ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

год двадцать восьмой

№ 4 (112)
октябрь - декабрь 2024

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 4 (112), 2024 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2024 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 17.01.2025 г.
Стиль верстки разработан С.А. Кулешовым.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

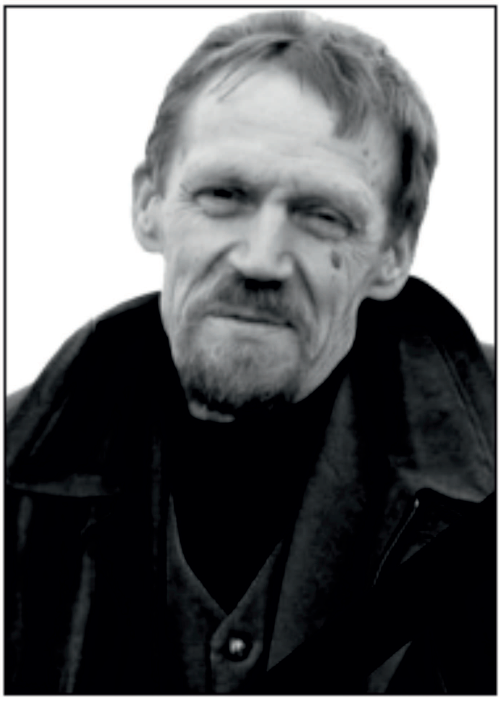
№ 4 (112), октябрь – декабрь 2024 г.

Содержание

Ушел из жизни Геннадий Анатольевич Клековкин

От редакции

6 сентября 2024 г. на 76-м году ушел из жизни известный ученый, методист, кандидат физико-математических наук, активный автор нашего журнала Геннадий Анатольевич Клековкин (родился 20 августа 1949 г. в деревне Юферевская Кумёнского района Кировской области). Представляем некролог от редакций журналов “Математика в школе”, “Математика для школьников”, коллектива Самарского филиала МПГУ (с разрешения указанных редакций), а также список публикаций Г.А. Клековкина в нашем журнале.



Геннадий Анатольевич Клековкин

На протяжении десятков лет Геннадий Анатольевич активно занимался вопросами развития математического образования в Самарском государственном социально-педагогическом университете, Самарском областном институте повышения квалификации и переподготовки работников образования (СИПКРО), Самарском филиале Московского городского педагогического университета.

Геннадий Анатольевич в 1970 году окончил Кировский государственный педагогический институт им. В.И. Ленина по специальности “Математика”. За свою богатую трудовую педагогическую деятельность он руководил работой кафедры геометрии Кировского пединститута, кафедры геометрии и методики преподавания математики Куйбышевского (Самарского) государственного педагогического института (университета), лабораторией и кафедрой математического образования СИПКРО, кафедрой высшей математики и информатики Самарского филиала Московского городского педагогического университета. Он являлся членом редакционных коллегий журналов “Математика в школе” и “Математика для школьников”, “Математический вестник Вятского государственного университета”.

Деятельность Г.А. Клековкина широка и многогранна, он — автор многочисленных публикаций, среди которых имеются десятки книг по математике для школьников, студентов педвузов, учителей математики; под его руководством успешно защищены пять диссертаций на соискание ученой степени кандидата педагогических наук.

Теплые человеческие качества Геннадия Анатольевича проявились в личных отношениях с коллегами: он всегда был готов дать дружеский совет и оказать консультации по различным профессиональным вопросам, был открыт для диалога и дискуссий.

Выражаем глубокое соболезнование родным и близким Геннадия Анатольевича, его ученикам и воспитанникам.

Светлая память о Геннадии Анатольевиче Клековкине, замечательном человеке, наставнике, талантливом преподавателе, оставившем после себя плоды своих добрых дел, навсегда сохранится в наших благодарных сердцах.

Список публикаций Г.А. Клековкина в журнале “Математическое образование”

1. Пространственные спирали, № 2(90), 2019 г.
2. Пространственные спирали (окончание), № 3(91), 2019 г.
4. Моделирование контуров листьев растений в среде GeoGebra, № 2(98), 2021 г.
5. Моделирование контуров листьев растений в среде GeoGebra (Окончание), № 3(99), 2021 г.

Современная имитация повышения качества образования и опыт системного решения проблемы в 1930-х годах

И. П. Костенко

Проблема повышения качества общего математического образования становится всё более и более актуальной и болезненной. В статье вскрывается методология бюрократической имитации решения этой проблемы. В качестве эффективной альтернативы приводится краткий обзор системных действий власти в 1931–1937 гг.

Сегодня в государственных структурах (Гос. Дума и др.) актуализирована проблема повышения качества образования (употребляется термин «совершенствование»), и, в частности, в Гос. Думе предлагают отменить единый государственный экзамен (ЕГЭ). Но, похоже, мало кто сознаёт, что отмена ЕГЭ не решит проблему *восстановления*[1] образования, ибо коренная причина его разрушения заключена не в ЕГЭ, а в порочных программах, учебниках и методах преподавания.

Проблему ЕГЭ следовало бы сразу решать системно, в контексте главной проблемы. Тем не менее, отмена ЕГЭ — необходимый шаг, который ликвидирует препятствие, делающее качественное образование абсолютно невозможным, ибо искажает цели образования, мотивацию и поведение учеников, родителей и учителей, уродует весь 11-летний процесс школьного обучения. Поэтому отмена ЕГЭ (не сразу!) и замена его традиционными выпускными экзаменами есть благо.

Это действие власти было бы первым сдвигом, дающим обществу некоторую надежду на сущностные изменения. Но первым принципиальным шагом национально ориентированной и ответственной власти должно бы стать честное признание катастрофы, отмена фиктивной, бессмысленной цели «совершенствования и развития» (того, чего нет) и явная постановка цели *возрождения* порушенного образования (а значит, и России). Оснований надеяться на такую трансформацию пока нет.

24.11.2023 г. ректор МГУ В.А. Садовничий объявляет 4-му Всесоюзному съезду учителей и преподавателей математики, что «вопрос повышения качества математического и естественно-научного образования и совершенствования (?) системы отечественного образования в последнее время ставится уже (т.е., наконец, — *И.К.*) и на правительственном уровне»[2]. Можно ли понимать эти слова, как официальное признание крайне низкого качества российского образования (терпеть дальше нельзя)?

Напомню: на 1-м съезде 28.10.2010 г. В. А. Садовничий утверждал, что «на сегодня преподавание математики у нас пока ещё (?) находится на очень (?) высоком (?) уровне»[3]. На 2–м съезде 23.04.2015 чуть изменил свою оценку: «на сегодняшний день наше математическое образование находится на достаточно (?) высоком уровне»[4].

24.11.2023 г. он осторожно признаёт, что «уровень подготовки ... не дотягивает»[5], — многие его студенты не понимают логику доказательства «от противного», не могут понять смысла и различия

[1]В дальнейшем курсивом будем выделять ключевые слова и предложения.

[2]URL: https://scientificrussia.ru/articles/novaa-koncepcia-matematiceskogo-obrazovania-vystuplenie-rektora-mgu-va-sadovnicego-na-vserossijskom-sezde-ucitelej-i- prepodavatelej-matematiki

[3]URL: http://old.mathedu.ru/doklad_sadovnichego.pdf, с. 16.

[4]Цитирую по своим записям. В Интернете не нашёл текста доклада.

[5]11-я мин. видеотекста доклада (сноска 2).

необходимых и достаточных условий, не знают геометрии. И это в самом элитном российском вузе?! Так, на каком же «уровне» находится наше образование теперь? На «недостаточно высоком»?

И какова в этих условиях цель 4-го съезда? «Дотянуть»? Официально она сформулирована так: «съезд проводится для обсуждения (?) проблем развития (?) общего и профессионального образования»[6]. Какова цель этого «обсуждения»? Из контекста ректорского доклада можно понять, что ему просто надо набрать достаточно лояльных «предложений» для написания «концепции». Он так объясняет важность этого дела: «снижается уровень (?) количества (?) сдающих математику профильного уровня, поэтому (?) мы и ставим вопросы (?) обновления (?) концепции математического образования»[7].

Обновления концепции? Какой? Очевидно, предыдущей, составленной под руководством академика РАО и РАН А.Л. Семёнова (ныне профессор МГУ), и утверждённой президентом Д.А. Медведевым 24.12.2013 г.[8]

Что же в этой концепции подлежит «обновлению», и почему? Ответ: «за прошедшее время характер (?) проблем существенно изменился, появились новые задачи, ... в частности, в связи с активной цифровизацией, развитием искусственного интеллекта...». Опять неопределённые выражения, скрывающие смыслы и цели. Одна из них просматривается между строк — оправдание и утверждение навязываемой школе и отвергаемой обществом и настоящей наукой[9] «активной цифровизации».

При серьёзном подходе следовало бы начать с предыдущей «концепции», — с поставленных ею целей и методов, предложенных для их достижения, а главное, — с достигнутых или нет за 10 лет результатов. Напомню: «стратегическая цель концепции — обеспечить (?) занятие (?) Россией одного из лидирующих мест в мировой науке, технологии, экономике». Ну и как? Обеспечила? Алексей Львович! Ау-у-у- ... Молчание.

Интересно, какую цель поставит «обновлённая» концепция? Судя по почерку руководителя, очень вероятно, что достаточно неопределённую и двусмысленную. Но подождём.

Тем временем, в обществе растёт возмущение государственной образовательной политикой[10], растёт понимание её гибельности для самого существования России. Многие задаются вопросом «что делать?», и высказывают свои «предложения», — как правило, дилетантски легковесные[11].

Прежде чем начинать «обсуждение» этого вопроса, надо было бы открыто и честно признать на официальном уровне *катастрофическое* состояние современной массовой школы (в сущности, её нет, она уничтожена). А чтобы иметь право высказывать «предложения», надо знать историю, — знать, как разрушалась школа в 1920-х и, вторично, в 1950-1970-х (именно там первопричина всех сегодняшних бед), и — как восстанавливалась в 1930-х (см. [1, гл. 3]). В прошлом опыте можно найти ответы на все наши вопросы. Основная цель данной статьи — напомнить обществу, экспертам и, может быть, хотя бы некоторым управленцам об этом ценном опыте.

В конце 1920-х годов школа была в таком же плачевном состоянии, как и сегодня. В образовательной политике хаотично сменяли друг друга антипедагогические идеи и методы, пересаженные кем-то из Америки. Вузы массово браковали абитуриентов, — «знания поступающих не соответствуют минимальным требованиям» [1, с.29]. Грамотных специалистов практически не было, приглашали зарубежных.

В сентябре 1929 г. нарком А.В. Луначарский был смещён и заменён А.С. Бубновым. В ноябре

[6]Ссылка указана в сноске 2.

[7]Тезисы доклада В.А. Садовничего. Ссылка указана в сноске 2.

[8]URL: https://docs.edu.gov.ru/document/b18bcc453a2a1f7e855416b198e5e276/download/2744/

[9]См. книгу М. Шпитцера «Антимозг. Цифровые технологии и мозг» (её можно скачать в Интернете).

[10]См. выступления в Интернете А. Савватеева, см. сайт ОД «Родители Москвы» и мн. др.

[11]На собрании «Ассоциации преподавателей математики (при МГУ)» 02.04.2024 звучали такие суждения: студенты не знают элементарных вещей; причина в ЕГЭ, ибо цель обучения — не знания, а подготовка к ЕГЭ; надо отменить ЕГЭ, или изменить его форму; надо думать над изменением формы (?) образовательного процесса, использовать современные технологии... О главном, — о *содержании* этого «процесса», о хаотизированных, перегруженных программах, наукообразных учебниках, уродливой методике — ни слова.

пленум ЦК ВКП(б) поставил перед Наркомпросом задачу — повысить уровень общеобразовательной подготовки учащихся.

В июне 1930 г. выходит первое Постановление ЦК ВКП(б) «*О всеобщем обязательном начальном обучении*» [2, с. 109–111].

1. «Ввести с 1930/31 года повсеместное всеобщее обязательное обучение детей в возрасте 8-9-10 лет...»

2. «... срочно развернуть сеть ... techинститутов, педтехникумов...». Заметим, что в начале 1920-х годов пединституты были ликвидированы (как и сегодня) и преобразованы в факультеты университетов (сегодня —- в псевдо пед-университеты).

3. «... значительно улучшить *материальное положение* педкадров начального обучения. Обеспечить для учителей сельской школы нормы рабочего снабжения». (Пока — только сельской, и пока — только декларация).

Через год, в августе 1931 г. — основополагающее второе Постановление ЦК «*О начальной и средней школе*» [2, с. 156–161].

В преамбуле признаётся «*коренной недостаток* ... обучение в школе не даёт достаточного объёма ... знаний»», формулируется ясная и чёткая конечная цель «подготовки для техникумов и для высшей школы людей, *хорошо владеющих основами наук*».

Далее ставятся конкретные задачи перед конкретными органами с точными сроками исполнения и строгой ответственностью.

1. «... Наркомпросам немедленно организовать... проработку программ, обеспечив в них *точно очерченный круг систематизированных знаний*, с расчётом, чтобы с 1 января 1932 г. (через 4 месяца! — *И.К.*) начать преподавание по пересмотренным программам...». (Сегодня вместо программ действуют ФГОСы, размывающие содержание образования).

2. «... развернуть решительную борьбу против легкомысленного методического прожектёрства, насаждения в массовом масштабе методов, предварительно на практике не проверенных... попытки положить в основу всей школьной работы так называемый “метод проектов” вели фактически к разрушению школы...» (Сегодня академик РАО А. Асмолов восстановил проверенный «метод проектов». Вредительство?)

3. «...Культпропу ... в месячный срок разработать мероприятия по подготовке кадров для методической работы в органах народного образования... Обязать Наркомпросы... ввести... институт инструкторов, начиная с районных звеньев, для постоянной практической *помощи учителю*... Состав инструкторов укомплектовать из опытных учителей... из расчёта не менее двух на район». «Госплану СССР и Наркомпросам... составить в 2-месячный срок план подготовки педагогических кадров...»

4. «... Поручить Госплану, НКФину, ЦК Рабпрос в декадный срок разработать мероприятия по *повышению зарплаты* для учительства... ЦК союза рабпрос... в месячный срок разработать систему дифференцированной оплаты труда учителей по... квалификации и качеству работы... *Снабжение учителей продуктами и промтоварами должно проводиться... через прикрепление к закрытым рабочим распределителям и столовым по нормам промышленных рабочих...*»

5. «... Госплану ... разработать пятилетний план нового школьного строительства... Совнаркомам... в кратчайший срок организовать производство на местах учебных пособий и учебного оборудования для массовой школы...»

6. ЦК требует «решительного повышения качества руководства школой, ... скорейшего перехода к *оперативному, конкретному, и дифференцированному руководству...* с установлением во всех звеньях народного образования строгой, исключающей обезличку *ответственности* за порученную работу... Наркомпросам... обеспечить осуществление *единоначалия* в управлении школой... повысить ответственность учительства за качество школьной работы, выделяя и поощряя преданных и знающих своё дело учителей...»

Уже к декабрю 1931 г. (через 3 месяца) была издана новая программа по математике для начальной школы. Во вводной записке восстанавливались традиционные *принципы* отечественной методики: «знания и навыки по математике, ... должны располагаться в определённой системе и строгой последовательности; ... переход от одной ступени к другой может совершаться лишь тогда, когда хорошо усвоена предыдущая ступень».

Постановление 25.08.1932 г. «*Об учебных программах и режиме в начальной и средней школе*» [2, с. 161–164]. Здесь проведён анализ результатов проделанной за год работы, выявлены причины недоработок и добавлены коррекционные меры. На первый план выходит МЕТОДИКА, восстанавливаются её классические принципы: учёт возрастных особенностей, твёрдое усвоение и закрепление, самостоятельная работа, в частности, с учебником, учёт знаний и др.

Постановление констатирует: «в области начальной и средней школы по РСФСР за последний год произошли значительные сдвиги... Однако ещё не устранён коренной недостаток школы... Важнейшими причинами этого являются недостатки программ..., неудовлетворительность методов школьной работы и слабость методического *руководства* со стороны наркомпросов и их местных органов, слабая *дисциплина* в школе, а иногда — отсутствие всякой дисциплины и порядка...». (Заметим, — причина видится правильно: в руководстве. «Реформаторы» же всегда сдвигают причину отрицательных результатов своих «реформ» на учителей или, как сегодня, — на «немотивированных» детей).

Далее: «учебные программы … значительно улучшились, стали выше по объёму знаний и систематичнее ... они всё ещё страдают существенными недостатками... Основными недостатками ... являются: а) *перегрузка* программ..., приводящая к тому, что ряд дисциплин проходятся наспех, а знания и навыки детьми твёрдо не усваиваются и не закрепляются... б) ... отсутствие увязки между отдельными программами...»

«НКПросу РСФСР... провести внутреннее перераспределение учебного материала программ по математике..., приведя объём и характер учебного материала в полное соответствие с *возрастными особенностями* детей... Одновременно необходимо произвести и частичное *сокращение программ...* с тем, чтобы обеспечить *твёрдое и прочное усвоение и закрепление* основ каждой науки; ... предусмотреть *увеличение количества часов* на математику,...

II. Об организации учебной работы и укреплении школьного режима. Отметить, что... в школе... установлен больший порядок (твёрдые расписания, более чёткая организация ... хода учебных занятий). Однако, ... получил распространение как основной так называемый «лабораторно-бригадный метод», который сопровождался организацией постоянных и обязательных бригад, приведших к извращениям в виде обезлички в учебной работе, к снижению роли педагога и игнорированию во многих случаях индивидуальной учёбы каждого учащегося. ЦК ВКП(б) предлагает наркомпросам ... ликвидировать эти *извращения*, а учебный процесс в школе организовать на следующей основе:

а) Основной формой ... должен быть *урок* с данной группой учащихся, со строго определённым расписанием занятий и твёрдым составом учащихся...

б) Преподаватель обязан систематически, последовательно излагать преподаваемую им дисциплину, всемерно *приучая детей к работе над учебником* и книгой, к разного рода письменным работам ... *помогать детям* при затруднениях ... Надо *систематически приучать детей к самостоятельной работе*, широко практикуя различные задания...

в) В основу учёта школьной работы должен быть положен текущий индивидуальный, систематически проводимый учёт знаний учащихся. ... Всякие **сложные формы учёта и отчётности — запретить**. Считать необходимым установление в конце года проверочных испытаний для всех учащихся.

г) ... Наркомпросу срочно разработать методики по отдельным дисциплинам ...

д) ... Вменить в обязанность заведующим школами и педагогам повести настойчивую воспитательную работу, *борясь с нарушающими порядок в школе проступками учащихся* ... а неисправных из учащихся, хулиганствующих и оскорбляющих учащий персонал ... исключать из школы без права поступления в школу сроком от одного года до трёх лет...

III. Об учительских кадрах. «... ЦК ВКП(б) подчёркивает всё возрастающую роль учителя ... *обязывает* наркомпросы ... советские и партийные органы всемерно *обеспечить учителю в его работе необходимые условия* для успешного выполнения им ответственных и почётных обязанностей ... безоговорочное и точное выполнение директив ... о приравнивании учителя по снабжению продуктами и промтоварами к промышленному рабочему ... забота о квартире, семье и отдыхе учителя...

Предложить местным органам не отрывать учителя для общественной работы ... категорически запретив использование учителя для выполнения различных технических поручений. ...

Наркомпросу ... в кратчайший срок поставить надлежащим образом всё дело педагогического образования, заочного и краткосрочного обучения учителей, *обратив особое внимание на овладение учительством методикой*. ... Всемерно расширить практику поощрения и премирования учителей за лучшие образцы работы, а также учёт и использования в руководстве достижений передовых школ и учителей».

Всё Постановление, все меры имеют своим фокусом УЧИТЕЛЯ — стремятся создать учителю максимально благоприятные условия для «выполнения им ответственных и почётных обязанностей».

Показательно, что ЦК вторично требует от советских и партийных органов «*безоговорочного* и точного выполнения директив о приравнивании учителя по снабжению продуктами и промтоварами к промышленному рабочему». Значит, на практике эти директивы выполнялись не всегда или «с оговорками». ЦК вынужден строго скорректировать эту практику, понимая, что нельзя разочаровывать учителя, подрывая его доверие к словам руководителей государства.

Февраль 1933 г., третье Постановление ЦК ВКП(б) «*Об учебниках для начальной и средней школы*» [2, с. 164–165]: «... решающим условием проведения в жизнь обеих постановлений ЦК... является наличие по всем предметам *стабильных* учебников, призванных ликвидировать существующий «метод» нескончаемого «проектирования» учебников (сегодня «вариативность». — *И.К.*)... Поручить Наркомпросу и ОГИЗу обеспечить на деле издание стабильных учебников, рассчитанных на применение их в течение большого ряда лет ... чтобы ввести их в дело с началом учебного года — 1 сентября 1933 г. ... по каждому отдельному предмету должен существовать *единый* обязательный учебник, утверждаемый Наркомпросом РСФСР и издаваемый Учпедгизом».

Ликвидация принципа единого стабильного учебника и замена принципом вариативности всегда была одной из главных задач «реформаторов». Они понимали, что «хороший учебник — это фундамент хорошего преподавания» (К.Д. Ушинский). Первый раз, в 1918 г. замена им легко удалась, но была не долгой. Коренным образом они решили эту свою проблему в 1970 г.

Сентябрь 1935 г. Совместное Постановление СНК СССР и ЦК ВКП(б) «*Об организации учебной работы и внутреннем распорядке в начальной и средней школе*» [2, с. 171–172] устанавливает единую организацию учебного года, количество ежедневных уроков, порядок приёма учащихся в школы и перевода в другую школу, вводит экстернат, отличникам предоставляет право поступления в вуз без вступительных экзаменов.

Вводятся «специальные школы с особым режимом для дефективных детей и тех учащихся, которые систематически нарушают школьную дисциплину, дезорганизуют учебную работу и отрицательно влияют своим антиобщественным поведением на остальных учащихся».

Ставятся задачи: разработать Устав школы, Правила поведения учащихся, установить в школах чистоту и внешний порядок, установить единую форму одежды школьников.

Наркомпросу указывается: «Учебные планы подвергаются ежегодным изменениям, чем нарушаются устойчивость и системность прохождения основ наук в школе (стабильность — принцип эффективной работы любой сложной системы, —- *И.К.*). Всё это влечёт за собой дезорганизацию учебной работы, *дезорганизует учителя*, вследствие чего знания учащихся остаются всё ещё неудовлетворительными». (Опять обратим внимание: в неудовлетворительных знаниях учащихся руководители государства обвиняют не учителей, а управленцев, и объясняют — почему!).

Самое замечательное в пятом постановлении — требование объективной оценки знаний учащихся.

«Установить в школах следующие пять степеней оценки успеваемости учащихся (отметки): 1) очень плохо, 2) плохо, 3) посредственно, 4) хорошо, 5) отлично. Поручить Отделу школ ЦК ВКП(б) ... разработать обязательные для всех школ СССР *нормы оценки* успеваемости учащихся, с тем, чтобы один и тот же уровень знаний одинаково оценивался во всех школах».

Пример. «Балл “4” ставится в том случае, когда учащийся знает весь требуемый программой материал, *хорошо понимает* и прочно усвоил его. На вопросы (в пределах программы) отвечает без затруднений. *Умеет применять* полученные знания в практических заданиях. В устных ответах *пользуется литературным языком* и *не делает грубых ошибок*. В письменных работах допускает только незначительные ошибки» [1, с. 67].

Завершается Постановление так: «Совет Народных Комиссаров Союза ССР и Центральный Комитет ВКП(б) предлагают народным комиссариатам просвещения и их местным органам поставить в качестве важнейшей задачи инспектирование и организацию систематического оперативного *контроля* над состоянием и работой школы, проверяя, как на практике реализуются решения партии и правительства о школе».

И, наконец, дошла очередь до источника «извращений», о которых упоминалось в предыдущих Постановлениях, — до «науки» *педологии*. 04.07.1936 г. выходит Постановление ЦК ВКП (б) «*О педологических извращениях в системе Наркомпросов*» [2, с. 173–174]. Дойдёт ли у нас когда-нибудь очередь до «науки», снабжающей школу ложными идеями, фабрикуемыми в РАО (А. Асмолов и др. [3, с. 151–152])?

«Практика педологов, протекавшая в полном отрыве от педагога и школьных занятий, свелась в основном к ложно-научным экспериментам и проведению среди школьников и их родителей бесчисленного количества обследований ... и имели своей целью ... найти повод для удаления школьников из нормального школьного коллектива... Всё это вело к тому, что всё большее и большее количество детей зачислялось в категории умственно отсталых и “трудных”». Постановление недвусмысленно квалифицирует деятельность педологов и поддерживающих их наркомпросовских структур, как вредительскую.

Вот какие глубокие корни в управлении образованием и в его «научном» обеспечении пустили «реформаторы» с 1920-х годов — на их выкорчёвку понадобилось 5 лет. Но их дело не пропало. Сегодня «сортировка» детей (их термин), которую они пытались внедрить в нашу школу, успешно реализуется под видом «дифференциации», и через выделение с помощью олимпиад так называемых «одарённых» детей[12].

Небезынтересно познакомиться с другими Постановлениями: «*О перегрузке школьников и пионеров общественно-политическими заданиями*» (1934); «*Об издании и продаже учебников*» (1935); «*О школьных письменных принадлежностях*» (1935); «*О развёртывании сети школьных библиотек и издании литературы для них*» (1936) и др. Из названий видно, что руководители государства держали в поле зрения все «мелочи» школьного дела.

«Тетради производятся из бумаги низкого качества и, как правило, имеют плохую обложку. Карандаши изготавливаются из недоброкачественной древесины и плохого графита, ломаются при очинке. Ручки в своей значительной части непригодны к употреблению, а ученические перья не держат чернила и при письме рвут бумагу».

Всё это может казаться «мелочами» поверхностному взгляду, но каждая такая «мелочь» оказывает своё влияние на качество учебного процесса и на его результаты. И удивительно, что руководители государства это понимали. Все их усилия были сконцентрированы на главной цели: обеспечить все условия для поднятия качества обучения на самый высокий уровень. Усилия не ослабевали ни на

[12] «Одарённые» победители олимпиад заполняют бюджетные места в самых престижных вузах, а преподаватели и ректор МГУ признают, что у них нет базовых знаний, однако, никак не объясняют причин. А. Семёнов в своей «концепции» дал установку объяснять отсутствием мотивации. Но, во-первых, это не вяжется с «одарёнными», а во-вторых, это не причина, а следствие обессмысленного ВТУ-обучения, внедрённого в нашу школу «колмогоровской» реформой 1970-х годов. Но ректор МГУ и его профессора эту причину, естественно, замалчивают.

минуту в течение семи лет. И цель была достигнута. В 1938 г. на Всесоюзном совещании все ректора (в то время директора) вузов подтвердили, что результаты вступительных экзаменов *значительно* улучшились, сравнительно с 1936 г. [1, с. 49–50]. Задача подготовки для вузов качественного пополнения, поставленная ЦК в 1931 г., была решена.

Остаётся добавить, — как методисты 1930-х годов работали над выполнением Постановлений ЦК и повышением качества обучения. Они ежегодно проводили массовые, выборочные, всесторонние обследования школ страны: кадры, методическая работа, выполнение программы и причины её невыполнения, обеспеченность учебниками, материальные условия, учитывались такие «мелочи», как качество классных досок и мела, освещённость классов. По всем выявленным недостаткам оперативно принимались конкретные, выполнимые и проверяемые меры.

Особо ценным направлением управляющей работы Наркомпроса была методическая помощь учителям, высокопрофессиональная и реально действенная. Во время проверок проводились письменные контрольные работы по всем предметам. Анализ работ с выявленными типичными ошибками, объяснениями их причин и методическими рекомендациями по их *исправлению* (!) оперативно рассылался учителям в виде методических писем. На следующий год показатели школ сравнивались с их предыдущими показателями.

