ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцать шестой

№ 1 (101)

январь - март 2022 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 1 (101), 2022 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2022 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 15.04.2022 г.
Стиль верстки разработан С.А. Кулешовым.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.
Объем 4,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (101), январь – март 2022 г.

Содержание

<u>Актуальные проблемы математического образования</u>

Педагогические ценности русской–советской школы[1]

И. П. Костенко

Данная статья продолжает статью [1], опубликованную в предыдущем номере нашего журнала. В ней объясняется, в чём состоит педагогическая порочность идеи «высокого теоретического уровня» преподавания (принцип ВТУ), которая направляла «реформу-70», и обеспечила катастрофическое падение качества нашего образования в последующие годы, вплоть до настоящего времени. Раскрыта антипедагогичность инновационных идей (Л. Петерсон, А. Асмолов и др.), внедренных в образование в 1990-х годах. В качестве истинных педагогических ценностей представлены принципы организации обучения в советской школе 1930—50-х гг., и раскрыт их содержательный смысл. Истинность этих принципов доказана столетней практикой дореволюционной русской школы и тридцатилетней практикой советской школы.

Один из двух основных тезисов предыдущей статьи [1]: возврат к Традиции — единственный путь возрождения образования в России. Этот тезис содержательно обосновывался двумя аргументами: 1) в 1930-х годах образование, разрушенное новациями 1920-х, было восстановлено за 7 лет именно на пути возрождения педагогических традиций дореволюционной русской гимназии; 2) через 40 лет, в 1970-х годах, когда эти традиции были выведены «реформаторами» из школы, образование рухнуло, и с тех пор непрерывно деградирует.

В данной статье я хочу раскрыть содержание термина «традиция» в применении к образованию и показать, в чём ценность этой Традиции. Вы узнаете, как учили детей в советской школе 1940–1950-х годов (я учился в этой школе во время её расцвета) и сможете восхититься продуманностью отечественной методики и педагогики, которая позволяла учить на хорошо и отлично почти 75% детей (данные АПН 1949 г., [2, с. 62-63])!

Начну с краткого повторения. Чтобы правильно понимать настоящее, надо хорошо знать прошедшее. Надо знать, что «реформы» 2000-х, свидетелями которых мы являемся, органически связаны и продолжают «реформу» 1970-х. Та «реформа» направлялась ложной, антипедагогической идеей «повышения теоретического уровня» обучения. «Реформаторы» перенесли в школу вузовский курс дифференциального и интегрального исчислений (зачем?) и строго формализованный (обессмысленный) язык современной математики, усложнили и дико перегрузили программы, заменили понятные учебники на непонятные, но зато — «высокого научного уровня».

Результат отражен в письме тринадцати старшеклассниц из Вильнюса, опубликованном в «Комсомольской правде» 12 марта 1978 г. в статье под заголовком «Бесталанные ученики?»:

«Нам никак не одолеть программу по математике... Многого не понимаем, зубрёжкой не возьмёшь... Такие заумные учебники... Вот и ходим мы в "дебилах", как называют нас учителя» [2, с. 128].

Академик Л.С. Понтрягин назвал «реформу-70» «огромной общегосударственной диверсией» [2, с. 136]. Таковой она и была, что доказано на фактах в [2].

Пресловутая «процентомания», репетиторство и коррупция (липовые медалисты и пр.) начали бурно расцветать именно с «реформы-70». Не следует приписывать эти явления всей советской школе. Подлинно советской наша школа была с 1931 г. по 1970 г. И надо знать, что процессы её последовательного разрушения начались с 1956 г.

С 1978 по 1986 г. «реформаторы» панически старались скрыть свое преступление, найти «компромиссы» и удержать результаты. Несмотря на отчаяние детей, возмущение родителей, протесты

[1]Изложение пленарного видеовыступления И.П. Костенко (с небольшими уточнениями и добавлениями) на Всероссийской междисциплинарной научно-практической конференции с международным участием «Цифровое образование: прогресс или деградация?», Москва, 29 августа 2021 г. Организаторы конференции: Независимый исследовательский центр (НИЦ), Комитет по образованию Общенародного Союза Возрождения России, Всероссийский родительский Союз «Вместе».

учителей (многие лучшие учителя были вынуждены уйти из школы), несмотря даже на резкое осуждение «реформы» Отделением математики АН СССР и поддержку осуждения журналом «Коммунист», им это удалось. Благодаря «крыше» в самых верхах власти. Да! В самых верхах.

Во время горбачевской «перестройки» страх «реформаторов» прошел, они утвердились, и новые их последователи уверенно начали очередные «перманентные реформы», которые продолжаются до сего дня, и будут продолжаться далее. Если «реформу-70» они готовили более 30 лет (с 1936 г.), то теперь «реформы» идут «как по маслу», без каких-либо затруднений и без реального сопротивления. И только сейчас, в связи с цинично и нагло развернувшейся «цифровизацией», нам открылась стратегическая цель всех «реформ» — кастовое образование и кастовое общество.

Но надо понимать, что без «успеха» той, забытой нами «реформы-70», нынешние были бы невозможны. Без массового шокового опускания в 1970-х годах интеллектуального, морального и культурного уровня молодежи невозможна была бы «демократическая» революция 1991 г., реставрация капитализма и расчленение Советского Союза.

Теперь перейду к основному содержанию доклада и постараюсь раскрыть ценность классических принципов правильного обучения [2, с. 68–70], изъятых из нашей школы в 1970-х годах.

1. ПРИНЦИП СОЗНАТЕЛЬНОСТИ (осмысленности) усвоения знаний.

Что значит «сознательные знания»? Знания, наделенные смыслами. Как проверить? Задать вопрос: почему?

Спрашиваю девочку-третьеклассницу: сколько будет три умножить на семь (трижды семь)? После короткого замешательства — неуверенно отвечает. А почему? Почему 21, а не 22? Смущенно улыбается, смотрит на маму и молчит.

Какой должен быть ответ? В чем смысл умножения целых чисел? Кратное сложение. Трижды семь (три раза по семь): семь плюс семь — четырнадцать, да еще раз семь — двадцать один.

Сейчас знания обессмыслены, формальны, а потому не способны к применению, и зачастую просто ошибочны. Точнее — не знания, а фрагменты, крупицы знаний. У школьников, у студентов и у специалистов.

2. ПРИНЦИП СИСТЕМНОСТИ: «знания и навыки, сообщаемые учащимся, должны располагаться в определенной системе и строгой последовательности» [3, с. 19–20]. Это значит, что последующее должно быть связано с предыдущим, базироваться на предыдущем, вытекать из него.

Сейчас в программах и учебниках принципом является не система, а ХАОС. К примеру, в учебнике Л. Петерсон для 1-го класса [4] собраны темы: абстрактные «величины», длины, массы, объемы, уравнения, числа, а также разношерстные задачи (часто нелепые типа «квадрат плюс крестик равно. . . » [4, 30]), шарады, раскраски, игры, и пр., и пр., и пр.

3. ПРИНЦИП ПОСТЕПЕННОСТИ: «переход от одной ступени к другой может совершаться лишь тогда, когда хорошо усвоена предыдущая ступень». Нужно «медленно, тщательно выяснять каждую произведенную операцию, пока выполнение не станет прочно усвоенным навыком» [5, с. 26]. Это указание замечательного русского методиста Елизаветы Савельевны Березанской, которая занималась практическим возрождением нашей школы в 1930-х годах.

Для сознательного усвоения каждого действия, каждого понятия, каждой темы нужно определенное время. Но современные программы и учебники не предусматривают этого времени, они дико перегружены совершенно не нужной информацией. Сегодня об усвоении никто не заботится. Заботятся только о натаскивании на ЕГЭ.

4. ПРИНЦИП ДОСТАТОЧНОГО УЧЕБНОГО ВРЕМЕНИ предполагает взаимообусловленность содержания обучения и учебного времени, отводимого учебным планом на полноценное усвоение этого содержания.

Принцип определяет необходимое условие для сознательного обучения. Он предостерегает от перегрузки программ и указывает путь их гармонизации: с одной стороны — сокращение содержания до минимально необходимых основ наук, с другой — добавление числа учебных часов, достаточных для сознательного и прочного усвоения этих основ.

Сегодня — страшная перегрузка и хаос, в котором нет места и времени для принципов и методов обучения, имеющих целью *понимание*.

5. ПРИНЦИП СИСТЕМАТИЧЕСКОГО ПОВТОРЕНИЯ И ЗАКРЕПЛЕНИЯ пройденного. В частности, повторение в начале учебного года материала, который был пройден в предыдущем учебном году, и повторение в конце учебного года материала, пройденного за весь год.

Повторения и закрепления сегодня тоже нет, они и невозможны. Более того, они и не нужны обессмысленному обучению. Они будут безрезультатны.

6. ПРИНЦИП ПРЕДМЕТНОСТИ требует строить обучение последовательными *цельными* блоками (учебными предметами).

Не смесь (хаос) разнородных предметов, формально объединенных в один предмет под названием «математика», а *система* взаимосвязанных *цельных* предметов, распределенных во времени на весь период обучения. Так было в советской школе до «реформы-70»: арифметика (1-5-е классы), алгебра (5-10-е классы), геометрия (планиметрия — в 6-9-х классах, стереометрия — в 10-м классе), тригонометрия с применением к решению геометрических задач — в 10-м классе.

Цельность учебного предмета обеспечивается тесной внутренней *взаимосвязью* всех его частей, которая определяет такую же связь знаний о предмете в голове учащегося, и которая является необходимой предпосылкой сознательного и прочного усвоения.

Сейчас уже в 1-м классе [4] Л. Петерсон смешивает арифметику, алгебру и геометрию, а в 3-м [6] добавляет абстрактнейшую теорию множеств (зачем?). Тогда как классическая русская школа в 1-4-х классах изучала только одну важнейшую тему — целые числа (4 действия с ними и свойства действий) и учила решению задач. Тем самым закладывался прочный фундамент всего дальнейшего изучения математики (без хорошего знания арифметики нельзя понять алгебру) и вырабатывался первичный фундаментальный навык содержательного рассуждения, т.е. *мышления*.

7. ПРИНЦИП УЧЕТА ВОЗРАСТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ детей предполагает, в частности, недопустимость непосильных абстракций и соответствующий детскому опыту *язык* преподавания и учебников («язык задачи обязательно надо приспособить к детям» — так говорили методисты того времени).

Оцените язык, которым Л. Петерсон разговаривает с детьми: «Бримазище нашел 96 шклидулок, а бримазенок — на 64 шклидулки меньше. Сколько шклидулок нашли они вместе?» [6, с. 99] . Как думаете, — какова её цель? Она, вероятно, скажет, что приучает детей к абстрагированию от конкретных предметов. Но в 7-10 лет нервная система ребенка еще не созрела для абстрагирования — это научно установленный физиологами факт. На самом же деле, она приучает детей к бессмыслицам.

Сегодня все наше образование наполняют бессмысленные формализмы и непосильные абстракции, а также соответствующий наукообразный, непонятый нормальным детям язык учебников. Исток — та же «реформа-70».

8. ПРИНЦИП СИСТЕМАТИЧЕСКОГО УСТНОГО СЧЕТА и устного решения задач и примеров на протяжении всех лет обучения.

Устный счет формирует внутреннее внимание, способность сосредоточиваться, держать в уме несколько элементов мысли и выполнять над ними мыслительные операции. Устный счет — это метод, найденный классической дидактикой для формирования *базовых* качеств ума, позволяющих *развивать* дальше способность мышления на материале арифметических и затем геометрических задач.

Сегодня устного счета в школе нет, он объявлен «устаревшим». Л. Петерсон и И. Аргинская подменили его своим методом «слоеного пирога», когда «одновременно и параллельно друг другу дети изучают две, а иногда и больше тем» [7, с. 41], провоцируя, тем самым, поверхностность восприятия учебного материала и закрепляя неспособность сосредотачиваться. Не это ли их истинная цель?

Ученые, занимающиеся исследованиями мозга, доказали: когда человек быстро переключается на решения разных задач, то нарушается гормональный баланс, и, как следствие, быстро наступает усталость и повышается уровень тревожности. Вместе с тем, «работа в таком режиме, стимулирует выброс гормона допамина, которой воспринимается мозгом, как награда и удовольствие, и загоняет нас в замкнутый круг, не давая остановиться и сконцентрироваться на одной задаче» [8]. Не в этом ли обманном «удовольствии» причина «успеха» учебников Петерсон у некоторых учителей?

9. ПРИНЦИП СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ учащихся с учебником и задачником под руководством учителя. Подлинно осмысленные знания не могут быть просто «переданы» ученику учителем. Ученик должен сам, самостоятельными усилиями «присвоить» знания.

В советской школе учителю рекомендовалось регулярно давать детям на уроке самостоятельные задания, контролировать их выполнение и помогать. Обязательным было ежедневное *самостоятельное* выполнение домашних заданий и домашняя работа с учебником. Помощи родителей не требовалось, все мы справлялись сами.

Этот принцип может быть осуществлен только при условии наличия понятных учебников. Такие учебники были отняты у детей «реформаторами» в 1970-х годах (а некоторые даже раньше — в 1950-х), их нет у наших детей уже более 50 лет.

10. ПРИНЦИП СТАБИЛЬНОСТИ во всей организации учебного процесса: основная форма занятий — урок, стабильные учебный план, программа, расписание, систематический учет знаний, ежегодные проверочные испытания, стабильная классная комната, индивидуальное учебное место и др. К этому принципу следует отнести и *дисциплину* учащихся, которая является необходимым условием продуктивной организации коллективного обучения.

Сегодня стабильность объявлена застойностью, вместо неё насаждается динамичная *вариативность* во всех видах (автор — академик РАО А. Асмолов). Сознательно создан и поддерживается ХАОС в образовательном пространстве России.

Конечно, перечисленные принципы далеко не исчерпывают всех педагогических ценностей русской школы. Есть принцип *наглядности*, принцип *согласованности и взаимосвязи различных учебных предметов* (математики и физики, истории и литературы) и др.

А как тщательно была продумана методика изложения различных тем! Современные методисты и учителя о ней даже не слыхали! Эта замечательная методика сохранилась в старых учебниках — А.С. Пчелко (начальная арифметика), А.П. Киселева (арифметика, алгебра, геометрия), А.В. Перышкина (физика), и в старых книгах по методике преподавания — А.С. Пчелко, той же Е.С. Березанской, В.М. Брадиса и др. Характерным качеством русской методики была забота об ученике — понимание его трудностей и отыскание путей облегчения и преодоления этих трудностей.

Сегодня главной целью армии дипломированных методистов, псевдоученых педагогов и психологов является выдумывание «инноваций». Их простая методология: берем какой-нибудь классический принцип или методический прием и заменяем его противоположным. Так поступает Л. Петерсон. Так педакадемики АПН, обслуживавшие «реформу-70», заменили природосообразный принцип «от конкретного к абстрактному» на ложный, но необходимый «реформаторам» принцип — «от абстрактного к конкретному». Так А. Асмолов заменил принцип стабильности, который является основой эффективного функционирования любой сложной системы, принципом вариативности, открывшим дорогу многообразному невежеству и наполнившим систему образования внутренними противоречиями. Так создавалась и создается ЛЖЕНАУКА.

И надо, наконец, предъявить счет лженаучной организации РАО, и её предшественнице АПН, под идейным руководством которых происходило и происходит разрушение образования страны.

Все перечисленные выше классические принципы взаимообусловлены и взаимосвязаны. Все они нацелены на *сознательное* восприятие знаний учащимися, глубокое их понимание и прочное усвоение. Все они определяют разнообразные условия и методы, позволяющие достичь этой цели. Все они, как говорил наш великий педагог и математик академик Николай Николаевич Лузин, «ориентированы на понимание». Поэтому объединим их в один обобщенный всеохватывающий принцип, на котором строилась русская и советская (до 1970 г.) школа, — ПРИНЦИП ПОНИМАНИЯ.

В 1970-х годах «реформаторы» заменили его ПРИНЦИПОМ НЕПОНИМАНИЯ, привлекательно назвав его принципом «высокого теоретического уровня» преподавания. Хитроумно подменили термин «качество преподавания» неопределенным термином «уровень» преподавания. На деле, — уничтожили классическую методику и, с нею, высокое качество преподавания и знаний.

Этот разрушительный антипедагогический принцип действует в нашей школе (в программах, учебниках) по сей день: обессмысленные, не понимаемые производные, интегралы, та же петерсоновская теория множеств. И пока он не будет выведен из обучения, пока не будут восстановлены посильные программы и понятные учебники, поднять качество знаний невозможно.

ИТАК, ВОЗВРАТ К ТРАДИЦИИ ОЗНАЧАЕТ, ПРЕЖДЕ ВСЕГО, ВОЗВРАТ К КЛАССИЧЕСКИМ ПРИНЦИПАМ ОБУЧЕНИЯ РУССКОЙ–СОВЕТСКОЙ ШКОЛЫ.

Как это реально осуществить? Большой вопрос. Главное условие — политическая воля. Если у власти когда-нибудь чудесным образом появится свобода воли, понимание проблемы и желание восстановить образование в России, а значит, восстановить Россию, она сама найдет ответ. Мы же сегодня должны неустанно заявлять обществу и власти эту ЦЕЛЬ, пропагандировать её, разъяснять её содержание, объяснять её спасительность. Должны расширять круг сознательных борцов, организовываться в мощные общественные движения и переходить от робких просьб и наивных «предложений» к бескомпромиссным требованиям и *эффективным* формам сопротивления разрушению образования.

Литература

[1] Костенко И.П. Не ошибка, а целенаправленное многолетнее разрушение // Математическое образование. - 2021. - № 4 (100). - С. 58-64.

[2] Костенко И.П. «Реформы» образования в России 1918–2018 (идеи, методология, результаты): монография. - Изд. 4-е, испр. и доп. - М.-Ижевск, Институт компьютерных исследований; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». - 2021. - 202 с.

[3] Никитин Н.Н. Преподавание математики в советской школе 1917–1947 гг. // Математика в школе. - 1947. - № 5. - С. 4-22.

[4] Петерсон Л.Г. Математика «Учусь учиться». 1 класс. Часть 3. Изд. 4-е, перераб. - М.: Ювента, 2016. - 96 с.

[5] Материалы Всероссийского совещания преподавателей математики средней школы. Март-апрель 1935 г. - М.: НКП РСФСР - Учпедгиз, 1935. - 152 с.

[6] Петерсон Л.Г. Математика. 3 класс. Часть 1. - М.: Ювента, 2015. - 112 с.

[7] Аргинская И.И. и др. Обучаем по системе Л.В. Занкова: первый класс. - М.: Просвещение, 1994. - 244 с.

[8] URL: https://zen.yandex.ru/media/id/5eff37577f5e4f1e5da6ba13/mozgu-doljno-byt-trudno-4-soveta-tatiany-chernigovskoi-kak-sohranit-mozg-molodym-do-glubokoi-starosti-61210e314e9a256032695855.

Костенко Игорь Петрович,
доцент, кандидат физ.-мат. наук,
Краснодар.

E-mail: kost@kubannt.ru

Елена Сергеевна Вентцель

Г. Л. Эпштейн

В заметке приведены краткие биографические данные о замечательной писательнице, ученом, педагоге, авторе классических вузовских учебников Елене Сергеевне Вентцель (1907–2002); изложены некоторые ее педагогические взгляды; проанализирован секрет успеха ее знаменитого учебника по теории вероятностей.

Е.С. Вентцель

Елена Сергеевна Вентцель родилась 115 лет назад 21 марта 1907 г. и прошло уже 20 лет со времени её кончины 15 апреля 2002 г. За редкими исключениями (например, Андрей Петрович Киселёв или Григорий Михайлович Фихтенгольц), когда авторов книги нет в живых, их прижизненные публикации не переиздаются. Иная судьба учебника Елены Сергеевны «Теория вероятностей» и других ее книг.

Вот, какие сообщения в феврале 2022 легко найти в Интернете: «Теория вероятностей. Автор Вентцель Елена Сергеевна, издательство Кнорус, 2018 г., 11-е издание, стереотипное. Нет в продаже», «Теория вероятностей. Автор Вентцель Елена Сергеевна, издательство Юстиция, год выпуска 2018. Товар закончился». Быстро расходятся и другие переиздания книг Е.С.

Елена Сергеевна явила редкое сочетание педагогического и литературного таланта. Педагогический талант достался ей по наследству. Сергей Фёдорович Долгинцев, отец Е.С. Вентцель, был математиком с университетским образованием. Семейные обстоятельства заставили его отказаться от аспирантуры и пойти преподавать в гимназию. Мать, Ольга Дмитриевна, работала учительницей в начальной школе.

Как вспоминала Е.С.: «Сам он, математик по образованию, научной карьеры не сделал, скромно преподавал математику в старших классах гимназии. Педагог он, видимо, был выдающийся. Никто в моей жизни не был таким педагогом — в слабой мере я от него унаследовала эту черту. (“Пишет так, что ее не только люди, но и начальство понимает”, — говорил один из моих сослуживцев по Академии Жуковского).

Отец мой, истинно и праведно православный человек, каждый день заставлял нас выслушивать “молитву перед едой”... Набожность свою он соединял с юмором, а что может быть прелестнее такого соединения?» [1].

Талант ясного и доходчивого изложения развивал у Елены Сергеевны и другой незаурядный педагог и математик Григорий Михайлович Фихтенгольц[1]:

«Начало курса “Введение в высшую математику”, а потом “Анализ 1”, “Анализ 2”, “Теорию множеств”, “Теорию функций действительного переменного” и несколько других курсов, названия которых я уже подзабыла, читал у нас Григорий Михайлович Фихтенгольц. Да будет отсюда, из глубокого будущего, благословенно его имя!

Единственное, чем я отличалась от других студентов, — это владением речью. Григорий Михайлович, шутя, устраивал с нами «практические занятия» по речи. Предлагал нам, например: «Изложите содержание такого-то раздела курса за 20 минут». Вынимались часы, и он, придирчиво следя за стрелками, отсчитывал 20 минут. Кое-как мы с этим справлялись. «Ладно. Теперь — то же самое за 10 минут!»... Вот в этих упражнениях я всегда оказывалась лучше других. «В вас что-то есть, — говорил Григорий Михайлович, — только не возьму в толк, что именно. А может быть, и вообще ничего нет» [1].

Литературные склонности обнаружились у Е.С. очень рано. Уже с пяти-шести лет были попытки сочинения. Окончив в 16 лет среднюю школу, она стояла перед выбором пути:

«По образованию — я математик... Это, видимо, было уступкой отцу, которого я любила больше всех на свете. Он-то сам, кончивший Университет с надеждой на аспирантуру (помешала ранняя женитьба, семья, заботы) — он непременно хотел, чтобы кто-то из его детей сделал научную карьеру. (У меня было два брата: старший, Илья и младший, Николка.) Пробовал он со всеми троими — способной (умеренно) оказалась я одна. Когда мне было 7-8 лет — он уже изучал со мной высшую математику (он был уверен, что она проще элементарной)... А внутренне я больше тянулась к литературе. Так и сложилась моя дальнейшая жизнь — между математикой и литературой. Теперь я благодарю Бога за то, что он уберег меня от литературы... Там, как и в любой гуманитарной науке того времени, необходимо было “лгать” в той или в другой форме. А нам, математикам, “жить не по лжи” давалось просто. Пробраться через частокол формул было настолько трудно, что никто (кроме самых бездарных) не профанировал науку» [1].

В 1923 г. Елена Сергеевна поступила на Физико-математический факультет Петроградского (позже Ленинградского) государственного университета. В 1929 г. получила университетский диплом математика с правом преподавания этого предмета в средней и высшей школе. В этом же году вы-

[1] Г.М. Фихтенгольц (1888–1959) — математик, основатель кафедры математического анализа ЛГУ, автор популярного учебника “Курс дифференциального и интегрального исчисления”.
http://mathcenter.spb.runikaanbookfichtenholz_bio.pdf

шла замуж за преподавателя Артиллерийской академии Димитрия Александровича Вентцеля (1898–1955), будущего выдающегося ученого-артиллериста, автора классических учебников по внешней и внутренней баллистике. С 1935 по 1968 гг. Е.С. работала в ВВИА им. профессора Н.Е. Жуковского, с 1968 по 1982 гг. — на кафедре Прикладной математики МИИТа.

В Университете Е.С. слушала лекции замечательных представителей петербургской математической школы: Надежды Николаевны Гернет[2], Гурия Васильевича Колосова[3], Бориса Николаевича Делоне[4], Ивана Ивановича Ива́нова[5], Ивана Матвеевича Виноградова[6] (руководитель дипломной работы Е.С.), Андрея Митрофановича Журавского[7].

Воспоминания Елены Сергеевны о годах учебы содержат интересные факты об образовательном процессе того времени:

«“Учебных планов”, как таковых, у нас не было. Профессора читали в разные годы разные курсы, в соответствии с их личным увлечением за последние годы...

...готовясь к экзаменам, не принято было спрашивать, на каком языке написана книга, по которой надо было готовиться. Не знаешь языка? Так выучи! Усваивая математику, мы попутно изучали еще и языки. Французский, немецкий, иногда — английский, реже — итальянский. Незнанием языка не было прилично хвастаться, как теперь...

Как нас переводили с курса на курс? Довольно беспощадно. Существовало две программы для каждого курса: «минимум» и «максимум». Студент, сдавший минимум, переводился на следующий курс условно. Зато не сдавший минимума отчислялся немедленно».

Студенты университета не замыкались только в круге специальных математических знаний:

«У нас, например, было «модно» ходить на лекции Ореста Даниловича Хвольсона[8], одного из известнейших физиков тех времен. Лекции его всегда собирали огромную студенческую аудиторию. Каждую из них можно было слушать отдельно, как литературное произведение, безотносительно ко всему курсу. Видимо, так, кажется мне и сейчас, надо лекцию строить отдельным самостоятельным литературным произведением, чтобы она минимально цеплялась за все раньше изложенное.

Большой популярностью в студенческой среде пользовались также лекции Евгения Викторовича Тарле[9]. Он умудрялся так построить каждую свою лекцию, что из нее можно было вывести всевозможные следствия — только думай!

Любили студенты-математики посещать сборища «Вольфилы» («Вольной философской ассоциации»), где известные в то время поэты читали свои стихи и где делались доклады на разные исторические темы[10]. Тогда, мне кажется, мы были ближе к единению точного и гуманитарного образования, чем теперь» [1].

Обратимся к размышлениям Е.С. по поводу современной высшей школы:

«...Сегодня в вузе работают преподаватели разных типов.

---

[2] Н.Н. Гернет (1877–1943) — математик, ученица Давида Гильберта (Геттинген), вторая в России женщина-математик с ученой степенью доктора.

[3] Г.В. Колосов (1867–1936) — ученый-механик, член-корреспондент АН СССР (1931), специалист по механике твердого тела и машиноведению.

[4] Б.Н. Делоне (1890–1980) — математик, член-корреспондент АН СССР (1929), специалист по алгебре, теории чисел, математической кристаллографии.

[5] И.И. Ива́нов (1862–1939) — математик-алгебраист, член-корреспондент АН СССР (1924).

[6] И.М. Виноградов (1891–1983) — академик АН СССР (1929), лауреат Сталинской премии (1941), дважды Герой Социалистического Труда (1945, 1971 гг.), с 1932 г. — директор Математического института АН СССР.

[7] А.М. Журавский (1892–1969) — математик, профессор различных ленинградских вузов. Был репрессирован осенью 1941 г. по делу ленинградских ученых, находился в заключении до 1954 г.

[8] О.Д. Хвольсон (1852–1934) — почетный член АН СССР (1925), автор многократно переиздававшегося многотомного “Курса физики”.

[9] Е.В. Тарле (1874–1955) — историк, академик АН СССР (1927). Подвергся репрессиям в начале 1930-х гг., однако после 1933 г. был возвращен из ссылки и стал самым популярным историком сталинского времени.

[10] Вольная философская ассоциация во главе с Андреем Белым собиралась в Петрограде с 1919 по 1924 гг., объединяя широкий круг мыслителей и деятелей различных видов искусства.

Начнем с “преподавателя по призванию”. Разумеется, он должен хорошо знать предмет, за который берется. Но не меньшее значение имеют такие качества, как широкая культура, хорошая речь, умение говорить “без бумажки”, с ходу отвечать на непредвиденные вопросы.

Другой необходимый для вуза тип преподавателя — это “преподаватель-ученый”, который не просто читает лекции, а широко привлекает к собственным исследованиям студентов, аспирантов, других молодых сотрудников.

Конечно, лучше всего, если эти два типа объединяются в одном лице. К сожалению, это далеко не всегда так.

Блистательным лектором, буквально завораживающим аудиторию, был ленинградский профессор Г.М. Фихтенгольц. Противоположный пример — знаменитый ученый, академик И.М. Виноградов. На первой лекции его слушатели с трудом разместились в большой аудитории. Однако уже после нескольких лекций осталось 2-3 энтузиаста. Покойный академик А.Н. Колмогоров[11], один из величайших математиков нашего столетия, далеко не всегда мог донести свои глубокие по содержанию лекции до понимания аудитории.

Не надо путать эти два типа. В частности, не стоит требовать, как это сейчас обычно делается, чтобы каждый доцент был в обязательном порядке кандидатом наук. Пусть он вместо вымученной узкоспециальной диссертации покажет пути совершенствования учебного процесса — для вуза эта работа была бы гораздо важнее. Кстати, такое исследование могло бы служить полноценной диссертацией в области педагогических наук, охватывающих ныне по непонятной причине лишь среднее образование.

...Надо беречь время преподавателей, не допускать его разбазаривания на бесконечные заседания и совещания. Всячески стимулировать не массовые, обезличенные, а индивидуальные формы работы преподавателя со студентом. Для этого и тот, и другой должны иметь время. Ничто так не способствует росту будущего специалиста, как свободные, нестесненные беседы с наставником» [2].

Замечательный пример научно-педагогической работы Елены Сергеевны приводит Е.А. Файнберг: «Большое количество инженеров, практиков и преподавателей со всей страны приезжали к Елене Сергеевне на консультации. У нее был уникальный дар быстрого и глубокого понимания прикладных задач. Она выслушивала визитеров, быстро понимала суть задач, формулировала математические проблемы и намечала методы их исследования... Особенностью было то, что Елена Сергеевна проводила консультации в присутствии студентов, которые таким образом у нее учились работать над практическими задачами» [1].

Попробуем теперь разгадать секрет долгожительства «Теории вероятностей» Елены Сергеевны Вентцель.

Прежде всего, это ясный и живой русский язык, прозрачные и динамичные фразы, которые увлекают читателя, постепенно погружая его в глубину вероятностного мира. При этом Е.С. сохраняет в разумных пределах строгую научность, но без тяжеловесного наукообразия. Популярность формы изложения в сочетании с разумной математической строгостью, что может быть достойнее в учебнике педагога-математика?

Елена Сергеевна, видит своего читателя и разговаривает с ним, как с реальным живым человеком. Такой дар присущ некоторым романистам. Автор все время слышит вопросы своего персонажа и отвечает на них незамедлительно. Иногда это делается вопреки сложившейся традиции разделения задач теории вероятностей и математической статистики. Так, главы о функциях и плотностях одномерной случайной величины завершаются определением законов распределения на основе опытных данных. Благодаря этому диалогу основные понятия теории вероятностей становятся более конкретными для специалиста-прикладника.

Еще одна особенность книги. Многие математические труды построены так, что первые главы содержат только вспомогательные утверждения, а основные факты излагаются в последних главах.

[11] Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987) — советский математик, один из крупнейших математиков XX века. Один из основоположников современной теории вероятностей. Был оппонентом на докторской защите Е.С.

Поэтому частичное или выборочное изучение материала лишено смысла. Прервав на любой главе изучение Теории вероятностей Е.С. Вентцель, читатель остается с законченной суммой знаний определенного уровня. Даже первая глава «Введение» дает общее представление о теории вероятностей для представителей сугубо гуманитарных специальностей.

Главы, посвященные случайным функциям, теории информации, теории массового обслуживания, открыли путь в эти области математики многим диссертантам технических специальностей. Каждая глава, подобно лекциям О.Д. Хвольсона, читается, как самостоятельное произведение математической литературы.

За счет своеобразной структуры и большого числа содержательных примеров учебник исподволь приучает читателя к методологии практического применения вероятностных методов. Читатель замечательного учебника Е.С. проникается тем духом, который выражен в словах Пьера-Симона Лапласа[12] «Вероятность — это уточненный здравый смысл» [3, 4]. («Теория вероятностей в своей основе представляет собой лишь здравый смысл, сведенный к расчетам: она заставляет нас с точностью оценивать то, что проницательным умам безотчетно подсказывает интуиция»).

Один из соратников Елены Сергеевны по научной работе Иван Борисович Погожев[13] завершил статью об их совместной работе строчками ученика Е.С. Павла Феликсовича Хмары[14]:

«Прочтя рассказ «За проходной»,
Себе твержу одну я фразу:
Учитель! Ваш талант большой
Похож на три... таланта сразу!

Мне кажется, что Павел Хмара здесь удивительно верно угадал единство всех трех талантов Елены Сергеевны Вентцель: Таланта Ученого, Таланта Учителя и Таланта Писателя...» [1].

Литература

[1] Е.С. Вентцель — И. Грекова. К столетию со дня рождения: Сборник / Сост. Вентцель Р.П., Эпштейн Г.Л. - М.: Издательский дом «Юность», 2007. - 240 с.

[2] Грекова И., Мышкис А. Кто научит профессора, который должен научить студента? // Комсомольская правда. - 27.02.1988.

[3] Лаплас П-С. Опыт философии теории вероятностей. - М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. - 208 с.

[4] Кац М., Улам С. Математика и логика. Ретроспектива и перспективы. - М.: «Мир», 1971. - 251 с.

Эпштейн Георгий Львович,
доцент кафедры «Цифровые технологии
управления транспортными процессами»
РУТ (МИИТ), г. Москва, доцент,
кандидат технических наук.

E-mail: egl413@gmail.com

[12] Пьер-Симон Лаплас(1749–1827) — французский математик, механик, физик и астроном. Его имя внесено в список величайших ученых Франции на первом этаже Эйфелевой башни.

[13] Иван Борисович Погожев (1923–2011) — российский ученый в области математического моделирования, доктор технических наук, профессор, подполковник артиллерии.

[14] Павел Феликсович Хмара (1929–2011) — советский поэт, журналист, летчик-истребитель, военный инженер, подполковник авиации.

Тригонометрия и решение задач по геометрии

А. Н. Афанасьев

В статье на примере ряда олимпиадных задач показано, что решение с применением тригонометрии достаточно быстро и просто приводит к ответу, в то время как возможность найти чисто геометрическое решение не очевидна.

Одним из направлений алгебраического метода решения геометрических задач является решение задач с применением тригонометрии. Конечно же, геометрическое решение любой геометрической задачи предпочтительней, чем решение, например, методом координат, или же решение с применением тригонометрии. Автор с этим в принципе согласен, но отмечает, что не всегда возможно найти чисто геометрическое решение задачи, и бывают ситуации, в которых применение тригонометрии оправдано, а в некоторых случаях является лучшим вариантом.

Во первых, по самому условию может быть понятно, что для решения задачи требуется применение тригонометрии. Это бывает при решении многих задач на вычисление, но встречается и при решении задач на доказательство.

Во вторых, после анализа условия задачи красивого геометрического решения не видно и понятно, что поиск такого решения потребует времени, а путь решения с применением тригонометрии напрашивается. Такая ситуация может возникнуть во время олимпиады или на экзамене. В связи с этим, хочется вспомнить слова из статьи "Алгебраический метод решения геометрических задач" авторов С.В. Романова и И.Ф. Шарыгина в журнале "Квант": "Когда на экзамене вам предлагают решить задачу по планиметрии, зачастую не стоит тратить время на поиск геометрического решения, рациональнее решить ее алгебраически. Конечно, геометрическое решение, как правило, изящнее, в то время как алгебраическое содержит громоздкие выкладки, но на экзамене, в отличии от олимпиад, изящество решения практически не влияет на оценку. Поэтому основным "оружием" при решении геометрических задач на экзамене является алгебраический метод" [4].

Автор настоящей статьи согласен с этими словами, но оправдывает алгебраический метод и при решении олимпиадных задач по геометрии.

Ниже рассматриваются примеры решения задач по геометрии, в основном задач из математических олимпиад разных уровней. Среди них много задач из материалов жюри школьных олимпиад г. Якутска, СВОШ по математике (ежегодная олимпиада для школьников, проводимая СВФУ им. М.К. Аммосова), а также Всероссийской олимпиады студентов по элементарной геометрии, проводимой кафедрой методики преподавания математики ИМИ СВФУ им. М.К. Аммосова.

Начнем с задачи на разрезание, предложенной девятиклассникам на олимпиаде по элементарной геометрии. Чтобы решить ее, потребуется знание теоремы косинусов.

Пример 1. Докажите, что прямоугольный треугольник с катетами длиной 15 и 20 можно разрезать на пять треугольников с целочисленными сторонами

Решение. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с катетами $AC = 20$ $BC = 15$. Заметим, что $AB = 25$. На гипотенузе отметим точки M_1, M_2, M_3 и M_4 так, что $AM_1 = 7$, $AM_2 = 11$, $AM_3 = 16$ и $AM_4 = 21$ (смотри рисунок 1).

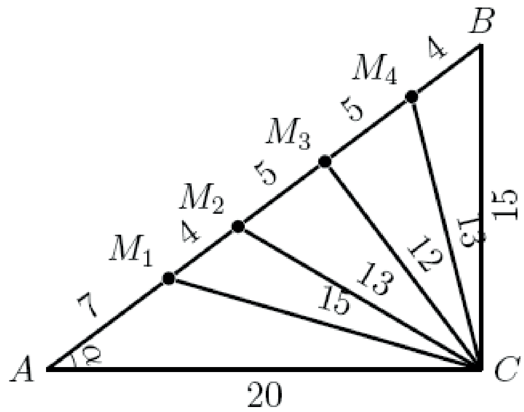

Рис. 1.

Так как $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{5}$, то по теореме косинусов

$$M_1C = \sqrt{7^2 + 20^2 - 2\cdot 7\cdot 20\cdot \frac{4}{5}} = 15,\ \ M_2C = \sqrt{11^2 + 20^2 - 2\cdot 11\cdot 20\cdot \frac{4}{5}} = 13,$$

$$M_3C = \sqrt{16^2 + 20^2 - 2\cdot 16\cdot 20\cdot \frac{4}{5}} = 12,\ \ M_2C = \sqrt{21^2 + 20^2 - 2\cdot 21\cdot 20\cdot \frac{4}{5}} = 13.$$

Соединив точки M_1, M_2, M_3 и M_4 с точкой C, мы получим искомое разрезание.

Замечание. Положение точек M_1, M_2, M_3 и M_4 можно определить, решая в целых числах уравнение

$$x^2 + 400 - 24x = y^2,$$

где x – длина отрезка AM_i, а y – длина отрезка M_iC $(i = 1, ..., 4)$.

Решение следующей задачи основано на определениях тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника и формулы синуса двойного аргумента.

Пример 2. В остроугольном треугольнике ABC точка H — основание высоты, опущенной на AC. Найдите величину угла B, если известно, что $AB^2 = 2BC\cdot AH$ и $\angle A = \alpha$.

Решение. Пусть $\angle C = \gamma$ (смотри рисунок 2). Если умножим обе части равенства

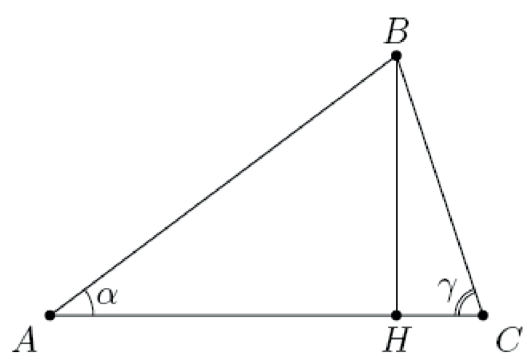

Рис. 2.

$AB^2 = 2BC\cdot AH$ на $\dfrac{BH}{AB^2\cdot BC}$, то получим равенство

$$\frac{BH}{BC} = 2\cdot\frac{BH}{AB}\cdot\frac{AH}{AB},$$

которое, в свою очередь, равносильно равенству

$$\sin\gamma = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Следовательно $\gamma = 2\alpha$ и $\angle B = 180^\circ - 3\alpha$.

Пример 3. (Из материалов СВОШ.) Боковая сторона CD трапеции $ABCD$ равна 1. Найдите длину диагонали AC, если известно, что $\sin\angle BCA = \dfrac{\sqrt{231}}{40}$, $\cos\angle ACD = \dfrac{13}{20}$.

Решение. Заметим, что $\angle CAD = \angle BCA$. Найдем синус угла $\angle ACD$:

$$\sin\angle ACD = \sqrt{1 - \left(\frac{13}{20}\right)^2} = \frac{\sqrt{231}}{20}$$

Оказывается, синус угла ACD в два раза больше синуса угла CAD. Это, по теореме синусов означает, что сторона AD треугольника ACD в два раза больше стороны CD. Следовательно угол CAD – острый и

$$\cos\angle CAD = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{231}}{40}\right)^2} = \frac{37}{40}.$$

Найдем синус угла CDA :

$$\sin\angle CDA = \sin\left(\angle CAD + \angle ACD\right) = \frac{\sqrt{231}}{40}\cdot\frac{13}{20} + \frac{37}{40}\cdot\frac{\sqrt{231}}{20} = \frac{\sqrt{231}}{16}.$$

Это в два с половиной раза больше чем синус угла CAD. Следовательно, по теореме косинусов

$$AC = 2{,}5\cdot CD = 2{,}5.$$

Пример 4. (Всероссийская студенческая олимпиада по элементарной геометрии, 2020.) В остроугольном треугольнике ABC: AA_1, BB_1, CC_1 — высоты, точка M — середина стороны AC, а точка D на стороне BC такова, что $\dfrac{BD}{C_1D} = \dfrac{AB_1}{AA_1}$. Пусть окружность с центром в точке D проходит через точку C_1. Докажите, что прямая C_1M — касательная к этой окружности.

Решение. (Смотри рисунок 3.) Из условия задачи следует, что

$$\frac{BD}{C_1D} = \frac{AB_1}{AA_1} = \frac{AB_1}{AB}\cdot\frac{AB}{AA_1} = \frac{AB_1}{AB} : \frac{AA_1}{AB} = \frac{\sin\angle ABB_1}{\sin\angle C_1BD}. \tag{1}$$

Из треугольника BDC_1 по теореме синусов :

$$\frac{BD}{C_1D} = \frac{\sin\angle DC_1B}{\sin\angle C_1BD}. \tag{2}$$

Из (1) и (2), учитывая остроту углов, заключаем, что $\angle DC_1B = \angle ABB_1$. А так как $\angle MC_1C = \angle C_1CM = \angle ABB_1$, то $\angle MC_1D = \angle CC_1B = 90^\circ$.

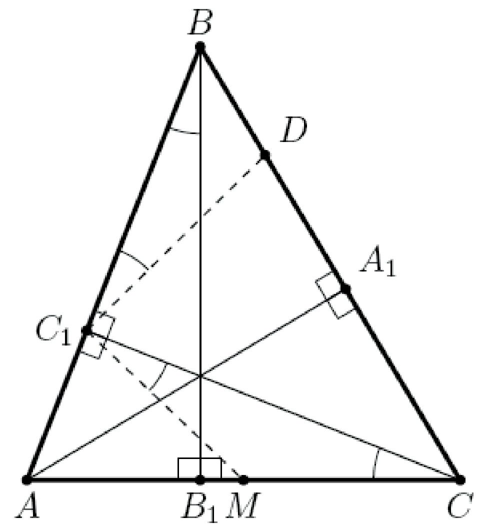

Рис. 3.

Пример 5. (Из материалов жюри городской олимпиады по элементарной геометрии.) Точка M внутри равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ такова, что $\angle MAC = \angle MCB$, а N — точка пересечения прямой BM с отрезком AC. Докажите, что

$$\frac{AN}{NC} = \frac{AM^2}{MC^2}$$

Решение. Так как $\angle MAC = \angle MCB$, то $\angle MAB = \angle MCA$. Смотри рисунок 4.

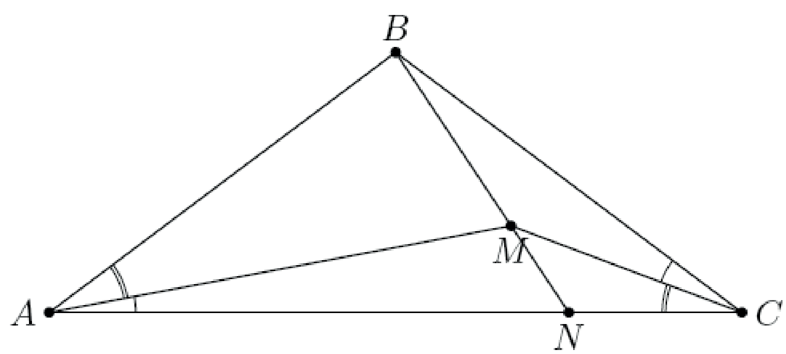

Рис. 4.

Применим теорему синусов к треугольнику AMC :

$$\frac{AM}{MC} = \frac{\sin\angle MCA}{\sin\angle MAC}. \tag{3}$$

Из равнобедренного треугольника ABC :

$$\frac{AN}{NC} = \frac{\sin\angle ABN}{\sin\angle NBC.} \tag{4}$$

Из треугольника ABN :

$$\frac{BM}{MN} = \frac{\sin\angle ANB \cdot \sin\angle MCA}{\sin\angle ABN \cdot \sin\angle MAC}. \tag{5}$$

Из треугольника NBC :

$$\frac{BM}{MN} = \frac{\sin\angle BNC \cdot \sin\angle MAC}{\sin\angle NBC \cdot \sin\angle MCA} = \frac{\sin\angle ANB \cdot \sin\angle MAC}{\sin\angle NBC \cdot \sin\angle MCA}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что

$$\frac{\sin\angle ABN}{\sin\angle NBC} = \frac{\sin^2\angle MCA}{\sin^2\angle MAC}. \tag{7}$$

Из (7), учитывая (3) и (4), следует, что

$$\frac{AN}{NC} = \frac{AM^2}{MC^2}.$$

В следующем примере рассмотрим задачу из книги [2]. В книге приведено геометрическое решение этой задачи, а мы приводим решение, которое опубликовано в статье автора [1], в основе которого лежит теорема синусов.

Пример 6. В треугольнике ABC дано: $AB = BC$, $\angle B = 20°$; на AB взята точка M так, что $\angle MCA = 60°$, а на CB — точка N так, что $\angle NAC = 50°$. Найти $\angle NMC$.

Решение. Пусть точка K на стороне BC такова, что $AM = CK$. В треугольнике AKN: $\angle AKN = 40°$, $\angle KAN = 10°$ и по теореме синусов:

$$\frac{KN}{\sin 10°} = \frac{AN}{\sin 40°}. \tag{8}$$

Аналогично, в треугольнике ANC: $\angle NAC = 50°$, $\angle NCA = 80°$ и по теореме синусов:

$$\frac{CN}{\sin 50°} = \frac{AN}{\sin 80°}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует:

$$\frac{KN}{CN} = \frac{\sin 10° \cdot \sin 80°}{\sin 50° \cdot \sin 40°} = \frac{\sin 10° \cdot \cos 10°}{\cos 40° \cdot \sin 40°} = \frac{\sin 20°}{\sin 80°}. \tag{10}$$

С другой стороны, так как $\angle MCK = 20°$, $\angle MKC = 100°$, по теореме синусов для треугольника MKC :

$$\frac{MK}{MC} = \frac{\sin 20°}{\sin 100°} = \frac{\sin 20°}{\sin 80°}. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что MK — биссектриса угла KMC, следовательно, $\angle NMC = 30°$.

Задача для следующего примера взята из материалов жюри ММО 2003. Мы приводим свое, тригонометрическое, решение.

Пример 7. (Из материалов ММО 2003.) Три различные точки A, B, C лежат на одной прямой в указанном порядке. Пусть Γ – окружность, проходящая через точки A и C, центр которой не лежит на прямой AC. Обозначим через P точку пересечения касательных к Γ в точках A и C. Предположим, что Γ пересекает отрезок PB в точке Q. Докажите, что точка пересечения биссектрисы угла AQC и прямой AC не зависит от выбора окружности Γ.

Решение. Так как AP и CP – касательные, то (смотри рисунок 5)

$$\angle QAC = \angle PCQ, \angle QCA = \angle PAC.$$

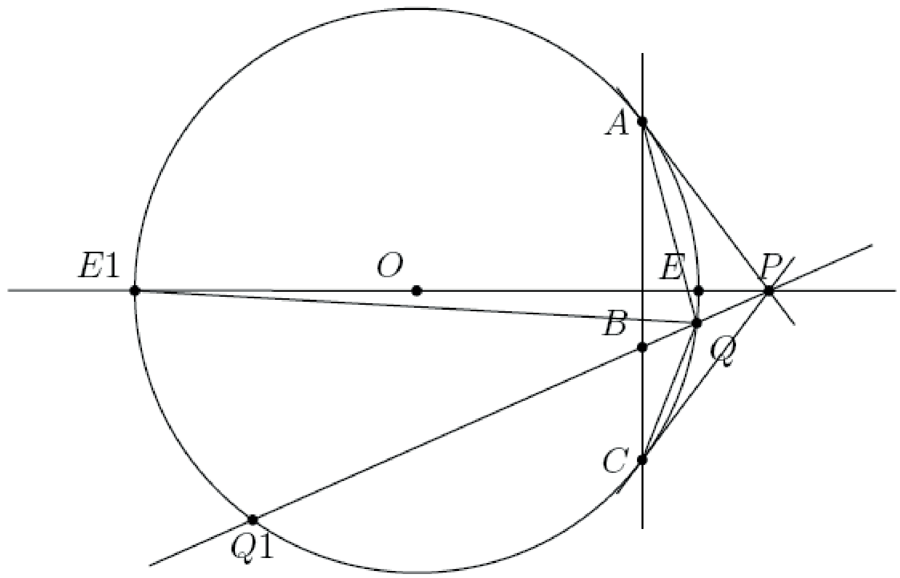

Рис. 5.

Из треугольника AQC :

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{\sin\angle QCA}{\sin\angle QAC}. \tag{12}$$

Из равнобедренного треугольника APC :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin\angle APB}{\sin\angle BPC.} \tag{13}$$

Из треугольника APB :

$$\frac{PQ}{QB} = \frac{\sin\angle ABP\cdot\sin\angle QAC}{\sin\angle APB\cdot\sin\angle QCA}. \tag{14}$$

Из треугольника BPC :

$$\frac{PQ}{QB} = \frac{\sin\angle PBC\cdot\sin\angle QCA}{\sin\angle BPC\cdot\sin\angle QAC} = \frac{\sin\angle ABP\cdot\sin\angle QCA}{\sin\angle BPC\cdot\sin\angle QAC}. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что

$$\frac{\sin\angle APB}{\sin\angle BPC} = \frac{\sin^2\angle QAC}{\sin^2\angle QCA}. \tag{16}$$

Из (16), с учетом (12) и (13), следует, что

$$\frac{AQ}{QC} = \sqrt{\frac{AB}{BC}}.$$

Следовательно, точка пересечения биссектрисы угла AQC и прямой AC делит отрезок AC в отношении $\dfrac{\sqrt{AB}}{\sqrt{BC}}$ и не зависит от выбора окружности Г.

Если в предыдущих примерах главным “оружием” является теорема синусов, то в двух следующих примерах таковым является теорема косинусов.

Пример 8. (Из материалов СВОШ.) На отрезке AB взяты точки C, D, E и F так, что

$$AC : AD : AE : AF : AB = 3 : 5 : 13 : 15 : 18.$$

Точки M и N вне прямой AB таковы, что прямая MC — биссектриса угла AMD, а $NE : NB = 2 : 3$. Докажите, что точки C, F, M и N лежат на одной окружности.

Решение Докажем, что указанные точки лежат на окружности с центром в середине отрезка AB. Пусть O – середина отрезка AB и $AC = 3x$. Тогда, учитывая отношение

$$AC : AD : AE : AF : AB = 3 : 5 : 13 : 15 : 18$$

найдем, что $CD = EF = 2x$, $AO = 9x$, $DO = OE = 4x$ (смотри рисунок 6).

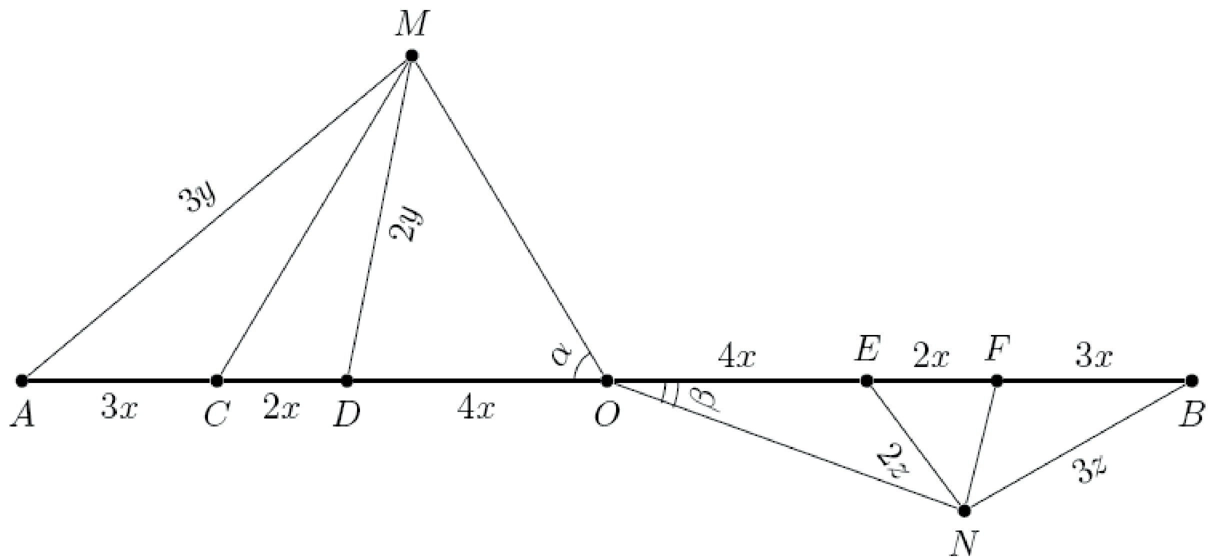

Рис. 6.

По теореме косинусов:

$$AM^2 = 81x^2 + OM^2 - 18x \cdot \cos\alpha, \;\; DM^2 = 16x^2 + OM^2 - 8x \cdot \cos\alpha,$$

где $\alpha = \angle AOM$. Так как MC — биссектриса угла AMD, то

$$\frac{AM}{DM} = \frac{AC}{DC} = \frac{3}{2} \text{ или } \frac{AM^2}{DM^2} = \frac{9}{4}.$$

Из равенства

$$\frac{81x^2 + OM^2 - 18x \cdot \cos\alpha}{16x^2 + OM^2 - 8x \cdot \cos\alpha} = \frac{9}{4}$$

найдем, что $OM = 6x$.

Аналогично покажем, что $ON = 6x$. Таким образом, точки C, F, M и N лежат на окружности с центром в точке O и радиусом $6x$, что и требовалось доказать.

Задача для следующего примера взята из ресурса [3]. Там она включена в качестве задачи для самостоятельного решения, в разделе посвященной теореме косинусов.

Пример 9. Найдите отношение суммы площадей квадратов S_1, S_2 и S_3 к сумме площадей квадратов T_1, T_2 и T_3 (смотри рисунок 7).

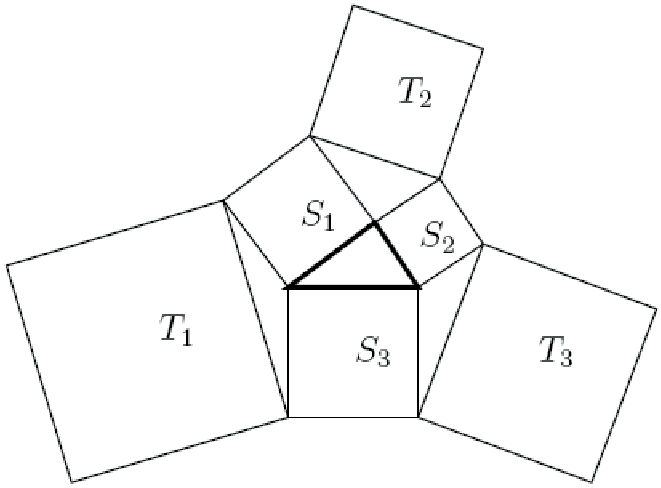

Рис. 7.

Решение. Обозначим вершины данного треугольника и квадратов как показано на рисунке 8.

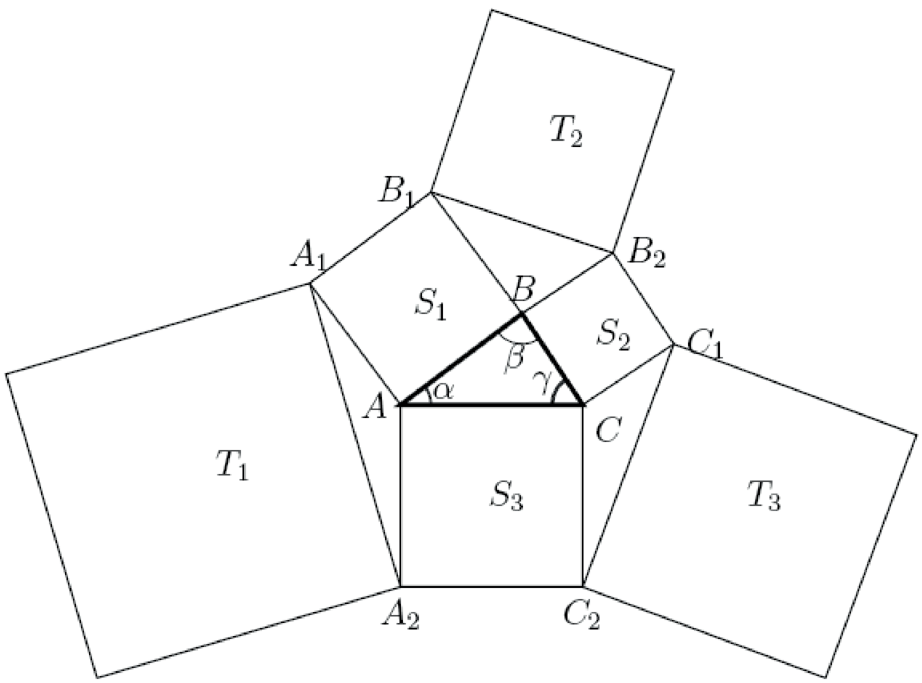

Рис. 8.

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$, $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. Тогда:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2, \tag{17}$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2, \tag{18}$$

$$a^2 + c^2 - 2ab\cos\beta = b^2. \tag{19}$$

Сложив равенства (17), (18) и (19), получим

$$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - 2\left(ab\cos\gamma + bc\cos\alpha + ac\cos\beta\right) = a^2 + b^2 + c^2, \tag{20}$$

откуда, в свою очередь, получаем:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\left(ab\cos\gamma + bc\cos\alpha + ac\cos\beta\right). \tag{21}$$

Заметим, что $\angle A_1AA_2 = 180^\circ - \alpha$, $\angle B_1BB_2 = 180^\circ - \beta$ и $\angle C_1CC_2 = 180^\circ - \gamma$, откуда следует, что

$$A_1A_2^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha, \tag{22}$$

$$B_1B_2^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos\beta, \tag{23}$$

$$C_1C_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma. \tag{24}$$

Находим искомое отношение:

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{T_1 + T_2 + T_3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2\left(ab\cos\gamma + bc\cos\alpha + ac\cos\beta\right)}. \tag{25}$$

Из (25), учитывая (21) получаем:

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{T_1 + T_2 + T_3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + a^2 + b^2 + c^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)} = \frac{1}{3}.$$

Литература

[1] Афанасьев А.Н. Пять решений одной известной задачи // Математическое образование. - 2018. - № 3(87). - С. 2-7.

[2] Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии (Планиметрия). Библиотечка “Квант”. - М.: Наука, 1986. - 224 с.

[3] Yui P. Euclidean Geometry Notes [Электронный ресурс]. URL: http://math.fau.edu/Yiu/EuclideanGeometryNotes.pdf

[4] Романов С.В., Шарыгин И.Ф. Алгебраический метод решения геометрических задач // Квант. - 1975. - № 11 - С. 47-49.

Афанасьев Александр Николаевич,
доцент кафедры методики преподавания математики
Института математики и информатики
Северо-Восточного Федерального Университета
им. М.К. Аммосова, г. Якутск,
кандидат педагогических наук.

E-mail: an.afanasev@s-vfu.ru, afalnik@mail.ru

Антимагические квадраты и их обобщения. Окончание

Л. Штейнгарц

Введены понятия антимагических квадратов по сложению и умножению, а также антимагических прямоугольников. Приведены некоторые общие и частные способы их построения, изучены разнообразные свойства, сформулирован ряд гипотез.

Окончание статьи. Начало и продолжение — в двух предыдущих выпусках журнала.

Для удобства чтения окончания статьи предлагаем просмотреть **путеводитель по разделам**:

Раздел 11. Факториалы и антимагические квадраты

Напомним вначале определение факториала. *Факториал* натурального числа n (при $n \geq 2$) — это произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n.$$

Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Кроме того, принято по соглашению, что $1! = 1$ и $0! = 1$.

Как мы сейчас убедимся, при помощи факториалов легко строятся антимагические квадраты. Причем они окажутся антимагическими как по сложению, так и одновременно по умножению.

Упражнение 1. Проверьте, что данные квадраты являются антимагическими по сложению:

1!	2!
3!	4!

1!	2!	3!
4!	5!	6!
7!	8!	9!

1!	2!	3!	4!
5!	6!	7!	8!
9!	10!	11!	12!
13!	14!	15!	16!

Упражнение 2. Проверьте, что квадраты из упражнения 1 являются антимагическими также и по умножению.

Теорема 11а. *При любом натуральном n следующий числовой квадрат будет антимагическим a) по сложению; b) по умножению:*

$n!$	$(n+1)!$	$(n+2)!$
$(n+3)!$	$(n+4)!$	$(n+5)!$
$(n+6)!$	$(n+7)!$	$(n+8)!$

Доказательство. a) Предположим, к примеру, что сумма чисел в правом столбце совпадает с суммой чисел в средней строке. Тогда $(n+2)! + (n+8)! = (n+3)! + (n+4)!$. То есть $(n+2)! = (n+3)! + (n+4)! - (n+8)!$. Разделим это равенство на $(n+3)!$ Получим:

$$\frac{(n+2)!}{(n+3)!} = 1 + \frac{(n+4)!}{(n+3)!} - \frac{(n+8)!}{(n+3)!}$$

или

$$\frac{1}{n+3} = 1 + (n+4) - \frac{(n+8)!}{(n+3)!}.$$

Но полученное равенство верным быть не может, так в правой части число наверняка целое (почему?), а в левой части — нет.

Аналогично проверяется невозможность равенства остальных сумм.

b) А сейчас предположим, например, что произведение чисел в правом столбце совпадает с произведением чисел в средней строке. Тогда $(n+2)! \cdot (n+8)! = (n+3)! \cdot (n+4)!$. Разделим это равенство на $(n+2)! \cdot (n+4)!$. Получим:

$$\frac{(n+8)!}{(n+4)!} = \frac{(n+3)!}{(n+2)!}$$

Отсюда $(n+5)(n+6)(n+7)(n+8) = n+3$. Но это равенство невозможно, так как число в левой части наверняка больше числа в правой части.

Аналогично можно убедиться в невозможности равества остальных произведений.

Теорема 11b. *Пусть $a, b, c, m, n, k, x, y, z$ — произвольные различные натуральные числа. Тогда следующий числовой квадрат будет наверняка антимагическим a) по сложению; b) по умножению:*

$a!$	$b!$	$c!$
$m!$	$n!$	$k!$
$x!$	$y!$	$z!$

Доказательство примерно такое же, как в предыдущей теореме.

Теорема 11c. *При любом натуральном n следующий числовой квадрат будет антимагическим a) по сложению; b) по умножению:*

$\dfrac{1}{n!}$	$\dfrac{1}{(n+1)!}$	$\dfrac{1}{(n+2)!}$
$\dfrac{1}{(n+3)!}$	$\dfrac{1}{(n+4)!}$	$\dfrac{1}{(n+5)!}$
$\dfrac{1}{(n+6)!}$	$\dfrac{1}{(n+7)!}$	$\dfrac{1}{(n+8)!}$

Доказательство. a) Предположим, к примеру, что сумма чисел в правом столбце совпадает с суммой чисел в средней строке. Тогда

$$\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+5)!}=\frac{1}{(n+3)!}+\frac{1}{(n+4)!}.$$

Умножим обе части этого равенства на $(n+4)!$ Получим:

$$\frac{(n+4)!}{(n+2)!}+\frac{(n+4)!}{(n+5)!}=\frac{(n+4)!}{(n+3)!}+\frac{(n+4)!}{(n+4)!}.$$

Отсюда $1/(n+5)=(n+4)+1-(n+3)(n+4)$. Но это равенство наверняка ложное, так как в правой части число целое, а в левой — нет.

b) Это доказывается точно так же, как пункт b) в Теореме 11a.

Раздел 12. Антимагические квадраты и тригонометрические функции

Тригонометрические функции часто порождают антимагические квадраты, но ведут себя при этом достаточно странно.

Упражнение 1. Проверьте, что данные квадраты является антимагическим как по сложению, так и по умножению:

$\sin 1°$	$\sin 2°$	$\sin 3°$
$\sin 4°$	$\sin 5°$	$\sin 6°$
$\sin 7°$	$\sin 8°$	$\sin 9°$

$\cos 1°$	$\cos 2°$	$\cos 3°$
$\cos 4°$	$\cos 5°$	$\cos 6°$
$\cos 7°$	$\cos 8°$	$\cos 9°$

$\mathrm{tg}\, 1°$	$\mathrm{tg}\, 2°$	$\mathrm{tg}\, 3°$
$\mathrm{tg}\, 4°$	$\mathrm{tg}\, 5°$	$\mathrm{tg}\, 6°$
$\mathrm{tg}\, 7°$	$\mathrm{tg}\, 8°$	$\mathrm{tg}\, 9°$

Упражнение 2. Докажите, что существует бесконечно много квадратов следующего вида, которые являются антимагическими как по сложению, так и по умножению (внутри всех ячеек в скобках должны быть расположены различные натуральные числа):

$\sin(n_1)°$	$\sin(n_2)°$	$\sin(n_3)°$
$\sin(n_4)°$	$\sin(n_5)°$	$\sin(n_6)°$
$\sin(n_7)°$	$\sin(n_8)°$	$\sin(n_9)°$

Теорема 12a. *Существует бесконечно много таких натуральных чисел n, для которых данный квадрат не будет антимагическим ни по сложению, ни по умножению:*

$\sin(n)^\circ$	$\sin(n+1)^\circ$	$\sin(n+2)^\circ$
$\sin(n+3)^\circ$	$\sin(n+4)^\circ$	$\sin(n+5)^\circ$
$\sin(n+6)^\circ$	$\sin(n+7)^\circ$	$\sin(n+8)^\circ$

Доказательство. Пусть $n = 176$. При этом $\sin(n+4)^\circ = \sin 180^\circ = 0$. Поэтому произведения чисел в средней строке и в среднем столбце равны нулю. А значит, квадрат не будет антимагическим по умножению.

Кроме того, $\sin(n+3)^\circ + \sin(n+4)^\circ + \sin(n+5)^\circ = \sin 179^\circ + \sin 180^\circ + \sin 181^\circ$. Но $\sin 179^\circ = \sin(180^\circ - 1^\circ) = \sin 1^\circ$. А $\sin 181^\circ = \sin(180^\circ + 1^\circ) = -\sin 1^\circ$. Поэтому $\sin(n+3)^\circ + \sin(n+4)^\circ + \sin(n+5)^\circ = 0$. Аналогично, и $\sin(n+1)^\circ + \sin(n+4)^\circ + \sin(n+7)^\circ = \sin 177^\circ + \sin 180^\circ + \sin 183^\circ = 0$. Следовательно, данный квадрат не будет антимагическим и по сложению. Легко видеть, что вместо числа $n = 176$ можно взять любое из чисел вида $n = 176 + 360k$, где $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 12b. *Существует бесконечно много таких натуральных чисел n, для которых данный квадрат не будет антимагическим ни по сложению, ни по умножению:*

$cos\ (n)^\circ$	$cos\ (n+1)^\circ$	$cos\ (n+2)^\circ$
$cos\ (n+3)^\circ$	$cos\ (n+4)^\circ$	$cos\ (n+5)^\circ$
$cos\ (n+6)^\circ$	$cos\ (n+7)^\circ$	$cos\ (n+8)^\circ$

Доказательство проводится аналогично доказательству к предыдущей теореме. При этом достаточно рассмотреть числа вида $n = 86 + 360k$, где $k \in \mathbb{N}$.

Упражнение 3. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, для которых данный квадрат не будет антимагическим ни по сложению, ни по умножению:

$tg\ (n)^\circ$	$tg\ (n+1)^\circ$	$tg\ (n+2)^\circ$
$tg\ (n+3)^\circ$	$tg\ (n+4)^\circ$	$tg\ (n+5)^\circ$
$tg\ (n+6)^\circ$	$tg\ (n+7)^\circ$	$tg\ (n+8)^\circ$

Упражнение 4. Докажите, что a) существует бесконечно много таких острых углов α, для которых следующий квадрат будет антимагическим по сложению; b) существует такой острый угол α, для которого следующий квадрат не будет антимагическим по сложению:

$(\sin\alpha)^1$	$(\sin\alpha)^2$	$(\sin\alpha)^3$
$(\sin\alpha)^4$	$(\sin\alpha)^5$	$(\sin\alpha)^6$
$(\sin\alpha)^7$	$(\sin\alpha)^8$	$(\sin\alpha)^9$

Раздел 13. Антимагические квадраты с комплексными числами

Упражнение 1. Показать, что из чисел $1+i, -1+i, 1-i, -1-i$ нельзя составить антимагический квадрат второго порядка a) по сложению; b) по умножению.

Упражнение 2. Докажите, что при любом натуральном значении n данный числовой квадрат (напомним, что i — мнимая единица) не будет антимагическим ни по сложению, ни по умножению:

i^n	i^{n+1}	i^{n+2}
i^{n+3}	i^{n+4}	i^{n+5}
i^{n+6}	i^{n+7}	i^{n+8}

Упражнение 3. a) Проверьте, что данный числовой квадрат не является антимагическим ни по сложению, ни по умножению:

0	1	-1
i	$1+i$	$-1+i$
$-i$	$1-i$	$-1-i$

b) Покажите, что можно переставить числа в этом квадрате так, чтобы он стал антимагическим по сложению.

c) Докажите, что невозможно переставить числа в этом квадрате так, чтобы он стал антимагическим по умножению.

Ранее в разделе 2 была доказана теорема, которая гласит, что из любых n^2 (при $n \geq 3$) различных действительных чисел можно составить антимагический квадрат n-го порядка по сложению.

Верно ли аналогичное утверждение для комплексных чисел, нам неизвестно.

Гипотеза А (раздел 13). *Из любых n^2 (где $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 3$) (где) различных комплексных чисел можно составить антимагический квадрат n-го порядка по сложению.*

Упражнение 4. Пусть $z_1, z_2, z_3, ..., z_8$ — все комплексные корни уравнения $z^8 = 1$. Доказать, что как бы ни переставлять эти корни в следующей числовой таблице, не удастся получить антимагический прямоугольник по умножению:

z_1	z_2	z_3	z_4
z_5	z_6	z_7	z_8

Упражнение 5. Пусть $z_1, z_2, z_3, ..., z_{10}$ — все комплексные корни уравнения $z^{10} = 1$. Доказать, что как бы ни переставлять эти корни в следующей числовой таблице, не удастся получить антимагический прямоугольник по умножению:

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}

Упражнение 6. Пусть $z_1, z_2, z_3, ..., z_9$ — все комплексные корни уравнения $z^9 = 1$. Можно ли переставить эти корни в следующей таблице так, чтобы получился антимагический квадрат по умножению?

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

Очень любопытно порождаются антимагические квадраты при помощи степеней комплексных чисел.

Упражнение 7. Убедитесь, что следующие числовые квадраты являются антимагическими по сложению:

$(1+2i)^1$	$(1+2i)^2$	$(1+2i)^3$
$(1+2i)^4$	$(1+2i)^5$	$(1+2i)^6$
$(1+2i)^7$	$(1+2i)^8$	$(1+2i)^9$

$(2-3i)^1$	$(2-3i)^2$	$(2-3i)^3$
$(2-3i)^4$	$(2-3i)^5$	$(2-3i)^6$
$(2-3i)^7$	$(2-3i)^8$	$(2-3i)^9$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 13а. *Если комплексное число $z = a + bi$ (где a и b — целые числа) отлично от чисел $0, \pm 1, \pm i$, то данный числовой квадрат будет антимагическим по сложению:*

z^1	z^2	z^3
z^4	z^5	z^6
z^7	z^8	z^9

Сформулируем предварительно три леммы.

Лемма 1. *Если комплексное число имеет вид $z = a + bi$, где a и b — целые числа одинаковой четности, то при любом натуральном n $(n \geq 2)$ число z^n можно представить в виде $c + di$, где оба числа c и d — четные.*

Примеры. $(4 + 6i)^3 = -368 + 72i$; $(3 - 7i)^4 = -164 + 3360i$.

Доказательство леммы 1. Докажем лемму методом математической индукции. Проверим утверждение леммы для $n = 2$. Будем иметь: $(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$. Число $2ab$, очевидно, четное. А так как числа a и b одинаковой четности, то и число $(a^2 - b^2)$ — четное.

Предположим, что при некотором натуральном k имеем $z^k = (a+bi)^k = c+di$, где оба числа c и d — четные. Тогда $z^{k+1} = (a+bi)^{k+1} = (a+bi)^k(a+bi)$. То есть, $z^{k+1} = (c+di)(a+bi) = (ac-bd)+(ad+bc)i$. Так как оба числа c и d — четные, то и оба числа в скобках будут четными. Тем самым лемма доказана.

Следующие две леммы предлагаем доказать самостоятельно.

Лемма 2. *Если комплексное число имеет вид $z = a + bi$, где a — нечетное число, а b — четное, то при любом натуральном n $(n \geq 2)$ число z^n также можно представить в таком виде. То есть, в виде $c + di$, где c — нечетное число, а d — четное.*

Примеры. $(9 + 2i)^3 = 621 + 478i$; $(-1 + 6i)^4 = 1081 + 840i$.

Лемма 3. Если комплексное число имеет вид $z = a + bi$, где a — четное число, а b — нечетное, то

а) при любом нечетном n $(n \geq 1)$ число z^n также можно представить в виде $c+di$, где c — четное число, а d — нечетное;

b) при любом четном n $(n \geq 2)$ число z^n можно представить в виде $c+di$, где c — нечетное число, а d — четное.

Примеры. $(8 + 7i)^3 = -664 + 1001i$; $(8 + 7i)^4 = -12319 + 3360i$.

А теперь докажем теорему 13а.

Доказательство. Предположим, например, что суммы чисел в средней строке и в правом столбце равны. Тогда $z^4 + z^5 = z^3 + z^9$. Разделим это равенство на z^3. Это допустимо, так как $z \neq 0$ (по условию). Получим: $z + z^2 = 1 + z^6$. Отсюда $z - 1 = z^6 - z^2$. То есть, $z - 1 = z^2(z^4 - 1)$. Значит, $z - 1 = z^2(z^2 + 1)(z + 1)(z - 1)$. По условию, $z \neq 1$. Поэтому можно разделить это равенство на $(z - 1)$: $1 = z^2(z^2 + 1)(z + 1)$ Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. Будем иметь: $1 = z^5 + z^4 + z^3 + z^2$.

Рассмотрим три возможных варианта.

1) $z = a + bi$, где a и b — целые числа одинаковой четности. При этом (по лемме 1) у каждого слагаемого справа действительная часть является числом четным. Поэтому равенство верным быть не может, так как число 1 — нечетное.

2) $z = a + bi$, где a — нечетное число, а b — четное. При этом (по лемме 2) у каждого слагаемого справа действительная часть является числом нечетным. А значит, действительная часть всего чис-

ла, расположенного справа, будет четным числом. Поэтому и на этот раз равенство верным быть не может.

3) $z = a + bi$, где a — четное число, а b — нечетное. При этом (по лемме 3) у слагаемых z^5 и z^8 действительные части будут числами четными. А у слагаемых z^4 и z^2 действительные части будут числами нечетными. Поэтому действительная часть числа справа будет снова числом четным.

Следовательно, равенство оказалось неверным во всех случаях.

Доказательство невозможности совпадения остальных сумм предлагаем читателям провести самостоятельно.

Раздел 14. Слова, порождающие антимагические квадраты

Этот и следующий разделы не совсем математические. В них разбираются антимагические квадраты и прямоугольники, которые порождаются словами или фразами.

На наш взгляд, материал данных разделов можно с успехом использовать на уроках математики в начальной школе. Впрочем, и для старшеклассников было бы очень полезно, например, составить компьютерные программы, которые помогут исследовать рассматриваемые вопросы.

В следующей таблице рядом с каждой буквой указан её порядковый номер расположения в алфавите русского языка.

А → 1	Б → 1	В → 3	Г → 4	Д → 5	Е → 6
Ё → 7	Ж → 8	З → 9	И → 10	Й → 11	К → 12
Л → 13	М → 14	Н → 15	О → 16	П → 17	Р → 18
С → 19	Т → 20	У → 21	Ф → 22	Х → 23	Ц → 24
Ч → 25	Ш → 26	Щ → 27	Ъ → 28	Ы → 29	Ь → 30
Э → 31	Ю → 32	Я → 33			

Возьмем произвольное слово. Например, слово АНТИМАГИЯ. В этом слове 9 букв. Не важно при этом, что некоторые из них повторяются. Расположим буквы этого слова в телефонном порядке в следующей таблице:

А	Н	Т
И	М	А
Г	И	Я

Заменив каждую букву её порядковым номером, получим такой числовой квадрат:

1	15	20
10	14	1
4	10	33

Упражнение 1. Убедитесь, что числовой квадрат, порожденный словом АНТИМАГИЯ, является антимагическим и по сложению, и по умножению.

Слово АНТИМАГИЯ можно разместить в таблицу и по-другому. Например, в таблицу размером 4×3.

А	Н	Т	И
М	А	Г	И
Я			

Упражнение 2. Убедитесь, что если в полученной таблице заменить каждую букву её порядковым номером, а пустые клетки заполнить нулями, то получим антимагический прямоугольник по сложению.

Упражнение 3. Проверьте, что если в той же таблице заменить каждую букву её порядковым номером, а пустые клетки заполнить единицами, то получим антимагический прямоугольник по умножению.

А теперь расположим слово АНТИМАГИЯ в таблицу размером 5×2.

А	Н	Т	И	М
А	Г	И	Я	

Упражнение 4. Убедитесь, что если в полученной таблице заменить каждую букву её порядковым номером, а в пустую клетку

a) вписать нуль, то получится антимагический прямоугольник по сложению.

b) вписать единицу, то получится антимагический прямоугольник по умножению.

Упражнение 5,

Проверьте, что следующие математические термины порождают антимагические квадраты третьего порядка по сложению:

* ГЕОМЕТРИЯ * ТРИСЕКЦИЯ
* ГИПЕРБОЛА * ФАКТОРИАЛ
* ТОЖДЕСТВО * КОНСТАНТА

Упражнение 6. Проверьте, что следующие математики порождают антимагические квадраты третьего порядка по сложению:

* ГИППОКРАТ * ФИБОНАЧЧИ
* ЭРАТОСФЕН * ПЕРЕЛЬМАН

Упражнение 7. Проверьте, что следующие писатели порождают антимагические квадраты третьего порядка по сложению:

* ЛЕРМОНТОВ * ПАСТЕРНАК
* БЕЛИНСКИЙ * СЕВЕРЯНИН
* ЖУКОВСКИЙ * ЧУКОВСКИЙ

Упражнение 8. Проверьте, что следующие писатели порождают антимагические прямоугольники размером 4×2 (по сложению).

* ТУРГЕНЕВ * БУЛГАКОВ
* КАРАМЗИН * БРОДСКИЙ
* ГОНЧАРОВ * ГАМЗАТОВ

Упражнение 9. Какие слова из предыдущих упражнений порождают антимагические квадраты (или прямоугольники) по умножению?

Упражнение 10. Какие из следующих математиков порождают антимагические прямоугольники размером 3×2 (по сложению или умножению)?

• ЕВКЛИД • ГЁДЕЛЬ • КРАМЕР • КУММЕР
• НЬЮТОН • ВАРИНГ • ДЕКАРТ • КЕЛДЫШ
• КАНТОР • УРЫСОН • КОНВЕЙ • ЖОРДАН
• ГОРНЕР • МЁБИУС • БОРЕЛЬ • ТЕЙЛОР
• РАССЕЛ • АДАМАР • МОРЛЕЙ • ХИНЧИН

Упражнение 11. Выясните, какие из следующие математических терминов порождают антимагические прямоугольники размером 3×2 (по сложению или умножению):

• МОДУЛЬ • ПРЕДЕЛ • ВЕКТОР • ИНДЕКС
• РАДИУС • ПЕРИОД • ЛОГИКА • ЭЛЛИПС
• КОРЕНЬ • РАДИАН • ЗАДАЧА • КРИВАЯ
• СЕКТОР • РАЗРЯД • ВЫСОТА • ПРЯМАЯ

Упражнение 12. Убедитесь, что числовой прямоугольник размером 3×2, порожденный словом ПУШКИН,

a) не является антимагическим по сложению;

b) является антимагическим по умножению.

П	У	Ш
К	И	Н

Упражнение 13. Проверьте, что числовой квадрат третьего порядка, порожденный словом ПУШКИН, и в котором лишние клетки

a) заполнены нулями, является антимагическим по сложению:

П	У	Ш
К	И	Н
0	0	0

b) заполнены единицами, является антимагическим по умножению:

П	У	Ш
К	И	Н
1	1	1

Раздел 15. Фразы, порождающие антимагические квадраты

Рассмотрим любое предложение. Например, такое:

В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ
КВАДРАТ ГИПОТЕНУЗЫ РАВЕН
СУММЕ КВАДРАТОВ КАТЕТОВ

Составим при помощи слов этого предложения следующую таблицу:

В	ПРЯМОУГОЛЬНОМ	ТРЕУГОЛЬНИКЕ
КВАДРАТ	ГИПОТЕНУЗЫ	РАВЕН
СУММЕ	КВАДРАТОВ	КАТЕТОВ

Заменим каждое слово на количество букв в этом слове. Получим такой числовой квадрат третьего порядка:

1	13	12
7	10	5
5	9	7

Нетрудно проверить, что этот квадрат (который порожден теоремой Пифагора) будет антимагическим как по сложению, так и по умножению.

Расположим эти же числа, не меняя порядок их чередования, в таблице размером 5×2:

1	13	12	7	10
5	5	9	7	

Как видим, одна клетка при этом осталась пустой.

Упражнение 1. Убедитесь, что если в данной таблице вписать в пустую клетку
a) цифру 0, то полученный числовой прямоугольник не будет антимагическим по сложению;
b) цифру 1, то полученный числовой прямоугольник не будет антимагическим по умножению.

Упражнение 2. Какие из следующих таблиц порождают антимагические квадраты (по сложению или умножению)?

СУММА	УГЛОВ	В
ЛЮБОМ	ТРЕУГОЛЬНИКЕ	РАВНА
СТА	ВОСЬМИДЕСЯТИ	ГРАДУСАМ

УГОЛ	В	ТРЕУГОЛЬНИКЕ
МОЖЕТ	БЫТЬ	ОСТРЫМ
ПРЯМЫМ	ИЛИ	ТУПЫМ

Упражнение 3. Какие из следующих таблиц порождают антимагические квадраты (по сложению или умножению)?

ЧИСЛОМ	ПИ	ОБОЗНАЧАЕТСЯ
ОТНОШЕНИЕ	ДЛИНЫ	ОКРУЖНОСТИ
К	ЕЁ	ДИАМЕТРУ

ЧИСЛО	ПИ	НЕЛЬЗЯ
ПРЕДСТАВИТЬ	В	ВИДЕ
ОТНОШЕНИЯ	ЦЕЛЫХ	ЧИСЕЛ

ЧИСЛО	ПИ	ЯВЛЯЕТСЯ
НАИМЕНЬШИМ	ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ	ПЕРИОДОМ
ДЛЯ	ФУНКЦИИ	ТАНГЕНС

Упражнение 4. Какие из следующих таблиц порождают антимагические квадраты (по сложению или умножению)?

ЧЕРЕЗ	ТОЧКУ	ВНЕ
ПРЯМОЙ	ПРОХОДИТ	ЕДИНСТВЕННАЯ
ПРЯМАЯ	ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ	ДАННОЙ

СРЕДНЯЯ	ЛИНИЯ	ТРЕУГОЛЬНИКА
ПАРАЛЛЕЛЬНА	ОСНОВАНИЮ	И
РАВНА	ЕГО	ПОЛОВИНЕ

СРЕДНЯЯ	ЛИНИЯ	ТРАПЕЦИИ
ПАРАЛЛЕЛЬНА	ОСНОВАНИЯМ	И
РАВНА	ИХ	ПОЛУСУММЕ

Упражнение 5. Какие из следующих таблиц порождают антимагические квадраты (по сложению или умножению)?

В	ЛЮБОМ	ТРЕУГОЛЬНИКЕ
ВСЕ	БИССЕКТРИСЫ	ПЕРЕСЕКАЮТСЯ
В	ОДНОЙ	ТОЧКЕ

В	ЛЮБОМ	ТРЕУГОЛЬНИКЕ
ВСЕ	ВЫСОТЫ	ПЕРЕСЕКАЮТСЯ
В	ОДНОЙ	ТОЧКЕ

В	ЛЮБОМ	ТРЕУГОЛЬНИКЕ
ВСЕ	МЕДИАНЫ	ПЕРЕСЕКАЮТСЯ
В	ОДНОЙ	ТОЧКЕ

Упражнение 6. Какие из следующих таблиц порождают антимагические квадраты (по сложению или умножению)?

ЦЕНТРОМ	ОКРУЖНОСТИ	ВПИСАННОЙ
В	ТРЕУГОЛЬНИК	ЯВЛЯЕТСЯ
ТОЧКА	ПЕРЕСЕЧЕНИЯ	БИССЕКТРИС

СЕРЕДИННЫЕ	ПЕРПЕНДИКУЛЯРЫ	К
СТОРОНАМ	ТРЕУГОЛЬНИКА	ПЕРЕСЕКАЮТСЯ
В	ОДНОЙ	ТОЧКЕ

ЦЕНТРОМ	ТЯЖЕСТИ	ПРОИЗВОЛЬНОГО
ТРЕУГОЛЬНИКА	НАЗЫВАЕТСЯ	ТОЧКА
ПЕРЕСЕЧЕНИЯ	ЕГО	МЕДИАН

Упражнение 7. Какие из следующих таблиц порождают антимагические квадраты (по сложению или умножению)?

ВСЕ	ТОЧКИ	ОКРУЖНОСТИ
ОДИНАКОВО	УДАЛЕНЫ	ОТ
ЦЕНТРА	ЭТОЙ	ОКРУЖНОСТИ

ВПИСАННЫЙ	УГОЛ	РАВЕН
ПОЛОВИНЕ	ДУГИ	НА
КОТОРУЮ	ОН	ОПИРАЕТСЯ

ДИАМЕТР	ОКРУЖНОСТИ	БОЛЬШЕ
ЛЮБОЙ	ХОРДЫ	НЕ
ПРОХОДЯЩЕЙ	ЧЕРЕЗ	ЦЕНТР

Упражнение 8. Какие из следующих таблиц порождают антимагические квадраты (по сложению или умножению)?

ПЛОЩАДЬ	ТРЕУГОЛЬНИКА	РАВНА
ПОЛОВИНЕ	ПРОИЗВЕДЕНИЯ	ЕГО
ОСНОВАНИЯ	НА	ВЫСОТУ

ПЛОЩАДЬ	ТРАПЕЦИИ	РАВНА
ПРОИЗВЕДЕНИЮ	ЕГО	СРЕДНЕЙ
ЛИНИИ	НА	ВЫСОТУ

ПЛОЩАДЬ	КРУГА	РАВНА
ПРОИЗВЕДЕНИЮ	ЧИСЛА	ПИ
НА	КВАДРАТ	РАДИУСА

Упражнение 9. Замените в данной таблице каждое слово на количество букв в этом слове.

У	ЛУКОМОРЬЯ	ДУБ	ЗЕЛЕНЫЙ		
ЗЛАТАЯ	ЦЕПЬ	НА	ДУБЕ	ТОМ	
И	ДНЁМ	И	НОЧЬЮ	КОТ	УЧЕНЫЙ
ВСЁ	ХОДИТ	ПО	ЦЕПИ	КРУГОМ	

Убедитесь, что если в пустые клетки

a) вписать цифру 0, то полученный числовой прямоугольник не будет антимагическим по сложению;

b) вписать цифру 1, то полученный числовой прямоугольник не будет антимагическим по умножению.

Упражнение 10. Замените в данной таблице каждое слово на количество букв в этом слове:

В	ЛЕСУ	РОДИЛАСЬ	ЁЛОЧКА
В	ЛЕСУ	ОНА	РОСЛА
ЗИМОЙ	И	ЛЕТОМ	СТРОЙНАЯ
ЗЕЛЕНАЯ	БЫЛА		

Убедитесь, что если в пустые клетки

a) вписать цифру 0, то полученный числовой квадрат не будет антимагическим по сложению;

b) вписать цифру 1, то полученный числовой квадрат будет антимагическим по умножению.

В предыдущей задаче полученный числовой квадрат не оказался антимагическим по сложению. Но появляется возможность создать антимагический квадрат, если будем разрешать вписывать в ячейки сразу по несколько соседних слов.

Упражнение 11. Проверьте, что следующая таблица порождает антимагический квадрат (как по сложению, так и по умножению):

В	ЛЕСУ РОДИЛАСЬ	ЁЛОЧКА
В ЛЕСУ	ОНА РОСЛА	ЗИМОЙ И ЛЕТОМ
СТРОЙНАЯ	ЗЕЛЕНАЯ	БЫЛА

Упражнение 12. Распределите слова из упражнений 9 и 10 в таблицах произвольных размеров, оставляя очередность слов без изменения и, по необходимости, вписывая несколько слов в одну ячейку так, чтобы порожденные числовые квадраты (или прямоугольники) оказались антимагическими по сложению.

Упражнение 13. Составьте антимагический квадрат или прямоугольник по сложению (вписывая, по необходимости, несколько соседних слов в одну ячейку) при помощи следующего текста:

Ехали медведи
На велосипеде.
А за ними кот
Задом наперёд.
А за ним комарики
На воздушном шарике.

Упражнение 14. Замените в данной таблице содержимое каждой ячейки на общее количество букв в этой ячейке:

МОЙ ДЯДЯ	САМЫХ	ЧЕСТНЫХ	ПРАВИЛ
КОГДА	НЕ В	ШУТКУ	ЗАНЕМОГ
ОН	УВАЖАТЬ	СЕБЯ	ЗАСТАВИЛ
И	ЛУЧШЕ	ВЫДУМАТЬ	НЕ МОГ

a) Убедитесь, что полученная числовая таблица не является антимагическим квадратом по сложению.

b) Перераспределите слова в ячейках этой таблицы так (оставляя очередность слов без изменения), чтобы порожденный числовой квадрат оказался антимагическим по сложению.

Упражнение 15.

Составьте антимагический квадрат или прямоугольник по сложению (вписывая, по необходимости, несколько соседних слов в одну ячейку) при помощи следующего текста:

Белеет парус одинокий
В тумане моря голубом!..
Что ищет он в стране далекой?
Что кинул он в краю родном?..

Раздел 16. Заключение

В данной статье мы рассмотрели многочисленные антимагические квадраты и прямоугольники. Причем, в совершенно различных областях математики (и не только).

Конечно, многие вопросы остались нерешенными и сформулированы в виде гипотез. Возможно, кому-нибудь из читателей удастся их разрешить. Более того, многие проблемы, безусловно, даже еще не были сформулированы.

Кроме того, есть ещё целые области, которые вовсе не исследованы по данной теме. Например, такие:

* Координаты на плоскости и в пространстве (антимагические квадраты, порожденные координатами вершин треугольников, или замечательными точками в треугольниках и т.д.).
* Векторы на плоскости и в пространстве.
* Обратные тригонометрические функции.
* Различные системы счисления.
* Теория вероятностей.
* Дифференциальное исчисление.
* Интегральное исчисление.
* Антимагические квадраты в шахматах.
* Антимагические квадраты в игре “15”.
* Антимагические квадраты в игре Судоку и т.п.

Хотелось бы надеяться, что кого-нибудь заинтересуют рассматриваемые темы и будут получены новые интересные результаты.

Лейб Штейнгарц,
доктор педагогики,
Иерусалим, Израиль.

E-mail: leybleyb@yahoo.com

О некоторых свойствах функций, характеризуемых нулевыми интегралами. Окончание

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, Н. П. Волчкова

Статья знакомит читателя с некоторыми важными инструментами современной математики на примере изучения класса функций, имеющих нулевые интегралы по всем квадратам фиксированного размера, лежащим в заданном круге. Приводится критерий полного дифференциала в усиленной форме, а также рассматриваются обобщения других классических результатов, связанных с нулевыми интегральными средними.

Окончание статьи; начало напечатано в предыдущем выпуске журнала, № 4 (100), часть II. Обращаем внимание читателей на то, что в данном окончании содержится много ссылок на теоремы и формулы из начала статьи, они отмечены указателем “часть I”.

§7. Квадрат как множество Помпейю

Пусть A – компактное множество в $\mathbb{R}^2$ положительной лебеговой меры. Множество A называется *множеством Помпейю*, если всякая непрерывная функция на $\mathbb{R}^2$, имеющая нулевые интегралы по всем множествам, конгруэнтным A, является тождественным нулем.

В 1948 году Хр. Христов [9] установил, что квадрат на плоскости является множеством Помпейю. Здесь мы приведем доказательство более сильного результата.

Теорема 7. *Имеют место следующие утверждения:*
1) если $R > \sqrt{5}/2$, то $\mathcal{K}_R = \{0\}$;
2) если $R < \sqrt{5}/2$, то $\mathcal{K}_R \neq \{0\}$.

Отметим геометрический смысл экстремального радиуса в теореме 7. Экстремальный радиус $\sqrt{5}/2$ – это радиус круга, описанного около прямоугольника со сторонами 1 и 2.

Для доказательства теоремы 7 потребуются два вспомогательных утверждения.

Лемма 10. *Если $f \in \mathcal{K}_{\sqrt{5}/2} \cap C^4(B_{\sqrt{5}/2})$ и f является радиальной функцией, то $f \equiv 0$.*

Доказательство. В силу леммы 4, часть I вместе с функцией f её частные производные f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{yy} также принадлежат классу $\mathcal{K}_{\sqrt{5}/2}$. Тогда смешанная разность от этих функций по вершинам единичных квадратов равна нулю (см. лемму 5, часть I). Запишем $f(\xi) = f_0(|\xi|) = f_0(\rho) = f_0(\sqrt{x^2+y^2})$, тогда

$$f'_y = f'_0(\rho)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = y\,\frac{f'_0(\rho)}{\rho} = yg(\rho), \tag{1}$$

где

$$g(\rho) = \frac{f'_0(\rho)}{\rho}. \tag{2}$$

При этом функция f'_y нечётна по y и чётна по x.

Пусть $|x| < 1/2$, $K_x = K_0 + (x,0)$, где $K_0 = [-1/2,1/2] \times [-1/2,1/2]$. Имеем $K_x \subset B_{\sqrt{5}/2}$ и $K_x = ABCD$, где

$$A = \left(x - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad B = \left(x - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad C = \left(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2}\right), \quad D = \left(\frac{1}{2} + x, -\frac{1}{2}\right).$$

Точка $A^{'} = (-x + (1/2), -1/2)$ симметрична A относительно оси Oy, а точка $B^{'} = (-x + (1/2), 1/2)$ симметрична B относительно Oy.

Согласно отмеченному выше свойству смешанной разности,

$$f_y^{'}(A) + f_y^{'}(C) - f_y^{'}(B) - f_y^{'}(D) = 0. \tag{3}$$

В силу нечетности $f_y^{'}$ по y и четности $f_y^{'}$ по x,

$$f_y^{'}(B) = -f_y^{'}(A), \quad f_y^{'}(C) = -f_y^{'}(D), \tag{4}$$

$$f_y^{'}(B) = f_y^{'}(B^{'}), \quad f_y^{'}(A) = -f_y^{'}(A^{'}). \tag{5}$$

Из (3) и (4) следует, что $-2f_y^{'}(B) + 2f_y^{'}(C) = 0$, $f_y^{'}(B) = f_y^{'}(C)$. Теперь соотношение (5) влечет равенство $f_y^{'}(B^{'}) = f_y^{'}(C)$. Используя координаты точек $B^{'}$, C и (1), его можно переписать в виде

$$g\left(\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2}\right) = g\left(\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + x\right)^2}\right), \quad |x| < \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Запишем теперь аналог равенства (6) для лапласиана $\Delta f = f''_{xx} + f''_{yy} \in \mathcal{K}_{\sqrt{5}/2}$. Имеем (см. (5), часть I, (1), (2))

$$\Delta f = f_0^{''}(\rho) + \frac{f_0^{'}(\rho)}{\rho} = g'(\rho)\rho + 2g(\rho).$$

При этом

$$(\Delta f)'_y = g''(\rho)y + \frac{g'(\rho)y}{\rho} + 2\frac{g'(\rho)}{\rho}y = yg_1(\rho),$$

где

$$g_1(\rho) = g''(\rho) + \frac{3g'(\rho)}{\rho}.$$

По аналогии с (6) получаем

$$g_1\left(\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2}\right) = g_1\left(\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + x\right)^2}\right), \quad |x| < \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Положим

$$\varphi_+(x) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}, \quad \varphi_-(x) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Тогда

$$g(\varphi_-) = g(\varphi_+), \tag{8}$$

$$g_1(\varphi_-) = g_1(\varphi_+). \tag{9}$$

Продифференцируем (8) и выразим $g'(\varphi_-)$, $g''(\varphi_-)$ через $g'(\varphi_+)$, $g''(\varphi_+)$. Находим

$$\varphi'_-(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{\varphi_-(x)}, \quad \varphi'_+(x) = \frac{x + \frac{1}{2}}{\varphi_+(x)}.$$

Из (8) следует, что

$$g'(\varphi_-) \cdot (\varphi_-)' = g'(\varphi_+) \cdot (\varphi_+)',$$

$$g'(\varphi_-) = g'(\varphi_+) \cdot \frac{\varphi'_+}{\varphi'_-}. \tag{10}$$

Дифференцируя, получаем

$$g''(\varphi_-)\varphi'_- = g''(\varphi'_+) \cdot \frac{(\varphi'_+)^2}{\varphi'_-} + g'(\varphi_+) \cdot \frac{\varphi''_+\varphi'_- - \varphi'_+\varphi''_-}{(\varphi'_-)^2},$$

$$g''(\varphi_-) = g''(\varphi_+) \cdot \left(\frac{\varphi'_+}{\varphi'_-}\right)^2 + g'(\varphi_+) \cdot \frac{\varphi''_+}{(\varphi'_-)^2} - g'(\varphi_+) \cdot \frac{\varphi'_+\varphi''_-}{(\varphi'_-)^3}. \tag{11}$$

По определению функции g_1,

$$g_1(\varphi_-) = g''(\varphi_-) + \frac{3g'(\varphi_-)}{\varphi_-}, \quad g_1(\varphi_+) = g''(\varphi_+) + \frac{3g'(\varphi_+)}{\varphi_+}.$$

Отсюда и из (9) имеем

$$g''(\varphi_-) + \frac{3g'(\varphi_-)}{\varphi_-} = g''(\varphi_+) + \frac{3g'(\varphi_+)}{\varphi_+}.$$

Подставляя сюда (10), (11), получаем

$$g''(\varphi_+)\left(\frac{\varphi'_+}{\varphi'_-}\right)^2 + g'(\varphi_+)\frac{\varphi''_+}{(\varphi'_-)^2} - g'(\varphi_+)\frac{\varphi'_+\varphi''_-}{(\varphi'_-)^3} + 3\frac{g'(\varphi_+)\varphi'_+}{\varphi_-\varphi'_-} = g''(\varphi_+) + \frac{3g'(\varphi_+)}{\varphi_+},$$

т.е.

$$g''(\varphi_+)\left[\left(\frac{\varphi'_+}{\varphi'_-}\right)^2 - 1\right] + g'(\varphi_+)\left[\frac{\varphi''_+}{(\varphi'_-)^2} - \frac{\varphi'_+\varphi''_-}{(\varphi'_-)^3} + \frac{3\varphi'_+}{\varphi_-\varphi'_-} - \frac{3}{\varphi_+}\right] = 0.$$

Обозначим

$$A = \left(\frac{\varphi'_+}{\varphi'_-}\right)^2 - 1, \quad B = \frac{\varphi''_+}{\left(\varphi'_-\right)^2} - \frac{\varphi'_+\varphi''_-}{(\varphi'_-)^3} + \frac{3\varphi'_+}{\varphi_-\varphi'_-} - \frac{3}{\varphi_+}.$$

Нетрудно видеть, что

$$A = \frac{\frac{1}{2}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{4}+(x+\frac{1}{2})^2\right)}, \quad B = \frac{3x^4 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{4}+(x+\frac{1}{2})^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Поэтому

$$\frac{g''(\varphi_+)}{g'(\varphi_+)}\varphi'_+ = \frac{(-3x^4 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4})(x+\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}x(x-\frac{1}{2})\left(\frac{1}{4}+(x+\frac{1}{2})^2\right)},$$

т.е.

$$\frac{g''(\varphi_+)}{g'(\varphi_+)}\varphi'_+ = -6x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-\frac{1}{2}} + \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+(x+\frac{1}{2})^2},$$

$$(\ln g'(\varphi_+))' = -6x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-\frac{1}{2}} + \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+(x+\frac{1}{2})^2}.$$

Интегрируя обе части этого равенства, находим

$$\ln g'(\varphi_+) = -3x^2 + \ln|x| + \ln\left(\frac{1}{2} - x\right) + \ln\sqrt{\frac{1}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} + \ln C,$$

где $C > 0$, $|x| < 1/2$. Таким образом,

$$g'(\varphi_+) = Ce^{-3x^2}\left(\frac{1}{2} - x\right)|x|\sqrt{\frac{1}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}, \quad |x| < \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Из (10) следует, что

$$g'(\varphi_+)\varphi'_+ = g'(\varphi_-)\varphi'_- = g'(\varphi_+(-x))\varphi'_-,$$

так как $\varphi_+(-x) = \varphi_-(x)$. Отсюда и из (12) получаем

$$Ce^{-3x^2}\left(\frac{1}{2} - x\right)|x|\varphi_+(x)\varphi'_+(x) = Ce^{-3x^2}\left(\frac{1}{2} + x\right)|x|\varphi_-(x)\varphi'_-(x),$$

$$Ce^{-3x^2}\left(\frac{1}{2} - x\right)|x|\varphi_+(x)\frac{x + \frac{1}{2}}{\varphi_+(x)} = Ce^{-3x^2}\left(\frac{1}{2} + x\right)|x|\varphi_-(x)\frac{x - \frac{1}{2}}{\varphi_-(x)},$$

$$C\left(\frac{1}{4} - x^2\right) \equiv C\left(x^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Поэтому $g'(\rho) = 0$ при $1/2 < \rho < \sqrt{5}/2$,

$$\Delta f = \mathrm{const} \quad \text{при} \quad \frac{1}{2} < \rho < \frac{\sqrt{5}}{2}, \tag{13}$$

$$\Delta^2 f = 0 \quad \text{при} \quad \frac{1}{2} < \rho < \frac{\sqrt{5}}{2}. \tag{14}$$

Далее, фиксируем $x \in (0, 1/2)$. Имеем

$$\iint_{K_x} \Delta^2 f = \iint_{K_{x+h}} \Delta^2 f = 0$$

при малых h. Тогда

$$\iint_{\Pi_1} \Delta^2 f = \iint_{\Pi_2} \Delta^2 f,$$

где $\Pi_1 = [x - 1/2, x + h - 1/2] \times [-1/2, 1/2]$, $\Pi_2 = \Pi_1 + (1, 0)$. Так как Π_2 лежит в области нулей функции $\Delta^2 f$, то

$$\iint_{\Pi_1} \Delta^2 f = 0,$$

т.е.

$$\int_{x-1/2}^{x+h-1/2}\Big(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\Delta^2 f)(u, v)dv\Big)du = 0.$$

Дифференцируя по h и полагая $h = 0$, получаем

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\Delta^2 f)(x - 1/2, v)dv = 0. \tag{15}$$

Аналогично, если $x \in (-1/2, 0)$, то

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\Delta^2 f)(x + 1/2, v)dv = 0. \tag{16}$$

Из (14)–(16) и радиальности $\Delta^2 f$ видно, что функция $(\Delta^2 f)\chi_{B_{\sqrt{5}/2}}$ удовлетворяет условиям теоремы 6, часть I. Следовательно, $\Delta^2 f \equiv 0$, т.е. функция Δf является гармонической в круге $B_{\sqrt{5}/2}$. В силу теоремы единственности для гармонических функций $\Delta f = \mathrm{const}$ в $B_{\sqrt{5}/2}$ (см. (13)). Поскольку $\Delta f \in \mathcal{K}_{\sqrt{5}/2}$, то $\Delta f = 0$ в $B_{\sqrt{5}/2}$. Итак,

$$g'(\rho)\rho + 2g(\rho) = 0, \quad \text{т.е.} \quad g(\rho) = \frac{C}{\rho^2}; \quad f_0'(\rho) = \rho g(\rho) = \frac{C}{\rho}, \quad f_0(\rho) = C\ln\rho + C_1.$$

Используя непрерывность f_0 в нуле, получаем $C = 0$. Отсюда $C_1 = 0$ и $f \equiv 0$.

Лемма 11. *Пусть функция f имеет вид $f(x,y) = u(\rho)e^{im\varphi}$ $(m \in \mathbb{Z})$ и $f \in \mathcal{K}_{\sqrt{5}/2} \cap C^{|m|+4}(B_{\sqrt{5}/2})$. Тогда $f \equiv 0$.*

Доказательство. При $m = 0$ требуемое утверждение следует из леммы 10. Предположим, что оно верно для функций вида $u(\rho)e^{ik\varphi}$ $(k \geq 0)$ и докажем его для функций вида $u(\rho)e^{i(k+1)\varphi}$. Пусть $u(\rho)e^{i(k+1)\varphi} \in \mathcal{K}_{\sqrt{5}/2} \cap C^{k+5}(B_{\sqrt{5}/2})$. Тогда функция

$$\left(u'(\rho) + \frac{(k+1)u(\rho)}{\rho}\right)e^{ik\varphi}$$

принадлежит классу $\mathcal{K}_{\sqrt{5}/2} \cap C^{k+4}(B_{\sqrt{5}/2})$ (см. следствие 1, часть I). Отсюда по предположению индукции

$$u'(\rho) + \frac{(k+1)u(\rho)}{\rho} = 0,$$

т.е. $u(\rho) = C/\rho^{k+1}$. Поскольку $u(\rho)$ непрерывна в нуле, то $C = 0$ и $u(\rho) \equiv 0$, что и требовалось.

Аналогично доказывается, что если требуемое утверждение верно для функций вида $u(\rho)e^{ik\varphi}$ $(k \leq 0)$, то оно верно и для функций вида $u(\rho)e^{i(k-1)\varphi}$. Это завершает доказательство леммы 11.

Доказательство теоремы 7. 1) Сначала докажем, что

$$\mathcal{K}_{\sqrt{5}/2} \cap C^{\infty}(B_{\sqrt{5}/2}) = \{0\}. \tag{17}$$

Действительно, если $f \in \mathcal{K}_{\sqrt{5}/2} \cap C^{\infty}(B_{\sqrt{5}/2})$, то по лемме 3, часть I, $f_m(\rho)e^{im\varphi} \in \mathcal{K}_{\sqrt{5}/2} \cap C^{\infty}(B_{\sqrt{5}/2})$, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда в силу леммы 11, $f_m(\rho)e^{im\varphi} \equiv 0$ при всех $m \in \mathbb{Z}$, т.е. $f = 0$.

Теперь предположим, что $R > \sqrt{5}/2$ и $0 < \varepsilon < R - \sqrt{5}/2$. Из (17) и леммы 5, часть I получаем $\mathcal{K}_{R-\varepsilon} \cap C^{\infty}(B_{R-\varepsilon}) = \{0\}$. Отсюда и из леммы 8, часть I следует, что $\mathcal{K}_R = \{0\}$.

2) Если $R < \sqrt{5}/2$, то все единичные квадраты в B_R имеют непустое пересечение, а именно некоторый круг B_ε. Тогда ненулевая функция $x\omega_\varepsilon(x,y)$ принадлежит классу $\mathcal{K}_R$, поскольку для любого единичного квадрата $K \subset B_R$

$$\iint_K x\omega_\varepsilon(x,y)dxdy = \iint_{B_\varepsilon} x\omega_\varepsilon(x,y)dxdy = c_\varepsilon \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int_0^{\varepsilon} \rho^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \rho^2}\right) d\rho = 0.$$

Таким образом, теорема 7 доказана.

Замечание 3. *Из теоремы 7 и соотношения (14), часть I следует, что при $R > \sqrt{5}/2$ всякая локально интегрируемая в B_R функция с условием (10), часть I является нулевой.*

§8. $\overline{\partial}$-проблема

В ходе изучения голоморфных (аналитических) функций возникает дифференциальный оператор Коши-Римана

$$\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad z = x + iy.$$

Классическая $\overline{\partial}$-*проблема* связана с решением неоднородного уравнения Коши-Римана: для заданной функции ψ требуется найти функцию f, такую что

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \psi. \tag{18}$$

Записывая f и ψ в алгебраической форме $f = u + iv$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, получаем, что уравнение (18) эквивалентно системе уравнений в частных производных

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2\psi_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2\psi_2. \end{cases} \tag{19}$$

Решения $\overline{\partial}$-проблемы в различных пространствах функций широко используются в современном анализе и приложениях. Здесь мы рассмотрим простейший случай, а именно, когда гладкая функция ψ равна нулю вне некоторого круга.

Сначала напомним классическую интегральную формулу Коши-Бореля-Помпейю из общего курса комплексного анализа.

Теорема 8. *Пусть $\psi \in C^1(\overline{D})$, где D – ограниченная область на $\mathbb{C}$ с кусочно-гладкой границей. Тогда для любого $z \notin \partial D$ имеет место равенство*

$$(\psi\chi_D)(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z}\right). \tag{20}$$

Теперь можно установить следующее утверждение, касающееся решения уравнения (18).

Теорема 9. *Пусть $r > 0$, $\psi \in C^1(\mathbb{C})$ и $\psi = 0$ на $\mathbb{C} \backslash B_r$. Тогда функция*

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\psi(\xi)}{z - \xi} d\xi$$

принадлежит классу $C^1(\mathbb{C})$ и $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} \equiv \psi$.

Доказательство. После замены переменных можно написать

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\psi(z - \eta)}{\eta} d\eta. \tag{21}$$

Так как функция $1/\eta$ интегрируема на всяком компактном множестве комплексной плоскости, то $f \in C^1(\mathbb{C})$ и (21) можно дифференцировать под знаком интеграла. При этом

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}}(z - \eta) \frac{d\eta}{\eta} = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}}(\xi) \frac{d\xi}{z - \xi} = -\frac{1}{\pi} \iint_{B_r} \frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}}(\xi) \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

Используя далее формулу (20), находим

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \psi(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r} \frac{\psi(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta = \psi(z), \quad z \notin \partial B_r.$$

Отсюда и из непрерывности функций $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ и ψ следует, что это равенство справедливо на $\mathbb{C}$.

Отметим, что в теории обобщенных функций теорема 9 соответствует тому факту, что функция $\dfrac{1}{\pi z}$ является фундаментальным решением оператора Коши-Римана, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(\frac{1}{\pi z}\right) = \delta,$$

где δ – знаменитая *дельта-функция Дирака* (см. [5], гл. 2, § 6, формула (44)).

§9. Доказательства теорем 4, 5 (часть I)

Доказательство теоремы 4. Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) является очевидным следствием теоремы 1, часть I. Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). В силу условия теоремы область D можно представить в виде

$$D = \bigcup_{\alpha \in A} B_{R_\alpha}(\xi_\alpha), \quad \xi_\alpha \in \mathbb{R}^2, R_\alpha > \sqrt{5}/2, \tag{22}$$

где A — некоторое множество индексов, $B_{R_\alpha}(\xi_\alpha) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi - \xi_\alpha| < R_\alpha\}$. При этом

$$\int_{\partial K} Pdx + Qdy = 0$$

для любого единичного квадрата $K \subset B_{R_\alpha}(\xi_\alpha)$, $\alpha \in A$. Тогда по формуле Грина имеем

$$\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial K} Pdx + Qdy = 0.$$

Отсюда и из теоремы 7 видно, что $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в D. Теперь, используя теорему 1, часть I, получаем требуемое утверждение.

Доказательство теоремы 5. Без ограничения общности можно считать, что $D = B_R$, где $R > \sqrt{5}/2$. Для $0 < \varepsilon < R - \sqrt{5}/2$ и любого единичного квадрата $K \subset B_{R-\varepsilon}$ справедливо равенство

$$\int_{\partial K} f_\varepsilon(z)dz = \iint_{B_\varepsilon} \int_{\partial K} f(z-\xi)dz \ \omega_\varepsilon(\xi)d\xi = 0.$$

Как и выше, по формуле Грина (в комплексной форме) имеем

$$2i \iint_K \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \overline{z}} dxdy = \int_{\partial K} f_\varepsilon(z)dz = 0.$$

Это соотношение и теорема 7 показывают, что $\dfrac{\partial f_\varepsilon}{\partial \overline{z}} \equiv 0$, т.е. функция f_ε является голоморфной в круге $B_{R-\varepsilon}$.

Далее, фиксируем произвольную замкнутую спрямляемую кривую γ, лежащую в B_R. В силу голоморфности f_ε и интегральной теоремы Коши интеграл от f_ε по γ равен нулю при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Кроме того, семейство f_ε сходится к f при $\varepsilon \to +0$ равномерно на γ (см. лемму 7, часть I). Поэтому

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\gamma f_\varepsilon(z)dz = 0.$$

Отсюда и из теоремы 3, часть I следует, что функция f голоморфна в круге B_R.

Точность значения $\sqrt{5}/2$ в формулировках теорем 4, 5 видна из следующих соображений.

Как уже отмечалось в конце § 7, при $R < \sqrt{5}/2$ все единичные квадраты в B_R имеют непустое пересечение (некоторый круг B_ε). При этом ненулевая функция $x\omega_\varepsilon(x,y)$ принадлежит классу $\mathcal{K}_R$. Используя теорему 9, построим функцию $f \in C^1(\mathbb{C})$, такую что

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \equiv x\omega_\varepsilon(x,y).$$

В частности, для неё выполнено равенство

$$\frac{\partial(\operatorname{Re} f)}{\partial x} - \frac{\partial(\operatorname{Im} f)}{\partial y} = 2x\omega_\varepsilon(x,y)$$

(см. (19)). Из этих соотношений заключаем, что функция f не голоморфна в круге B_R, а форма $(\operatorname{Im} f)dx + (\operatorname{Re} f)dy$ не является полным дифференциалом в B_R. Однако, в силу формулы Грина для любого единичного квадрата $K \subset B_R$ имеем

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 2i \iint_K \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dxdy = 2i \iint_K x\omega_\varepsilon(x,y)dxdy = 0,$$

$$\int_{\partial K} (\operatorname{Im} f)dx + (\operatorname{Re} f)dy = \iint_K \left(\frac{\partial(\operatorname{Re} f)}{\partial x} - \frac{\partial(\operatorname{Im} f)}{\partial y} \right) dxdy = 2 \iint_K x\omega_\varepsilon(x,y)dxdy = 0.$$

Таким образом, значение $\sqrt{5}/2$ в теоремах 4, 5 уменьшить нельзя.

§10. Дальнейшие следствия теоремы 7

Интересный тип интегральных условий, обеспечивающих голоморфность или антиголоморфность функции, был найден В.К. Дзядыком (см., например, [10], гл. 13, § 3).

Теорема 10. (В.К. Дзядык, 1960) *Пусть в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ заданы две действительные непрерывно дифференцируемые функции u, v. Тогда для того чтобы функция $f = u + iv$ была голоморфной или сопряженной к голоморфной в области D, необходимо и достаточно, чтобы все три поверхности*

$$z = u(x,y), \quad z = v(x,y), \quad z = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}$$

имели над произвольным компактом $G \subset D$ равные площади.

С помощью теоремы 7 этот результат можно усилить, заменив произвольные компакты на квадраты фиксированного размера.

Теорема 11. *Пусть $R > \sqrt{5}/2$, u, v — действительные непрерывно дифференцируемые функции в круге B_R. Тогда для того чтобы функция $f = u + iv$ была голоморфной или сопряженной к голоморфной в B_R, необходимо и достаточно, чтобы все три поверхности $z = u(x,y)$, $z = v(x,y)$, $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ имели над произвольным единичным квадратом из B_R равные площади.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 10. Докажем достаточность. Пусть K – произвольный единичный квадрат, лежащий в B_R. Используя формулу для площади поверхности, имеем

$$\iint_K \sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2} dxdy = \iint_K \sqrt{1 + (v'_x)^2 + (v'_y)^2} dxdy =$$

$$= \iint_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{u^2 + v^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \sqrt{u^2 + v^2} \right)^2} dxdy.$$

Тогда в силу теоремы 7,

$$\sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2} \equiv \sqrt{1 + (v'_x)^2 + (v'_y)^2} \equiv \sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{u^2 + v^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \sqrt{u^2 + v^2} \right)^2}.$$

Поэтому все три поверхности $z = u$, $z = v$, $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ имеют над произвольным компактом $G \subset B_R$ равные площади. Отсюда и из теоремы 10 получаем требуемое.

Следующий результат показывает применение теоремы 7 к вопросам теории аппроксимации.

Теорема 12. *Пусть $R > \sqrt{5}/2$, $1 \le p < \infty$. Тогда всякую функцию $f \in L_p(B_R)$ можно аппроксимировать с любой точностью в L_p линейными комбинациями индикаторов единичных квадратов, лежащих в B_R. При $p = \infty$ это утверждение неверно.*

Доказательство. Обозначим через M множество, состоящее из индикаторов всех единичных квадратов в B_R. Пусть $l \in L_p^*(B_R)$ и $l\big|_M = 0$, где $L_p^*(B_R)$ — пространство, сопряженное к пространству $L_p(B_R)$. В силу теоремы об общем виде линейного непрерывного функционала на L_p существует функция $h \in L_q(B_R)$ $(1/p + 1/q = 1)$, такая что

$$l(g) = \iint_{B_R} g(\xi)h(\xi)d\xi, \quad g \in L_p(B_R).$$

Поскольку $l\big|_M = 0$, то

$$l(\chi_K) = \iint_K h(\xi)d\xi = 0 \quad \text{для любого единичного квадрата} \quad K \subset B_R.$$

Отсюда и из замечания 3 следует, что $h = 0$ почти всюду, т.е. l — нулевой функционал. Теперь по критерию тотальности множества в банаховом пространстве получаем требуемое утверждение для $L_p(B_R)$ при $1 \leq p < \infty$.

Далее, всякая конечная линейная комбинация индикаторов χ_K равна нулю вне некоторого круга B_r, где $r < R$. Поэтому ненулевую константу нельзя приблизить с любой точностью такими линейными комбинациями в L_∞.

Укажем еще на связь теоремы 7 с теорией отображений, сохраняющих меру. Обозначим через $\mu(E)$ меру Жордана измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^2$.

Теорема 13. *Пусть $R > \sqrt{5}/2$ и f — диффеоморфизм круга B_R на открытое множество в $\mathbb{R}^2$, такой что $\mu(f(K)) = 1$ для любого единичного квадрата $K \subset B_R$. Тогда*

$$\mu(f(E)) = \mu(E) \tag{23}$$

для любого измеримого по Жордану множества E, содержащегося в B_R вместе со своим замыканием.

Доказательство. По формуле для меры образа при диффеоморфизме имеем

$$\mu(f(E)) = \iint_E |\text{det} f'| dxdy, \tag{24}$$

где f' — матрица Якоби отображения f (см., например, [11], гл. 1, § 1). Поэтому условие $\mu(f(K)) = 1$ можно записать в виде

$$\iint_K (|\text{det} f'| - 1) dxdy = 0.$$

Тогда используя теорему 7, получаем $|\text{det} f'| \equiv 1$. Отсюда и из равенства (24) следует требуемое утверждение.

В заключение отметим, что всякий диффеоморфизм открытых множеств в $\mathbb{R}^n$ обладает так называемым N-*свойством Лузина*, т.е. отображает множества лебеговой меры нуль в множества лебеговой меры нуль (см. [4], гл. 11, § 5, лемма 1). Аналог теоремы 13 справедлив также для гомеоморфизмов с N-свойством. При этом соотношение (23) имеет место для измеримых по Лебегу множеств $E \subset B_R$, где μ — мера Лебега.

Литература

[4] Зорич В.А. Математический анализ II. - М.: Наука, 1984. - 640 с.

[5] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981. - 512 с.

[9] Christov Chr. Sur un problème de M. Pompeiu // Mathematica (Timişoara). - V. 23. - 1948. - p. 103-107.

[10] Макаров И.П. Дополнительные главы математического анализа. - М.: Просвещение, 1968. - 312 с.

[11] Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях. - М.: МГУ, 1991. - 352 с.

Волчков Валерий Владимирович,
профессор кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений Донецкого
национального университета, доктор физ.-мат. наук.

E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

Волчков Виталий Владимирович,
профессор кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений Донецкого
национального университета, доктор физ.-мат. наук.

E-mail: volna936@gmail.com

Волчкова Наталья Петровна,
доцент кафедры высшей математики им. В.В. Пака
Донецкого национального технического
университета, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: volna936@gmail.com

Суммы рядов вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+ak+b}$

Е. И. Знак

В статье рассматриваются возможности свед*е*ния суммы ряда указанного вида к элементарным функциям — и непосредственно, и в плане некоторых аппроксимаций. Для этого удобно использовать симметричную мероморфную функцию двух переменных

$$S(z_1, z_2) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-z_1)(k-z_2)}.$$

1. Полезные тождества

Сразу отметим здесь два тождества, необходимых для дальнейшего. Суммируя по всем натуральным значениям k равенства

$$\left(\frac{1}{k-z_1} - \frac{1}{k-z_2}\right) + \left(\frac{1}{k-z_2} - \frac{1}{k-z_3}\right) = \frac{1}{k-z_1} - \frac{1}{k-z_3}$$

получим тождественное равенство

$$(z_1 - z_2)S(z_1, z_2) + (z_2 - z_3)S(z_2, z_3) = (z_1 - z_3)S(z_1, z_3),$$

а переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k-z_1} - \frac{1}{k-(z-l)}\right) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k-z} - \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{j+n-z} \qquad (l < n),$$

получим тождественное равенство

$$S(z-l, z) = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k-z},$$

которому можно придать также форму

$$S(z, z+l) = -\frac{1}{l} \sum_{j=0}^{l-l} \frac{1}{j+z}.$$

И, как следствие, имеем также тождество

$$(z_1 - z_2)S(z_1, z_2) = (z_1 + l - z_2)S(z_1 + l, z_2) + \sum_{j=0}^{l-l} \frac{1}{j+z}.$$

Заметим, что справедливое для любого натурального l тождество

$$S(z_1, z_2) \equiv \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(k-z_1)(k-z_2)} + S(z_1 - l, z_2 - l)$$

полностью сводит общую ситуацию к случаю $\operatorname{Re} z_1 < 1$, $\operatorname{Re} z_2 < 1$. Всюду ниже условие $\operatorname{Re} z_1 < 1$, $\operatorname{Re} z_2 < 1$ по умолчанию предполагается выполненным.

2. Интегральные представления

Проинтегрировав по лучу $(0;+\infty)$ разложение

$$\frac{e^{tz_2}-e^{tz_1}}{e^t-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{(z_2-k)t}-e^{(z_1-k)t}\right)$$

для случая $\operatorname{Re} z_1<1$ и $\operatorname{Re} z_2<1$, получим интегральное представление

$$(z_2-z_1)S(z_1,z_2)\equiv\int_0^{+\infty}\frac{e^{tz_2}-e^{tz_1}}{e^t-1}dt.$$

И вслед за ним, как предельный результат, интегральное представление

$$S(z,z)\equiv\int_0^{+\infty}\frac{te^{tz}}{e^t-1}dt\quad(\operatorname{Re} z<1).$$

Рассматривая теперь сужение функции S с комплексной области $(\mathbb{C}/\mathbb{N})^2$ на действительную область $(-\infty;1)^2$, можно посредством замены $t=-\ln\tau$ получить также интегральные представления

$$(x_1-x_2)S(1-x_1,1-x_2)\equiv\int_0^1\frac{\tau^{x_2}-\tau^{x_1}}{(1-\tau)\tau}dt$$

для положительных значений переменных x_1, x_2 и

$$S(1-x,1-x)\equiv-\int_0^1\frac{\tau^x\ln\tau}{(1-\tau)\tau}dt$$

для положительных значений переменной x.

Ниже подробно и вполне исчерпывающе разбирается важный и очень интересный случай рациональных значений переменных из интервала $(0;1)$. Для $n,m\in\mathbb{N}$ и $0\le k\in\mathbb{Z}$ посредством замены $\tau=y^n$ получаем из предыдущего интегрального представления, что

$$\frac{m}{n^2}S\left(1-\frac{k+1}{n},1-\frac{k+1+m}{n}\right)=\int_0^1\frac{y^k(1-y^m)}{1-y^n}dy.$$

3. Структура значений на множестве $\mathbb{Q}^2$

Оказывается, при $(z_1;z_2)\in\mathbb{Q}^2$, значение $S(z_1,z_2)$ элементарно выражается через значения переменных.

Арифметическую структуру значений $S(r_1,r_2)$ для произвольных рациональных r_1, r_2 можно описать следующим образом.

Обозначим через L_n линейное пространство над полем $\mathbb{Q}$, являющееся линейной оболочкой n чисел $\sin\dfrac{(\pi j)}{2n}$, $j=1,...,n$. Оказывается, для любых рациональных r_1, r_2 существуют такие $a\in\mathbb{Q}$ и b, a_1, ...,a_n, b_1, ..., $b_n\in L_n$, что

$$S(r_1,r_2)=a+\pi b+\sum_{j=1}^{n}a_j\ln b_j.$$

Точный и исчерпывающий ответ на вопрос о значении $S(r_1,r_2)$ для *основного случая* r_1, $r_2\in[0;1)\cap\mathbb{Q}$ даёт следующая теорема (общий случай r_1, $r_2\in(-\infty;1)\cap\mathbb{Q}$) легко сводится к основному — см. замечание сразу после доказательства теоремы).

Теорема. *Если x_1, $x_2 \in (0;1]$, $n \in \mathbb{N}$ и числа nx_1, nx_2 являются целыми, то*

$$(x_2 - x_1)S(1 - x_1, 1 - x_2) = \alpha_n(x_1, x_2) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M(n)} \left(4 \sin \pi(x_1 + x_2)j \cdot \ln 2 \sin \frac{\pi j}{n} + \pi \frac{n - 2j}{n} \cos \pi(x_1 + x_2)j\right) \sin \pi(x_1 - x_2)j,$$

где $M(n) = \left[\frac{n-1}{2}\right]$ *и* $\alpha_n(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечётно или } (x_2 - x_1)n \text{ чётно;} \\ (-1)^{(nx_1)} \ln 4, & \text{если } n \text{ чётно и } (x_2 - x_1)n \text{ нечётно.} \end{cases}$

Доказательство. Положим $x_1 = \dfrac{k+1}{n}$, $x_2 = \dfrac{k+1+m}{n} \le 1$, $n = 2l+1$, где $0 \le k \in \mathbb{Z}$ и $m, l \in \mathbb{N}$. В этом случае

$$\frac{x^k(1 - x^m)}{1 - x^n} \equiv \sum_{\theta \in G} \left(\frac{\theta^k(1 - \theta^m)}{-n\theta^{n-1}} \cdot \frac{1}{x - \theta} + \frac{\theta^{-k}(1 - \theta^{-m})}{-n\theta^{1-n}} \cdot \frac{1}{x - \theta^{-1}}\right) \equiv$$

$$\equiv -\frac{1}{n} \sum_{\theta \in G} \frac{(\theta^{k+1} + \theta^{-k-1} - \theta^{k+1+m} - \theta^{-k-1-m})x - \theta^k - \theta^{-k} + \theta^{k+m} + \theta^{-k-m}}{x^2 - (\theta + \theta^{-1})x + 1} \equiv$$

$$\equiv \frac{2}{n} \sum_{\varphi \in K} \frac{(\cos(k+1+m)\varphi - \cos(k+1)\varphi)x + \cos k\varphi - \cos(k+m)\varphi}{x^2 - 2x\cos\varphi + 1},$$

где $K = \left\{\dfrac{2\pi j}{n} | j = 1, ..., l\right\}$ и $G = \left\{e^i\varphi | \varphi \in K\right\}$. А поскольку, как легко проверить,

$$\int_0^1 \frac{ax + b}{x^2 - 2x\cos\varphi + 1} dx = \left(\frac{a}{2} \ln(x^2 - 2x\cos\varphi + 1) + \frac{a\cos\varphi + b}{\sin\varphi} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) \Big|\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} =$$

$$= \frac{\alpha}{2} \ln(2 - 2\cos\varphi) + \frac{a\cos\varphi + b}{2\sin\varphi}(\pi - \varphi)$$

и

$$\frac{1}{\sin\varphi}((\cos(k+1+m)\varphi - \cos(k+1)\varphi)\cos\varphi + \cos\varphi - \cos(k+m)\varphi) =$$

$$= -2\sin\frac{m\varphi}{2} \cdot \cos\left(k + 1 + \frac{m}{2}\right)\varphi,$$

то, согласно полученному выше интегральному представлению для рациональных значений переменных,

$$\frac{x_2 - x_1}{n} \cdot S(1 - x_1, 1 - x_2) =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{l} \left(4 \sin \pi(x_1 + x_2)j \cdot \ln 2 \sin \frac{\pi j}{n} + \pi \frac{n - 2j}{n} \cos \pi(x_1 + x_2)j\right) \sin \pi(x_1 - x_2)j.$$

Что и требовалось, так как в рассмотренном случае $\alpha_n = 0$ и $M(n) = l$.

В случае $n = 2l$, $l \in \mathbb{N}$ в разложении подынтегральной функции $\dfrac{x^k(1 - x^m)}{1 - x^n}$ добавляется слагаемое $\dfrac{(-1)^k(1 - (-1)^m)}{-n(-1)^{n-1}(x+1)}$, а количество сопряжённых пар слагаемых оказывается равным $l - 1$. При этом $M(n) = l - 1$ и

$$\frac{(-1)^k(1 - (-1)^m)}{-n(-1)^{n-1}(x+1)} \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } (x_2 - x_1)n \text{ чётно;} \\ -(-1)^{(nx_1)} \frac{\ln 4}{n}, & \text{если } (x_2 - x_1)n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Что и требовалось получить.

В самом общем случае тождество

$$S(z_1,z_2)\equiv S(z_1+p,z_2+p)-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(k-z_1-p)(k-z_2-p)},$$

позволяет считать, не умаляя общности, что

$$\operatorname{Re} z_1\le \operatorname{Re} z_2 \qquad \text{и} \qquad 0\le \operatorname{Re} z_2<1.$$

А в сочетании с тождеством (см. выше)

$$(z_1-z_2)S(z_1,z_2)=(z_1+l-z_2)S(z_1+l,z_2)+\sum_{j=0}^{l-1}\frac{1}{j+z_1}$$

это полностью сводит самый общий случай к случаю

$$0\le \operatorname{Re} z_1\le \operatorname{Re} z_2\le 1 \qquad \text{и} \qquad 0\le \operatorname{Re} z_2<1.$$

4. Сумма ряда $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-z^2}$

Рассмотрим разложение в ряд Фурье чётной 2π-периодической функции $f(t)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$, тождественно совпадающей с функцией $\cos at,\ a>0$:

$$f(t)\equiv\frac{\sin\pi a}{\pi a}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt,\ \text{где}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos at\cos nt dt=\frac{2a(-1)^n\sin\pi a}{\pi(a^2-n^2)}.$$

При $t=\pi$ получается равенство

$$\cos\pi a=\frac{\sin\pi a}{\pi a}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a\sin\pi a}{\pi(n^2-a^2)},$$

из которого следует, что

$$S(a,-a)=\frac{1-\pi a\cdot\operatorname{ctg}\pi a}{2a^2}.$$

А уже отсюда, на основании единственности аналитического продолжения, следует, что чётная периодическая мероморфная функция $S(z,-z)$ удовлетворяет тождеству

$$S(z,-z)\equiv\begin{cases}\dfrac{1-\pi z\cdot\operatorname{ctg}\pi z}{2z^2}, & z\in\mathbb{C}/\mathbb{Z};\\ \dfrac{\pi^2}{6}, & z=0\end{cases}.$$

В частности, при $z=it(t\in\mathbb{R})$ получается равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+t^2}\equiv\frac{\pi t\cdot\operatorname{cth}\pi t-1}{2t^2},$$

где $\operatorname{cth} x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Отметим, что нетрудно предъявить разложение в степенной ряд аналитической в единичном круге $|z| < 1$ функции $S(z, -z)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{k^{2j}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}\right) z^{2(m-1)} =$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^4}{90} z^2 + \frac{\pi^6}{945} z^4 + \frac{\pi^8}{9450} z^6 + \ldots$$

(как известно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = \frac{2^{2m-1}|B_{2m}|}{(2m)!}\pi^{2m},$$

где

$$B_0 = 1, \sum_{i=1}^{n} B_i C_{n+1}^i = 0 \quad (n \geq 1), \quad B_{2j+1} = 0,\ j \geq 1).$$

5. Степенные ряды для функций $S(z_1, z_2)$, $S(0, z)$ и $S(z, z)$

Суммируя по переменному номеру k тождества

$$\frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{z_1}{k})(1 - \frac{z_2}{k})} \equiv \frac{1}{k^2} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{z_1}{k}\right)^i\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{z_2}{k}\right)^j\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{k^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z_1^m + z_2^m}{k^{m+2}} + \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{z_1^i \cdot z_2^j}{k^{i+j+2}},$$

получим разложение

$$S(z_1, z_2) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{m=1}^{\infty}(z_1^m + z_2^m)\zeta(m+2) + \sum_{i,j=1}^{\infty} z_1^i z_2^j \zeta(i+j+2)$$

и вместе с ним тождество

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k - tz_1} - \frac{1}{k - tz_2}\right) \equiv$$

$$\equiv (z_1 - z_2)\left(\frac{\pi^2}{6} t + \sum_{m=1}^{\infty}(z_1^m + z_2^m)t^{m+1}\zeta(m+2) + \sum_{i,j=1}^{\infty} z_1^i z_2^j t^{i+j+1}\zeta(i+j+2)\right).$$

В частности, получаем

$$S(z, 0) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{m=1}^{\infty} z^m \zeta(m+2)$$

и, после дифференцирования по t (см. чуть выше),

$$\frac{1}{z_1 - z_2}\left(z_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k - z_1)^2} - z_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k - z_2)^2}\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{\pi^2}{6} + \sum_{m=1}^{\infty}(z_1^m + z_2^m)(m+2)\zeta(m+2) + \sum_{i,j=1}^{\infty} z_1^i z_2^j (i+j+1)\zeta(i+j+2).$$

А отсюда, как частный случай, имеем разложение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-z)^2} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{m=1}^{\infty} z^m (m+1)\zeta(m+2).$$

Ещё заметим, что в результате дифференцирования тождества

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-z} - \frac{1}{k+z}\right) \equiv \frac{1}{z} - \pi\cdot\operatorname{ctg}\pi z,$$

получается тождество

$$S(z,z) + S(-z,-z) \equiv \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \frac{1}{z^2}.$$

6. Некоторые дополнительные свойства функции $S(z_1, z_2)$

Отметим, что из полученного выше тождества

$$(z_1 - z_2)S(z_1,z_2) + (z_2 - z_3)S(z_2,z_3) = (z_1 - z_3)S(z_1,z_3)$$

вытекает принципиальная сводимость вычисления значений функции $S(z_1, z_2)$ к вычислению значений функции $S(z, 0)$:

$$(z_1 - z_2)S(z_1,z_2) = z_1 S(z_1,0) - z_2 S(z_2,0)$$

Отсюда, между прочим, следует, что

$$S(z,0) + S(-z,0) \equiv 2S(z,-z) \equiv \frac{1 - \pi z\cdot\operatorname{ctg}\pi z}{z^2}$$

Теорема. *Для любого натурального m и любых комплексных z_1, $z_2 \in \mathbf{C}/\mathbf{N}$ выполняется равенство*

$$m^2 S(z_1,z_2) = \sum_{r=0}^{m-1} S\left(\frac{z_1+r}{m}, \frac{z_2+r}{m}\right).$$

А для любых положительных a и b справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} tS(-ta,-tb) = \begin{cases} \dfrac{\ln b - \ln a}{b-a}, & \text{если } a \neq b; \\ \dfrac{1}{b}, & \text{если } a = b \end{cases}$$

Доказательство.

$$m^2 S(z_1,z_2) = m^2 \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{(mj-r-z_1)(mj-r-z_2)}\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{m-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{m^2}{(mj-r-z_1)(mj-r-z_2)}\right) = \sum_{r=0}^{m-1} S\left(\frac{z_1+r}{m}, \frac{z_2+r}{m}\right).$$

Введём обозначения

$$\alpha_j = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \varphi(t) = tS(-at, -bt) \ (t > 0), \quad y_m = \varphi(m) \ (m \in \mathbf{N})$$

и в случае $a < b$ последовательно покажем, что

$$y_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \quad \text{и} \quad \varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda, \quad \text{где} \quad \lambda = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$$

(случаи $a > b$ и $a = b$ полностью аналогичны).

$$y_m = \frac{1}{m} \cdot m^2 S(-ma, -mb) = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} S\left(-a + \frac{r}{m}, -b + \frac{r}{m}\right) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 S(x-a,\, x-b)dx,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx}{(k+a-x)(k+b-x)} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln \frac{k+b-1}{k+a-1} - \ln \frac{k+b}{k+a}\right) = \lambda.$$

Теперь положим

$$\varepsilon > 0, \quad |y_m - \lambda| < \frac{\varepsilon}{5} \quad \text{при} \quad m > M, \alpha_N < \frac{(b-a)\varepsilon}{5(b+a)} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{N} \frac{t}{(k+at)(k+bt)} < \frac{\varepsilon}{5}$$

при $t > R > 0$ (очевидно такие M, N и R, зависящие от ε, существуют). Тогда при $t > M + R + 1$ и $n = [t]$ получим

$$|\varphi(t) - \lambda| \le |\varphi(t) - a_n| + |a_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} +$$

$$+\frac{1}{b-a}\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+at)} - \frac{1}{(k+an)}\right)\right| + \frac{1}{b-a}\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+bt)} - \frac{1}{(k+bn)}\right)\right| +$$

$$+\frac{\varepsilon}{5} < \frac{3\varepsilon}{5} + \frac{a\alpha_N}{b-a} + \frac{b\alpha_N}{b-a} < \varepsilon,$$

что и требовалось показать.

И, наконец, отметим ещё две легко проверяемые оценки. Положим $R > 0$, $|z_1| < R$ и $|z_2| < R$. Если $R < 1$, то

$$|S(z_1, z_2)| < \frac{\pi^2}{6(1-R)^2}.$$

Если $[R] + 2 \le n$, $n \in N$ (без ограничения $R < 1$), то

$$\left|S(z_1, z_2) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-z_1)(k-z_2)}\right| < \frac{1}{n-R-1}.$$

Знак Евгений Иосифович,
доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Михайловской Военной Артиллерийской Академии, Санкт-Петербург.

E-mail: evgematem@mail.ru

Об оценке объема упорядоченной генеральной совокупности

К. Э. Каибханов

В статье предложен подход к задаче об оценке количества элементов в некоторой совокупности по фиксированной выборке из этой совокупности.

Выглядит естественной постановка следующей задачи. Имеется урна, содержащая какое-то неизвестное количество карточек, которые пронумерованы от первой до последней. Из урны наудачу извлекаются p карточек, и пусть извлечённые карточки имеют номера $k_1, k_2, \ldots, k_p$. Требуется, используя эти данные, дать оценку количества всех карточек в урне. Другими словами, требуется сделать разумное предположение о количестве карточек в урне, исходя только из того, что известно: имеются карточки с номерами $k_1, k_2, \ldots, k_p$. Можно сказать иначе: нужно подобрать функцию $\varphi(k_1, k_2, \ldots, k_p)$, которая каждому набору различных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_p$ — номерам выпавших карточек — ставит в соответствие число $\varphi(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ — предполагаемое количество карточек в урне, при этом функция φ должна быть в некотором смысле наилучшей. В данной работе предлагается подход к решению этой задачи.

Предположим, что в урне содержится n пронумерованных карточек. Функция φ должна зависеть от двух величин: от числа $k = \max\{k_1; k_2; \ldots; k_p\}$ и числа p извлечённых карточек (действительно, если извлечены карточки с номерами $k_1, k_2, \ldots, k_p$, то можно утверждать, что общее количество карточек в урне не меньше числа $k = \max\{k_1; k_2; \ldots; k_p\}$; кроме того, чем больше p при фиксированном n, тем более вероятно, что разность $(n-k)$ будет невелика). Таким образом, искомая функция φ зависит от двух величин: $\varphi = \varphi(k,p)$. В дальнейшем ради простоты будем писать просто $\varphi(k)$, считая p фиксированным.

Величина $k = \max\{k_1; k_2; \ldots; k_p\}$ может принимать значения $k = p, k = p+1, \ldots, k = n$. При этом, принимая во внимание всевозможные исходы извлечения карточек, можно заметить, что k принимает значение $k = p$ один раз, $k = (p+1)$ — $\begin{pmatrix} p \\ p-1 \end{pmatrix}$раз, $k = (p+2)$ — $\begin{pmatrix} p+1 \\ p-1 \end{pmatrix}$ раз, $\ldots, k = n$ — $\begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$ раз ($\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ — число сочетаний из n по m). Поэтому разумно считать, что чем меньше величина

$$|\varphi(p) - n| + \begin{pmatrix} p \\ p-1 \end{pmatrix} \cdot |\varphi(p+1) - n| + \begin{pmatrix} p+1 \\ p-1 \end{pmatrix} \cdot |\varphi(p+1) - n| + \cdots + \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix} \cdot |\varphi(n) - n|,$$

тем удачнее выбрана функция $\varphi(k)$. Эта сумма неограниченно растёт с ростом n при любом выборе функции $\varphi(k)$. Введём в рассмотрение величины

$$\lambda_n(\varphi) = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=p}^{n} \begin{pmatrix} k-1 \\ p-1 \end{pmatrix} \cdot |\varphi(k) - n| \tag{1}$$

и

$$\lambda(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(\varphi). \tag{2}$$

Величину $\lambda(\varphi)$ мы и возьмём за оценку погрешности функции φ: чем меньше $\lambda(\varphi)$, тем лучше подобрана функция $\varphi(k)$.

Будем искать наилучшую функцию в классе линейных функций: $\varphi(k) = a \cdot k$; ясно, что должно выполняться условие $a \geq 1$. Для такой функции

$$\lambda_n(\varphi) = \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} \cdot |ak - n| = \frac{1}{n^p} \sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} \cdot |a \cdot \frac{k}{n} - 1|.$$

Выражение $\binom{k-1}{p-1}$ можно рассматривать как многочлен степени $(p-1)$ относительно k:

$$\binom{k-1}{p-1} = \frac{(k-1)(k-2)\dots(k-p+1)}{(p-1)!} = A_1 \cdot k^{p-1} + A_2 \cdot k^{p-2} + \dots + A_{p-1} \cdot k + A_p$$

(в частности, $A_1 = 1/(p-1)!$, $A_p = (-1)^{p-1}$).

Лемма 1. *Если $0 < q < p-1$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^p} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^q \right) = 0.$$

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^p} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^q \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{p-q-1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{k}{n}\right)^q \cdot \frac{1}{n} \right) \right) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{p-q-1}} \cdot n \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p-q-1}} = 0$$

(здесь мы воспользовались тем, что $(k/n)^q \leq 1$).

Лемма 2. *Если $0 < q < p-1$ и $a \geq 1$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^p} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^q \cdot \left| a \cdot \frac{k}{n} - 1 \right| \right) = 0.$$

Доказательство. Учитывая, что

$$\left| a \cdot \frac{k}{n} - 1 \right| \leq a,$$

и пользуясь леммой 1, получим

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^p} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^q \cdot \left| a \cdot \frac{k}{n} - 1 \right| \right) \leq a \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^p} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^q \right) = 0.$$

Лемма 3. *Для любого натурального p*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^p} \cdot \sum_{k=p}^{n} k^{p-1} \cdot \left| a \cdot \frac{k}{n} - 1 \right| \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^p} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{p-1} \cdot \left| a \cdot \frac{k}{n} - 1 \right| \right).$$

Доказательство. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^p} \cdot \sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1} \cdot \left| a \cdot \frac{k}{n} - 1 \right| \right) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^p} \cdot (p-1) \cdot (p-1)^{p-1} \cdot a \right) = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^p}\cdot\sum_{k=p}^{n}k^{p-1}\cdot\left|a\cdot\frac{k}{n}-1\right|\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^p}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^{p-1}\cdot\left|a\cdot\frac{k}{n}-1\right|-\frac{1}{n^p}\cdot\sum_{k=1}^{p-1}k^{p-1}\cdot\left|a\cdot\frac{k}{n}-1\right|\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^p}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^{p-1}\cdot\left|a\cdot\frac{k}{n}-1\right|\right)-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^p}\cdot\sum_{k=1}^{p-1}k^{p-1}\cdot\left|a\cdot\frac{k}{n}-1\right|\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^p}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^{p-1}\cdot\left|a\cdot\frac{k}{n}-1\right|\right)$$

и лемма доказана.

Лемма 4. *Для любого натурального* p

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^p}\sum_{k=p}^{n}(A_1\cdot k^{p-1}+A_2\cdot k^{p-2}+\cdots+A_{p-1}\cdot k+A_p)\cdot\left|a\cdot\frac{k}{n}-1\right|\right)=$$

$$=A_1\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^p}\cdot\sum_{k=p}^{n}k^{p-1}\cdot\left|a\cdot\frac{k}{n}-1\right|\right).$$

Доказательство. Это следствие лемм 2 и 3.

Из вышесказанного следует, что для линейной функции $\varphi(k)=a\cdot k$

$$\lambda(\varphi)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^p}\cdot\sum_{k=p}^{n}\begin{pmatrix}k-1\\p-1\end{pmatrix}\cdot\left|a\cdot\frac{k}{n}-1\right|\right)=\frac{1}{(p-1)!}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^p}\cdot\sum_{k=p}^{n}k^{p-1}\cdot\left|a\cdot\frac{k}{n}-1\right|\right)=$$

$$=\frac{1}{(p-1)!}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^p}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^{p-1}\cdot\left|a\cdot\frac{k}{n}-1\right|\right)=\frac{1}{(p-1)!}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{p-1}\cdot\left|a\cdot\frac{k}{n}-1\right|\cdot\frac{1}{n}\right).$$

Последнее выражение под знаком предела является интегральной суммой функции $f(x)=x^{p-1}\cdot|ax-1|$ на отрезке [0;1]. Поэтому

$$\lambda(\varphi)=\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_0^1 x^{p-1}\cdot|ax-1|dx.$$

Займёмся вычислением этого интеграла:

$$\int\limits_0^1 x^{p-1}\cdot|ax-1|dx=\int\limits_0^{1/a}x^{p-1}\cdot(1-ax)dx+\int\limits_{1/a}^1 x^{p-1}\cdot(ax-1)dx=$$

$$=\int\limits_0^{1/a}(x^{p-1}-ax^p)dx+\int\limits_{1/a}^1(ax^p-x^{p-1})dx=\frac{1}{pa^p}-\frac{1}{(p+1)a^p}+\frac{a}{p+1}-\frac{1}{p}-\frac{1}{(p+1)a^p}+\frac{1}{pa^p}=$$

$$=\frac{2}{pa^p}-\frac{2}{(p+1)a^p}+\frac{a}{p+1}-\frac{1}{p}=\frac{2}{p(p+1)a^p}+\frac{a}{p+1}-\frac{1}{p}.$$

Таким образом,
$$\lambda(\varphi)=\frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{2}{p(p+1)a^p}+\frac{a}{p+1}-\frac{1}{p}\right).$$
Наша задача свелась к нахождению точки минимума функции $\lambda(\varphi)$ (мы рассматриваем её как функцию от a).
$$\lambda'_a=\frac{1}{(p-1)!}\left(-\frac{2p}{p(p+1)}\cdot\frac{1}{a^{p+1}}+\frac{1}{p+1}\right)=\frac{1}{(p+1)(p-1)!}\left(1-\frac{2}{a^{p+1}}\right).$$
Видим, что функция $\lambda(\varphi)$ (как функция от a) имеет единственную стационарную точку $a_p=2^{1/(p+1)}$, которая является точкой минимума.

Итак, в классе линейных функций наилучшей оказывается $\varphi(k)=\sqrt[p+1]{2}k$. Для такой функции
$$\lambda(\varphi)=\frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{2}{p(p+1)}\cdot\frac{1}{2^{\frac{p}{p+1}}}+\frac{2^{\frac{1}{p+1}}}{p+1}-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{2^{\frac{1}{p+1}}}{p(p+1)}+\frac{2^{\frac{1}{p+1}}}{p+1}-\frac{1}{p}\right)=$$
$$=\frac{1}{(p-1)!}\left(2^{\frac{1}{p+1}}\left(\frac{1}{p(p+1)}+\frac{1}{p+1}\right)-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{(p-1)!}\cdot\frac{1}{p}\left(2^{\frac{1}{p+1}}-1\right)=\frac{1}{p!}\left(2^{\frac{1}{p+1}}-1\right).$$
Таким образом, если из урны с пронумерованными карточками извлечены наудачу карточки с номерами $k_1,k_2,\dots,k_p$ и $k=\max\{k_1;k_2;\dots;k_p\}$, то разумно будет предположить, что количество карточек в урне равно целому числу, ближайшему к $\sqrt[p+1]{2}k$.

Лемма 5. *Пусть положительная функция $\varphi(x)$ определена на $[1;\infty)$.*

а) Если
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=0,\ \text{то}\ \ \lambda(\varphi)=\frac{1}{p!}.$$
б) Если
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=+\infty,\ \text{то}\ \ \lambda(\varphi)=\infty.$$

Доказательство. а) Пусть
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=0.$$
Возьмём достаточно малое $t>0$. Тогда найдётся такое $n_0>p$, что $\varphi(k)/n<t$ для любого $1\le k\le n$ и любого $n>n_0$. Имеем
$$\lambda(\varphi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=p}^{n}\binom{k-1}{p-1}|\varphi(k)-n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}\sum_{k=p}^{n}\binom{k-1}{p-1}\left|\frac{\varphi(k)}{n}-1\right|\ge$$
$$\ge(1-t)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}\sum_{k=p}^{n}\binom{k-1}{p-1}=(1-t)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{p-1}\cdot\frac{1}{n}\right)=$$
$$=\frac{1-t}{(p-1)!}\cdot\int\limits_0^1 x^{p-1}dx=\frac{1-t}{(p-1)!}\cdot\frac{1}{p}\cdot(1-0)=\frac{1-t}{p!};$$
с другой стороны,
$$\lambda(\varphi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=p}^{n}\binom{k-1}{p-1}|\varphi(k)-n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}\sum_{k=p}^{n}\binom{k-1}{p-1}\left|\frac{\varphi(k)}{n}-1\right|\le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(p-1)!} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{n} \right) =$$

$$= \frac{1}{(p-1)!} \cdot \int\limits_0^1 x^{p-1} dx = \frac{1}{(p-1)!} \cdot \frac{1}{p} \cdot (1-0) = \frac{1}{p!}.$$

Отсюда, ввиду произвольности $t > 0$, следует $\lambda(\varphi) = 1/p!$. (Заметим, что $1/p! > (2^{\frac{1}{p+1}} - 1)/p!$.)

б) Пусть $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)/x = +\infty$. Это означает, что для любого $t > 2$ найдётся такое $n_0 > 2p$, что $\varphi(x)/x > t$ для любого $x > n_0$. Имеем

$$\lambda(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} |\varphi(k) - n| \ge \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \sum_{\frac{n}{2} \le k \le n} \binom{k-1}{p-1} \left| \frac{\varphi(k)}{n} - 1 \right|.$$

Учтём, что

$$\frac{\varphi(k)}{n} = \frac{\varphi(k)}{n} \cdot \frac{k}{n} > t \cdot \frac{1}{2}$$

при $n_0 < n/2 \le k \le n$. Поэтому

$$\lambda(\varphi) > \left(\frac{t}{2} - 1\right) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^p} \sum_{\frac{n}{2} \le k \le n} \binom{k-1}{p-1} \right) = \left(\frac{t}{2} - 1\right) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(p-1)!} \sum_{\frac{n}{2} \le k \le n} \left(\frac{k}{n}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{n} \right) =$$

$$= \frac{t-2}{2(p-1)!} \int\limits_{1/2}^{1} x^{p-1} dx = \frac{t-2}{2(p-1)!} \cdot \frac{1}{p} \cdot (1 - \frac{1}{2^p}) = \frac{1}{p!} \cdot \frac{2^p - 1}{2^{p+1}} \cdot (t-2).$$

А так как $t > 2$ можно взять произвольным, то $\lambda(\varphi) = \infty$. Лемма доказана.

Эта лемма проясняет, почему при $\lambda_n(\varphi)$, определяемом равенством (1), $\varphi(k)$ искалась в классе линейных функций.

Лемма 6. *Пусть $a \ge 1$ и $p > 1$. Тогда*

а) если $0 \le q < p - 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{p+1}} \cdot \sum_{k=p}^{n} k^q \cdot |ak - n| \right) = 0.$$

б) если $q > p - 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{p+1}} \cdot \sum_{k=p}^{n} k^q \cdot |ak - n| \right) = \infty.$$

Доказательство. а) Это утверждение леммы 2.

б) Пусть $q > p - 1$. Тогда для любого натурального n, такого что $n > 4ap$,

$$\frac{1}{n^{p+1}} \cdot \sum_{k=p}^{n} k^q \cdot |ak - n| > \frac{1}{n^{p+1}} \cdot \sum_{\frac{n}{4a} \le k \le \frac{n}{2a}} k^q \cdot |ak - n| >$$

$$> \frac{1}{n^{p+1}} \cdot \left(\frac{n}{4a}\right)^q \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{4a} = \frac{1}{2^{2q+3} \cdot a^{q+1}} \cdot n^{q+1-p} \to \infty$$

при $n \to \infty$. Лемма доказана.

Последняя лемма проясняет, почему $\lambda_n(\varphi)$ определяется в виде (1), если $\varphi(k)$ ищется в классе линейных функций.

В качестве оценки погрешности можно пользоваться иными равенствами, нежели (1) и (2). Например, для $r>0$ можно положить

$$\lambda_{n,r}(\varphi)=\frac{1}{n^{p+r}}\sum_{k=p}^{n}\binom{k-1}{p-1}|\varphi(k)-n|^r$$

и

$$\lambda_{n,r}(\varphi)=\lim_{n\to\infty}\lambda_{n,r}(\varphi).$$

И в этом случае справедливы аналоги лемм 1-6. Так же доказывается, что если $\varphi(k)$ искать в линейном виде $\varphi(k)=ak$, то

$$\lambda_r(\varphi)=\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_0^1 x^{p-1}\cdot|ax-1|^r dx.$$

Раскроем интеграл:

$$\int\limits_0^1 x^{p-1}\cdot|ax-1|^r dx=\int\limits_0^{1/a} x^{p-1}\cdot(1-ax)^r dx+\int\limits_{1/a}^1 x^{p-1}\cdot(ax-1)^r dx.$$

В первом интеграле сделаем подстановку $1-ax=t$, во втором $ax-1=t$:

$$\int\limits_0^1 x^{p-1}\cdot|ax-1|^r dx=\frac{1}{a}\int\limits_0^1 t^r\cdot\frac{(1-t)^{p-1}}{a^{p-1}}dt+\frac{1}{a}\int\limits_0^{a-1} t^r\cdot\frac{(t+1)^{p-1}}{a^{p-1}}dt=$$

$$=\frac{1}{a^p}\int\limits_0^1\left(\sum_{m=0}^{p-1}\binom{p-1}{m}(-1)^m t^{m+r}\right)dt+\frac{1}{a^p}\int\limits_0^{a-1}\left(\sum_{m=0}^{p-1}\binom{p-1}{m}\cdot t^{m+r}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{a^p}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{1}{m+r+1}\binom{p-1}{m}((-1)^m+(a-1)^{m+r+1}).$$

Таким образом,

$$\lambda_r(\varphi)=\frac{1}{a^p\cdot(p-1)!}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{1}{m+r+1}\binom{p-1}{m}((-1)^m+(a-1)^{m+r+1}).$$

Рассматривая $\lambda_r(\varphi)$ как функцию от a, найдём её производную:

$$(\lambda_r)'=\frac{1}{(p-1)!}\Big(\frac{1}{a^p}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{1}{m+r+1}\binom{p-1}{m}(m+r+1)(a-1)^{m+r}-$$

$$-pa^{-p-1}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{1}{m+r+1}\binom{p-1}{m}((-1)^m+(a-1)^{m+r+1})\Big)=\frac{1}{(p-1)!a^{p+1}}\cdot$$

$$\cdot\left(a\sum_{m=0}^{p-1}\binom{p-1}{m}(a-1)^{m+r}-p\sum_{m=0}^{p-1}\frac{1}{m+r+1}\binom{p-1}{m}((-1)^m+(a-1)^{m+r+1}\right).$$

Стационарными точками функции $\lambda_r(\varphi)$ являются корни уравнения

$$a\sum_{m=0}^{p-1}\binom{p-1}{m}(a-1)^{m+r}-p\sum_{m=0}^{p-1}\frac{1}{m+r+1}\binom{p-1}{m}((-1)^m+(a-1)^{m+r+1})=0.$$

Выражение в левой части этого уравнения обозначим $g(a)$ (p и r считаем фиксированными). Имеем

$$g(1)=-p\cdot\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(-1)^m}{m+r+1}\cdot\binom{p-1}{m}.$$

Можно доказать, что

$$\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(-1)^m}{m+r+1}\cdot\binom{p-1}{m}=\frac{(p-1)!}{(r+1)(r+2)\dots(r+p)}. \tag{3}$$

(сделаем это ниже). Отсюда следует

$$g(1)=-p\cdot\frac{(p-1)!}{(r+1)(r+2)\dots(r+p)}<0.$$

Далее,

$$g(2)=2\cdot\sum_{m=0}^{p-1}\binom{p-1}{m}-p\cdot\sum_{m=0}^{p-1}\frac{1}{m+r+1}\cdot\binom{p-1}{m}((-1)^m+1)>$$

$$>2\cdot 2^{p-1}-p\cdot\sum_{m=0}^{p-1}\frac{1}{m+1}\cdot\binom{p-1}{m}((-1)^m+1)=$$

$$=2^p-\sum_{m=0}^{p-1}\frac{p!\cdot(p-1)!}{(m+1)\cdot m!\cdot(p-1-m)!}((-1)^m+1)=2^p-\sum_{m=0}^{p-1}\frac{p!}{(m+1)!\cdot(p-(m+1))!}((-1)^m+1)=$$

$$=2^p-\sum_{m=0}^{p-1}\binom{p}{m+1}((-1)^m+1)=2^p-\left(\sum_{m=0}^{p-1}\binom{p}{m+1}+\sum_{m=0}^{p-1}\binom{p}{m+1}(-1)^m\right)=$$

$$=2^p-\left(\sum_{m=1}^{p}\binom{p}{m}-\sum_{m=1}^{p}\binom{p}{m}(-1)^m\right)=$$

$$=2^p-\left(\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}-1\right)+\left(\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}(-1)^m-1\right)=2^p-(2^p-1)+(0-1)=0.$$

Так как $g(1)<0, g(2)>0$, то, ввиду непрерывности функции $g(a)$, существует $a_0\in(1;2)$, такое что $g(a_0)=0$, и a_0 является точкой минимума функции λ, и наилучшей среди линейных функций для решения задачи оказывается $\varphi(k)=a_0\cdot k$.

Осталось доказать равенство (3). Сделаем это, пользуясь принципом математической индукции по p. При $p=1$ равенство верно. Пусть оно справедливо при $p=q$. Тогда для $p=q+1$

$$\sum_{m=0}^{q}\frac{(-1)^m}{m+r+1}\cdot\binom{q}{m}=\frac{1}{r+1}\binom{q}{0}-\frac{1}{r+2}\binom{q}{1}+\frac{1}{r+3}\binom{q}{2}-\dots+$$

$$+\frac{(-1)^q}{r+q+1}\binom{q}{q}=\frac{1}{r+1}\binom{q-1}{0}-\frac{1}{r+2}\binom{q-1}{1}+\frac{1}{r+3}\binom{q-1}{2}-\dots+$$

$$+\frac{(-1)^{q-1}}{r+q}\begin{pmatrix} q-1 \\ q-1 \end{pmatrix}+\frac{1}{r+1}\left(\begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} q-1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)-$$

$$-\frac{1}{r+2}\left(\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} q-1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)+\frac{1}{r+3}\left(\begin{pmatrix} q \\ 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} q-1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)+\cdots+$$

$$+(-1)^{q-1}\frac{1}{r+q}\left(\begin{pmatrix} q \\ q-1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} q-1 \\ q-1 \end{pmatrix}\right)+(-1)^{q}\frac{1}{r+q+1}\begin{pmatrix} q \\ q \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{(q-1)!}{(r+1)(r+2)\dots(r+q)}-\sum_{m=0}^{q-1}\frac{(-1)^m}{m+r+2}\cdot\begin{pmatrix} q-1 \\ m \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{(q-1)!}{(r+1)(r+2)\dots(r+q)}-\frac{(q-1)!}{(r+2)(r+3)\dots(r+q+1)}=$$

$$=\frac{(r+q+1)(q-1)!-(r+1)(q-1)!}{(r+1)(r+2)(r+3)\dots(r+q+1)}=\frac{q(q-1)!}{(r+1)(r+2)(r+3)\dots(r+q+1)},$$

и равенство (3) доказано (здесь мы воспользовались тождеством $\begin{pmatrix} q \\ m \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} q-1 \\ m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q-1 \\ m-1 \end{pmatrix}$).

Отметим, что предложенная оценка объёма упорядоченной генеральной совокупности является *смещённой*.

Изложенный метод является обобщением метода, предложенного в работе автора [1], в которой был разобран случай $p=1$.

Литература

1. Каибханов К.Э. Сколько ступенек на эскалаторе? // Математическое Просвещение, серия 3. - вып. 12. - 2008. - с. 232-234.

Каибханов Карахан Эйбханович,
приглашенный преподаватель НИУ
Высшая Школа Экономики,
департамент математики факультета экономических наук,
доцент, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: kkaib@yandex.ru

Расширенное введение в алгебраическую интерполяцию

С. Ю. Соловьев

В работе описываются и обосновываются операторы, позволяющие находить коэффициенты интерполяционных полиномов и обращать матрицы Вандермонда. Кроме того, в работе приводятся оценки сложности этих операторов и обсуждаются вопросы их программной реализации.

1. Введение

В современных учебниках по вычислительной математике задачу алгебраического интерполирования принято рассматривать как частный случай общей задачи интерполирования. При этом за пределами рассмотрения остаются весьма поучительные особенности именно *алгебраической интерполяции*, представляющие интерес для расширения математического кругозора студентов и учеников старших классов.

Задача алгебраического интерполирования состоит в построении одноименного многочлена по известным значениям этого многочлена в некоторых точках. Естественным потомком задачи алгебраического интерполирования является рассмотренная в п.5 задача обращения матрицы Вандермонда. Введем необходимые обозначения.

Будем оперировать векторами $\vec{x}$, $\vec{y}$ и т.д. размерности $n{+}1$, компоненты которых записываются в одну строку и нумеруются от 0 до n. Для записи тех же векторов "столбиком" будем использовать операцию транспонирования: $\vec{x}^{\mathsf{T}}$, $\vec{y}^{\mathsf{T}}$ и т.д.

По определению пара векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ задает задачу алгебраического интерполирования, и будем записывать этот факт в виде $\vec{x} \bowtie \vec{y}$, если все компоненты вектора $\vec{x}$ (именуемые узлами интерполирования) различны. В дальнейшем задачу алгебраического интерполирования будем для краткости именовать просто задачей интерполирования. Подчеркнем: если вектор $\vec{x}$ содержит одинаковые компоненты, то о задаче интерполирования говорить не приходится.

Коэффициентным решением задачи интерполирования $(x_0, \dots, x_n) \bowtie (y_0, \dots, y_n)$ называется вектор $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, удовлетворяющий так называемым интерполяционным условиям

$$a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n = y_i \qquad (i{=}0, ..., n), \tag{1}$$

при этом многочлен $P(x;\vec{a}) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ называется *интерполяционным полиномом.*

Пример 1. Коэффициентным решением задачи интерполирования

$$(-1, 0, 1, 2) \bowtie (14, 3, 0, -7)$$

является вектор $\vec{a} = (3, -5, +4, -2)$. В самом деле, для полинома $P(x;\vec{a}) = 3 - 5\,x + 4\,x^2 - 2\,x^3$ интерполяционные условия проверяются без затруднений:

$$P(-1;\vec{a}) = 14, \qquad P(0;\vec{a}) = 3, \qquad P(1;\vec{a}) = 0, \qquad P(2;\vec{a}) = -7.$$

Пусть $(x_0, x_1, \dots, x_n) \bowtie (y_0, y_1, \dots, y_n)$ — некоторая задача интерполирования. Введем в рассмотрение знаменитую формулу Лагранжа[1], которая удовлетворяет интерполяционным условиям, но не является коэффициентным решением задачи интерполирования:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{2}$$

[1] Joseph Louis Lagrange (JLL), 1736–1813.

Для примера 1 формула Лагранжа $L_3(x)$ состоит из четырех слагаемых:

$$14\,\frac{x-0}{-1-0}\,\frac{x-1}{-1-1}\,\frac{x-2}{-1-2}+3\,\frac{x+1}{0+1}\,\frac{x-1}{0-1}\,\frac{x-2}{0-2}+0\,\frac{x+1}{1+1}\,\frac{x-0}{1-0}\,\frac{x-2}{1-2}-7\,\frac{x+1}{2+1}\,\frac{x-0}{2-0}\,\frac{x-1}{2-1}.$$

Как нетрудно проверить,

$$\begin{aligned} L_3(-1) &= 14+0+0-0=14\,, & L_3(0) &= 0+3+0-0=3\,,\\ L_3(1) &= \ \ 0+0+0-0=0\,, & L_3(2) &= 0+0+0-7=-7\,. \end{aligned}$$

Строго говоря, формула Лагранжа позволяет выразить коэффициентное решение задачи интерполирования, достаточно “лишь” раскрыть скобки и привести подобные. В частности, таким образом можно выразить младший и старший коэффициенты,

$$a_0 = L_n(0) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x_j}{x_j-x_i}, \qquad a_n = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i-x_j}, \tag{3}$$

а для остальных коэффициентов получаемые аналитические выражения весьма громоздки. К счастью, существует обходной путь, позволяющий конструировать коэффициенты решения посредством серии достаточно простых формул.

2. Инструментальная подготовка

Эквивалентным представлением задачи интерполирования $\vec{x} \bowtie \vec{y}$ для векторов $\vec{x} = (x_0, .., x_n)$ и $\vec{y} = (y_0, .., y_n)$ является система линейных алгебраических уравнений $B\,\vec{a}^{\mathsf{T}} = \vec{y}^{\mathsf{T}}$ относительно компонент вектора $\vec{a}$. В этой системе задействована матрица Вандермонда[2]

$$B = B(x_0, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

Матрица Вандермонда является невырожденной[3], поэтому имеет место следующее

Важное утверждение. *Решение задачи интерполирования существует и оно единственно.*

Ценность этого утверждения состоит в том, что оно позволяет “угадывать” решения задачи интерполирования. В самом деле, если для частной задачи удалось из каких-то соображения построить вектор коэффициентов, удовлетворяющий интерполяционным условиям, то этот вектор и есть решение задачи и другого решения быть не может.

Пусть $(x_0, .., x_n) \bowtie (y_0, .., y_n)$ — задача интерполирования. Определим векторы $\vec{s}$ и $\vec{d}$:

$$s_i = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x_j}{x_j-x_i}, \qquad d_i = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i-x_j} \qquad\qquad (i{=}0, .., n). \tag{4}$$

Из сравнения формул (3) и (4) немедленно вытекает, что младший и старший коэффициенты искомого решения выражаются через скалярные произведения:

$$a_0 = (\vec{s}, \vec{y}), \qquad a_n = (\vec{d}, \vec{y}), \tag{5}$$

[2]Alexandre-Theophile Vandermonde (ATV), 1735–1796.

[3]См., например, вывод формулы для $det(B)$ в [4]

По сути дела, векторы $\vec{s}$ и $\vec{d}$ являются *характеристиками узлов интерполирования*, они не зависят от значений интерполяционого полинома. В последующих построениях векторы $\vec{s}$ и $\vec{d}$ используются как главные инструменты выявления всех неизвестных коэффициентов интерполяционного полинома.

В специальной литературе вектор $\vec{d}$ известен как вектор весов, которые существенно используются в *барицентрических интерполяционных формулах* [9]:

$$L_n(x) = \omega_n(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{d_j\, y_j}{x - x_j}, \quad \text{где} \;\; \omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Далее предлагается универсальный подход к решению задач интерполирования. Обычно в качестве средств фиксации того или иного подхода используются алгоритмы, которые по виду исполнителя подразделяются на два класса. К первому классу относятся алгоритмы, предназначенные для вычисления на компьютере, а ко второму — алгоритмы, исполняемые человеком. Алгоритмы второго класса опираются на установленные аналитические соотношения, они демонстрируют теоретические возможности и нуждаются в последующей компьютерной адаптации. В рамках задачи интерполирования для записи алгоритмов второго класса удобно использовать хорошо известный аппарат операторов, каждый из которых, в конечном итоге, можно свести к преобразованию векторов одного конечномерного пространства в векторы другого конечномерного пространства. Операторы будем задавать упорядоченными последовательностями формул.

3. Оператор $JLL|s$

Зафиксируем задачу $\vec{x} \bowtie \vec{y}$, в которой все узлы интерполирования отличны от нуля. Обозначим $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — коэффициенты интерполяционного полинома. Первая из формул (5) позволяет найти коэффициент a_0: $a_0 = (\vec{s}, \vec{y})$.

При известном коэффициенте a_0 интерполяционные условия (1) трансформируются в

$$a_1 + a_2 x_i + \cdots + a_n x_i^{n-1} = y_i^{[1]}, \quad \text{где} \;\; y_i^{[1]} = (y_i - a_0)/x_i, \quad i{=}0,..,n. \tag{6}$$

Рассмотрим задачу $\vec{x} \bowtie \vec{y}^{[1]}$. Нетрудно проверить, что коэффициентным решением (а значит и *единственным* коэффициентным решением) этой задачи является вектор $(a_1, \ldots, a_n, 0)$, поэтому $a_1 = (\vec{s}, \vec{y}^{[1]})$.

При известном коэффициенте a_1 условия (6) трансформируются в

$$a_2 + a_3 x_i + \cdots + a_n x_i^{n-2} = y_i^{[2]}, \quad \text{где} \;\; y_i^{[2]} = (y_i^{[1]} - a_1)/x_i, \quad i{=}0,..,n,$$

и поэтому единственным коэффициентным решением задачи $\vec{x} \bowtie \vec{y}^{[2]}$ является вектор $(a_2, \ldots, a_n, 0, 0)$ и, следовательно, $a_2 = (\vec{s}, \vec{y}^{[2]})$.

Продолжая этот процесс, можно выразить все коэффициенты интерполяционного полинома для задачи $\vec{x} \bowtie \vec{y}$. Формулы, выделенные из приведенных рассуждений, образуют оператор, позволяющий находить коэффициентное решение задачи интерполирования с ненулевыми узлами.

Оператор $JLL|s$: $(\, x_0, \ldots, x_n \,)$ и $(\, y_0, \ldots, y_n \,) \to (\, a_0, \ldots, a_n \,)$
при условии $x_0 \neq 0, \ldots, x_n \neq 0$.

$a_0 = (\vec{s}, \vec{y})$, где $\vec{s} = (s_0, \ldots, s_n)$ и $s_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} x_j/(x_j - x_i)$ для $i{=}0,..,n$;

$a_1 = (\vec{s}, \vec{y}^{[1]})$, где $\vec{y}^{[1]} = (y_0^{[1]}, \ldots, y_n^{[1]})$ и $y_i^{[1]} = (y_i - a_0)/x_i$ для $i{=}0,..,n$;

$a_2 = (\vec{s}, \vec{y}^{[2]})$, где $\vec{y}^{[2]} = (y_0^{[2]}, \ldots, y_n^{[2]})$ и $y_i^{[2]} = (y_i^{[1]} - a_1)/x_i$ для $i{=}0,..,n$;

$\ldots$

$a_n = (\vec{s}, \vec{y}^{[n]})$, где $\vec{y}^{[n]} = (y_0^{[n]}, \ldots, y_n^{[n]})$ и $y_i^{[n]} = (y_i^{[n-1]} - a_{n-1})/x_i$ для $i{=}0,..,n$. $\square$

Пример 2. Для задачи интерполирования

$$(\,-1.0,\,-0.5,\,0.5,\,1.0,\,1.5,\,2.0\,) \bowtie (\,19.1,\,4.7,\,2.3,\,5.9,\,11.1,\,1.7\,), \quad n{=}5, \tag{7}$$

действие оператора $JLL|s$ выглядит так:

$$\begin{array}{rl}
\vec{s} = (-1/15, & 0.4, \;\; 4/3, \;-1.0, \;\; 0.4, \;-1/15\,) \;\Rightarrow\; a_0 = (\vec{s},\vec{y}) \;\;\; = +2.1,\\
\vec{y}^{\,[1]} = (\,-17.0, & -5.2, \;\; 0.4, \;\; 3.8, \;\; 6.0, \;-0.2\,) \;\Rightarrow\; a_1 = (\vec{s},\vec{y}^{\,[1]}) = -1.8,\\
\vec{y}^{\,[2]} = (\;\; 15.2, & 6.8, \;\; 4.4, \;\; 5.6, \;\; 5.2, \;\; 0.8\,) \;\Rightarrow\; a_2 = (\vec{s},\vec{y}^{\,[2]}) = +4.0,\\
\vec{y}^{\,[3]} = (\,-11.2, & -5.6, \;\; 0.8, \;\; 1.6, \;\; 0.8, \;-1.6\,) \;\Rightarrow\; a_3 = (\vec{s},\vec{y}^{\,[3]}) = -1.6,\\
\vec{y}^{\,[4]} = (\;\; 9.6, & 8.0, \;\; 4.8, \;\; 3.2, \;\; 1.6, \;\; 0.0\,) \;\Rightarrow\; a_4 = (\vec{s},\vec{y}^{\,[4]}) = +6.4,\\
\vec{y}^{\,[5]} = (\;\; -3.2, & -3.2, \;-3.2, \;-3.2, \;-3.2, \;-3.2\,) \;\Rightarrow\; a_5 = (\vec{s},\vec{y}^{\,[5]}) = -3.2.
\end{array}$$

То есть коэффициентным решением задачи (7) является вектор

$$\vec{a} = (\,+2.1,\,-1.8,\,+4.0,\,-1.6,\,+6.4,\,-3.2\,),$$

которому соответствует интерполяционный полином

$$P(x;\vec{a}) = 2.1 - 1.8x + 4.0x^2 - 1.6x^3 + 6.4x^4 - 3.2x^5.$$

Следствие 1. *Для нахождения коэффициента a_n используется тот факт, что решением задачи $\vec{x} \bowtie \vec{y}^{\,[n]}$ является вектор $(a_n, 0, \ldots, 0)$, поэтому вектор $\vec{y}^{\,[err]}$, в котором $y_j^{[err]} = y_j^{[n]} - a_n$, должен быть нулевым: $\vec{y}^{\,[err]} = 0$.*

Замечание. В общем случае один из узлов интерполирования может быть нулем. Не ограничивая общности, можно полагать, что нулевой узел (если он имеется) занимает нулевую позицию. В этой ситуации нахождение коэффициента a_0 упрощается: $a_0 = y_0$, а для всех остальных коэффициентов задача сводится к предыдущей. Другими словами, коэффициентным решением задачи $(0, x_1, \ldots, x_n) \bowtie (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ является вектор коэффициентов $(y_0, a_0', \ldots, a_{n-1}')$, в котором $(a_0', \ldots, a_{n-1}')$ – коэффициентное решение задачи $(x_1, \ldots, x_n) \bowtie (y_1', \ldots, y_n')$ с ненулевыми узлами интерполирования и $y_i' = (y_i - y_0)/x_i$.

4. Оператор $JLL|d$

В операторе $JLL|s$ зафиксирован порядок нахождения искомых коэффициентов по возрастанию степеней аргумента. Построим оператор $JLL|d$, в котором используется обратный порядок нахождения коэффициентов.

Пусть $\vec{x} \bowtie \vec{y}$ — некоторая задача интерполирования. Обозначим $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — коэффициенты интерполяционного полинома. Вторая из формул (5) позволяет найти коэффициент a_n: $a_n = (\vec{d}, \vec{y})$.

При известном коэффициенте a_n интерполяционные условия (1) трансформируются в

$$a_0 x_i + a_1 x_2^2 \cdots + a_{n-1} x_i^n = z_i^{[n-1]}, \quad \text{где} \quad z_i^{[n-1]} = (y_i{-}a_n x_i^n) x_i, \quad i{=}0,..,n. \tag{8}$$

Рассмотрим задачу $\vec{x} \bowtie \vec{z}^{\,[n-1]}$, в которой $\vec{z}^{\,[n-1]} = (z_0^{[n-1]}, \ldots, z_n^{[n-1]})$. Нетрудно проверить, что коэффициентным решением (а значит и *единственным* коэффициентным решением) этой задачи является вектор $(0,\, a_0, \ldots, a_{n-1})$, поэтому $a_{n-1} = (\vec{d}, \vec{z}^{\,[n-1]})$.

При известном коэффициенте a_{n-1} условия (8) трансформируются в

$$a_0 x_i^2 + a_1 x_2^3 \cdots + a_{n-2} x_i^n = z_i^{[n-2]}, \quad \text{где} \quad z_i^{[n-2]} = (z_i^{[n-1]}{-}a_{n-1} x_i^n) x_i, \quad i{=}0,..n,$$

и поэтому единственным коэффициентным решением задачи $\vec{x} \bowtie \vec{z}^{\,[n-2]}$, в которой $\vec{z}^{\,[n-2]} = (z_0^{[n-2]}, \ldots, z_n^{[n-2]})$, является вектор $(0, 0, a_2, \ldots, a_{n-2})$ и, следовательно, $a_{n-2} = (\vec{d}, \vec{z}^{\,[n-2]})$.

Продолжая этот процесс, можно выразить все коэффициенты интерполяционного полинома для задачи $\vec{x} \bowtie \vec{y}$. Формулы, выделенные из приведенных рассуждений, составляют оператор, позволяющий находить коэффициентное решение задачи интерполирования.

Оператор $JLL|d$: $(x_0, \ldots, x_n)$ и $(y_0, \ldots, y_n) \to (a_0, \ldots, a_n)$

$a_n \;\; = (\vec{d}, \vec{y})$, где $\vec{d} = (d_0, \ldots, d_n)$, $\quad d_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)^{-1}$, $\quad i=0,..,n$;

$a_{n-1} = (\vec{d}, \vec{z}^{[n-1]})$, где $\vec{z}^{[n-1]} = (z_0^{[n-1]}, \ldots, z_n^{[n-1]})$, $\; z_i^{[n-1]} = (y_i - a_n x_i^n) x_i$, $\quad i=0,..,n$;

$a_{n-2} = (\vec{d}, \vec{z}^{[n-2]})$, где $\vec{z}^{[n-2]} = (z_0^{[n-2]}, \ldots, z_n^{[n-2]})$, $\; z_i^{[n-2]} = (z_i^{[n-1]} - a_{n-1} x_i^n) x_i$, $i=0,..,n$;

$\ldots$

$a_0 \;\; = (\vec{d}, \vec{z}^{[0]})$, где $\vec{z}^{[0]} = (z_0^{[0]}, \ldots, z_n^{[0]})$, $\quad z_i^{[0]} = (z_i^{[1]} - a_1 x_i^n) x_i$, $\quad i=0,..,n$. □

Пример 3. Для задачи интерполирования

$$(0,\, 0.5,\, 1,\, 2,\, 2.5) \bowtie (8,\, 6,\, 5,\, 12,\, 25), \quad n=4 \tag{9}$$

действие оператора $JLL|d$ выглядит так:

$$\begin{array}{rlllll}
\vec{d} = (2/5, & -4/3, & 4/3, & -2/3, & 4/15) & \Rightarrow \quad a_4 = (\vec{d}, \vec{y}) \;\;\; = \;\; 8/15, \\
\vec{z}^{[3]} = (0, & 179/60, & 67/15, & 104/15, & 125/12) & \Rightarrow \quad a_3 = (\vec{d}, \vec{z}^{[3]}) = \;\; 2/15, \\
\vec{z}^{[2]} = (0, & 357/240, & 13/3, & 144/15, & 625/48) & \Rightarrow \quad a_2 = (\vec{d}, \vec{z}^{[2]}) = \; 13/15, \\
\vec{z}^{[1]} = (0, & 43/60, & 52/15, & -128/15, & -625/12) & \Rightarrow \quad a_1 = (\vec{d}, \vec{z}^{[1]}) = -68/15, \\
\vec{z}^{[0]} = (0, & 0.5, & 8, & 128, & 312.5\;) & \Rightarrow \quad a_0 = (\vec{d}, \vec{z}^{[0]}) = \;\; 8.
\end{array}$$

То есть коэффициентным решением задачи (9) является вектор

$$\vec{a} = (+8,\, -68/15,\, +13/15,\, +2/15\; +8/15),$$

которому соответствует интерполяционный полином

$$P(x; \vec{a}) = 8 - \frac{68}{15}\, x + \frac{13}{15}\, x^2 + \frac{2}{15}\, x^3 + \frac{8}{15}\, x^4.$$

Следствие 2. *Для нахождения коэффициента* a_0 *используется тот факт, что решением задачи* $\vec{x} \bowtie \vec{z}^{[0]}$ *является вектор* $(0, \ldots, 0, a_0)$, *поэтому вектор* $\vec{z}^{[err]}$, *в котором* $z_j^{[err]} = z_j^{[0]} - a_0\, x_j^n$, *должен быть нулевым:* $\vec{z}^{[err]} = 0$.

Отметим, что оператор $JLL|s$ ($JLL|d$) реализует метод решения системы линейных алгебраических уравнений с нижне- (верхне-) треугольной матрицей специального вида.

5. Оператор $ATV|s$

С формальной точки зрения решение $\vec{a}^{\mathsf{T}}$ задачи интерполирования $\vec{x} \bowtie \vec{y}$ можно получить как $B^{-1}\, \vec{y}^{\mathsf{T}}$, где B^{-1} — матрица, обратная матрице Вандермонда. В современной информатике матрица B^{-1} представляет самостоятельный интерес, она применяется не только для целей интерполяции. Выделим B^{-1} из оператора $JLL|s$. Полученный при этом оператор (обозначим его $ATV|s$) преобразует узлы интерполирования $\vec{x}$ в матрицу B^{-1}.

Будем рассматривать построчное строение матрицы B^{-1}.

$$B^{-1} = B^{-1}(x_0, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} v_{00} & v_{01} & \ldots & v_{0n} \\ v_{10} & v_{11} & \ldots & v_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n0} & v_{n1} & \ldots & v_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_0 \\ \vec{v}_1 \\ \ldots \\ \vec{v}_n \end{bmatrix}, \text{ где } \begin{array}{l} \vec{v}_0 = (v_{00}, \ldots, v_{0n}), \\ \vec{v}_1 = (v_{10}, \ldots, v_{1n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{v}_n = (v_{n0}, \ldots, v_{nn}). \end{array}$$

С учетом принятых обозначений[4] коэффициенты интерполяционного полинома выражаются через скалярные произведения $a_i = (\vec{v}_i, \vec{y})$.

[4] Строго говоря, строками матрицы B^{-1} являются не векторы $\vec{v}_i$, а их компоненты, однако это обстоятельство в настоящем изложении несущественно.

Пусть $\vec{x}$ не содержит нули, $\vec{y}$ — произвольный вектор значений, $\vec{a}=(a_0,\dots,a_n)$ — соответствующее коэффициентное решение. Поскольку равенство $a_0=(\vec{s},\vec{y})=(\vec{v}_0,\vec{y})$ выполняется для любого $\vec{y}$, то $\vec{v}_0=\vec{s}$. Для нахождения остальных векторов $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n$ рассмотрим две задачи интерполирования:

$$\vec{x}\bowtie\vec{y} \quad \text{и} \quad \vec{x}\bowtie\vec{y}^{\,[1]}, \tag{10}$$

где $\vec{y}^{\,[1]}$ — вектор, "произведенный" оператором $JLL|s$ среди прочих промежуточных векторов:

$$\vec{y}^{\,[1]}=(\,y_0^{[1]},\,y_1^{[1]},\cdots,y_n^{[1]}\,),\ \text{где}\ \ y_i^{[1]}=(y_i-a_0)/x_i, \qquad i{=}0,..,n.$$

Коэффициентными решениями задач (10) являются векторы $\vec{a}=(a_0,a_1,\dots,a_n)$ и $\vec{b}=(a_1,\dots,a_n,0)$, компоненты которых, исходя из равенста $\vec{a}^{\mathsf{T}}=B^{-1}\,\vec{y}^{\mathsf{T}}$, выражаются так:

$$\begin{array}{lllll}\vec{a}: & a_0=(\vec{v}_0,\vec{y}\,), & a_1=(\vec{v}_1,\vec{y}\,), & \dots, & a_n=(\vec{v}_n,\vec{y}\,);\\ \vec{b}: & & a_1=(\vec{v}_0,\vec{y}^{\,[1]}), & \dots, & a_n=(\vec{v}_{n-1},\vec{y}^{\,[1]}), \quad (\vec{v}_n,\vec{y}^{\,[1]})=0\,.\end{array}$$

Очевидные преобразования скалярного произведения $(\vec{v}_{k-1},\vec{y}^{\,[1]})$ позволяют привести равенства $a_k=(\vec{v}_k,\vec{y}\,)=(\vec{v}_{k-1},\vec{y}^{\,[1]})$ к виду

$$\sum_{j=0}^{n}v_{kj}\,y_j=\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{v_{k-1,j}}{x_j}-s_j\sum_{l=0}^{n}\frac{v_{k-1,l}}{x_l}\right)y_j \qquad (k{=}1,..,n),$$

а поскольку $\vec{y}$ – произвольный вектор, то компоненты k-го вектора $\vec{v}_k$ выражаются следующим образом:

$$v_{kj}=v_{k-1,j}/x_j-s_j\,M_{k-1}, \quad (j{=}0,..,n),$$
$$\text{где} \quad M_{k-1}=\sum_{l=0}^{n}\frac{v_{k-1,l}}{x_l}\ \equiv\ (\vec{v}_{k-1},\vec{w}) \quad \text{при} \quad \vec{w}=(x_0^{-1},\dots,x_n^{-1}).$$

Равенство $\vec{v_0}=\vec{s}$ и выражения для компонет $\vec{v_k}$ позволяют сконструировать оператор обращения матриц Вандермонда, заданных ненулевыми узлами интерполирования.

Оператор $ATV|s$: $(\,x_0,\dots,x_n\,)\to[v_{ij}]$ при условии $x_0\neq0,\dots,x_n\neq0$.

$$\begin{array}{llll} & \vec{w}=(x_0^{-1},\dots,x_n^{-1}), & & \\ \vec{v_0}=\vec{s}=(s_0,\dots,s_n), & \text{где}\ \ s_j=\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{x_k}{x_k-x_j}, & j{=}0,..,n, & \\ \vec{v_1}=(v_{10},\dots,v_{1n}), & \text{где}\ \ v_{1j}=v_{0j}/x_j-s_j\,M_0, & j{=}0,..,n\ \ \text{и} & M_0{=}(\vec{w},\vec{v_0}),\\ \vec{v_2}=(v_{20},\dots,v_{2n}), & \text{где}\ \ v_{2j}=v_{1j}/x_j-s_j\,M_1, & j{=}0,..,n\ \ \text{и} & M_1{=}(\vec{w},\vec{v_1}),\\ \dots & & & \\ \vec{v_n}=(v_{n0},\dots,v_{nn}), & \text{где}\ \ v_{nj}=v_{n-1,j}/x_j-s_j\,M_{n-1}, & j{=}0,..,n\ \ \text{и} & M_{n-1}{=}(\vec{w},\vec{v}_{n-1}). \quad \square\end{array}$$

Пример 4. Для узлов интерполирования $(\,-1.0,\ -0.5,\ 0.5,\ 1.0,\ 1.5,\ 2.0\,)$ из примера 2 оператор $ATV|s$ действует так:

$$\begin{array}{rcl} & & \vec{w}=(\ -1\ ,\ -2\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ 2/3,\ 1/2\ ),\\ \vec{s}=\left(-\frac{1}{15},\frac{2}{5},\frac{4}{3},-1,\frac{2}{5},-\frac{1}{15}\right) & \Rightarrow & \vec{v}_0=(-1/15,\ 2/5\ ,\ 4/3,\ -1\ ,\ 2/5,-1/15\,),\\ M_0=\ 7/6 & \Rightarrow & \vec{v}_1=(\ 13/90,-19/15,\ 10/9,\ 1/6,-1/5,\ 2/45\,),\\ M_1=\ 14/3 & \Rightarrow & \vec{v}_2=(\ 1/6\ ,\ 2/3\ ,\ -4\ ,\ 29/6,\ -2\ ,\ 1/3\ ),\\ M_2=-35/6 & \Rightarrow & \vec{v}_3=(-5/9\ ,\ 1\ ,-2/9,\ -1\ ,\ 1\ ,-2/9\ ),\\ M_3=\ -7/3 & \Rightarrow & \vec{v}_4=(\ 2/5\ ,-16/15,\ 8/3,-10/3,\ 8/5,-4/15\,),\\ M_4=\ 14/3 & \Rightarrow & \vec{v}_5=(-4/45,\ 4/15,-8/9,\ 4/3,-4/5,\ 8/45\,).\end{array}$$

В окончательном виде полученная операторм $ATV|s$ матрица имеет вид:

$$B^{-1}(-1.0,\,-0.5,\,0.5,\,1.0,\,1.5,\,2.0)=\begin{bmatrix}-1/15 & 2/5 & 4/3 & -1 & 2/5 & -1/15\\ 13/90 & -19/15 & 10/9 & 1/6 & -1/5 & 2/45\\ 1/6 & 2/3 & -4 & 29/6 & -2 & 1/3\\ -5/9 & 1 & -2/9 & -1 & 1 & -2/9\\ 2/5 & -16/15 & 8/3 & -10/3 & 8/5 & -4/15\\ -4/45 & 4/15 & -8/9 & 4/3 & -4/5 & 8/45\end{bmatrix}$$

Замечание 3. Если вектор $\vec{x}$ содержит нулевой узел: $\vec{x}=(0,x_1,\,\dots,x_n)$, то, как следует из замечания 2,

$$B^{-1}(0,x_1,\,\dots,x_n)\times\vec{y}^{\mathsf{T}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & V\end{bmatrix}\times R\times\vec{y}^{\mathsf{T}},\tag{11}$$

где $V=B^{-1}(x_1,\,\dots,x_n)$, а R – матрица линейного преобразования

$$(y_0,y_1,\,\dots,y_n)^{\mathsf{T}}\quad\to\quad\left(y_0,\frac{y_1-y_0}{x_1},\,\dots,\frac{y_n-y_0}{x_n}\right)^{\mathsf{T}}.$$

Поскольку равенство (11) справедливо для любого вектора $\vec{y}$, то

$$\begin{aligned}B^{-1}(0,x_1,\,\dots,x_n)&=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & V\end{bmatrix}\times R=\\ &=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n}\\ 0 & v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ -1/x_1 & 1/x_1 & 0 & \dots & 0\\ -1/x_2 & 0 & 1/x_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -1/x_n & 0 & 0 & \dots & 1/x_n\end{bmatrix}=\\ &=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ -M'_1 & v_{11}/x_1 & v_{12}/x_2 & \dots & v_{1n}/x_n\\ -M'_2 & v_{21}/x_1 & v_{22}/x_2 & \dots & v_{2n}/x_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -M'_n & v_{n1}/x_1 & v_{n2}/x_2 & \dots & v_{nn}/x_n\end{bmatrix},\quad\text{где}\quad M'_k=\sum_{l=1}^{n}\frac{v_{kl}}{x_l}.\end{aligned}$$

6. Оператор $ATV|d$

Альтернативный оператор $ATV|d$ обращения матрицы Вандермонда также опирается на построчное строение матрицы B^{-1}, но исходит из особенностей оператора $JLL|d$.

Пусть по-прежнему $\vec{x}$ — некоторый набор узлов интерполирования, $\vec{y}$ — произвольный вектор значений, $\vec{a}=(a_0,\dots,a_n)$ — соответствующее коэффициентное решение. Поскольку равенство $a_n=(\vec{d},\vec{y})=(\vec{v}_n,\vec{y})$ выполняется для любого $\vec{y}$, то $\vec{v}_n=\vec{d}$. Для нахождения остальных векторов $\vec{v}_0,\,\dots,\,\vec{v}_{n-1}$ рассмотрим две задачи интерполирования:

$$\vec{x}\bowtie\vec{y}\quad\text{и}\quad\vec{x}\bowtie\vec{z}^{\,[n-1]},$$

где $\vec{z}^{\,[n-1]}$ — вектор из оператора $JLL|d$:

$$\vec{z}^{\,[n-1]}=(\,z_0^{[n-1]},\,\dots,z_n^{[n-1]}\,),\ \text{где}\ \ z_i^{[n-1]}=(y_i-a_nx_i^n)\,x_i,\qquad i{=}0,..,n.$$

Коэффициентными решениями этих задач являются векторы $\vec{a}=(a_0,a_1,\dots,a_n)$ и $\vec{b}=(0,a_0,\dots,a_{n-1})$, компоненты которых выражаются так:

$$\begin{array}{llllll} \vec{a}: & & a_0 = (\vec{v}_0, \vec{y})\,, & \ldots\,, & a_{n-1} = (\vec{v}_{n-1}, \vec{y})\,, & a_n = (\vec{v}_n, \vec{y})\,; \\ \vec{b}: & (\vec{v}_0, \vec{z}^{\,[n-1]}) = 0\,, & a_0 = (\vec{v}_1, \vec{z}^{\,[n-1]})\,, & \ldots\,, & a_{n-1} = (\vec{v}_n, \vec{z}^{\,[n-1]})\,. & \end{array}$$

Очевидные преобразования скалярного произведения $(\vec{v}_{k+1}, \vec{z}^{\,[n-1]})$ позволяют привести равенства $a_k = (\vec{v}_k, \vec{y}) = (\vec{v}_{k+1}, \vec{z}^{\,[n-1]})$ к виду

$$a_k = \sum_{j=0}^{n} v_{kj}\, y_j = \sum_{j=0}^{n} \left(x_j\, v_{k+1,j} - d_j \sum_{l=0}^{n} v_{k+1,l}\, x_l^{n+1} \right) y_j \qquad (k{=}0,\, \ldots, n{-}1),$$

а поскольку $\vec{y}$ — произвольный вектор, то для элементов k-й строки матрицы $B^{-1}(x_0,\, \ldots, x_n)$ справедливы равенства

$$v_{kj} = x_j\, v_{k+1,j} - d_j\, N_{k+1} \quad (j = 0,\, \ldots, n),$$

$$\text{где} \quad N_{k+1} = \sum_{l=0}^{n} v_{k+1,l}\, x_l^{n+1} \equiv (\vec{v}_{k+1}, \vec{u}) \quad \text{при} \quad \vec{u} = (x_0^{n+1}, \ldots, x_n^{n+1}).$$

Равенство $\vec{v}_n = \vec{d}$ и выражения для $\vec{v}_k$ позволяют сконструировать еще один оператор обращения матриц Вандермонда, заданных узлами интерполирования.

Оператор $ATV|d$: $(\, x_0, \ldots, x_n \,) \to [v_{ij}]$.

$$\begin{array}{llll} & & \vec{u} = (x_0^{n+1}, \ldots, x_n^{n+1}), & \\ \vec{v}_n = \vec{d} = (d_0, \ldots, d_n), & \text{где} & d_j = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} (x_j{-}x_k)^{-1}, & j{=}0,..,n, \\ \vec{v}_{n-1} = (v_{n-1,0}, \ldots, v_{n-1,n}), & \text{где} & v_{n-1,j} = x_j\, v_{nj} - d_j\, N_n, & j{=}0,..,n \;\; \text{и} \;\; N_n{=}(\vec{u}, \vec{v}_n), \\ \vec{v}_{n-2} = (v_{n-2,0}, \ldots, v_{n-2,n}), & \text{где} & v_{n-2,j} = x_j\, v_{n-1,j} {-} d_j\, N_{n-1}, & j{=}0,..,n \;\; \text{и} \;\; N_{n-1}{=}(\vec{u}, \vec{v}_{n-1}), \\ \ldots & & & \\ \vec{v}_0 = (v_{00}, \ldots, v_{0n}), & \text{где} & v_{0j} = x_j\, v_{1j} - d_j N_1, & j{=}0,..,n \;\; \text{и} \;\; N_1{=}(\vec{u}, \vec{v}_1). \quad \Box \end{array}$$

Пример 5. Для узлов интерполирования (0, 0.5, 1, 2, 2.5) из примера 3, n=4, действие оператора $ATV|d$ выглядит так:

$$\begin{array}{rcrl} & & \vec{u} = & (\;\; 0 \;\;,\;\; 1/32, \;\; 1 \;\;,\;\; 32 \;\;, 3125/32\,), \\ \vec{d} = \left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{15} \right) & \Rightarrow & \vec{v}_4 = & (\;\; 2/5 \;,\; -4/3 \;,\; 4/3, \; -2/3, \;\; 4/15\,), \\ N_4 = \;\; 6 & \Rightarrow & \vec{v}_3 = & (-12/5 \;,\; 22/3 \;, -20/3, \;\; 8/3, \; -14/15\,), \\ N_3 = -49/4 & \Rightarrow & \vec{v}_2 = & (\;\; 49/10, -38/3 \;,\; 29/3, -17/6, \;\; 14/15\,), \\ N_2 = \;\; 39/4 & \Rightarrow & \vec{v}_1 = & (-39/10, \;\; 20/3 \;, -10/3, \;\; 5/6, \; -4/15\,), \\ N_1 = \; -5/2 & \Rightarrow & \vec{v}_0 = & (\;\; 1 \;,\;\; 0 \;,\;\; 0 \;,\;\; 0 \;,\;\; 0 \;\;). \end{array}$$

В окончательном виде полученная оператором $ATV|d$ матрица имеет вид:

$$B^{-1}(0,\, 0.5,\, 1,\, 2,\, 2.5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -39/10 & 20/3 & -10/3 & 5/6 & -4/15 \\ 49/10 & -38/3 & 29/3 & -17/6 & 14/15 \\ -12/5 & 22/3 & -20/3 & 8/3 & -14/15 \\ 2/5 & -4/3 & 4/3 & -2/3 & 4/15 \end{bmatrix}$$

Самый известный с докомпьютерных времен метод обращения матриц Вандермонда [8] основывается на использовании коэффициентов определенного в п.2 полинома $\omega_n(x)$:

Если $\omega_n(x) = x^{n+1} + A_n\, x^n + \cdots + A_1\, x + A_0$, то (с учетом ранее принятых обозначений) элементы j-го столбца ($j{=}0,..,n$) определяются так:

$$v_{nj} = d_j, \qquad v_{kj} = (x_j^{n-k} + A_n\, x_j^{n-k-1} + \cdots + A_{k+1})\, d_j \equiv$$
$$\equiv x_j\, v_{k+1,j} + A_{k+1} d_j \qquad (k{=}0,..,n{-}1).$$

Из сравнения выражений для одних и тех же элементов матрицы B^{-1} следует, что $A_i = -N_i$. Отличительная особенность оператора $ATV|d$ состоит в том, что он не предполагает предварительного построения коэффициентов A_i, они конструируются параллельно с построением матрицы B^{-1}.

7. Подсчеты

Зафиксируем некоторое число n, $n \geq 2$, и посчитаем количество операций в определениях операторов $JLL|s$ и $ATV|s$. При этом будем раздельно учитывать (а) операции сложения и вычитания, (б) операции умножения и деления, а также (в) знаки равенства[5].

В качестве примера посчитаем операции в формуле (4) для отдельных компонент вектора $\vec{s}$:

$$s_i = \frac{x_0}{x_0{-}x_i} * \cdots * \frac{x_{i-1}}{x_{i-1}{-}x_i} * \frac{x_{i+1}}{x_{i+1}{-}x_i} * \cdots * \frac{x_n}{x_n{-}x_i}.$$

В этой формуле (а) n операций сложения/вычитания, (б) $2n{-}1$ операций умножения/деления[6], (в) 1 (один) знак равенства. В общей сложности формула для компоненты s_i содержит $(n){+}(2n{-}1){+}1 = 3n$ операций.

Результаты и детали подсчета операций для операторов $JLL|s$ и $ATV|s$ приводятся в таблице 1. Суммарно эти операторы содержат соответственно $8\,n^2{+}11\,n{+}3$ и $9\,n^2{+}11\,n{+}3$ операций. Вместе с тем, общее количество операций естественно разделять на две части. К первой части относятся операции построения инструментальных векторов, ко второй – операции конструирования искомых коэффициентов. При этом суммарное количество операций оператора $JLL|s$ подразделяется на два слагаемых: $3\,n^2{+}3\,n{+}1$ и $5\,n^2{+}8\,n{+}2$. Аналогично, суммарное количество операций оператора $ATV|s$ подразделяется на $3\,n^2{+}3\,n{+}1$ и $6\,n^2{+}8\,n{+}2$.

Как следует из приведенных подсчетов, операторы $JLL|s$ и $ATV|s$ имеют один и тот же порядок сложности $O(n^2)$ (см. [1]). Операторы $JLL|d$ и $ATV|d$ также имеют оценки сложности $O(n^2)$, однако в настоящей работе они не выводятся, поскольку требуют некоторых оговорок.

Отметим два обстоятельства. Во-первых, для построения всех элементов матрицы B^{-1} требуется не менее $(n{+}1)^2$ операций[7], то есть все операторы обращения матриц Вандермонда с оценкой сложности $O(n^2)$ являются "асимптотически наилучшими". В-вторых, в теории вычислений доказано [7] существование методов интерполяции с оценкой сложности $O(n\,log^2 n)$, то есть начиная с некоторого значения n_0 операторы $JLL|*$, будут проигрывать по числу задействованных операций. Доказательство этого факта опирается на свойства быстрого преобразования Фурье [1] и сведения из теории функций комплексной переменной [2].

8. Предупреждение об опасности

На первый взгляд операторы $JLL|*$ и $ATV|*$ раз и навсегда решают задачу интерполяции. В самом деле, алгоритмическое представление[8] (см. алгоритм 1), скажем, оператора $ATV|s$ выглядит

---

[5] Строго говоря, знаки равенства для векторных формул можно в расчет не принимать, однако в данном случае учет "лишних" операций на окончательные выводы не влияет.

[6] $n{-}1$ умножений и n делений

[7] Тривиальная нижняя граница сложности [5] задачи построения B^{-1} есть $O(n^2)$.

[8] для случая $n \leq 40$ при

```
type vect = array [0..40] of real;
     matr = array [0..40] of vect;
```

Оператор	Операции $+\|-$	Операции $*\|/$	Знак $=$
$JLL\|s$	$3n^2+3n$	$4n^2+4n$	$n^2{+}4n{+}3$
В том числе: $\vec{s}=(s_0,\ldots,s_n),\quad s_i=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^n x_j/(x_j-x_i)$	$n(n{+}1)$	$(2n{-}1)(n{+}1)$	$n{+}2$
$\vec{y}^{[1]}=(y_0^{[1]},\ldots,y_n^{[1]}),\quad y_i^{[1]}=(y_i-a_0)/x_i$	$n{+}1$	$n{+}1$	$n{+}2$
$\vec{y}^{[k]}=(y_0^{[k]},\ldots,y_n^{[k]}),$ $k{=}2,..,n;\quad y_i^{[k]}=(y_i^{[k-1]}{-}a_{k-1})/x_i$	$(n{+}1)(n{-}1)$	$(n{+}1)(n{-}1)$	$n^2{+}n{-}2$
$a_0=(\vec{s},\vec{y})$	n	$n{+}1$	1
$a_k=(\vec{s},\vec{y}^{[k]}),\quad k{=}1,..,n$	n^2	$(n{+}1)n$	n
$ATV\|s$	$3n^2{+}2n$	$5n^2{+}4n{-}1$	$n^2{+}5n{+}4$
В том числе: $\vec{s}=(s_0,\ldots,s_n),\quad s_j=\prod_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^n x_j/(x_k-x_j)$	$n(n{+}1)$	$(2n{-}1)(n{+}1)$	$n{+}2$
$\vec{v}_0=(v_{00},\ldots,v_{0n}),\quad v_{0i}=s_i$	0	0	$n{+}2$
$\vec{v}_k=(v_{k0},\ldots,v_{kn}),$ $k{=}1,..,n,\quad v_{ki}=v_{k-1,i}/x_i{-}s_iM_{k-1}$	$(n{+}1)n$	$2(n{+}1)n$	$(n{+}2)n$
$M_k=\sum_{j=0}^n v_{kj}/x_j,\quad k{=}0,..,n{-}1$	n^2	$(n{+}1)n$	n

Табл. 1. Подсчет числа операций в определениях операторов $JLL|s$ и $ATV|s$

и лаконично, и привлекательно. Однако полагаться на непосредственную алгоритмическую реализацию описанных операторов следует с осторожностью.

Во-первых, формулы (4) для нахождения векторов $\vec{s}$ и $\vec{d}$ предполагают вычисление произведений. Если, например, все узлы интерполирования расположены на сегменте длины 0.5, то $|d_i|\geq 2^n$, и это обстоятельство грозит потерей точности при значительных n. Во-вторых, все операторы используют последовательный характер нахождения коэффициентов интерполяционного полинома или строк обратной матрицы. Это значит, что ошибки округления, допущенные на одном этапе, окажут негативное влияние на все последующие этапы.

Не изменяя операторов, полностью устранить действие перечисленных негативных факторов невозможно. Если тем не менее операторы используются для численных расчетов, то для оценки качества полученных результатов можно использовать отклонения в тождествах:

$$
\begin{aligned}
& & y_j^{[err]}=z_j^{[err]} &= 0 \quad (j{=}0,..,n). &\quad(12)\\
s_0+\cdots+s_n &= & v_{00}+\cdots+v_{0n} &= 1, &\quad(13)\\
& & v_{i0}+\cdots+v_{in} &= 0 \quad (i{=}1,..,n{-}1), &\quad(14)\\
d_0+\cdots+d_n &= & v_{n0}+\cdots+v_{nn} &= 0, &\quad(15)
\end{aligned}
$$

Тождества (12) дублируют следствия 1 и 2. Тождества (13)–(15) следуют из установленных равенств $\vec{v}_0{=}\vec{s}$ и $\vec{v}_n{=}\vec{d}$, а также из того факта, что коэффициентным решением интерполяционной задачи $(x_0,x_1\ldots,x_n)\bowtie(1,1,\ldots,1)$ является вектор $(1,0,\ldots,0)$.

```
procedure ATVs(var V : matr; var X : vect; N : integer);
   var I,J : integer;
         M : real;
begin   for I:=0 to N do begin
           V[0,I]:=1;
           for J:=0 to N do
           if I <> J then V[0,I]:=V[0,I]*X[J]/(X[J]-X[I])
        end;
        for I:=1 to N do begin
           M:=1;
           for J:=0 to N do      M:=V[I-1,J]/X[J]+M;
           for J:=0 to N do V[I,J]:=V[I-1,J]/X[J]-M*V[0,J]
        end                                          end;
```

Алгоритм 1. Реализация оператора $ATV|s$ на языке Паскаль.

Пример 6. Компьютерные вычисления с использованием коротких вещественных чисел[9] для задачи интерполирования

$$(-1.0007,\ -0.5,\ 0.5,\ 1.0,\ 1.5,\ 2.0) \bowtie (19.1,\ 4.7,\ 2.3,\ 5.9,\ 11.1,\ 1.7),$$

округленно дают следующее коэффициентное решение:

$$(+2.1026,\ -1.8057,\ +3.9935,\ -1.5782,\ +6.3843,\ -3.1965),$$

при этом $s_0 + \cdots + s_5 \approx 1 - 0.1 \cdot 10^{-6}$ и $|y_0^{[err]}| + \cdots + |y_5^{[err]}| \approx 8.8 \cdot 10^{-6}$. Можно ли считать такие отклонения приемлемыми, в конечном счете зависит от особенностей приложения, в интересах которого решается задача интерполирования.

Отметим, что задачи интерполирования из примеров 2 и 6 отличаются “всего” на 0.0007 в единственном узле интерполирования, однако полученные коэффициентные решения отличаются более радикально:

$$(+0.0026,\ -0.0057,\ -0.0065,\ +0.0218,\ -0.0157,\ +0.0035),$$

Оказывается [3, 6], явления такого рода вполне закономерны, и (в вольном изложении) плохо подготовленные исходные данные приводят к негодным решениям.

9. Заключение

Представленные рассуждения можно рассматривать как элементарное введение в интерполяцию, содержащее точные постановки задач, обоснования и описания решающих операторов. Вместе с тем, материал содержит также “точки роста”, которые в тексте начинаются со слов “Отметим” и которые ориентированы на углубленное изучение интерполяции, включающее в себя вопросы разработки быстрых и устойчивых методов, пригодных для компьютерной реализации.

Литература

[1] Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. - М.: ИД Вильямс, 2005.

[9] чисел с длиной мантиссы 24 бита.

[2] Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. - М.: Физматлит, 2010.

[3] Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа. - М.: ИЦ Академия, 2007.

[4] Тыртышников Е.Е. Основы алгебры. - М.: Физматлит, 2017.

[5] Ульянов М.В. Ресурсно-эффективные компьютерные алгоритмы: разработка и анализ. - М.: Физматлит, 2008.

[6] Beckermann B. The condition number of real Vandermonde, Krylov and positive definite Hankel matrices // Numerische Mathematik. - vol. 85. - No. 4. - 2000. - P. 553-577.

[7] Borodin A. Munro I. The computational complexity of algebraic and numeric problems. - New York-London-Amsterdam: American Elsevier Publishing Company, Inc., 1975.

[8] Traub J.F. Associated polynomials and uniform methods for the solution of linear problems // SIAM Review. - vol. 7. - No. 3. - 1966. - P. 277-301.

[9] Trefethen L.N. - Approximation Theory and Approximation Practice. - Oxford, UK: SIAM, 2013.

Соловьев Сергей Юрьевич,
заведующий кафедрой алгоритмических языков
факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова,
профессор, доктор физ.-мат.наук

E-mail: soloviev@glossary.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2022 год (включая стоимость пересылки) – 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2022 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >