

Константиновский сборник

Проектные работы учащихся школы № 179 г. Москвы
2025–2026 учебного года

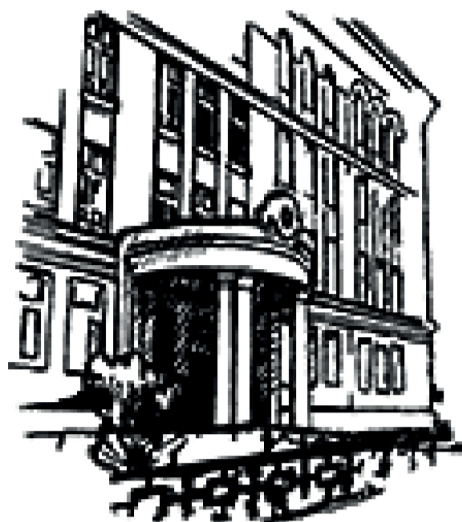
Приложение к журналу «Математическое образование».
Серия «Образование: учебно-методические материалы, история,
персоналии, проблемы»

Выпуск 2 (13), май 2026 г.

Москва, 2026

Константиновский сборник

179



Проектные работы учащихся школы № 179 г. Москвы
2025–2026 учебного года

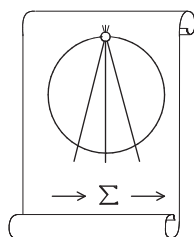
Приложение к журналу «Математическое образование».
Серия «Образование: учебно-методические материалы, история,
персоналии, проблемы»

Выпуск 2 (13), май 2026 г.

Москва, 2026

Приложение к журналу “Математическое образование”

ISSN 1992-6138



Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Редактор серии Комаров С.И.

Ответственные за выпуск Имайкин В.М., Мосолова А.О.

Выпуск 2 (13), 2026 г.

©“Математическое образование”, составление, 2026 г.

В настоящем выпуске приведены проектные работы учащихся школы № 179 г. Москвы (в одном из проектов участвуют также ученики других школ). Проекты выполнены в 2025–26 учебном году.

Адрес электронной почты для материалов: matob@yandex.ru

Подписано в печать 04.05.2026. Объем 4 п.л. Тираж 150 экз. Цена свободная.

Предисловие

О проектной деятельности в школе 179

С. И. Комаров

Проектная деятельность является эффективной формой обучения школьников. В классах инженерного и биологического профилей 179-й школы такая деятельность всегда являлась неотъемлемой частью учебного процесса. В классах математического профиля эта форма обучения возникла на регулярной основе несколько лет назад, хотя Н.Н. Константинов и отдельные учителя пытались вовлекать в проектную деятельность отдельных учеников и ранее.

Приведем несколько положений, на которых строится проектная деятельность:

- темы проектов могут быть предложены как потенциальными научными руководителями, так и самими учениками;
- круг тем проектов может быть максимально широк (не только математика – физика – информатика);
- проекты могут быть исследовательскими, учебно-исследовательскими, инженерными, методическими, и так далее;
- проекты могут быть коллективными или индивидуальными;
- необходимо выполнение двух важных условий: проект должен быть хоть сколько-то содержательным (программа что-то вычисляет, методическое пособие имеет логику и содержит задачи, прибор работает, ...) и проект не должен отнимать все силы ученика и научного руководителя.

В Константиновских сборниках №№ 1 (02), 2019 г. и 1 (08), 2023 г. уже публиковались материалы проектов учащихся школы.

В настоящем сборнике мы продолжаем публикацию таких материалов и представляем различные проекты учеников.

В первом, математическом, материале представлены основы геометрии в аксиоматике Тарского, в виде последовательного набора задач с решениями. Во втором, инженерном, — группа учащихся представила свой проект платформы-тренажера для отработки навыков различных космических исследований. Следующие три проекта психологические — на основании результатов опросов достаточно репрезентативной группы школьников делаются выводы о некоторых психологических подростковых проблемах. В последнем материале, относящемся к современной области — биоинформатике, на основе анализа генома образцов бактерий устанавливается связь между распространением бактерий и морскими течениями.

*Комаров Станислав Игоревич,
заместитель директора
ГБОУ Школа № 179 г. Москвы.*

Константиновский сборник

Приложение к журналу «Математическое образование».
Серия «Образование: учебно-методические материалы, история,
персоналии, проблемы»

Выпуск 2 (13), май 2026 г.

Содержание

Проектные работы учащихся школы № 179 г. Москвы 2025–2026 учебного года

Математика

О.В. Котлярова, М.М. Вербицкая Начала геометрии Тарского. Курс в задачах 1

Инженерия

В.О. Глазунов, М.А. Качай, П.В. Петров, А.Н. Ефимкин. EDUSat 29

Психология

В.А. Резник, У.Д. Кошечкина, Ю.М. Пенькова. Есть ли зависимость между количеством семейных приемов пищи и самооценкой или стрессом? 32

Э.Я. Любимова, А.С. Вишнякова. Исследование «проклятия знания» у подростков 40

Д.М. Озерова, Е.Д. Жигунова. Эмпирическое исследование клипового мышления у подростков 45

Биоинформатика

А.С. Фомина. Изучение связи распространения бактерий с морскими течениями 52

Начала геометрии Тарского

Курс в задачах

Проект Котляровой Ольги, 2024–2026. Руководитель: Вербицкая Мария

Содержание

1	Введение	2
2	Необходимые обозначения	2
2.1	Логические символы	2
2.2	Основные понятия геометрии Тарского	3
3	Упражнения: Как описывать геометрические объекты?	3
4	Аксиомы	4
5	Утверждения	6
5.1	Свойства равенства длин (конгруэнтности)	6
5.2	Свойства отношения «между»	7
5.3	Свойства, связывающие конгруэнтность и отношение «между»	8
5.4	Лучи и прямые	9
5.5	Центральная симметрия	10
5.6	Прямые углы	11
6	Евклидовы аксиомы	12
7	Доказательства основного списка утверждений	14
7.1	Доказательства свойств конгруэнтности	14
7.2	Доказательства свойств отношения «между»	15
7.3	Доказательства свойств, связывающих конгруэнтность и отношение «между»	17
7.4	Доказательства утверждений о лучах и прямых	20
7.5	Доказательства утверждений о центральной симметрии	21
7.6	Доказательства утверждений о прямых углах	25
8	Решения упражнений на описание геометрических объектов	27

1 Введение

Геометрию можно считать началом истинной математики: аксиомы, постулаты, доказательства, теоремы — всё это придумали древние греки, изучая плоскую геометрию. В районе трёхсотого года до нашей эры Евклид в своём многотомном трактате «Начала» опубликовал систему аксиом, из которой аккуратно вывел всё, известное в геометрической науке на тот момент. Евклидова система аксиом оказалась такой удобной, что все предшествующие ей попытки аксиоматизации вышли из употребления полностью, и у нас есть только косвенные свидетельства, что они вообще были — а новых и вовсе не появлялось больше двух тысяч лет. Многие даже сейчас не знают, что евклидова система аксиом — не единственная аксиоматизация, описывающая евклидову плоскость.

В двадцатом веке взгляд математиков на сами основы математики стремительно менялся. На острие этой, можно сказать, революции в метаматематике был Альфред Тарский, логик и философ математики. В 1920-х годах, зарабатывая на жизнь преподаванием геометрии в старшей школе, он сочинил новую аксиоматизацию евклидовой плоскости, которая короче и принципиально проще, чем все известные и до него, и после, до наших дней.

Этот текст опирается на книгу «Metamathematische Methoden in der Geometrie» («Метаматематические методы в геометрии») Альфреда Тарского с учениками (W. Schwabhäuser, W. Szmielew, A. Tarski), изданную в 1983 году. Насколько авторам известно, переводов книги-источника на русский либо даже на английский язык по сей день не существует. Мы предоставляем читателю список аксиом геометрии Тарского и последовательность планиметрических утверждений, адаптированную из книги-источника, а также всё необходимое, чтобы при помощи формальной логики вывести вторые из первых. В конце есть доказательства утверждений и решения задач; читателю рекомендуем посмотреть одно-два доказательства утверждений из первого десятка, прежде чем приступать к выводу собственных доказательств.

2 Необходимые обозначения

2.1 Логические символы

- $\forall$ — «для любого»
- $\exists$ — «существует»
- $\exists!$ — «существует и единственно»
- $\vee$ — «или»
- $\wedge$ — «и»
- $\neg$ — «не»
- $\implies$ — «следовательно»
- $\iff$ — «тогда и только тогда, когда...»
- $\stackrel{\text{def}}{=}$ — «равно по определению»
- $\square$ — «что и требовалось доказать»
- Как обозначить, что одновременно выполняется некоторый список утверждений, которые можно индексировать числами? Например, пусть $P(i)$ обозначает утверждение номер i для каждого натурального i от 1 до n . Нам понадобится следующее обозначение:

$$\bigwedge_{i=1}^n P(i) \iff P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(n)$$

- Под увеличенным символом логического «и» можно описывать и другие методы перечисления утверждений. Например, пусть у нас есть утверждения $Q(i, j, k)$, которые задаются тремя натуральными числами. Тогда

$$\bigwedge_{1 \leq i < j < k \leq n} Q(i, j, k)$$

следует читать как «утверждение $Q(i, j, k)$ верно одновременно для всех троек i, j, k , таких, что $1 \leq i < j < k \leq n$ ».

- Аналогично читается и увеличенное логическое «или».

2.2 Основные понятия геометрии Тарского

Вспомним, что в школьной евклидовой геометрии в качестве неопределяемых объектов есть точки и прямые, точки могут принадлежать прямым или не принадлежать, и это то, что мы изначально умеем о них говорить. Тарский задаёт свою геометрию с точками в качестве единственных неопределяемых объектов. Точки мы будем обозначать маленькими латинскими буквами (курсивом), иногда с индексами: x, a_1 .

Позже нам понадобится говорить про множества точек. Можно представлять их себе как какие-то фигуры на плоскости. Мы будем обозначать их большими латинскими буквами (курсивом), например, A . Здесь не нужно ничего понимать про теорию множеств: достаточно понимать, что A — это некоторый набор точек, про точку a можно сказать $a \in A$ («точка a принадлежит множеству A ») или $a \notin A$ (соответственно, «не принадлежит»), а, имея два множества A и B , можно говорить об их *пересечении* $A \cap B$ — точках, которые принадлежат и A , и B . В частности, будет использоваться не вполне корректная запись вида $A \cap B = x$, её нужно интерпретировать как «пересечение множеств A и B состоит из единственной точки x ». Все множества, которые мы будем обсуждать, задаются некоторыми утверждениями о точках в них; можно считать, что $a \in A$ — сокращённая запись для «точка a удовлетворяет утверждению $P(a)$ » (каждому множеству A соответствует своё утверждение P).

Что в геометрии Тарского можно говорить об этих неопределяемых объектах? Имеется стандартный предикат равенства: $a = b$ нужно читать как «точки a и b совпадают». Есть ещё два предиката: $B(abc)$ (буква B от английского слова *between* — между) нужно понимать как утверждение о том, что точка b находится между точками a и c на отрезке ac , а $ab \equiv cd$ — что отрезки ab и cd имеют одинаковую длину (конгруэнтны). Понятие длины отрезка как числа в геометрии Тарского отсутствует, всё это — комментарии о том, что нужно себе представлять, читая эти утверждения; их базовые свойства будут частично даны в аксиомах, частично подлежать доказательству.

Под равенством точек « $=$ » Тарский, как и современные логики, понимал некоторое *отношение эквивалентности*. Это значит, что с самого начала, ещё до аксиом, из-за того, что он использовал именно этот символ, мы знаем, что $a = a$ (*рефлексивность*), $a = b \iff b = a$ (*симметричность*) и $a = b \wedge b = c \implies a = c$ (*транзитивность*).

Отношение (двоичный предикат) с таким свойством порождает *классы эквивалентности*, которые можно представлять как подмножества, внутри которых все элементы эквивалентны, а элементы из разных подмножеств неэквивалентны. В случае равенства точек в одном классе эквивалентности один элемент — точка, но в общем случае это не всегда так.

Определение 1. Под отрезком мы подразумеваем неупорядоченную пару точек a, b , которую мы можем обозначить как ab или ba . Отрезки вида aa мы называем нулевыми отрезками.

3 Упражнения: Как описывать геометрические объекты?

Предположим, что мы уже знаем все евклидовы аксиомы и сколько угодно из школьной планиметрии, но записывать что-то умеем только про точки и только с помощью предикатов равенства, $B(\dots)$ и $\equiv$ и логических символов. Например, утверждение « m — середина отрезка ab » можно записать так: $ma \equiv mb \wedge B(amb)$. Запишите в этих ограничениях следующие утверждения:

Задача 1. треугольник abc равносторонний;

Задача 2. треугольник abc равнобедренный;

Задача 3. точки a, b, c лежат на одной прямой;

Задача 4. длина отрезка ab не меньше длины отрезка cd ;

Задача 5. длина отрезка ab больше длины отрезка cd ;

Задача 6. прямые ab, cd параллельны;

Задача 7. прямые ab, cd перпендикулярны;

Задача 8. угол $\angle abc$ равен 60° ;

Задача 9. углы $\angle abc$ и $\angle def$ равны;

Задача 10. * A (множество точек) является выпуклой фигурой. Для этой задачи понадобится ещё один символ: $\in$ — «принадлежит множеству».

Задача 11. * Как написать «угол $\angle abc$ равен $\frac{360^\circ}{n}$ » для произвольного натурального n ?

4 Аксиомы

- A1: $\forall a, b : ab \equiv ba$ (можно говорить о «длине» как о свойстве отрезка, т.е. неупорядоченной пары точек)
- A2: $\forall a, b, p, q, r, s : ab \equiv pq \wedge ab \equiv rs \implies pq \equiv rs$ (транзитивность конгруэнтности как отношения отрезков)
- A3: $\forall a, b, c : ab \equiv cc \implies a = b$ (отрезок, равный по длине нулевому отрезку — нулевой отрезок)
- A4: $\forall q, a, b, c \exists x (B(qax) \wedge ax \equiv bc)$ (можно понимать как аналог евклидовой аксиомы об откладывании отрезка)

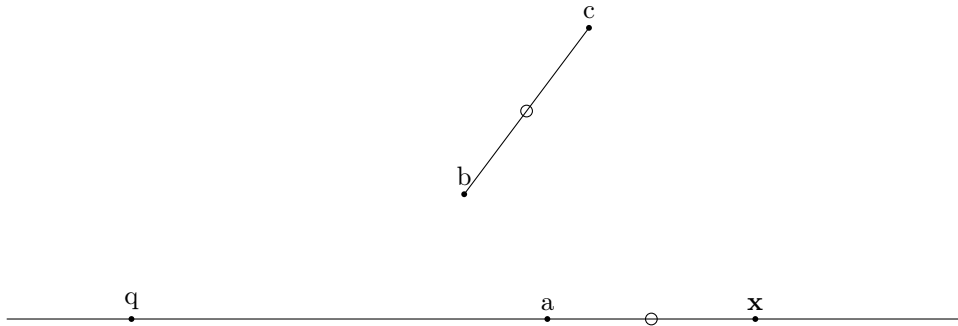


Рис. 1: откладывание отрезка

- A5: $\forall a, b, c, d, a', b', c', d' : a \neq b \wedge B(abc) \wedge B(a'b'c') \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ad \equiv a'd' \wedge bd \equiv b'd' \implies cd \equiv c'd'$ (аксиома о пяти отрезках)

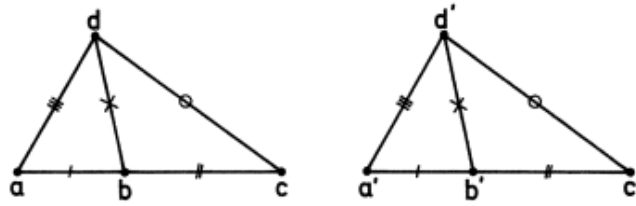


Рис. 2: аксиома о пяти отрезках

- A6: $\forall a, b : B(aba) \implies a = b$ («на нулевом отрезке» нет других точек)
- A7: $\forall a, b, c, p, q : B(apc) \wedge B(bqc) \implies \exists x (B(pxb) \wedge B(qxa))$ (аксиома Паша во внутренней форме)

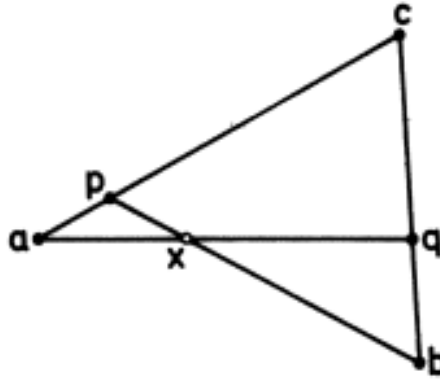


Рис. 3: аксиома Паша во внутренней форме

- A8: $\exists a, b, c (\neg B(abc) \wedge \neg B(bca) \wedge \neg B(cab))$ (ограничение снизу на размерность: существуют три точки, не находящиеся на одной прямой)
- A9: $\forall a, b, c, p, q : p \neq q \wedge ap \equiv aq \wedge bp \equiv bq \wedge cp \equiv cq \implies B(abc) \vee B(bca) \vee B(cab)$ (ограничение сверху на размерность: геометрическое место точек, находящихся на равных расстояниях от точек p и q, является прямой)
- A10: $\forall a, b, c, d, t : B(adt) \wedge B(bdc) \wedge a \neq d \implies \exists x, y (B(afx) \wedge B(acy) \wedge B(xty))$ (аксиома Евклида)

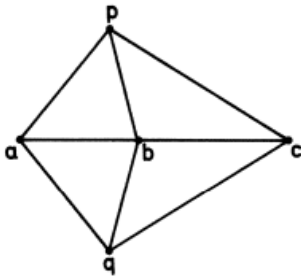


Рис. 4: ограничение сверху на размерность

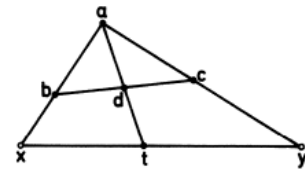


Рис. 5: аксиома Евклида

- A11: $\forall X, Y \exists a \forall x, y [x \in X \wedge y \in Y \implies B(axy)] \implies \exists b \forall x, y [x \in X \wedge y \in Y \implies B(xby)]$ (аксиома полноты: если два множества лежат на одной прямой, причём одно лежит «слева» от другого, то между ними будет лежать точка, разделяющая эти 2 множества)

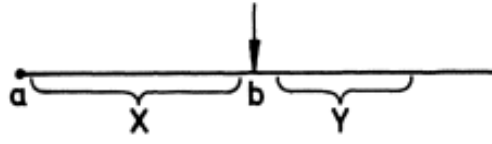


Рис. 6: аксиома полноты

5 Утверждения

В большинстве утверждений подразумевается «для любого» для всех точек, про которые не сказано «существует». Например, под $ab \equiv ab$ подразумевается $\forall a \forall b : ab \equiv ab$.

5.1 Свойства равенства длин (конгруэнтности)

Утверждение 1. $ab \equiv ab$ (рефлексивность конгруэнтности как отношения отрезков: каждый отрезок равен сам себе)

Утверждение 2. $ab \equiv cd \implies cd \equiv ab$ (симметричность конгруэнтности как отношения отрезков)

Утверждение 3. $ab \equiv cd \wedge cd \equiv ef \implies ab \equiv ef$ (транзитивность конгруэнтности как отношения отрезков, альтернативная форма)

Утверждение 4. $ab \equiv cd \implies ba \equiv cd$

Утверждение 5. $ab \equiv cd \implies ab \equiv dc$

Утверждение 6. $aa \equiv bb$ (равенство нулевых отрезков)

Замечание: таким образом, конгруэнтность является отношением эквивалентности, и множество отрезков распадается на классы эквивалентности. Под «длиной отрезка» логичнее всего понимать класс эквивалентности, к которому он принадлежит. Класс нулевых отрезков мы выделяем.

Определение 2. Точки $a, b, c, d, a', b', c', d'$ составляют внешнюю конфигурацию пяти отрезков, если $B(abc) \wedge B(a'b'c') \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ad \equiv a'd' \wedge bd \equiv b'd'$. Обозначим это так:

$$\text{AFS} \left(\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array} \right)$$

Тогда пятую аксиому можно выразить таким способом:

$$\text{A5: } \text{AFS} \left(\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array} \right) \wedge a \neq b \implies cd \equiv c'd'$$

Утверждение 7. $B(abc) \wedge B(a'b'c') \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \implies ac \equiv a'c'$ (сложение отрезков: если точка b между a и c , то отрезок ac складывается из отрезков ab и bc , и отрезок, сложенный из равных им, равен ac)

Утверждение 8. $q \neq a \implies \exists! x [B(qax) \wedge ax \equiv bc]$ (единственность откладывания отрезка)

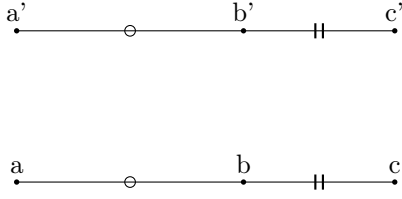


Рис. 7: сложение отрезков

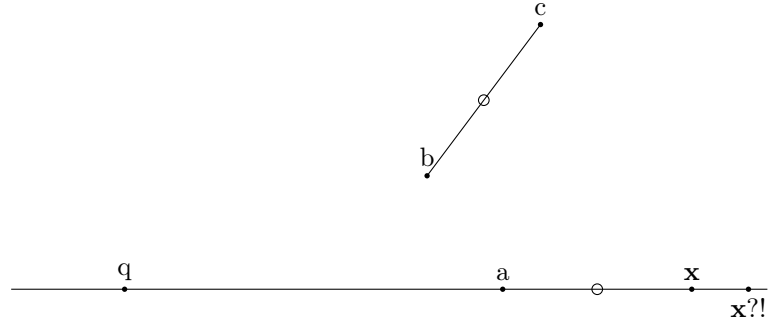


Рис. 8: единственность откладывания отрезка

5.2 Свойства отношения «между»

Утверждение 9. $B(abb)$

Утверждение 10. $B(abc) \implies B(cba)$ (симметрия)

Утверждение 11. $B(aab)$

Утверждение 12. $B(abc) \wedge B(bac) \implies a = b$

Утверждение 13. $B(abd) \wedge B(bcd) \implies B(abc)$

Утверждение 14. $B(abc) \wedge B(acd) \implies B(bcd)$

Утверждение 15. $B(abc) \wedge B(bcd) \wedge b \neq c \implies B(acd)$

Утверждение 16. $B(abd) \wedge B(bcd) \implies B(acd)$

Утверждение 17. $B(abc) \wedge B(acd) \implies B(abd)$

Утверждение 18. $B(abc) \wedge B(bcd) \wedge b \neq c \implies B(abd)$

Определение 3. Пусть n — натуральное число, большее трёх. Мы говорим, что точки $a_1, a_2, \dots, a_n$ находятся на одной прямой в этом порядке (обозначаем $B_n(a_1 a_2 \dots a_n)$), если

$$\bigwedge_{1 \leq i < j < k \leq n} B(a_i a_j a_k)$$

Утверждение 19. $B_n(a_1 a_2 \dots a_n) \implies B_n(a_n a_{n-1} \dots a_1)$

Утверждение 20. Если $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_s \leq n$, то $B_n(a_1 \dots a_n) \implies B_s(a_{l_1} a_{l_2} \dots a_{l_s})$

Утверждение 21. $\forall l < n \wedge l \geq 1 : B_n(a_1 \dots a_n) \wedge B(a_l p a_{l+1}) \implies B_{n+1}(a_1 \dots a_l p a_{l+1} \dots a_n)$

Утверждение 22. $\forall l < n \wedge l \geq 1 : B(a_1 \dots a_n) \wedge B(a_l a_n p) \implies B_{n-l+2}(a_1 \dots a_n p) \wedge [a_l \neq a_n \implies B_{n+1}(a_1 \dots a_n p)]$

Утверждение 23. $\exists a, b [a \neq b]$ (существуют как минимум две различные точки)

Утверждение 24. $\exists c [B(abc) \wedge b \neq c]$

Утверждение 25. $B(abc) \wedge B(a'b'c) \wedge B(ap a') \implies \exists q [B(pqc) \wedge B(bqb')]$

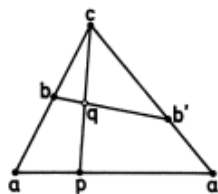


Рис. 9: Утв. 25

5.3 Свойства, связывающие конгруэнтность и отношение «между»

Определение 4. Точки $a, b, c, d, a', b', c', d'$ составляют внутреннюю конфигурацию пяти отрезков, если $B(abc) \wedge B(a'b'c') \wedge ac \equiv a'c' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ad \equiv a'd' \wedge cd \equiv c'd'$. Обозначим это так:

$$\text{IFS} \left(\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array} \right)$$

Утверждение 26.

$$\text{IFS} \left(\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array} \right) \implies bd \equiv b'd'$$

Утверждение 27. $B(abc) \wedge B(a'b'c') \wedge ac \equiv a'c' \wedge bc \equiv b'c' \implies ab \equiv a'b'$ (вычитание отрезков)

Определение 5. Последовательности точек $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ конгруэнтны, если отрезки, составленные из этих точек, соответственно попарно конгруэнтны, т.е. для всякой пары чисел i, j , где $1 \leq i < j \leq n$, выполняется $a_i a_j \equiv b_i b_j$.

Обозначим конгруэнтность последовательностей как $(a_1 \dots a_n) \equiv (b_1 \dots b_n)$. Тогда альтернативная запись определения выше может выглядеть так:

$$(a_1 \dots a_n) \equiv (b_1 \dots b_n) \iff \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \equiv b_i b_j$$

Утверждение 28. $B(abc) \wedge ac \equiv a'c' \implies \exists b'[B(a'b'c') \wedge (abc) \equiv (a'b'c')]$

Утверждение 29. $B(abc) \wedge (abc) \equiv (a'b'c') \implies B(a'b'c')$

Определение 6. Точки a, b, c называются коллинеарными, если одна из них находится между двумя другими.

Обозначим утверждение «точки a, b, c коллинеарны» как $\text{Col}(abc)$. Тогда определение выше эквивалентно записывается так:

$$\text{Col}(abc) \iff B(abc) \vee B(bca) \vee B(cab)$$

Утверждение 30. $\text{Col}(abc) \implies \text{Col}(bca) \wedge \text{Col}(cab) \wedge \text{Col}(cba) \wedge \text{Col}(bac) \wedge \text{Col}(acb)$

Утверждение 31. $\text{Col}(aab)$

Утверждение 32. $\text{Col}(abc) \wedge (abc) \equiv (a'b'c') \implies \text{Col}(a'b'c')$

Утверждение 33. $\text{Col}(abc) \wedge ab \equiv a'b' \implies \exists c'(abc) \equiv (a'b'c')$

Определение 7. Точки $a, b, c, d, a', b', c', d'$ составляют конфигурацию пяти отрезков, если $\text{Col}(abc) \wedge (abc) \equiv (a'b'c') \wedge ad \equiv a'd' \wedge bd \equiv b'd'$. Обозначим это так:

$$\text{FS} \left(\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array} \right)$$

Легко заметить, что конфигурация пяти отрезков может быть либо внутренней, либо внешней, т.е.

$$\text{FS} \left(\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array} \right) \iff \text{AFS} \left(\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array} \right) \vee \text{IFS} \left(\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array} \right)$$

эквивалентно определению выше.

Утверждение 34.

$$\text{FS} \left(\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array} \right) \wedge a \neq b \implies cd \equiv c'd'$$

Утверждение 35. $a \neq b \wedge \text{Col}(abc) \wedge ap \equiv aq \wedge bp \equiv bq \implies cp \equiv cq$

Утверждение 36. $a \neq b \wedge \text{Col}(abc) \wedge ac \equiv ac' \wedge bc \equiv bc' \implies c = c'$

Утверждение 37. $B(acb) \wedge ac \equiv ac' \wedge bc \equiv bc' \implies c = c'$

Утверждение 38. $a \neq b \wedge B(abc) \wedge B(abd) \implies B(acd) \vee B(adc)$

Утверждение 39. $a \neq b \wedge B(abc) \wedge B(abd) \implies B(bcd) \vee B(bdc)$

Утверждение 40. $B(abd) \wedge B(acd) \implies B(abc) \vee B(acb)$

Определение 8. Отрезок ab не больше по длине («не длиннее») отрезка cd , если $\exists y[B(cyd) \wedge ab \equiv cy]$. Обозначим это как $ab \leq cd$. Соответственно, в другом порядке применяется обозначение $\geq$: $cd \geq ab \iff ab \leq cd$.

Утверждение 41. $ab \leq cd \iff \exists x[B(abc) \wedge ax \equiv cd]$

Утверждение 42. $ab \leq cd \wedge ab \equiv a'b' \wedge cd \equiv c'd' \implies a'b' \leq c'd'$

Утверждение 43. $ab \leq ab$ (рефлексивность)

Утверждение 44. $ab \leq cd \wedge cd \leq ef \implies ab \leq ef$ (транзитивность)

Утверждение 45. $ab \leq cd \wedge cd \leq ab \implies ab \equiv cd$ (антисимметричность)

Утверждение 46. $ab \leq cd \vee cd \leq ab$

Отношение, которое рефлексивно, транзитивно и антисимметрично, называется отношением частичного порядка. Если по этому отношению ещё и можно «сравнить» любые два объекта данного множества, как в утв. 46, то такое отношение называется отношением линейного порядка. Мы доказали, что отношение $\leq$ на длинах отрезков — отношение линейного порядка.

Утверждение 47. $aa \leq cd$

Утверждение 48. $\text{Col}(abc) \implies [B(abc) \iff ab \leq ac \wedge bc \leq ac]$

Определение 9. Отрезок ab меньше по длине («короче») отрезка cd , если он «не длиннее» отрезка cd и не конгруэнтен ему. Обозначим как $ab < cd$. Эквивалентная запись: $ab < cd \iff ab \leq cd \wedge \neg ab \equiv cd$. Соответственно, в другом порядке применяется обозначение $>$: $cd > ab \iff ab < cd$.

5.4 Лучи и прямые

Определение 10. Точки a и b находятся на одном луче с началом в точке p , если $a \neq p \wedge b \neq p \wedge [B(pab) \vee B(pba)]$. Обозначим как $a \underset{p}{\approx} b$.

Утверждение 49. $a \neq p \wedge b \neq p \wedge c \neq p \wedge B(abc) \implies [B(bpc) \iff a \underset{p}{\approx} b]$

Утверждение 50. $a \underset{p}{\approx} b \iff a \neq p \wedge b \neq p \wedge \exists c[c \neq p \wedge B(abc) \wedge B(bpc)]$

Утверждение 51. $a \underset{p}{\approx} b \iff \text{Col}(apb) \wedge \neg B(apb)$

Утверждение 52. $a \neq p \implies a \underset{p}{\approx} a$ (рефлексивность)

Утверждение 53. $a \underset{p}{\approx} b \implies b \underset{p}{\approx} a$ (симметричность)

Утверждение 54. $a \underset{p}{\approx} b \wedge b \underset{p}{\approx} c \implies a \underset{p}{\approx} c$ (транзитивность)

Определение 11. 1) Пусть даны точки $p \neq a$. Определим множество $H(pa)$ — луч с началом в точке p , проходящий через точку a :

$$H(pa) := \{x | x \underset{p}{\approx} a\}$$

2) Множество точек K является лучом (обозначение: $Hl K$), если $\exists p \exists a[a \neq p \wedge K = H(pa)]$.

Утверждение 55. $r \neq a \wedge b \neq c \implies \exists!x[x \underset{a}{\approx} r \wedge ax \equiv bc]$

Утверждение 56. $a \underset{p}{\approx} b \implies [pa \leq pb \iff B(pab)]$

Определение 12. 1) Пусть даны точки $p \neq q$. Определим множество $L(pq)$ — прямую, проходящую через p и q :

$$L(pq) := \{x \mid \text{Col}(pqx)\}$$

2) Множество точек A является прямой (обозначение: $\text{Ln } A$), если $\exists p \exists q[p \neq q \wedge A = L(pq)]$.

Утверждение 57. $p \neq q \wedge p \neq r \wedge B(qpr) \implies L(pq) = (H(pq) \cup p \cup H(pr))$

Утверждение 58. $\text{Col}(abc) \wedge \text{Col}(bcd) \wedge b \neq c \implies \text{Col}(abd)$

Утверждение 59. $p \neq q \wedge s \neq p \wedge s \in L(pq) \implies L(pq) = L(ps)$

Утверждение 60. $p \neq q \implies p \in L(pq) \wedge q \in L(pq) \wedge L(pq) = L(qp)$

Утверждение 61. $\text{Ln } A \wedge a \neq b \wedge a \in A \wedge b \in A \implies A = L(ab)$

Утверждение 62. $a \neq b \implies \exists!A[\text{Ln } A \wedge a \in A \wedge b \in A]$

Утверждение 63. $\text{Ln } A \wedge \text{Ln } B \wedge A \neq B \implies \exists!x[x \in A \wedge x \in B]$

Определение 13. $A \cap B = x : \iff \text{Ln } A \wedge \text{Ln } B \wedge A \neq B \wedge x \in A \wedge x \in B$

Утверждение 64. $\text{Col}(abc) \iff \exists A[\text{Ln } A \wedge a \in A \wedge b \in A \wedge c \in A]$

Утверждение 65. $\exists a, b, c : \neg \text{Col}(abc)$

Утверждение 66. $\forall a, b[a \neq b \implies \exists c : \neg \text{Col}(abc)]$

Определение 14. Можно говорить о коллинеарности набора из n точек для любого натурального n . Обозначим так же, как коллинеарность трёх точек, и будем говорить, что это значит, что существует прямая, на которой все эти точки лежат:

$$\text{Col}(a_1 \dots a_n) : \iff \exists A[\text{Ln } A \wedge \bigwedge_{i=1}^n a_i \in A]$$

5.5 Центральная симметрия

Определение 15. Точка m является серединой отрезка ab (обозначение: $M(amb)$), если $B(amb) \wedge ma \equiv mb$.

Утверждение 67. $M(amb) \implies M(bma)$

Утверждение 68. $M(ama) \iff m = a$

Утверждение 69. $\forall p \exists!p' : M(pap')$

Определение 16. Отражение точки p относительно a (обозначение: $S_a(p)$) — такая точка p' , что $M(pap')$.

Утверждение 70. $S_a(S_a(p)) = p$

Утверждение 71. $\forall p' \exists!p : S_a(p) = p'$ (существование и единственность отражения)

Утверждение 72. $S_a(p) = S_a(q) \implies p = q$

Утверждение 73. $S_a(p) = p \iff p = a$

Замечание: таким образом, S_a — инволюция, то есть отображение, повторное применение которого приводит к тождественному отображению. Отображение это по Утв. 6.71 : каждой точке p сопоставляется ровно одна $S_a(p)$; по Утв. 6.72 если двум точкам p и q сопоставляется одна и та же точка $S_a(p) = S_a(q)$, то $p = q$ — такое отображение называется взаимно-однозначным, или биекцией; а по Утв. 6.70 $S_a(S_a(p)) = p$, значит, это отображение — инволюция.

Утверждение 74. $pq \equiv S_a(p)S_a(q)$

Утверждение 75. $B(pqr) \iff B(S_a(p)S_a(q)S_a(r))$

Утверждение 76. $pq \equiv rs \iff S_a(p)S_a(q) \equiv S_a(r)S_a(s)$

Утверждение 77. $M(pap') \wedge M(pbp') \implies a = b$

Утверждение 78. $S_a(p) = S_b(p) \implies a = b$

Утверждение 79. $S_a(S_b(p)) = S_b(S_a(p)) \iff a = b$

Утверждение 80. $\text{Col}(amb) \wedge ma \equiv mb \implies a = b \vee M(amb)$

Утверждение 81. $\neg \text{Col}(abc) \wedge b \neq d \wedge ab \equiv cd \wedge bc \equiv da \wedge \text{Col}(apc) \wedge \text{Col}(bpd) \implies M(apc) \wedge M(bpd)$

Утверждение 82. $B(a_1ca_2) \wedge B(b_1cb_2) \wedge ca_1 \equiv cb_1 \wedge ca_2 \equiv cb_2 \wedge M(a_1m_1b_1) \wedge M(a_2m_2b_2) \implies B(m_1cm_2)$

Определение 17. Точки $a_1, m_1, b_1, c, b_2, m_2, a_2$ лежат в конфигурации колыбели, если они лежат точно так же, как в условии Утв. 6.82.

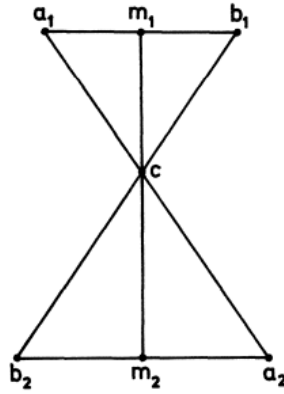


Рис. 10: Опр. 17

Утверждение 83. $ca \equiv cb \implies \exists x : M(axb)$

5.6 Прямые углы

Определение 18. Скажем, что три точки a, b, c образуют прямой угол ($\perp(abc)$), если $ac \equiv aS_b(c)$.

Замечание: в случае совпадения точки a или точки c с точкой b эти 3 точки не образуют угол в привычном понимании, но подходят под определение 18.

Утверждение 84. $\perp(abc) \implies \perp(cba)$

Утверждение 85. $\perp(abc) \wedge a \neq b \wedge \text{Col}(baa') \implies \perp(a'bc)$

Утверждение 86. $\perp(abc) \implies \perp(abS_b(c))$

Утверждение 87. $\perp(abb)$

Утверждение 88. $\perp(abc) \wedge \perp(a'bc) \wedge B(aca') \implies b = c$

Утверждение 89. $\perp(abc) \wedge \perp(acb) \implies b = c$

Утверждение 90. $\perp(aba) \implies a = b$

Утверждение 91. $\perp(abc) \wedge \text{Col}(abc) \implies a = b \vee c = b$

Утверждение 92. $\perp(abc) \wedge (abc) \equiv (a'b'c') \implies \perp(a'b'c')$

Определение 19. 1) Прямые A и A' пересекаются под прямым углом в точке x ($A \perp_x A'$), если $\text{Ln } A \wedge \text{Ln } A' \wedge x \in A \wedge x \in A' \wedge \forall u \forall v [u \in A \wedge v \in A' \implies \perp(uxv)]$. (Точнее, здесь записано определение для «множества A и A' — прямые, пересекающиеся под прямым углом в точке x ».)

2) Прямые A и A' перпендикулярны ($A \perp A'$), если $\exists x : A \perp_x A'$

3) Для простоты записи мы можем заменять в обозначениях выше прямые на ненулевые отрезки (пары не равных друг другу точек) и понимать под этим прямые, заданные этими двумя точками:

$$A \perp_x cd \iff c \neq d \wedge A \perp_x L(cd),$$

$$ab \perp_x cd \iff a \neq b \wedge c \neq d \wedge L(ab) \perp_x L(cd).$$

Утверждение 93. $A \perp_x A' \iff A' \perp_x A$

Утверждение 94. $A \perp_x A' \iff \text{Ln } A \wedge \text{Ln } A' \wedge x \in A \wedge x \in A' \wedge \exists u \exists v : [u \in A \wedge v \in A' \wedge u \neq x \wedge v \neq x \wedge \perp(uxv)]$

Утверждение 95. 1) $A \perp A' \implies A \neq A'$

$$2) A \perp_x A' \iff A \perp A' \wedge A \cap A' = x$$

$$3) \exists! x : A \perp_x A'$$

Утверждение 96. $a \neq b \wedge \text{Col}(abx) \implies [ab \perp cx \iff ab \perp_x cx]$

Утверждение 97. $a \neq b \wedge \text{Col}(abx) \wedge \text{Col}(abu) \wedge u \neq x \implies [ab \perp cx \iff \neg \text{Col}(abc) \wedge \perp(cxu)]$

Утверждение 98. $\neg \text{Col}(abc) \implies \exists! x : [\text{Col}(abx) \wedge ab \perp cx]$

Утверждение 99. $\perp(abc) \wedge M(S_a(c)pS_b(c)) \implies \perp(bap) \wedge [b \neq c \implies a \neq p]$

Утверждение 100. $a \neq b \implies \exists p \exists t [ab \perp pa \wedge \text{Col}(abt) \wedge B(ctp)]$

Утверждение 101. $\forall a \forall b \exists! x : M(axb)$

6 Евклидовы аксиомы

В геометрии Альфреда Тарского доказывается ряд планиметрических аксиом Евклида. Но не все аксиомы имеют доказательства, некоторые у Тарского представляются в виде аксиом или даже определений. Ниже представлены некоторые аксиомы евклидовой геометрии (в стандартной аксиоматике Гильберта), их переформулировки и там, где необходимо, доказательства в теории Тарского.

1 аксиома принадлежности:

Гильберт: Каковы бы ни были две точки a и a , существует прямая A , которой принадлежат эти точки.

Переформулировка: $\forall a, b \exists A : \text{Ln } A \wedge a, b \in A$

Доказательство: следует из определения прямой (Опр. 12). $\square$

2 аксиома принадлежности:

Гильберт: Каковы бы ни были две различные точки a и b , существует не более одной прямой, которой принадлежат эти точки.

Переформулировка: $\forall a, b : a \neq b \implies \exists! A : \text{Ln } A \wedge a, b \in A$

Доказательство: Утв. 62. $\square$

3 аксиома принадлежности:

Гильберт: Каждой прямой A принадлежат по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой.

Переформулировка: $[\forall A : \text{Ln } A \implies \exists a, b : a \neq b \wedge a, b \in A] \wedge [\exists a, b, c : \neg \text{Col}(a, b, c)]$

Доказательство: первая часть следует из определения прямой (Опр. 12), вторая — Утв. 65. $\square$

1 аксиома порядка:

Гильберт: Если точка b прямой A лежит между точками a и c той же прямой, то a , b и c — различные точки указанной прямой, причём b лежит также и между c и a .

Замечание: Понятие «между» у Гильберта не эквивалентно понятию «между» ($B(abc)$) у Тарского, как видно из этой аксиомы — у Гильберта одна точка может быть между двумя другими только если все три точки различны.

Переформулировка: $B(abc) \implies B(cba)$ или, строже: $B(abc) \wedge a \neq b \wedge b \neq c \implies B(cba) \wedge a \neq b \wedge b \neq c$

Доказательство: Утв. 10. $\square$

2 аксиома порядка:

Гильберт: Каковы бы ни были две различные точки a и c , на определяемой ими прямой существует по крайней мере одна точка b такая, что b лежит между a и c , и по крайней мере одна точка d , такая, что c лежит между a и d .

Переформулировка: $\forall a, c : a \neq c \implies \exists b, d : a \neq b \wedge b \neq c \wedge c \neq d \wedge B(abc) \wedge B(acd)$

Доказательство: существование точки b следует, например, из Утв. 101, а точку d можно построить по А4: $\exists d(B(acd) \wedge cd \equiv ac)$. $\square$

3 аксиома порядка:

Гильберт: Среди любых трёх точек, лежащих на одной прямой, всегда одна и только одна точка лежит между двумя другими.

Замечание: эта аксиома в терминах Тарского состоит из определения понятия «три точки лежат на одной прямой» (Опр. 6) и дополнительного утверждения о единственности («одна и только одна точка»), которое верно только потому, что у Гильберта это различные три точки.

Переформулировка: $\forall a, b, c : \text{Col}(abc) \wedge a \neq b \wedge a \neq c \wedge b \neq c \implies [B(abc) \wedge \neg B(acb) \wedge \neg B(bac)] \vee [B(acb) \wedge \neg B(abc) \wedge \neg B(bac)] \vee [B(bac) \wedge \neg B(acb) \wedge \neg B(abc)]$ или, эквивалентно: $\forall a, b, c : [\text{Col}(abc) \implies B(abc) \vee B(acb) \vee B(bac)] \wedge [B(abc) \wedge B(bac) \implies a = b]$

Доказательство: как уже указано, первая часть — это просто Опр. 6; вторая же часть — Утв. 12. $\square$

1 аксиома конгруэнтности:

Гильберт: Если a и b — две точки, лежащие на прямой A , a' — точка на той же прямой или на другой прямой A' , то по данную от точки a' сторону прямой A' найдётся, и притом только одна, точка b' такая, что отрезок $a'b'$ конгруэнтен отрезку ab . Каждый отрезок ab конгруэнтен отрезку ba .

Переформулировка: $\forall a, b : [\forall A : \text{Ln } A' \implies \forall a', x \in A' : \exists! b' : ab \equiv a'b' \wedge b' \approx_a x] \wedge [ab \equiv ba]$

Доказательство: первая часть — единственность откладывания отрезка, ближе всего в этой формулировке к Утв. 55; вторая — А1. $\square$

2 аксиома конгруэнтности:

Гильберт: Если отрезки $a'b'$ и $a''b''$ конгруэнтны одному и тому же отрезку ab , то они конгруэнтны и между собой.

Переформулировка: $ab \equiv a'b' \wedge ab \equiv a''b'' \implies a'b' \equiv a''b''$

Доказательство: Утв. 3. $\square$

3 аксиома конгруэнтности:

Гильберт: Пусть ab и bc — два отрезка прямой A , не имеющие общих внутренних точек, $a'b'$ и $b'c'$ — два отрезка той же прямой, или другой прямой A' , также не имеющие общих внутренних точек. Тогда если отрезок ab конгруэнтен отрезку $a'b'$, а отрезок bc конгруэнтен отрезку $b'c'$, то отрезок ac конгруэнтен отрезку $a'c'$.

Переформулировка: $B(abc) \wedge B(a'b'c') \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \implies ac \equiv a'c'$

Доказательство: Утв. 7. $\square$

7 Доказательства основного списка утверждений

7.1 Доказательства свойств конгруэнтности

Утверждение 1. По А1 имеем $ab \equiv ba$ и $ba \equiv ab$. Подставив это в А2, получаем: $ba \equiv ab \wedge ba \equiv ab \implies ab \equiv ab$.

Утверждение 2. В А2 ($ab \equiv pq \wedge ab \equiv rs \implies pq \equiv rs$) подставим ab и cd таким образом, что получим $ab \equiv cd \wedge ab \equiv ab \implies cd \equiv ab$.

Утверждение 3. Следует из А2 и Утв. 2.

Утверждение 4. По А1 имеем $ab \equiv ba$. Подставим в А2 и получим $ab \equiv ba \wedge ab \equiv cd \implies ba \equiv cd$.

Утверждение 5. По А1 имеем $cd \equiv dc$. Подставим в А2 и получим $cd \equiv dc \wedge cd \equiv ab \implies ab \equiv dc$

Утверждение 6. По А4 возьмём точку x и получим $B(bax) \wedge ax \equiv bb$. Далее по А3 получим $ax \equiv bb \implies a = x$, следовательно, $aa \equiv bb$.

Утверждение 7. Начнём через AFS:

$$\text{AFS} \left(\begin{array}{cccc} a & b & c & a \\ a' & b' & c' & a' \end{array} \right)$$

Далее если $a \neq b$, то тогда дальнейшее доказательство идёт через А5, иначе через А3 ($ab \equiv a'b' \wedge a = b \implies a' = b'$, и тогда $ac \equiv a'c'$ — то же самое, что $bc \equiv b'c'$).

Утверждение 8. Пусть у нас есть две точки x и x' , удовлетворяющие данному условию, тогда Утв. 1 получим $ax \equiv ax'$. Далее по предыдущему утверждению можем получить $qx \equiv qx'$ ($B(qax) \wedge B(qax') \wedge qa \equiv qa \wedge ax \equiv ax' \implies qx \equiv qx'$). Тогда по Опр. 2

$$\text{AFS} \left(\begin{array}{cccc} q & a & x & x' \\ q & a & x & x' \end{array} \right) \wedge q \neq a \implies xx \equiv xx'$$

По 3 аксиоме $xx \equiv xx' \implies x = x'$

7.2 Доказательства свойств отношения «между»

Утверждение 9. Согласно А4 отложим точку x такую, что $B(afx) \wedge bx \equiv bb$. Тогда по А3 получим $x = b$. Следовательно, $B(abb)$.

Утверждение 10. По А7 используя $B(abc)$ и $B(bcc)$, получим точку x такую, что $B(bxb) \wedge B(cxa)$. Тогда по А6 $B(bxb) \implies x = b$, следовательно, получим $B(cba)$.

Утверждение 11. Следует из двух предыдущих утверждений.

Утверждение 12. По А7 получим $B(axa) \wedge B(bxb)$. Далее по А6 $a = x \wedge b = x$

Утверждение 13. По А7 получим $B(bxb) \wedge B(afc)$. По А6 $x = b$, следовательно, $B(abc)$.

Утверждение 14. С использованием Утв. 10 «переворачиваем» условие: переименуем точки a, b, c, d по порядку в d, c, b, a и получим $B(dcb) \wedge B(dba)$, что по утв. 10 то же самое, что $B(abd) \wedge B(bcd)$, что по Утв. 13 даёт нам $B(abc)$, из чего, если переименовать точки обратно, по утв. 10 получим $B(bcd)$.

Утверждение 15. По А4 получим $B(afx) \wedge cx \equiv cd$. Далее по Утв. 14 получим $B(abc) \wedge B(afx) \implies B(bcx)$. По Утв. 6 $B(bcx) \wedge cx \equiv cd \implies x = d$. И тогда мы получим $B(acd)$.

Утверждение 16. Если у нас совпадают точки b и c , тогда $B(abd)$ — то же самое, что $B(acd)$. В противном случае доказательство идёт через Утв. 13 и Утв. 15

Утверждение 17. Аналогично доказательству Утв. 14, «перевернём» условие Утв. 16 с применением Утв. 10 и получим ровно то, что нам надо.

Утверждение 18. Следует из Утв. 15, если «перевернуть» условие с помощью Утв. 10 как в предыдущих доказательствах.

Утверждение 19. Следует из Опр. 3 и Утв. 10.

Утверждение 20.

$$\forall n \geq 3 : B_n(a_1 a_2 \dots a_n) : \iff \bigwedge_{1 \leq i < j < k \leq n} B(a_i a_j a_k), \text{ в частности, } \bigwedge_{1 \leq i < j < k \leq s} B(a_{l_i} a_{l_j} a_{l_k})$$

Утверждение 21. Нужно доказать, что:

$$\forall i, j : [1 \leq i < j \leq l \implies B(a_i a_j p)] \wedge [i \leq l < j \leq n \implies B(a_i p a_j)] \wedge [l < i < j \leq n \implies B(p a_i a_j)]$$

Если $p = a_l$ или $p = a_{l+1}$, то все перечисленные утверждения включены в $B_n(a_1 \dots a_n)$. Предположим, что p отличается от обеих этих точек.

По Утв. 14 имеем для $j > l + 1$

$$B(a_l a_{l+1} a_j) \wedge B(a_l p a_{l+1}) \implies B(a_l p a_j)$$

По Утв. 15 для $i < l$ имеем

$$B(a_i a_l a_{l+1}) \wedge B(a_l p a_{l+1}) \implies B(a_i p a_{l+1})$$

Снова по Утв. 14 для $i < j \leq l$ имеем

$$B(a_i a_j a_{l+1}) \wedge B(a_j p a_{l+1}) \implies B(a_i a_j p)$$

Снова по Утв. 15 для $i \leq l < j$ имеем

$$B(a_i a_l p) \wedge B(a_l p a_j) \implies B(a_i p a_j)$$

И снова по Утв. 14 для $l < i < j$ имеем

$$B(a_l p a_i) \wedge B(a_i a_j a_j) \implies B(p a_i a_j)$$

Утверждение 22. Первая часть утверждения доказывается через Утв. 14 и Утв. 17

$$\forall k < n \wedge k > l : B(a_l a_k a_n) \wedge B(a_l a_n p) \implies B(a_k a_n p)$$

$$\forall k, m : [l \leq k < m < n \implies B(a_k a_m a_n) \wedge B(a_k a_n p) \implies B(a_k a_m p)]$$

Во второй части утверждения требуется доказать следующее:

$$\forall i, j : ([1 \leq i < l \leq j \leq n] \vee [1 \leq i < j < l]) \implies B(a_i a_j p)$$

Первый случай доказывается с помощью Утв. 15 и Утв. 18. Из первой части утверждения мы знаем, что $B(a_l a_j p)$ и $B(a_j a_n p)$. Пусть $a_j \neq a_l$. Тогда по Утв. 15

$$B(a_i a_l a_j) \wedge B(a_l a_j p) \wedge a_j \neq a_l \implies B(a_i a_j p)$$

Если же $a_j = a_l$, то по предположению $a_l \neq a_n$ и, значит, $a_j \neq a_n$. Тогда по Утв. 18

$$B(a_i a_j a_n) \wedge B(a_j a_n p) \wedge a_j \neq a_n \implies B(a_i a_j p)$$

Во втором случае, аналогично предыдущему, берём ту из точек a_l и a_n , которая не совпадает с a_j — обозначим её b . Тогда по Утв. 18

$$B(a_i a_j b) \wedge B(a_j b p) \wedge a_j \neq b \implies B(a_i a_j p)$$

Утверждение 23. Рассмотрим А8, где три точки не находятся на одной прямой. Если какие-то две точки совпадают, то по Утв. 9 все они на одной прямой, что является противоречием.

Утверждение 24. Пусть у нас есть точки u и v , которые не совпадают по предыдущему утверждению. По А4 отложим точку c такую, что $B(abc) \wedge bc \equiv uv$. Тогда, если $b = c$, то по А3 $u = v$, что является противоречием. Значит, $b \neq c$.

Утверждение 25. Для доказательства применяем А7 2 раза;

$$1 \text{ раз: } B(cb'a') \wedge B(apa') \implies \exists x : (B(cxp) \wedge B(b'xa))$$

$$2 \text{ раз: } B(cba) \wedge B(b'xa) \implies \exists q : (B(xqc) \wedge B(bqb'))$$

Далее по Утв. 16 мы получим $B(pxc) \wedge B(xqc) \implies B(pqc)$.

7.3 Доказательства свойств, связывающих конгруэнтность и отношение «между»

Утверждение 26. Рассмотрим случай, когда $a = c$. Тогда по А3 $a' = c' \implies$ по А6 $b = c$ и $b' = c'$. Значит в этом случае решение выйдет из условия $(c = d \wedge c' = d')$.

Теперь рассмотрим случай, где $a \neq c$. Отложим точки e и e' , чтобы $c \neq e \wedge B(ace) \wedge B(a'c'e') \wedge ac \equiv a'c' \wedge ce \equiv c'e' \wedge ad \equiv a'd' \wedge cd \equiv c'd'$.

$$\text{AFS} \left(\begin{array}{cccc} a & c & e & d \\ a' & c' & e' & d' \end{array} \right)$$

По А5 получим $ed \equiv e'd'$. Далее по Утв. 14 получим $B(bce)$ и $B(b'c'e')$, по Утв. 10 получим $B(ecb)$ и $B(e'c'b')$. Из этого можем получить AFS:

$$\text{AFS} \left(\begin{array}{cccc} e & c & b & d \\ e' & c' & b' & d' \end{array} \right)$$

Применив А5 ещё раз, получим то, что нам нужно.

Утверждение 27. Для доказательства добавим по А4 точки d и d' так, чтобы $c \neq d \wedge B(acd) \wedge B(a'c'd') \wedge cd \equiv c'd'$. Тогда по Утв. 7 $ac \equiv a'c' \wedge cd \equiv c'd' \wedge B(acd) \wedge B(a'c'd') \implies ad \equiv a'd'$, и по Утв. 26 получим:

$$\text{IFS} \left(\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array} \right) \implies bd \equiv b'd'$$

Далее отложим точки e и e' так, чтобы $e \neq a \wedge B(dbe) \wedge B(d'b'e') \wedge ae \equiv a'e' \wedge de \equiv d'e'$. Применим Утв. 26 ещё раз, получим то, что нам нужно:

$$\text{IFS} \left(\begin{array}{cccc} e & b & d & a \\ e' & b' & d' & a' \end{array} \right) \implies ab \equiv a'b'$$

Утверждение 28. Отложим точку d' с помощью Утв. 24 так, чтобы $B(c'a'd') \wedge a' \neq d'$. Используя А4, отложим точку b' так, чтобы получилось $B(d'a'b') \wedge a'b' \equiv ab$. Так же с помощью А4 отложим точку c' чтобы получилось $B(d'b'c'') \wedge b'c'' \equiv bc$. С помощью Утв. 14 получим $B(a'b'c'')$. Далее используем Утв. 7, чтобы получить $ac \equiv a'c''$. После при помощи Утв. 8 получим $c' = c''$.

Утверждение 29. Поместим точку b'' в Утв. 28 таким образом, чтобы получить $B(a'b''c') \wedge (abc) \equiv (a'b''c')$. Предварительно сделав $(a'b''c') \equiv (a'b'c')$, перейдём в IFS:

$$\text{IFS} \left(\begin{array}{cccc} a' & b'' & c' & b'' \\ a' & b'' & c' & b' \end{array} \right)$$

Тогда по Утв. 26 получим $b''b'' \equiv b''b'$. По А3 выведем $b'' = b' \implies B(a'b'c')$

Утверждение 30. По Опр. 6.

Утверждение 31. Раскроем по Опр. 6: $B(aab) \vee B(aba) \vee B(baa)$. По Утв. 11 всегда $B(aab)$.

Утверждение 32. Раскроем по Опр. 6: $\text{Col}(abc) \iff B(abc) \vee B(bca) \vee B(cab)$. В каждом из этих случаев подставим в Утв. 29 и получим соответствующий случай в Опр. 6 для $\text{Col}(a'b'c')$.

Утверждение 33. Для $B(abc) \vee B(bac)$ используем А4 так, что $B(a'b'c') \wedge b'c' \equiv bc$. Тогда по Утв. 7 $a'c' \equiv ac$. Аналогично в случае $B(bac)$.

Для $B(acb)$ используем Утв. 28.

Утверждение 34. Совокупность А5 и Утв. 26.

Утверждение 35.

$$\text{FS} \begin{pmatrix} a & b & c & p \\ a & b & c & q \end{pmatrix} \wedge a \neq b \implies cp \equiv cq$$

Утверждение 36.

$$\text{FS} \begin{pmatrix} a & b & c & c' \\ a & b & c & c' \end{pmatrix} \wedge a \neq b \implies cc \equiv cc'$$

По А3 отсюда следует $c = c'$.

Утверждение 37. Если $a = b$, то по А6 $a = c$, и по А3 $a = c'$. Тогда $c = c'$.

Иначе используем Утв. 36

Утверждение 38. Исходя из А4 возьмём точки c', d' так, что получим $B(adc') \wedge dc' \equiv cd \wedge B(acd') \wedge cd' \equiv cd$.

Если $c = c' \vee d = d'$, тогда мы получим искомое.

Пусть $c \neq c'$, тогда по А4 отложим точки b', b'' так, что $B(bc'b') \wedge b'c' = bc \wedge B(bd'b'') \wedge b''d' = bd$. Тогда по Утв. 22, где $l = 1$, получим $B_5(abcd'b'') \wedge B_5(abdc'b')$.

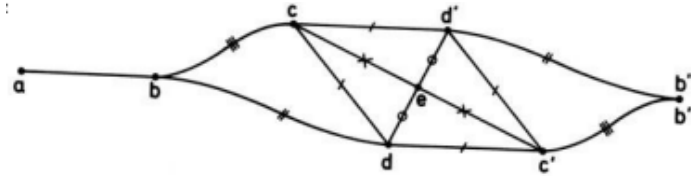


Рис. 11: утв. 38

С помощью Утв. 7, сопоставив конгруэнтные отрезки, получим, что $bc' \equiv b''c$ и, применив утверждение ещё раз, получим $bb' \equiv b''b$. Согласно Утв. 8 получим $b'' = b'$. Теперь по А5 сделаем

$$\text{AFS} \begin{pmatrix} b & c & d' & c' \\ b' & c' & d & c \end{pmatrix}$$

Из неё в случае $b \neq c$ получим $c'd' \equiv cd$. Если же $b = c \vee b = d$, то мы сразу приходим к искомому результату. Далее используем А7 для построения точки e таким образом, что $B(cec') \wedge B(ded')$. После используем Утв. 26 так:

$$\text{IFS} \begin{pmatrix} d & e & d' & c \\ d & e & d' & c' \end{pmatrix} \wedge \text{IFS} \begin{pmatrix} c & e & c' & d \\ c & e & c' & d' \end{pmatrix}$$

Из этого получаем $ec \equiv ec' \wedge ed \equiv ed'$. По А4 построим точки p, q, r таким образом, что $B(c'cp) \wedge cp \equiv cd' \wedge B(d'cr) \wedge cr \equiv ce \wedge B(prq) \wedge rq \equiv rp$.

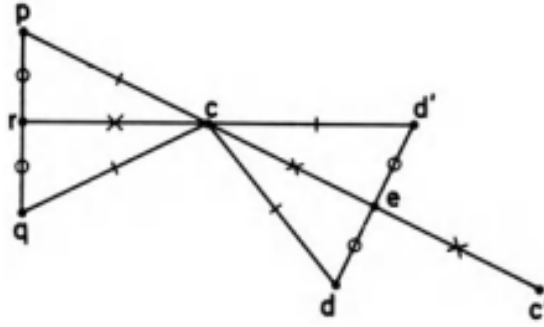


Рис. 12: утв. 38, рисунок 2

Далее по А5 сделаем

$$\text{AFS} \begin{pmatrix} d' & c & r & p \\ p & c & e & d' \end{pmatrix}$$

Получим, что $rp \equiv cd' \implies rq \equiv ed$. Ещё раз используем А5

$$\text{AFS} \begin{pmatrix} d' & e & d & c \\ p & r & q & c \end{pmatrix}$$

Отсюда в случае $d' \neq e$ имеем $cq \equiv cd$; если же $d' = e$, то $d' = d$, и мы получили искомое. По Утв. 7 $d'd \equiv pq$. Тогда $cp \equiv cq$. Используем Утв. 35 несколько раз.

Так как $rp \equiv rq \wedge \text{Col}(rcd') \wedge r \neq c$ (последнее следует из $c \neq c'$), то $d'p \equiv d'q$. Из $c \neq d' \wedge \text{Col}(cd'b) \wedge \text{Col}(cd'b')$ следует, что $bp \equiv bq \wedge b'p \equiv b'q$. Из $c \neq d' \wedge B_5(abcd'b'') \wedge B_5(abdc'b')$ следует, что $b \neq b'$. Применим Утв. 35 ещё раз: $\text{Col}(bc'b') \implies c'p \equiv c'q$. Так как $c \neq c' \wedge \text{Col}(c'cp)$, то $pp \equiv pq$, и, значит, по А3 $p = q$. Так как $pq \equiv d'd$, то по А3 $d' = d$.

Утверждение 39. По предыдущему утверждению мы получаем $B(acd) \vee B(adc)$. Так как мы получаем или то, или другое, то рассмотрим 2 случая:

1. При $B(acd)$ используем Утв. 14 и получим $B(bcd)$;
2. При $B(adc)$ используем Утв. 14 таким образом: $B(abd) \wedge B(adc) \implies B(bdc)$.

Утверждение 40. По Утв. 24 возьмём точку p так, что $B(dap) \wedge p \neq a$. Далее с использованием Утв. 13 получим: $B(pad) \wedge B(abd) \implies B(pab)$. После используем Утв. 13: $B(pad) \wedge B(acd) \implies B(pac)$. Из полученного перейдём к предыдущему утверждению, где получим: $p \neq a \wedge B(pab) \wedge B(pac) \implies B(abc) \vee B(acb)$.

Утверждение 41. Пусть по Опр. 8 существует точка y такая, что $B(cyd) \wedge ab \equiv cy$. По Утв. 33 $B(cyd) \wedge ab \equiv cy \implies \exists x(abx) \equiv (cyd)$, и по Утв. 29 $B(cyd) \wedge (abx) \equiv (cyd) \implies B(abx)$.

В другую сторону: пусть $\exists x[B(abx) \wedge ax \equiv cd]$. Тогда, аналогично первой части доказательства, по Утв. 33 $\exists y \text{Col}(cyd) \wedge (cyd) \equiv (abx)$, и по Утв. 29 $B(abx) \wedge (abx) \equiv (cyd) \implies B(cyd)$.

Утверждение 42. Пусть по Опр. 8 существует точка y такая, что $B(cyd) \wedge ab \equiv cy$. Тогда по Утв. 33 существует точка y' такая, что $(cyd) \equiv (c'y'd')$. Дважды применив А2, получим $c'y' \equiv a'b'$. После по Утв. 29 получим $B(c'y'd')$. Значит, для $a'b'$ и $c'd'$ выполняется Опр. 8, и $a'b' \leq c'd'$.

Утверждение 43. Подставим в Опр. 8 на места точек c, d точки a, b соответственно. Получим: $ab \leq ab \iff \exists y[B(ayb) \wedge ay \equiv ab]$. Значит, $y = b$.

Утверждение 44. По Утв. [41] $\exists l[B(cdl) \wedge cl \equiv ef]$. По Опр. [8] $\exists y[B(cyd) \wedge cy \equiv ab]$. Тогда по Утв. [17] $B(cyl)$. Далее по Опр. [8] $\exists y[B(cyl) \wedge ab \equiv cy] \implies ab \leq cl$. Так как $cl \equiv ef$, то по Утв. [42] $ab \leq ef$.

Утверждение 45. По Утв. [24] $\exists q[B(baq) \wedge a \neq q]$. По Утв. [10] «переворачиваем» $B(qab)$. Далее по Утв. [41] $ab \leq cd \implies \exists x[B(abx) \wedge ax \equiv cd]$ и по Опр. [8] $cd \leq ab \implies \exists y[B(ayb) \wedge ay \equiv cd]$. Если $a = b$, то отсюда по А6 следует $y = a$, и мы получили $aa \equiv cd$, что и требовалось доказать. Предположим теперь, что $a \neq b$, тогда по Утв. [18] мы получим $B(qab) \wedge B(abx) \wedge a \neq b \implies B(qax)$. Далее по Утв. [13] $B(qab) \wedge B(ayb) \implies B(qay)$. По Утв. [8] следует, что $x = y$, так как $ax \equiv cd \wedge ay \equiv cd$. А по А6 $b = x \wedge b = y$. Тогда $ab \equiv ax \implies ab \equiv cd$.

Утверждение 46. По Утв. [24] отложим на прямой ab точку p так, что $B(pab) \wedge p \neq a$. Далее по А4 отложим точку x на прямой pa : $B(pax) \wedge ax \equiv cd$. Тогда получится 2 случая: $B(abx) \vee B(axb)$ по Утв. [39]. Если $B(abx)$, то сравниваем по Утв. [41]. Если $B(axb)$, то сравниваем по Опр. [8].

Утверждение 47. По Опр. [8].

Утверждение 48. Если идти из $B(abc)$, то по Опр. [8] $ab \leq ac : \iff \exists y[B(ayc) \wedge ay \equiv ab]$ – подставим b вместо y . Аналогично с $bc \leq ac$.

Если идти из $Col(abc) \wedge ab \leq ac \wedge bc \leq ac$, то ac – самый большой отрезок, и точка b находится между a и c .

Поскольку у нас $Col(abc)$, то $B(abc) \vee B(acb) \vee B(bac)$, и в других случаях по доказанному выше имеем $B(acb) \implies ab \geq ac \wedge ab \geq cb$, а $B(bac) \implies bc \geq ac \wedge bc \geq ba$, что противоречит условию. Значит, будет только $B(abc)$.

7.4 Доказательства утверждений о лучах и прямых

Утверждение 49. Разбирая справа налево, идём через Утв. [15] $B(bap) \wedge B(apc) \implies B(bpc)$ или через Утв. [14] $B(abp) \wedge B(apc) \implies B(bpc)$. Идя слева направо, используем Утв. [39] $B(cpa) \wedge B(cpb) \implies B(pab) \vee B(pba)$.

Утверждение 50. Идя справа налево, используя Утв. [49]. Получим сразу искомое ($a \underset{p}{\approx} b$). Слева направо по Опр. [10] получим $a \neq p \wedge b \neq p \wedge [B(pab) \vee B(pba)]$. Далее по А4 отложим точку c такую, что $B(apc) \wedge pc \equiv ap$. Используя Утв. [15] или Утв. [14] так, что $a \neq p \wedge B(bap) \wedge B(apc) \implies B(bpc)$ или $B(abp) \wedge B(apc) \implies B(bpc)$.

Утверждение 51. Опр. [6] и Опр. [10]

Утверждение 52. Раскрыть по Опр. [10] подставив на место точки b точку a .

Утверждение 53. Раскрыть по Опр. [10]

Утверждение 54. По Утв. [50] построим точку q такую, что $B(apq) \wedge B(bpq)$. Далее, так как мы имеем $B(pbc) \vee B(pcb)$, по Утв. [15] получим $B(cbp) \wedge B(bpq) \implies B(cpq)$ или по Утв. [14] $B(bcp) \wedge B(bpq) \implies B(cpq)$. Используя Утв. [50] справа налево с $B(apq) \wedge B(cpq)$ получим искомое.

Утверждение 55. По А4 отложим точку q так, что $B(raq) \wedge aq \equiv bc$. Далее снова по А4 отложим точку x так, что $B(qax) \wedge ax \equiv bc$. По Утв. [39] получим $B(axr) \vee B(arx)$. Остаётся доказать единственность x . Пусть есть $x \wedge x'$, которые обладают свойствами, данными нам в условиях $ax \equiv bc \wedge ax' \equiv bc$. $x \underset{a}{\approx} r \wedge x' \underset{a}{\approx} r$. Это транзитивность (Утв. [54]). Используя Утв. [50] дважды с x и x' , найдём q . Тогда получим $B(qax) \wedge B(qax')$. Мы имеем $B(qax), B(qax'), ax \equiv bc, ax' \equiv bc \implies ax \equiv ax'$ (транзитивность конгруэнтности). Тогда по Утв. [8] $x = x'$.

Утверждение 56. Идя справа налево по Опр. [8] получим: $\exists a[B(pab) \wedge pa \equiv ra] \implies pa \leq pb$. Иначе по тому же Опр. 8, но слева направо, получим существование y такого, что $py \equiv pa$ и $B(pyb)$. Тогда по Утв. [50] y единственен, а в нашем случае $y = a$. Тогда получим искомое $B(pab)$.

Утверждение 57. По Опр. 6 раскрываем $\text{Col}(pqx)$. Выявляем точки x , чтобы они были с разных сторон от p . Далее получим $(B(pqx) \vee B(pqx)) \vee B(xpq) \implies x \underset{p}{\approx} q \vee B(xpq)$. По Утв. 49 $a = x \wedge c = q \wedge b = r \implies x \underset{p}{\approx} r$. Нашли искомое.

Утверждение 58. Решается перебором с помощью Утв. 13 – Утв. 18

Утверждение 59. По Опр. 12 (1) $L(pq) = \{x \mid \text{Col}(pqx)\}$, и, в частности, $\text{Col}(pqs)$. Далее по тому же определению $L(ps) = \{x \mid \text{Col}(psx)\}$. Докажем, что эти множества совпадают.

Пусть $x \in L(pq)$. Тогда по Утв. 58 $\text{Col}(spq) \wedge \text{Col}(pqx) \wedge p \neq x \implies \text{Col}(spx)$, и $x \in L(ps)$. В обратную сторону аналогично.

Утверждение 60. По Опр. 12 (1) $L(pq) := \{x \mid \text{Col}(pqx)\}$. Подставим вместо x точку p , чтобы проверить принадлежность p к $L(pq)$. Получим $\text{Col}(ppq)$. Из Утв. 31 следует, что $B(ppq) \implies p \in L(pq)$. Аналогично с точкой q .

Так как при условии $p \neq q$ $L(pq) := \{x \mid \text{Col}(pqx)\}$ и $L(qp) := \{x \mid \text{Col}(qpq)\}$, то $\text{Col}(pqx) \iff \text{Col}(qpq)$ по Утв. 30. Тогда $L(pq) = L(qp)$.

Утверждение 61. Пусть по Опр. 12 есть такое A , что $A = L(pq)$ при условии, что $p \neq q$. Так как $a \neq b$, то $a = p \wedge b = p$ невозможно. Тогда при использовании двух предыдущих утверждений получим $A = L(pq) = L(pb) = L(bp) = L(ba) = L(ab)$.

Утверждение 62. Утв. 60 доказывает существование в любых двух точках прямой, а Утв. 61 доказывает единственное существование такой прямой.

Утверждение 63. Прямое следствие из предыдущего утверждения.

Утверждение 64. Пусть $a = b = c$. $\text{Col}(abc)$ выполняется сразу по Утв. 9 $B(aaa)$. Пусть существует точка d по Утв. 23 такая, что $a \neq d$. Тогда по Опр. 12 $L(ad) := \{x \mid \text{Col}(adx)\}$. По Утв. 60 $(a \neq d) \implies L(ad) \wedge a \in L(ad)$. Далее предположим что $a \neq b$ без ограничения общности по Утв. 31 и Утв. 62. Так как $\text{Col}(abc)$, то $L(ab)$ по Утв. 61. К искомому приходим по Опр. 12

Идя справа налево, по Утв. 61 $A = L(ab)$, а, так как $c \in A$, то по Опр. 12 получаем $\text{Col}(abc)$

Утверждение 65. А8 и Опр. 6

Утверждение 66. Пусть $a \neq b$, тогда пусть каждая $c \in A = L(ab)$. Тогда будут такие точки $x, y, z \in A$ согласно Утв. 64, что противоречит Утв. 65.

7.5 Доказательства утверждений о центральной симметрии

Утверждение 67. По Утв. 10 $B(amb) \implies B(bma)$ и по Утв. 2 $ma \equiv mb \implies mb \equiv ma$

Утверждение 68. Вправо: Из Опр. 15 $B(ama) \wedge ma \equiv ma$. По А6 $B(ama) \implies m = a$.

Влево: $ma \equiv ma$ по Утв. 1. А по Утв. 9 $B(aaa)$.

Утверждение 69. По А4 отложим точку p' такую, что $B(pap') \wedge ap \equiv ap'$. По Утв. 8 доказываем единственность такого отрезка и с помощью А3 учитываем совпадения если $a = p$, то $a = p'$.

Утверждение 70. Пусть $S_a(p) = p'$. Тогда $M(pap') = M(p'ap)$ по Утв. 67, а значит $S_a(p') = p$ по Опр. 16.

Утверждение 71. По Опр. 16 получим $M(pap')$, а по Утв. 69 $\exists! p'$

Утверждение 72. Пусть $S_a(p) = p' = S_a(q)$. По Утв. 70 $S_a(S_a(p)) = p$ и $S_a(S_a(q)) = q$. По Утв. 71 $\forall p' \exists! p : S_a(p) = p'$. Тогда $p = q$.

Утверждение 73. По Опр. 16 $S_a(p) = p \implies M(pap)$. По Утв. 68 $p = a$. Если идти в другую сторону, выходит то же самое, но в обратном порядке.

Утверждение 74. В случае $p = a$, по Утв. 73 $p' = a$ и по опр. для q' $aq \equiv aq'$.

Если $p \neq a$ по А4 построим Точки x, y, x', y' такие, что:

$$B(p'px) \wedge px \equiv qa, B(q'qy) \wedge qy \equiv pa, B(xp'x') \wedge p'x' \equiv qa, B(yq'y') \wedge q'y' \equiv pa.$$

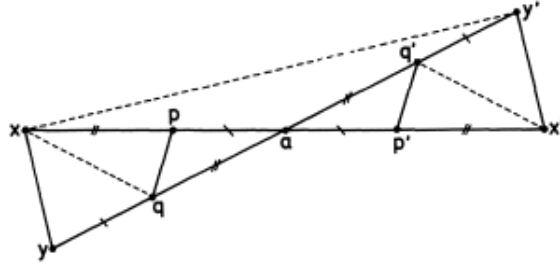


Рис. 13: Утв. 74

По Утв. 22 ($l = 1$) и Утв. 19 получим $B_5(xpap'x') \wedge B_5(yqaq'y')$. Далее из Утв. 7 (сумма отрезков) получим $ax \equiv ay \equiv ay' \equiv ax'$. Так как $p \neq a$, то $x \neq a$. Далее по А5:

$$\text{AFS} \begin{pmatrix} x & a & x' & y' \\ y' & a & y & x \end{pmatrix} \implies x'y' \equiv xy$$

По Утв. 26

$$\text{IFS} \begin{pmatrix} y & q & a & x \\ y' & q' & a & x' \end{pmatrix} \implies qx \equiv q'x'$$

и

$$\text{IFS} \begin{pmatrix} x & p & a & q \\ x' & p' & a & q' \end{pmatrix} \implies pq \equiv p'q'$$

Утверждение 75. Из Утв. 74 получим $pq \equiv S_a(p)S_a(q)$, $qr \equiv S_a(q)S_a(r)$, $pr \equiv S_a(p)S_a(r)$. А по Утв. 29 получаем искомое.

Утверждение 76. По Утв. 74 получим $pq \equiv S_a(p)S_a(q)$ и $rs \equiv S_a(r)S_a(s)$, что по транзитивности выходит в $pq \equiv rs \equiv S_a(p)S_a(q) \equiv S_a(r)S_a(s)$. Доказательство в другую сторону выходит точно такое же.

Утверждение 77. По Опр. 15 получим $B(pap') \wedge pa \equiv ap'$; $B(pbp') \wedge pb \equiv bp'$. По Утв. 74 используя S_a можем сказать, что $p'b \equiv pS_a(b)$, а также $pb \equiv S_a(b)$ (получается ромб). Так как мы имеем $B(pbp')$, то по Утв. 37 $b = S_a(b)$, а по Утв. 73 значит, что $a = b$.

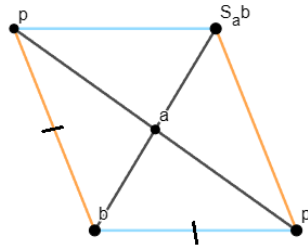


Рис. 14: Утв. 77

Утверждение 78. Пусть $S_a(p) = p'$ и $S_b(p) = p'$. Тогда по Опр. 16 $S_a(p) = p' \implies M(pap')$. Аналогично с "b". Получаем Утв. 77 и решаем по нему.

Утверждение 79. Справа налево всё тривиально. Слева направо:

Пусть $S_a(p) = p'$. По Опр. 16 $M(pap')$. Тогда имеем $S_a(S_b(p)) = S_b(p')$. Серединой между $S_b(p')$ и $S_b(p)$ является $S_b(a)$ т.к. отрезки сохраняются по Утв. 74 и Утв. 75. При этом из $S_b(p') = S_a(S_b(p))$ получим $M(S_b(p)aS_b(p'))$, что говорит нам о том, что " a —середица. Тогда $S_b(a) = a$, а по Утв. 73 $a = b$.

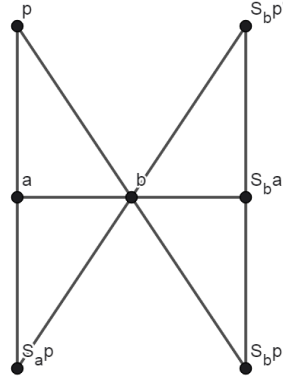


Рис. 15: Утв. 79

Утверждение 80. По Опр. 6 получим $V(mab) \vee V(mba) \vee V(amb)$. При $V(amb)$ выходим на Опр. 15. Если 2 остальных случая, то по Утв. 27 (например с $V(abm)$) $V(abm) \wedge V(bbm) \wedge ta \equiv mb \wedge bm \equiv bm \implies ab \equiv bb$. А по А3 следует $a = b$. Аналогично с $V(bam)$.

Утверждение 81. По Утв. 33, применяя $\text{Col}(bdp) \wedge bd \equiv db$, получим $\exists p' : (bdp) \equiv (dbp')$. По Утв. 32 получим из этого $\text{Col}(bdp')$. Тогда из Опр. 7 можем сказать, что

$$\text{FS} \begin{pmatrix} b & d & p & a \\ d & b & p' & c \end{pmatrix}, \text{FS} \begin{pmatrix} b & d & p & c \\ d & b & p' & a \end{pmatrix}$$

А по Утв. 34 получим $pa \equiv p'c, pc \equiv p'a$ и $(apc) \equiv (cp'a)$. Исходя из Утв. 32 $\text{Col}(apc) \implies \text{Col}(acp')$. Тогда $p, p' \in L(ac), L(bd)$, но из-за $\neg \text{Col}(abc)$ по Утв. 63 $p = p'$. И тогда идём по Утв. 80.

Утверждение 82. По Утв. 46 имеем $ca_1 \leq ca_2 \vee ca_2 \leq ca_1$. Тогда дальше можем размышлять без ограничения общности и всё перенумеровать.

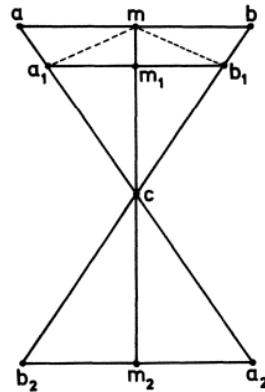


Рис. 16: Утв. 82

Возьмём $ca_1 \leq ca_2$. В случае $a_2 = c$ выйдет, что $a_1 = c$, что по А3 выдаёт $b_2 = b_1 = c$ и по Утв. 68

$m_2 = m_1 = c$. Тогда пусть $a_2 \neq c$. Скажем, что $a = S_c(a_2)$, $b = S_c(b_2)$ и $m = S_c(m_2)$. По Утв. 74 и Утв. 75 у нас сохраняются равенства и $M(amb)$. Из Утв. 42 следует, что $ca_1 \leq ca$, что даёт $B(ca_1a)$ (если $a_1 = c$ — тривиально, иначе $a_1 \approx c$ по Утв. 56). Аналогично выходит с $B(cb_1b)$. По Утв. 25 скажем, что есть такая q , что $B(mqc) \wedge B(a_1qb_1)$ и из Утв. 14 $B(mqc) \wedge B(mcm_2) \implies B(qcm_2)$. Тогда остаётся доказать, что $q = m_1$. Возьмём конструкцию

$$\text{IFS} \begin{pmatrix} a & a_1 & c & m \\ b & b_1 & c & m \end{pmatrix}$$

по Утв. 26 $ma_1 \equiv mb_1$

$$\text{IFS} \begin{pmatrix} c & q & a_1 & m \\ c & q & b_1 & m \end{pmatrix}$$

по Утв. 26 $qa_1 \equiv qb_1$

(в случае $m \neq c$ идём по Утв. 35, иначе А6 даёт $q = m$). Тогда можем сказать, что $M(a_1qb_1)$ из чего $q = m_1$.

Утверждение 83. 1) Пусть $\text{Col}(abc)$. По Утв. 80 $a = b \vee M(acb)$. Если $a = b$, то $x = a$, иначе $x = c$

2) Пусть $\neg \text{Col}(abc)$. Тогда по Утв. 24, А4 и А7 построим точки p, q, r так, что $B(cap) \wedge a \neq p$, $B(cbq) \wedge bq \equiv ap$, $B(arq) \wedge B(brp)$

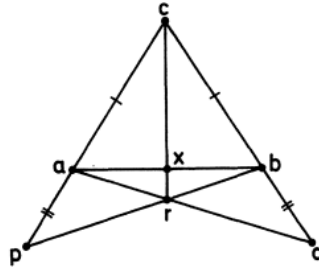


Рис. 17: Утв. 83

По А7 найдётся такой x , что $B(axb) \wedge B(rxc)$. Тогда нам нужно лишь доказать, что $xa \equiv xb$, а для этого нужно $ra \equiv rb$, после чего по Утв. 35 и А6 мы найдём искомого.

Так как $c \neq a$, то по А5

$$\text{AFS} \begin{pmatrix} c & a & p & b \\ c & b & q & a \end{pmatrix}$$

получим $pb \equiv qa$. Из-за того, что для r никаких равенств отрезков мы не имеем, по Утв. 9 возьмём такую r' , которая по Утв. 28 будет обладать теми же свойствами, что r и $B(ar'q) \wedge (brp) \equiv (ar'q)$. Тогда по Утв. 26

$$\text{IFS} \begin{pmatrix} b & r & p & q \\ a & r' & q & b \end{pmatrix}$$

,

$$\text{IFS} \begin{pmatrix} b & r & p & q \\ a & r' & q & p \end{pmatrix}$$

получим $ra \equiv r'b$ и $rq \equiv r'p$, что даёт $(arq) \equiv (br'p)$. Далее из $\text{Col}(arq)$ будет $\text{Col}(br'p)$ по Утв. 32. Тогда $r' = L(aq) \cap L(bp)$, а Утв. 62 (единственность точки пересечения) $r = r'$, что означает $ra \equiv rb$.

7.6 Доказательства утверждений о прямых углах

Утверждение 84. По Утв. [74](#) $aS_b(c) \equiv S_b(a)c$, тогда по транзитивности $S_b(a)c \equiv ca$, из чего по Опр. [18](#) получается $\perp(cba)$.

Утверждение 85. Прямое следствие из Утв. [35](#) ($p = c, q = S_b(c)$).

Утверждение 86. По Опр. [18](#) и свойству отражений.

Утверждение 87. Из Опр. [18](#)

Утверждение 88. Пусть $c' = S_b(c)$. Тогда можем сказать, что $a'c \equiv a'c'$. По Утв. [37](#) $c = c'$ и по Утв. [73](#) следует, что $b = c$.

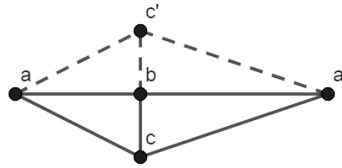


Рис. 18: Утв. 88

Утверждение 89. Построим $c' = S_b(c)$ и $a' = S_c(a)$. Пойдём от противного. Пусть $b \neq c$. Из $\perp(abc)$ по Утв. [85](#) получим $\perp(acc')$, в также из Опр. [18](#) $ac \equiv a'c'$. Далее из данного нам имеем $ac' \equiv ac \equiv a'c$. Тогда $a'c \equiv a'c'$, из чего следует $\perp(a'bc)$ по Опр. [18](#). А по Утв. [88](#) получим $b = c$.

Утверждение 90. По Утв. [87](#) можем взять $\perp(abb)$. Это то же самое, что $\perp(baa)$. По Утв. [84](#) сделаем $\perp(aab)$. Подставим в Утв. [89](#) $\perp(aab) \wedge \perp(aba) \implies a = b$.

Утверждение 91. Пусть $a \neq b$. Тогда по Утв. [85](#) $\perp(abc) \wedge a \neq b \wedge \text{Col}(bac) \implies \perp(cbc)$. Из чего по Утв. [90](#) $b = c$.

Утверждение 92. Пусть $b = c$, тогда $b' = c'$ по Утв. [87](#). Скажем, что $b \neq c$ (соответственно $b' \neq c'$). Тогда построим $d = S_b(c)$ и $d' = S_{b'}(c')$. Из

$$\text{AFS} \begin{pmatrix} c & b & d & a \\ c' & b' & d' & a' \end{pmatrix}$$

получим $ad \equiv a'd'$. По Опр. [18](#) $\perp(a'b'c')$

Утверждение 93. Из Утв. [84](#) и первых двух частей Опр. [19](#) находим искомое.

Утверждение 94. Вправо:

По Опр. [19](#) (1) мы получим всё, кроме ограничения на $u \neq x \wedge v \neq x$. По Опр. [12](#) (2) найдутся на A и A' такие u и v с нужными нам ограничениями.

Влево:

Из Утв. [85](#) следует искомое.

Утверждение 95. 1) Раскроем по Утв. [94](#) $u \neq x \wedge v \neq x$. Пусть $A \neq A'$, тогда лежащие на A и A' любые 3 точки, включая x , будут соответствовать $\perp(uxv) \wedge \text{Col}(uxv)$, что по Утв. [91](#) приводит к тому, что $u = x \vee x = v$. Возникает противоречие, значит $A \neq A'$.

2) В обе стороны Опр. [13](#) и Опр. [19](#)

3) По Опр. [19](#), Опр. [13](#) и Утв. [63](#)

Утверждение 96. Справа налево всё тривиально. Слева направо через Утв. [95](#) (1,2). Это различные

прямые и пересекаются в x , следовательно во второй части утверждения идём справа налево.

Утверждение 97. Слева направо: По Утв. 96 получим $ab \perp_x cx$. Из Опр. 19 (1,3) получим $\perp(cxu)$ и $c \neq x$. По Утв. 91 поймём, что $\neg \text{Col}(uxc)$ и из $L(ab) = L(ux)$ по Утв. 59 $\neg \text{Col}(abc)$, так как $c \neq x$.

Справа налево: У нас есть $\neg \text{Col}(abc)$, значит $c \neq x$. По Утв. 94 получим $L(ab) \perp_x L(cx) \implies ab \perp cx$.

Утверждение 98. Существование:

По А4 отложим точку y такую, что $B(bay)$ (в частности $\text{Col}(aby)$) и $ay \equiv ac$. По Утв. 83 получим такую точку p между c и y , что $M(cpy)$ и следовательно по Опр. 18 $\perp(apy)$. Также по А4 строим точки z, q, q', c' таким образом: $B(ayz) \wedge yz \equiv yp, B(pyz) \wedge yq \equiv ya, q' = S_z(q), B(q'yc') \wedge yc' \equiv yc$. Получим

$$\text{AFS} \begin{pmatrix} a & y & z & q \\ q & y & p & a \end{pmatrix},$$

что даёт нам $zq \equiv pa$ и $(apy) \equiv (qzy)$. Из Утв. 92 $\perp(qzy)$ и $yq \equiv yq'$. Так как $yc \equiv yc'$ проведём cc' и по Утв. 83 получим такой x , что $M(cxc') \implies \perp(yxc)$. По Опр. 17 выйдет конструкция q, z, q', y, c', x, c из чего дальше получаем Утв. 82 и $B(zyx)$ (частность $\text{Col}(zyx)$). Поэтому $c \neq y \neq z$, значит $y \neq x$. По Утв. 94 выясним, что $yx \perp_x cx$, а так как $L(ab) = L(yx)$, то $\text{Col}(abx)$ и $ab \perp cx$.

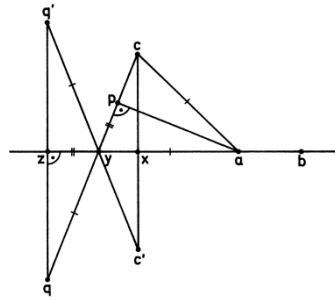


Рис. 19: Утв. 98

Единственность:

Пусть есть $\text{Col}(abx_v) \wedge ab \perp cx_v$, где $v = 1, 2$. Тогда Утв. 96, Утв. 93 и Опр. 19 (1,3) выдают нам $\perp(cx_1x_1) \wedge \perp(cx_2x_1)$, что по Утв. 89 говорит о том, что $x_1 = x_2$.

Утверждение 99. Пусть $S_b(c) = d, b' = S_a(b), c' = S_a(c), d' = S_a(d), p' = S_a(p)$. Таким образом мы получим $\perp(b'bc)$ (если $a = b$ — тривиально, иначе — по Утв. 85). Из Утв. 74 и Утв. 75 получим $\perp(bb'c') \wedge bc' \equiv bd'$, в далее приходим к

$$\text{IFS} \begin{pmatrix} c' & p & d & b \\ d' & p' & c & b \end{pmatrix}.$$

По Утв. 26 нам это даёт $bp \equiv bp'$, а значит и $\perp(bap)$. Следующую часть докажем от обратного. Пусть $a = p$, тогда $c = S_a(c') = S_p(c') = d$ и по Утв. 68 $b = c$.

Утверждение 100. 1) Пусть $\neg \text{Col}(abc)$. Тогда есть $x \in L(ab)$ по Утв. 98, где $cx \perp ab$. Тогда мы получим $\perp(abc)$ и $aS_x(c) \equiv ac \equiv aS_a(c)$ по Опр. 18 и Опр. 16. По Утв. 83, где c соответствует a , между $S_x(c)S_a(c)$ есть такая p , что $M(S_x(c)pS_a(c))$. А по Утв. 99 получаем $\perp(xap)$ и $a \neq p$. Из Утв. 25 получим такую t , что $B(ctp) \wedge B(xta)$ (в частности $\text{Col}(abt)$). Если $x \neq a$, то $ab \perp pa$ по Утв. 94, иначе $t = a \wedge L(pa) = L(pt) = L(cx) \wedge ab \perp pa$ в любом случае.

2) Пусть $\text{Col}(abc)$. Возьмём c' по Утв. 66, чтобы был $\neg \text{Col}(abc')$. Далее идём через 1 случай и получаем такую p , что $ab \perp pa$. При $t = c$ получаем искомое.

Утверждение 101. Ранее было в Утв. 77, но доказывалась только единственность.

1) Пусть $a = b$. Тогда $x = a$.

2) Пусть $a \neq b$. По Утв. 100 (относительно $L(ab)$) построим точки q, p, t так, чтобы $ab \perp qb$ и $ab \perp pa \wedge \text{Col}(abt) \wedge B(qtp)$. Тогда будем рассматривать точки a, b, p, q без ограничения общности. Пусть $ap \leq bq$. По Опр. 8 построим такую r , что $B(brq) \wedge ap \equiv br$, а по А7 ($B(ptq) \wedge B(brq)$) получим $B(txb) \wedge B(rxp)$ (в частности $\text{Col}(abx)$). По Утв. 91 $\neg \text{Col}(abp) \wedge \neg \text{Col}(abr)$. Тогда остаётся доказать, что $bp \equiv ar$, а далее всё будет доказываться по Утв. 81 ($M(axb) \wedge M(pxr)$). $x \neq a$, иначе будет $\text{Col}(par)$ и $b = a$, и мы попадём на первый случай. Пусть $p' = S_a(p)$. Построим также точки r', m по А4 или по Утв. 83 таким образом: $B(p'xr') \wedge xr' \equiv xr$ и $M(rmr')$. Из этого получим $\perp(rmx)$. Тогда $\perp(xap) \wedge xp \equiv xp'$, а далее по Утв. 91 $\neg \text{Col}(xpp')$. По Утв. 82 $B(axm)$ и $m \neq x$ (как в доказательстве Утв. 98). Получаем $m \in L(ax) = L(ab)$ и $ab \perp rm$, также из Утв. 98 $m = b$ и $M(rbr')$. Тогда из

$$\text{IFS} \begin{pmatrix} p' & a & p & r \\ r & b & r' & p' \end{pmatrix}$$

по Утв. 26 $ar \equiv bp'$. Из этого при $\perp(bap)$ получим $bp \equiv bp'$, что по транзитивности даёт $bp \equiv ar$.

8 Решения упражнений на описание геометрических объектов

Задача 1. $ab \equiv bc \wedge ab \equiv ac \wedge bc \equiv ac \wedge a \neq b$

Задача 2. $[ab \equiv bc \wedge \neg B(abc)] \vee [ab \equiv ac \wedge \neg B(bac)] \vee [ac \equiv bc \wedge \neg B(acb)]$

Замечание: условия $a \neq b$ и $\neg B(\dots)$ — уточнения, что abc — именно треугольник, а не просто набор из трёх (или меньше) точек

Задача 3. $B(abc) \vee B(acb) \vee B(bac)$ Далее мы будем обозначать «точки a, b, c лежат на одной прямой» как $\text{Col}(abc)$

Задача 4. $\exists y[B(ayb) \wedge cd \equiv ay]$

Задача 5. $\exists y[B(ayb) \wedge cd \equiv ay] \wedge \neg[ab \equiv cd]$

Задача 6. $\neg \exists x[\text{Col}(abx) \wedge \text{Col}(cdx)]$

Задача 7. $\exists x, y, z, t[\text{Col}(ycd) \wedge \text{Col}(abz) \wedge \text{Col}(tab) \wedge \text{Col}(zcd) \wedge \text{Col}(cxd) \wedge B(yzx) \wedge z \neq t \wedge xz \equiv yz \wedge yt \equiv xt]$

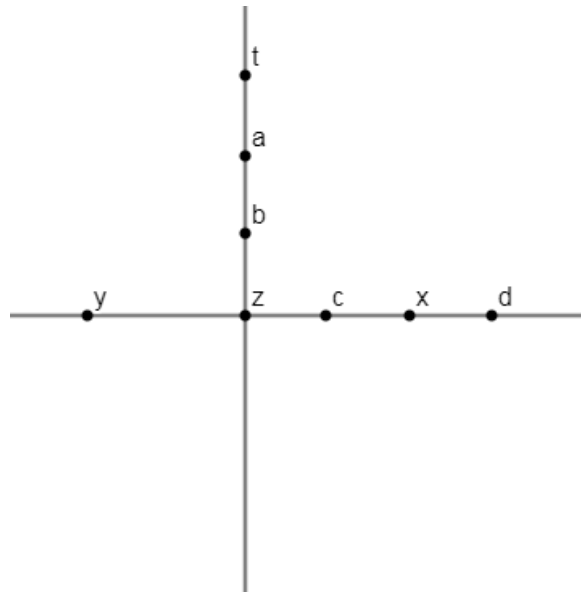


Рис. 20: Частный случай задачи 7

Задача 8. $\exists x, y [B(bax) \wedge B(bcy) \wedge bx \equiv by \wedge bx \equiv xy \wedge by \equiv xy]$

Задача 9. $\exists a', c' : [B(da'e) \vee B(a'de)] \wedge [B(fc'e) \vee B(c'fe)] \wedge a'c' \equiv ac \wedge a'e \equiv ab \wedge c'e \equiv cb$

Задача 10. * $\forall a, b \in A \forall c : [B(acb) \implies c \in A]$ (определение выпуклой фигуры как множества точек на плоскости: если две точки принадлежат фигуре, то и отрезок между ними принадлежит этой фигуре)

Задача 11. * $\exists a_1, a_2, \dots, a_n : [a_1 = a \wedge [B(ba_2c) \vee B(bca_2)] \wedge \forall k \in \mathbb{N} : [2 \leq k \leq n \implies a_k b \equiv ab \wedge a_{k-1} a_k \equiv aa_2]]$ (символ $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел)

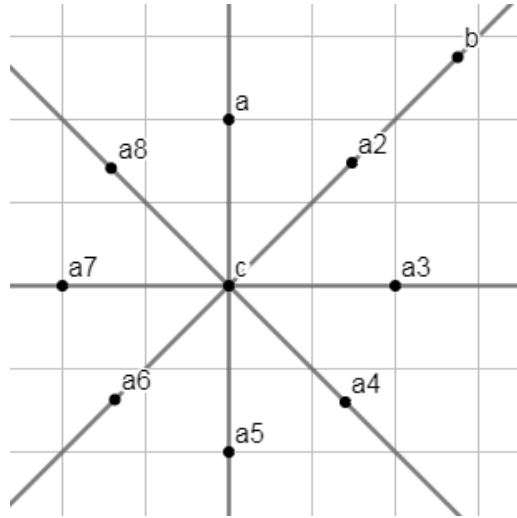


Рис. 21: Частный случай задачи 11

Исполнитель проекта Котлярова Ольга Владимировна, ГБОУ Школа 179 г. Москвы, 10И класс.

Руководитель проекта Верицкая Мария Михайловна, ГБОУ Школа 179 г. Москвы, педагог дополнительного образования, mverb1543@gmail.com

EDUSat

В.О. Глазунов, М.А. Качай, П.В. Петров, А.Н. Ефимкин



В школах даётся хорошая теоретическая база по физике, математике, программированию, но космические исследования требуют междисциплинарного подхода. Тогда как в школе названные дисциплины изучаются отдельно, а астрономия может отсутствовать вовсе. Существующие образовательные наборы на космическую тематику («Орбикрафт 3D», Junі, XOrbiX, «Интросат») ориентированы преимущественно на инженерию и часто не дают наглядного результата при изучении сложных физических и астрономических явлений.

EDUSat — это платформа, которая включает механический макет спутника, бортовую электронику, испытательные стенды и ПО. Проект изначально создаётся с ориентацией на визуализацию сложных явлений. Другая важная особенность — доступность. В настоящее время отсутствует широкодоступная платформа для проведения экспериментов и разработки проектов, включая индивидуальные, что накладывает ограничения как по сложности, так и по стоимости.

Корпус и маховики

Корпус первой версии изготавливается методом 3D-печати с соблюдением стандартных спецификаций CubeSat. Форм-фактор — CubeSat 2U (100×100×227 мм по направляющим). Это позволяет разместить внутри аккумуляторные батареи, базовую плату и блок системы ориентации, оставляя место для дополнительной полезной нагрузки. Размер совместим с большинством современных 3D-принтеров.

Вся рама удерживается восемью винтами диаметром 4 мм, обеспечивая высокую жёсткость и устойчивость к нагрузкам (включая падения). 3D-печать позволяет оперативно модифицировать отдельные узлы без полной замены конструкции.

Маховики — основной способ управления ориентацией. Используются бесколлекторные двигатели с высоким крутящим моментом. Схема — три маховика, расположенных ортогонально друг другу; оси вращения проходят через геометрический центр (там же должен находиться центр масс). Для различных стендов есть 2 версии маховиков: пластиковые и алюминиевые. Пластиковые позволят пользователям пробовать различные геометрические формы и изготавливать их на своём 3D-принтере. Они крепятся на отдельной детали, которая затем устанавливается на раму, дополнительно усиливая её.

Электроника

Основой электронной части является печатная плата размером 90×90 мм, на которой размещены все ключевые компоненты.

Вычислительная подсистема построена на микроконтроллере STM32H7, что даёт высокую производительность и позволяет подключать множество датчиков, в том числе камеры OV2640 (определение направления на Солнце), гироскоп, акселерометр, драйверы трёх бесколлекторных двигателей, датчики тока, Bluetooth-модуль и другую полезную нагрузку, которая может пригодиться пользователю.

Солнечные датчики — две широкоугольные камеры с частично перекрывающимися полями зрения. В каждый момент активна только одна камера (аппаратное переключение через отдельный вывод включения OV2640). Это снижает нагрузку и позволяет применять сложные алгоритмы обработки изображений (не только для Солнца, но и для других небесных объектов).

Плата расширения (в перспективе) — аппаратно-программный симулятор, который будет воспроизводить условия, приближённые к реальному космическому полёту. Плата будет генерировать данные, имитирующие орбитальное движение, вращение и внешние воздействия, интегрируясь с симуляционной средой MIDE.

Испытательные стенды

- Трёхосный стенд (в разработке) позволяет отрабатывать систему ориентации без ограничений по углам поворота, в отличие от стендов на воздушных подшипниках. Создаётся новая версия с повышенной точностью позиционирования.
- Упрощённая версия с одной осью проста в использовании и мобильна.
- Интеграция с MIDE: часть данных поступает от реальных датчиков спутника, часть — от симулятора. К спутнику могут подключаться виртуальные датчики, эмулирующие показания на основе расчётов.

Спутник устанавливается на испытательный стенд, который допускает вращение по всем трём осям без ограничений. Пользователь может загружать алгоритмы для проверки методов определения положения Солнца, стабилизации, удержания ориентации, передачи данных по радиоканалу и определения абсолютной ориентации в пространстве. На фотографии представлена апробация платформы в рамках мастер-класса лаборатории «Астродинамика» для участников «Воздушно-инженерной школы».

Что даёт платформа?

- Построение учебной программы сразу по нескольким направлениям (астрономия, математика, физика, программирование, инженерия).
- Возможность отрабатывать алгоритмы определения положения Солнца, стабилизации, удержания ориентации, определения абсолютной ориентации в пространстве.
- Проведение гибридных экспериментов, где часть данных поступает от реальных датчиков, а часть — от симулятора MIDE (Missions Integrated Development Environment). Он позволяет производить моделирование движения как отдельных спутников, так и группировок.
- Работу с реальным аппаратным обеспечением, что, как показали испытания, критически важно — алгоритмы, успешно работавшие в симуляции, не всегда обеспечивают устойчивую стабилизацию на реальном прототипе. Уже было реализовано несколько версий алгоритмов, которые тестировались на данной платформе. Результаты были представлены на нескольких конференциях и конкурсах. В ближайшее время планируется публикация нескольких статей с результатами, которые были получены на данной платформе. Сейчас ведётся отработка обновлённой электроники и улучшение корпуса. После доработок платформа будет опробована на массовых мастер-классах, а также в школьных проектах. Над проектом работают 2 школьника и 2 студента, в том числе ученик инженерно-математического профиля и выпускник математического профиля «ГБОУ Школа №179».

Исполнители проекта:

Глазунов Владислав Олегович (ГБОУ Школа №179, 9И класс)

Качай Михаил Алексеевич (ОАНО Школа Летово, 10 класс)

Петров Порфирий Владимирович (МГТУ имени Н. Э. Баумана ИУ-4, 2 курс)

Руководитель проекта

Ефимкин Александр Николаевич (факультет космических исследований МГУ, 2 курс)

s24d_efimkin@179.ru

Есть ли зависимость между количеством семейных приемов пищи и самооценкой или стрессом?

В.А. Резник, У.Д. Кошечкина, Ю.М. Пенькова

Введение

Семейное взаимодействие во время приемов пищи рассматривается как важный фактор социализации и эмоционального развития подростков. В литературе обсуждается связь частоты совместных ужинов с риском депрессии, расстройств пищевого поведения и уровнем школьной успеваемости (Harrison et al., 2015). Однако количественные данные о связи частоты таких приёмов с измеримыми показателями самооценки (Розенберга) и стресса (Спилбергера - Ханинга) у подростков в возрасте 13-16 лет остаются ограниченными (Berge et al., 2025).

Актуальность:

Увеличение количества совместных семейных приемов пищи может способствовать стабильной самооценке и снижению уровня стресса (Harrison et al., 2015).

Цель исследования:

Проверка существования корреляции между частотой семейных приёмов пищи (более 7 раз в неделю против не более 3 раз в неделю) и показателями самооценки, стресса.

Задачи исследования:

- изучение имеющихся научных работ по интересующей нас теме
- составление опросника на выявление необходимых корреляций (стресс, самооценка)
- проведение опроса, сбор и анализ данных
- формулировка вывода.

Гипотезы:

Теоретическая: существует связь между количеством совместных приемов пищи с семьей и психоэмоциональным состоянием ребенка.

Эмпирическая: уровень тревоги, определенный с помощью опросника Спилбергера-Ханина подростка (13-16 лет) отрицательно связан с частотой совместных приемов пищи с семьей, уровень самооценки, измеренный с помощью шкалы самооценки Розенберга положительно связан с частотой совместных приемов пищи с семьей (Harrison et al., 2015; Berge et al., 2025).

Проблема нашего исследования состоит в том, что и м е е т с я множество влияющих факторов (полнота семьи, характер, привычки), а также в специфическом характере выборка (московские подростки, связанные с математикой) (Berge et al., 2025).

Метод исследования

Выборка

В исследовании приняли участие 85 подростков и молодых людей в возрасте от 12 до 23 лет (медиана = 16 лет, среднее $M = 15,9$, $SD = 2,1$) (рис. 1).

Распределение по полу: 47 юношей, 38 девушек.

Состав семьи (количество совместно проживающих): в среднем 2 - 4 человека (рис. 2).

Рис 1. Распределение выборки по возрасту

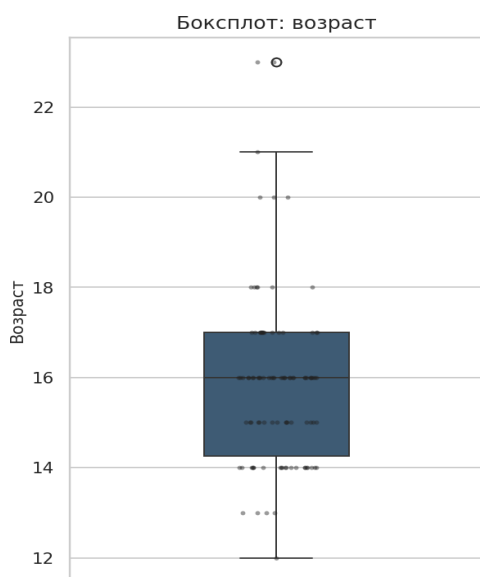
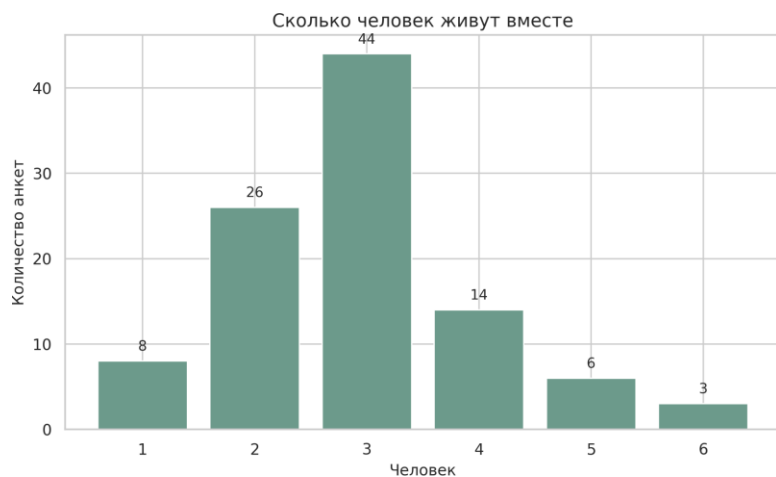


Рис. 2. Распределение выборки по количеству совместно проживающих членов семьи



Инструменты сбора данных

Использовались следующие методики (данные были собраны анонимно через опрос):

- **Самооценка** - шкала Розенберга (Rosenberg, 1965) (10–50 баллов). Высокий балл соответствует высокой самооценке.
- **Тревога** - шкала Ханинга (Spielberger, Gorsuch & Lushene, 1970) (20–80 баллов). Высокий балл соответствует высокой тревоге.
- **Частота совместных семейных приемов пищи** - категориальная шкала:
0 = «ни разу»,
1 = «1–3 раза в неделю»,
2 = «4–6 раз в неделю»,
3 = «более 7 раз в неделю».
- **Настроение** - самоотчет с вариантами: «радостное», «умиротворенное», «нейтральное», «раздраженное», «подавленное».

Статистический анализ

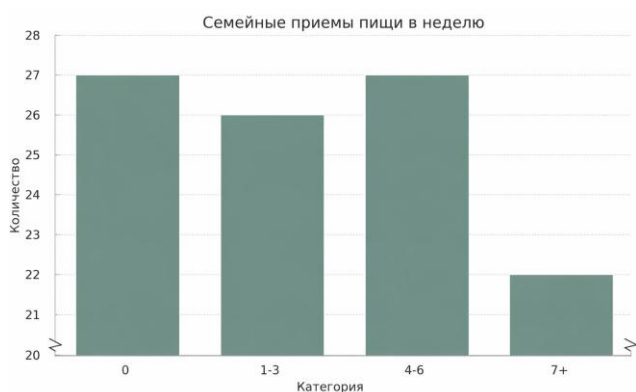
Для проверки связи между переменными рассчитывался коэффициент корреляции (Пирсона (Pearson, 1896) для количественных переменных, для частоты приёмов пищи — ранговая корреляция Спирмена (Spearman, 1904)).

Результаты

Средний уровень самооценки по шкале Розенберга составил - 31,5, тревоги по шкале Ханинга - 43,88.

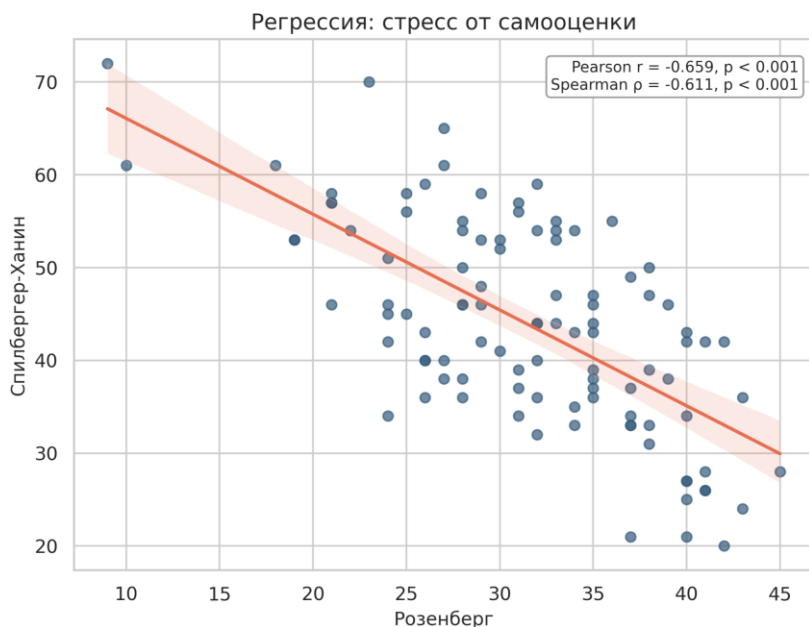
Общая характеристика выборки - график

Рис. 3. Распределение частоты совместных приемов пищи



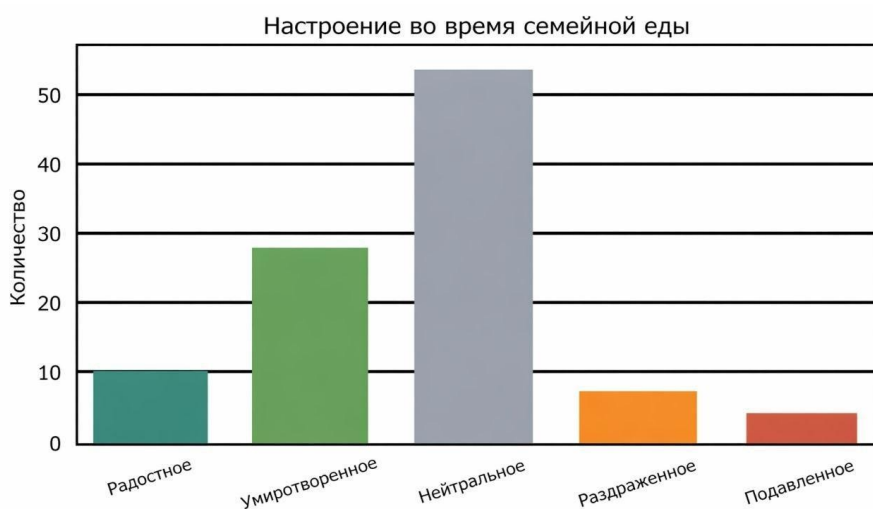
Равные группы по количеству приемов пищи с семьей: большие группы до 6 приемов, группа 7+ приемов пищи значительно меньше остальных (рис.3).

Рис. 4. Взаимосвязь «тревога vs самооценка»

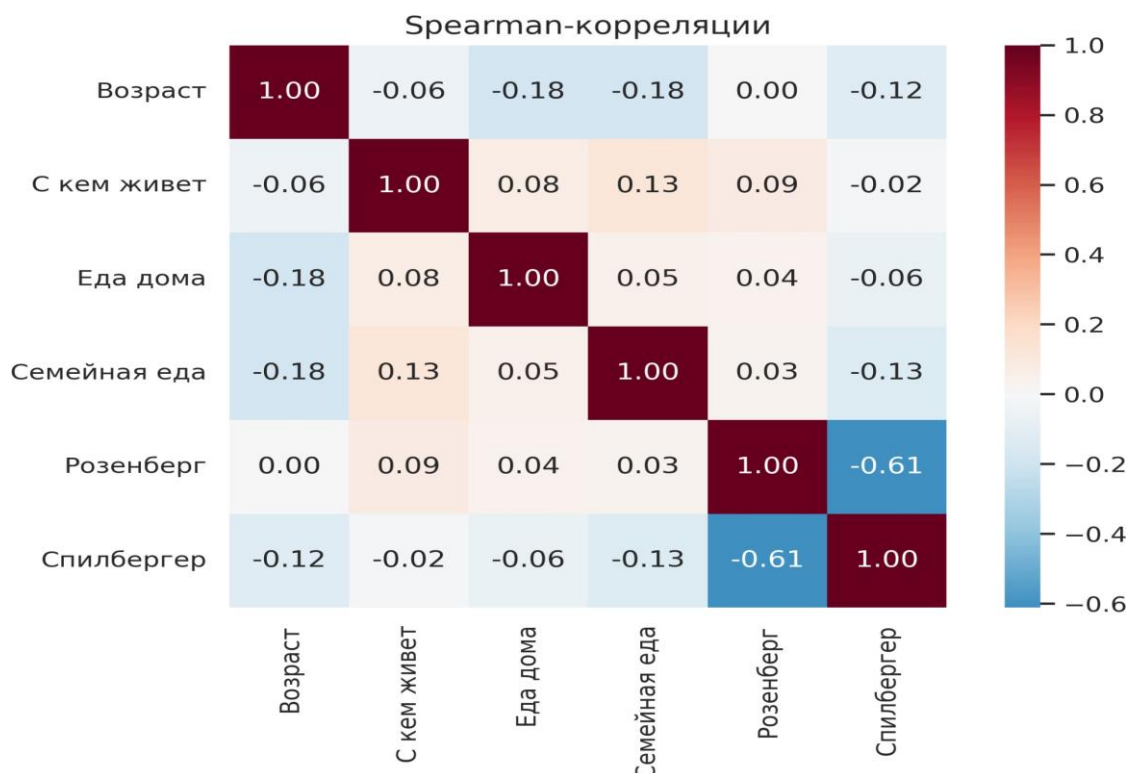


Присутствует обратная связь между тревогой и самооценкой (рис.4).

Рис. 5. Распределение самооценки настроения



Подростки преимущественно чувствуют себя нейтрально во время приемов пищи с семьей. (рис. 5)

Таб. 1. Корреляции между переменными внутри групп выборки

Корреляция между частотой семейных приемов пищи и уровнем тревоги оказалась близка к нулю ($r = -0,135$), как и связь между частотой приемов пищи и самооценкой

($r = 0,034$).

Однако обнаружена умеренная отрицательная связь между тревогой и самооценкой

($r = -0,611$, $p < 0,001$), что указывает: чем выше тревога, тем ниже самооценка. (таб. 1)

Обсуждение

Основные выводы. Наше исследование опровергает гипотезу о том, что регулярные семейные приемы пищи (>7 раз в неделю) ассоциированы с более высокой самооценкой и более низким уровнем тревоги у подростков, поэтому практическая рекомендация по увеличению трапез не обоснована. Корреляции частоты трапез с самооценкой ($r = 0,034$) и тревогой ($r = -0,135$) оказались близки к нулю.

Сравнение с другими исследованиями. Наши результаты расходятся с данными ряда зарубежных работ. Например, исследование Harrison et al. (2015) показало, что частые семейные приемы пищи связаны с более высокой самооценкой и более низким уровнем депрессивных симптомов. Также López-Gil et al. (2024) обнаружили положительную связь между частотой семейных трапез и самооценкой ($p = 0,040$).

Исследование Utter et al. (2018) также подтвердило, что семейные ужины ассоциированы с более низким уровнем стресса у родителей и подростков.

Возможные причины расхождения результатов:

- **Неучтенные переменные** — полнота семьи, взаимоотношения родителей и детей, эмоциональный фон во время приемов пищи.
- **Специфичность выборки** — московские подростки, углубленно изучающие математику. Возможно, их психоэмоциональное состояние в большей степени определяется учебной нагрузкой, чем семейными активностями.

Побочный эффект - появилась видимая обратная корреляция между стрессом и самооценкой, но чтобы понять, есть ли прямая взаимосвязь, пока не хватает данных.

Сильные стороны исследования: использование валидных шкал (Розенберг, Ханинг), достаточно большой объем выборки ($N = 85$).

Выводы

1. Существует сильная обратная корреляция между самооценкой и тревогой в исследуемой группе подростков.
2. Подростки, которые едят вместе с семьей >7 раз в неделю, не имеют достоверно более высокую самооценку.
3. Не обнаружено связи между частотой совместных приемов пищи с эмоциональным фоном.

Литература

Berge J.M., et al. (2025). Constellations of Family Qualities and Links with Psychological and Behavioral Health. *Journal of Child and Family Studies*, 34, 2734–2748.

Harrison M.E., et al. (2015). Systematic review: Family meals and child and adolescent health outcomes. *Journal of Pediatric Health Care*.

Rosenberg M. (1965). *Society and the adolescent self-image*. Princeton University Press.

Spielberger C.D., Gorsuch R.L., Lushene R.E. (1970). *Manual for the State-Trait Anxiety Inventory*. Consulting Psychologists Press.

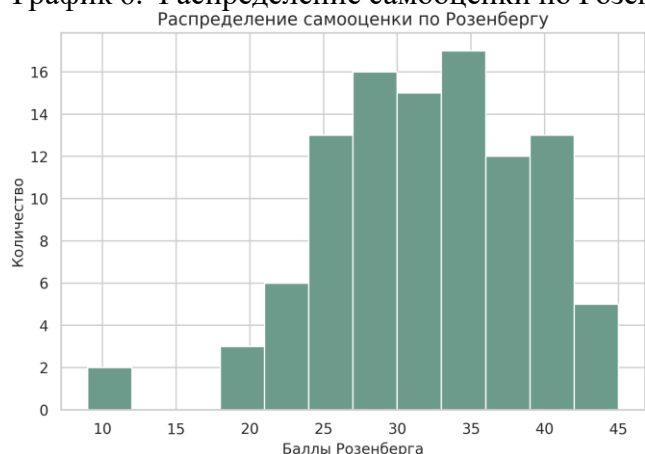
Ханин Ю.Л. (1976). Краткое руководство к шкале реактивной и личностной тревожности Ч.Д. Спилберга. ЛНИИФК.

Pearson K. (1896). Mathematical contributions to the theory of evolution. III. Regression, heredity, and panmixia. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 187, 253–318.

Spearman C. (1904). The proof and measurement of association between two things. American Journal of Psychology, 15(1), 72–101.

Графики и таблица для более глубокого анализа выборки

График 6. Распределение самооценки по Розенбергу

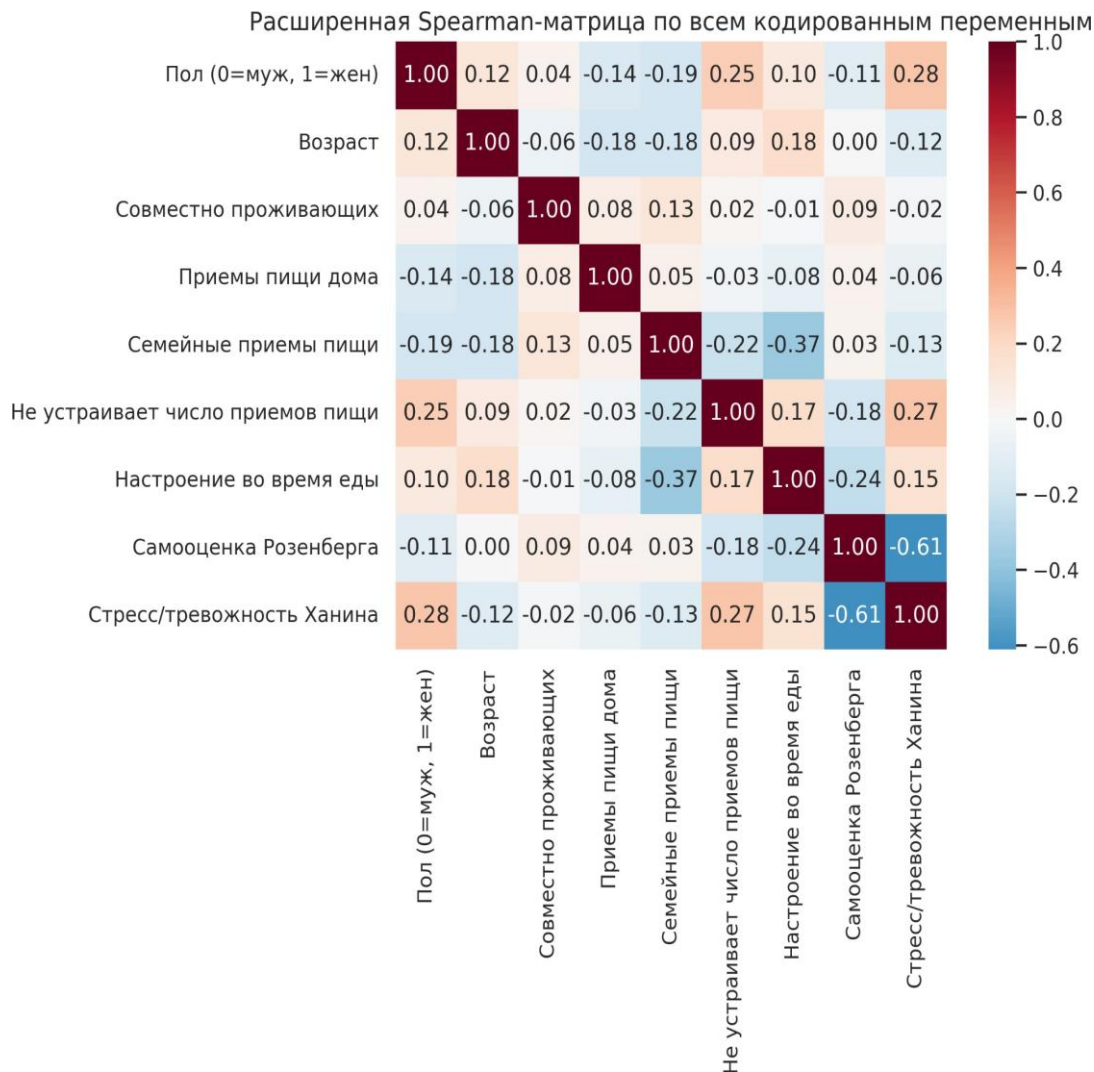


Показатель самооценки у большей части выборки сосредоточен в промежутке от 25 до 45, что превышает средний показатель (25). (рис. 6)

График 7. Распределение стресса по Спилбергеру - Ханингу



Уровень стресса у большинства выборки сосредоточен в промежутке от 35 до 60, что превышает средний показатель (40) (рис. 7)



Итоговая таблица представляет собой расширенную матрицу корреляций между всеми переменными исследования с учетом группировки выборки. Для каждой пары переменных рассчитан коэффициент корреляции Спирмена r . Чем выше абсолютное значение r , тем сильнее связь между переменными.

Исполнители проекта:

Резник Варвара Андреевна, ГБОУ Школа 179 г. Москвы, 10Б класс,

Кошечкина Ульяна Дмитриевна, ГБОУ Школа 179 г. Москвы, 10Б класс,

Пенькова Юлия Михайловна, ГБОУ Школа 179 г. Москвы, 10Б класс.

Руководитель проекта

Серебренникова Анна Денисовна, РАНХиГС, Институт общественных наук, Когнитивная психология: от классических теорий до современных исследований виртуальной реальности, магистратура, 2 курс.

serebrennikovaad@gmail.com

Исследование «проклятия знания» у подростков

Э.Я. Любимова, А.С. Вишнякова

Введение

Что изучает когнитивная психология

Когнитивная психология представляет собой раздел психологической науки, предметом которого являются познавательные (когнитивные) процессы человека. К ним относятся восприятие, внимание, память, воображение, мышление, речь, принятие решений, а также метакогнитивные способности – способности человека контролировать и оценивать собственную познавательную деятельность. Одна из центральных проблем этой области – изучение того, как люди решают задачи, как они прогнозируют успешность других людей и какие когнитивные искажения (систематические ошибки мышления) возникают при этом.

Определение ключевых понятий

Проклятие знания – это когнитивное искажение, при котором человек, обладающий некоторой информацией, систематически переоценивает способность других людей, этой информацией не владеющих, к её пониманию или к нахождению решения на её основе. Данный термин был введён экономистами Колином Кэмерером, Джорджем Лёвенштейном и Мартином Вебером в 1989 году [1]. Проклятие знания проявляется в ситуациях обучения (учитель переоценивает понятность своего объяснения), коммуникации (отправитель сообщения думает, что его мысль очевидна), экономического поведения и во многих других.

Инсайтные задачи – это класс задач, решение которых наступает не в результате последовательного логического перебора или применения известного алгоритма, а внезапно. Классическими примерами инсайтных задач являются «CRA-задачи» разработанные Медником [2], «задача со свечой» Карла Данкера [3] и многие другие. Отличительная особенность инсайтных задач состоит в том, что после нахождения ответа решение кажется очевидным и простым – однако до момента инсайта оно воспринимается как крайне трудное или даже невозможное. Именно эта особенность делает инсайтные задачи особенно уязвимыми для эффекта «проклятия знания».

Актуальность исследования

Изучение влияния «проклятия знания» на точность прогнозирования решения инсайтных задач у подростков имеет теоретическую, практическую и социальную значимость.

Теоретическая значимость обусловлена тем, что, несмотря на обширную литературу о «проклятии знания» у взрослых (Кэмерер и др., 1989 [1], Ньютон, 1990 [5], Бреч и Блум, 2003,

[7]), исследований, выполненных на подростковых выборках с использованием именно инсайтных задач, крайне мало.

Социальная значимость определяется тем, что способность точно предсказывать успешность других людей лежит в основе многих форм кооперации, взаимопомощи и эффективной коммуникации, как подчеркивает Гриар и её коллеги в исследовании [4]. Подростковый возраст – это период активного вхождения в социум, формирования учебных и профессиональных групп, где такая способность необходима. Если подросток, получивший готовый ответ, систематически переоценивает возможности других, это может приводить к неоправданным ожиданиям, конфликтам и снижению качества совместной работы. Напротив, подростки, привыкшие самостоятельно находить решения, сохраняют более реалистичную картину познавательных возможностей окружающих.

В эпоху цифровизации и доступности готовых ответов (от решебников до нейросетей, мгновенно решающих задачи) проблема «проклятия знания» становится особенно острой. Чем легче подросток получает готовый ответ, тем меньше у него опыта самостоятельного преодоления трудностей, и тем сильнее он может оказаться подвержен этому искажению. Поскольку в инсайтных задачах после нахождения ответа решение кажется очевидным и простым, данный эффект для них проявляется особенно сильно. Наличие опыта самостоятельного решения смягчает искажение, тогда как получение готового ответа без такого опыта – усиливает. Наше исследование призвано эмпирически проверить, действительно ли знание готового ответа делает прогнозы подростков менее точными.

Метод

Выборка

В исследовании приняли участие 150 подростков в возрасте 13–19 лет. Все испытуемые были разделены на три группы:

1. Группа «Самостоятельное решение» – решали инсайтные задачи сами.
2. Группа «Знающие ответ» – им сразу сообщали правильный ответ на те же задачи, не давая решать самостоятельно.
3. Группа «Не решающие и не знающие ответ» – не решали задачи самостоятельно и не знали ответа (видели только условия задач).

Используемые задачи

В исследовании использовались два типа задач, валидированных в предшествующих работах как инсайтные.

1. Задачи на отдалённые ассоциации (CRA) – испытуемым предъявляются три слова. Задача – подобрать четвёртое слово, которое ассоциативно связано или образует устойчивое словосочетание с каждым из трёх данных слов. CRA-задачи разработаны Медником (1962) [2] и являются стандартным инструментом в психологии творчества и инсайта.

2. Краткие инсайтные задачи-истории – предъявляется короткий текст (1–2 предложения), описывающий нестандартную ситуацию. Необходимо дать краткий ответ (слово или фразу), разрешающий проблему. Правильный ответ неочевиден и требует выхода за рамки первоначальной интерпретации.

Главными условиями при выборе задач для опроса были: отказ от первоначальных ассоциаций, невозможность алгоритмизации, компактность и стандартизация, валидизация в мировой научной практике.

Этапы

Исследование включало несколько этапов. Все три группы работали с одними и теми же задачами, но в разных условиях, описанных выше. После выполнения задачи участники всех трёх групп давали прогноз, сколько задач сможет правильно решить подросток, не видящей этой задачи ранее. Прогноз делался в процентах (от 0% до 100%).

Ответы, полученные от участников группы «Самостоятельное решение» на задачах, использовались в качестве контрольных данных. Именно с процентом правильного решения задач этой группы сравнивали прогнозы всех трёх групп. Так же прогнозы групп сравнивались между друг другом.

Гипотезы

Основная гипотеза исследования: Подростки, которым изначально известен ответ на инсайтную задачу (подверженные проклятию знания), будут значительно выше оценивать успешность её решения новичками по сравнению с подростками, которые пришли к ответу самостоятельно (не подверженные проклятию знания), а также по сравнению с подростками, не имеющими ни опыта решения, ни знания ответа.

Результаты

Descriptive Statistics

	верные вопросы	верные слова	слова (знают)	вопросы (знают)	слова (ответ)	вопросы (ответ)	слова (ничего)	вопросы (ничего)
Valid	50	50	50	50	43	43	58	58
Missing	232	232	232	232	239	239	224	224
Mean (arithmetic)	49.80	21.60	37.20	58.80	57.44	68.37	57.93	65.86
Std. Deviation	30.47	20.34	29.00	29.53	25.27	24.00	28.45	26.76
Shapiro-Wilk	0.928	0.888	0.913	0.922	0.970	0.902	0.946	0.894
P-value of Shapiro-Wilk	.004	< .001	.001	.003	.328	.001	.012	< .001
Minimum	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Maximum	100.0	70.00	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

Рис. 1 Описательная статистика

По рассчитанным средним значениям различных выборок (1 группа – знают, 2 группа

– ответ, 3 группа – ничего) видно, что значения группы с самостоятельным решением значительно ближе к реальным результатам (рис. 1). Распределение данных неравномерно, что свидетельствует о неидеальном выборе задач.

Comparison	r_{rb}	p	p_{bonf}
1 - 2	0.287	.019	.058
1 - 3	0.320	.004	.012
2 - 3	0.043	.738	1.000

Рис. 2 Показатели критерия Манна-Уитни с поправкой и без поправки Бонферрони

По результатам проведенного анализа между отклонениями от среднего реального процента решенных задач для разных групп видно, что p-value различий между первой и второй группами меньше критического уровня 0.05, как и между первой и третьей группой (рис. 2). Это говорит о том, что первая группа точнее предсказывает результаты, чем вторая и третья, отличия между которыми не могут быть найдены с помощью этого метода.

Обсуждение результатов

Сравнение с другими исследованиями

Наши результаты хорошо согласуются с классическими работами Ньютон (стук и мелодия) [5] и экспериментами Кэмерера [1] на взрослых. Как отмечает Бёрч [9], взрослые также демонстрируют переоценку чужих способностей, но подростки ещё более уязвимы.

Возможное объяснение: у взрослых больше жизненного опыта неудач и ситуаций, когда другие не понимали очевидных вещей. Подростки же, получив готовый ответ, меньше сомневаются в его лёгкости и ещё не натренировали «когнитивную скромность» — способность учитывать возможность непонимания у других.

Интересно, что группа самостоятельных решателей дала почти идеально точный прогноз. Это подтверждает данные психологов образования [8]: только тот, кто сам прошёл через трудность, способен адекватно оценить трудность для новичка. Поэтому лучший учитель — тот, кто недавно сам выучил этот предмет и помнит свои ошибки.

Ограничения исследования

1. Выборка. Мы исследовали только 150 подростков из одной школы с математическим уклоном. В других средах или школах результаты могут отличаться.
2. Тип задач. Использовались только вербально-логические инсайтные задачи. Для визуальных или математических инсайтов эффект может быть слабее или сильнее.
3. Момент времени. Мы измеряли прогноз сразу после получения ответа. Неизвестно, как долго сохраняется эффект «проклятия знания».

4. Мотивация. Отсутствие стимулов и вознаграждения участников могло вызывать меньшую вовлеченность и точность при прохождении опроса.

Практический вывод

Проклятие знания – это не абстрактный психологический феномен, а реально действующий механизм, который влияет на то, как подростки оценивают способности других людей. Он может приводить к неоправданным ожиданиям, недопониманию и конфликтам. Наиболее эффективный способ противостоять этому искажению — самостоятельное решение задач и рефлексия собственного опыта преодоления трудностей.

Заключение

В ходе проведённого исследования было экспериментально подтверждено, что феномен «проклятия знания» распространён среди подростков и значимо влияет на точность прогнозирования успешности решения инсайтных задач. Таким образом, наличие опыта самостоятельного преодоления трудности выступает как фактор, снижающий эффект «проклятия знания», тогда как получение готового ответа без такого опыта – усиливает его. Полученные результаты имеют практическое значение для образовательной практики и повседневной коммуникации подростков, указывая на необходимость осторожного использования готовых решений и важность самостоятельной познавательной деятельности.

Список литературы

- [1] Camerer, C., Loewenstein, G., & Weber, M. (1989). The curse of knowledge in economic settings: An experimental analysis. *Journal of Political Economy*, 97(5), 1232–1254.
- [2] Mednick, S. A. (1962). The associative basis of the creative process. *Psychological Review*, 69(3), 220–232.
- [3] Duncker, K. (1945). On problem-solving. *Psychological Monographs*, 58(5), Whole No. 270.
- [4] Ghrear, S., Fung, K., Haddock, T., & Birch, S. A. J. (2021). Only familiar information is a "curse": Children's ability to predict what their peers know. *Child Development*, 92(1), 54–75.
- [5] Newton, E. L. (1990). The rocky road from actions to intentions (Doctoral dissertation). Stanford University.
- [6] Benedek, M., & Neubauer, A. C. (2013). Revisiting Mednick's model on creativity-related differences in associative hierarchies: Evidence for a common path to uncommon thought. *Journal of Creative Behavior*, 47(4), 273–289.
- [7] Birch, S. A. J., & Bloom, P. (2003). Children are cursed: An asymmetric bias in mental-state attribution. *Psychological Science*, 14(3), 283–286.
- [8] Heath, C., & Heath, D. (2007). *Made to stick: Why some ideas survive and others die*. Random House.
- [9] Birch, S. A. J. (2005). When knowledge is a curse: Children's and adults' reasoning about mental states. *Current Directions in Psychological Science*, 14(1), 25–29.

Исполнители проекта:

Любимова Элина Яковлевна, ГБОУ Школа 179 г. Москвы, 10В класс,
Вишнякова Анна Сергеевна, ГБОУ Школа 179 г. Москвы, 10В класс.

Руководитель проекта

Серебренникова Анна Денисовна, РАНХиГС, Институт общественных наук, Когнитивная психология: от классических теорий до современных исследований виртуальной реальности, магистратура, 2 курс.

serebrennikovaad@gmail.com

Эмпирическое исследование клипового мышления у подростков

Д.М. Озерова, Е.Д. Жигунова

Ключевые слова: клиповое мышление, подростки, экранное время, короткие видео.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы феномен клипового мышления активно обсуждается в педагогической и психологической литературе. Обычно под этим понимают стиль мышления, при котором внимание быстро переключается, информация воспринимается фрагментарно, а способность к длительной концентрации ослаблена [8]. Считается, что такой стиль формируется под воздействием цифровой среды, особенно коротких видео (TikTok, Shorts, Clips), которые подают информацию несвязными и короткими порциями [2].

Подростки рассматриваются как наиболее уязвимая группа в контексте влияния цифровой среды, поскольку их нервная система находится в стадии активного развития, а объёмы экранного времени в этом возрасте, предположительно, достигают небезопасных значений [10]. Однако, несмотря на популярность этой темы в СМИ и обычных разговорах, было проведено недостаточно экспериментов, которые бы объективно измеряли связь между временем просмотра коротких видео и когнитивными функциями. Большинство выводов основаны на самоотчете или наблюдениях, а не на стандартизированных тестах [1, 9].

Цель нашего исследования — проверить, насколько выражены признаки клипового мышления у подростков с разной частотой просмотра коротких видеоклипов, а именно — как они воспринимают, анализируют и запоминают информацию.

Теоретическая гипотеза: время, проведённое за просмотром клипов, положительно связано с выраженностью признаков клипового мышления.

Эмпирические гипотезы:

- 1) Существует отрицательная связь между временем просмотра клипов и уровнем концентрации внимания (показатели времени реакции в тестах).
- 2) Существует отрицательная связь между временем просмотра клипов и способностью анализировать и запоминать информацию.

МЕТОД**Дизайн исследования**

Мы не влияли на переменные, исследование выполнено в виде корреляционного анализа. Участники проходили онлайн исследование добровольно.

Участники

В исследовании участвовали подростки 13–16 лет, всего 91 человек. Процедура была анонимной.

Переменные:

- среднее время просмотра коротких видео в день (в часах);
- среднее время просмотра коротких видео в неделю (в часах);
- время реакции в трёх тестах (в секундах);
- результат теста на запоминание информации (в баллах).

Побочная переменная: условия внешней среды (контроль через инструкцию).

Методы

Использовались четыре стандартизированных теста, измеряющих время реакции и способность к обработке информации.

Тест Струпа состоял из трех частей:

В первой участникам предлагалось выбрать цвет, название которого было напечатано черными буквами (рис. 1).



Рис. 1. Пример задания первой части теста Струпа

Во второй части теста в цветном прямоугольнике белым шрифтом было написано название цвета, людям нужно было выбрать название цвета фона прямоугольника, написанное различными цветами в вариантах ответа (рис. 2).

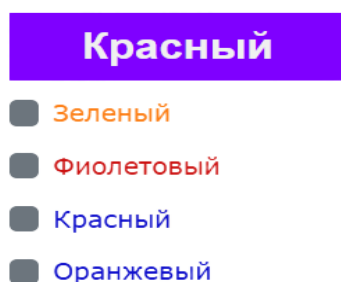


Рис. 2. Пример задания второй части теста Струпа

В третьей же задание было следующим: нужно было выбрать из вариантов ответа, шрифт которых отличался по цвету, название цвета, которым было написано предоставляемое слово (рис. 3).

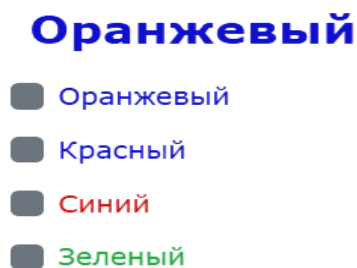


Рис. 3. Пример задания третьей части теста Струпа

Также участникам опроса предлагалось прочитать текст, чтобы впоследствии ответить на вопросы по его содержанию.

Процедура

Онлайн-опрос через Google Forms включал информированное согласие, вопросы о возрасте и времени просмотра, а также четыре теста. Сбор данных шёл через школьные чаты и тематические группы.

Анализ данных

Обработка данных проводилась в программе JASP. Использовали описательную статистику, проверку нормальности по тесту Шапиро–Уилка, а также корреляционный анализ по критерию Спирмена. Уровень значимости — 0,05.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Descriptive Statistics

В день	В неделю	Время в первом тесте	Время во втором тесте	Время в третьем тесте	Тест

Median	3.000	22.00	17.45	27.89	26.45	5.000
Mean	2.845	21.92	17.43	30.33	27.66	5.220
Std. Deviation	1.630	9.478	5.095	9.881	8.946	1.794
Shapiro-Wilk	0.960	0.971	0.966	0.959	0.964	0.939
P-value of Shapiro-Wilk	.007	.038	.017	.005	.013	< .001

Таб. 1. Описательная статистика

Описательные статистики (таб. 1)

Среднее время просмотра клипов в день — около 2,85 часа, в неделю — примерно 21,92 часа. Медианы — 3 часа в день и 22 часа в неделю.

Показатели когнитивных тестов выглядели так: время реакции в тестах Струпа варьировалось примерно от 17 до 30 секунд, а тест на запоминание информации давал средний результат около 5 условных единиц.

Проверка нормальности

Критерий Шапиро–Уилка показал, что распределения всех переменных отличаются от нормального ($p < 0,05$ для всех показателей) (таб. 1), поэтому для корреляции мы использовали коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

Корреляционный анализ

Spearman's Correlations

			Spearman's rho	p
В день	-	Время в первом тесте	0.163	.122
В день	-	Время во втором тесте	-0.055	.601
В день	-	Время в третьем тесте	-0.070	.511

В день	-	Тест	-0.067	.529
В неделю	-	Время в первом тесте	0.054	.613
В неделю	-	Время во втором тесте	-0.109	.304
В неделю	-	Время в третьем тесте	-0.135	.202
В неделю	-	Тест	-0.141	.184

* $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

Таб. 2. Основные результаты в корреляционной статистике

Корреляционный анализ показал (таб. 2): связь между временем просмотра и когнитивными показателями отсутствует (статистически незначимая – все $p < 0,05$). p -значимость варьировалась в диапазоне от -0,141 до 0,163.

Побочные результаты

Spearman's Correlations

			Spearman's rho	p
В день	-	В неделю	0.722***	< .001
Время в третьем тесте	-	Время во втором тесте	0.749***	< .001

* $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

Таб. 3. Побочные результаты в корреляционной статистике

Побочные результаты (таб. 3):

- Сильная корреляция времени просмотра клипов в день и в неделю, что было ожидаемым результатом.
- Значимая корреляция тестов между собой (рис. 4). Например, между третьим и вторым тестом выявлена сильная положительная связь ($\rho = 0.749$, $p < 0.001$).

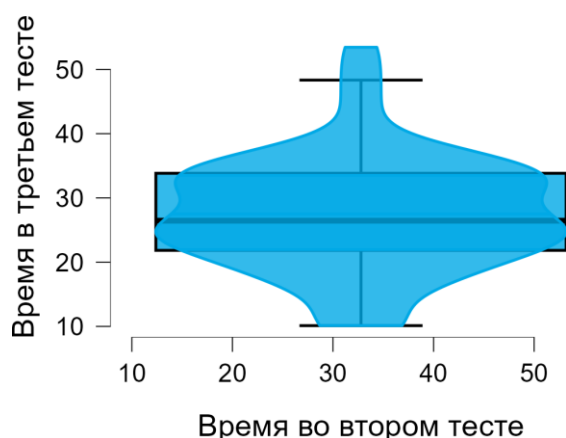


Рис. 4. Скрипичная диаграмма корреляции между вторым и третьим тестом

Таким образом, корреляция в исследовании выявлена не была: частота просмотра коротких видеоклипов (как в день, так и в неделю) не связана с показателями когнитивных тестов у подростков.

ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты не подкрепляют широко распространённое мнение о негативном влиянии коротких видео на когнитивные функции подростков [6; 10]. Ни одной из гипотез о связи просмотра и ухудшения внимания или памяти подтвердить не удалось.

Возможные объяснения таких результатов:

1. Клиповое мышление либо не существует как явление, либо его связь с экранным временем гораздо слабее, чем думают. Влияние могут оказывать другие факторы — среда или же индивидуальные особенности мозга.
2. Данные о времени просмотра основаны на самоотчете, который может быть неточным — подростки могли ошибаться или искажать время.
3. Хотя выборка достаточна, чтобы выявить средние или сильные связи, слабые эффекты могли остаться незамеченными.
4. Современные подростки, возможно, лучше адаптированы к цифровой среде, и просмотр коротких видео не влияет на них так, как предполагают.

Ограничения исследования

1. Самоотчеты о времени просмотра могут быть необъективными.
2. Онлайн-формат в большинстве случаев исключает тех, кто мало пользуется соцсетями.
3. Исследование корреляционное, поэтому нельзя строить причинно-следственные связи.

ВЫВОДЫ

1. В исследовании не выявлена связь между временем просмотра коротких видеоклипов и когнитивными показателями подростков.
2. Гипотеза о том, что клиповое мышление связано с временем просмотра, не подтвердилась.

Список литературы

1. М.: АСТ, 2010. (Оригинал: Toffler A. The Third Wave: The Classic Study of Tomorrow. — William Morrow and Company Inc., 1980).
2. Bakhmetieva I., Gorbunov V., Burov M., Margalitadze O., Vostroilova E. Students' clip thinking: a problem approach // Proceedings of INTCESS 2020 — 7th International Conference on Education and Social Sciences. — Dubai, 2020. — P. 308–313.
3. Крайнов А. Л. Влияние клипового мышления на когнитивные способности студентов // European Proceedings of Social and Behavioural Sciences. — 2020. — Vol. 102. — P. 266–274. ([Academia.edu](https://www.academia.edu))
4. Goldfield G. Short videos, big impact on youth mental health // Psychology Today. — 2026. — 1 February.
5. Mona A.E., Roshith V., Peter R., Roy P., Hassan A., Devika M., Trishala M. Short video addiction and its impact on cognitive functioning in adolescents and youth: a systematic review // International Journal of Adolescence and Youth. — 2026. — Vol. 31 (1).
6. How short-form videos could be harming young minds // The Conversation. — 2025. — 9 December.
7. Average amount of screen time for children and young adults // American Academy of Pediatrics, Center of Excellence on Social Media and Youth Mental Health. — 2026. — 21 January.
8. Уваров М. А. Как проявляется клиповое мышление // Молодой ученый. — 2025. — № 29 (580). — С. 44–47.
9. Nguyen L., Walters J., Paul S., Monreal Ijurco S., Rainey G.E., Parekh N., Blair G., Darrah M. Feeds, feelings, and focus: A systematic review and meta-analysis examining the cognitive and mental health correlates of short-form video use // Psychological Bulletin. — 2025. — Vol. 151 (9). — P. 1125–1146. (Цитируется по Goldfield, 2026)
10. Influence of short video usage on adolescent's learning strategies: investigation on teenagers in HeBei North China // Scientific Reports. — 2025. — 1 December.

Исполнители проекта:

Озерова Дарья Михайловна, ГБОУ Школа 179 г. Москвы, 10В класс,
Жигунова Екатерина Денисовна, ГБОУ Школа 179 г. Москвы, 10В класс.

Руководитель проекта

Серебренникова Анна Денисовна, РАНХиГС, Институт общественных наук, Когнитивная психология: от классических теорий до современных исследований виртуальной реальности, магистратура, 2 курс.

serebrennikovaad@gmail.com

Изучение связи распространения бактерий с морскими течениями

А.С. Фомина

Введение

Бактерии представляют собой наиболее широко распространенную группу живых организмов на Земле, обнаруживаемую в разнообразных экологических нишах — от экстремальных сред (гидротермальные источники, соленые озера, глубинные слои земной коры) до симбиотических ассоциаций с многоклеточными организмами. Большинство из них является не культивируемыми, поэтому их изучение долгое время было затруднено. Развитие метагеномики, основанной на секвенировании тотальной ДНК непосредственно из экологических образцов, обеспечило возможность достоверной оценки таксономического разнообразия и численности микроорганизмов в окружающей среде без необходимости их культивирования. Благодаря этому появилась возможность изучать микробиомы ранее недоступных мест, таких как арктические моря России. Для изучения микробиомов был создан проект «Атлас микробных сообществ Российской Федерации» (URL: <https://studymeta.ru/>).

Микробные сообщества Карского и Баренцева морей представляют собой сложные и динамичные экосистемы, играющие ключевую роль в биогеохимических циклах Арктического региона. Несмотря на суровые климатические условия — низкие температуры, сезонный ледовый покров и ограниченный приток солнечной энергии — эти моря характеризуются высокой микробной активностью и разнообразием.

Несмотря на драматические сезонные изменения биогеохимических параметров, бактериальные сообщества западной Арктики демонстрируют замечательную стабильность таксономического состава (Kirchman D. L. 2010). Анализ пиросеквенирования показал, что обильные филоциты остаются обильными, а редкие — редкими.

Кроме того, появилась возможность изучать микробиомы, ассоциированные с различными морскими беспозвоночными. Исследования бактерий-симбионтов морских позвоночных показали, что родственные бактерии могут встречаться в достаточно отдаленных местах. Например, бактерии-симбионты морского червя *Oligobranchia sp.*, обитающего в море Лаптевых, оказались генетически близки бактериям-симбионтам из родственного вида морского червя *Galathealinum brachiosum*, полученного в ходе экспедиции в Мексиканском заливе.

На основе этих данных была выдвинута гипотеза, что почвенные бактерии могут переноситься на мельчайших кусочках веществ и в составе пелагического планктона, который дрейфует с глобальными морскими течениями.

Исследование распространения бактерий, обитающих на дне северных морей России — Баренцева, Печорского и Карского — направлено на выявление закономерностей их распространения и возможной связи с подводными течениями.

Цель работы

Предварительное исследование для проверки гипотезы о том, что распространение бактерий может быть связано с течениями.

Данное исследование сосредоточено на поиске бактерий-кандидатов, на основе которых можно проверить гипотезу о том, как бактерии переносятся в морях. Для этого необходимо найти наиболее распространённые таксоны бактерий, которые встречаются в изученных местах северных морей России.

Материалы и методы

Сбор данных

Данные о микробиомах были получены во время экспедиции по Карскому, Печорскому и Баренцеву морям, которая проходила с августа по ноябрь 2022 года. Данные по микробиомам были отобраны на 17 станциях в трёх повторах. Из полученных метабеномных данных были выделены участки V3–V4 гена 16S, которые были отсекарованы. Дополнительно на каждой станции были получены данные о температуре воды. Все данные выложены на сайте «Атлас микробных сообществ Российской Федерации».

Выделение ДНК и секвенирование библиотеки 16S рНК

Все данные для проекта были получены с помощью следующих процедур.

(Подробнее можно прочитать в статье “Сравнительный анализ методов выделения ДНК для морской метабеномики” (Demkina A. 2023), в которой описываются конкретные протоколы, использованные в проекте “Атлас микробных сообществ Российской Федерации” (URL: <https://studymeta.ru/> (дата обращения: 03.12.2025)).)

Эта работа была выполнена научным коллективом экспедиции.

Протокол начинается с механохимического разрушения клеток путем встряхивания в лизирующем растворе. В этом наборе также использовалась технология удаления ингибиторов, которая помогает удалить органические и неорганические вещества, такие как гуминовые кислоты, клеточный дебрис и белки, которые могут препятствовать проведению ПЦР. После этого образец помещали в центрифужную пробирку с силикагелевой мембраной. Затем ДНК дважды промывали и элюировали с силикагелевой мембраны.

Материал для всех повторных образцов был взят из одной пробирки и тщательно перемешан, чтобы избежать неоднородности. На каждую повторную пробу было использовано 1,5 г размороженного осадка, всего было подготовлено 24 порции материала (три технические повторные пробы для восьми наборов). Материал был непосредственно смешан с лизирующим раствором из набора. ДНК выделяли в соответствии с протоколами, рекомендованными производителями.

Участок V3-V4 16S рНК амплифицировали с помощью универсальных ПЦР-праймеров Illumina V3/V432. В каждую ПЦР-реакцию добавляли 1 мкл ДНК, 0,5 мкл прямого и обратного праймеров (конечная концентрация 0,5 мМ), 5 мкл Phusion High-Fidelity PCR Master Mix с HF-буфером (NEB) и 3 мкл воды, свободной от нуклеаз (NEB), доводя общий объем реакции до 10 мкл. Условия ПЦР: 98 °С в течение 30 с, затем 25 циклов: 98 °С в течение 10 с, 55 °С в течение 20 с и 72 °С в течение 30 с, с последующим дожигом в течение 5 минут при 72 °С. Ампликоны визуализировали в 1%-ном агарозном геле с 0,25 мкг/мкл бромистого этидия в 1хТрис-ЭДТА-буфере при напряжении 100 В. Размер целевого продукта находился в диапазоне 400–500 п. о. 32. Продукты успешной амплификации были хорошо видны на геле, в про-

тивном случае исходный образец ДНК разбавляли в 10 или 100 раз для повторной ПЦР-экспертизы.

Амплификацию участка V3-V4 16S рРНК и подготовку библиотек проводили в соответствии с руководством Illumina32. Ампликонные библиотеки маркировали, объединяли в один пакет и секвенировали в компании Evrogen с использованием протокола NovaSeq 6000, 2 × 250 п. о. парноконцевое секвенирование.

Получение данных для анализа

Для данного анализа были отобраны данные с сайта «Атлас микробиомов России» (<https://studymeta.ru/>), которые были взяты из образцов донных отложений арктических морей. В исследование вошли 47 образцов из трёх морей: Баренцева — 3 образца, Печорского — 37 образцов, Карского — 7 образцов. Эти образцы были взяты из 17 географических точек, в каждой из которых было взято по три пробы; для двух точек было взято по одной пробе.

Результаты

Чтобы проверить эту гипотезу, мы использовали данные из базы «Атлас микробных сообществ в России». Из проб выделено более 34 000 геномных последовательностей участков V3–V4 гена 16S rRNA, что позволило определить основные кластеры бактерий.

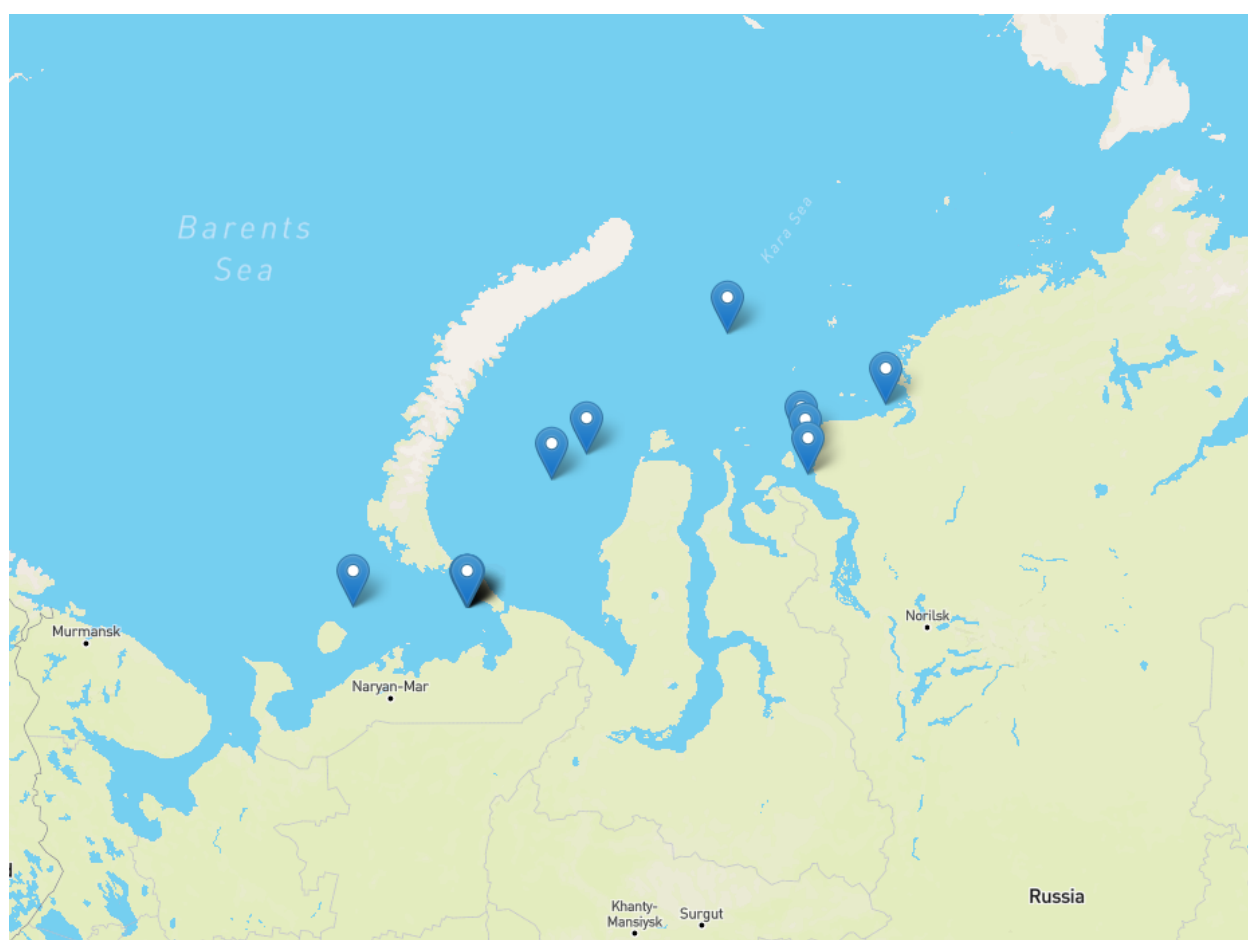


Рис. 1. Карта расположения точек сбора образцов.

Так как участки V3–V4 гена 16S достаточно консервативны, по секвенированной последовательности очень редко удастся идентифицировать бактерию до вида. Большая часть бактерий определена до семейства.

Были найдены три кластера бактерий, которые встречались во всех образцах, и все они принадлежат к типу *Pseudomonadota*. Наиболее близкие виды связаны с родом *Desulfuromonas*, который принимает участие в круговороте серы и разлагает органику в донных осадках. Эти бактерии встречаются повсеместно, и, как предполагается, их распространение связано с течениями в море.

>5a89259a06393932e0cc43f01a4690be

TGAGGAATATTGCGCAATGGGGGAAACCCTGACGCAGCGACGCCGCGTGAGTGAGGA
AGGTTTTTCGGATCGTAAAGCTCTGTCAGAAGGGAAGAAGTGTTATATGGTTAATACCC
GTATAATTTGACGGTACCTTCAGAGGAAGCACCGGCTAACTCCGTGCCAGCAGCCGCG
GTAATACGGAGGGTGCAAGCGTTGTTTCGGAATTACTGGGCGTAAAGGGCGCGTAGGGCG
GCCTGATAAGTCAGATGTGAAAGTCCACGGCTCAACCGTGGAAGTGCATTTGAAACTG
TCAGGCTTGAGTATCGGAGGGGAGTGTGGAATTCCCGGTGTAGAGGTGAAATTCGTAG
AGATCGGGAGGAACACCGGTGGCGAAGGCGACACTCTGGACGAATACTGACGCTGAG
GCGCGAAAGCGTGGGGAGCAAACA

>590770815afe88830a254d306b754001

TGGGGAATTTTTCGCGCAATGGGCGAAAGCCTGACGCAGCAATACCGCGTGAGTGATGAA
GGCTCTTGGGTCGTAAAGCTCTGTCAGAGGGGAAGAACCTCCTGTCATATAATACATG
GCAGGCCTGACGGTACCCTCAGAGGAAGCACCGGCTAACTCCGTGCCAGCAGCCGCGG
TAATACGGAGGGTGCAAACGTTGTTTCGGAATTATTGGGCGTAAAGAGCATGTAGGCGG
TCTGTCAAGTCTGATGTGAAAGCCCGGGGCTCAACCCCGGAAGTGCATTGGAAACTGG
CAGACTTGAGTACGGGAGAGGAAAGTGGAAATTTTCGAGTGTAGGGGTGAAATCCGTAG
ATATTCGAAGGAACACCAGTGGCGAAGGCGGCTTTCTGGACCGATACTGACGCTGAGA
TGCGAAAGCGTGGGGAGCAAACA

>51954f34da13fc1880f49deab180ec98

TGAGGAATATTGGGCAATGGGCGAAAGCCTGACCCAGCCACGCCGCGTGTTGTGATGAA
GGCCTTCGGGTCGTAAAGCACTGTGGGGAGAGACGAAAAAGCGCATCAGGAAATGGT
TGCGCCTTGACGGTACCTCCTTAGCAAGCACCGGCTAACTCTGTGCCAGCAGCCGCGGT
AATACAGAGGGTGCGAACGTTGCTCGGATTTACTGGGCGTAAAGCGCGTGTTAGGCGGA
CTCGCAAGTCGGTTGTGAAATCCCTGGGCTTAACCTAGGAACTGCATCCGAAACTGCTT
GTCTTGAGTAATGGAGAGGGTGGCGGAATTCCCGGTGTAGAGGTGAAATTCGTAGATA
TCGGGAGGAACATCAGTGGCGAAGGCGGCCACCTGGACATTTACTGACGCTGAGACGC
GAAAGCGTGGGGAGCAAACA

Таблица 1. Последовательности найденных кластеров бактерий.

Далее все последовательности были загружены в BLAST, и по ним в открытых базах данных были найдены уже известные бактерии, у которых участки V3–V4 гена 16S полностью совпадают с найденными. Для первого кластера было найдено 13 бактерий (таблица 2), для второго кластера — 22 бактерии (таблица 3), а для третьего кластера — 5 бактерий (таблица 4). Все

бактерии были получены из метагеномных данных, для которых было выполнено определение по 16S rRNA.

После сбора данных о уже охарактеризованных бактериях, входящих в кластеры 1–3, информация о них была проанализирована. К данным кластерам были отнесены 5 таксонов: 77133, 153809, 34034, 56765, 90854, где цифры означают номера taxon_id по классификации таксономии NCBI. В первый кластер вошли три таксона (77133, 34034, 90847), во второй кластер — все 5 таксонов (77133, 153809, 34034, 56765, 90854), а в третий кластер — два таксона (77133, 56765). Как видно, таксоны из первого и третьего кластеров совпадают с таксонами из второго кластера, поэтому все эти три кластера можно объединить в один.

По данным бактерий, полученных через BLAST, можно расширить географию присутствия бактерий из нашего кластера. Большинство из них были найдены в арктических морях от северо-запада Евразии, включая морские воды рядом с побережьями Германии и Швеции, до восточных морей, включая морские воды рядом с Японией (ID бактерий в базе данных GenBank: AB806715) и Южной Кореей (ID бактерий в базе данных GenBank: DQ112377, DQ112386). Было несколько отдалённых находок: в Новой Зеландии (ID бактерий в базе данных GenBank: AB806715) и в метановых сипах рядом с Северной Америкой (ID бактерий в базе данных GenBank: GQ357030, FJ264665). Одна бактерия была обнаружена в пробе (ID бактерий в базе данных GenBank: GU292253), ещё одна была обнаружена на наружных тканях морского малощетинкового червя *Tubificoides benedii* (ID бактерий в базе данных GenBank: GU197468), что согласуется с гипотезой о том, что бактерии могут переноситься течениями и на поверхности морских обитателей.

Выводы

Был найден таксон бактерий, который широко распространён в северных морях и для которого есть данные о встречаемости в других географических точках. Таксон включает следующие виды бактерий, которые предварительно соответствуют указанному таксону: 77133, 153809, 34034, 56765, 90854.

Дальнейшая работа заключается в поиске данных бактерий, соответствующих данным таксонам, и анализе их генетической близости, а также связи с морскими течениями.

Используемая литература

Атлас микробных сообществ Российской Федерации [Электронный ресурс]. URL: <https://studymeta.ru/> (дата обращения: 03.12.2025).

Demkina A, Slonova D, Mamontov V, Konovalova O, Yurikova D, Rogozhin V, Belova V, Korostin D, Sutormin D, Severinov K, Isaev A. Benchmarking DNA isolation methods for marine metagenomics.

Kirchman D. L., Cottrell M. T., Lovejoy C. The structure of bacterial communities in the western Arctic Ocean as revealed by pyrosequencing of 16S rRNA genes // Environmental Microbiology.

2010. Т. 12. № 5. С. 1132–1143

DOI: 10.1111/j.1462-2920.2010.02154.x

Дополнительные материалы

ID GenBank	ID taxon	Location
KR825215.1	77133	Janssand tidal subsurface sediment
AB094859.1	77133	Sea of Okhotsk
KR825055.1	77133	Janssand tidal subsurface sediment
DQ112377.1	34034	South Korea: Ganghwa Island (saltmarsh)
DQ112386.1	34034	South Korea: Ganghwa Island (saltmarsh)
AJ240984.1	90847	Norway:(Svalbard),Hornsund
AJ240978.1	90843	Norway:(Svalbard),Hornsund
JQ586312.1	77133	arctic marine sediment
FJ264665.1	77133	USA: Eel River Basin, CA
EU287221.1	77133	Pacific Arctic Ocean
AB015515.1	34034	deep-sea sediments
KX088589.1	77133	Netherlands: Lake Grevelingen

Таблица 2. Найденные бактерии, родственные бактериям из кластера 1

ID GenBank	ID taxon	Location
MF144292.1	77133	estuarine sediment
GU201882.1	153809	Arctic Ocean
GU201893.1	153809	Arctic Ocean
GU292253.1	77133	Svalbard, Arctic Circle
JN884833.1	77133	Hikurangi margin, New Zealand
GU197468.1	77133	Germany: Wadden Sea, List, Sylt
JQ863508.1	77133	Denmark: Aarhus Bay
MK110401.1	77133	-
DQ901595.1	34034	intertidal sediment
KC631541.1	77133	marine finfish aquaculture farm sediment
KF268794.1	77133	-
FN396619.1	56765	Svalbard:Smeerenburgfjorden
AB806715.1	77133	Japan:Shimokita Penninsula offshore

AY193143.1	153809	marine sediment
AJ241000.1	90854	Norway:(Svalbard),Hornsund
EU287190.1	77133	arctic surface sediment
EU925852.1	77133	Northern Bering Sea
GQ357030.1	77133	USA: Eel River Basin, CA
EU287191.1	77133	arctic surface sediment
FJ416119.1	77133	Northern Bering Sea
FJ545455.1	77133	North Yellow Sea sediment

Таблица 3. Найденные бактерии, родственные бактериям из кластера 2

ID GenBank	ID taxon	Location
FN396617	56765	Svalbard:Smeerenburgfjorden
EU734912	77133	Northern Bering Sea
EU734912	77133	Northern Bering Sea
EU734912	77133	Northern Bering Sea
EU735015	77133	Northern Bering Sea

Таблица 4. Найденные бактерии, родственные бактериям из кластера 3

Исполнитель проекта

Фомина Анна Станиславовна, ГБОУ Школа 179 г. Москвы, 10В класс.

Руководитель проекта

Шушкевич Елена Петровна, м.н.с. ИОГен РАН.

shushkevich.ep@phystech.edu