Качество знаний после такой по-настоящему управляющей (с обратной связью и корректирующими воздействиями) работы возрастало удивительными темпами: «Если вас интересует продвижение учащихся IV класса, то можно указать, что упражнения на целые числа в массовой школе в 1933 г. дали 29 % решаемости контрольной работы, весной 1934 г. — 58 %, а в декабре 1934 г. — 79 %» [1, с. 48]. Этот факт привела на Всероссийском совещании 1935 г. замечательный русский методист Е.С. Березанская, которая в то время руководила практическим восстановлением математического образования.

Остаётся добавить, что одновременно шла такая же системная работа по восстановлению высшего образования, в частности, педагогического и технического (см. [3, гл. 10.1, 11.1]).

Вот каков подробный, полный, правильный, не выдуманный ответ на вопрос «что делать?». И не надо собирать «съезды», проводить «обсуждения», искать «ответы», выдумывать «концепции». Нужно только одно — политическая воля народной власти.

P.S. Свежие новости, и их оценка независимыми экспертами, общественными педагогическими и родительскими объединениями.

1. Опубликовано Распоряжение Правительства РФ от 19.11.2024 № 3333-р «*Об утверждении комплексного плана мероприятий по повышению качества математического и естественно-научного образования на период до 2030 года*»[13], подписанное Председателем Правительства РФ М.В. Мишустиным (реальные составители, как всегда, остаются в тени).

Оценка сообщества "За возрождение образования": «...существенных результатов при "выполнении" предложенного плана не будет, и быть не может.... Программы "повышения качества математического образования" стали традицией. На нашей памяти такое происходит уже в четвёртый раз и всегда по одной схеме. Президент даёт поручение, правительство принимает план-программу, образование (невзирая на "комплекс мероприятий") продолжает деградировать, и через некоторое время всё повторяется по следующему кругу. Невозможно решить проблему в рамках системы, которая её породила»[14].

2. На сайте Правительства опубликована информация о подготовке по поручению Президента Владимира Путина *Стратегии развития образования до 2040 года.*

РИА «*Катюша*» анализирует состав 14-ти рабочих групп и приходит к выводу: «цифро-трансформеры, ювенальщики, экс-партнеры Сороса и американских фондов — в первых рядах работы над правительственной стратегией развития образования. ...ни одного независимого общественника от

[13] https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_491375/

[14] За возрождение образования. URL: https://vk.com/wall-62604527_63424

родительских и просемейных организаций (кроме упомянутого Андрея Афанасьева) в списках рабочих групп нет. Весьма вероятно, что учет мнения граждан, опросы мнений на портале Госуслуг, о которых рассказал Чернышенко, и т.д. выльется в профанацию. На фоне каши и сборной солянки различных предложений от людей с разными подходами в итоге в Стратегию войдет все то, что нужно Чернышенко и Ко... для ... полного демонтажа традиционной модели обучения .... И это ожидаемый, проверенный метод, который всегда применялся кураторами подобных "Стратегий".... А образование наше надо срочно спасать, и сохранять (восстанавливать,— *И.К.*) традиционную русскую/советскую школу»[15].

3. Активировалась и РАО: 5–6 декабря 2024 г. ФГБУ «Российская академия образования» провела Всероссийскую конференцию «Научные подходы к преодолению школьной неуспешности обучающихся»[16].

Моя личная оценка. Характерна формулировка темы конференции, переносящая причину всех проблем в образовании, созданных «реформаторами» под идейным обеспечением и «научным» оправданием РАО, на «неуспешных» детей. Практические результаты подобных «научных подходов» позволяют квалифицировать эту организацию, как лженаучную [1, с. 150– 155], [4].

4. "За возрождение образования": «10 ноября состоялось заседание совета по правам человека с участием гаранта, где председатель СПЧ Фадеев затронул вопрос о ЕГЭ. Он заявил (цитируем): "ЕГЭ — стержень (?) образовательной системы".... Он приводит "шокирующую статистику" (которая уже давно набила оскомину) вопиющей безграмотности молодёжи, нацеленной на сдачу трёх вступительных ЕГЭ и не желающей знать ничего кроме.... И вывод, который твердят из каждого утюга последние десять лет: "Необходимо побуждать (?) школьников изучать все предметы школьной программы".... Фадеев предлагает...: "Нужна некая интегральная оценка, например, средний балл (на основе оценок текущей успеваемости). (Она и будет "побуждать"? — *И.К.*) И это будет "четвёртая оценка" для поступления в вуз — три экзамена ЕГЭ плюс средний балл". Гарант поддержал: "Давайте оформим ваше предложение и проработаем с правительством". И тут дай Бог, чтобы "проработали и забыли" эту очевидную глупость»[17].

Литература

1. Костенко И.П. «Реформы» образования в России 1918-2018 (идеи, методология, результаты): монография. Изд. 4-е, испр. и доп. - М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2021. – 202 с.

2. Народное образование в СССР: Общеобразовательная школа: Сборник документов 1917–1973 гг. - М.: Педагогика, 1974. - 560 с.

3. Костенко И.П. Проблема качества математического образования в свете исторической ретроспективы: монография - М.: РГУПС, 2013. - 502 с.

4. Костенко И.П. Блокировать развитие мышления. Такова подлинная цель «новаторов» образования. Открытое письмо Президенту РАО Н.Д. Никандрову, 26.04.2013.

URL: https://ruskline.ru/author/k/kostenko_igor_petrovich

Игорь Петрович Костенко,
кандидат физ.-мат. наук, доцент,
член экспертной группы КРОН
(Конгресса работников образования и науки).

E-mail: kost@kubannet.ru

[15] URL: https://katyusha.org/obrazovanie/czifrotransformeryi-yuvenalshhiki-eks-partneryi-sorosa-i- amerikanskix-fondov-v-pervyix-ryadax-rabotyi-nad-pravitelstvennoj-strategiej-razvitiya-obrazovaniya.html

[16] URL: https://vgapkro.ru/wp-content/uploads/2024/12/programma_konferentsii.pdf

[17] О ЕГЭ на СПЧ (URL: https://vk.com/rvs.obrazovanie).

Обобщенные интегрируемые комбинации. Системы двух уравнений с двумя переменными

Е. А. Кривошей

В заметке рассмотрен метод построения интегрируемых комбинаций для систем двух (векторных) линейных однородных дифференциальных уравнений с двумя переменными.

Пусть дана однородная система двух векторных линейных однородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{z}}{\partial x^2} = A_1 \frac{\partial \vec{z}}{\partial x} + A_2 \vec{z} \\ \\ \frac{\partial^2 \vec{z}}{\partial y^2} = B_1 \frac{\partial \vec{z}}{\partial y} + B_2 \vec{z}, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$\vec{z} = \vec{z}(x,y) = \begin{pmatrix} z_1(x,y) \\ \cdots \\ z_n(x,y) \end{pmatrix}; \;\; A_1,\, A_2,\, B_1,\, B_2 \quad \text{— матрицы размера } n \times n.$$

Выполним в (1) перекрестное дифференцирование: дважды по y первое уравнение, дважды по x — второе. Для обеспечения совместности системы (1) необходимо

$$(A_1 \frac{\partial \vec{z}}{\partial x} + A_2 \vec{z})''_{y^2} = (B_1 \frac{\partial \vec{z}}{\partial y} + B_2 \vec{z})''_{x^2}\,. \tag{2}$$

Выполним дифференцирование и выразим вторые производные $\vec{z}$ через правые части системы (1). В итоге получим: $A_1B_1\vec{z}\,''_{yx} + A_1B_2\vec{z}\,'_x + A_2B_1\vec{z}\,'_y + A_2B_2\vec{z} = B_1A_1\vec{z}\,''_{xy} + B_2A_1\vec{z}\,'_x + B_1A_2\vec{z}\,'_y + B_2A_2\vec{z}$. Отсюда, для существования решения необходимо, чтобы были

перестановочны пары матриц A_1, B_1; A_1, B_2; A_2, B_1; A_2, B_2. (3)

Напомним, что построение интегрируемых комбинаций, см. [1,2], мы осуществляем в случае так называемой *простой структуры*, когда существует единый базис собственных векторов для всех матриц системы (1). Но тогда требование перестановочности (3) выполняется автоматически.

Перейдем к построению интегрируемых комбинаций для системы (1). Пусть $\vec{\alpha}_k$ — собственный вектор транспонированных матриц системы (1) — матриц A_1^T, A_2^T, B_1^T, B_2^T и, соответственно, λ_{1k}, λ_{2k}, μ_{1k}, μ_{2k} — собственные значения этих матриц для вектора $\vec{\alpha}_k$, $k = 1, ..., n$.

Положим $J_k = J_k(x,y) = (\alpha_k, \vec{z})$, $k = 1, ..., n$.

Тогда скалярная форма системы (1) принимает вид

$$\begin{cases} (J_k)''_{x^2} = \lambda_1 (J_k)'_x + \lambda_2 J_k \\ \\ (J_k)''_{y^2} = \mu_1 (J_k)'_y + \mu_1 J_k \end{cases} \qquad k = 1, ..., n \tag{4}$$

Каждую пару уравнений системы (4) для фиксированного k можно решить явно, для упрощения обозначений индекс k опустим.

Ищем решение в виде $J = C(y)e^{\delta x}$. Подставив в первое уравнение, получим, что данная функция является решением тогда и только тогда, когда δ является корнем характеристического уравнения $\delta^2 = \lambda_1 \delta + \lambda_2$.

Далее для простоты будем рассматривать случаи, когда у возникающих квадратных уравнений корни простые. Уточнения в случае появления кратных корней очевидны. Итак, имеем решение первого уравнения (с производными по x) вида $J(x,y) = C_1(y)e^{\delta_1 x} + C_2(y)e^{\delta_2 x}$. Подставляем во второе уравнение (с производными по y). Получаем

$$C_1''(y)e^{\delta_1 x} + C_2''(y)e^{\delta_2 x} = \mu_1(C_1'(y)e^{\delta_1 x} + C_2'(y)e^{\delta_2 x}) + \mu_2(C_1(y)e^{\delta_1 x} + C_2(y)e^{\delta_2 x}).$$

Так как функции $e^{\delta_1 x}$ и $e^{\delta_2 x}$ при разных δ_1, δ_2 линейно независимы, получаем одинаковые уравнения для $C_1(y)$ и $C_2(y)$:

$$\begin{cases} C_1''(y) = \mu_1 C_1'(y) + \mu_2 C_1(y) \\ \\ C_2''(y) = \mu_1 C_2'(y) + \mu_2 C_2(y) \end{cases}$$

Пусть соответствующее характеристическое уравнение имеет корни γ_1, γ_2. В итоге (вернемся к указанию индекса k) решение пары уравнений из (4) для данного k имеет вид

$$J_k(x,y) = (C_1e^{\gamma_1 y} + C_1e^{\gamma_2 y})e^{\delta_1 x} + (C_3e^{\gamma_1 y} + C_4e^{\gamma_2 y})e^{\delta_2 x}, \tag{5}$$

где C_1 – C_4 — произвольные постоянные, не зависящие ни от x, ни от y. Наконец, решение исходной системы (1) определяется из алгебраической системы линейных уравнений $(\alpha_k, \vec{z}) = J_k(x,y)$, $k = 1, ..., n$.

Заметим, что эта система невырождена, поскольку векторы α_k, $k = 1, ..., n$ образуют базис. Поэтому $\vec{z}(x,y)$ определится однозначно по набору известных функций $J_k(x,y)$.

Набор функций (5) образует конечномерное линейное пространство размерности $4n$. Тем самым, в случае простой структуры системы, методом интегрируемых комбинаций мы построили линейное пространство решений системы (1) той же размерности. При этом мы нашли все возможные в этом случае решения.

Замечание 1. Можно показать, что даже если система (1) не имеет простой структуры, то условие (3) является достаточным для существования решения. При этом линейное пространство решений также имеет размерность $4n$.

Замечание 2 (возможное направление дальнейшего исследования). Система (1) довольно простая, поскольку переменные в ней сразу разделены. Интересно рассмотреть более сложную систему, переменные в которой "зацеплены". Разрешенная относительно старших производных, она имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \vec{z}}{\partial x^2} = A_1\frac{\partial \vec{z}}{\partial x} + A_2\frac{\partial \vec{z}}{\partial y} + A_3\vec{z}, \quad \frac{\partial^2 \vec{z}}{\partial y^2} = B_1\frac{\partial \vec{z}}{\partial x} + B_2\frac{\partial \vec{z}}{\partial y} + B_3\vec{z}. \tag{6}$$

Нетрудно получить необходимые условия существования решения этой системы аналогично тому, как это сделано для системы (1).

Они имеют более сложный вид, чем (3), и мы не будем их здесь приводить. Важно, что в случае простой структуры системы они выполняются.

Открыт вопрос, можно ли для системы (6), в случае простой структуры, построить полный набор интегрируемых комбинаций.

Литература

1. Ивлев В.В., Кривошей Е.А. Системы линейных дифференциальных уравнений. Интегрируемые комбинации (продолжение) // Математическое образование. - 2018. - № 1(85).

2. Кривошей Е.А. Обобщенные интегрируемые комбинации // Математическое образование. - 2024. - № 2(110).

Кривошей Елена Александровна,
старший преподаватель кафедры
Общих математических и естественно научных дисциплин
Московского финансово-юридического университета МФЮА.
E-mail: ambient2003@list.ru

Геометрическая интерпретация интервальной математики на плоскости

А. Ф. Ляхов

В работе показывается возможность введение геометрической интерпретации вещественных интервалов и интервальной арифметики на плоскости.

В настоящее время интервальная математика находит самое широкое применение в науке и технике. Её методы используются для оценки погрешностей при выполнении сложных научных и инженерных вычислений. Во многих математических, а также инженерных программных пакетах есть опции, позволяющие проводить интервальные вычисления.

Основной объект интервальной математики — вещественный интервал [1-6].

Поскольку вещественный интервал определяется двумя своими границами $A = [a_1; a_2]$, то можно предложить плоскость, каждая точка которой однозначно соответствует интервалу. Положение точки на плоскости в декартовой системе координат определяется следующим образом: координата точки по оси абсцисс соответствует бóльшей границе интервалов $y_A = a_2$, а координата по оси ординат — мéньшей границе $x_A = a_1$. Соответственно, на этой плоскости можно рассмотреть арифметические действия над интервалами и изучать поведение интервальных функций.

Отображение интервальной арифметики на плоскости интервалов

В качестве объектов исследования будем рассматривать замкнутые вещественные интервалы:

$$A = [a_1; a_2] = \{t : a_1 \leq t \leq a_2;\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Множество замкнутых вещественных интервалов обозначим через $I(\mathbb{R})$, а элементы этого множества будем обозначать прописными буквами.

Введём некоторые определения, а также основные правила арифметических действий с интервалами [1- 6].

Определение 1. Пусть $* \in \{+, -, \cdot, :\}$ — бинарная операция на множестве вещественных чисел. Если A, $B \in (\mathbb{R})$, то $A * B = \{z = a * b : a \in A\, b \in B\}$ определяет бинарную операцию на $I(\mathbb{R})$.

Запишем формулы, определяющие бинарные операции:

1. $A + B = [a_1 + b_1;\ a_2 + b_2]$;
2. $A - B = [a_1 - b_2;\ a_2 - b_1] = A + (-1; -1)B$;
3. $A \cdot B = [\min\{a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2\}; \max\{a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2\}]$;
4. $A : B = [\min\{a_1/b_1,\ a_1/b_2,\ a_2/b_1,\ a_2/b_2\}; \max\{a_1/b_1,\ a_1/b_2,\ a_2/b_1,\ a_2/b_2\}]$.

Здесь и в дальнейшем предполагаем, что при делении $0 \notin B$.

Результат операции $z = x * y$, где $* \in \{+, -, \cdot, :\}$ — непрерывная функция на компактном множестве, т.е. z принимает все значения от минимального до максимального значения. Следовательно, множество значений этой функции образуют замкнутый вещественный интервал.

Операции сложения и умножения обладают свойством коммутативности и ассоциативности. Для этих операций имеет место свойство субдистрибутивности. Во множестве интервалов $I(R)$ существуют единственные нейтральные элементы по сложению и умножению: $-X = [0; 0]$ и $Y = [1; 1]$. Произвольный элемент множества $I(R)$ не имеет обратного элемента ни по сложению, ни по умножению. Для множества интервалов определены унарные операции:

$$r(X) = \left[\min_{x \in X} r(x);\ \max_{x \in X} r(x)\right],$$

где $r(x)$ — непрерывная унарная операция на R.

Теперь введём плоскость интервалов.

Определение 2. Каждая точка плоскости интервалов R^2 имеющая координаты (x, y) однозначно соответствует интервалу $X = [x_1; x_2]$, где $x = x_1$ — ордината точки, а $y = x_2$ — абсцисса.

Из определения интервала $x_2 \geq x_1$, следует, что $y \geq x$. Область существования интервалов заштрихована и показана на Рис.1.

Заметим, что множество точечных интервалов $x_2 = x_1 \Rightarrow y = x$ образуют границу области существования интервалов. Эта граница является отображением оси вещественных чисел на плоскость интервалов.

Вещественному интервалу $X = [x_1; \ x_2]$ на плоскости интервалов может быть поставлен в соответствие вектор $\overline{X} = (x_1; \ x_2)$.

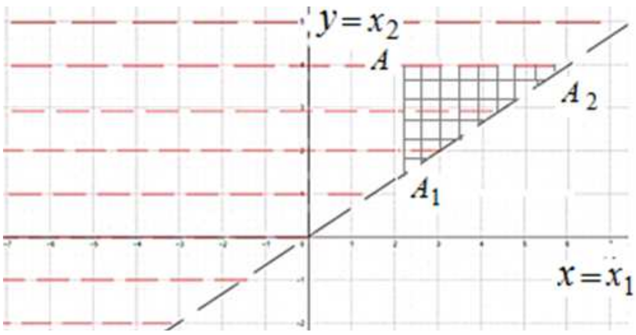


Рис. 1. Область существования интервалов заштрихована.

Покажем, как арифметические операции отображаются на плоскости.

1. Операция принадлежности.

Пусть интервал $B \subset A$, то есть $b_1 \geq a_1$, $b_2 \leq a_2$. Всё множество интервалов, которые включены в интервал A, будет лежать в области AA_1A_2, показанной на рис. 1.

2. Операция сложения. Операция сложения двух интервалов на плоскости интервалов может быть представлена как операция сложения двух векторов:

$$A = [a_1; \ a_2] \Rightarrow \overline{A}, \quad B = [b_1; \ b_2] \Rightarrow \overline{B}, \quad \overline{C} = \overline{A} + \overline{B} \Rightarrow \overline{C} = (a_1 + b_1; \ a_2 + b_2).$$

Пример 1. Изобразить графически сумму двух интервалов на плоскости интервалов

$$A = [2; 3], \ B = [-1; 1], \ C = [2; 3] + [-1; 1] = [1; 4]$$

на интервальной плоскости Ox_1x_2 (рис. 2).

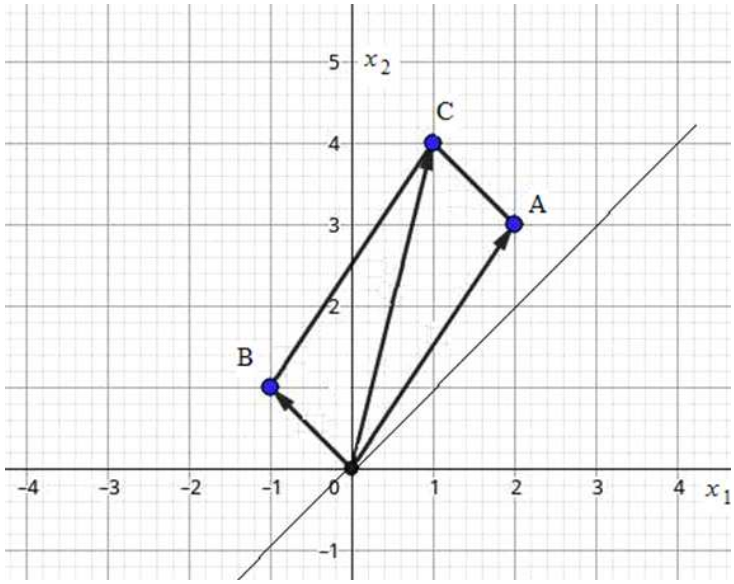


Рис. 2. Операция сложения интервалов на плоскости Ox_1x_2.

3. Операция вычитания двух интервалов. Операция вычитания интервалов $C = A - B$ сводится к операции сложения интервалов

$$C = A + (-B).$$

Заметим, что интервалу $\overline{B} = (-B)$, противоположному по знаку интервалу B, на интервальной плоскости соответствуют вектор, симметричный B относительно диагонали второго квадранта плоскости.

Пример 2. Изобразить графически разность двух интервалов на плоскости интервалов

$$A = [4; 10], B = [2; 8], \quad C = [4; 10] - [2; 8] = [4; 10] + [-8; -2] = [-4; 8]$$

на интервальной плоскости Ox_1x_2 (рис. 3).

Вектор $\overline{B}$ является симметричным отражением вектора B относительно диагонали второго квадранта.

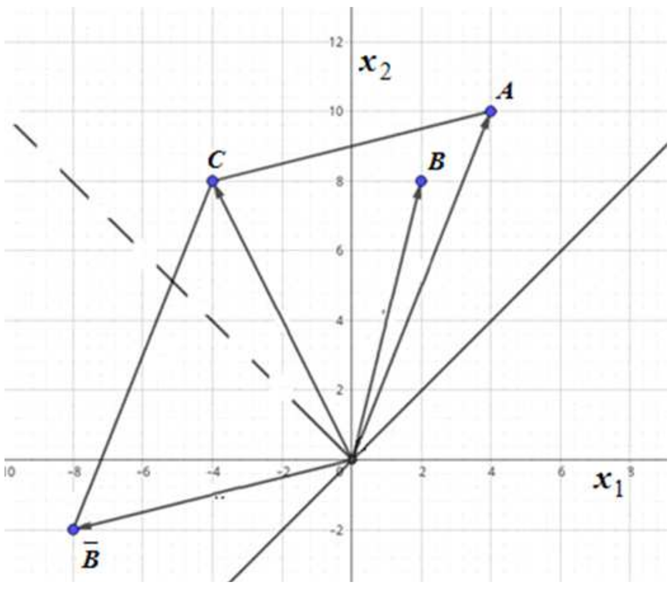


Рис. 3. Операция вычитания на плоскости Ox_1x_2.

4. Операция умножения. Определение операция умножения носит сложный характер:

$$A \cdot B = [\min a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2; \quad \max a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2].$$

Результатом этой операции является интервал, а значит, он тоже может быть изображён на интервальной плоскости.

Использование графического образа плоскости интервалов существенно упрощает практическое применение определения умножения интервалов.

Вся область существования интервалов может быть разбита на четыре области (рис. 4).

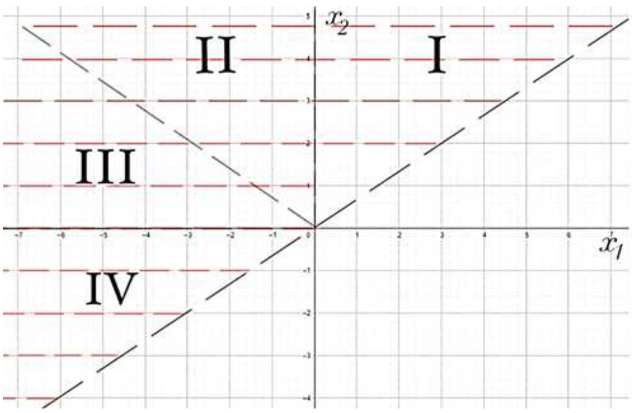


Рис. 4. Четыре области интервалов Ox_1x_2.

Если интервал A лежит в первой области, $A \in I$, то $a_2 \geq a_1 \geq 0$.

Если интервал A лежит во второй области, $A \in II$, то $a_2 \geq 0$, $a_1 < 0$, $|a_1| \leq a_2$.

Если интервал лежит в третьей области, $A \in III$,то $a_2 \geq 0$, $a_1 < 0$, $|a_1| \geq a_2 \geq 0$.

В четвёртой области, $A \in IV$, $a_2 < 0$, $a_1 < 0$, $|a_1| \geq |a_2|$.

На первом этапе умножения интервалов $A = [a_1;\ a_2]$, $B = [b_1;\ b_2]$ определим области принадлежности интервалов.

После определения области принадлежности интервалов, интервал произведения можно определить, рассматривая не все комбинации произведений концов интервалов. Например, если A и B принадлежат к первой области A, $B \in$ обл. I, то

$$C = A * B \Rightarrow C = [a_1b_1; a_2b_2].$$

Если $A \in$ обл.I, $B \in$ обл.II, то

$$C = [a_1b_1; a_2b_2].$$

Если $A \in$ обл.II, $B \in$ обл.II, то

$$C = [\min(a_2b_1; a_1b_2); \max(a_1b_1; a_2b_2)].$$

Пример 3. Отобразить графически произведение двух интервалов

$$C = A * B, \quad A = [2; 3],\ B = [1; 3],\ C = [2; 3] * [1; 3] = [2; 9]$$

на интервальной плоскости Ox_1x_2 (рис. 5).

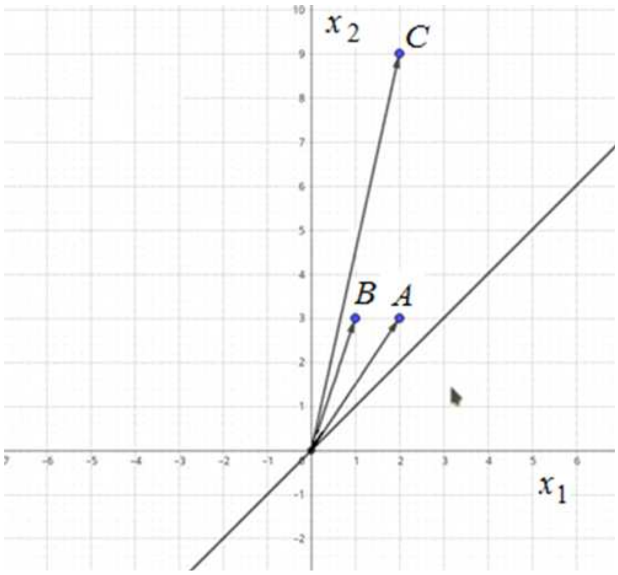


Рис. 5. Отображение операции умножения на плоскости Ox_1x_2.

Графическое решение интервальных уравнений на плоскости

Даны два интервала $A = [a_1; a_2]$ и $B = [b_1; b_2]$. Решить интервальное уравнение следующего вида

$$A + X_1 = B. \tag{1}$$

Приведём решение в развёрнутой форме:

$$[a_1; a_2] + [x_1; x_2] = [b_1; b_2] \Rightarrow [a_1 + x_1; a_2 +_2] = [b_1; b_2] \Rightarrow X_1 = [b_1 - a_1; b_2 - a_2].$$

Заметим, что это решение существует при условии

$$b_1 - a_1 \leq b_2 - a_2 \Rightarrow a_2 - a_1 \leq b_2 - b_1,$$

то есть при условии, что ширина интервала A меньше ширины интервала B:

$$\omega(A) \leq \omega(B).$$

Покажем на конкретном примере графическое представление решения уравнений вида (1).

Пример 4. Даны два интервала $A = [4; 6]$, $B = [5; 10]$. Решить уравнение

$$A + X_1 = B; \quad [a_1 + x_1; a_2 + x_2] = [b_1; b_2] \Rightarrow X_1 = [b_1 - a_1; b_2 - a_2] \Rightarrow X_1 = [1; 4]$$

Решение уравнения показано на интервальной плоскости Ox_1x_2 (рис. 6).

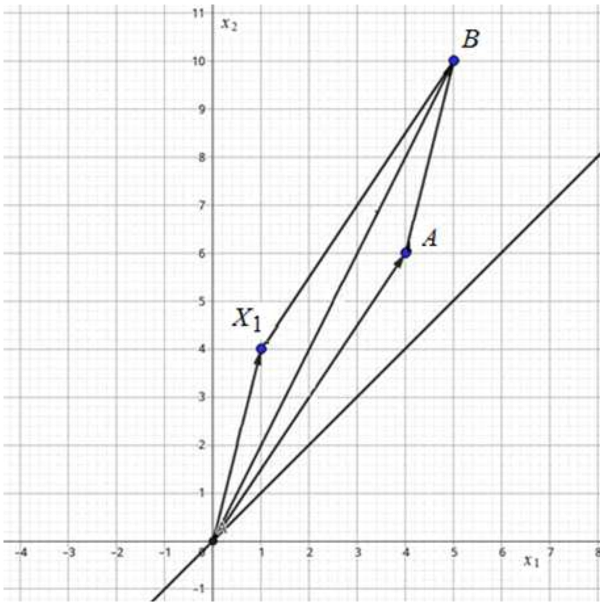


Рис. 6. Решение уравнения $A + X = B$.

Уравнение (1) является естественным расширением уравнения, записанного в вещественных числах:

$$a + x = b,\ \ a,\ \ b,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Решение этого уравнения может быть записано в виде

$$x = b - a.$$

Соответственно, можно рассмотреть интервально уравнение

$$X_2 = B - A$$

и его решение

$$[x_1; x_2] = [b_1; b_2] - [a_1; a_2] \Rightarrow X_2 = [b_1 - a_2; b_2 - a_1].$$

Заметим, что это решение имеет место при любых интервалах A и B, и что $X_1 \subseteq X_2$.

Пример 5. Даны два интервала $A = [4; 6]$, $B = [5; 10]$. Решить уравнение

$$X_2 = B - A; \quad [x_1; x_2] = [4; 6] - [5; 10] \Rightarrow X_2 = [-6; 1].$$

Это решение показано на интервальной плоскости Ox_1x_2 (рис.7). На этом же рисунке показана точка X_1 соответствующая решению предыдущего уравнения. Точка X_1 лежит в области интервалов, включенных в интервал X_2

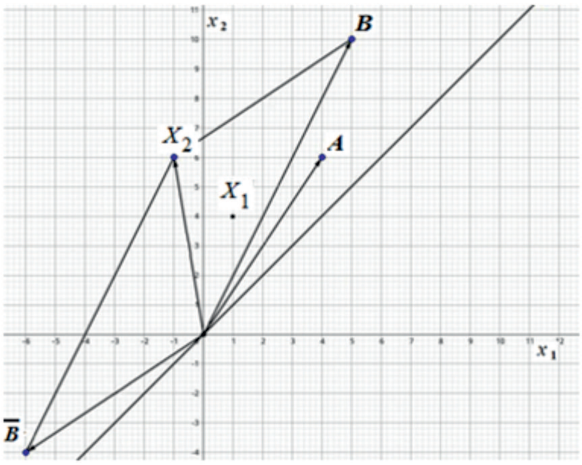


Рис. 7. Решение уравнения $X = B - A$.

Графическое отображение интервальных функций

.

Введённое графическое изображение интервалов позволяет исследовать интервальные функции на плоскости интервалов.

Рассмотрим интервальную функцию $Y = X^2$. По определению, эта функция принимает следующие значения

$$Y(X) = \left[\min_{x\in X}(x^2);\ \max_{x\in X}(x^2)\right],$$

Функция $Y = X^2$ отобразит область интервалов, приведённую на рис. 4, в область, показанную на рис. 8.

Соответственно, области I и IV перейдут в область I на рис. 8. В областях II и III $\min\limits_{x\in X}(x^2) = 0$, следовательно, они соответственно отобразятся в ось абсцисс $y_1 = 0$.

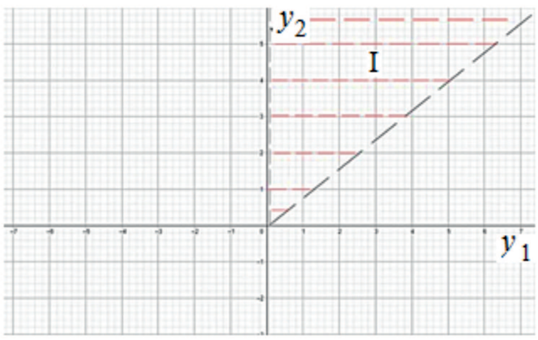


Рис. 8. Плоскость функции $Y = X^2$ с осями Oy_1 и Oy_2.

Рассмотрим интервальную функцию $Y = X \cdot X$. (Функция $Y = X \cdot X$ определена по правилам умножения интервалов, то есть $Y = [\min(x_1^2, x_1 \cdot x_2, x_2^2); \max(x_1^2, x_1 \cdot x_2, x_2^2)]$.) Эта функция отображает плоскость интервалов X на плоскость интервалов Y (рис. 9):

Если интервал X принадлежит первой области (рис. 4), то интервал Y будет принадлежать первой области рис. 8:

$$X \in I \ \text{(рис. 4)} \ \to Y = [x_1^2; x_2^2] \in I \ \text{(рис. 9)}.$$

Если интервал X принадлежит второй области (рис. 4), то интервал Y будет принадлежать второй области рис. 8:

$$X \in II \ \ (\text{Рис.4}) \ \to Y = [-x_1 x_2; x_2^2] \in II \ \ (\text{Рис.9})$$

Аналогично можно записать отображение областей III и IV:

$$X \in III \ \ (\text{Рис.4}) \ \to Y = [-x_1 x_2; x_1^2] \in II \ \ (\text{рис. 9}), \quad X \in IV \ \ (\text{Рис.4}) \ \to Y = [x_2^2; x_1^2] \in II \ \ (\text{рис. 9}).$$

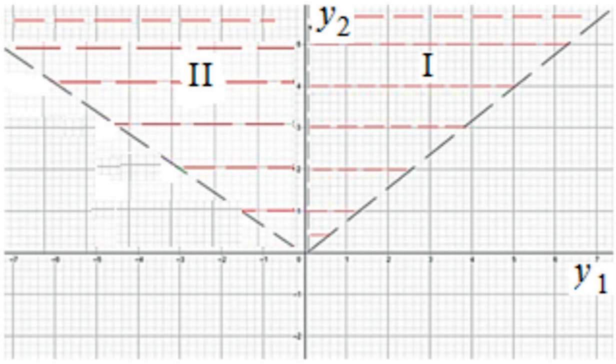


Рис. 9. Область существования функции $Y = X \cdot X$.

Графическое отображение функции интервалов постоянной ширины

Интервальная плоскость может быть использована для исследований интервальных выражений, заданных параметрически. Например,

$$Y = f(X(t)), \quad X(t) = [x_1(t); x_2(t)], \quad \text{где } \ x_1(t) < x_2(t).$$

В инженерной практике измерения какой-то физической величины в различные моменты времени, как правило, проводятся с помощью одних и тех же инструментов по одной и той же методике, то есть результаты измерений имеют постоянную абсолютную погрешностью. Результаты этих измерений могут быть представлены как интервал постоянной ширины

$$x_2(t) - x_1(t) = d \Rightarrow x_2(t) = x_1(t) + d.$$

На интервальной плоскости множество интервалов постоянной ширины $X(t) = [x_1(t); x_2(t)]$ будет изображать прямая, проведённая под углом 45° и сдвинутая по оси ординат на величину d.

Рассмотрим вид функции $y_2(y_1)$ на интервальной плоскости $Y(t) = [y_1(t); y_2(t)]$ для функции

$$Y = X^2,$$

где $X(t) = [x_1(t); x_2(t)]$ — интервальная функция постоянной ширины $d = x_2 - x_1$.

В зависимости от того, к какой области принадлежит интервальная функция $X(t)$ (рис. 4), интервальная функция $Y(t)$ будет различной.

1. Интервальная функция $X(t)$ принадлежит первой области (рис. 4):

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t)] \in I, \ \ x_2(t) \geq x_1(t) \geq 0.$$

В этом случае

$$Y(t) = X^2(t) \Rightarrow Y(t) = [x_1^2(t), x_2^2(t)].$$

Для построения функции $y_2(y_1)$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1^2(t), \\ y_2(t) = x_2^2(t), \\ d = x_2(t) - x_1(t). \end{cases}$$

Разрешаем эту систему, получим:

$$y_2 = y_1 + 2d\sqrt{y_1} + d^2.$$

Заметим, что эта процедура напоминает принятый в теоретической механике переход от законов движения точки по координатам к траектории.

2. Интервальная функция $X(t)$ принадлежит второй области (рис. 4):

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t)] \in II, \ \ |x_2| \geq |x_1|, x_1 \leq 0, \quad Y(t) = X^2(t) \Rightarrow Y(t) = [0, x_2^2(t)].$$

При этом $x_2(t) \in \left[\frac{d}{2}, d\right]$, $y_2(t) = x_2^2(t) \in \left[\frac{d^2}{4}, d^2\right]$.

3. Интервальная функция X(t) принадлежит третьей области (рис. 4):

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t)] \in III, |x_1| \geq |x_2| x_1 \leq 0, \quad Y(t) = X^2(t), \Rightarrow Y(t) = [0, x_1^2(t)].$$

При этом $x_1(t) \in \left[-d, -\frac{d}{2}\right]$, $y_2(t) = x_1^2(t) \in \left[\frac{d^2}{4}, d^2\right]$.

4. Интервальная функция $X(t)$ принадлежит четвертой области (рис. 4):

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t)] \in I, \ \ 0 \geq x_2 \geq x_1.$$

В этом случае

$$Y(t) = X^2(t), \ \ Y(t) = [x_2^2(t), x_1^2(t)].$$

Для построения функции $y_2(y_1)$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y_1(t) = x_2^2(t), \\ y_2(t) = x_1^2(t), \\ d = x_2(t) - x_1(t). \end{cases}$$

Разрешая эту систему, вновь получим:

$$y_2 = y_1 + 2d\sqrt{y_1} + d^2.$$

Вид функции $y_2 = y_2(y_1)$ для всех вариантов расположения интервала X, показан на рисунке 10.

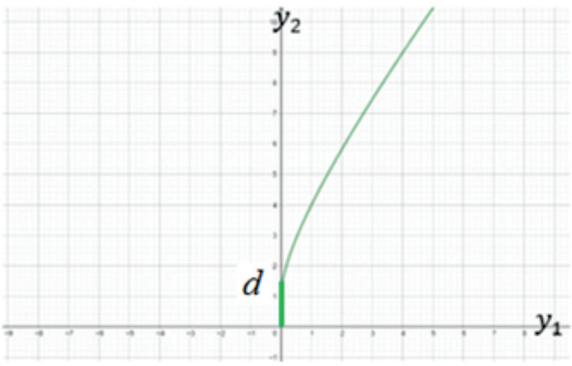


Рис. 10. График функции $y_2 = y_1 + 2d\sqrt{y_1} + d^2$.

Рассмотрим вид функции $y_2(y_1)$ на интервальной плоскости для функции

$$Y(t) = X(t) \cdot X(t).$$

В соответствии с правилом умножения интервалов запишем:

$$Y = X * X = [\min\{x_1x_1, x_1x_2, x_2x_1, x_2x_2\};\ \max\{x_1x_1, x_1x_2, x_2x_1, x_2x_2\}],$$

где $d = x_2 - x_1$ — постоянная ширина интервала.

В зависимости от того, в какой области лежит интервал X, (рис. 4) вид функции $y_2(y_1)$ будет различным.

1. Интервальная функция $X(t)$ принадлежит первой области (рис. 4):

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t)] \in I,\ \ x_2(t) \geq x_1(t) \geq 0.$$

В этом случае

$$Y(t) = X(t) \cdot X(t) \Rightarrow Y(t) = [x_1^2(t), x_2^2(t)]; \quad y_2 = y_1 + 2d\sqrt{y_1} + d^2.$$

2. Интервальная функция $X(t)$ принадлежит второй области (рис. 4):

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t)] \in II,\ \ |x_2| \geq |x_1|, x_1 \leq 0, \quad Y(t) = X(t) \cdot X(t), \Rightarrow Y(t) = [x_1(t) \cdot x_2(t); x_2^2(t)].$$

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \cdot x_2(t), \\ y_2(t) = x_2^2(t), \\ d = x_2(t) - x_1(t). \end{cases}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{d}{2} \cdot \sqrt{d^2 + 4y_1}.$$

При этом $x_2(t)$ изменяется в интервале $\left[\frac{-d}{2}, 0\right]$, $a y_1(t)$ изменяется в интервале $\left[\frac{-d^2}{4}, 0\right]$.

3. Интервальная функция $X(t)$ принадлежит третьей области (рис. 4);

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t)] \in III,\ \ |x_1| \geq |x_2|, x_1 \leq 0, \quad Y(t) = X(t) \cdot X(t), \Rightarrow Y(t) = [x_1(t) \cdot x_2(t); x_1^2(t)].$$

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \cdot x_2(t), \\ y_2(t) = x_1^2(t), \\ d = x_2(t) - x_1(t). \end{cases}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{d}{2} \cdot \sqrt{d^2 + 4y_1}.$$

При этом $x_1(t) \in \left[-d, -\frac{d}{2}\right]$, $y_1(t) \in \left[\frac{d^2}{4}, d^2\right]$.

4. Интервальная функция $X(t)$ принадлежит четвертой области (рис. 4):

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t)] \in I,\ \ 0 \geq x_2 \geq x_1.$$

В этом случае

$$Y(t) = X(t) \cdot X(t) \Rightarrow Y(t) = [x_2^2(t), x_1^2(t)].$$

Для построения функции $y_2(y_1)$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y_1(t) = x_2^2(t), \\ y_2(t) = x_1^2(t), \\ d = x_2(t) - x_1(t). \end{cases}$$

Разрешая эту систему, получим

$$y_2 = y_1 + 2d\sqrt{y_1} + d^2.$$

Вид функции $y_2 = y_2(y_1)$ при всех вариантах расположения интервала X показан на рис. 11.

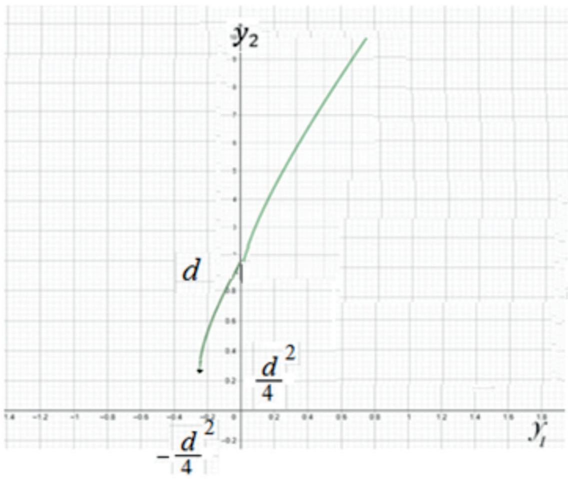


Рис. 11. График функции $y_2(y_1)$ $(Y = X \cdot X)$

Заметим, что для интервалов из I и IV областей графики функций $Y = X^2$ и $Y = X{*}X$ совпадают. Отличие имеет место, если X принадлежит II или III области.

Проведём исследование интервальной функции

$$Y(t) = \sin(X(t)) \Rightarrow [\sin(x_1(t)), \sin(x_2(t))],$$

в области монотонного возрастания функции синуса $\frac{-\pi}{2} \leq x_1 \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2}$, $X(t)$ — интервальная функция постоянной ширины.

Для определения зависимости $y_2(y_1)$ запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} y_2(t) = \sin(x_2(t)), \\ y_2(t) = \sin(x_1(t)), \\ d = x_2(t) - x_1(t). \end{cases}$$

Отсюда следует

$$y_2(t) = \sin(x_1(t)) \cdot \cos(d) + cos(x_1(t)) \cdot \sin(d)$$

или

$$y_2 = y_1 \cdot \cos(d) + \sqrt{1 - y_1^2} \cdot sin(d).$$

Из условия $y_2 \geq y_1$ следует ограничение на ширину интервала d:

$$y_1 \cdot \cos(d) + \sqrt{1 - y_1^2} \cdot \sin(d) \geq y_1, \text{ или } \sin(d) \geq 2y_1^{2-1}.$$

На рис. 12 показан график функции $y = x \cdot \cos(d) + \sqrt{1 - x^2} \cdot \sin(d)$, $d = 0.1$.

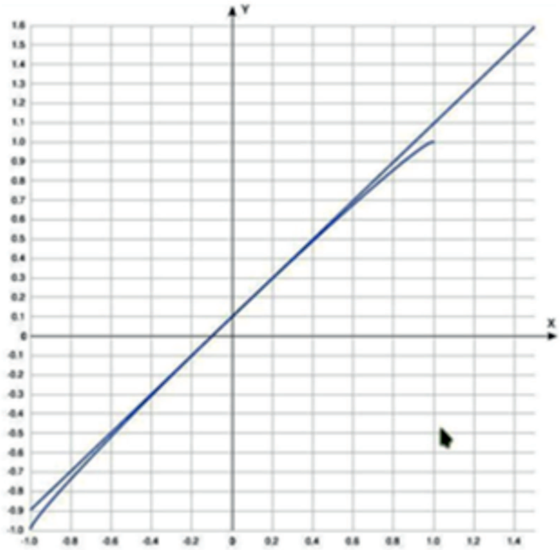


Рис. 12. График функции $y = x \cdot \cos(d) + \sqrt{1 - x^2} \cdot \sin(d)$, $d = 0,1$.

Данный подход к исследованию задач интервальной математики может быть применён и для более сложных интервальных функций.

Заметим, что на практике при оценке погрешностей измерений и вычислений, как правило, используются относительные погрешности величин $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \leq 1$. Такое представление погрешности фактически соответствует нормировке пространства интервалов. Вся геометрия интервалов может быть построена внутри единичного круга.

Автор выражает благодарность Суворовой Дарье, ученице 10 класса школы № 4 город Бор, за интерес к работе и выполнение большого количества численных примеров различной сложности.

Литература

[1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. - М.: Мир. 1987. - 360 с.

[2] Калмыков С.А., Шокина Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. - Новосибирск.: Наука, 1986. - 224 с.

[3] Яковлев А.Г. Интервальные вычисления — предмет исследования и полезный инструмент // Сб. Интервальные вычисления. - № 1. - 1991. - С. 10-26.

[4] Орлов А.И., Луценко Е.В. Системная нечёткая интервальная математика. Монография. - Краснодар, КубГАУ. 2014. - 600 с.

[5] Ляхов А.Ф. Элементарная теория погрешностей // Математическое образование. - № 3-4. - 1998. - С. 82-104.

[6] Ляхов А.Ф. Определение погрешности вычислений и решение задач с параметрами методами интервальной математики // Математическое образование. - № 4. - 2000. - С. 56-76.

Ляхов Александр Фёдорович,
доцент кафедры Теоретической, компьютерной
и экспериментальной механики, математики и информатики
Института информационных технологий, математики
и механики Национального исследовательского
Нижегородского государственного университета
им. Н.И. Лобачевского, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: alf19545@rambler.ru

Путешествие на край хаоса

В. Н. Новиков

Для произвольных симплексов показано, что при фиксированном объеме максимум периметра достигается при наборах ребер, состоящих всего из двух или трех групп ребер одинаковой длины. Найдены аналоги неравенств Эйлера и Руше. Основные результаты работы были доложены на Всемирном Конгрессе «Теория систем, алгебраическая биология, искусственный интеллект: математические основы и приложения» 23–30.06.2023 г. на топологической секции.

1. Введение

Свойства простейших геометрических фигур, таких как треугольники, тетраэдры и их обобщений — симплексов — являются важной составной частью наших фундаментальных сведений о природе. Найденное около 200 лет назад неравенство, связывающее периметр треугольника и отношение радиусов вписанной и описанной окружности, также иногда называют фундаментальным, так как оно широко используется как в теории оптимизации, так и при решении различных задач, связанных с неравенствами в треугольнике. Для обобщения этого и других аналогичных неравенств на тетраэдры и симплексы в многомерном пространстве будем рассматривать единичную сферу радиуса 1 и заполнять ее поверхность равномерно распределенными случайными точками. Тогда, например, для четырехмерного пространства ($n = 4$) каждые 5 точек можно считать вершинами случайного 4-мерного симплекса. Вычисляя объём v через квадраты длин ребер с помощью определителя Кэли-Менгера (аналога формулы Герона для симплексов):

$$v^2 = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n(n!)^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & \cdots & d_{0n}^2 \\ 1 & d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & & d_{1n}^2 \\ 1 & d_{02}^2 & d_{12}^2 & 0 & & d_{2n}^2 \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{0n}^2 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \tag{1}$$

а периметр как сумму длин всех ребер, и откладывая их на плоскости (v, p), получим распределение, изображённое на Рис. 1. Оно с точностью до подобия — умножения при необходимости на масштабы R^4, R, где R — радиус описанной сферы симплекса (вычисляемый с помощью главного минора матрицы Кэли-Менгера), в пределе, когда число точек стремится к бесконечности, представляет все множество симплексов размерности 4. Как видно из Рис. 1, распределение сужается при приближении к правому концу, состоящему из одной точки — правильному симплексу. При приближении к левому концу $v = 0$ (вырожденные симплксы) распределение расширяется. Ставится задача найти верхнюю p_h и нижнюю p_l границы распределения.

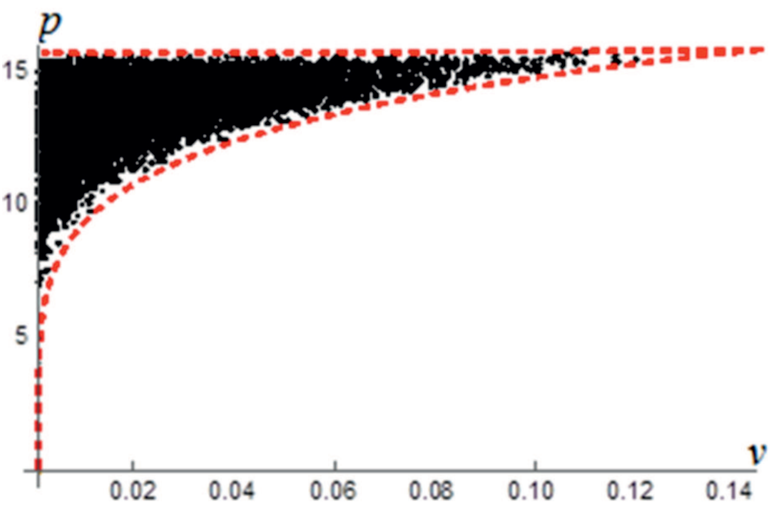


Рис. 1.

2. Корабль для путешествия по морю хаоса. Определения конфигурации симплексов на границах

Если выбрать случайный симплекс внутри распределения Рис. 1, и двигаться в море хаоса по вертикальной прямой (т.е. зафиксировав v и тем самым решая задачу на условный экстемум для p), то рано или поздно мы попадем на границу распределения, где, как мы ожидаем, симплексы будут вырождаться, подобно случаю треугольников и тетраэдров [1], в некоторые простейшие конфигурации, когда все ребра разбиваются либо на две, либо на три группы, в каждой из которых они равны между собой. Что и позволяет найти точные формулы для границ.

Для определения вида симплексов на границе будем использовать специально разработанный численный метод интегрирования вдоль многомерных поверхностей, который показал свою эффективность и может быть полезен для решения других задач на условный экстремум.

Пусть $q = (x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n)$ — набор длин ребер, который далее будем называть *конфигурацией.* Тогда для заданного числа v_c вычисление объема с помощью (1) задает поверхность в многомерном пространстве: $v(q) = v_c$, а две функции: $v = v(q)$, $p = p(q)$ можно рассматривать как отображение пространства переменных q в двумерную плоскость переменных (v, p).

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию случайного начального набора ребер симплекса к верхней границе, эквивалентную решению задачи на условный экстремум:

$$\frac{dq}{dt} = \nabla p - \frac{(\nabla p, \nabla v)}{|\nabla v|^2}\nabla v, \tag{2}$$

где t — время, ∇ — оператор градиента, а правая часть уравнения есть проекция ∇p на поверхность. Замена $t \to -t$ задает эволюцию к нижней границе. Иными словами, это и есть тот “корабль”, о котором говорилось выше.

Решение системы известными методами приводит к накоплению численных ошибок, и как следствие, “сходу” траектории с заданной поверхности. Для подавления этого эффекта на каждом временном шаге k после предварительного вычисления $Q = q_k$ производится коррекция, т.е. решение уравнения для функции одного переменного τ вида $v(Q + \tau\nabla v) = v_c$, где ∇v уже вычислен в точке q_{k-1}. Как правило, для нахождения τ достаточно 2-3 итераций по методу Ньютона. После чего окончательно полагаем $q_k = Q + \tau\nabla v$. Ещё одним важным аспектом метода является аппроксимация частных производных разностными отношениями. Хотя в данном случае можно вычислять и точные значения производных (из известных аналитических выражений), но такой способ обычно требует наличия нереальных по мощности компьютеров даже в случае симплексов сравнительно небольших размерностей.

На Рис. 2 представлена эволюция начального случайного набора ребер симплекса в 9 — мерном пространстве (слева) к набору, соответствующему глобальному условному экстремуму, вычисленная с помощью описанного выше метода.

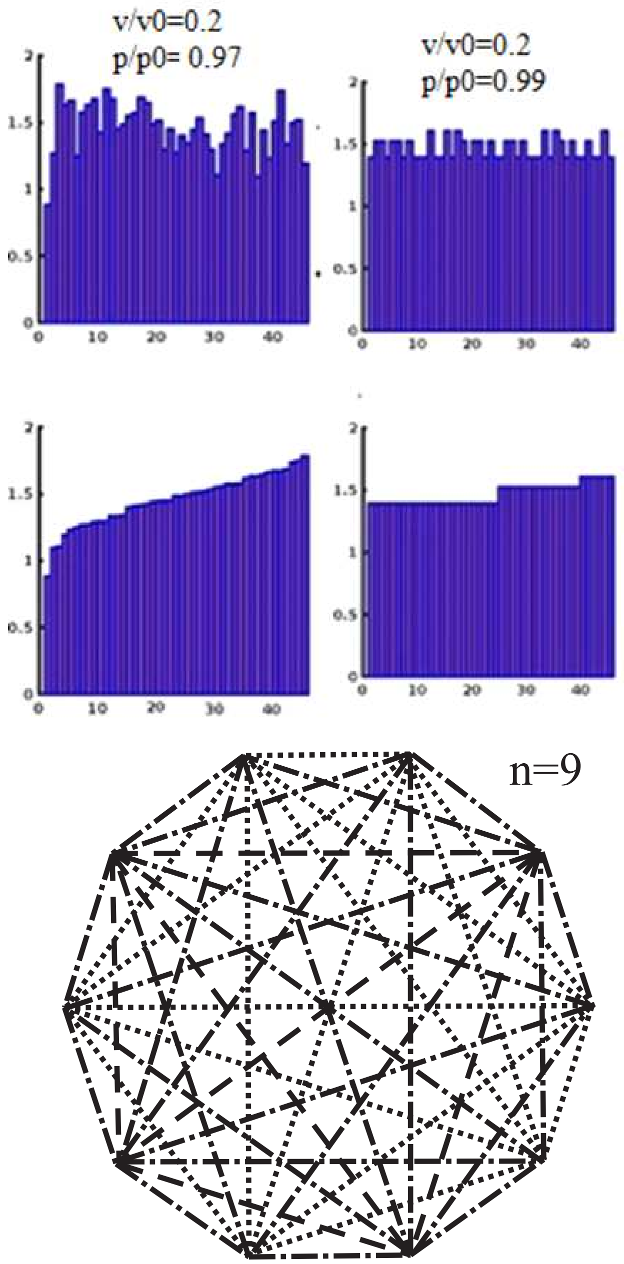


Рис. 2.

Видно, что все ребра, число которых $9 \cdot 10/2 = 45$, в конце эволюции (справа) при приближении к границе ($p = p_{max}$) вырождаются в три группы, состоящие из равных по длине ребер. Ниже для наглядности произведено их упорядочивание по возрастанию.

Граф получившегося в результате эволюции симплекса представлен в самом низу рисунка. Штриховыми линиями показана группа ребер с максимальной длиной, которая представляет из себя правильный и полный (все вершины его соединены одинаковой длины ребрами) граф. Пунктирными линиями — такого же типа граф группы ребер меньшей длины. Оба этих графа связаны двудольным графом (штрих-пунктирные линии).

Как показывают расчеты, метод в большинстве случаев при случайных начальных q_0 выдает глобальные экстремумы, что, по-видимому, связано с нелинейностью системы и согласуется с обсуждаемой в ряде современных работ теорией “приближения к краю хаоса” в системах с обратной связью, типичных для многих приложений в биологии, теории автоматов и др. (т.е. сильно нелинейных, как и в рассматриваемом случае).

О том, что на Рис. 2 представлен глобальный экстремум, можно заключить из Рис. 3, где с помощью метода Монте-Карло насеяны симплексы в некоторой малой окрестности получившейся точки-симплекса (жирная точка примерно посредине верхней границы Рис. 3). На Рис. 4 то же, но с бо́льшим увеличением. Видно, что точка как бы парит над морем хаоса.

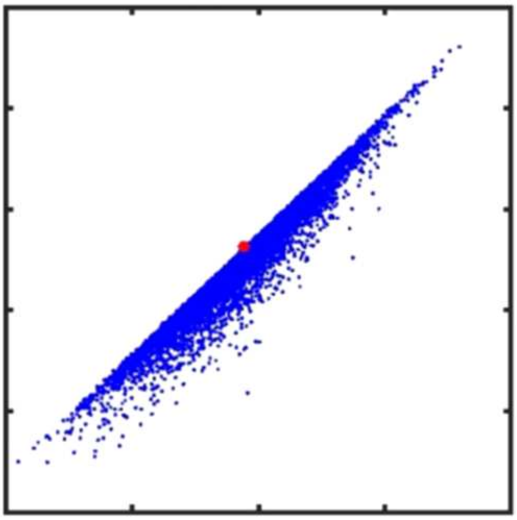


Рис. 3.

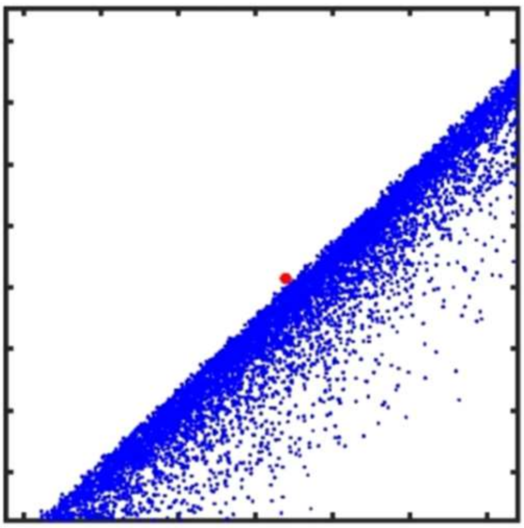


Рис. 4.

Размеры рамки по горизонтали и вертикали на Рис. 3: 4×10^{-7} и 2×10^{-3}, На Рис. 4 — увеличение еще приблизительно в четыре раза.

На Рис. 5 в виде графов показаны результаты расчетов с точностью до нумерации вершин.

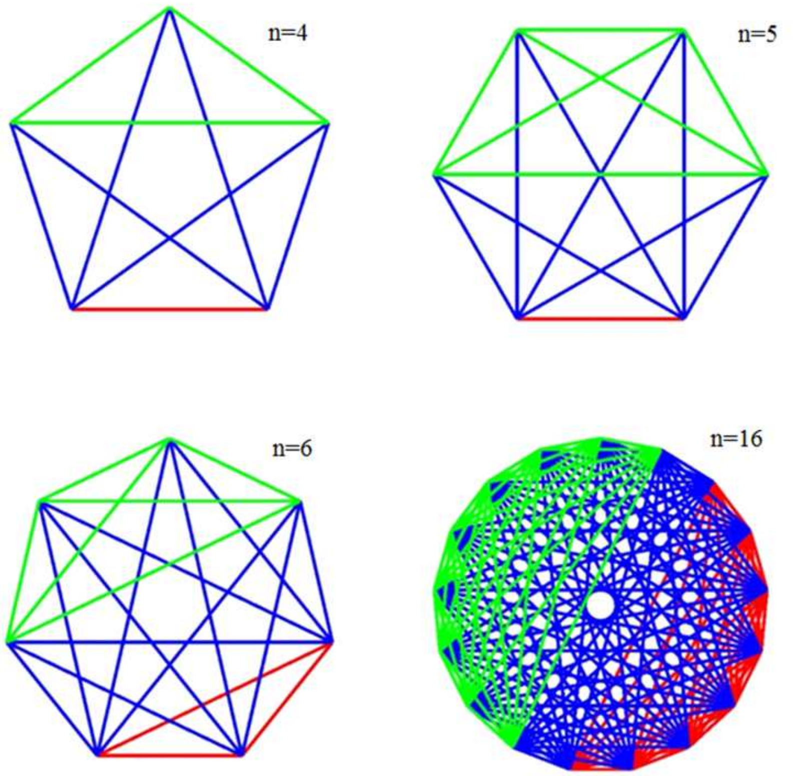


Рис. 5.

Как следует из рисунка, количество вершин подсимплексов с длинами ребер y и x начиная с $n = 4$ растет попеременно: $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 5)$, $(4, 6)\ldots$

Левой нижней вершине на Рис. 5 удобно присвоить номер 0, далее — нумерация против часовой стрелки.

На Рис. 6 показаны с точностью до множителя матрицы для соответствующих определителей вида (1), причем первые три для верхней границы, а последняя – для нижней:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & y^2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y^2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & x^2 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & x^2 & 0 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & x^2 & x^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & y^2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y^2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & x^2 & x^2 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & x^2 & 0 & x^2 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & x^2 & x^2 & 0 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & x^2 & x^2 & x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & y^2 & y^2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y^2 & 0 & y^2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y^2 & y^2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & x^2 & x^2 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x^2 & 0 & x^2 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x^2 & x^2 & 0 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x^2 & x^2 & x^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x^2 & x^2 & x^2 & x^2 & x^2 \\ 1 & x^2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & x^2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x^2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.

Видно, что на верхней границе распределения происходит попеременное наращивание верхнего и нижнего блоков.

Так как все матрицы на верхней границе зависят только от двух переменных, то теперь задача на условный экстремум сводится к двумерной независимо от размерности симплекса: найти $\max p(x,y)$ при $v(x,y)=v_c$, что приводит к системе уравнений с дополнительным параметром γ (множитель Лагранжа):

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial x}+\gamma\frac{\partial v}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial y}+\gamma\frac{\partial v}{\partial y}=0;\quad v(x,y)=v_c.$$

Эту систему надо решать для всех v_c на интервале $(0,v_0)$, где, например, v_0 — правый конец распределения на Рис. 1.

Рассмотрим другой подход, который позволяет сразу найти аналитический вид всей границы. Для этого исключим параметр γ из написанной выше системы и обозначим $v=v(x,y)$.

Так как

$$\gamma=-\frac{\partial p}{\partial y}/\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}/\frac{\partial v}{\partial x},$$

то

$$\omega=\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

что означает обращение в ноль якобиана ω отображения

$$v=v(x,y),\quad p=p(x,y)$$

плоскости (x,y) в плоскость (v,p) в точках условного экстремума. Условие $\omega=0$ задает неявным образом y как функцию x:

$$y=\varphi(x),$$

что приводит к параметрическому представлению верхней границы как образа множества $(x,\varphi(x))$ в плоскости (v,p):

$$g=(v(x,\varphi(x)),p(x,\varphi(x))).$$

Из $\omega=0$ следует, что два семейства кривых

$$\alpha=(v(x,y_0),p(x,y_0)),\quad \beta=(v(x_0,y),p(x_0,y))$$

в каждой точке условного экстремума (x_0,y_0) касаются друг друга. Кроме того, они касаются и кривой g, т.е. верхняя граница распределения на Рис. 1 является для них огибающей в плоскости (v,p). Действительно, касательный вектор к g:

$$\frac{dg}{dx}=\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{d\varphi}{dx}\left(\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial p}{\partial y}\right),\tag{3}$$

но два вектора в правой части (3) , в силу касания α и β как отмечено выше, коллинеарны в точке (x_0,y_0). Откуда и следует касание всех трех параметрически заданных кривых.

Такой подход позволяет рассматривать в учебных курсах достаточно сложные понятия условного экстремума и огибающей одновременно, что делает изложение более отчетливым и сокращает время на освоение материала.

Так как, например, для $n=4$ набор ребер симплекса пропорционален $(y,1,1,1,1,1,1,x,x,x)$, то вычисляя объем как и выше, и с помощью главного минора матрицы (1) — радиус описанной сферы R, находим v, p на верхней границе:

$$v_h=\frac{x^2y(12-4x^2-3y^2)^{5/2}}{96(3-x^2y^2)^2},\quad p_h=\frac{(6+3x+y)\sqrt{12-4x^2-3y^2}}{\sqrt{3-x^2y^2}},$$

Вычисляя ω, после сокращения на несущественные множители приходим к уравнению для связи (прообраза огибающей) x и y на верхней границе:

$$3x - 2x^2 - 2x^3 - 2y + 2x^2y + 3y^2 - 3xy^2 - 2x^2y^2 + 2x^3y^2 + \\ +2x^4y^2 + y^3 - x^2y^3 - x^2y^4 = 0. \tag{4}$$

Находя теперь из (4) y для каждого x, получаем параметрический вид границы, показанной пунктиром на Рис. 1: $(v_h(x, \omega(x)),\ p_h(x, \omega(x)))$, $1 \leq x < \sqrt{3/2}$, где 1 соответствует правильному симплексу, а правый конец — точке сингулярности $(\sqrt{3/2}, \sqrt{2})$ в выражениях для v_h, p_h. Предельное значение p_h в этой точке находится разложением в ряд Тейлора (4) и равно $6\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 2$. Отношение значений p_h на левом и правом концах: $0,99178\ldots$

Для $n \geq 4$ структура уравнения связи остается неизменной — меняются только коэффициенты в легко воспроизводящейся последовательности:

$$3, -2, -2, -2, 2, 3, -3, -2, 2, 2, 1, -1, -1$$
$$4, -2, -3, -2, 2, 4, -4, -4, 3, 3, 1, -1, -1$$
$$4, -3, -3, -3, 3, 4, -4, -2, 3, 3, 2, -2, -2$$
$$5, -3, -4, -3, 3, 5, -5, -4, 4, 4, 2, -2, -2$$

Квадраты компонент предельных точек:

$$\left(\frac{3}{2}, 2\right), \left(\frac{4}{3}, 2\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{4}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{6}{5}, \frac{4}{3}\right), \ldots$$

На Рис. 7 показаны кривые, задаваемые уравнениями связи (4) на плоскости (x, y). Центральная точка соответствует правильным симплексам, остальные — первым трем точкам сингулярности. Видно, что для каждой размерности пространства из центральной точки можно двигаться по четырем направлениям, однако, как показывает дополнительное исследование, максимальные значения периметра на верхней границе достигаются только для участков, отмеченных точками.

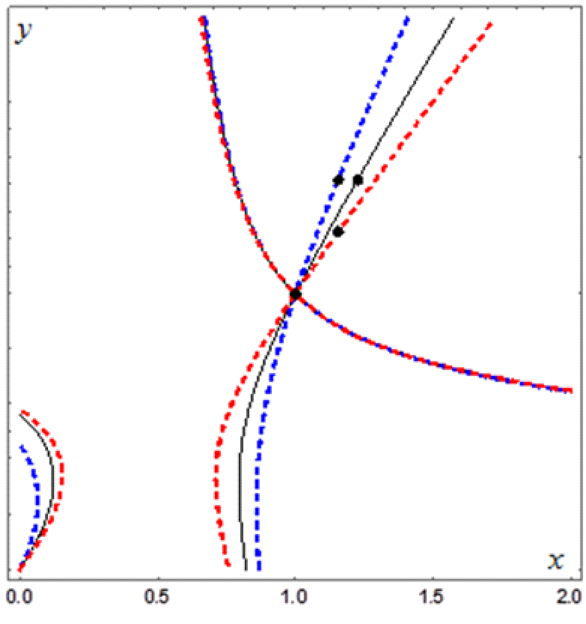


Рис. 7.

На Рис. 8 процесс нахождения безразмерных периметров в зависимости от объема изображен графически. Два овала в центре, изображенные штриховыми линиями, — линии уровня объема

$$v(x,y) = v_1, \quad v(x,y) = v_2,$$

которым соответствуют определенные сплошные линии уровня периметра: $p(x,y) = p_1$, $p(x,y) = p_2$, касающиеся штриховых линий в некоторых точках прообраза огибающей — кривой, заданной уравнением (4), (пунктир):

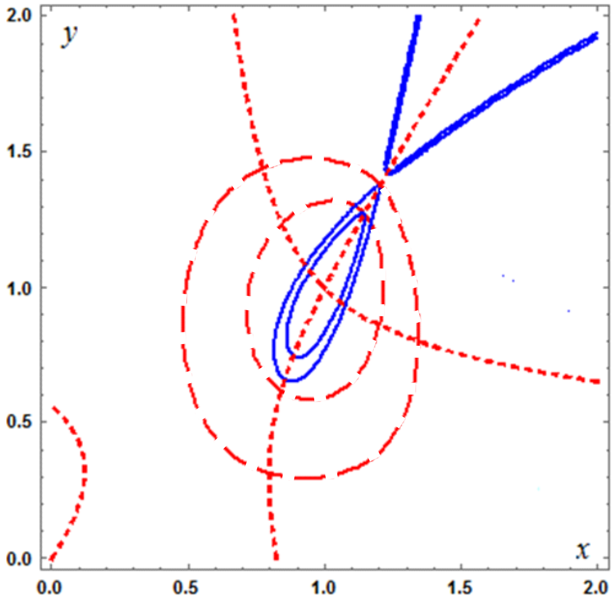


Рис. 8.

Следовательно, в соответствии со сказанным выше точки (v_1, p_1) и (v_2, p_2) принадлежат верхней границе распределения на Рис 1.

3. Определение вида симплексов на верхней границе с помощью вырожденных симплексов

Найдём конфигурацию схлопнувшегося (нулевого объема) четырёхмерного симплекса с максимальным периметром из соображений симметрии. Во-первых можно искать искомое распределение 5 точек на сфере меньшей размерности, т.е. обычной двумерной сфере в трехмерном пространстве. Для этого достаточно считать последнюю координату всех точек нулевой. Кроме того, из соображений симметрии можно ожидать, что две точки противоположны, а последние три точки располагаются на сфере в перпендикулярной плоскости на равном расстоянии друг от друга (правильная дипирамида, вписанная в сферу). Тогда координаты точек окончательного распределения можно, например, записать как строки матрицы в виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

что приводит к совокупности (набору) расстояний между ними:

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{2},1,1,1,1,1,1,\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

Легко видеть, что данный набор с точностью до нумерации вершин соответствует первому графу на Рис. 5, или набору из трех групп ребер:

$$(1,1,1,1,1,1,x,x,x,y).$$

Иными словами, мы нашли подтверждение вида симплексов на верхней границе с совершенно неожиданной стороны, и заодно нашли точное решение на левом конце верхней границы в координатном представлении. Что немаловажно, так как, вообще говоря, определение координат вершин симплекса по его набору длин ребер даже в простейших случаях приводит к необходимости решения системы нелинейных уравнений со многими неизвестными. В силу непрерывности можно ожидать, что такой же вид на верхней границе симплексы будут иметь и в некоторой окрестности левого конца.

Отметим, что найденное распределение точек заодно есть решение проблемы Томсона [2] для пяти взаимодействующих по закону Кулона точек на двумерной сфере: найти такое распределение этих точек, которое дает минимум их взаимной электростатической потенциальной энергии.

Для пятимерных симплексов также методом подбора удается найти матрицу:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

с набором расстояний:

$$\sqrt{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}},1,1,\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},1,1,\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\sqrt{2},1,1,1,1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Что также полностью согласуется с ранее найденной конфигурацией, представленной вторым графом на Рис. 5.

Для шестимерных симплексов:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Набор расстояний, соответствующих третьему графу Рис. 5:

$$\sqrt{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},1,1,1,\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},1,1,1,\frac{2}{\sqrt{3}},1,1,1,1,1,1,\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

Таким образом, можно выдвинуть гипотезу, что найденное ранее точное решение для верхней границы, автоматически на левом конце приводит к решению проблемы Томсона для всех размерностей, при условии, что число заряженных точек на 3 больше размерности несущей их сферы.

4. Нижняя граница распределения

Для нижней границы ситуация значительно проще. Уравнение связи здесь не нужно. Симплексы на ней являются аналогами правильной треугольной пирамиды для тетраэдров: в основании — правильный симплекс размерности $n-1$ с n вершинами, и еще одной, находящейся на одинаковом расстоянии x от остальных. Конфигурация для $n=4:(x,x,x,x,1,1,1,1,1,1)$. Теперь в матрице (1) все x^2 расположены во второй строке и столбце, а y^2 отсутствуют. Отсюда:

$$v=\frac{2^{-n/2}\sqrt{1-n+2nx^2}}{n!},\quad R=\frac{\sqrt{\frac{n}{2}}x^2}{\sqrt{1-n+2nx^2}}.$$

Высоту можно найти как катет прямоугольного треугольника с гипотенузой x и другим катетом, равным радиусу простого симплекса в основании. Радиус вписанной сферы находится по известной формуле через полный и частичные объемы симплекса. После упрощений:

$$h=\frac{x^2}{2R},\quad r=\frac{R(\sqrt{n(2-n)+2n(n-1)x^2}-1)}{n(n-1)x^2}.$$

После деления на масштабы получается параметрический вид нижней границы, например, для $n=4$:

$$v_l=\frac{(8x^2-3)^{5/2}}{384x^8},\quad p_l=\frac{\sqrt{2}(3+2x)\sqrt{8x^2-3}}{x^2},\quad \sqrt{\frac{3}{8}}\le x<1.$$

5. Аналоги неравенства Эйлера

Для распределения $(d/R,r/R)$, где d — расстояние между центрами вписанной и описанной сфер, используя (2) с соответствующей заменой (v,p), можно убедиться, что верхняя граница состоит из аналогов правильных треугольных пирамид. Тогда

$$d=|h-r-R|,$$

что совпадает с

$$d=\sqrt{(R+(n-2)r)(R-nr)}$$

(Сравнивать лучше квадраты выражений.) При этом равенство достигается только на верхней границе, а ниже знак “=” заменяется на “<”. При $n=2$; 3 получаем известные равенство Эйлера и неравенство Грейса [3].

6. Треугольник и тетраэдр

Конфигурация для треугольника на нижней границе ($n=2$): $(x,1,1)$. Отсюда

$$p(x)=\frac{(1+2x)\sqrt{4x^2-1}}{x^2},\quad v(x)=\frac{(4x^2-1)^{3/2}}{4x^4}.$$

Так как теперь $v(x)$ — это безразмерная площадь треугольника (масштаб длины — радиус описанной окружности), а $p(x)$ — удвоенный безразмерный полупериметр, то для отношения радиусов вписанной и описанной окружностей $\rho = \frac{r}{R}$, используя известную формулу для площади (в нашем случае: $s = pr/2$), получим:

$$\rho = \frac{2v(x)}{p(x)} = \frac{-1+4x^2}{2x^2(1+2x)}.$$

Решая последнее уравнение относительно x, находим $x = \frac{1-\sqrt{1-2\rho}}{2\rho}$ (одно из решений). После подстановки в выражение для $p(x)$ и упрощения, приходим к выражению для нижней границы распределения:

$$p_1 = \sqrt{2 - 2(1-2\rho)\sqrt{1-2\rho} + 10\rho - \rho^2}.$$

Аналогично, при выборе $x = \frac{1+(1-2\rho)}{2\rho}$ получаем формулу для верхней границы распределения p_2, которая отличается от p_1 только знаком перед внутренним радикалом. Неравенство $p_1 \le p \le p_2$, или, в размерном виде: $Rp_1 \le p \le Rp_2$, где тем же символом p теперь обозначена размерная величина, совпадает с фундаментальным неравенством треугольника, о котором шла речь выше и доказанном геометрически.

Конфигурация для тетраэдра на нижней границе — правильная треугольная пирамида ($n = 3$): $(x, x, x, 1, 1, 1)$, поэтому:

$$v_l = \frac{2(3x^2-1)^2}{9\sqrt{3}x^6}, \quad p_l = \frac{2\sqrt{3}(1+x)\sqrt{3x^2-1}}{x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \le x < 1.$$

Для верхней границы, поскольку теперь при схлопывании тетраэдра ($v = 0$) наибольший периметр дает квадрат с двумя равными диагоналями и четырьмя равными сторонами (это нетрудно показать, рассматривая различные четырехугольники и треугольники, вписанные в фиксированную окружность), то приходим к конфигурации $(x, 1, 1, 1, 1, x)$, что приводит к параметрическому представлению:

$$v_h = \frac{8x^2\sqrt{2-x^2}}{3(2+x^2)^{3/2}}, \quad p_h = \frac{4\sqrt{2}(2+x)}{\sqrt{2+x^2}}, \quad 1 \le x < \sqrt{2},$$

правильность которого можно проверить с помощью метода Монте-Карло (см. Рис. 3, 4). Верхняя граница оказывается, как и на Рис. 1, близка к горизонтальной прямой. Отношение значений периметра на левом и правом концах равно

$$\frac{p_h(\sqrt{2})}{p_h(1)} = \frac{2\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{4\sqrt{6}} \approx 0,9855985596.$$

Автор выражает благодарность Е.В. Щепину за постоянный интерес и внимание к работе.

Литература

[1] Новиков В.Н. // Математическое Образование. - № 2(98). - 2021. - С. 18-27.

[2] Schwartz R. E. // arXiv: 1001.3702v5. - 2018.

[3] Lajos Laszlo // arXiv: 1805.08435v1. - 2018.

Новиков Владимир Николаевич, кандидат физ.-мат. наук,
г. Москва.

E-mail: novikvn45@yandex.ru

Из истории математики

Архитектурная математика, золотое сечение и числа Фибоначчи в Древнем мире

А. Н. Ковалев

Рассмотрены два геометрических построения, которые могли привести к введению золотого сечения в архитектуру в IV — III тысячелетиях до н.э. Показано, что первое использовалось при дистанционировании пирамид Гизы относительно друг друга и в вавилонском искусстве. Пример из последнего дает основание считать, что квадратное уравнение, решением которого является число Фидия, могло появиться не позднее IX века до н.э. Второе построение соответствует плану шумерского Белого храма в Уруке (конец IV тысячелетия) и является наиболее вероятным источником для выделения треугольника Кеплера, который в последующем использовался в шести больших пирамидах XXVII – XXIV вв. до н.э., включая пирамиду Хеопса. Применение находимых в разное время в Древнем мире приближений для $\sqrt{5}$ — 11/5, 9/4, 47/21, 38/17, 123/55 и 161/72 — при определении приближенного значения чисел Фидия могло привести к открытию ряда чисел Фибоначчи. Приведены доводы и примеры из истории архитектуры в поддержку этой гипотезы.

Введение

Пропорция, задаваемая отношением $1/\varphi = \varphi/(1-\varphi)$, называется *золотым сечением* или *числом Фидия* ($\varphi = (\sqrt{5}-1)/2$), по имени древнегреческого скульптора V века до н.э., который, как считалось ранее, начиная со второй половины XIX века, использовал его при создании скульптур для Парфенона. XX век отметился обнаружением и утверждением особой роли золотого сечения не только в древней и средневековой архитектуре, но и в живописи, иконописи, поэзии и музыке. Но к началу XXI века оформилось общее критическое отношение профессионалов к утверждениям об ее использовании в архитектуре и искусстве древнего и средневекового мира. В 2003 году на конференции по средневековой архитектуре большинство исследователей пришло к выводу, что в Средние века золотое сечение не использовалось в ней[1] [25]. Поскольку в истории искусств не известно ни одного письменного источника до XVII века, где говорилось бы о применении этой пропорции в архитектуре, скульптуре или живописи, то историк математики А.И. Щетников предположил, что оно и не использовалось в них, а было выделено только в геометрии и в космологии, в связи с утверждением во времена Пифагора особой роли додекаэдра в устройстве Вселенной [14]. Щетников пошел дальше и утверждает, что отсутствие соответствующих письменных источников говорит, скорее всего, об неиспользовании золотого сечения в качестве эстетического начала или для композиционного деления пространства ни в архитектуре, ни в скульптуре и ни в живописи до конца эпохи Возрождения [14, с. 39]. Аналогичной точки зрения в адрес древнегреческого искусства придерживался и историк архитектуры из Новосибирска Радзюкевич А.В. [9]. Параллельно развивалось мнение, что представление об использовании в Древнем мире золотого сечения до Пифагора, а тем более чисел Фибоначчи, — анахронизм, некорректная экстраполяция в далекое прошлое сравнительно недавно образованного в науке подхода и последующего ощущения об отсутствии особых трудностей в достижении соответствующих знаний, возникших на основе привычного использования развитого математического аппарата с алгебраизацией геометрии [22, с. 60–86].

Переход к такой точке зрения отчасти связан с возросшим уровнем требований к математической обработке полученных при обмере произведений искусства результатов, осознанием факта

[1] Это утверждение с методологической точки зрения представляется странным: доказать отсутствие чего-либо гораздо сложнее, чем присутствие. Но, видимо, его целью было остановить поток легковесных находок, соответствующих скорее склонности исследователя, чем исторической реальности.

возможности случайных совпадений, вариативности реконструкций, когда пропорции 5/8 и 8/13 могут появиться без всякой связи с золотым сечением. Так, равнобедренный треугольник с высотой в 3 у.е., построенный на «священном египетском» (3, 4 5), задает ряд длин — 3, 5, 8, которые являются последовательными числами Фибоначчи. Взятие этого треугольника за базовый и последующий перенос его бокового ребра может привести к появлению в построении пропорций 5/8 и 8/13.

Самым известным и самым ранним, но все еще спорным, примером ее применения в Древнем Мире является Великая пирамида, у которой отношение высоты к половине основания равно 14/11 — *подходящая дробь*[2] для $\sqrt{\Phi}$, его каркасный треугольник (половина основания — высота — апофема) — треугольник Кеплера, его стороны образуют геометрическую прогрессию $(1, \sqrt{\Phi}, \Phi)$. Щетниковым был предложен вариант реконструкции выбора пропорции и размеров пирамиды, с взятием для отношения длин апофемы и половины основания дробного приближение 89/55 к числу Фидия [13]. Основным поводом так считать является равенство длины половины основания 55 египетским оргиям[3]. Щетников предполагал, что выбор треугольника Кеплера, возможно, связан с его геометрическим свойством — равенством $\triangle ADE$ и $\triangle CEB$ (рис. 1) — делающим его уникальным среди остальных прямоугольных треугольников. Но при обнаружении древними египтянами этого свойства естественно ожидать выделение в пирамиде уровня DE, делящего высоту в золотом сечении ($CD/AC = \varphi^2$), что не наблюдается в ней.

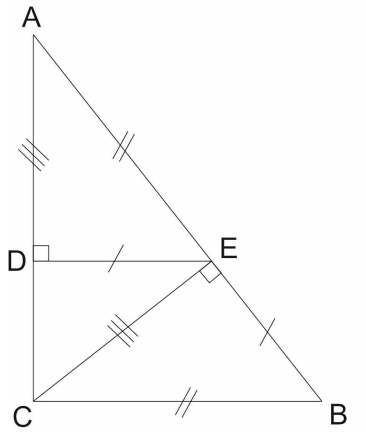


Рис. 1. Свойства треугольника Кеплера, $AB = \Phi \cdot CB$; $\triangle ADE = \triangle CEB$.

В советской истории архитектуры была принята версия Прейса, основанная на выборе треугольника с геометрической прогрессией сторон [1, с. 145], которую разделяют некоторые современные российские исследователи [10]. Но возникает вопрос: каким образом в XXVII веке до н.э. египтяне смогли построить прямоугольный треугольник с геометрической прогрессией сторон? Предлагаемый Щетниковым вариант ответа [13] представляется слишком сложным при современном представлении о возможном уровне математики XXVII — XXVI вв. до н.э.

В западной истории архитектуры господствует мнение, что Великая пирамида проектировалась, скорее всего, без всякой связи с каким-либо свойством золотого треугольника, просто ее секед равен 22 пальца [22, с. 215–216]. Секед — длина основания прямоугольного треугольника, подобного каркасному, с высотой в царский локоть (rc, 7 ладоней, 28 пальцев). Секед в 4 ладони — уклон[4] 7/4 — приближение сечения по апофеме к равностороннему треугольнику; 5 ладоней — уклон 7/5 — подходящая дробь для $\sqrt{2}$ (относительная погрешность $\varepsilon = 1\%$), построенная по нему пирамида очень близка к половине правильного октаэдра, (первая часть Ломаной пирамиды Снофру и две пирамиды Аменемхета III); 21 палец — уклон 4/3 (священный египетский треугольник (3, 4, 5), 8 пирамид Древнего царства); 22 пальца — уклон 14/11 (пирамида Снофру в Мейдуме, Великая пирамида и

[2]Наилучшее приближение в виде дроби к заданному нецелому числу, находимое по алгоритму Евклида.
[3]Оргия равна 4 локтям.
[4]Тангенс угла между апофемой и плоскостью основания.

еще не менее пяти более поздних пирамид). В рамках развиваемого ранее взгляда, что число 22 являлось религиозно выделенным в архитектуре[5], как минимум, с начала III династии [4], эта версия выглядит самой простой и потому наиболее реалистичной. Но выбор наклона просто по количеству пальцев секеда, без какого-либо математического смысла, который присутствует в перечисленных случаях и выявляется при анализе многих других пирамид, представляется маловероятным.

Общий вывод западной истории архитектуры неутешителен и соответствует общей тенденции последних десятилетий: *абсолютно убедительных примеров использования золотого сечения в искусстве Древнего Египта до эпохи Птолемеев на сегодняшний день нет* [22, с. 28–56]. Особенно стоит отметить отсутствие построения, которое могло бы объяснить введение его в архитектуру Древнего мира.

Поскольку представление, что в искусстве Древней Греции использовалось золотое сечение, появилось в результате исследований 1854—1855 гг. Адольфа Цейзинга, когда он обнаружил его во многих скульптурах Фидия, украшавших храм Парфенона, то не удивительно, что эту пропорцию находили в архитектуре этого храма и даже в его расположении в Акрополе (И.В. Жолтовский). И.Ш. Шевелев писал о подчинении Парфенона пропорциям $\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}+1$ [12, с. 82–90]. Но более точный анализ показал, что в основных пропорциях использовался не иррациональный $\sqrt{5}$, а дробь $9/4$, которой равны L/l ($\varepsilon = 0,07\%$), h/l ($\varepsilon = 0,06\%$) и D/d ($\varepsilon = 0,1\%$), где L и l — длина и ширина стилобата; h — высота ордера; D — шаг между рядовыми колоннами (межосное расстояние) и d — диаметр колонны у основания. При этом пока нельзя однозначно сказать, использовалась ли она как приближение к $\sqrt{5}$, или как $(3/2)^2$ в развитии идеи об архитектурном воплощении Пифагорова лада, чему соответствует храм Зевса в Олимпии [6], или как композиция этих двух фактов. К этому следует добавить, что некоторые другие пропорции храма, якобы говорящие об использования золотого сечения, являются случайными совпадениями[6]. Поэтому не удивительно, что многие историки архитектуры обходятся в своих реконструкциях его без золотого сечения [8, 17]. Между тем, некоторые его пропорции побуждают принять, что $\sqrt{5}$ и его производные все-таки применялись. Например, $h_a : h$, где h_a — высота антаблемента, и уклон фронтона ($tg\alpha$) равны 0,24 или $\sqrt{5}-2=\varphi^3$, при взятии для $\sqrt{5}$ естественной в рамках десятичной системы дроби $28/25 = 112/100$. Что оставляет вопрос об использования φ в этом храме открытым.

Основные золотые построения

Проявление золотого сечения в искусстве Древнего мира до рассвета древнегреческой культуры не говорит однозначно о выделении числа Фидия с пониманием его особой формообразующей роли. Но на первых порах есть смысл просто удостовериться, что геометрические построения, явно или неявно связанные с золотым сечением, использовались тогда. Поэтому начнем с вопроса, который следует задать в самом начале поиска: каким образом в рамках приемов архитектурного проектирования золотое сечение могло войти в архитектуру, и, помня о пирамиде Хеопса, — как мог выделиться треугольник Кеплера?

Самым простым построением, приводящем к появлению золотого сечения, является вписывание квадрата в полукруг, построение прямоугольника $GEPK$ и выделение прямоугольника $GBCK$ (рис. 2), поскольку $GB/AB = \Phi$. В этом случае пропорция Φ могла появиться в архитектуре без изначального понимания ее особых свойств.

[5]Число 22 могло быть символом жреческого объединения Египта: 10 + 1 жрецов Верхнего Египта, 10 + 1 жрецов Нижнего Египта. Во времена Джосера “один [стоящий] над десятью” был Хесира, в мастабе которого было 11 деревянных панелей, изображающие его открытия, должности и звания.

[6]В частности, равенство отношения длины столба колонны к ширине стилобата $0,31$ — хорошему приближению к $1/(\sqrt{5}+1) = \varphi/2$ — случайное совпадение, поскольку это отношение полностью определяется другими заданными пропорциями. Но остается вопрос, заметили это совпадение или нет архитекторы храма, и могли ли они придавать таким совпадениям особое значение.

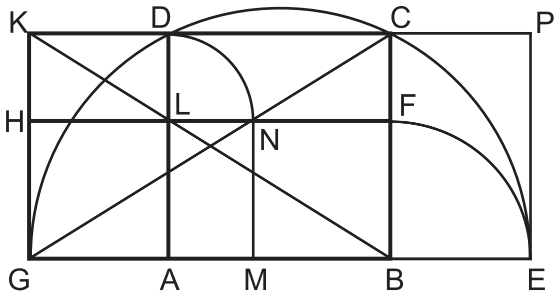


Рис. 2.

Возможно, первым свойством, которое выделило золотой прямоугольник, является пропорциональность прямоугольников $GADK$ и $GBCK$. Т.е. *вырезание в золотом прямоугольнике квадрата, оставляет прямоугольник, подобный исходному.* Самый простой путь к этому: построение FH, появление квадрата $GALH$, построение диагонали KB, узнавание ее прохождения через точку L, построение дуги DN, проведение диагонали GC, узнавание ее прохождения через точку N, утверждение о равенстве прямоугольников $GMNH$ и $GADK$. Отметим, что *архитектору III — II тысячелетий до н.э. не надо было доказывать себе верность каких-либо находок, он доверял визуальным результатам качественно исполненного на большой площади с помощью веревки построения.*

Если время этого поиска допускает умение решать квадратные уравнения, то могли прийти к нахождению прямоугольника $a\times(a+y)$, вырезание в котором квадрата $a\times a$ оставляет прямоугольник $a \times y$, подобный исходному, и другим путем (рис. 3).

Из подобия исходного прямоугольников $ABCD$ и $AEFD$ (остаток после вырезания квадрата) следует:

$$a/(a + y) = y/a. \tag{1}$$

Или:

$$y^2 + ya = a^2. \tag{2}$$

Решение $y = (\sqrt{5} - 1) \cdot a/2$ подсказывает построение, которое и приведено на рисунке 3. Назовем нахождение такого прямоугольника *первым золотым построением.*

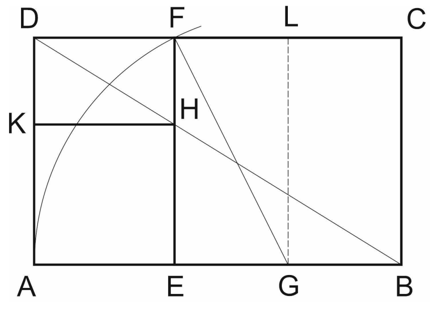


Рис. 3. Построение пропорциональных прямоугольников $ABCD$ и $AEFD$.

Естественно, повторное вырезание в прямоугольнике $AEFD$ квадрата $AEKH$ приводит к появлению прямоугольника $KHFD$, подобного двум предшествующим, а это значит, что его вершина H лежит на диагонали DB. Кстати, способ нахождения точек A и H, представленный на рисунке 3, полностью тождественен началу построения при "делении отрезка в среднем и крайнем отношении", предложенному Евклидом в "Началах" (Книга II, предложение 11). Но построение рисунка 3 могло появиться и почти случайно. В архитектуре, как минимум, с начала III тысячелетия до н.э. использовали пропорцию $\sqrt{5} : 2$, которую получали почти по рисунку 3, надо только убрать "двойной квадрат" (прямоугольник с отношением сторон равным 2:1, архитектурный термин) $GBCL$ [1, с. 139]. Присоединение к исходному двойному квадрату ($GEFL$) второго ($GBCL$) и могло привести к рассматриваемому построению.

Второй путь появления золотой пропорции связан с методом построения пропорциональных прямоугольников в Древнем мире — последовательного переноса диагоналей, который начал применяться в Египте не позднее XXX века до н.э. и мог способствовать открытию теоремы Пифагора там еще в первой половине III тыс. до н.э. [1, с. 140; 7]. Если мы хотим возвести трехнефный храм, используя этот метод, то перед нами стоит задача найти такой стартовый прямоугольник $OA_1C_1B_1$, последовательный перенос диагонали которого привел бы к равенству $OA_1 = A_2A_3$ (рис. 4). Введем обозначения $OA_1 = a$, $OC_1 = c$ и $OB_1 = b$. Из подобия треугольников OA_1C_1 и равенства OA_2C_2 и $OA_1 = A_2A_3$ получаем: $c/a = (c + a)/c$. Или:

$$c^2 - c \cdot a = a^2. \tag{3}$$

Решение (3): $c = \Phi \cdot a$. Если мы знаем теорему Пифагора, то из (3) следует, что $b^2 = c \cdot a$ — второй катет треугольника OA_1C_1 — среднегеометрическое из основания и гипотенузы. Т.е. стороны треугольника OA_1C_1 образуют геометрическую прогрессию.

Стоит только добавить пару дополнительных линий C_1D_1 и C_2D_2, и получается почти идеальное деление прямоугольного пространства храма на три части (нефа), где равные между собой боковые нефы получаются шире центрального: $OA_1 = \Phi \cdot A_1A_2$. Назовем рисунок 4 — *Вторым золотым построением.* Через него в архитектуру Древнего мира и могла прийти пропорция 14/11. Появиться треугольник OA_1C_1 мог двумя способами, приведенными на рисунке, но, скорее всего, — из прямоугольника *первого золотого построения* в результате переноса большей его стороны.

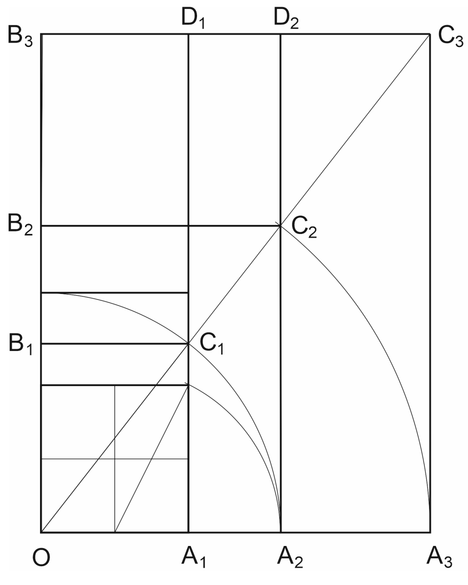


Рис. 4. Построение геометрической прогрессии с $OA_1 = A_2A_3$. Треугольник OA_1C_1 — Кеплера, $OA_2 = \Phi \cdot OA_1 = \varphi \cdot OA_3$; $OB_1 = \sqrt{\Phi} \cdot OA_1$; $OB_2 = \varphi \cdot OB_3$.

Месопотамия

В истории искусства Месопотамии, в качестве примера использования первого золотого построения, можно выделить Абу-Хаббах — доску, найденную в 1881 году в Сиппаре, с изображением жрецов Храма Солнца и датируемую IX веком до н.э. [23]. Пропорции этой доски и барельефа на ней близки к числу Фидия[7] и выделяются два золотых сечения: $DC/BC \approx DE/DC \approx \varphi$ (рис. 5).

[7]Полные размеры этого артефакта ("The Sun God Tablet") 29,2 см на 17,8 см. Их отношение 0,610. Но если рассмотреть прямоугольник, очерчивающий текст с барельефом и выделенный на доске, то его пропорции между φ и 5/8 (ближе к φ).

Но поскольку могло быть случайное совпадение, то требуются дополнительные доводы в поддержку исходного утверждения, без которых этот пример вызывает недоверие у многих исследователей.

Результаты такого анализа приведены на рисунке 6, где не только отношение размеров барельефа, но и композиция рисунка хорошо соответствуют гипотезе о применении золотого сечения. Использование дополнительных делений по φ, кроме четырех основных, говорит не только о большой вероятности применения золотого сечения, но и о дальнейшем развитии этого приема к IX веку до н.э. При этом выделяется, как минимум, двукратное последовательное вычитание квадрата из прямоугольника с отношением сторон Ф. Можно считать, что тогда уже знали, что при этом опять образуется золотой прямоугольник.

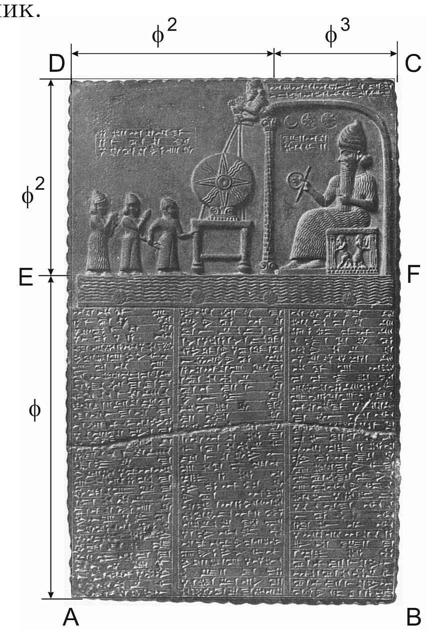


Рис. 5. Вавилонская Абу-Хаббах доска, Сиппар, 860 – 850 гг. до н.э., Британский музей, № 91000. $AD = 1$; $ABFE$ — квадрат.

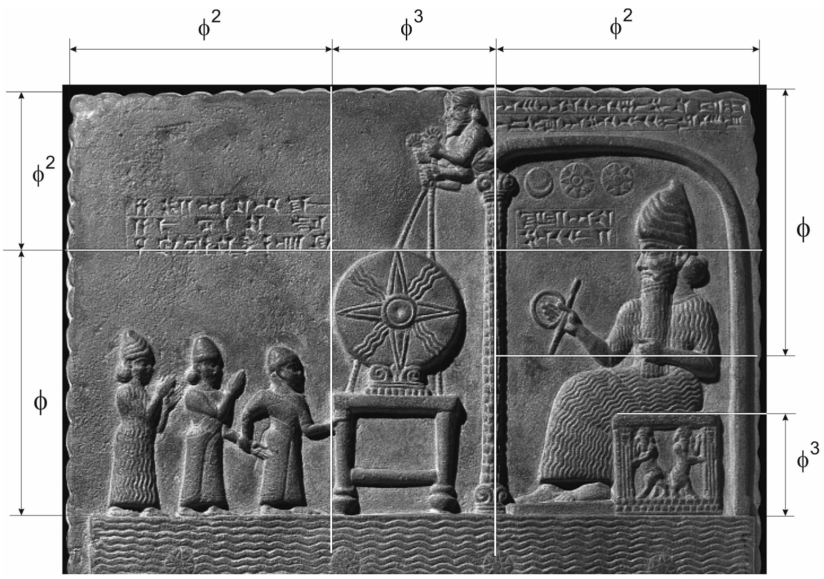


Рис. 6. Абу-Хаббах доска, фрагмент; доли единичных высоты и ширины.

Вавилонские математики IX века до н.э. умели решать квадратные уравнения вида (2) и знали теорему Пифагора, а значит, найдя $y = \varphi \cdot a$, могли прийти к способу построения золотого прямоугольника, представленному на рисунке 3.

Но золотая пропорция могла выделиться в Месопотамии еще в шумерской цивилизации, во второй половине IV тысячелетия до н.э. Белый храм в Уруке, построенный в то время, имел размеры основания 17,5 на 22,3 м, для отношения которых есть подходящая дробь 14/11 ($\varepsilon = 0,12\%$). К северу от храма, на террасе, есть остатки площадки для огня размерами около $2,2 \times 2,8$ м, имевшей ту же пропорцию. Второе золотое построение качественно соответствует Белому храму. Если вместо внешних размеров храма взять размеры видимого приподнятого основания храма, то линии A_1D_1 и A_2D_2 проходят по линии стен (рис. 7). При этом линия B_2C_2, делящая длину храма в золотом сечении, достаточно точно разделяет постамент для статуи бога и соединенную с ним чашу для подношений.

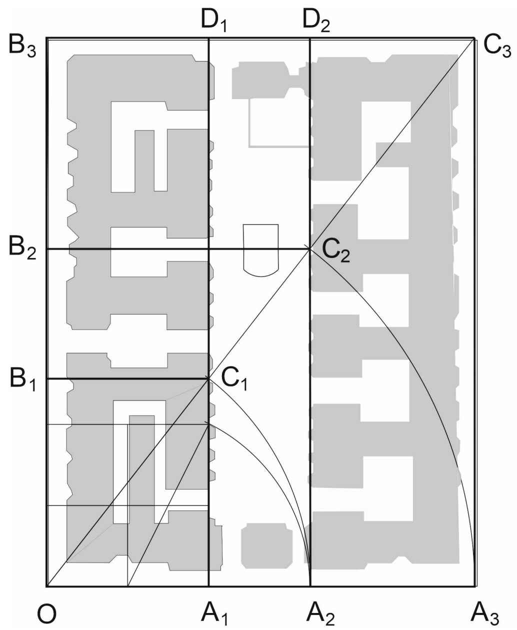


Рис. 7. Белый Храм (Урук). Соединение с чертежом рис. 4 по основанию храма.
$A_1A_2 = \varphi^3 \cdot OA_3$, $OA_1 = \varphi^2 \cdot OA_3$, $OB_2 = \varphi \cdot OB_3$.

Уравнение (3), возможно, первое квадратное уравнение в истории математики, вызванное к жизни архитектурными потребностями. Но как в IV тысячелетии до н.э. могли построить треугольник Кеплера?! Самый простой способ — из первого золотого построения. Но тогда придется признать, что оно появилось еще раньше, и наиболее вероятный путь его получения — стартовать с вписанного в полукруг квадрата.

Как возвести Белый храм, зная второе золотое построение? Можно было использовать веревочный метод, но в контексте возникновения в Египте во времена фараона Джосера (III династия, XXVII в. до н.э.) мерных модулей, связанных пропорцией 14/11 [4], интересен модульный подход. Если исходить из него, то надо создать комплект модулей $l_1 - l_4$, изображенный на рисунке 8. Тогда при OA_3 равном $n\,l_2$, $OA_2 = A_1A_3 = n\,l_3$, $OB_2 = n\,l_1$, а $OB_3 = n\,l_4$. На первый взгляд, это построение представляется достаточно сложным для IV тысячелетия и мог реализовываться промежуточный вариант, когда размеры основания всего храма определяются с использованием двух модулей l_1 и l_2, а разметка храма делается на месте с помощью веревки в обратном порядке, стартуя с проведения диагонали OC_3 и дуги A_3C_2 (см. рис. 7).

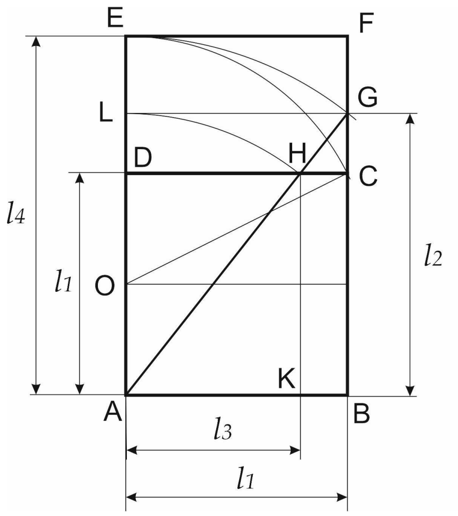


Рис. 8. Построение треугольника Кеплера (ABG), его свойства и мерные модули. Старт с OC. $ABCD$ — квадрат. $AO = OD$; $AE = \Phi \cdot AB$; $AB/BG = BG/AG$.

Египет

Ранее была высказана гипотеза, что еще до появления первых "истинных" пирамид (IV династия), во времена III династии, два мерных модуля, (mH_1, mH_4)[8] имели отношение 14/11 и были определены их размеры [4]. Верность этой гипотезы подтверждается размерами пирамиды GI-b первой жены Хеопса, имеющей тот же уклон что и Великая. Длина ее основания, 49,5 м [3, с. 284], равна 100 mH_4, а высота — 50 mH_1 ($mH_1 = 63,3 \pm 0,3см$). Пирамиды GI-a, CI-c жен фараона имеют длину основания 49 и 47 м [3, с. 284] или 98 и 94 mH_4 соответственно. Т.е. появление пропорции $\sqrt{\Phi}$ (14/11) в Египте, как минимум, за сто лет до возведения истинных пирамид, не связано с ними.

Пирамиды фараона Снофру в Мейдуме и Хеопса в Гизе имеют уклон 14/11. Если выбор треугольника Кеплера в качестве базового для трехнефных храмов обусловлен вторым золотым построением, то для пирамид — не совсем понятен. Теоретически открыть свойство образования сторонами этого треугольника геометрической прогрессии египтяне могли только, если знали теорему Пифагора. Но построение треугольника AHK (рис. 8) могло появиться раньше, не позднее начала III династии, и с его помощью могли обнаружить существование этого свойства, не зная теорему Пифагора. Достаточно было провести дугу HL с центром в A (рис. 8), построить отрезок, исходящий из G и параллельный CD, и визуально убедиться, что они совпадают в точке L. Из подобия треугольников AHD и AGL следует $AL \times AH = AD \times AG = AB \times AG = AL^2$. Отметим, что это построение соответствует общему багажу архитектурных приемов Египта того времени. Но для совершения подобных математических открытий жрецы-математики должны были сделать очень качественное построение, т.е. выбрать достаточно большую базу AB, не меньшую локтя, и не ошибиться в построении прямых углов. И должны быть мотивированы желанием открыть неизвестные свойства выбранного треугольника, что говорит о развитии уже теоретической математики, выходящей за пределы практических нужд, но, возможно, подталкиваемой религиозными воззрениями. Всё это представляется несколько избыточным с точки зрения архитектурных потребностей того времени. Более вероятно, что пара модулей (l_1, l_2) пришла в Древний Египет из Месопотамии, примерно в конце IV – начале III тысячелетий, и была включена Хесиром в комплект мерных модулей, возможно, даже без знания связующего их построения, рис. 8. При этом mH_1 (l_2) произошел от mH_4 (l_1).

Равенство половины основания и высоты Великой пирамиды 55 и 70 египетских оргий соответственно ставит вопрос о способе их получения. Возможны три варианта:

[8] mH_n: m — модуль; H — Хесира; $n = 1$ — основной; $n = 2, 3, 5$ — дробь для $\sqrt{n}$; $n = 4$ — $\sqrt{\Phi}$.

А) Дробь 14/11 была найдена теоретически. Щетников предлагает вариант нахождение дроби 123/55 для $\sqrt{5}$, который, на первый взгляд, представляется несколько сложным для XXVI века до н.э. [13]. Проще она получается как среднее арифметическое между двумя "сопряженными" дробными приближениями к $\sqrt{5}$: $11/5(a_1)$ и $25/11$ (a_1*) $(a_1 \cdot a_1* = 5)$. Потом он предполагает вычисление приближения для Φ — 89/55 и приравнивание половины основания 55 оргиям, что дает длину апофемы 89 оргий. Высота в 70 оргий находится или из теоремы Пифагора $(55^2 + 70^2 = 89^2 + 4)$, или как приближенное среднегеометрическое $\sqrt{55 \cdot 89} = \sqrt{4900(1 - 5/196)} \approx 70$ [Ibid].

B) Дробь 14/11 была найдена эмпирически. Если исходить из рисунка 8, то для эмпирического нахождения дроби 14/11, при равенстве AB одному локтю в 28 пальцев, необходимо обнаружить, что AK равно 22 пальца. Мог ли так быть определен модуль mH_4 времен Джосера, в $\sqrt{\Phi}$ раз меньший основного мерного модуля Хесира [4]? Модуль mH_1 равен 8 ладоням (32 пальца), что не дало бы тогда найти дробь 11/14. Но такой поиск несколько излишен и после введения царского локтя — для архитектурных потребностей достаточно найти модуль в $\sqrt{\Phi}$ раз больший исходного.

C) Дробь 14/11 не была найдена, и использовали два модуля, связанных геометрическим построением, отношение которых равно $\sqrt{\Phi}$ (рис. 8). Основание Великой пирамиды равно 440 rc, а числа, кратные 22, могли использоваться в архитектуре того времени без всякой связи со знанием дроби 123/55 для $\sqrt{5}$. 440 mH_1 равна ширина погребального комплекса Джосера, 220 Nbj $(Nbj = 65,6$ см) — основание пирамиды Снофру в Мейдуме [4]. И в трех более поздних пирамидах V династии (XXVI — XXV вв. до н.э.), с другим уклоном, длина основания кратна 22 [22, App]. Если считать, что размеры оснований пирамиды выбирались так, чтобы ее высота была равна целому числу у.е., что верно для всех больших пирамид IV – V династий, когда их уклон можно определить, и он отличен от 14/11, то четыре пирамиды, построенные почти сразу после Великой: ее спутница и жен Хеопса, имеющие тот же уклон, что и у Великой пирамиды, поддерживают вариант незнания дроби 14/11 — длины их оснований в царских локтях не кратны 11 [22, App.]. Но, как писалось выше, размеры малых пирамид GI-a, GI-b и CI-c могли быть заданы двумя мерными модулями Хесира, связь между которыми, скорее всего, определялась геометрически. Отметим, что и длины оснований четырех пирамид V династии, имеющих уклон 14/11, выраженные в царских локтях $(10, 50, 150, 150)$ [22, App], не кратны 11. Их высота не равна целому числу царских локтей. Это побуждает предположить, что во времена IV и V династий могли использовать два модуля: царский локоть и в $\sqrt{\Phi}$ раз больший его, определенный чисто геометрически, без знания дроби 14/11.

Для $\sqrt{\Phi}$ первые две подходящие дроби: 4/3 $(\varepsilon = 4,8\%)$ и 5/4 $(\varepsilon = 1,8\%)$ равны уклонам пирамид Хефрена и Микерина в Гизе. Не могли ли их уклоны быть результатом поиска дробного приближения к отношению пока только геометрически связанных модулей? В случае положительного ответа на этот вопрос, всю историю создания пирамид Гизы можно рассматривать и в контексте этого объединяющего их поиска. Причем, получение на первом шаге священной египетской тройки (3, 4, 5) могло только поддержать чувство значимости и желанности находки. Во времена Хеопса искался модуль, в $\sqrt{\Phi}$ раз больший царского локтя, т.е. BG при $AB = 28$ пальцев (рис. 8). При прямой попытке измерить BG в пальцах получим приближение — 36, что дает для BG/AB дробь 9/7, которая отличается от 14/11 на 1,0%. Дробь 9/7 использовалась для уклона пирамиды жены Микерина (GIII-a) [7]. Длина половины ее основания равна $5 \cdot 7$ mH_1, а высота — $5 \cdot 9$ mH_1 и египтяне могли найти квазипифагорову тройку $(35, 45, 57) : (35)^2 + (45)^2 = 57^2 + 1$ [Ibid]. Отметим, что $\dfrac{9}{7} = \dfrac{4+5}{3+4}$.

Для размеров каркасного прямоугольного треугольника пирамиды Микерина Щетниковым была предложена квазипифагорова тройка (20, 25, 32) : $(20)^2 + (25)^2 = 32^2 + 1$ [13], которую египтяне также могли знать [7]. Если египтяне искали треугольник с геометрической прогрессией сторон, эти две квазипифагоровы тройки можно было использовать для нахождения дроби 14/11. $\dfrac{32}{25} > \dfrac{5}{4}$ и искомая пропорция больше 5/4. Поскольку $\dfrac{57}{45} < \dfrac{9}{7}$, то искомая пропорция меньше 9/7. Среднеарифметическое 5/4 и 9/7 равно $\frac{71}{56} \approx \frac{70}{55} = \frac{14}{11}$, но $\frac{14}{11}$ могли получить и как $\frac{5+9}{4+7}$.[9] Но остается вопрос, когда это было сделано.

Имеет смысл проанализировать памятники искусства на предмет использования в них прямоугольников с пропорцией 14/11. Среди предметов выделяется "Гроб Сенби" (1918–1859 гг. до н.э.) с высотой и шириной 70 на 55 см (28×22 египетских дюйма), что хранится в Кливлендском художественном музее. Его размеры однозначно говорят, что к тому времени дробь 14/11 была найдена. Но как показывает анализ пирамиды-спутницы Нейт (XXII в. до н.э.), жены Пепи II, имеющей длину основания 70 ладоней и уклон 9/5, дробь 14/11 могла быть найдена к XXII веку до н.э.[10] [5, с. 63-64]. Среди архитектурных памятников пропорцию 14/11 имеют интерьер храма Аменхотепа, сына Хапу, в Карнаке (XV — XIV вв. до н.э.) и Северный дворец Эхнатона в Тель-эль-Амарне (1348 г. до н.э.).

Есть ли другие факты, подтверждающие представление о введении золотого сечения в древнеегипетскую архитектуру? Первый претендент — мастаба визиря Хемаки (XXX век до н.э.), которая имеет пропорцию 11:5 ($26 \times 57,3$ м), и погребальная камера в ней, с отношением сторон $8:5$ ($4,8 \times 7,7$ м) [1, с. 45]. Поскольку при использовании для $\sqrt{5}$ дроби $11:5$ получим $\Phi = 8/5$. Но существует мнение, что прямоугольник с отношением сторон 8/5 мог появиться как результат реализации чувства равновесия формы [16]. Р. Амхейм существование такого предпочтения объясняет тем, что отношение, приближающееся к центрической симметрии квадрата, не дает преимущества ни в одном направлении и, следовательно, выглядит как статическая масса; тогда как слишком большая разница в двух измерениях подрывает равновесие: более длинное измерение лишено противовеса, обеспечиваемого более коротким. Соотношение, приближающееся к золотому сечению, позволяет форме оставаться на месте, придавая ей естественное живое напряжение [Ibid]. Это освобождает от необходимости искать математические основания для появления этой пропорции, но не говорит, что этих оснований точно не было.

Второй претендент: равнобедренный треугольник с отношением высота/основание, равным $5:8$ (возможный первый случай применения — пирамида Микерина), который знаменитый французский историк архитектуры Виолле-ле-Дюк назвал "египетским", настолько часто он встречается в ее архитектуре. Историки архитектуры связывают его происхождение с пропорцией треугольника, образованного сечением пирамиды по ребрам, при уклоне боковой грани в $\sqrt{3}$, когда сечение по апофеме дает равносторонний треугольник [22, с. 11–12]. Отметим, что это получается только теоретически, при использовании для уклона дроби 7/4, а для расчета $\sqrt{2}$ — 7/5. В реальности треугольник $5:8$ никогда не образуется в сечении по диагонали основания, если задавать уклон пирамиды известными приближениями для $\sqrt{3}$. При использовании для сечения пирамиды по апофеме равностороннего треугольника, отношение высоты пирамиды к диагонали основания равно $\sqrt{3}/(2\sqrt{2})$, для которого есть подходящие дроби 8/13 и $11/18 < \varphi < 5/8$. При задании уклона в 7/4 для $7/(8\sqrt{2})$ есть подходящая дробь $21/34 < \varphi$. Да и применение пропорции 5/8 в прямоугольнике, в который всегда можно вписать соответствующий равнобедренный треугольник, до эпохи пирамид, говорит о другом пути появления этой дроби. И если Щетников правильно определил уклон пирамиды Микерина, то египетский треугольник появился раньше первой пирамиды с уклоном в 7/4. Эти факты оставляют вопрос об истории появления дроби $5:8$ открытым. Но появление дробей 8/13, 11/18 и 21/34 в этом рассмотрении без всякой связи с золотым сечением заставляет быть осторожнее в интерпретациях.

После нахождения дроби 9/4 для $\sqrt{5}$ получение приближения 5/8 для φ могло обосновать выбор этой пропорции, если она была введена ранее без связи с золотым сечением, и увеличить частоту ее использования. Представление, что пропорция 5/8 могла появиться и без связи с золотым сечением,

[9] Не могли ли египтяне открыть общее правило улучшения дробного приближения к неизвестной величине: если a/b и c/d — дробные приближения к x, и $a/b < x < c/d$, то и $(a+c)/(b+d)$ — также является приближением к x, и $a/b < (a+c)/(b+d) < c/d$?

[10] В [5] в список пирамид с такими пропорциями, на основании данных из книги Лехнера «The complete pyramids», ошибочно была включена одна из малых пирамид Сенусерта I. Надо отметить, что в этой книге часто приводимые углы уклона и размеры основания и высоты пирамид не соответствуют друг другу.

основано на отсутствии как убедительных находок с золотым сечением, так и понимания пути его включения в архитектурный инструментарий. После обретения последнего, особенно после подтверждения использования первого золотого построения в архитектуре, ситуация может кардинально измениться, и представление о выборе пропорции 5/8, исходя из чувства динамической уравновешенности или переноса, стартующего с удвоенного до равнобедренного египетского треугольника (3, 4, 5), станет менее предпочтительным, чем ее непосредственная связь с золотым сечением. Нахождение пирамиды с отношением высота/основание (h/a), равным 8/13, поддержало бы эту версию. И такая пирамида есть! Это хорошо сохранившаяся пирамида Сахура, фараона из пятой династии (XXV в. до н.э.), в Абусире с уклоном в $50^\circ\ 54'$ [22, App.]. Для тангенса этого угла есть подходящая дробь 16/13 ($\varepsilon = 0,02\%$), что дает $h/a = 8/13$. Склонность египтологов представлять длины основания пирамид (a), по возможности, в круглых числах царских локтей привела к утверждению, что $a = 150\ \ rc$ [Ibid]. При $a = 78,1$ м [3, с. 344], получается $rc = 52,0$ см. В работе [4] отмечалось, что при принятом диапазоне величин для rc ($52,5 \pm 0,4$ см) такие длины всегда можно представить целым числом царских локтей. В данном случае $78,1$ м $\approx 149 \cdot 52,4$ см и 149 — простое число, не позволяющее высказать какую-либо идею о заложенной пропорции, а 52,0 см выходит за пределы в настоящее время принятых границ для царского локтя. Но $a = 260\ \ dsr$ при $dsr = 30,0$ см ($4/7\ \ rc$, “фут”), каким он и является при $rc = 52,5$ см. Т.е. a в dsr делится на 13, что обосновывает утверждение об использовании дроби 16/13 для уклона. При этом h и $a/2$ равны 160 и 130 dsr.

Гранитная крышка саркофага в мастабе 17, расположенной рядом с пирамидой Снофру в Мейдуме и относящейся к началу IV династии, не совпадает по ширине и длине с размерами самого саркофага, будучи несколько уже и длиннее его — 56,5 на 91,2 дюйма [18, с. 43]. Это отклонение можно объяснить сознательным выбором пропорции крышки, отличной от пропорции саркофага, поскольку для нее есть две подходящие дроби: 5/8 ($\varepsilon = 0,89\%$) и 13/21 ($\varepsilon = 0,076\%$). Погрешность первой представляется слишком большой для гранитного изделия таких размеров, а вторая — вполне вероятна. Стоит отметить, что подходит и $0,62$ ($\varepsilon = 0,078\%$). Видимо, крышка делалась позже саркофага, и архитектор счел достаточно важным сделать крышку с этой пропорцией, чтобы отойти от пропорции самого саркофага. При этом в размеры саркофага могли заложить и пропорцию 8/5, которая является подходящей дробью для отношения его ширины к высоте ($62,4$ д./39,2 д.) с погрешностью в $0,5\%$ [18, с. 46]. Возникает вопрос: не был ли изменен первоначальный проект крышки в связи с нахождением дроби 13/21 (0,62) для φ?

Приведенные факты являются доводами за знание золотого сечения в Древнем Египте, хотя, возможно, и без полного понимания его свойств. Но остается вопрос, как оно впервые проникло в его архитектуру? Самый простой способ — использование вписанного в полукруг квадрата при проектировании мастабы, погребального или дворцового комплекса. Анализ комплекса пирамид в Гизе, выполненный на основании измерений и чертежей $M\&R$ [20], подтверждает эту версию (рис. 9).

Результаты анализа:

1. Прямоугольник ABCD внутренней части «заднего прицепа» (“back sight”) пирамиды Микерина имеет пропорцию 0,62 или 13/21[11];

2. Отношение расстояния от северной стороны пирамиды Хефрена до линии южной стороны пирамиды Хеопса (FG) к стороне пирамиды Хефрена примерно равно 8/13;

3. Отношение расстояния от западной стороны пирамиды Хефрена до линии оси $S-N$ пирамиды Микерина (HI) к стороне пирамиды Хефрена примерно равно 8/13;

4. Отношение расстояния от восточной стороны пирамиды Микерина до входа в его заупокойный храм (KL), совпадающего с расстоянием до ограждения пирамиды Хефрена, к стороне пирамиды Микерина равно φ. Отметим, что различия в измерении длины основания пирамиды Микерина разными исследователями вносят сложность для более точного утверждения;

[11] Какая из них была использована, зависит от анализа площадки. Если ее длина окажется кратной 50 или 100 известных мерных единиц, то задавалась десятичная дробь 0,62.

5. Для отношения размеров прямоугольника $MNOP$ (354 м/ 575 м) есть подходящая дробь 8/13 ($\varepsilon = 0,04\%$);

6. Для отношения размеров прямоугольника $RSOP$ (739 м/ 575 м) есть подходящая дробь 9/7 ($\varepsilon = 0,04\%$);

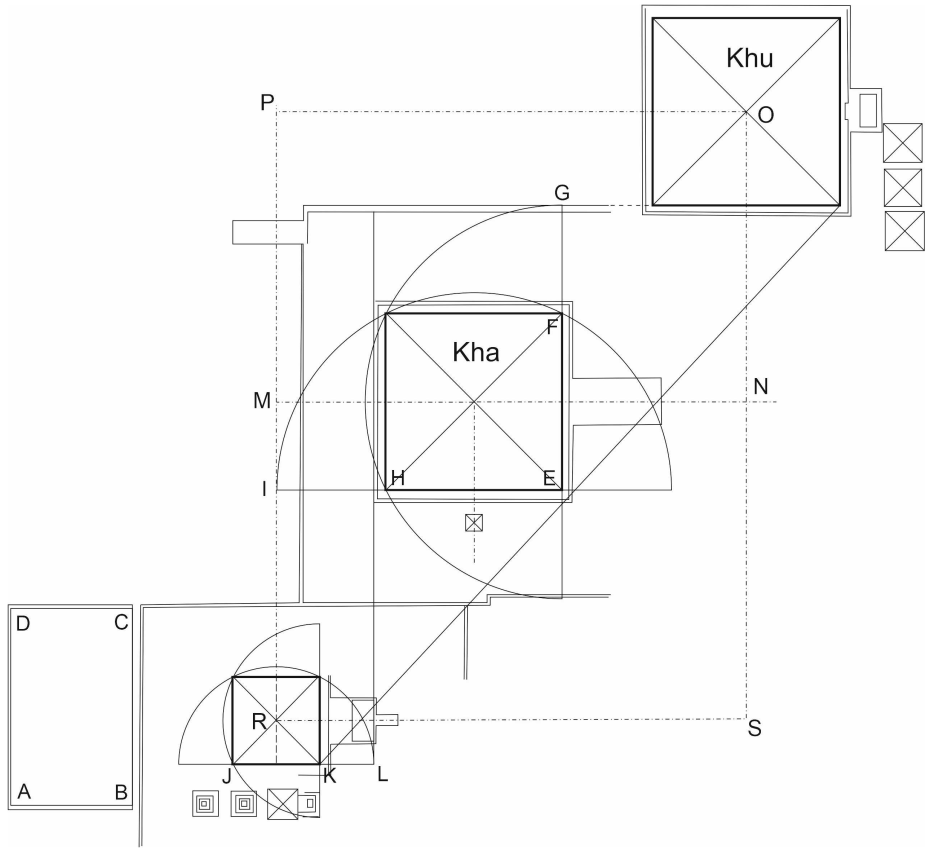


Рис. 9. Анализ комплекса пирамид Гизы. Khu — пирамида Хеопса, Kha — Хефрена.

Пропорция "заднего прицепа" $ABCD$ рассчитана по северной стене, которая на чертежах несколько длиннее южной [20, с. 4]. Возможно, во время измерений $M\&R$ угловая часть южной стены была разрушена, а изначально она была по длине, как северная. Относительные положения пирамид Хефрена и Микерина (FG и HI), как и положение входа в заупокойный храм (KL), могли задаваться только вписыванием квадрата основания пирамид в полукруги, без определения отношения возникающих расстояний к длинам основания пирамид. Но использование вписывания основания пирамид в полукруг для определения взаимного положения пирамид в Гизе было ассиметричным, с вниманием только к одной стороне, без введения в тему пропорции $\sqrt{5} : 1$, что уже выделяет золотой прямоугольник и говорит о применении первой половины построения рисунка 2.

Если длина MN определялась построением точки I, то пропорции прямоугольника $MNOP$ (8/13) — случайность, и наоборот. Здесь важен вопрос: заметили архитекторы пирамиды Микерина, которые выбором места ее возведения создавали пропорции всему комплексу, эту случайность? Пропорция прямоугольника $RSOP$, совпадающая с уклоном пирамиды жены Микерина, является доводом за подсчет и пропорции прямоугольника $MNOP$. Хочется отметить, что подобные "случайности", осмысленные в контексте общего архитектурного подхода, достаточно часто встречаются при анализе архитектуры, чтобы обратить на них внимание. Мысль "«специально выбрано так, чтобы произошло совпадение" стоит отдельного рассмотрения. Но если архитекторы заметили его, то могли счесть это знаком верности подхода в проектировании комплекса, поскольку не могли еще осознать его "случайность". Оно произвело бы очень сильное впечатление, могло вселить уверенность в правильности сделанного выбора.

Использование для задания пропорций прямоугольника $RSOP$, образованного осями пирамид Хеопса и Микерина, той же дроби, что и для уклона пирамиды жены Микерина, если это не случайное совпадение, говорит, что она была найдена еще до строительства пирамиды Микерина, но не использована в ней. Возможно, вариант, воплощенный в ней, представился важнее, чтобы дробь 9/7 "отдать" пирамиде жены. Отметим, что пирамиды Микерина и его жены — единственная пара в Гизе, у которых принятые уклоны не совпадают. Не является ли это следствием придачи большого значения сразу двум находкам, которые хотелось воплотить в пропорциях пирамид? Но египетский равнобедренный треугольник 5 : 8 нельзя назвать такой уж большой находкой, в отличии от идеальной квазипифагоровой тройки (20, 25, 32), для того времени — эта пропорция использовалась, как минимум, с XXX века до н.э. Но есть повод сомневаться в находке квазипифагоровой тройки (20, 25, 32). Длина основания пирамиды оценивается в: $105,5 \pm 0,1$ м (Петри [19, с. 17]), 108,4 м [3, с. 291] или 109 м (Британника). Т.е.: 201, 208, 209 rc. В этом случае тройка (20, 25, 32) не появляется и причина предпочтения уклона в 5/4 над 9/7 не видна. К тому же остается проблема определения уклона пирамиды Микерина, поскольку измерения дают разброс от $50^0\ 30'$ до $52^0\ 13'$ [19, с. 18]. Ее уклон может быть как любым дробным приближением к $\sqrt{5}-1$, что дает для отношения высоты пирамиды к диагонали ее основания приближение к φ, так и 14/11, и 9/7 (наименее вероятный, но возможный). Робинс определяет уклон в 14/11 [21]. В этом случае можно предположить, что использовалась пара известных модулей, геометрически связанных пропорцией Φ. Могли взять пару модулей (rc, Φ rc), которая использовалась в Великой. Тогда длина основания могла быть равна и 208 rc. Возможно и задание уклона в 16/13, который попадает в диапазон обмера шести одиночных гранитных блоков (угол уклона $51^0\ 0' \pm 9'$), сдвинутых с места, что не позволяет утверждать, что они изначально стояли на горизонтальной поверхности [19, с. 18]. Для него $h/a = 8/13$ — пропорция многих выделенных выше прямоугольников комплекса пирамид в Гизе. Этот вариант интересен еще тем, что $208 = 2^4 \cdot 13$, и тогда высота пирамиды равна $2^7 rc$ (7 — число Осириса). Если же взять длину основания, которую предлагает энциклопедия "Британника", то она равна 220 mH_4. Тогда высота пирамиды равна 110 mH_1. Здесь, как и в размерах погребального комплекса Джосера, пирамидах Снофру в Мейдуме и Великой [4], длина основания получается пропорциональной 220 у.е.

Эти рассуждения, несмотря на неопределенность с уклоном пирамиды Микерина, увеличивают вероятность, что пропорция прямоугольника $RSOP$ — не случайность, а часть замысла, определившего ее положение. Одновременно, это говорит о большем значении, которое придавали дроби 9/7. Возможно, она была первой достойной находкой дробного приближения к пропорции в $\sqrt{\Phi}$.

* * *

Если по приведенным выше дробным приближениям к $\sqrt{5}$, предположительно найденным еще в III тысячелетии до н.э. — 11/5, 9/4, 47/21, (123/55)[12] и 161/72, более подробно обсуждаемых в [4, 5], — посчитать значения Φ и φ, то получим два набора приближений: 3/5, 5/8, 13/21, (34/55), 89/144 и 8/5, 13/8, 34/21, (89/55), 233/144. Выпишем из них числа в порядке возрастания: 3, 5, 8, 13, 21, 34, (55), 89, 144, 233. Эти числа — члены последовательности Фибоначчи, $F_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, официально открытой в европейской истории Леонардо Пизанским только в начале XIII века. От гипотетически известных египтянам дробей для $\sqrt{5}$ до открытия последовательности Фибоначчи всего два шага. Вопрос только в том, были они сделаны или нет? Эти факты — довод обратить более пристальное внимание на возможность ее появления в Древнем Египте.

Первым, кто предположил, что в Древнем Египте могли знать и использовать в архитектуре числа Фибоначчи, видимо, был египтолог Бадави[13] (1965), но без каких-либо серьезных доводов в поддержку своего утверждения, хотя и с существенным предположением, что равнобедренный египетский треугольник 5/8 мог возникнуть как дробное приближение к числу φ [22, с. 32–56].

[12] В этом абзаце в скобки взяты дроби и числа, в обнаружении которых в III тысячелетии есть причины сомневаться.

[13] Хотя Митала Гика определил отношение апофемы к половине основания в пирамиде Хеопса как 89:55, подчеркнув, что это числа Фибоначчи, еще в первой половине XX века [27].

Снова гипотезу о знании египтянами чисел Фибоначчи выдвинули в 2014 году C. Scott и P. Marketos [24]. Правда, они привели всего пару доводов в ее поддержку:

Пчеловодство в Африке (вероятно, истинный источник происхождения знаменитой последовательности, который Фибоначчи скрыл) уходит своими корнями в Древний Египет;

Золотой браслет, найденный в гробнице царя в Абидосе, предположительно принадлежащий царице Джер и относящийся к первой династии (около 3000 года до н.э.). В центре этого браслета находится цветок маргаритки с 21 лепестками. И хотя число лепестков, равное числам Фибоначчи — не редкий гость на полях мира, но, скорее всего, должна быть веская причина для его переноса на браслет царицы. Между тем, на границе IV и III тысячелетий этот ряд еще не могли открыть математически, он мог появиться только из наблюдений за природой, например, в результате подсчета числа лепестков у маргариток. Наиболее частое число лепестков — 13, 21 и 34 — уже достаточный повод для размышлений. А предположительно найденная перед строительством Великой пирамиды для $\sqrt{5}$ дробь 47/21 [5], дает φ и Φ равные 13/21 и 34/21 соответственно.

Греция

Сейчас принято считать, что доказательство существования иррациональных чисел было получено Гиппасом из Метапонта (574 — 522 г. до н.э.) — пифагорейцем, который нашёл его, изучая отношения сторон пентаграммы, вписанной в правильный пятиугольник (рис. 10), ставшей символом пифагорейцев. Эти отношения определяются числом Фидия, которое Гиппас, скорее всего, выделил лет за сто до гипотетического применения его знаменитым скульптором. Несоизмеримость отрезков пентаграммы связана с иррациональностью $\sqrt{5}$ или отношения диагонали к меньшей стороне двойного квадрата: $d^2 = 5a^2$. Из этого уравнения следует, что, если существует такая дробь m/n, где m, n — целые взаимно простые числа, такие что $d/a = m/n$, то $m \sim 5$. Но тогда m^2 пропорционально 25, а $5n^2$ пропорционально только 5 из-за взаимной простоты m и n, что невозможно одновременно при их равенстве. Хотя неизвестно, какой метод применил Гиппас для доказательства иррациональности $\sqrt{5}$, но около 400 года до н.э. применялся метод, описанный Евклидом, в связи с чем он носит название "алгоритм Евклида". Он основан на разложении корня в цепную периодическую дробь. Платон упоминает некоего Феодора, который доказал иррациональность для неполных квадратов от $\sqrt{2}$ до $\sqrt{17}$. Ван дер Варден (1903–1996) считал, что это было сделано с применением этого метода. По нему $\sqrt{5} = (2, \overline{4})$, где черта сверху означает, что находящиеся под ней числа образуют период. Т.е. для $\sqrt{5}$ получается разложение в цепную дробь:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \cdots}}. \tag{7}$$

По этой формуле первые три подходящие дроби: 9/4, 38/17 и 161/72.

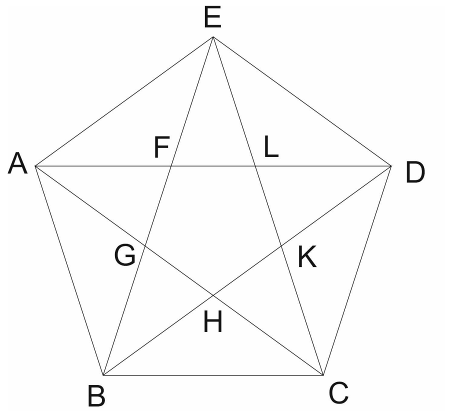


Рис. 10. Пентаграмма и правильный пятиугольник.

Гиппас был современником Пифагора и, вероятно, самым математически талантливым представителем его школы. Ямвлих в сочинении «Об общей математической науке» сообщает о том, что математическая линия пифагорейской школы, возможно, ведёт своё начало не от самого Пифагора, а от Гиппаса. Но Гиппас не был согласен с Пифагором в одном очень важном пункте учения — сохранения его в тайне. Легенда, передаваемая в разных вариантах позднейшими авторами, говорит о том, что Гиппас был не то убит, не то изгнан из пифагорейской школы, и — опять же, или за то, что он распространил учение Пифагора в письменном виде, или за то, что он раскрыл для непосвящённых построение и свойства пентаграммы и додекаэдра в сочинении «Об иррациональных линиях», которое не дошло до наших дней. В варианте изгнания он погибает на тонущем судне, что было расценено остальными учениками Пифагора, как наказание богами за разглашение тайны.

Пентаграмма служила прекрасным образом, иллюстрирующем основные соотношения для φ и Φ. Если принять $AB = 1$, то $EG = 1$, $EB = \Phi$, $EF = \varphi$, $FG = \varphi^2$. Откуда $\Phi = 1 + \varphi = 2\varphi + \varphi^2$.

Использовалось ли золотое сечение в древнегреческой архитектуре? Что могло подтолкнуть архитекторов и скульпторов Древней Греции к введению золотого сечения в пропорции храма и скульптур, если эта не было перенятой у Египта традицией? Можно предположить следующую последовательность: додекаэдр, как отражение структуры Вселенной по Пифагору — храма, где правят боги — дает намек на пропорции этого величественного здания. Платон планом своего идеального города-государства, в котором каждому из 12 богов отведена своя часть, намекнул, что каждую грань додекаэдра могли соотносить с одним из богов. Но грань додекаэдра — правильный пятиугольник, где золотое сечение — основная его пропорция. А уже из плана храма, дома бога, эта пропорция могла перейти в скульптуры богов.

Существуют доводы за возможное его использование в храме Гефеста, который строился параллельно с Парфеноном [6, с. 31]. В нем φ предположительно используется в качестве добавки к 5 в пропорции h_k/d, где h_k — высота колонны, а d — ее диаметр у основания. В последующем это φ разбивается на слагаемые φ^2 и φ^3, где взятые для φ, φ^2 и φ^3 дроби (11/18, 7/18 и 4/18) соответствуют приближению 20/9 для $\sqrt{5}$, примененному в этом храме для отношения высоты колонны к шагу между колоннами (D). Причем выбор дроби 20/9 обусловлен желанием иметь высоту колонны, равную целому числу футов (mf), поскольку ранее в проекте получилось, что $D = 9\ mf$ [Ibid]. Такое достаточно изощренное применение золотого сечения говорит об уже развитом отношении к этой пропорции, допускающем варьирование.

А в Парфеноне? Полноценный анализ реконструкции храма на предмет использования в нем золотого сечения выходит за рамки этой статьи. Но отметим, что некоторые пропорции Парфенона действительно хорошо описываются золотым сечением. На рисунке 11 приведена часть находок Чернова [11] и автора этой статьи в горизонтальном плане храма. Использовано два модуля: 429 мм, найденный Щетниковым [15] (все размеры на рисунке, кроме двух), и египетский dsr в 298 мм[14] [17].

После Парфенона Иткин возводит храм Аполлона в Бассах, для отношения размеров стилобата которого, $l \times L = 14,63 \times 38,29$ м [2, с. 230], есть походящие дроби: 21/8 ($\varepsilon = 0,3\%$); 34/13 ($\varepsilon = 0,07\%$) и 89/34 ($\varepsilon = 0,016\%$). Имеем отношения чисел Фибоначчи и все более улучшающиеся приближения к Φ^2. При этом шаг между колоннами на торцевом и продольном фасадах выбран разным, что освобождает от зависимости пропорции стилобата от отношения D к l на фасаде [6, с. 27–28]. Можно предположить, что это сделано специально, чтобы L/l можно было приравнять выбранной дроби, которая, кроме перечисленных, могла быть равна и 262/100 ($\varepsilon = 0,11\%$).

[14] Бриго выделяет модуль в 298 мм, но не отождествляет его с египетским dsr и не интерпретирует присутствие в размерах 100 и 162 dsr, как проявление использования золотого сечения.

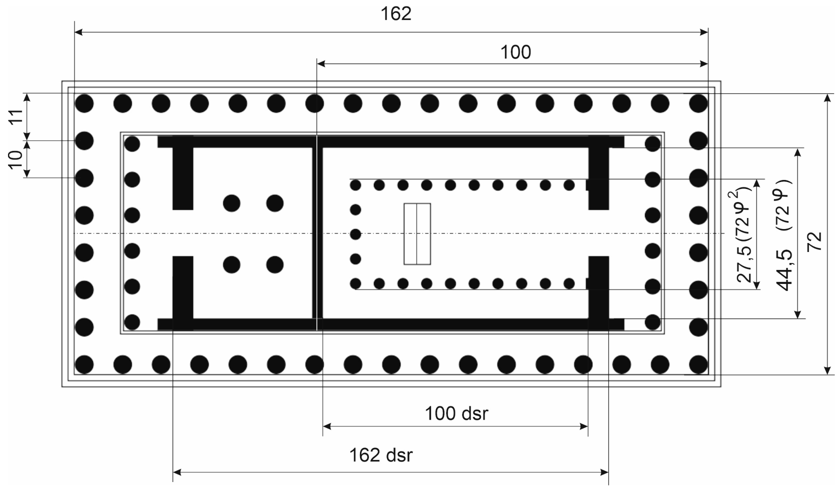


Рис. 11. К пропорциям Парфенона; размеры в $m = 429$ мм и $dsr = 298 - 299$ мм.

* * *

Применение при проектировании храмов дробных приближений для $\sqrt{5}$ и φ могло привести к открытию чисел Фибоначчи. Полученные на первых трех шагах из цепной дроби для $\sqrt{5}$ подходящие дроби — $9/4$, $38/17$ и $161/72$ — дают для φ и Φ: $5/8$, $21/34$, $89/144$ и $13/8$, $55/34$, $233/144$ соответственно. Выстроив числа из этих дробей в порядке их возрастания, получим: 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 — последовательность Фибоначчи.

Возможность этого открытия поддерживает театр в Эпидавре (Пелопоннес, Арголида), построенный в IV веке до н.э. под руководством Поликлита-Младшего из города Аргоса (по словам Павсания). Вокруг его циркульной орхестры расположен театрон из 34 рядов сидений для зрителей, разделенный радиально на 12 секторов лестницами. Во II в. до н.э. сверху были добавлены ещё 21 ряд, разделенных на 24 сектора, после чего в театре стало 55 рядов. 21, 34 и 55 — числа Фибоначчи, что еще в 1985 году подчеркивал греческий исследователь Dimitris Tsimpourakec [26, p. 231]. Он приводит и второй пример аналогичного деления театрона в Додоне (Эмпир, северная Греция) с 34 и 21 рядами сидений, где 34 ряда разделены еще небольшим проходом как $15 + 19$. Tsimpourakec отмечает, что $19/15 \approx \sqrt{\Phi}$ ($\varepsilon = 0,42\%$). При общей сумме в 34, $19/15$ — наилучшее приближение к $\sqrt{\Phi}$.

Используя рисунок 10 легко найти: $1 = \varphi + \varphi^2 = 2\varphi^2 + \varphi^3$. Факт свершения этой находки поддерживает анализ Гефестейона [6]. Если греки продолжили бы это рассмотрение, то получили бы:

$$1 = \ldots = \ldots = 3\varphi^3 + 2\varphi^4 = 5\varphi^4 + 3\varphi^5 = \ldots = F_n \cdot \varphi^{n-1} + F_{n-1} \cdot \varphi^n. \tag{4}$$

Scott и Marketos допускают знание чисел Фибоначчи в Древней Греции, приводя в качестве довода последовательное построение пропорциональных равнобедренных треугольников с углом в 36° при вершине, способствующее открытию формулы [24, с. 32–36]:

$$\Phi^n = F_n \cdot \Phi + F_{n-1}, \tag{5}$$

которая получается и, если (4) умножить на Φ^n. Отметим, что формуле (4) также можно сопоставить аналогичное построение пропорциональных треугольников, только направленное не наружу, как у Скотта, а внутрь исходного.

Заключение

Предлагаемые здесь золотые построения и подтверждения их применения в искусстве Древнего мира говорят, что золотое сечение могло войти в математику через архитектуру еще в конце IV —

начале III тысячелетий до н.э. А в IX веке до н.э. в Вавилоне могли прийти к квадратному уравнению, решением которого является число Фидия.

Конечно, малая сумма приведенных здесь фактов — не достаточное основание для уверенного утверждения, что в Древнем мире могли знать числа Фибоначчи. Но она дает повод к этому допущению и импульс для дальнейшего исследования этого вопроса. Обычное утверждение, что знание тогда чисел Фибоначчи — анахронизм — следствие полного отсутствия каких-либо фактов на эту тему и установившегося представления о чуть ли не предельной прямолинейности развития математики. Но поскольку в древнеегипетской культуре был период упадка после нашествия "гиксосов", приведший к потере достижений эпохи строительства пирамид, а в древнегреческой культуре — четырехсотлетний период упадка после "нашествия народов моря", с полной потерей достижений микенской культуры, то и научные знания тех эпох, кажется, ушли в небытие вместе с культурой. Но они остались в камне, в поэтических, религиозных и эзотерических текстах и ждут своего часа быть явленными миру.

Литература

[1] Всеобщая история архитектуры. В 12 т. Том I. Архитектура древнего мира. Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Стройиздат, 1970.

[2] Всеобщая история архитектуры в 12 т. Том II. Архитектура античного мира (Греция и Рим). - М.: Издательство литературы по строительству, 1973.

[3] Замаровский В. Их величества пирамидыю - М.: Наука, 1981.

[4] Ковалев А.Н. Дроби для $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, квазипифагоровы тройки и появление царского локтя, фута и дюйма в Египте времен Древнего царств // Математическое образование. - № 102. - 2022. - С. 43-54.

[5] Ковалев А.Н. Дроби для $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, квазипифагоровы тройки и появление царского локтя, фута и дюйма в Египте времен Древнего царств, Часть II // Математическое образование. - № 105. - 2023. - С. 54-66.

[6] Ковалев А.Н. К реконструкции трех дорических периптеров V века до н.э. // Вопросы всеобщей истории архитектуры. - Вып. 20. - 2023. - С. 26-34.

[7] Ковалев А.Н. Архитектурная математика и теорема Пифагора в Египте III тысячелетия до н.э. // Математическое образование. - № 110. - 2024. - С. 69-80.

[8] Радзюкевич А.В. Методические основы проведения пропорционального анализа форм памятников архитектуры // диссертация на соискание ученой степени кандидат архитектуры. - Новосибирск, 2004.

[9] Радзюкевич А.В. К вопросу о научном изучении пропорций в архитектуре и искусстве // Ползуновский вестник. — 2014. — № 1. — С. 159-164.

[10] Радзюкевич А.В., Марченко Ю.Г. К вопросу о размерах и пропорциях пирамиды Хеопса // Вестник ТГАСУ. - 2015. - № 1. - С. 9–22.

[11] Чернов А.Ю. Золото Парфенона [Электронный ресурс] URL: http://chernov-trezin.narod.ru/Parfenon-1.htm

[12] Шевелев И.Ш. Принцип пропорции: О формообразовании в природе, мерной трости древнего зодчего, архитектурном образе, двойном квадрате и взаимопроникающих подобиях. - М., Стройиздат, 1986.

[13] Щетников А.И. Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе // Математическое образование. - 2006. - № 3(38). - С. 59–71.

[14] Щетников А.И. Лука Пачоли и его трактат “О божественной пропорции”. Приложение к репринтному изданию 1509 г. // Математическое образование. - 2007. - № 1(41). - С. 33-44.

[15] Щетников А.И. Разметка стилобата Парфенона и других дорических храмов Аттики. - Новосибирск: Новая школа, 2016. URL: https://classics.nsu.ru/schole/assets/files/10-1-shet-2.pdf.

[16] Arnheim Rudolf, The Dynamics of Architectural Forms, Berkeley. - London: University of California Press, 1977. - p. 221.

[17] Brigo Roberto, La matematica e l'architettura del Partenone // BABESCH. - V. 83. - 2008. - p. 99-105.

[18] Hamilton K. Mastaba 17 at Meidum // A Layman's guide. - 22 November 2017.
URL: https:\\www.researchgate.net/publication/321276081_Mastaba_17_at_Meidum_A_Layman's_guid

[19] Hamilton K. The Pyramid of Menkaure, at Giza // A Layman's Guide. - 2nd December 2020.
URL: https:\\www.academia.edu/44619064/The_Pyramid_of_Menkaure_at_Giza_A_Laymans_Guide

[20] Maragioglio V. and Rinaldi C. L'architettura delle Piramidi Menfite, Parte VI, Tavole, Torino, 1962.

[21] Robins Gay, Shute C.C.D. Irrational Numbers and Pyramids // Discussions in Egyptology. - 18. - 1990. - p. 43-53.

[22] Rossi C. Architecture and mathematics in Ancient Egypet. - Cambridge University press, 2003.

[23] Schneider M.S. A Beginner's Guide to Constructing the Universe. - New York: Harper Perennial, 1995.

[24] Scott T.C., Marketos P. On the origin of the Fibonacci Sequence. - MacTutor History of Mathematics, Scotland, 2014.
URL: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Publications/fibonacci.pdf

[25] The geometry of Romanesque and Gothic cathedrals. / Ad Quadratum: The Application of Geometry to Medieval Architecture) (Book Review) // Architectural Science Review. - Vol. 46. - Issue 3. - 2003. - p. 337–338.

[26] Tsimpour$\acute{a}$kec, D, T$\sigma\iota\mu\pi o\upsilon\rho\alpha\kappa\eta\zeta$ $\triangle$. H $\Gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\iota\alpha$ $\kappa\alpha\iota$ $o\iota$ $\varepsilon\rho\gamma\alpha\tau\eta\zeta$ $\sigma\tau\eta\nu$ A$\rho\chi\alpha\iota\alpha$ E$\lambda\lambda\alpha\delta\alpha$. - Athens, 1985.

[27] Ghyka, Matila C., Le Nombre d'Or — Rites et rythmes Pythagoriciens dans le developpement de la civilisation occidentalé. - Paris: Gallimard, 1931.

Ковалев Андрей Николаевич,
Санкт-Петербург.

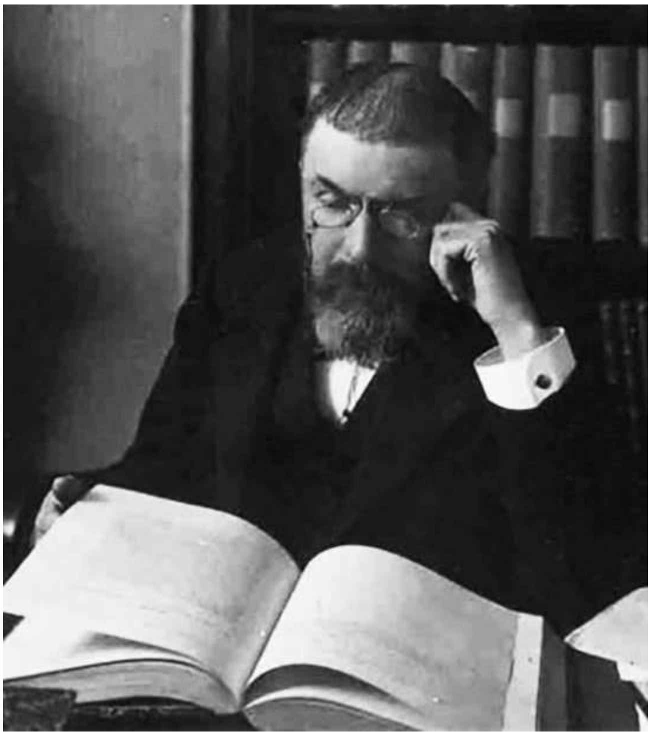
E-mail: ser.levsha@yandex.ru

Анри Пуанкаре о преподавании математики, математическом творчестве и морали

Г. Л. Эпштейн

В этом году исполнилось 170 лет со дня рождения великого французского математика Анри Пуанкаре (1854–1912). В статье приведена краткая биография ученого, отмечены его научные достижения. Основное внимание уделено мыслям Пуанкаре о преподавании математики на всех уровнях — от элементарного до высшего.

Первый важный научный результат Анри Пуанкаре получил в 1878, на 25-м году жизни. Но уже в 1887 он стал членом Академии наук, одной из пяти академий Института Франции, а в 1908 был избран во Французскую академию. Ему досталось кресло 24, в котором некогда восседал Жан-Батист Кольбер, основатель Парижской академии наук. На пути Пуанкаре в математику были "стрелочные переводы", из-за которых он мог оказаться в иных колеях, если бы его педагоги не оценили и не поддержали талантливого юношу вопреки формальностям [1]. Так что само начало его биографии весьма поучительно.



Жюль Анри Пуанкаре (1854 – 1912, X 1875[1]) родился 29 апреля 1854 в Нанси, столице Лотарингии. Его отец Леон Пуанкаре, (Emile Léon Poincaré 1828 – 1892), врач-невропатолог, со временем стал

[1]X 1875 – год окончания Политехнической школы.

профессором медицины и деканом медицинского факультета. Мать мальчика Эжени Лонуа (Marie Pierrette Eugénie Launois, 1830 – 1897) по типичным обычаям того времени целиком посвятила себя семье: мужу, сыну и дочери Алине (Aline Catherine Eugénie, 1856 – 1919). В 9 месяцев от роду Анри стал говорить.

В пятилетнем возрасте Пуанкаре перенёс тяжёлое заболевание — дифтерию с длительным осложнением. В течение многих месяцев он был лишён подвижности и речи. Возможно, это обстоятельство повлияло в дальнейшем на такую особенность его характера, как склонность к уединённым сосредоточенным размышлениям, что иногда внешне воспринималось как удивительная рассеянность [2].

1861

1867

1875

После домашнего первоначального образования под руководством незаурядного педагога Альфонса Гинцелина (Alphonse Hinzelin, 1834 – 1911), инспектора начальных классов лицея Нанси, Анри Пуанкаре с октября 1862 стал учиться в восьмом (по французской нумерации при девятилетнем сроке обучения, то есть во втором по нашей) классе этого лицея. Первое же лицейское сочинение было отмечено ремаркой преподавателя словесности: “маленький шедевр”. В старших классах учитель истории[2] видел в нём будущую звезду исторической науки, а учитель математики сказал мадам Пуанкаре: «Ваш сын будет великим математиком». Соученики Анри вспоминали, как он в 11 лет объяснял им физические основы эха во время школьной экскурсии в горы.

В старших классах французских лицеев была предусмотрена специализация по гуманитарным и естественно-научным направлениям. Пуанкаре выбрал гуманитарное направление и в августе 1871 получил документ о присвоении степени бакалавра словесности (le baccalauréat es lettres) с экзаменационной оценкой “хорошо”, что аналогично нашему аттестату по гуманитарному направлению. Но математика привлекала всё сильнее. В ноябре того же 1871 он стал бакалавром наук (le baccalauréat es sciences) с общей экзаменационной оценкой “удовлетворительно”, поскольку на письменном экзамене ответил по рассеянности вовсе не на тот вопрос, который был ему задан (вывод формулы суммы членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии). Зато, допущенный вопреки правилам к устному экзамену, сдал его блестяще. Поэтому окончательное решение комиссии было положительным.

В начале 1872 он получил первую премию на общенациональном конкурсе по элементарной математике, а также занял второе место на конкурсном экзамене в престижную Лесную школу. Но целью Пуанкаре было поступление в одно из двух самых престижных во Франции высших учебных заведений: Нормальную школу или Политехническую школу. Для этого он ещё два учебных года 1871/72 и

[2] Альфред Рамбо (Alfred Nicolas Rambaud, 1842 – 1905), автор публикаций по истории Византии и России, а также многих других, член Академии моральных и политических наук, министр образования.

1872/73 занимался в дополнительных классах лицея (первый год по элементарной математике, второй год по специальной математике). Во время учёбы в дополнительных классах Пуанкаре также самостоятельно изучал труды Жозефа Бертрана[3], Дюамеля[4], Шаля[5], Руше[6]. Преподаватель специальных классов Эллио писал своему другу: "В моём классе в Нанси есть математический монстр. Это Анри Пуанкаре" [2]. В 1873 Пуанкаре получил первую премию на ещё одном общегосударственном конкурсе по специальной математике. В этом же году он сдавал вступительные экзамены в Политехническую школу и в Нормальную школу.

На вступительных экзаменах в Политехническую школу он должен был получить нулевой балл по рисованию и черчению, что исключало поступление. Но остальные оценки были столь высоки, что даже с этим нулевым баллом Пуанкаре оказался первым среди абитуриентов. И опять, нарушая стандартные правила, экзаменаторы были готовы сделать исключение для Пуанкаре.

В Нормальной школе он был пятым по рейтингу. Пуанкаре выбрал Политехническую школу, которую его дядя Антони Пуанкаре (Nicolas Antonin Hélène Poincaré , 1825 – 1911, X 1845) окончил в 1845. Здесь на Анри Пуанкаре обратил внимание Шарль Эрмит[7], а Гастон Дарбу[8] заметил его ещё на экзаменах бакалавриата. Пуанкаре окончил Политехническую школу в 1875 вторым в выпуске, а затем Горную школу в 1878 третьим в рейтинге выпускников.

Когда Пуанкаре учился на втором курсе Политехнической школы, в 1974 была опубликована его первая научная статья "Новое доказательство свойств индикатрисы поверхности", написанная, видимо, под влиянием профессора геодезии и картографии, капитана инженерных войск Николя Тиссо (Nicolas Auguste Tissot, 1824 – 1907), автора понятия индикатрисы Тиссо на топографических картах. Пуанкаре произвёл очень благоприятное впечатление на вступительном экзамене у Тиссо [3]. Во время учёбы в горной школе и в кратком периоде добросовестной работы горным инженером Пуанкаре ещё более укрепил связь с математической наукой. В 1876 он сдал экзамены на Факультете наук Парижского университета на степень лиценциата наук (степень лиценциата присваивалась лицам, сдавшим на четвёртом курсе обучения в ВУЗе три-четыре экзамена по дисциплинам, определяющим профиль научной специальности; она давала право преподавать в лицее).

Далее предстоял выбор темы докторской диссертации. По разным сведениям, то ли Шарль Эрмит, то ли Гастон Дарбу рекомендовали Пуанкаре развить в его PhD диссертации применительно к уравнениям в частных производных некоторые идеи статьи Шарля Брио[9] и Жана Буке[10], опубликованной в Журнале Политехнической школы в 1856, — «Исследование свойств функций, определяемых дифференциальными уравнениями». В этой статье была знаменательная фраза: "Случаи, когда можно интегрировать дифференциальное уравнение, крайне редки и должны рассматриваться как исключения. *Но можно рассмотреть дифференциальное уравнение как определяющее функцию и заняться изучением свойств этой функции по самому дифференциальному уравнению"*. Пуанкаре не только значительно развил подход авторов статьи, но в дальнейшем в четырёх мемуарах (с 1881 по 1886) заложил основы новой математической дисциплины "Качественная теория дифференциальных уравнений", позднее названной "Качественная теория динамических систем".

В 1878 Пуанкаре представил к защите диссертацию "О свойствах функций, определяемых дифференциальными уравнениями в частных производных".

Для рассмотрения работы первоначально была назначена комиссия в составе Оссиана Боне[11],

[3]Жозеф Бертран (Joseph Louis François Bertrand, 1822 – 1900, X 1841), член Парижской академии наук.
[4]Жан-Мари Дюамель (Jean-Marie Duhamel, 1797 – 1872), член Парижской академии наук.
[5]Мишель Шаль (Michel Chasles, 1793 - 1880, X 1814), член Парижской академии наук.
[6]Эжен Руше (Eugène Rouché; 1832 – 1910, X 1854), член Парижской академии наук.
[7]Шарль Эрмит (Charles Hermite, 1822 – 1901), член Парижской академии наук.
[8]Гастон Дарбу (Jean Gaston Darboux, 1842 – 1917), член Парижской академии наук.
[9]Шарль Брио (Charles Auguste Briot, 1817 – 1882), профессор математики, премия Понселе.
[10]Жан Буке (Jean-Claude Bouquet, 1819 – 1885), член Парижской академии наук.
[11]Оссиан Боне (Pierre Ossian Bonne, 1819 – 1892, X 1838), член Парижской академии наук.

Гастона Дарбу и Эдмона Лагерра[12].

Дарбу вспоминал: «С первого же взгляда мне стало ясно, что работа выходит за рамки обычного и с избытком заслуживает того, чтобы ее приняли. Она содержала вполне достаточно результатов, чтобы обеспечить материалом много хороших диссертаций. Но, и не следует бояться этого сказать, если мы хотим представить себе манеру, в которой работал Пуанкаре, многие пункты нуждались в исправлении и разъяснении» [3].

В письме к родным в Нанси Пуанкаре так описывал будни диссертанта [4]:

«Итак, я в доме 36, где жил Дарбу,
В том доме, где моя кузина обитала.
Приняв его совет, благодаря судьбу,
Я следом получил, ни много и ни мало,
Тираду из 10 заполненных страниц.
К Лагерру я пошел, куда ходил не раз,
Но, видно, для визита был недобрый час,
Его я не застал.
Я прямо к Оссиану — и тут закрыта дверь,
Но я увижусь с ним, пусть после, не теперь».

Наконец, 31 августа 1879 комиссия в составе: Буке (председатель), Бонне и Дарбу, – приняла работу. Теперь Пуанкаре получил право преподавания в университетах и преподавательскую должность в университете Канна, сохранив за собой формальное членство в Корпусе горных инженеров, чем эта организация гордится по сей день. Через два года он стал преподавать в Парижском университете.

Научная карьера Пуанкаре развивалась стремительно. Кроме качественной теории дифференциальных уравнений он разработал общую теорию автоморфных функций, а также их приложение к интегрированию линейных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами, создал ещё один важнейший раздел математики, получивший название топологии. Пуанкаре развивал общую теорию аналитических функций нескольких независимых переменных, ему принадлежат первые исследования бесконечных систем линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных, а также исследование сходимости бесконечных определителей, он дал теоретическое обоснование методам малого параметра.

Значителен вклад Пуанкаре в принятии научным сообществом идей теории относительности, представленной Альбертом Эйнштейном в 1905 (“К электродинамике движущихся тел”) и Пуанкаре в 1905, 1906 (“О динамике электрона”). Ещё в 1892, спустя пять лет после первой публикации результатов опыта Майкельсона[13] – Морли[14], Пуанкаре писал: “…истинная цель Небесной механики не вычисление эфемерид, потому что для этого достаточно краткосрочного прогноза, но выяснить, является ли закон Ньютона достаточным для объяснения всех <астрономических и физических> явлений” [5].

(Заметим в скобках, что сам Ньютон испытывал некоторые сомнения по поводу своих постулатов об абсолютном пространстве и абсолютном времени. Вот два высказывания из его знаменитой книги[15]: “Возможно, что не существует <в природе> такого равномерного движения, которым время могло бы измеряться с совершенною точностью.… Может оказаться, что в действительности не

[12] Эдмон Лагерр (Edmond Nicolas Laguerre, 1834 – 1886, X 1854), член Парижской академии наук.
[13] Альберт Майкельсон (Albert Abraham Michelson, 1852 - 1931), президент Национальной академии наук США.
[14] Эдвард Морли (Edward Williams Morley, 1838 – 1923), член Национальной академии наук США.
[15] Математические начала натуральной философии. Перевод с латинского и комментарии А.Н. Крылова. М. «Наука», 1989. (стр. 32 по нумерации, 53 по общему счёту).

существует <абсолютно> покоящегося тела, к которому можно было бы относить места и движения прочих". А если нет возможности абсолютно точной отметки времени, то принципиально нельзя установить одновременность двух удалённых в пространстве событий.)

Оценивая вклад Пуанкаре в математику, Гастон Дарбу писал: "Что особенно заслуживает восхищения в его начинаниях, так это, не боюсь сказать, смелость, с которой он обращается к самым важным, самым трудным и самым общим вопросам. Пренебрегая проверкой своих сил на конкретных задачах, ...он стремится штурмовать даже те <проблемы>, решение которых кажется принадлежащим отдалённому будущему" [3].

О масштабах деятельности Анри Пуанкаре во всех разделах математики свидетельствует то, что не менее 27 математических терминов и 10 теорем включают его имя. В одном из списков его публикаций 547 позиций [6]; в Университете им. Пуанкаре в Нанси подобный список имеет около 700 позиций [7].

Среди публикаций есть четыре, непосредственно относящиеся к методике преподавания математики и пять научно-популярных, ориентированных на детей и подростков. Общим вопросам преподавания математики посвящена глава "Математические определения и образование" в книге "Наука и метод" [8]. Книги Пуанкаре "Наука и гипотеза" [9], "Ценность науки" [10], "Последние мысли" [11] также содержат высказывания по вопросам преподавания.

Мысли Пуанкаре о математическом образовании охватывают все уровни обучения от младших классов лицея до высших учебных заведений и создания академических кадров; все направления подготовки: общенаучное, инженерное и специально математическое, а также все этапы изучения математики: определения, доказательства, решение стандартных и нестандартных задач, постановка и решение исследовательских проблем.

Особенно много рассуждений посвящено определениям. Пуанкаре пишет:

"Вопросы преподавания прежде всего важны сами по себе, а затем и по другим причинам: размышлять о том, каким образом лучше всего внедрить новые понятия в девственный ум ребёнка, – значит в то же время размышлять о том, каким образом эти понятия были приобретены нашими предками; значит, следовательно, размышлять об их истинном происхождении, а это, по существу, об их истинной природе. Почему дети обыкновенно ничего не понимают в тех определениях, которые дают учёные? Почему им необходимо давать другие определения?" [8].

Прекрасная память Пуанкаре хранила его детские впечатления:

"Вот, в четвёртом классе <по французской нумерации, то есть наш шестой> преподаватель диктует: окружность – это геометрическое место точек на плоскости, находящихся на одном и том же расстоянии от одной внутренней точки, именуемой центром. Хороший ученик вписывает эту фразу в свою тетрадь; плохой ученик рисует в ней «человечков», но ни тот, ни другой ничего не поняли. Тогда преподаватель берёт мел и рисует круг на доске. "Ага, – думают ученики, – почему он не сказал сразу: окружность – это кружок, и мы бы сразу поняли". Без сомнения, преподаватель прав. Определение учеников не имело бы никакой ценности, потому что не могло бы служить ни для какого доказательства и в особенности не привило бы им спасительной привычки анализировать свои понятия. Но надо бы им доказать, что они не понимают того, что им кажется понятным, надо бы заставить их отдать себе отчёт в примитивности их первоначального представления, сделать так, чтобы они сами пожелали очистить и улучшить это представление" [8].

Пуанкаре настаивает:

"Что разумеют под хорошим определением? Для философа или для учёного это такое определение, которое приложимо ко всем определяемым предметам и только к ним. Но в преподавании дело обстоит иначе. Здесь хорошим определением будет то, которое понято учениками" [8].

Пуанкаре продолжает эту тему:

"Несомненно, учителю неприятно вести преподавание в рамках, которые его не вполне удовлетворяют. Но удовлетворение учителя — не единственная цель обучения; нужно прежде всего считаться с умом ученика и с тем, кем его желают сделать.

Зоологи утверждают, что эмбриональное развитие животного повторяет вкратце историю его предков в разные геологические периоды. Воспитатель должен заставить ребёнка пройти через те ступени, которые были пройдены его предками, пройти быстрее, но без пропуска промежуточных этапов. В этом смысле история науки должна быть нашим первым руководителем" [8].

Пуанкаре придаёт большое значение подготовленности обучаемого к восприятию новых понятий:

"В начальных школах, чтобы определить дробь, разрезают яблоко или пирог; конечно, разрезание происходит в уме, а не в действительности, ибо я не думаю, чтобы бюджет начальной школы позволял такую расточительность. В Высшей нормальной школе или на Факультетах, напротив, скажут: дробь — это совокупность двух целых чисел, разделённых горизонтальной чертой; ... Такое определение будет здесь уместным, потому что его преподносят молодым людям, которые уже давно освоились с понятием о дробях — они уже делили яблоки и другие предметы; ум которых уже изощрён математической эрудицией; которые хотят, наконец, получить чисто логическое определение" [8].

Далее Пуанкаре переходит к определениям, предназначенным для высшего уровня математического образования, а также для описания математического исследования:

"Как найти такую краткую формулировку, которая одновременно удовлетворяла бы непреклонным правилам логики, нашему желанию понять то место, которое занимает новое понятие в совокупности знаний, нашей необходимости мыслить образами? Чаще всего такой формулировки найти нельзя, и вот почему недостаточно высказать определение: необходимо его подготовить и необходимо его оправдать.

Что я хочу этим сказать? Вы знаете, как часто говорят: всякое определение включает в себя аксиому, так как оно утверждает существование определённого объекта. Определение будет, следовательно, оправдано с точки зрения логической лишь тогда, когда будет доказано, что оно не находится в противоречии ни с терминами, ни с ранее допущенными истинами. ...

Но лучше поступить иначе: необходимо, чтобы оправдание во всех случаях, когда это возможно, предшествовало формулировке и подготовляло её; изучение нескольких частных примеров лучше всего приводит к общей формулировке.

Ещё другое обстоятельство: каждая часть сформулированного определения имеет целью установить отличие определяемого объекта от класса других близких предметов. Определение будет понято лишь тогда, когда вы покажете не только определяемый предмет, но и те соседние предметы, от которых его надобно отличать; когда вы сделаете явственным это отличие и при этом прибавите: вот для чего я внёс в определение то-то и то-то" [8].

Пуанкаре задаёт риторический вопрос:

"Чем объяснить, что многие умы отказываются понимать математику? Не парадоксально ли это? В самом деле, вот наука, которая апеллирует только к основным принципам логики, например, к принципу противоречия, апеллирует к тому, что составляет, так сказать, скелет нашего разумения, апеллирует к тому, от чего нельзя отказаться, не отказываясь вместе с тем от самого мышления, и всё же находятся люди, которые считают эту науку тёмной. И этих людей большинство!" [8].

На риторический вопрос, разумеется, готов ответ:

"Здесь имеется проблема, которая не легко решается, но которая должна занимать всех, желающих посвятить себя делу преподавания <математики>.

Что значит понимать? Имеет ли это слово для всех одно и то же значение? Понять доказательство теоремы — значит ли это рассмотреть последовательно каждый из силлогизмов, составляющих доказательство, и констатировать, что он правилен и согласуется с ходом задачи? ...

"Нет", — скажет большинство. Почти все люди оказываются более требовательными; они хотят не только знать, правильны ли все силлогизмы доказательства, но ещё и знать, почему силлогизмы связаны в данном, а не в другом порядке. Пока им кажется, что эта связь рождена капризом, а не разумом в постоянном сознании преследуемой цели, они думают, что не поняли доказательства.

Несомненно, они сами не отдают себе отчёта в том, чего они, собственно, требуют и не могут формулировать своего желания; но если они не находят удовлетворения, то смутно чувствуют, что чего-то им недостаёт. Что же тогда происходит? Вначале они ещё схватывают те очевидные вещи, которые представляются их взору; но, так как последние связаны чрезвычайно тонкой нитью с предшествующими и последующими, то они не оставляют никакого следа в их мозгу; они тотчас забываются... А когда эти люди следят за дальнейшим развитием доказательства, для них исчезает и прежняя эфемерная ясность, так как теоремы опираются одна на другую, а теоремы, которые им нужны, уже забыты. Таким образом, эти люди становятся неспособными понимать математику.

Не всегда здесь виной преподаватель; зачастую ум людей, нуждающийся в руководящей нити, слишком ленив для поисков её. Но, чтобы помочь непонимающим, мы должны сначала узнать то, что их останавливает" [8].

Леность ума – распространённая, но не единственная причина непонимания математики:

"Другие же спросят, для чего всё это служит? Они не поймут силлогизмов, если они не нашли вокруг себя на практике или в природе основания для того или иного математического понятия. Под всяким словом они хотят разглядеть чувственный образ; необходимо, чтобы определение вызывало этот чувственный образ, чтобы на каждой стадии доказательства они видели его превращения и эволюцию. Такие люди часто заблуждаются относительно самих себя; они не слушают рассуждений, а рассматривают фигуры; они воображают, что поняли, тогда как они только видели» [8].

Наконец, есть обстоятельство, особенно важное при подготовке профессиональных математиков:

"Наши предки думали, что знают, что такое дробь, непрерывность, площадь кривой поверхности; лишь мы заметили, что они этого не знали. Точно так же наши ученики думают, что они это знают, когда уже серьёзно принимаются за изучение математики. Если я без предварительной подготовки скажу им — нет, вы этого не знаете, вы не понимаете того, что вам казалось понятным; я должен вам доказать то, что вы считали очевидным, — и если я в своих доказательствах буду опираться на посылки, которые им кажутся менее очевидными, чем заключения, то что подумают эти несчастные? Они подумают, что математическая наука есть не что иное, как произвольно собранная груда бесполезных умствований. ...

Напротив, позже, когда ученик освоится с математическим суждением и ум его созреет в этой продолжительной работе, сомнения будут возникать сами собой, и тогда ваше доказательство будет своевременным" [8].

Остаётся ещё добавить, в чём состоял подход Пуанкаре к подготовке математиков-учёных. Вот, что писал его племянник Пьер Бутру[16] в ответ на просьбу Митаг-Лефлера[17]:

"...он хотел предоставить каждому ученику полную инициативу; он всегда был готов интересоваться самыми необычными исследованиями, даже самыми парадоксальными; ничто новое не пугало его. Но когда приходило время оценивать результаты, он оказывался крайне требователен.

Если бы вы принесли ему только те результаты, которые он полагал само собой разумеющимися — а в своей склонности двигаться вперёд он считал практически приобретённым всё, от чего нас уже не отделяли принципиальные трудности, — если бы вы не открыли ему новых прозрений, то можно было бы ожидать из его уст вечное и обескураживающее "а что тут хорошего?"; не то, чтобы вы, по его словам, зря потратили время; но вы показали, что ваш метод, о котором он до сих пор воздерживался судить, в действительности не даёт никаких преимуществ" [6].

В полемике с коллегами Пуанкаре мог быть весьма язвительным, не переходя при этом границ объективности и взаимоуважения. Приведу его замечание по поводу книги Давида Гильберта[18] "Основания геометрии":

«Посмотрим, как он начинает: вообразим три системы вещей, которые мы назовём точками, прямыми и плоскостям. Что это за *вещи*, — мы не знаем, да и незачем нам это знать. Было бы

[16] Пьер Бутру (Pierre Léon Boutroux, 1880 - 1922), профессор истории математики.

[17] Густав (Гёста) Миттаг-Лефлер (Magnus Gustaf (Gösta) Mittag-Leffler, 1846 - 1927), член Парижской академии наук, член Шведской королевской академии наук.

[18] Давид Гильберт (David Hilbert, 1862 - 1943), член Лондонского королевского общества.

даже греховно стараться это узнать. Всё, на что мы можем претендовать, сводится к тому, чтобы мы усвоили относящиеся к ним аксиомы. ...Вот книга, которую я очень высоко ценю, но которую я не рекомендую лицеисту. Впрочем, я мог бы это сделать без опаски, так как в чтении её он ушёл бы не очень далеко» [8].

В споре с Гильбертом, Расселом[19] и другими логиками, сторонниками максимально абстрактного формально-логического изложения математики, Пуанкаре уточняет свою позицию:

“Инженер должен получить полное математическое образование, но зачем оно ему? Для того, чтобы видеть различные стороны вещей, видеть их быстро. У него нет времени гоняться за мелочами. В сложных физических предметах, представленных его взору, он должен быстро найти точку, к которой могут быть приложены данные ему в руки математические орудия. Как бы он это сделал, если бы между предметами и орудиями оставалась та пропасть, которую вырыли логики?” [8].

Конечно, самого Пуанкаре математические абстракции не пугают, он высоко ценит книгу Гильберта и сам создаёт весьма абстрактные математические понятия, но сомневается в творческом потенциале формально-логического подхода: “Доказывают при помощи логики, изобретают при помощи интуиции. Хорошо уметь критиковать, ещё лучше — уметь творить. ...Логика нам говорит, что на таком-то пути мы можем быть уверены, что не встретим препятствий; она не говорит, какой путь ведёт к цели. Для этого необходимо видеть цель издалека, и интуиция есть та способность, которая этому нас учит” [8].

Более, чем через столетие, Пуанкаре обращается как будто к нам, людям сегодняшнего дня:

“Для получения действительно ценного результата недостаточно нагромоздить кучу выкладок или иметь машину для приведения всего в порядок. Имеет значение не порядок вообще, а порядок неожиданный. Машина может сколько угодно кромсать сырой фактический материал, но то, что мы назвали душой факта, всегда будет ускользать от неё” [8].

Поразительная интуиция Пуанкаре проявилась и в гипотезе о том, что *всякое односвязное компактное трёхмерное многообразие без края гомеоморфно трёхмерной сфере* (1904) [12], и в *последней геометрической теореме* [12], связанной с задачей трёх тел (1912). В первых числах июля за две недели до своей кончины 17 июля 1912 Пуанкаре послал эту работу в журнал с доказательством только некоторых частных случаев.

Спустя почти сто лет гипотеза Пуанкаре была доказана Григорием Яковлевичем Перельманом (год рождения 1966) в развитие работ Ричарда Гамильтона[20]. Общий случай *последней геометрической теоремы был доказан* Д. Биркгофом[21] в 1913.

Пуанкаре видел в научных занятиях воплощение эстетического и даже этического идеала, хотя и понимал, что далеко не все учёные руководствуются этими идеалами:

“...это бескорыстное искание истины ради её собственной красоты несёт в себе здоровое семя и может сделать человека лучше. Я знаю, что здесь есть исключения, что мыслитель не всегда почерпнёт в этих поисках чистоту души, которую он должен был бы найти, что есть учёные, имеющие весьма дурной характер.

Но следует ли из этого, что нужно отказаться от науки и изучать только мораль? И разве моралисты, когда они сходят со своей кафедры, остаются на недосягаемой высоте?» [11]. Похоже, что здесь Пуанкаре возвращается к полемике с Л.Н. Толстым[22]. С творчеством и взглядами великого писателя его мог познакомить А. Рамбо. Пуанкаре читал «Войну и мир», обнаружив в романе некую историческую ошибку [1]. Надо отметить, что имена Н.И. Лобачевского[23] и С.В. Ковалевской[24] встречаются в математических работах Пуанкаре. В 1903 он был награждён золотой медалью фонда им.

[19]Бертран Рассел (Bertrand Arthur William Russell, 1872 – 1970), Член Лондонского королевского общества.
[20]Ричард Гамильтон (Richard Streit Hamilton, 1943 – 2024), член Национальной академии наук США.
[21]Джордж Биркгоф (George David Birkhoff, 1884 – 1944), член Национальной академии наук США.
[22]Лев Николаевич Толстой (1828 – 1910), заочная полемика со Львом Николаевичем имела место в [10].
[23]Николай Иванович Лобачевский (1792 – 1856), ректор Казанского университета.
[24]Софья Васильевна Ковалевская (1850 – 1891), профессор Стокгольмского университета.

Лобачевского по инициативе Казанского физико-математического общества.

Постоянно поглощённый научными размышлениями, Пуанкаре принципиально не участвовал в политической жизни Франции. Несмотря на его огромный авторитет и популярность, «ни одна партия не могла привлечь его и поставить во главе толпы» [1]. Но единственный раз, когда речь шла о явном злоупотреблении правосудием с применением якобы математических научных методов, Пуанкаре счёл необходимым вмешаться. Вот, что рассказывает Поль Аппель[25]:

“Человек его достоинства и его совести не мог оставаться равнодушным в кризисе дела Дрейфуса, в котором смешались чувства истины и пользы, любовь к армии и любовь к справедливости. Любовь к истине и справедливости взяла верх, потому что в конфликтах совести всегда побеждает самое универсальное чувство.

Когда <в 1896> стало известно, что Дрейфус[26] был осуждён на основании документов, неизвестных защите, Пуанкаре сказал мне в Академии: «Тяжесть обвинения, вероятно, лишила судей духа объективности» Потом он больше не говорил об этом, ограничившись абсолютным молчанием, но когда г-н Бертильон применил вычисление вероятностей, А. Пуанкаре не мог не высказать то, что он думал. На процессе в Ренне <в 1899> было зачитано его письмо <[13]>, которое заканчивалось следующим образом: “В общем, расчеты г-на Бернара точны, а расчеты г-на Бертильона[27] — нет. Я не знаю, будет ли осуждён обвиняемый, но если и будет, то на основании других доказательств. Невозможно, чтобы такой аргумент произвел какое-либо впечатление на людей непредвзятых и получивших солидное научное образование”.

В ходе своего последнего расследования в 1904 Кассационный суд, желая получить научное заключение по утверждениям г-на Бертильона относительно так называемого геометрического построения слова “интерес” и применения расчета вероятностей <при анализе некой записки (бордеро) Бертильоном, приписавшим её Дрейфусу на основании экспертизы почерка>, назначил трех экспертов-математиков: Дарбу, постоянного секретаря Академии наук, по отделу математических наук, Пуанкаре, президента Академии наук <в 1906>, и меня, тогда в должности декана Факультета наук.

В Кассационном суде эксперты принесли присягу перед генеральным прокурором. Затем им передали материалы, и началось расследование. Три эксперта всегда были в полном согласии. Заключение экспертизы составил Пуанкаре. Его можно найти в материалах судебного следствия Кассационного суда <[13]>. На протяжении всей экспертизы Пуанкаре проявлял некоторое раздражение, вызванное тем, что заданные ему вопросы были слишком элементарны <и ответы на них очевидны>. Тем не менее, он исследовал их с научной строгостью и совершенным пониманием ответственности; по его предложению в Парижской обсерватории состоялась процедура тщательных измерений с применением прецизионных инструментов для построения звёздных карт” [1].

В этом процессе, завершившемся в 1906, Дрейфус был, наконец, полностью оправдан.

Поль Аппель пишет только о моральном аспекте дела Дрейфуса, но здесь был и такой важный политический аспект как сохранение республиканского строя и ещё одна немаловажная для Франции политическая подоплёка. Сотни лет лучшие французские юристы добивались независимости суда от политических властей. Во времена реставрации Бурбонов королевское правительство оказывало давление на Высший кассационный суд с целью добиться некоего определённого приговора. В ответе председателя судебной инстанции было сказано: “Суд выносит решение, а не оказывает услуги” [14]. Оправдание Дрейфуса было важной победой идеи Монтескье[28] о независимой судебной власти.

Удивительная интуиция Пуанкаре проявлялась не только в науке, но и в социальных вопросах. Переживший разгром Франции в 1870, потерю Эльзаса и большей части Лотарингии, оккупацию Нанси немецкой армией, он с чрезвычайной тревогой наблюдал внутренние раздоры во Франции и

[25] Поль Аппель (Paul Émile Appell, 1855—1930), член Французской академии наук.

[26] Альфред Дрейфус (Alfred Dreyfus, 1869 – 1935), французский офицер.

[27] Альфонс Бертильон (Alphonse Bertillon, 1853 - 1914), юрист, криминалист.

[28] Шарль Монтескье (Charles Louis de Secondat, Baron de La Brède et de Montesquieu, 1689 - 1755).

рост шовинизма во Франции и Германии. За два года до Первой мировой войны 26 июня 1912 в речи Пуанкаре на первом заседании Общества морального воспитания прозвучали такие слова:

"...Стремитесь ли вы к общей пользе, апеллируете ли вы к состраданию или к чувству человеческого достоинства, вы всегда будете иметь одни и те же заповеди, такие, которые нельзя забыть без крушения наций, без умножения страданий и <нравственного> падения человека.

...Конечно, ненависть — это тоже сила, очень мощная сила; но мы не можем использовать её, потому что она мельчит <наше восприятие> подобно телескопу[29], в который смотрят только через большой конец; также и между народами ненависть пагубна, и не она рождает истинных героев. Я не знаю, верят ли по ту сторону некоторых границ, что можно извлечь преимущества из патриотизма с ненавистью; но это противоречит инстинктам нашей расы и её традициям.

...в ход идут самые гнусные средства, не чураются клеветы и доноса, а те, кого это удивляет, становятся подозреваемыми. Замечают появление людей, у которых, кажется, есть разум только, чтобы лгать, и сердце только, чтобы ненавидеть.

...Это все, на что способна ненависть, и именно этого мы не хотим" [11].

Но разразилась мировая бойня, совершенно бессмысленная для большей части населения стран-участниц. К сожалению, поначалу её поддержало подавляющее большинство интеллектуальной элиты: от незаурядного пианиста Витгенштейна[30], потерявшего правую руку в австрийских войсках, до воевавших на стороне Антанты выдающихся поэтов Гийома Аполлинера[31], умершего после тяжелейшего ранения, и Николая Гумилёва[32], ставшего жертвой политических последствий этой войны.

Есть фотография участников первого Сольвеевского конгресса по физике в 1911, на которой Пуанкаре сидит рядом с Марией Кюри-Склодовской[33]. Около Пуанкаре стоят Альберт Эйнштейн[34],

[29]В оригинале написано lorgnette; предполагаю, что Пуанкаре имел в виду lunette – телескоп-рефрактор.

[30]Пауль Витгенштейн (Paul Wittgenstein, 1887 – 1961).

[31]Гийом Аполлинер (Guillaume Apollinaire, 1880 – 1918).

[32]Николай Гумилёв (1886 – 1921).

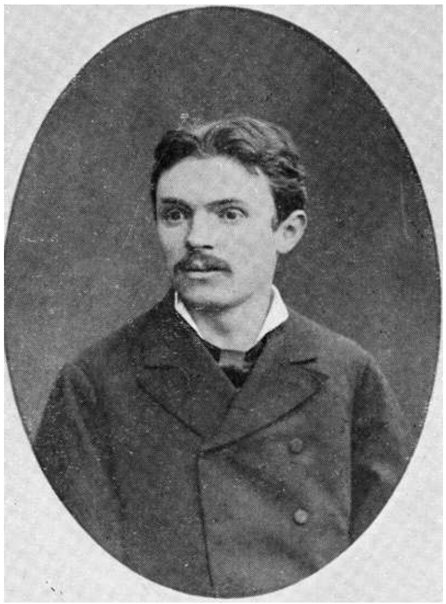
[33]Мария Склодовская-Кюри (Maria Skłodowska-Curie, 1867 – 1934), лауреат Нобелевской премии по физике и по химии. Первая женщина-нобелевский лауреат и первый в истории дважды лауреат этой премии.

[34]Альберт Эйнштейн (Albert Einstein, 1869 – 1955), лауреат Нобелевской премии по физике.

Хейке Камерлинг-Оннес[35] и Эрнест Резерфорд[36], в этом же зале находятся Хендрик Лоренц[37] и Макс Планк[38]. Но Пуанкаре поглощён оживлённой беседой с Марией Кюри, не обращая никакого внимания на фотосъёмку. Мы не знаем и никогда не узнаем, о чём они беседовали. Но я вижу в этом фото символ интуиции Пуанкаре, выбравшего для беседы учёного, проникающего в тайны радиоактивности, то есть в те проблемы, которые в наше время поставили под угрозу само существование человечества. То, что выбор такого символа не совсем беспочвенный, а творческая интуиция в сочетании с научной эрудицией способна на удивительные прозрения, подтверждают строки из поэмы Андрея Белого[39] "Первое свидание", написанные в 1921.

...Мир — рвался в опытах Кюри
Ат**о́**мной, лопнувшею бомбой
На электронные струи
Невоплощённой гекатомбой[40]; ...

Кратко о личной жизни Анри Пуанкаре. В 1881, ещё работая в университете Кана, он женился на Луизе Пулен д'Андеси[41], правнучке знаменитого зоолога академика Этьена Жоффруа Сент-Илера[42] и внучке академика Изидора Жоффруа Сент-Илера, сына Этьена[43].



Старшая дочь Жанна (Jeanne Eugénie Pauline, 1887 – 1975) до смерти отца была его секретарём. Потом в 1913 вышла замуж. Ещё две дочери: Ивонна (Yvonne, 1889 – 1939) и Генриетта (Henriette, 1891 - 1970). Сын Леон (Léon Maurice, 1893 – 1972, X 1913), Окончил Политехническую школу в 1913, затем — Горную школу, стал крупным авиационным инженером.

[35]Хейке Камерлинг-Оннес (Heike Kamerlingh Onnes, 1853 – 1926), лауреат Нобелевской премии по физике.

[36]Эрнест Резерфорд (Ernest Rutherford, 1771 - 1937), лауреат Нобелевской премии по химии.

[37]Хендрик Лоренц (Hendrik Antoon Lorentz, 1853 – 1928), лауреат Нобелевской премии по физике.

[38]Макс Планк (Max Karl Ernst Ludwig Planck, 1858 – 1947), лауреат Нобелевской премии по физике.

[39]Борис Николаевич Бугаев (Андрей Белый), 1880 – 1934, сын заслуженного профессора математики Московского университета Николая Васильевича Бугаева, 1837 – 1903, наиболее яркого представителя московской философско-математической школы. В поэме А. Белого "Первое свидание", опубликованной в 1921, приведённые строки входят в описание культурно–научной атмосферы начала века.

[40]Гекатомба — В Древней Греции торжественное жертвоприношение из ста быков. В переносном смысле гекатомба — огромные жертвы войны, террора, эпидемии и т. д.

[41]Jeanne Marie Louise Poulain d'Andecy, 1857 – 1934.

[42]Étienne Geoffroy Saint-Hilaire, 1772 – 1844. Сторонник изменяемости видов, ламаркист.

[43]Isidore Geoffroy Saint-Hilaire, 1805 – 1861.

1 – Henri Poincaré, 2 – Jeanne, 3 – Louise, 4 – Henriette, 5 – Yvonne.

Анри Пуанкаре скоропостижно скончался 17 июля 1912 через восемь дней после операции. Все выступавшие на похоронах говорили о его великих научных заслугах, но единственный гуманитарий из выступавших директор Французской академии Жюль Кларети отметил ещё одно важное качество Пуанкаре: "…именно поэту <Сюлли-Прюдому в кресле 24 Французской академии> наследовал этот математик, этот геометр, этот философ, этот учёный, который был подобен поэту бесконечности, подобен аэду <барду> науки" [15].

Действительно, нечто поэтическое можно найти во многих местах его философских книг, например: "…геологическая история показывает нам, что жизнь — всего лишь короткий эпизод между двумя вечностями смерти и что именно в этом эпизоде осознанная мысль длилась и будет длиться лишь одно мгновение. Мысль — всего лишь проблеск молнии посреди вечной ночи. Но в этом проблеске — всё" [10].

Полагаю уместным закончить строчками Леонида Петровича Дербенёва (1931 – 1995).

Призрачно всё в этом мире бушующем,
Есть только миг, за него и держись.
Есть только миг между прошлым и будущим,
Именно он называется жизнь!

Вечный покой сердце вряд ли обрадует,
Вечный покой – для седых пирамид.
А для звезды, что сорвалась и падает,
Есть только миг, ослепительный миг. …

Таким ослепительным мигом и была жизнь Анри Пуанкаре.

Литература

[1] Appell P. Henri Poincaré par Paul Appell. Reprint 1925. - Paris: Gloubik Éditions, 2015. – 139 p.

[2] Жюлиа Г. Анри Пуанкаре, его жизнь и деятельность. В книге Пуанкаре А. Избранные труды в трёх томах. Том 3. – М.: Наука, 1971. – 772 с.

[3] Darboux G. Éloge historique d'Henri Poincaré lu dans la séance publique annuelle du 15 décembre 1913. // Les Comptes rendus de l'Académie des Sciences. - 1913.

[4] Тяпкин А.А., Шибанов А.С. Пуанкаре. – М.: Молодая гвардия, 1982. – 415 с.

[5] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Том 1. В книге Пуанкаре А. Избранные труды в трёх томах. Том 1. – М.: Наука, 1971. – 772 с.

[6] The Mathematical Heritage of Henri Poincaré // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics APRIL 7-10, 1980. Historical material. - Volume 39.2. – 1983. - P. 441–470.

URL: https://www.ams.org/books/pspum/039.2/pspum039.2-endmatter.pdf

[7] URL: https://henripoincarepapers.univ-nantes.fr/bibliohp/

[8] Пуанкаре А. Наука и метод. В книге Пуанкаре А. О науке: Пер. с фр. / Под ред. Л. С. Понтрягина – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 736 с.

[9] Пуанкаре А. Наука и гипотеза. В книге Пуанкаре А. О науке: Пер. с фр. / Под ред. Л. С. Понтрягина – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 736 с.

[10] Пуанкаре А. Ценность науки. В книге Пуанкаре А. О науке: Пер. с фр. / Под ред. Л. С. Понтрягина – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 736 с.

[11] Пуанкаре А. Последние мысли. В книге Пуанкаре А. О науке: Пер. с фр. / Под ред. Л. С. Понтрягина – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 736 с.

[12] Œuvres d'Henri Poincaré, tom VI – Paris: Gautier-Villard, 1953.

[13] Sur Implication du calcul des probabilities. – In: Affaire Dreyfus. La Revision du Proces de Rennes. Enquete de la Chambre criminalle de la Cour de Cassation, 5 mars-19 novembre 1904, t. 3. - Paris.: Ligue des Droits de l'Homme, 1909. – P. 500-600.

[14] Корстенс Г. Суды и верховенство права: взгляд из Нидерландов. – М.: Социум, 2021. – 283 с.

[15] URL: https://www.annales.org/archives/x/poincare5.html

Эпштейн Георгий Львович,
г. Москва, доцент,
кандидат технических наук.

E-mail: egl413@gmail.com

<u>Информация</u>

О деятельности ФМОП в 2024 г.

От редакции

В 2024 г. Фонд математического образования и просвещения (ФМОП) осуществлял следующие виды деятельности по разделам: поддержка образовательных инициатив, издательская деятельность, благотворительная деятельность:

- Методическая поддержка и обеспечение экспериментальными учебными материалами учащихся старших классов ГБОУ Школа № 179 г. Москвы.
- Поддержка мероприятий по работе со школьниками: Турнир Городов, Турнир Ломоносова, Летняя конференция Турнира Городов, Летние математические лагеря.
- Выпуск журнала "Математическое образование", издателем и учредителем которого ФМОП является; в 2024 г. вышли номера 1(109), 2(110), 3(111), 4(112).
- Участие (очное и он-лайн) в мероприятиях по популяризации математического образования и просвещения.
- Выпуск приложения к журналу "Математическое образование": вышел в он-лайн и печатном варианте выпуск 9 по разделу "Образование: история, персоналии, проблемы".
- Участие в организации и проведении математического конкурса "Осенний Олимп".
- Участие в организации и проведении конкурса для всей семьи по пазлспорту (головоломки на бумаге) "Выход есть!".
- Организационная поддержка командного математического конкурса для 2-6 классов "Математическая сДача".
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей математической Олимпиады школьников ТИИМ, гг. Самара и Москва.
- Предоставление изданий Фонда для участников летнего математического лагеря "Алые Паруса".
- Предоставление изданий Фонда для участников летнего математического лагеря "Берендеевы поляны".
- Предоставление изданий Фонда для участников Всероссийского семинара "Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом".
- Предоставление изданий Фонда для учащихся средних школ г. Нальчик, ноябрь 2024 г.
- Предоставление изданий Фонда в лабораторию для учителей "2×2", декабрь 2024 г.
- Предоставление изданий Фонда для ФПО МГУ им. М.В. Ломоносова, декабрь 2024 г.
- Предоставление безвозмездных транспортных услуг организациям и физическим лицам, работающим в области математического образования.
- Организация бесплатной подписки на журнал "Математическое образование" ряду организаций и физических лиц, работающих в области математического образования.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2024 год (1 экз., включая стоимость пересылки) – 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2024 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >