного содержания и методики изложения материала в разных учебниках, результатов обучения по ним, которые стали бы основой для принятия решения.

Не научно-исследовательский институт академии образования России, а родительская общественность обсуждает программы и учебники, принятые в школе, привлекая для этого заинтересованных учителей.

Из Петербурга мне прислали мнение одного учителя, который предложил “полностью пересмотреть школьную программу изучения математики и вернуться к проверенным годами учебникам. На данный момент даже учебник Виленкина Н.Я. в нынешнем издании потерял логику изложения материала. Исключить вузовский предмет "теория вероятностей и статистика" из школьной программы".

Предложение меня сильно удивило, так как, по указанным выше причинам, учебники Н.Я. Виленкина логику изложения не теряли, они её не имели в части развития линии числа. Наоборот, в последнем издании учебника предпринята попытка восстановить логику изложения материала, но она была непоследовательной и неудачной.

Изучение натуральных чисел не было завершено в 5 классе, так как свойства делимости натуральных чисел оставили в 6 классе, а только с их помощью можно обосновать признаки делимости, которые дают в 5 классе. Изучение обыкновенных дробей не завершено в 5 классе, зато введены десятичные дроби. Пятый класс оказался перегружен материалом, а если учесть переход с шести на пять уроков в неделю, то обучение школьников без должного понимания сути выполняемых ими действий начало давать сбои. Проблему не удаётся решить "нарешиванием" большого числа примеров.

Разумеется, дело не только в учебнике, а в утверждённой программе по математике, под которую переделывали учебник, в программе есть мелкие усовершенствования. Только после появления и 20-и лет использования учебников С.М. Никольского в программе вместо смешанных чисел стали говорить о смешанных дробях, а до этого 50 лет "учительский сленг" в учебнике никого не смущал, авторов программы — тоже. 50 лет говорили ещё о "распределительном законе умножения относительно сложения и относительно вычитания". Нет таких законов в математике. Есть распределительный закон и его следствие (для вычитания).

Нет в математике никаких смешанных чисел. Натуральные, целые, рациональные и иррациональные (при углублении и комплексные) числа в школьной математике есть, а смешанных чисел — нет.

Да и с текстовыми задачами произошли изменения. В программе появилось решение задач арифметическими способами, чего ранее не было. Было раннее введение использования уравнений для решения текстовых задач. Сами уравнения вводились сразу после изучения действия вычитания натуральных чисел, когда для формирования полного умения решать линейные уравнения ещё нет числовой базы. В результате дети осваивали способ решения "Делай, как я!". И ситуация стала напоминать ту, которую описал в 1923 году В. Беллюстин применительно к текстовым задачам.

Мне известен эпизод, когда на занятии с сотрудницей лаборатории обучения математике НИИ СиМО АПН СССР ученик попросил: Людмила Викторовна, научите нас, пожалуйста, решать задачи на "пусть". Видимо, начинать решение задачи с помощью уравнения фразой "Пусть x — ..." он умел, а вот что дальше делать, не знал. Задачи-то бывают разные.

У нас в учебниках были задачи на нахождение двух чисел по сумме и разности, задачи на части, задачи на деление в данном отношении, традиционные для российской школы с незапамятных времён, теперь они в "единой"‘ программе не упоминаются, а это были задачи, при решении которых учитель имел возможность тренировать умение учащихся рассуждать, обосновывать свои утверждения, развивать мышление и речь учащихся. В программе говорится о решении задач арифметическими способами, но эти способы не конкретизированы, а зря. Теперь уравнений в программе для 5-6 классов нет, первый раз они встречаются в 7 классе. Тогда же начинается впервые применение уравнений для решения текстовых задач.

В коротком сообщении о вкладе С.М. Никольского в создание серии учебников математики (ранее мы говорили об арифметике) для 5-6 классов, алгебры для 7-9 классов, алгебры и начал математического анализа для 10-11 класса нет возможности охватить все содержательные и методические особенности этих учебников по всем классам. Отметим только, что они писались как двухуровневые, начиная с 7 класса. То есть в учебник включались вопросы программы углублённого изучения математики, но соответствующие пункты выделялись звёздочками и считались необязательными при обучении в обычном классе с меньшим числом уроков на математику.

Учебники для 10-11 класса некоторое время были утверждены как двухуровневые, на обложке было написано "Базовый и углублённый уровни". Но в Министерстве просвещения не оценили эту идею, позволяющую учителю в работе с обычным классом иметь возможность "углублять" обучение своих сильных учащихся и самому осваивать преподавание математики на более высоком уровне. Ведь изучение математики углублённо — это не изучение какой-то совсем другой математики, как некоторым кажется. А это помощь в повышении квалификации учительских кадров и в переходе сильных учителей от преподавания только по обычной программе к преподаванию математики и в классах с углублённым изучением математики.

Отмечу с грустью, что после введения "единых учебников" учителя сообщали о разочаровании в них, так как имели опыт преподавания по построенным линейно, а не концентрично, более обоснованным в изложении учебного материала учебникам серии "МГУ – школе" академика С.М. Никольского и его авторского коллектива. Все учебники обеспечены книгами для учителя, в которых к каждому пункту даны разъяснения трудных мест и способов их преодоления, приведены решения наиболее трудных задач, которые, что греха таить, иногда отпугивают недостаточно подготовленных учителей. К каждому учебнику есть дидактические материалы, к учебникам для 5-9 классов есть рабочие тетради. К учебникам для 5-6 классов есть книжка "Задачи на смекалку", входившая в комплект для 5-6 классов. Надеемся, что Министерство просвещения России ещё одумается, что учебники С.М. Николького ещё будут востребованы.

Отмечу, что единственный раз при введении ЕГЭ в Москве, кажется, это был 2010 год, до районных методистов и учителей математики довели зависимость результатов сдачи ОГЭ и ЕГЭ от используемого учебника. Оба экзамена сдали лучше учащиеся, обучавшиеся по учебникам С.М. Никольского. Это подтвердил И.В. Ященко, отметивший, правда, в личной переписке, что результаты обучения зависят не только от учебника.

А завершить рассказ об учебниках С.М. Никольского разрешите давним отзывом об учебнике "Арифметика. 5 класс" от профессионала, академика Виктора Анатольевича Васильева, много лет возглавлявшего экспертизу школьных учебников математики в России.

"Это редкий учебник, авторы которого явно понимают, что они пишут, включая смысл, логику и взаимосвязь материала, различие между важным и второстепенным, между содержательными фактами и техническими приемами. При значительном лаконизме изложения, нигде не пропущено ничего существенного и дается совершенно адекватная картина материала. Некоторая скудость материала, неизбежная в учебнике, ориентированном лишь на федеральный компонент стандартов, компенсируется высокой культурой его изложения и искусным подбором задач, часть из которых подводит учеников к возможным перспективам.

Особенно приятно, что книга свободна от двусмысленностей, неоднозначностей в постановках задач и в определениях, а также от специфического педагогического жаргона, возникающего, когда тем или иным терминам или группам слов негласно присваивается некоторый смысл, отличный от их буквального прочтения.

В данной же книге все используемые термины достаточно четко определены. При этом удивительным образом во всем учебнике мне удалось найти ровно две (или, при максимально строгом подходе, три) ошибки. Эти ошибки не позволяют признать учебник абсолютно соответствующим современным научным представлениям, однако все необходимые исправления чрезвычайно просты".

Это всё, что мне хотелось рассказать об учебниках Сергея Михайловича Никольского.

Несколько слов о положении дел в настоящее время. После введения единых учебников государство финансирует только их приобретение для школ. Остальные учебники потеряли прежний статус "учебники". По нашим учебникам только доучивали классы, начавшие работу в 5, 7 или 10 классе. Теперь таких нет. Учителя могут работать по ним только "вприглядку", то есть частично использовать материал, который им нравится.

Литература

[1] 5-9 класс (базовый уровень) URL: https://100ballnik.com/wp-content/uploads/2023/08/ФРП-ООО-математика-5-9-класс-БАЗА.pdf? ysclid=m26987jrar141876465

[2] 7-9 класс (углублённое изучение)
URL: https://sh115-krasnoyarsk-r04.gosweb.gosuslugi.ru/netcat_files/32/
50/FRP_OOO_MATEMATIKA _5_9_UU.pdf

[3] Беллюстин В. Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики. - М.-СПб., 1923.

[4] Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики. Выпуск I. Арифметика и алгебра. Перев. с нем. П.С. Юшкевича. - М.–Л., 1932.

Шевкин Александр Владимирович,
старший научный сотрудник,
кандидат педагогических наук,
заслуженный учитель РФ.

E-mail: avshevkin@mail.ru

Числа двойной точности

Е. В. Щепин

В статье рассказано о числах двойной точности. Это одна из необычных числовых систем — так называемых алгебр Клиффорда. От обычных чисел она отличается тем, что в ней имеются бесконечно-малые. Это позволяет чисто алгебраически решать ряд задач, которые в стандартном математическом анализе требуют операции предельного перехода.

Числа двойной точности

Бесконечно малые. Лейбниц определял бесконечно малую величину как меньшую любой конечной величины, но отличную от нуля. Ньютон, как то высказался, что бесконечно-малое — это число квадрат которого равен нулю. Последовательным адептом этой идеи был последователь Ньютона Ньювентитт.

В те времена математики наивно верили в объективную реальность (данность Богом) чисел и ожесточенно спорили между собой, как *на самом деле* обстоит дело. Современные математики знают множество различных числовых систем и не спорят о том какая из них является истинной. Каждая система имеет свою естественную область приложимости и пользоваться ими можно по мере надобности.

В конце девятнадцатого века Клиффорд ввел в математику много различных числовых систем (алгебры Клиффорда). В частности им под именем *dual numbers* были введены числа, представляющие минимальное расширение множества обычных чисел, содержащее бесконечно-малые числа в смысле Ньютона и Лейбница. Мы будем называть эти числа *числами двойной точности* или, короче, *двойными.*

Длинная арифметика. Заметим, что в машинной арифметике в типе переменной "real" нет нуля, а есть машинный ноль — наименьшее число, представимое там. И в компьютере есть бесконечно-малые величины в смысле Ньютона. То есть отличные от машинного нуля, но имеющие квадрат равный машинному нулю.

Пусть нам требуется произвести некоторые расчеты на компьютере с точностью, превышающей имеющуюся в типе данных "real" нашего языка программирования. Например, данный нам в языке тип чисел дает только двадцать десятичных знаков, тогда как нас интересует сорок. В этом случае выходят из положения с помощью следующего приема. Мы вводим новый тип данных, называемых числами двойной точности, которые представляются парами чисел (x, y), данного нам типа real. Пара чисел (x, y) интерпретируется нами как одно число $x + 10^{-20}y$, имеющее 40 десятичных значащих цифр. Мы должны будем самостоятельно запрограммировать операции сложения и умножения для этого типа данных. Сложение программируется без переноса из нижних разрядов. А при умножении исчезает произведение малых частей.

Идеализацией этого метода вычислений является понятие арифметики *чисел двойной точности.* Нужно понимать, что числа двойной точности представляют собой все-таки обычные величины. Поэтому они обладают всеми свойствами обычных чисел. Что функции применяются к двойным числам с сохранением их свойства. Сохраняются также тождества и нестрогие неравенства.

Числа двойной точности. Введем в рассмотрение новое число *корень из нуля* обозначаемое $\sqrt{0}$, которое мы определим как бесконечно-малое и в смысле Лейбница и в смысле Ньютона. То есть будем считать, что $0 < \sqrt{0} < \varepsilon$ для любого положительного числа ε (бесконечная малость по Лейбницу), а также будем считать, что $\sqrt{0}^2 = 0$ (бесконечная малость по Ньютону).

Появление одного нового числа порождает появление многих других новых чисел. А именно, мы хотим, чтобы новые числа подчинялись привычным законам сложения. Если же сложение согласуется с порядком, то добавление положительного числа всегда увеличивает. Поэтому $n\sqrt{0}$ — сумма n

корней из нуля должна быть больше, чем $(n-1)\sqrt{0}$. Следовательно, все числа $n\sqrt{0}$ при различных натуральных n должны быть различны между собой. И все эти числа являются бесконечно-малыми по Лейбницу и по Ньютону. Действительно, так как $\sqrt{0} < \varepsilon/n$, то умножение на n этого неравенства дает $n\sqrt{0} < \varepsilon$. Что и доказывает бесконечную малость $n\sqrt{0}$ по Лейбницу. А возведение в квадрат дает $(n\sqrt{0})^2 = n^2\sqrt{0}^2 = n^2 0 = 0$, что доказывает бесконечную малость $n\sqrt{0}$ в смысле Ньютона.

При умножении корня из нуля на любое обычное число $\lambda \neq 0$ не может получиться ноль. Действительно, если $\lambda\sqrt{0} = 0$, то при любом натуральном n будет $n\lambda\sqrt{0} = 0$. Но если взять $n > \frac{1}{|\lambda|}$, то $n|\lambda| > 1$ откуда $|n\lambda\sqrt{0}| > \sqrt{0}$. Отсюда вытекает, что все числа вида $\lambda\sqrt{0}$ при различных λ должны быть различны. Действительно, если $\lambda\sqrt{0} = \mu\sqrt{0}$, то $(\lambda - \mu)\sqrt{0} = 0$, откуда $\lambda - \mu = 0$.

И, вообще, равенство $\lambda + \mu\sqrt{0} = \lambda' + \mu'\sqrt{0}$ возможно лишь при $\lambda = \lambda'$ и $\mu = \mu'$. Поэтому все числа вида $\lambda + \mu\sqrt{0}$ при различных действительных λ и μ различны. Числа такого вида мы называем *двойными.* Множество всех действительных двойных чисел обозначаем $\mathbb{RR}$.

Число λ называется *конечной частью* двойного числа $x = \lambda + \mu\sqrt{0}$, а число $\mu\sqrt{0}$ называется его *бесконечно-малой частью.*

Двойные числа с нулевой бесконечно-малой частью отождествляются с обычными числами. Числа с нулевой конечной частью называются *бесконечно малыми.*

При сложении двойных чисел независимо складываются их конечные и бесконечно-малые части. Произведение двойных чисел задается формулой

$$(a + b\sqrt{0})(c + d\sqrt{0}) = ac + (b + d)\sqrt{0} \tag{1}$$

Отношение порядка для двойных чисел определяется так: если их конечные части различны, то бо́льшим считается то число, которое имеет бо́льшую конечную часть. При равных конечных частях бо́льшим считается число с бо́льшим коэффициентом при корне из нуля.

Обычные законы операций сложения и умножения, включая их согласование с отношением порядка, справедливы для двойных чисел.

Деление двойных чисел.

Теорема 1. *Пусть $a + b\sqrt{0}$ является конечным (т.е. $a \neq 0$) двойным числом. Тогда для любого двойного числа $c+d\sqrt{0}$ существует единственное двойное число $x+y\sqrt{0}$ (частное от деления $c+d\sqrt{0}$ на $a + b\sqrt{0}$), такое что*

$$(c + d\sqrt{0}) = (x + y\sqrt{0})(a + b\sqrt{0}) \tag{2}$$

При этом частное определяется формулами

$$x = \frac{c}{a} \qquad y = \frac{ad - bc}{a^2} \tag{3}$$

Доказательство. Равенство (2) равносильного системе $\begin{cases} ax = c \\ ay + bx = d \end{cases}$ Из первого уравнения которой получаем $x = c/a$. Подставляя найденное значение x во второе уравнение, находим y. Теорема доказана.

Деление конечного числа на бесконечно-малое двойное число невозможно. А деление одного бесконечно-малого числа на другое бесконечно-малое позволяет однозначно определить только конечную часть результата.

Невозможно извлечь корень степени, большей единицы, из бесконечно малого числа.

Элементарные функции на двойных числах. Так как операции умножения и сложения определены для двойных чисел, то формулы, задающие многочлены и рациональные функции, имеют смысл и для двойных чисел. При этом для рациональных функций их значения (точнее, конечные части этих значений) могут быть вычислены и в тех случаях, когда и числитель, и знаменатель имеют бесконечно-малые значения.

Из геометрических соображений (неравенства для синуса) полагается синус бесконечно-малого угла равен самому углу и логарифм единицы плюс бесконечно-малое равен этому бесконечно-малому (первый и второй замечательный пределы).

Для произвольных чисел двойной точности значения функций определяются их правилами сложения (функциональными уравнениями).

Экспонента и все выражающиеся через нее тригонометрические функции определены для двойных чисел. Более конкретно:

$$\exp(u + v\sqrt{0}) = \exp u + v \exp u\sqrt{0}. \tag{4}$$

Таким образом, формула умножения $\exp(x + y) = \exp x \exp y$ оказывается верной и для двойных чисел.

Натуральный логарифм числа двойной точности определяется по формуле

$$\ln(u + v\sqrt{0}) = \ln u + \frac{v}{u}\sqrt{0}. \tag{5}$$

При этом логарифм произведения оказывается равным сумме логарифмов. Возведение в степень определяется через экспоненту и логарифм: $a^x := exp(x \ln a)$.

Для определения значений тригонометрических функций на двойных числах достаточно определить их значения на бесконечно-малых числах и далее воспользоваться соответствующими формулами сложения.

Теорема 2. $\sin x\sqrt{0} = x\sqrt{0}$, $\cos x\sqrt{0} = 1$

Доказательство. Так как $x \leq \sin x$ для любого $x > 0$, то $1 \geq \cos^2 x\sqrt{0} = 1 - \sin^2 x\sqrt{0} \geq 1 - (x\sqrt{0})^2 = 1$. Откуда $\operatorname{tg} x\sqrt{0} = \sin x\sqrt{0}$ и в силу неравенств $\sin x\sqrt{0} \leq x\sqrt{0} \leq \operatorname{tg} x\sqrt{0}$ заключаем $\sin x\sqrt{0} = x\sqrt{0}$. Теорема доказана.

Таким образом, все элементарные функции оказываются определёнными для двойных чисел.

2. Дифференциал и производная

Пусть dx обозначает некоторое произвольное бесконечно-малое число, то есть имеет вид $a\sqrt{0}$, для некоторого конечного a. Тогда $(dx)^2 = 0$. *Дифференциал* $df(x)$ функции $f(x)$ в (вещественной) точке x определяется посредством формулы

$$df(x) = f(x + dx) - f(x). \tag{6}$$

Приведенная выше формула определяет дифференциал как функцию бесконечно-малого приращения dx. Дифференциал функции для рассматриваемых нами функций сам является бесконечно-малым при любом dx. Поэтому произведение дифференциалов для любой пары функций считается равным нулю (при вычислениях с двойной точностью).

Основные свойства дифференциалов:

линейность $d(u + v) = du + dv$;

правило Лейбница $d(uv) = udv + vdu$.

Здесь u и v являются функциями переменного x.

Докажем правило Лейбница. По определению, $d(uv) = u(x + dx)v(x + dx) - u(x)v(x)$. Заменяя в этом равенстве $u(x + dx)$ и $v(x + dx)$ на $u(x) + du(x)$ и $v(x) + dv(x)$ соответственно, получаем: $d(uv) = (u(x) + du(x))(v(x) + dv(x)) - u(x)v(x) = u(x)dv(x) + v(x)du(x) + du(x)dv(x)$. А поскольку последнее произведение считается равным нулю, получаем формулу Лейбница.

Далее заметим, что дифференциал константы (постоянной функции) равен нулю. Поэтому правило Лебница влечет за собой правило умножения дифференциала du на постоянную c:

$$d(cu) = c\,du \tag{7}$$

Правило Лейбница позволяет вычислять дифференциалы различных функций. Например, $dx^2 = xdx + xdx = 2xdx$. А переход к дифференциалам в тождестве $x\frac{1}{x} = 1$ дает $\frac{1}{x}dx + xd\frac{1}{x} = 0$. Откуда $\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}$

Если нам удалось выразить значение дифференциала некоторой функции в точке x через произведение некоторой функции от x на дифференциал dx, используя только бесконечную малость последнего, то, очевидно, при замене dx на cdx в виде результата мы получим формулу, в которой dx нужно заменить на cdx.

Таким образом отношение $\frac{df(x)}{dx}$ зависит только от x и не зависит от dx. Это отношение называется *производной* функции $f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$. Таким образом, имеет место такая формула для дифференциала функции:

$$df(x) = f'(x)dx \tag{8}$$

3. Строгое построение двойных чисел при помощи последовательностей

Для построения чисел двойной точности нужно зафиксировать сходящуюся к нулю последовательность положительных чисел (o_n). Мы будем говорить, что *числовая последовательность x_n представляет двойное число $a + b\sqrt{0}$*, если

1) $\lim x_n = a$;

2) $\lim(x_n - a)/o_n = b$

И в этом случае писать $(x_n) == a + b\sqrt{0}$.

Теорема 3. *Если последовательность x_n представляет число двойной точности $a+b\sqrt{0}$, $(y_n) = = a' + b'\sqrt{0}$, то $(x_n + y_n) == (a + a') + (b + b')\sqrt{0}$, $(x_n y_n) == aa' + (a'b + ab')\sqrt{0}$.*

4. Применения бесконечно-малых

Интеграл. Интеграл $\int\limits_a^b F(x,\, dx)$ представляет собой сумму большого числа маленьких слагаемых, устроенную следующим образом: отрезок интегрирования $[a, b]$ разбивается на непересекающиеся интервалы одинаковой длины dx (в количестве $\frac{b-a}{dx}$) и каждому из этих интервалов соответствует одно слагаемое интегральной суммы.

При этом слагаемые интегральной суммы идексируются точками отрезка $[a, b]$ таким образом, что одно и то же слагаемое соответствует всем точкам некоторого интервала из разбиения.

В идеале, интеграл — сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.

Поясним, что $F(x, dx)$ — арифметическое выражение, составленное из функций переменного x и их дифференциалов. Например, $f(x)dx, df(x)dg(x)/dh(x), (dx)^2$ и даже можно рассматривать функции от дифференциалов, вроде $cos(dx)sin(dx)$, которое относительно эквивалентно dx (см. ниже).

Геометрическая аксиома Лопиталя. Первый учебник анализа бесконечно-малых, написанный маркизом Лопиталем, предлагает аксиоматический подход к изложению этого предмета. Одна из сформулированных там аксиом, работающая в приложениях анализа к геометрии, звучит так:

Каждая кривая представляет собой ломаную с бесконечно малыми звеньями.

В качестве примера применения этой аксиомы рассмотрим следующее рассуждение Кеплера.

Доказательство Кеплера теоремы Архимеда. Кеплеру принадлежит следующее доказательство теоремы Архимеда о том, что площадь кругового сектора OPQ (O — центр окружности) равна половине произведения его радиуса $R = OP = OQ$ на длину дуги PQ, на которую он опирается.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетом AB длины R и катетом AC равным длине дуги PQ. Тогда нам нужно доказать равновеликость ABC и OPQ. Разделим катет BC и дугу PQ на бесконечно большое число бесконечномалых отрезков последовательным делением пополам.

Так что между получившимися элементами разбиения имелось взаимно однозначное соответствие и длины всех элементов были одинаковы. Назовем элементарным треугольником (сектором) треугольник (сектор) с вершиной A (соотв. O), основанием которого служит элементарный бесконечномалый отрезок (дуга окружности). Тогда сумма (интеграл) площадей элементарных треугольников равен площади треугольника ABC, а сумма (интеграл) площадей элементарных секторов равна площади сектора OPQ. А так как площадь элементарного треугольника отличается от площади элементарного сектора на бесконечномалую второго порядка, то их суммы-интегралы отличаются на бесконечно-малую величину. Что и требовалось доказать.

Основной постулат анализа. Он заключается в утверждении, что всякое изменение складывается из бесконечно-малых изменений. В математической форме это выражается равенством, в котором дифференциал функции в точке определяется как ее разность на концах соответствующего этой точке бесконечно-малого отрезка:

$$\int_a^b df(x) = f(b) - f(a) \tag{9}$$

Вычисление дифференциалов. Дифференциал функции в точке x обычно вычисляется по формуле

$$df(x) = f(x + dx) - f(x). \tag{10}$$

Эта формула не вполне точная. Потому что точка x может лежать в любом месте содержащего ее бесконечно малого отрезка длины dx. Эта формула предполагает, что точка x лежит в левом конце отрезка. А если она лежит в правом, то формула будет $df(x) = f(x) - f(x - dx)$, если в середине, — то $df(x) = f(x + dx/2) - f(x - dx/2)$. Однако для дифференцируемых функций (а только такие рассматриваются в школе) при вычислениях с двойной точностью все эти формулы дают одинаковый результат. Различные выражения для дифференциала отличаются между собой на величины, бесконечно малые относительно dx, то есть дающие бесконечно малую величину после деления на dx. Поэтому формула (10) достаточно точна для вычисления интегралов, что демонстрирует следующая теорема. (Подынтегральные выражения мы будем обозначать как функции двух переменных: точки x и длины dx, содержащего ее бесконечно-малого отрезка.)

Теорема 4. *Если разность подынтегральных выражений $F(x, dx)$ и $G(x, dx)$ при любом x из отрезка $[a, b]$ представляет собой величину, бесконечно малую по отношению к dx, то интегралы этих выражений по $[a, b]$ отличаются на бесконечно малую величину.*

Доказательство. Действительно, для любого положительного ε имеем неравенства

$$-\varepsilon dx \le F(x, dx) - G(x, dx) \le \varepsilon dx,$$

интегрируя которые, получаем:

$$-\varepsilon(b - a) \le \int_a^b F(x, dx) - G(x, dx) \le \varepsilon(b - a).$$

Теорема доказана.

Возможность интегрирования неравенств следует считать одним из безусловных постулатов интегрального исчисления. Если рассматривать разбиение отрезка интегрирования на бесконечно малые отрезки посредством деления на равные части, то длины всех получившихся бесконечно малых отрезков одинаковы. Поэтому величины подынтегральных слагаемых выражаются двойными числами вида $a + bdx$ с достаточной для интегрирования точностью.

Доказанная теорема обосновывает *правило пренебрежения* при вычислении дифференциалов, по которому можно пренебрегать величинами, бесконечно малыми сравнительно с dx. Например, вычисляя дифференциал n-ой степени получаем:

$$(x+dx)^n - x^n = nx^{n-1}dx + C_n^2 x^{n-2}(dx^2) + \cdots = nx^{n-1}dx.$$

То есть, по существу, вычисления дифференциалов функций для подынтегральных выражений производятся точно так же, как для двойных чисел.

Интеграл и квадратура функции.

Чтобы вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком положительной функции $f(x)$ а снизу отрезком $[a,b]$ оси абсцисс разделим этот отрезок на бесконечно большое число бесконечно-малых отрезков. Пусть dx обозначает длину бесконечно-малого отрезка, расположенного в точке x. Тогда площадь криволинейной трапеции с основанием в этом бесконечно малом отрезке обозначаемая ds будет отличаться от $f(x)dx$, выражающую площадь прямоугольника с основанием dx и высоты $f(x)$ на бесконечно-малую величину второго порядка ($< df(x)dx$)[1]. Поэтому суммарная площадь этих бесконечно-малых прямоугольников, выраженная интегралом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ совпадает с точностью до бесконечно-малых первого порядка с площадью криволинейной трапеции.

В частности, интеграл $\int\limits_a^b x^n\,dx$ выражает площадь под параболой $y = x^n$ над отрезком $[a,b]$. А так как $\frac{dx^{n+1}}{n+1}$, как нетрудно видеть, отличается от $x^n dx$ на бесконечно-малые высших по отношению dx порядков, то и интеграл $\int\limits_a^b x^n\,dx$ лишь на бесконечно-малую величину отличается от $\frac{1}{n+1}\int\limits_a^b dx^{n+1} = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$. Таким образом, анализ бесконечно-малых позволяет легко решить задачу о квадратуре парабол.

Вычисление объемов. Интегралом можно выразить также и объем пространственного тела. Предположим, что нам известно функция $s(t)$, выражающая площадь сечения этого тела горизонтальной плоскостью на высоте h. Тогда интеграл $\int\limits_a^b s(h)\,dh$ выражает объем тела, в случае, если оно заключено по высоте между a и b. Действительно, легко видеть, что отличие между объемом цилиндра высоты dh с основанием, являющимся сечением тела плоскостью на высоте h, и частью тела с высотами из h-го отрезка разбиения является бесконечно-малой второго порядка.

5. Задачи

1. Арифметика

1. а) Разделить 1 на $4+\sqrt{0}$; б) Разделить 4 на $2+\sqrt{0}$.
2. Вычислить $(1+\sqrt{0})^n$ для натурального n.
3. Извлечь квадратный корень $\sqrt{4+\sqrt{0}}$ (методом неопределенных коэффициентов).
4. Извлечь кубический корень $\sqrt[3]{1+10\sqrt{0}}$.
5. Вычислить значение дроби $\frac{x^4+x^3-x-1}{x-1}$ для $x = 1+\sqrt{0}$ двумя способами, дающими разные ответы.
6. Доказать единственность решения уравнения деления $ax = b$ в двойных числах, если $a^2 \neq 0$.

[1] Бесконечно-малая α имеет более высокий порядок малости относительно бесконечно-малой β, если бесконечно мало отношение α/β.

7. Вычислить $\sqrt{x^2}$. Если определить модуль двойного числа как $|x| = \sqrt{x^2}$ (где берется положительный квадратный корень), то будет ли модуль произведения равен произведению модулей?

2. Значения функций

1. Вычислить $e^{1+\sqrt{0}}$.
2. Вычислить $2^{1+\sqrt{0}}$ ($e^{\sqrt{0}} = 1 + \sqrt{0}$).
3. Вычислить $\ln(2 + \sqrt{0})$.
4. Вычислить $(2 + \sqrt{0})^{3+\sqrt{0}}$.
5. Вычислить $\sin(x + \sqrt{0})$, $\cos(x + \sqrt{0})$.
6. Вычислить $\arcsin(\frac{1}{2} + \sqrt{0})$ (методом неопределенных коэффициентов). Здесь arcsin — обратная функция к sin.
7. Вычислить $\mathrm{tg}(x + \sqrt{0})$.
8. Вычислить $\mathrm{arctg}(1 + \sqrt{0})$. Здесь arctg — обратная функция к tg.
9. Вычислить $e^{e^{1+\sqrt{0}}}$.
10. Вычислить $\sin\ln(1 + 2\sqrt{0})$.
11. Вычислить $\ln^2(\mathrm{arctg}(1 + \sqrt{0}))$.

3. Геометрическое применение: нахождение касательной к графику

Касательную к графику аналитической функции $y = f(x)$, проходящую через точку с координатами $(x, f(x))$, определим как прямую, проходящую через эту точку и бесконечно близкую точку $(x + \sqrt{0}, f(x + \sqrt{0}))$.

Таким образом, чтобы найти уравнение касательной, надо сначала вычислить точку $(x + \sqrt{0}, f(x + \sqrt{0}))$, а затем по стандартному алгоритму написать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $(x, f(x))$ и $(x + \sqrt{0}, f(x + \sqrt{0}))$.

Задача 1. Найдите уравнения касательных к заданным функциям в заданных точках:
а) $y = x^2$, $A = (1; 1)$, $B = (-2, 4)$;
б) $y = \sin x$, $A = (0; 0)$, $B = (\pi/3, \sqrt{3}/2)$, $C = (\pi/2; 1)$;
в) $y = \cos x$, $A = (\pi/2; 0)$, $B = (-\pi/6, \sqrt{3}/2)$;
г) $y = \mathrm{tg} x$, $A = (0; 0)$, $B = (\pi/4; 1)$;
д) $y = \exp x$, $A = (0; 1)$, $B = (1; e)$;
е) $y = \ln x$, $A = (1; 0)$, $B = (e; 1)$;
ж) $y = \mathrm{arctg} x$, $A = (0; 0)$, $B = (\sqrt{3}; \pi/3)$.

Задача 2. Убедитесь, что во всех случаях задачи 1 результат не изменится, если вместо $\sqrt{0}$ прибавлять произвольную бесконечно малую, т.е. $v\sqrt{0}$, где $v \neq 0$ — произвольное действительное число.

Замечание. Можно рассмотреть более тонкую задачу о нахождении *центра* (а значит, и *радиуса*) *кривизны* графика функции в данной точке.

Геометрия тут такая: надо рассмотреть три точки $(x, f(x))$, $(x + \sqrt{0}, f(x + \sqrt{0}))$ и $(x - \sqrt{0}, f(x - \sqrt{0}))$, соединить первую точку со второй и третьей хордами и найти точку пересечения серединных перпендикуляров к этим хордам. Эта точка и есть центр кривизны, а ее расстояние до точки $(x, f(x))$ — радиус кривизны.

И тут мы увидим, что с использованием двойных чисел ничего не получится! Все эти три точки лежат на одной прямой — касательной к графику в точке $(x, f(x))$, и серединные перпендикуляры оказываются параллельными!

Эту задачу решают *тройные числа* вида $x + y\sqrt[3]{0} + z(\sqrt[3]{0})^2$.

Задача 3*. Попробуйте разобраться в арифметике тройных чисел и решить задачу о центре кривизны для функции $y = x^2$, в точках $A = (0; 0)$ и $B = (1, 1)$.

Задача 4*. Вычислить $\ln(3 + \sqrt[3]{0})$.

4. Вычисление дифференциалов

Через dx обозначаем произвольную бесконечно-малую, то есть произведение корня из нуля на конечное число. Иными словами, это произвольное число, для которого $(dx)^2 = 0$.

Определение *дифференциала функции*: $df(x) = f(x + dx) - f(x)$ (при этом $(dx)^2 = 0$).

Задача 1. а) Найти дифференциалы dx^2, dx^3;
б) Найти дифференциалы $d\frac{1}{x^2}$, $d\frac{1}{x^3}$;
в) Найти дифференциалы $d\exp x$, $d\sin x$, $d\cos x$;
г) Доказать тождество $x - dx = x\sqrt{0}/\sqrt{0}$.

Задача 2. Убедитесь, что все вычисленные дифференциалы являются бесконечно-малыми.

Задача 3. Докажите, что дифференциал любой рациональной функции — бесконечно-малая.

Можно доказать, что дифференциал любой аналитической функции — бесконечно-малая.

Для произвольной аналитической функции $f(x)$ определим новую функцию $f'(x)$ как конечную часть отношения дифференциалов $f'(x) = df(x)/dx$, тогда $df(x) = f'(x)dx$.

Теперь мы можем вычислить дифференциал сложной функции. Дано: $df(x) = f'(x)dx$, найти $d(f(g(x))$. Делаем замену переменной $g(x) = y$ и получаем $d(f(g(x)) = df(y) = f'(y)dy = f'(g(x))dg(x)$. Задача сведена к вычислению дифференциала $g(x)$.

Задача 4. а) Найти дифференциал $d\sqrt[3]{x}$;
б) Исходя из $de^x = e^x dx$, найти $d\ln x$;
в) Найти дифференциал de^{x^2};
г) Найти дифференциал $d\,\mathrm{tg}\,x$;
д) Найти дифференциал $d\arcsin x$;
е) Найти дифференциал $d\,\mathrm{arctg}\,x$;
ж) Найти дифференциал $d\,\cos x \ln\sin x^2$

4. Неявное дифференцирование

1. Найти $\frac{dy}{dx}$ для кривой $x^5y^3 + xy^6 = y + 1$ в точках $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(0, -1)$.
2. Найти $\frac{dy}{dx}$ для кривой $e^{\sin x} = \ln y$ в $(0, e)$.
3. Найти $\frac{dy}{dx}(\varphi)$ для *спирали Архимеда* $r = a\varphi$. Здесь (r, φ) — *полярные координаты* на плоскости, которые связаны с обычными декартовыми координатами формулами: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.
4. Найти $\frac{dy}{dx}$ для *циклоиды* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ в точке t_0.

Щепин Евгений Витальевич,
Главный научный сотрудник Института
математики РАН имени В.А. Стеклова,
член-корреспондент РАН, доктор физ.-мат. наук.

E-mail: scepin@mi-ras.ru

Типы случайных процессов, связанных со сложным событием. Практические приложения

Н. И. Сидняев, Э. Баттулга

Настоящая статья посвящена теории случайных процессов с представлением простых, но важных для практических приложений математических моделей, в которых рассматриваются различные процессы, протекающие во времени под воздействием тех или иных случайных факторов. Рассматриваемые модели выбраны так, чтобы на их примере можно было показать различные методы теории случайных процессов. Статья может быть использована в учебном процессе преподавателями и аспирантами.

Введение. Примеры случайных процессов

Теория случайных процессов в настоящее время представляет собой обширную область математики со многими различными направлениями [1,2], и выбрать материал для краткого введения в эту теорию — задача далеко не легкая. Различают нестационарные, стационарные и эргодические случайные процессы. Наиболее общий случайный процесс — нестационарный.

Случайный процесс $X(t)$ является *стационарным*, если его многомерная плотность вероятности $p(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ зависит только от величины интервалов $t_2 - t_1, t_3 - t_1, \ldots, t_n - t_1$ и не зависит от положения этих интервалов в области изменения аргумента. Отсюда следует, что во-первых, для стационарного процесса одномерная плотность вероятности не зависит от времени, т.е. $p_1(x,t) = p_1(x)$; во-вторых, двумерная плотность вероятности зависит от разности $t_2 - t_1 = \tau$, т.е. $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_2(x_1, x_2, \tau)$ и т.д. В связи с этим все моменты одномерного распределения, в том числе математическое ожидание и дисперсия, постоянны. Таким образом, для стационарного процесса

$$m_x = M(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx; \;\; K_x(\tau) = M[x(t)x(t+\tau)]; \;\; R_x(\tau) = K_x(\tau) - m_x^2;$$

$$D_x = K(0) - m_x^2 = R_x(0) = \sigma_x^2; \;\; r_x^2(\tau) = \frac{K_x(\tau) - m_x^2}{\sigma_x^2}.$$

Стационарный случайный процесс будет *эргодическим*, если при определении любых статистических характеристик усреднение по множеству реализаций эквивалентно усреднению по времени одной бесконечно длинной реализации; в этом случае

$$m_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t)dx, \;\; K_x(\tau) = \lim_{1/T} \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt \;\text{ и т.д.}$$

Если $x(t)$ представляет собой случайный ток или напряжение в электрической цепи, то m_x — это постоянная составляющая, а $R_x(0)$ — средняя мощность флуктуации.

Случайный процесс может быть назван *широкополосным*, если эффективная полоса частот его спектральной плотности мощности сравнима со средней частотой этой полосы, либо эта полоса значительно шире полосы пропускания цепи, через которую проходит данный сигнал.

Напомним, что *спектральная плотность мощности (спектр мощности)* характеризует распределение средней энергии случайного процесса по частотам. *Эффективная полоса частот* — та, в пределах которой передаётся подавляющая доля энергии сигнала (до 90–95%). Ширина такой полосы частот называется *практической шириной спектра сигнала.*

Полоса пропускания цепи есть интервал частот, в пределах которого квадрат модуля передаточной функции (коэффициент передачи энергии) изменяется не более чем в 2 раза.

Если случайный процесс обладает равномерным энергетическим спектром в бесконечно широкой полосе частот $(-\infty; +\infty)$ то такой его можно считать *белым шумом* по аналогии с белым светом, имеющим в видимой части равномерный сплошной спектр. На рис. 1 показаны спектральные характеристики процессов, в том числе и белого шума, где $W_x(f) = W_0$.

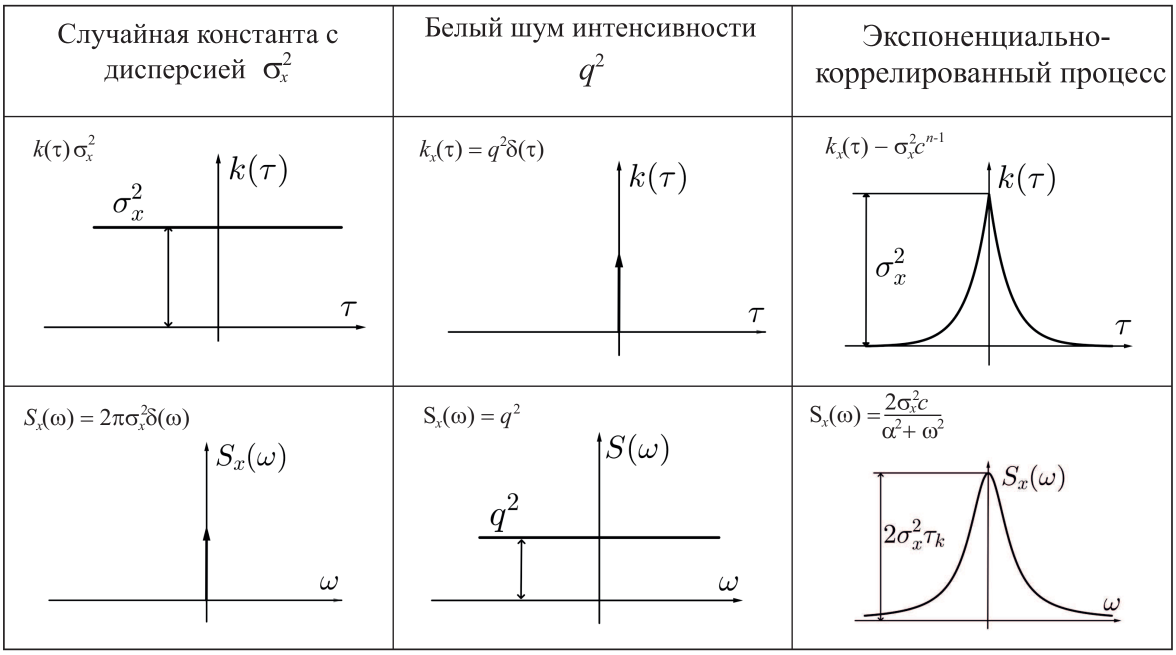

Рис. 1. Примеры графиков корреляционных функций и спектральных плотностей простейших процессов.

На этом рисунке $W_x(f)$ — одномерная плотность распределения вероятностей случайных процессов; функция $S_x(\omega)$ (или, что то же $S(\omega)$) называется *плотностью мощности по частоте* или *спектром мощности реализации.* Она характеризует распределение энергии реализации по оси частот.

Безусловно, такое представление случайного сигнала является идеализацией, т.к. дисперсия его должна иметь значение, равное бесконечности. Использование понятия белого шума позволяет находить все необходимые характеристики случайного процесса на выходе системы только через собственные параметры, входящих в ее состав [3]. Законы распределения плотности вероятности белого шума могут быть любыми и часто их удобно считать нормальными. К белому шуму обычно относят сигналы, имеющие игольчатую структуру с бесконечно тонкими случайными выбросами. Шум, имеющий равномерную плотность мощности в полосе частот $(-f_1, f_1)$, также называется широкополосным. Примеры случайных процессов [4,5]:

1. *Гармоническое колебание со случайной амплитудой.* Пусть $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\cos\psi(t)$, где A — постоянная величина; $\psi(t)$ — случайная величина, имеющая равномерную плотность вероятности в интервале от 0 до A_{max} (рис. 2).

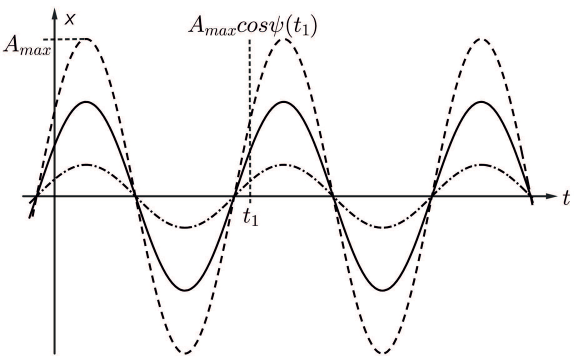

Рис. 2. Гармонические колебания.

В момент времени t_1 мгновенное значение сигнала может быть любым в интервале от 0 до $A_{max}\cos\psi(t_1)$. Поэтому $p(x,t_1) = \dfrac{1}{A_{max}\cos\psi(t_1)}$, $0 < x < A_{max}\cos\psi(t_1)$.

График $p(x,t_1)$ имеет вид рис.3.

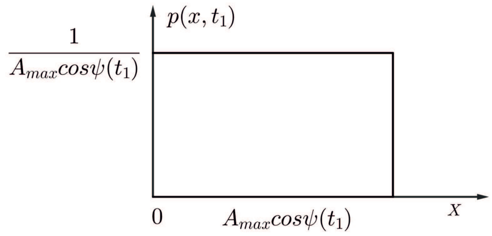

Рис. 3. Распределение плотности вероятности для гармонических колебаний со случайной амплитудой

Математическое ожидание:

$$M[x(t_1)] = \int\limits_0^{A_{max}\cos\psi(t_1)} xp(x)dx = \int\limits_0^{A_{max}\cos\psi(t_1)} x\frac{1}{A_{max}\cos\psi(t_1)}dx = \frac{1}{2}A_{max}\cos\psi(t_1).$$

Соответствующие вычисления интегралов дают

$$M[x^2(t_1)] = \frac{1}{3}A^2_{max}\cos^2\psi(t_1),\ D_x(t_1) = \frac{1}{12}A^2_{max}\cos^2\Psi(t_1).$$

Как видно из приведенных соотношений, первые два момента случайного процесса зависят от времени, следовательно этот процесс нестационарный, и, следовательно, неэргодический [6,7].

2. *Гармоническое колебание со случайной фазой.* Пусть $x(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где φ — случайная величина, равномерно распределенная в пределах $(-\pi;\pi)$. Плотность вероятности такого случайного процесса равна: $p_\varphi(\varphi) = (2\pi)^{-1}$, $-\pi < \varphi < \pi$.

Одна из реализаций имеет вид: $x_k(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_k) = \cos\varphi_k(t)$, где $\varphi_k(t)$ — полная фаза. Здесь $\varphi_k(t)$ — также случайная величина, плотность вероятности которой имеет тот же вид: $p_\psi(\psi) = (2\pi)^{-1}$.

Определим вероятность $p(x)dx$ того, что в промежутке времени от до $t_1 + dt(\gamma_1 + d\gamma_1)$ мгновенное значение сигнала окажется в интервале $x + dx$ (рис. 4):

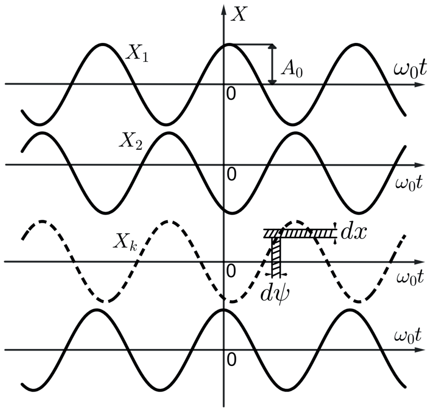

Рис. 4. Мгновенное значение сигнала для гармонических колебаний со случайной фазой

Эта вероятность совпадает с вероятностью попадания случайной фазы ψ в интервалы $d\psi$ на периоде, которая в свою очередь равна $2p_\psi(\psi)d\psi$.

Таким образом, $p(x)dx = 2p_\psi(\psi)d\psi = \frac{2}{2\psi}d\psi$, откуда $p(x)dx = \frac{1}{\pi}\left|\frac{dx}{d\psi}\right|^{-1}$, $-1 < x < 1$.

Так как $\left|\frac{dx}{d\psi}\right| = |\sin\psi| = \sqrt{1-\cos^2\psi} = \sqrt{1-x^2}$, имеем: $p_x(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$ ($p_x(x)$ — функция распределения вероятности). График этой функции имеет вид, показанный на рис.5.

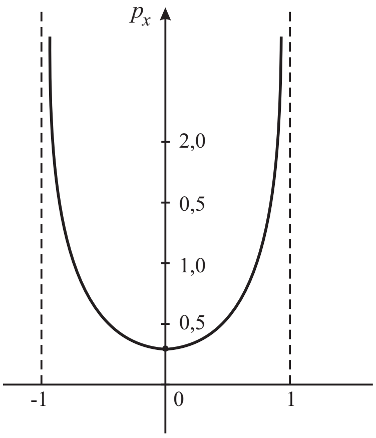

Рис. 5. График обратной функции.

Так как плотность вероятности не зависит от t, то этот процесс является стационарным с математическим ожиданием

$$m_x = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\pi}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0,$$

причем ту же величину можно получить путем усреднения по времени одной реализации:

$$\overline{x}(t) = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t)dx = 0,$$

что указывает на эргодичность процесса. Корреляционная функция этого процесса равна

$$R_x(\tau) = 0.5\cos\omega_0\tau.$$

3. *Нормальный (гауссовский) случайный процесс.* Такой случайный процесс характерен для помех. Одномерная плотность вероятности стационарного эргодического нормального случайного процесса определяется выражением

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Чем больше σ_x, тем меньше максимум, кривая (рис. 6) более полога, причем всегда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$, т.е. площадь под кривой равна 1 для любых m_x и σ_x.

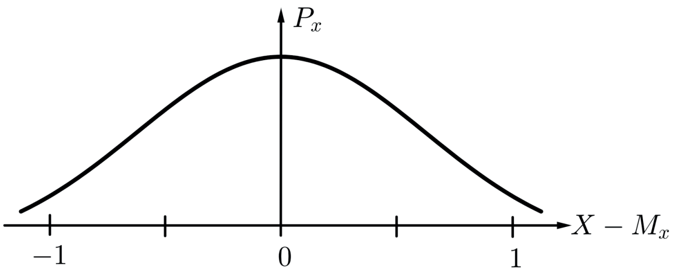

Рис. 6. Плотность вероятности нормального случайного процесса

Широкое распространение нормального закона распределения объясняется тем, что при сложении большого числа независимых случайных слагаемых распределение суммы близко к гауссовскому при любом законе распределения отдельных слагаемых (центральная предельная теорема) [8]. Для гауссовского случайного процесса с нулевым средним ($m_x = 0$) вероятность того, что модули значений случайной величины не превысят величину $3\sigma_x$ составляет $0,997 \approx 1$, т.е. полный размах такого случайного процесса не превышает $6\sigma_x$. Отношение максимумов отклонения случайной величины (пиков) к σ_x называют *пик-фактором* случайного сигнала. Для гауссовского шума он равен 3σ, для гармонического сигнала со случайной фазой — $\sqrt{2}$. Знание $p_x(x)$ не дает полного представления о поведении случайного сигнала во времени. Медленно меняющаяся и быстро меняющиеся случайные функции могут иметь одинаковые плотности вероятности, что отражено на рис. 7.

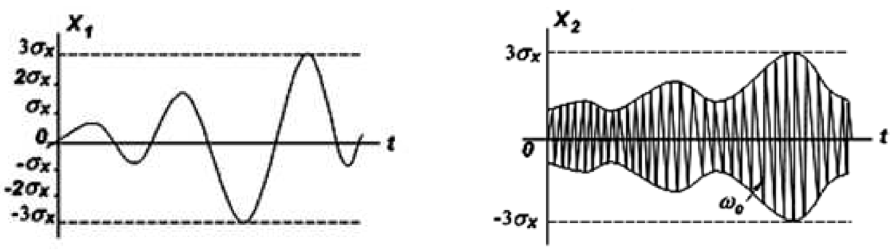

Рис. 7. Виды случайных функций: а) медленная; б) быстрая.

Для оценки этих свойств используют корреляционные функции. Для случая, показанного на рис. 7,а), имеем $R_{x_1}(\tau) = \sigma_{x_1}^2 e^{-a_{x_1}\tau}$, а для рис. 7,б) — $R_{x_2}(\tau) = \sigma_{x_2}^2 e^{-a_{x_1}\tau} \cos\omega_0\tau$.

1. Случайное блуждание на примере броуновской частицы

Рассмотрим частицу, взвешенную в однородной жидкости, которая испытывает хаотические столкновения с молекулами жидкости, в результате чего находится в непрерывном беспорядочном движении, называемом *броуновским.* Дискретным аналогом такого процесса может служить следующая модель случайного блуждания. Положение частицы рассматривается лишь в дискретные моменты времени $t = k\Delta t$, кратные Δt. Изменение положения происходит таким образом, что, находясь в точке x, частица независимо от предшествующего поведения переходит с равными вероятностями в одну из соседних точек $x+\Delta x$ или $x-\Delta x$, причем смещение Δx одно и то же для всех точек x. В пределе, когда определенным образом $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$, получается *непрерывное* случайное блуждание, характерное для физического процесса броуновского движения. Обозначим $\xi(t)$ положение броуновской частицы в момент времени t. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ частица находится в точке $x = 0$. При дискретном блуждании за время t она совершает $n = t(\Delta t)^{-1}$ шагов. Обозначим ξ_{kn} смещение частицы на k-м шаге ($\xi_{kn} = \pm\Delta x$ с равными вероятностями); $\xi(t) = \sum_n^{k=1} \xi_{kn}$ есть сумма независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_{kn}, $k = 1, \ldots, n$.

Если считать, что $\xi(0) = 0$, то $\xi(s+t) = [\xi(s) - \xi(0)] + [\xi(t+s) - \xi(s)]$, $s, t \geq 0$.

Очевидно, в описанной модели случайного блуждания величины $\xi(s) - \xi(0)$ и $\xi(t+s) - \xi(s)$ являются *независимыми*, причем распределение вероятностей приращения $\xi(s) - \xi(0)$ и $\xi(t+s) - \xi(s)$ точно такое же, как и приращения $\xi(s) - \xi(0)$. Поэтому для дисперсии $D\xi(t+s) - \xi(s)$ имеет место равенство

$$D\xi(t+s) = D[\xi(s) - \xi(0)] + D[\xi(t+s) - \xi(s)] = D\xi(s) + D\xi(t).$$

Видно, что дисперсия $D\xi(t)$ (как функция от t) с ростом t меняется линейно и, таким образом,

$$D\xi(t) = \sigma^2 t, \quad 0 \leq t \leq \infty,$$

где σ^2 называют *коэффициентом диффузии*. С другой стороны, легко подсчитать, что дисперсия смещения за время t, иначе за n шагов $\left(n = \frac{t}{\triangle t}\right)$, есть $D\xi(t) = (\triangle x)^2 \frac{t}{\triangle t}$. Будем считать постоянным отношение $(\triangle x)^2/(\triangle t) = \sigma^2$. Согласно центральной предельной теореме, получаем, что в пределе при $\triangle t \to 0$, $\triangle x = \sigma\sqrt{\triangle t} \to 0$:

$$P\left\{x' \leq \frac{\xi(t)}{\sigma\sqrt{\triangle t}} \leq x''\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x'}^{x''} e^{-x^2/2} dx. \tag{1.1}$$

Аналогичная формула справедлива и для приращений на любом интервале:

$$P\left\{x' \leq \frac{\xi(t+s) - \xi(s)}{\sigma\sqrt{\triangle t}} \leq x''\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x'}^{x''} e^{-x^2/2} dx. \tag{1.2}$$

В соответствии с этим, говоря в дальнейшем о (непрерывном) *процессе броуновского движения*, будем иметь в виду семейство случайных величин $\xi(t)$, $t \geq 0$, таких, что $\xi(0) = 0$ и приращения $\xi(t) - \xi(s)$, $t \geq s \geq 0$, имеют нормальные распределения вероятностей с нулевым средним и соответствующей дисперсией $\sigma^2(t-s)$, причем для любых непересекающихся интервалов (s_k, t_k) приращения $\triangle_k \xi = \xi(t_k) - \xi(s_k)$, $k = 1, \ldots, n$, являются независимыми величинами [2,8]. Вообще, случайным процессом $\xi(t)$, $t \in T$, является функция от действительного параметра t (времени), пробегающего то или иное множество T, значениями которой являются соответствующие случайные величины $\xi(t)$.

Наблюдая случайную величину ξ, мы имеем дело с тем или иным значением $\xi = x$. В том же смысле можно сказать, что, наблюдая случайный процесс $\xi(t) = x(t)$, $t \in T$, мы имеем дело с той или иной траекторией некоторой функцией переменного $t \in T$. Как отмечалось ранее, говоря о случайных величинах $\xi(t)$, $t \in T$, предполагают существование вероятностей любых событий A, порождаемых событиями вида

$$\left\{x'_1 \leq \xi(t_1) \leq x''_1, \ldots, x'_n \leq \xi(t_n) \leq x''_n\right\},$$

каждое из которых означает, что траектория $\xi(t)$, $t \in T$, в соответствующие моменты времени $t_1, \ldots, t_n \in T$ заключена в указанных пределах. Говоря о *случайном процессе* $\xi(t)$, иногда предполагают, что существуют вероятности не только событий A, указанного типа, но и более сложных событий, связанных с поведением *траектории* $\xi(t)$, $t \in T$.

Рассматривая в дальнейшем случайный процесс броуновского движения, будем предполагать, что его траектория $\xi(t)$, $t \geq 0$, является *непрерывной* и определены случайные величины вида $\xi = \max\limits_{0 \leq s \leq t} \xi(s)$. При этом предположении оказывается, что случайной величиной будет и момент τ достижения траекторией $\xi(s)$, $0 \leq s \leq t$, указанного максимума, а также момент τ_α достижения траекторией $\xi(t)$, $t \geq 0$, того или иного (фиксированного) значения α. Найдем распределения вероятностей этих величин.

В дискретной модели при любом фиксированном значении $\xi(s) = \alpha$ движение броуновской частицы после момента s (в который она находится в точке α) не зависит от ее поведения до этого момента. Предполагая, что это свойство имеет место и для *непрерывного* процесса броуновского движения, найдем распределение вероятностей случайной величины τ_α — момента первого достижения броуновской частицей точки $x = \alpha$. Ясно, что при движении в положительном направлении броуновская частица подчиняется тем же закономерностям, что и при движении в отрицательном направлении (в дискретной модели на каждом шаге частица движется вправо или влево с одинаковой вероятностью). Поэтому величины x_α и $x_{-\alpha}$ (моменты достижения точек α и $-\alpha$) при выходе из начальной точки $x = 0$ имеют одинаковое распределение вероятностей. Будем считать, что $\alpha > 0$, и найдем вероятность $P\{\tau_\alpha \leq t\}$.

В момент t частица может оказаться правее точки α лишь при условии, что в некоторый момент $\tau_\alpha \leq t$ она находилась в этой точке (поскольку при непрерывном движении броуновская частица не может "перескочить" через α. Формально это значит, что событие $\{\xi(t) \geq \alpha\}$ содержится в событии $\{\tau_\alpha \leq t\}$, и, следовательно,

$$P\left\{\xi(t) \geq \alpha | \tau_\alpha \leq t\right\} = \frac{P\left\{\xi(t) \geq \alpha\right\}}{P\left\{\tau_\alpha \leq t\right\}}$$

Очевидно, условная вероятность $P\left\{\xi(t) \geq \alpha | \tau_\alpha \leq t\right\}$ при условии, что в момент τ_α, $\tau_\alpha \leq t$, частица находится в α, совпадает с вероятностью того, что после выхода из точки α она к моменту t окажется правее α. Но, из приведенных выше соображений симметрии вытекает, что вероятность оказаться к моменту t правее исходной точки α такая же, как и вероятность оказаться к этому моменту левее α, и равна $1/2$. Таким образом,

$$P\left\{\xi(t) \geq \alpha | \tau_\alpha \leq t\right\} = 0,5$$

и, считая для простоты коэффициент диффузии σ^2 равным 1, из полученного выше равенства и общей формулы (1.1) получаем

$$F_{\tau_\alpha} = P\left\{\tau_\alpha \leq t\right\} = 2P\left\{\xi(t) \geq \alpha\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{\alpha t^{-1/2}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx, \;\; t > 0.$$

Дифференцируя функцию распределения по t, найдем соответствующую плотность вероятности:

$$p_{\tau_\alpha}(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{\alpha^2}{2t}}, \;\; 0 \leq t < \infty \tag{1.3}$$

($p_{\tau_\alpha}(t) = 0$ при $t < 0$, поскольку $\tau_\alpha \geq 0$).

Интересно отметить, что для любой точки α величина τ_α конечна с вероятностью 1:

$$P\left\{\tau_\alpha < \infty\right\} = \lim_{t \to \infty} P\left\{\tau_\alpha \leq t\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1,$$

т.е. броуновская частица рано или поздно попадает в любую точку α (в некоторый случайный момент времени $\tau_\alpha < \infty$).

Зная распределение величины τ_x момента достижения точки x, сразу можно найти и распределение вероятностей величины *максимального смещения* броуновской частицы за фиксированное время t. Очевидно,

$$P\left\{\max_{0\le s\le t}\xi(s)\ge x\right\}=P\left\{\tau_x\le t\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{at^{-1/2}}^{\infty}e^{-u^2/2}du=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int\limits_{x}^{\infty}e^{-u^2/2t}du,$$

и величина $\xi=\max\limits_{0\le s\le t}\xi(s)$ имеет плотность вероятности

$$p_\xi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}e^{-x^2/2t},\ \ 0\le x<\infty \tag{1.4}$$

($p_\xi(x)=0$ при $x<0$, поскольку $\xi\ge\xi(0)=0$). Это — так называемый *удвоенный нормальный закон* распределения вероятностей ($P\{\xi\ge x\}=2P\{\xi(t)\ge x\}$).

Очевидно, аналогичное распределение вероятностей имеет величина $\max\limits_{0\le s\le t}\xi(s)$, а именно, ее плотность вероятности

$$p(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}e^{-x^2/2t},\ \ -\infty\le x<0\ \ (p(x)=0\ \text{ при }\ x>0). \tag{1.4}$$

Интересно отметить, что

$$P\left\{\max_{0\le s\le t}\xi(s)>0\right\}=P\left\{\max_{0\le s\le t}\xi(s)<0\right\}=1,$$

и, значит, выходя из точки $x=0$, броуновская частица за любое сколь угодно малое время t побывает как правее исходной точки $x=0$, так и левее этой точки. Предполагаемая непрерывной, траектория броуновской частицы $\xi(u)$, $0\le u\le t$, достигает своего абсолютного максимума в некоторой точке τ, $\xi(u)$, $0\le\tau\le t$. Найдем распределение случайной величины τ. Предположим, что имеется плотность совместного распределения вероятностей случайных величин τ и $\xi=\xi(\tau)$ ($\xi=\max\limits_{0\le u\le t}\xi(u)$). Покажем, что тогда эта плотность имеет вид

$$p_{\tau,\xi}(s,x)=\frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}}\frac{t}{s}e^{-\frac{x^2}{2s}},\ \ 0<s<t,\ \ 0\le x<\infty. \tag{1.5}$$

Для этого рассмотрим сначала совместное распределение вероятностей случайных величин τ_α и ξ, где τ_α, как и раньше, означает момент первого достижения броуновской частицей точки $\alpha>0$.

После попадания в точку α дальнейшее поведение броуновской частицы подчиняется таким же закономерностям, как если бы эта точка была исходной с самого начала. Поэтому величина $\xi=\max\limits_{0\le u\le t}\xi(u)$, совпадающая при условии $\tau_\alpha=s$, $0<s\le t$, с величиной $\max\limits_{0\le u\le t}\xi(u)$, при указанном условии имеет такое же распределение вероятностей, как и величина $\alpha+\max\limits_{0\le u\le t}\xi(u)$, и, согласно установленной выше формуле (1.4), имеет условную плотность распределения:

$$p_\xi(x|s)=\sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}}e^{\frac{(x-\alpha)^2}{2(t-s)}},\ \ \alpha\le x<\infty.$$

Отсюда вытекает, что плотность $p_{\tau_\alpha,\xi}(s,x)$ совместного распределения вероятностей величин τ_α,ξ при $0<s<t$, $\alpha\le x\le\infty$ имеет вид:

$$p_{\tau,\xi}(s,x)=p_{\tau_\alpha}(s)p_\xi(x|s)=\frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}}\frac{\alpha}{s}e^{\frac{\alpha^2}{2s}}e^{-\frac{(x-\alpha^2)}{2(t-s)}}.$$

С другой стороны, при условии $\xi = \max\limits_{0 \le u \le t} \xi(u) = \alpha$ точка максимума τ совпадает с моментом τ_α, и, следовательно, при указанном условии величины τ, τ_α имеют одинаковое распределение вероятностей. Отсюда вытекает, что плотность вероятности величин (τ, ξ) в точке $\tau = s$, $\xi = \alpha$ совпадает с плотностью вероятности величин в той же точке (s, α), поскольку $p_{\tau,\xi}(s,\alpha) = p_\tau(s|\alpha)p_\xi(\alpha) = p_{\tau_\alpha}(s|\alpha)p_\xi(\alpha) = p_{\tau,\xi}(s,\alpha)$, где $p_\tau(s|x)$ и $p_{\tau_\alpha}(s|x)$ означают условные плотности распределений вероятностей величин τ и τ_α при условии $\xi = x$. Из найденной выше формулы для плотности $p_{\tau,\xi}(x,s)$ при $x = \alpha$ получаем

$$p_{\tau,\xi}(s,\alpha) = \frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}}\frac{\alpha}{s}e^{-\frac{\alpha^2}{2s}},\ \ 0 < s < t,\ \ 0 < \alpha < \infty,$$

что и дает указанную ранее формулу (1.5). Плотностью же отдельно взятой величины τ — точки максимума броуновской траектории $\xi(s)$ на отрезке времени $0 \le s \le t$ — будет

$$p_\tau(s) = \int\limits_0^\infty p_{\tau,\xi}(s,x)dx = \frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}}\int\limits_0^\infty \frac{x}{s}e^{-x^2/2s}dx = \frac{1}{\pi\sqrt{s(t-s)}},\ \ 0 < s < t. \tag{1.6}$$

Имеем

$$p\{\tau \le s\} = \int\limits_0^s \frac{du}{\pi\sqrt{u(t-u)}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{s}{t}},\ \ 0 \le s \le t.$$

Этот закон распределения вероятностей носит название *закона арксинуса.* Такое же распределение вероятностей имеет, конечно, и точка минимума траектории $\xi(s)$, $0 \le s \le t$. Видно (рис. 5), что наиболее вероятным является такое поведение броуновской частицы, при котором экстремальная точка ее траектории располагается вблизи концов рассматриваемого отрезка $[0,t]$.

2. О цепях Маркова. Практические применения

Рассмотрим семейство целочисленных случайных величин $\xi(t)$, $t \le 0$, зависящих от параметра t — времени. Отметим, что в “системе”, возможные состояния обозначены целыми числами $i = 0,\ \pm1,\ \ldots,$ и $\xi(t)$ интерпретируется как состояние системы в момент времени t. В соответствии с этим можно сказать, что величины $\xi(t)$, $t \le 0$, описывают случайный процесс переходов системы из одного состояния в другое. Будем предполагать, что переход системы из состояния $\xi(s)$ в состояние $\xi(t)$, $t > s$, при фиксированном $\xi(s) = i$ не зависит от $\xi(u)$, $u \le s$, точнее, что условное распределение вероятностей величины $\xi(t)$ при любых $\xi(u_1) = i_1, \ldots, \xi(u_n) = i_n$, $\xi(s) = i$ не зависит от $\xi(u_1), \ldots, \xi(u_n)$, $u_1 < \ldots < u_n < s$:

$$p\left\{\xi(t) = j|\xi(u_1) = i_1,\ \ldots,\ \xi(u_n) = i_n,\ \ \xi(s) = i\right\} = P\left\{\xi(t) = j|\xi(s) = i\right\} = p_{ij}(t-s), \tag{2.1}$$

$$t > s, i, j = 0,\ \pm1,\ \ldots,$$

— здесь предполагается также *однородность* рассматриваемого процесса, означающая, что условная вероятность $P\left\{\xi(t) = j|\xi(s) = i\right\}$ не зависит от расположения моментов s, t на временной оси, а зависит лишь от промежутка $t - s$. Случайный процесс $\xi(t)$, $t \ge 0$, такого типа называют *однородным марковским процессом со счетным числом состояний.* Такое *свойство марковости* выражено первым равенством в формуле (2.1); указанная в этой формуле условная вероятность $p_{ij}(t-s)$ будет *переходной вероятностью* (вероятностью перехода из состояния $\xi(s) = i$ в состояние $\xi(t) = j$). Рассмотрим несколько примеров.

Например, при игре фишка играющего должна пройти определенное число пунктов 1, 2, ... Переход из одного пункта в другой каждый раз определяется исходом бросания игральной кости. Именно, если на данном шаге n фишка находится в пункте $\xi(n) = i$, то правилами игры устанавливается пункт $\xi(n+1)$ ее расположения на следующем шаге в зависимости от числа выпавших на игральной кости очков. Из любого пункта i фишка с определенной вероятностью p_{ij} переходит на следующем шаге в соответствующий пункт j. Здесь вместо действительного времени фигурирует число n сделанных переходов; условно можно считать, что каждый переход совершается за единицу времени.

В следующем примере рассмотрим случайное блуждание частицы по целочисленным точкам действительной прямой, при котором частица на каждом шаге с вероятностью p смещается на единицу вправо и с вероятностью $q = 1 - p$ — на единицу влево. Пусть $\xi(n)$ — положение частицы через n шагов. Если через m шагов частица находится в какой-то точке i, $\xi(m) = i$ то ее дальнейшее поведение не зависит от обстоятельств, предшествовавших попаданию в точку i, и за последующие n шагов с вероятностями $p_{ij}(n)$ частица переходит в соответствующие состояния $\xi(m+n) = j$. Ясно, что при $|i-j| > n$ переход из i в j невозможен, и в этом случае $p_{ij}(n) = 0$. Ясно также, что за n шагов частица может перейти лишь в те состояния j, для которых разность $|i-j|$ имеет ту же четность, что и n, т.е. число $m = (n + |i-j|)/2$ должно быть целым. При $j \geq i$ попасть в состояние j можно тогда и только тогда, когда из всех n шагов ровно $m' = (n + (j-i))/2$ шагов совершается в положительном направлении. Вероятность этого есть

$$p_{ij}(n) = C_n^m p^m q^{n-m}, \ \ j \geq i.$$

Аналогично выражается вероятность перехода из i в j при $j \geq i$:

$$p_{ij}(n) = C_n^m p^{n-m} q^m, \ \ j \geq i.$$

Рассмотрим пример радиоактивного распада. Предположим, что каждый атом Ra (радия) независимо от предшествующих обстоятельств с вероятностью $p(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ($\lambda = \dfrac{\log 2}{T}$ — *постоянная полураспада*) превращается за время t в атом Rn (радона). Тогда общее число $v(t)$ распадающихся за время t атомов Ra, равное числу излученных за это время α-частиц, как мы условились считать, распределено по закону Пуассона:

$$P\{v(t) = k\} = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}, \ \ k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\alpha = np(t)$, n — исходное число атомов Ra. Число оставшихся атомов Ra будет $\xi(t) = n - v(t)$. Если известно количество радия в некоторый момент $s : \xi(s) = i$, то независимо от характера процесса распада до момента s с вероятностью $\dfrac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$, $\alpha = ip(t-s)$ в промежутке от s до t излучается k α-частиц. Таким образом, вероятность перехода из состояния $\xi(s) = i$ в состояние $\xi(t) = j$, $t > s$ есть

$$p_{ij}(t-s) = \frac{\alpha^{i-j}}{(i-j)!} e^{-\alpha}, \ \ \alpha = ip(t-s), \ \ j \leq i.$$

(при $j > i$ переход из i в j невозможен).

Рассмотрим процесс Пуассона, $\xi(t)$, $t \geq 0$ который является однородным марковским процессом с переходными вероятностями:

$$p_{ij}(t-s) = \frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t-s)}, \ \ j \geq i.$$

(переход в состояние $\xi(t) = j$ возможен лишь из состояния $i \leq j$).

Остановимся на общем однородном марковском процессе $\xi(t)$, $t \leq 0$, с переходными вероятностями $p_{ij}(t)$. Для любых величин $\xi(t_1), \dots, \xi(t_m)$, $s < t_1 < \dots < t_m$ и $\xi(u_1), \dots, \xi(u_n)$, $s < u_1 < \dots < u_n < s$, имеем:

$$P\{\xi(t_m) = j_m | \xi(u_1) = i_1, \dots, \xi(t_{m-1}) = j_{m-1}\} = P\{\xi(t_m) = j_m | \xi(t_{m-1}) = j_{m-1}\} = p_{j_m j_m}(t_m - t_{m-1}),$$

$$P\{\xi(t_{m-1})=j_{m-1}|\xi(t_m)=j_m|\xi(u_1)=i_1,\ldots,\xi(t_{m-2})=j_{m-2}\}=$$
$$=P\{\xi(t_{m-1})=j_{m-1},\xi(t_m)=j_m|\xi(t_{m-2})=j_{m-2}\}=p_{j_{m-2}j_{m-1}}(t_{m-2}-t_{m-1})p_{j_{m-1}j_m}(t_m-t_{m-1}),$$

....

$$P\{\xi(t_1)=j_1,\ldots,\xi(t_m)=j_m|\xi(u_1)=i_1,\ldots,\xi(s)=i\}=$$
$$=P\{\xi(t_1)=j_1,\ldots,\xi(t_m)=j_m|\xi(s)=i\}=p_{ij_1}(t_1-s)p_{j_1j_2}(t_2-t_1)\ldots p_{j_{m-1}j_m}(t_m-t_{m-1}) \qquad (2.2)$$

Здесь условные распределения величин $\xi(t_1),\ldots,\xi(t_m)$ при фиксированном $\xi(s)=i$ не зависят от величин $\xi(u)$, $u\le s$ и в этом смысле можно сказать, что поведение случайного марковского процесса после момента s при известном состоянии $\xi(s)$ не зависит от его поведения в прошлом (до момента s). Формула (2.2) задает совместные распределения вероятностей любых величин $\xi(t_1),\ldots,\xi(t_m)$, $s<t_1<\ldots<t_m$, при каждом фиксированном значении $\xi(s)=i$; в соответствии с этим, при заданном распределении вероятностей $p_i(s)=\{\xi(s)=i\}$, $i=0,\pm1,\ldots$, совместное распределение вероятностей величин $\xi(s)$, $\xi(t_1),\ldots,\xi(t_m)$, $s<t_1<\ldots<t_m$ определяется как

$$P\{\xi(s)=i,\,\xi(t_1)=j_1,\ldots,\xi(t_m)=j_m\}=p_i(s)p_{ij_1}(t_1-s)\ldots p_{j_{m-1}j_m}(t_m-t_{m-1}), \qquad (2.3)$$

что при $s=0$ и заданном начальном распределении $p_i^0=p_i(0):p_i^0=P\{\xi(0)=i\}$, $i=0,\pm1,\ldots$, определяет совместные распределения вероятностей всех величин $\xi(t)$, $t\ge0$. Переходные вероятности однородного марковского процесса $\xi(t)$, $t\ge0$, удовлетворяют следующему равенству:

$$p_{ij}(t+s)=\sum_k p_{ik}(s)\,p_{kj}(t),\quad i,j=0,\pm1,\ldots \qquad (2.4)$$

Действительно, согласно общей формуле (2.2),

$$p_{ik}(s)\,p_{kj}(t)=P\{\xi(s)=k,\,\xi(s+t)=j\,|\,\xi(0)=i\},$$

и суммирование (по всем $k=0,\pm1,\ldots$) в правой части равенства (2.4) дает условную вероятность $p_{ij}(s+t)=P\{\xi(s+t)=j\,|\,\xi(0)=i\}$.

Пусть заданы функции $p_{ij}(t),i,j=0,\pm1,\ldots,t\ge0$:

$$p_{ij}(t)\ge0,\quad \sum_j p_{ij}(t)=1,$$

которые удовлетворяют уравнениям (2.4). Если для целочисленных величин $\xi(t)$, $t\ge0$ определить совместные распределения с помощью функций $p_{ij}(t)$ по формулам (2.2), (2.3), то будем иметь дело с однородным марковским процессом.

В случае, когда параметр t меняется дискретно: $t=0,1,\ldots$, марковский процесс (со счетным числом состояний) называют *цепью Маркова* — имеется в виду цепочка переходов $\xi(0)\to\xi(1)$ из одного состояния в другое. Обозначим p_{ij} — вероятности перехода за один шаг: $p_{ij}=p_{ij}(1)$, и пусть $p_j(n)=P\{\xi(n)=j\}$ — вероятность находиться в состоянии j через n шагов. Из общей формулы (2.3) получаем следующие рекуррентные соотношения для вероятностей $p_j(n)$, $j=0,1,\ldots$:

$$p_{ij}(0)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad j=i,\\ 0 & \text{при}\quad j\ne i,\end{cases}\qquad p_{ij}(n)=\sum_k p_k(n-1)\,p_{kj},\quad n=1,2,\ldots$$

Заключение

В природе и технике в каждом явлении присутствует случайность. В статье мы напомнили фундаментальные понятия вероятности применительно к случайным процессам. В статье показано, что, на основе понимания положений теории вероятностей строится инструментарий решения задач о случайных процессах. Теория вероятностей позволяет находить степень объективной возможности наступления — вероятность — "сложных" событий через "простые". (Математическая статистика по наблюдаемым значениям оценивает эту степень либо осуществляет проверку предположений (гипотез) относительно этой степени с использованием теории случайных процессов.)

Литература

[1] Сидняев Н.И. Логико-статистический анализ проблем планирования эксперимента. - М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022. - 352 с.

[2] Серовайский С.Я. История математики: Эволюция математических идей: Вычислительная математика. Теория вероятностей. Информатика. Математическая логика. - М.: Ленанд, 2019. - 240 с. URL: Schwartz R.E. 2018, arXiv: 1001.3702v5

[3] Горобец Б.С. Теория вероятностей, математическая статистика и элементы случайных процессов. Упрощенный курс. - М.: Едиториал УРСС, 2020. - 232 с.

[4] Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р. Теория вероятностей и математическая статистика для инженерно-технических направлений: Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 399 с.

[5] Ивановский Р.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами. - СПб.: BHV, 2012. - 528 с.

[6] Пригарин С.М. Статистическое моделирование многомерных гауссовских распределений. Учебное пособие для вузов. - М.: Юрайт, 2019. - 84 с.

[7] Мятлев В.Д. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели: Учебное пособие. - М.: Академия, 2018. - 240 с.

[8] Рыбников К.А. История математики: Подисциплинарное изложение: Геометрия. Алгебра и теория чисел. Математический анализ. Теория вероятностей и математическая статистика. Дискретная математика. - М.: Ленанд, 2018. - 536 с.

Сидняев Николай Иванович,
зав. кафедрой "Высшая математика"
МГТУ им. Н.Э. Баумана,
доктор технических наук, профессор.

E-mail: sidn_ni@mail.ru

Баттулга Энхжаргал, аспирантка кафедры
"Высшая математика" МГТУ им. Н.Э. Баумана.

E-mail: enhee_jrgl@tahoo.com

Из истории науки

Господь всегда дает больше, чем мы предполагаем. Христиан Гюйгенс[1] и Готфрид Лейбниц

В. Н. Оникийчук, И. В. Оникийчук

Рассказано об исследованиях Гюйгенса, приведших к поправкам ньютоновских законов движения в случае вращения твердого тела, а также о драматических научных и человеческих взаимоотношениях Ньютона и Лейбница.

Приезд Гюйгенса в Лондон официально был обставлен как чисто коммерческий вояж. Гюйгенс встречался с представителями морских транспортных компаний, а потом неожиданно для всех был принят на высшем уровне в королевском дворце. "Ничего личного — только бизнес", — говорили о таких визитах. Христиан Гюйгенс предложил приобрести для британского королевского флота важный навигационный прибор — точные маятниковые часы.

Лондон в XVII веке

Сначала его не поняли. Маятниковые часы ведь уже стояли на каждом океанском корабле. Куда же без них? Но Гюйгенс объяснил, что его изобретение — это не «просто часы», а новый высокоточный навигационный прибор. Он знал, о чем говорил.

Маятниковые часы, висевшие тогда в каютах капитанов и лоцманов, во время океанских походов накапливали существенные ошибки, что в конечном итоге могло стоить жизни на море. Или, как минимум, — несвоевременного прибытия в порт назначения. Значит — недопустимые потери времени и денег.

Христиан Гюйгенс нашел причину расхождения между расчетной и фактически наблюдаемой частотой колебаний корабельных маятниковых часов. Традиционно период колебаний маятников рассчитывался из предположения, что весь маятник можно заменить массивной точкой, подвешенной на невесомой спице такой же длины.

То, что любое тело можно было заменять массивной точкой, было известно и ранее, но Ньютон сформулировал закон сложения сил по правилу параллелограмма. **Ньютон И**: *"При силах, совокупных тело описывает диагональ параллелограмма в то же самое время, как его стороны — при раздельных"* [1, с.42].

"Правило параллелограмма сил" приводит к еще одному фундаментальному выводу. Суть его в том, что в твердом теле вся совокупность внутренних сил равна нулю. Другими словами, фактор твердости тела никак не влияет на динамику движения тела, т.е. тело движется в пространстве как

[1] Христиан Гюйгенс (1629—1695) — голландский механик, физик, математик, астроном и изобретатель. Он был первым иностранным членом Лондонского королевского общества (1663), членом Французской академии наук с момента её основания (1666) и её первым президентом (1666–1681). Гюйгенс считается одним из основоположников теоретической механики и теории вероятностей. Он внёс значительный вклад в оптику, молекулярную физику, астрономию, геометрию, часовое дело. Учёный открыл кольца Сатурна и Титан (спутник Сатурна). Он изобрёл первую практически применимую модель часов с маятником и положил начало волновой оптике.

массивная точка, помещенная в центр масс тела. **Ньютон И**: *"Центр тяжести системы двух или нескольких тел от взаимодействия тел друг на друга не изменяет ни своего состояния покоя, ни движения; поэтому центр тяжести системы всех действующих друг на друга тел (при отсутствии внешних действий, или препятствий) или находится в покое, или движется равномерно и прямолинейно"* [1, с.47].

Христиан Гюйгенс (1629-1695)

Но что-то пошло не так. Выяснилось, что колебания маятника корабельных часов заметно отличались от ньютоновской "точечной модели". Гюйгенс научился рассчитывать точку подвеса маятника так, чтобы расхождения в периоде колебаний между теоретическими данными и фактически наблюдаемыми были минимальными. Это было его "ноу-хау". Новый метод Гюйгенса позволял на порядок улучшить точность показания корабельных часов в длительных океанских походах.

Однако Гюйгенсу было совсем не просто объяснить суть своего изобретения. Ведь оно строилось на новом открытии, причину которого «на пальцах» он не мог объяснить. Суть его проста: протяженное тело нельзя заменять точечной массой. Именно это утверждал Христиан Гюйгенс. Спустя сто лет Жан Лагранж в своей «Аналитической механике» по этому поводу напишет:

Лагранж Ж. : *"Гюйгенс увидел, что этот центр не может быть определен строго математически. . . "* [2, т.1, стр. 305].

Ньютоновская теория стала плотиной на пути изобретения Гюйгенса. В Лондонском Королевском обществе Христиан Гюйгенс вместе с Робертом Гуком выступили в открытых дебатах против Исаака Ньютона. Острые удары наносились как по "смехотворному" закону тяготения Ньютона, так и по главным принципам движения. Ньютон защищался, как мог.

Но на этом неприятности у молодой динамики не закончились. Британские академики поддержали Христиана Гюйгенса. Его вскоре избрали членом Лондонского королевского общества. Всё только начиналось.

Причина всегда глубже, чем то, что удалось откопать

Сторонники Ньютона не посмели открыто опровергнуть выводы Гюйгенса. Часы уже становились не только модой аристократических салонов, но и важнейшим прибором в морской навигации. Точность работы корабельных часов была под пристальным вниманием изготовителей этих приборов. Как писал позже Лагранж, математики «закрывали глаза» на возникшую проблему, т.к. причина этой аномалии у маятниковых часов была совершенно им не понятной.

Дело приняло серьезный оборот. Это было первое крупное поражение молодой механики, которая предупреждала геометров, что безоглядное и необдуманное применение методов и идей геометрии и статики — это крайне опасное явление. Наиболее выдающиеся геометры того времени начали смутно догадываться, что пришла беда.

Начались кропотливые расследования сложившейся ситуации. Вслед за Гюйгенсом исследовать процессы колебаний протяженного твердого тела взялись братья Иоганн и Даниил Бернулли, затем Мерсенн. Позже в эту задачу были посвящены Леонард Эйлер, Даламбер и Жан Лагранж. Между Эйлером и Даламбером даже была на эту тему переписка. Но эта история требует отдельного рассмотрения.

Конечно, странности изменения частоты колебаний маятника — это не та проблема, чтобы по ночам рыдать в подушку. И всё же, "на всякий случай", эту проблему расхождений движения "точечного" и "телесного" маятников классикам удалось "вывести за скобки" ньютоновской теории. Ограничились тем, что движение "физического" маятника было отнесено к другому классу движений — "вращательному".

Ньютоновская механика была вынуждена принять новые элементы. Ввели новую аксиому о том, что мерой инерции для класса "вращательных движений" является **момент инерции** J, а для "поступательных" движений мерой инерции приняли массу m.

Посмотрите на уравнения движения математического (точечного) маятника и физического маятника в плоскопараллельном поле силы тяжести. Различие между ними лишь в одном символе m и J.

Математический маятник	Физический маятник
$\ddot{\vartheta} + \omega_M^2 \sin\vartheta = 0 \quad (1)$	$J\ddot{\vartheta} + mgR\sin\vartheta = 0 \quad (2)$

В уравнении (2) символом R обозначить расстояние от точки подвеса до центра масс физического маятника. Из уравнения (1) следует, что частота колебаний точечного маятника определяется числом $\omega_M^2 = \frac{g}{l}$. Из уравнения для физического маятника (2) видно, что частота маятника равна $\omega^2 = \dfrac{mgR}{J}$. В учебниках пишут, что мерой инерции простого маятника стала **масса** m, а для физического маятника — **момент инерции** J. Насколько различны эти частоты?

Рисунок академика РАН Фоменко А.Т.

Момент инерции J легко разложить, на две части:

$$J = mR^2 + J_c \tag{3}$$

где $R = |\overrightarrow{OC}|$, $J_c = \int\limits_V m(x_*, y_*)dV$, $\{x_*, y_*\}$ — координаты произвольной частицы маятника относительно "вмороженной" системы координат CX_*Y_*. Подставим выражение (3) в (2); уравнение принимает другой вид:

$$\ddot{\vartheta} + \omega^2 \sin\vartheta = 0$$

где ω — частота колебаний физического маятника. Заметим, что она всегда меньше частоты точечного маятника ω_M:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{mR^2 + J_c}} = \sqrt{\frac{mgR}{mR(R+\varepsilon)}} = \sqrt{\frac{g}{(R+\varepsilon)}} < \sqrt{\frac{g}{R}} = \omega_M, \text{ где } \varepsilon = \frac{J_c}{mgR}.$$

Для сравнения: частота $\omega_M = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$ колебаний "точечного" (математического) маятника такой же длины R и массы m чуть больше частоты телесного маятника. Действительно:

$$k_1^2 = \frac{mgR}{mgR^2 + J_c} = \frac{g}{R\left(1 + \frac{J_2}{mR^2}\right)} \approx \frac{g}{R}\left(1 - \frac{J_2}{mR^2}\right) < \frac{g}{R}.$$

Если полагать, что угол ϑ мал, т.е. $\sin\vartheta \approx \vartheta$, то в этом случае уравнение колебаний физического маятника выглядит так:

$$\ddot{\vartheta} + \omega_M^2\vartheta + f_\omega\vartheta = 0,$$

где $f_\omega = -\frac{J_c g}{R^3}$. Новая добавка f_ω фактически ослабляет действие силы тяжести.

Обычно говорят, что поправка f_ω "мала". Что толку от того, что поправка "мала", если она ставит под сомнение постулат Ньютона? Получается, что нельзя любое протяженное тело заменить массивной точкой, помещенной в центр масс тела.

Появление момента инерции в уравнении (3) однозначно говорит о том, что **форма тела влияет на траекторию** его движения. Это нонсенс?! И совсем не похоже на то, что утверждал Ньютон.

Процесс понимания предполагает, что принять некоторое утверждение — это значит принять и все логические следствия этого утверждения. Понимать смысл — значит различать ситуации, когда утверждение истинно, а когда — ложно. Согласившись с одними утверждениями, мы вынуждены принять и все следствия, которые из них вытекают. Конечно, если эти следствия правильные. "Правильность" выводов проверяется отсутствием абсурда и парадоксов. Тотальный оптимизм здесь опасен.

Замеченный парадокс Христиана Гюйгенса не ушел от внимания европейских ученых. В начале XVIII в. на этот эффект расхождения с ньютоновской механикой обратили внимание Мерсенн и Бернулли [5]. Леонард Эйлер узнал об этом эффекте маятника от своего домашнего учителя Бернулли, когда был студентом. Это была одна из причин, почему Л. Эйлер, будучи уже в Санкт-Петербурге, поначалу не принял безоговорочно теорию движения тел И. Ньютона. Смущало загадочное движение детской игрушки — волчка. Движение волчка не соответствовало "точечной модели" И. Ньютона.

Абсурдным считается утверждение, содержащее утверждение и отрицание одновременно. Из абсурдного вывода следует что угодно. Тот, кто допускает противоречие, вводит в свои рассуждения ложное высказывание. Противоречие — это еще не смерть теории, но оно подобно смерти.

Именно этот абсурд и был замечен учеными в XVIII в.. С одной стороны, касалось, что постулаты И. Ньютона абсолютно понятны, однако, волчки и физические маятники подсказывали, что в ньютоновской теории "что-то не учтено".

Если "просто бороться" за идею, не вникая в тонкости проблемы, то ты можешь быстро зайти в тупик, который часто приходит в форме *двоемыслия.* Двоемыслие означает способность одновременно держаться двух противоречащих друг другу убеждений. **Парадокс** — это два противоположных утверждения, для каждого из которых существуют убедительные аргументы. Устранить парадокс — значит перестроить теорию так, чтобы парадоксальное утверждение оказалось в ней недопустимым.

Долгие размышления Л. Эйлера над этим парадоксом привели его к выводу, что слабым местом в ньютоновской концепции является утверждение о «нулевой сумме внутренних сил твердого тела» [5]. Проблема было в том, что утверждение о "нулевой сумме внутренних сил твердого тела" казалось всем "абсолютно очевидным".

В средине XVIII в. Л.Эйлер представил научному сообществу новое предположение. Суть его была в том, что в процессе сложного движения твердого тела могут возникать дополнительные силы, которые не являются внешними по отношению к телу в целом:

Эйлер Л.: "Итак, в тех случаях, когда тела, не проникая одно сквозь другое, лишены возможности сохранить свое состояние, **силы как раз и порождаются непроницаемостью**. Вследствие же сил изменяется состояние тел" [3, стр. 364, 366].

Эйлер Л.: "Следовательно, способность отдельных тел к сохранению своего состояния порождает силы, вследствие которых изменяется состояние других тел" [3, стр.357].

Теорема Л. Эйлера: "Если два тела сходятся таким образом, что ни одно из них не может сохранить своего состояния, а равно ни одно из них не может пройти сквозь другое, то они воздействуют друг на друга и вызывают силы, вследствие которых их состояние меняется" [3, стр. 365]

На основе свой концепции Л. Эйлер вывел новый тип уравнений движения тела — динамические уравнения, позже названные его именем.

Но это уже другая история.

Лейбниц[2]. Будущее всегда скрывается в недрах настоящего

Встреча Гюйгенса с Лейбницем в Париже помогла ему утвердиться в справедливости собственной концепции. Это и стало началом длительного спора с Ньютоном.

Готфрид Лейбниц тоже полагал, что ньютоновская концепция о причинах движения тел является не полной. Он давно заметил, что при одном и том же внешнем воздействии испытуемое тело ведет себя по-разному. Оказалось, что дело не только в величине действия внешней силы, но и то, какую собственную энергию имеет тело. У Ньютона понятие “энергии” явно не фигурировало в законах движениях. Это настораживало.

Вильгельм Готфрид Лейбниц
1646-1716

“Настоящее всегда скрывает в своих недрах будущее” — говорил Лейбниц. Поэтому надо проверять теорию самым тщательным образом, чтобы “не закопать будущее”. Если не можешь нокаутировать противника одним ударом, то надо побеждать “по очкам". Для этого надо подобрать публику, которая бы тебя поддерживала. Конечно, главное — арбитры. Они уже заранее должны знать, кто будет “победителем”.

Место для поединка — зал заседаний Лондонского Королевского Общества. Здесь должен был решиться окончательно спор, кому войти в Историю — Ньютону, или Лейбницу. Кто же является первооткрывателем дифференциального и интегрального исчисления?

Обе стороны уже изрядно измотались в десятилетнем споре. Конечно, Исаак Ньютон был сам виноват в случившемся. Раньше он вел долгую переписку с Лейбницем, в которой делился своими идеями.

Казалось, не мог иначе. Ньютону нужен был единомышленник. Лейбниц был единственным человеком, который его понимал его с полуслова. Лейбниц тоже рассказывал Ньютону в письмах свои взгляды и идеи. Так, в совместной переписке, рождались основы дифференциального и интегрального исчисления.

Ньютон не спешил с публикациями. “Размениваться по мелочам” он не любил. Статьи не писал. Ньютон готовил серьезную монографию по основам дифференциального анализа. Для него это было главным. Его предупреждали, что такая ситуация может закончиться для него плачевно. Он отмахивался. Друзья оказались правы. Теперь надо ставить точку в этой неприятной истории.

Ньютон направил приглашение Лейбницу. Тот обязан был приехать, поскольку являлся иностранным членом Лондонского Королевского Общества. Лейбниц не задержался.

В зале Общества британцев было подавляющее большинство. “Из патриотических чувств” они, естественно, поддерживали Ньютона. Лейбниц был почти одинок. Ньютон всё правильно рассчитал. Заседание Общества длилось долго. По-джентльменски выслушивались доводы обеих сторон. Потом — прения и голосование. Победителем в споре стал Исаак Ньютон.

История же рассудила по-своему. Они оба — Ньютон и Лейбниц — были признаны первооткрывателями дифференциального исчисления. В теории интегрирования мы помним формулу Ньютона-Лейбница.

Когда страсти улеглись, то математики предпочли технологию дифференцирования, предложенную Ньютоном. Она оказалась более удобной. Правда, термины: “дифференциальное исчисление”,

[2]Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) — германский математик, философ, один из величайших изобретателей и один из наиболее универсальных научных гениев за всю историю человечества. Лейбниц — автор множества новаторских инженерных идей, среди которых: многофункциональный механический калькулятор; принципиально новые часы; система каталогизации; паровая машина и паровой насос. Он стал автором закона сохранения энергии, основоположником математического анализа и комбинаторики как науки. Готфрид Лейбниц — предтеча машинного моделирования работы мозга, автор теории исторического происхождения языков и теории эволюции Земли. Он ввёл в обиход знак интеграла и множество понятий современной математики, разработал идею вычислительной машины с двоичным кодом.

"дифференциальное уравнение", "функция", "переменная", "постоянная", "координаты", "абсцисса", "алгоритм" — тоже появились с легкой руки Готфрида Лейбница.

Если любить — так королеву...

Ньютон испил свою горькую чашу до дна. После завершения тяжбы с Лейбницем долго болел. Для Лейбница эта схватка с Ньютоном закончилась тоже драматично и, в конечном счете, даже трагично.

Король Пруссии Фридрих I не хотел портить отношения с королевским двором Англии. Желая продемонстрировать свою лояльность Букингемскому дворцу, он решил демонстративно наказать Лейбница за тяжбу с Ньютоном. Король существенно понизил Готфрида Лейбница в должности. Соответственно, уменьшилось и жалованье.

Что-то надломилось в жизни Лейбница... Он начал сутулиться, постарел, стал жаловаться на ревматизм. Умер на 11 лет раньше Ньютона, хотя был моложе его на несколько лет.

Огненные стрелы короля против Лейбница — первого Президента Берлинской Академии наук — имели еще одну тайную подоплёку.

Рисунок академика РАН Фоменко А.Т.

"Ищите женщину" — говорят в таких случаях французы. А её и не надо было искать. Она жила здесь, рядом. Это была жена Фридриха I — королева София Шарлотта. Она давно состояла в тайной любовной связи с Готфридом Лейбницем. Королева была для Лейбница во всех делах опорой и поддержкой. Люди высокого интеллекта на неё производили магическое впечатление. Она этого и не скрывала никогда.

История эта началась давно. В то время Софии едва исполнилось двенадцать лет. Родители для неё долго подбирали домашнего репетитора. И нашли. Им оказался Готфрид Лейбниц. Потом София подросла и вышла замуж. Муж её стал королём Пруссии. София Шарлотта стала королевой. Но августейший придворный статус нисколько не уменьшил пыл любви к Лейбницу. Королева его так же страстно продолжала любить, как и раньше. Они тайно встречались. Когда тайна их встреч открылась, она не отреклась от своей любви. Разлуки с Готфридом она не вынесла, вскоре заболела и умерла.

Реквием

Будущее — штука скользкая. Оно почти никогда не совпадает с нашим ожиданием. Кто бы мог подумать, что Готфрид Лейбниц, перед которым в почтении склонялись короли Европы, закончит свой жизненный путь в нищете и в полном забвении? Значит, жизнь — это некий ритуальный шум. Не более того.

В ноябре 1716 года Готфрид Лейбниц скончался. Никто из королевского двора не проводил его в последний путь. Берлинская Академия наук никак не отреагировала на смерть своего первого президента. За телегой с гробом, одиноко громыхающей по брусчатке, шел лишь бессменный секретарь покойного.

Литература

[1] Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Изд.3-е. - М: Издательство ЛКИ, 2008. - 704 с.

[2] Лагранж Ж.Л. Аналитическая механика. т. 1,2. - Москва; Ленинград: Гос. Издат. техн.-теорет. дит., 1950, Москва: 2-я тип. АН СССР.

[3] Эйлер Л. Основы динамики точки. Теория движения твердых тел. - ОНТИ-НКТП-СССР, 1938.

[4] Лейбниц Г.В. Новые опыты о человеческом разуме. - Издательство “Азбука”, 2003.

[5] Оникийчук В.Н. Великая тайна Леонарда Эйлера. - С-Пб, Изд. “Профессионал”, 2007. - 520 с.

[6] Веселовский И.Н. Очерки по истории теоретической механики. - М: ”Высшая школа”, 1974.

[7] Хенк И.М. Бос Основополагающие понятия лейбницева исчисления // Математическое образование. - 2009.

[8] Голованов Я. Этюды об ученых. - М: “Молодая Гвардия”, 1976.

Оникийчук Валерий Николаевич,
кандидат физико-математических наук,
ФГАОУ ВО “Государственный Университет Просвещения”
(г. Москва), Кафедра “Высшей алгебры,
математического анализа и геометрии”.

ORCID -0000-0002-5600-0865,
E-mail: valeryonikiychuk@yandex.ru

Оникийчук Игорь Валерьевич,
нженер-математик ПАО “Аэрофлот”.

ORCID -0000-0002-2255-8860,
E-mail: ionikv@inbox.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2025 год (1 экз., включая стоимость пересылки): 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2025 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.
Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки): 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!
Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >