# Константиновский сборник

## Специальный выпуск

## Листки по математическому анализу, школа № 179 г. Москвы,

## 9 – 11 классы, 2021–2024 учебные годы

**Приложение к журналу «Математическое образование».**
**Серия «Образование: история, персоналии, проблемы»**

Выпуск 1 (09), июнь 2024 г.

Москва, 2024


179

# Константиновский сборник

179

**Специальный выпуск**

**Листки по математическому анализу, школа № 179 г. Москвы,**

**9 – 11 классы, 2021–2024 учебные годы**

**Приложение к журналу «Математическое образование».**
**Серия «Образование: история, персоналии, проблемы»**

Выпуск 1 (09), июнь 2024 г.

Москва, 2024

Приложение к журналу “Математическое образование”

ISSN 1992-6138

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Редактор серии Комаров С.И.

Ответственный за выпуск Имайкин В.М.

Выпуск 1 (09), 2024 г.



В настоящем выпуске приведен курс математического анализа в листках, который был освоен учащимися 9 – 11 класса Д школы № 179 г. Москвы в 2021–24 учебных годах.

Адрес электронной почты для материалов: matob@yandex.ru

Подписано в печать 20.06.2024. Объем 4 п.л. Тираж 100 экз. Цена свободная.

# Константиновский сборник, специальный выпуск

Приложение к журналу «Математическое образование».
Серия «Образование: история, персоналии, проблемы»

Выпуск 1 (09), июнь 2024 г.

## Содержание

### Листки по математическому анализу, школа № 179 г. Москвы, 9 – 11 классы, 2021–2024 учебные годы

# Предисловие

Преподавание различных математических курсов по листкам — давняя традиция московских математических школ, в частности, школы 179.

Настоящий сборник предлагает вниманию читателя курс математического анализа в листках для 9–11 классов, который был пройден учащимися в 2021–24 учебных годах.

В целом листки примерно покрывают годовой курс математического анализа физико-математических факультетов, но часто темы представлены более элементарно, чтобы их могли освоить школьники. Некоторые листки выходят за рамки непосредственно математического анализа (листки по теории групп, теории вероятностей, движениям плоскости, графам и т.п.). Введение их в данный курс имело две основные причины: 1) дать учащимся иногда отдохнуть от систематического изучения матанализа, «переключить голову», 2) обеспечить в нужный момент потребности других предметов (геометрия, физика).

Что касается методики и специфики изучения курса по листкам, лучше всего привести слова одного из основоположников системы листков Николая Николаевича Константинова. Он был бессменным научным руководителем 179-й школы с момента ее возрождения как математической в 2001 году и до конца своей жизни. Цитируем по Константиновскому сборнику № 6 (апрель 2021 года, https://matob.ru/files/nn_sbornik_06_final.pdf):

***

Математический анализ можно преподавать таким способом, что основное внимание уделяется самостоятельному решению задач, в том числе доказательству основных теорем. Раз в два или три занятия (занятия двух- и трёхчасовые) ученикам выдаются очередные задания (листочки). Учащиеся решают задачи в классе и дома и сдают все решения преподавателям. При этом почти не применяется обычная форма урока с рассказом материала и проверкой усвоения методом опроса. Не задаются задания «выучить такую-то теорему» или «прорешать к следующему разу такие-то примеры».

Математический анализ можно сравнить с домом, в котором вам предстоит жить. В доме есть фундамент. Так фундамент сделан не для того, чтобы в нём жить, а для того, чтобы весь дом не развалился. Бо́льшая часть соответствующего материала не для того, чтобы их изучать, а для цельности. У вас всегда есть возможность заглянуть туда, если дом зашатается. Но не отвлекайтесь на фундамент, если у вас нет к этому специального интереса.

Каждая конструкция анализа должна быть в вас внутренне выращена до состояния полной свободы прежде, чем появятся основанные на ней новые конструкции. Нужно не торопясь решать задачи основных заданий, записывая все или почти все решения, и при этом добавлять приглянувшиеся дополнительные задачи. Важно, чтобы ваши решения проверяли — новички часто не замечают собственных ошибок.

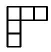
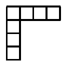
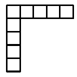
Для хорошего усвоения материала не обязательно решить самому абсолютно все задачи. Некоторым утверждениям можно просто поверить (если верится), некоторые доказательства можно узнать от друзей или учебника. Но не забывайте, что чем больше вы сделаете самостоятельно, тем большему вы научитесь.

***

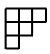
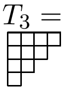
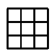
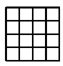
Основную работу по составлению листков проделали учителя математики Станислав Игоревич Комаров и Руслан Ибрагимов. При этом использованы материалы, подготовленные ранее Алексеем Городенцевым, Кириллом Белоусовым, Георгием Караваевым. Листок № 26 по знакомству с дифференциальными уравнениями составил Имайкин Валерий Марсович. Листок № 0 по геометрическому суммированию имеет уже статус «фольклора», так что конкретного автора нет.

# Листки по математическому анализу. Класс 9Д, 2021/22 учебный год

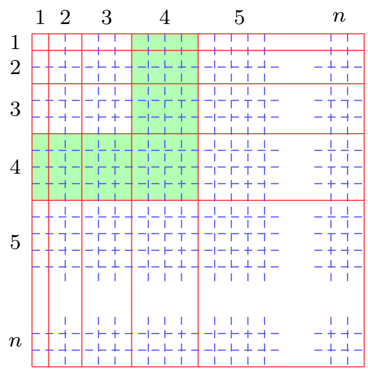
## Листок 0. Геометрическое суммирование

1. Рассмотрим последовательность «уголков»:  ,  ,  ,  ,  . Сколько клеток в $k$-том уголке и чему равна сумма первых $k$ уголков?

2. **а)** Чему равно $k$-е нечётное число и сумма первых $k$ нечётных чисел?
**б)** Чему равно $k$-е чётное число и сумма первых $k$ чётных чисел?
**в)** Вычислите сумму 100 последовательных нечётных чисел, начиная со 179.

3. Числа $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, $\ldots$ греческий математик Диофант называл *треугольными*:  ,  ,  ,  , $\ldots$ *Четырёхугольные числа*  ,  ,  ,  , $\ldots$ – это квадраты. Сложите из двух последовательных треугольных чисел квадрат.
Что получится при сложении $T_n$ с $T_n$? Выразите $T_n$ через $n$.

4. Найдите сумму первой сотни натуральных чисел.



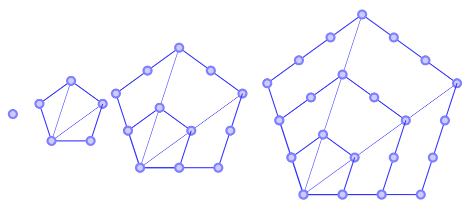

5. Докажите геометрически теорему сложения треугольных чисел: $T_{m+n} = T_m + T_n + mn$.

6. **Пифагорова таблица умножения.**, см. рисунок справа.
**а)** Докажите тождество $mk = km$
(т.е. докажите, что $\underbrace{k + k + \ldots + k}_{m} = \underbrace{m + m + \ldots + m}_{k}$).
**б)** Каковы размеры и площадь таблицы на рисунке справа?

7. Сколько клеток в $k$-том, считая от левого верхнего угла пифагоровой таблицы, «толстом» уголке, вершина которого – квадрат $k \times k$ клеток, а стороны составлены из прямоугольников $1 \times k$, $2 \times k$, $\ldots$, $(k-1) \times k$ клеток?

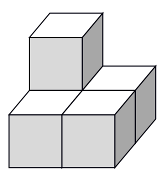
8. Найдите сумму $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

9. Сформулируйте и докажите теорему, описывающую явление: $3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$, $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$, $\ldots$



10. **Пятиугольные числа** $P_1 = 1$, $P_2 = 5$, $P_3 = 12$, $P_4 = 22$, $\ldots$ показаны на рисунке справа. Найдите разность $P_k - P_{k-1}$ между последовательными пятиугольными числами. Выразите $P_n$ через $n$.

11. Докажите геометрически, что сумма $n$-го треугольного и $n$-го квадратного числа на $n$ больше, чем $n$-ое пятиугольное число.



12*. Число $k^2$ можно представлять себе как объём параллелепипеда $1 \times k \times k$, а сумму $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ – как объём пирамиды, сложенной из таких параллелепипедов (на рисунке справа изображена пирамида для суммы $1^2 + 2^2$). Попробуйте, комбинируя такие пирамиды, получить какую-нибудь фигуру, объём которой легко сосчитать (например, куб, параллелепипед, призму и т.п.) и выведите формулу для суммы $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

13. Сумму треугольных чисел $T_1+T_2+\ldots+T_n$ тоже можно представить себе как объём некоторой пирамиды. Попробуйте геометрически найти формулу для суммы треугольных чисел (эта сумма обозначается $H_n$ и называется *$n$-ым пирамидальным числом*).

## Листок 1. Математическая индукция

*В очереди первой стоит женщина.*
*За каждой женщиной стоит женщина.*
*В очереди все женщины.*

**Аксиома натуральных чисел (принцип математической индукции)**. Пусть $X$ – какая-то совокупность натуральных чисел. Известно, что $1 \in X$ и для любого $n \in X$ следующее за $n$ натуральное число (обозначаемое $n+1$) также принадлежит $X$. Тогда $X$ – совокупность всех натуральных чисел (она обозначается символом $\mathbb{N}$).

1. Число $n \in \mathbb{N}$ называется «хорошим», если $2^{2^n}-1$ делится на 3. Пусть $X$ – совокупность всех «хороших» натуральных чисел. Докажите, используя принцип математической индукции, что $X=\mathbb{N}$.

**Метод математической индукции**. Пусть имеется цепочка утверждений $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, то есть каждому натуральному числу $n$ соответствует некоторое утверждение $A_n$. Известно, что утверждение $A_1$ истинно и для любого натурального $n$ из истинности утверждения $A_n$ следует истинность утверждения $A_{n+1}$. Тогда для любого натурального $n$ утверждение $A_n$ истинно, то есть **все** утверждения цепочки $A_n$ верны.

**Определение 1А.** В методе математической индукции утверждение $A_1$ называется *базой* индукции. Доказательство истинности утверждения $A_{n+1}$ в предположении истинности утверждения $A_n$ называется *шагом* индукции, при этом утверждение $A_n$ называется *предположением* индукции.

2. Из клетчатого квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на уголки из трёх клеток.

3. Докажите, что число, состоящее из $3^n$ одинаковых цифр, делится на $3^n$.

4. Плоскость поделена на области некоторыми прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были окрашены в разные цвета.

5. Докажите при помощи метода математической индукции тождества:

а) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

6. Пусть $x_0=2$, $x_1=3$ и для всякого натурального $n$ имеет место соотношение: $x_{n+1}=3x_n-2x_{n-1}$. Докажите, что $x_n=2^n+1$.

7. Доказать, что любое натуральное число рублей, большее 7, можно уплатить без сдачи денежными билетами достоинством в 3 и 5 рублей.

8. Найдите ошибку в следующих рассуждениях:

а) Докажем по индукции, что соседние натуральные числа равны. Действительно, если два соседних числа $n$ и $n+1$ равны, то, прибавив единицу к обеим частям равенства $n=n+1$, мы получим $n+1=n+2$, откуда два соседних числа $n+1$ и $n+2$ также равны. Значит, любые два соседних натуральных числа равны.

б) Докажем по индукции, что все лошади одного цвета. Одна лошадь, очевидно, одного цвета. Пусть доказано, что любые $n$ лошадей всегда одного цвета. Рассмотрим $n+1$ каких-то лошадей. Уберём одну лошадь. Оставшиеся $n$ лошадей одного цвета по предположению индукции. Возвратим убранную лошадь и уберём какую-то другую. Оставшиеся $n$ лошадей снова будут одного цвета. Значит, все $n+1$ лошадей одного цвета.

9. Докажите с помощью метода математической индукции неравенства:
а) **Неравенство Бернулли**: $(1+a)^n > 1 + na$, $a > -1$, $n \in \mathbb{N}$;
б) **Неравенство Коши**: $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leq n \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$;
в) $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, $n = 2^m, m \in \mathbb{N}$.

10. **Задача о ханойских башнях**. Имеется три стержня. На первом из них лежит пирамида из $n$ колец, причём если одно кольцо лежит на другом, то оно меньшего размера. Разрешено перекладывать кольца на другие стержни так, чтобы это свойство сохранялось. Докажите, что:
а) для любого $n$ можно переложить пирамиду с первого стержня на третий;
б) для такого перекладывания достаточно $2^n - 1$ действий;
в*) меньшим числом действий обойтись нельзя.

11. Пусть $A_n^k$ – множество всех $k$-элементных подмножеств $n$-элементного множества $A$, $V_n^k$ – множество всех $n$-буквенных слов в алфавите из двух букв «а» и «б», в которых буква «а» встречается $k$ раз; $N_n^k$ – множество возможных состояний $n$-битного байта, в которых состояние 0 встречается $k$ раз; $M_n^k$ – множество мономов, являющихся произведением $k$ переменных, получающихся после раскрытия скобок в произведении $(1 + x_1) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n)$.
а) Докажите, что все эти множества равномощны (биективны), установив между ними явные биекции.
б) Число элементов в множествах $A_n^k$, $V_n^k$, $N_n^k$, $M_n^k$ равно коэффициенту при $x^k$ в разложении $(1+x)^n = \sum\limits_{t=0}^{t=n} C_n^t x^t$ (*бином Ньютона*, $C_n^t$ – биномиальные коэффициенты), а также равно $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

12. Установите свойства биномиальных коэффициентов, используя разные их представления из предыдущей задачи, а не только явную формулу; можно также использовать метод математической индукции:
а) $C_n^k = C_n^{n-k}$;  б) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$;  в) $\sum\limits_{k=0}^{k=n} C_n^{2k} = \sum\limits_{k=0}^{k=n} C_n^{2k+1}$.

13. Доказать неравенство о среднем геометрическом и среднем арифметическом для произвольного $n$ (см. задачу 9в)

14. Обозначим $p_n$ – $n$-ое простое число. Докажите, что $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$.

15. Из $2n$ чисел произвольно выбрали $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся хотя бы два числа, из которых одно делится на другое.

## Дополнительные задачи

16. Каких треугольников с целыми длинами сторон больше: с периметром 2019 или 2022?

17. Соревнование оценивается 8 судьями, каждый из которых ставит участнику «+» или «–». Известно, что для любых двух участников двое судей поставили «+», двое – «+» первому и «–» второму, двое – «–» первому и «+» второму, и двое обоим поставили «–». Определите максимально возможное количество участников.

## Листок $1\frac{1}{2}$, дополнительный. Две вариации на тему биномиальных коэффициентов

«... при помощи этой формулы я смог сложить десятые степени первой тысячи натуральных чисел менее, чем за половину четверти часа...»
(*Якоб Бернулли* (*1654-1705*) *«Ars Conjectandi», издано в 1713 г., посмертно*)

1. Любое ли целое число граммов можно отвесить на чашечных весах, пользуясь набором гирь в 1 г, 3 г, 9 г, 27 г, ... (по одной гире каждого веса)?

**Определение $1\frac{1}{2}$A.** *$m$-ичная позиционная система счисления* использует $m$ цифр, коими служат цифры $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}$. Под $n$-разрядным числом $m$-ичной системы мы понимаем любую последовательность из $n$ $m$-ичных цифр (возможно, начинающихся с нулей). Для $l \in N$ запись $\overline{\nu_{n-1}\nu_{n-2}\ldots\nu_1\nu_0}$ означает, по определению, что $l = \nu_0 + \nu_1 m + \nu_2 m^2 + \ldots + \nu_{n-1}m^{n-1}$. Количество всех $n$-разрядных чисел $m$-ичной системы с суммой цифр $k$ мы будем обозначать черер $\beta_m(n,k)$.

2. Запишите десятичные числа 43, 47 и 2021 в 2-ичной, 3-ичной и 16-ричной системах.

3. Покажите, что при заданном натуральном $m \geq 2$ каждое натуральное число $l$ может быть единственным образом записано в $m$-ичной системе счисления, т.е. что существует единственный набор целых чисел $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$, лежащих в пределах от 0 до $m-1$ включительно и с $\nu_{n-1} \neq 0$ такой, что $l = \nu_0 + \nu_1 m + \nu_2 m^2 + \ldots + \nu_{n-1}m^{n-1}$.

4. Сколько всего $n$-разрядных чисел в $m$-ичной системе и чему равно $\beta_2(n,k)$?

5*. Докажите, что $\beta_m(n,k)$ равно коэффициенту при $x^k$ в разложении $(1+x+x^2+\ldots+x^{m-1})^n$ и удовлетворяет соотношениям

$\beta_m(n,k) = \beta_m(n, n(m-1)-k)$ и $\beta_m(n,k) = \beta_m(n-1,k) + \beta_m(n-1,k-1) + \ldots + \beta_m(n-1,k-m+1)$.

6*. Суеверные люди считают счастливым каждое шестиразрядное десятичное число, у которого сумма трёх первых цифр равна сумме трёх последних. Сколько таких «счастливых» чисел?[1]

**Определение $1\frac{1}{2}$B.** *Числа Бернулли $B_k$* начинаются с $B_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$ и определяется реккурентно[2] формулой

$$B_k = -\frac{1}{k+1}\left(C^0_{k+1}B_0 + C^1_{k+1}B_1 + \ldots + C^{k-1}_{k+1}B_{k-1}\right)$$

7. Вычислите первые 14 чисел Бернулли.

8*. Покажите, что сумма $k$-тых степеней первых $(n-1)$ натуральных чисел равна

$$\frac{1}{k+1}\left(C^0_{k+1}B_0 n^{k+1} + C^1_{k+1}B_1 n^k + \ldots + C^{k-1}_{k+1}B_{k-1}n^2\right)$$

9*. Вычислите сумму $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \ldots + (n-1)^{10}$.

10*. Что вы можете сказать про числа Бернулли с нечётными номерами?

11*. Как ведут себя знаки чисел Бернулли?

## Листок 2. Всё же логично!

*«Из лжи следует истина!»*

**Введение.** Логика имеет дело с «*высказываниями*», принимающими два *логических* значения: «*истина*» и «*ложь*». Логическое высказывание можно представлять как повествовательное предложение, которое либо истинно, либо ложно.

---

[1] Подсказка: их $\beta_{10}(6,27)$.

[2] Предупреждение: «явного» выражения $B_n$ через $n$ не существует!

1. Два школьника ведут наблюдения за погодой. Каждый делает отметки три раза в день: утром, днём и вечером. Если хотя бы в одно из наблюдений был дождь, первый школьник ставит «–», иначе ставит «+». Если хотя бы в одно из наблюдений дождя не было, второй школьник ставит «+», иначе «–». Какие из возможных отметок «++», «+–», «–+», «––» действительно могут встретиться?

2. а) За день до дождя Петин кот чихает. Сегодня Петин кот чихнул. «Завтра будет дождь», — подумал Петя. Прав ли он?
б) Что означают отрицания следующих высказываний (сформулируйте соответствующие высказывания):
(1) «У Пети есть кот, и тот иногда чихает.»; (2) «Если сегодня Петин кот чихает, то завтра будет дождь.»?

3. Являются ли следующие утверждения истинными или ложными?
№ 1. Утверждение № 1 ложно.
№ 2. Утверждение № 2 истинно.

4. а) Сколько существует функций из $n$-элементного множества в $m$-элементное множество?
б) Составьте таблицу функций из пар 2-элементного множества в 2-элементное множество.

**Определение 2А.** *Логические связки (функции).* Пусть $A$ и $B$ — некоторые высказывания. Тогда:
«не $A$» (обозначение: $\neg A$ или $\overline{A}$) — *отрицание* $A$, которое истинно если и только если $A$ ложно;
«$A$ и $B$» (обозначение: $A \wedge B$) — *конъюнкция $A$ и $B$*, которое истинно если и только если и $A$, и $B$ истинны;
«$A$ или $B$» (обозначение: $A \vee B$) — *дизъюнкция $A$ и $B$*, которое истинно если и только если хотя бы одно из высказываний истинно;
«если $A$, то $B$» (обозначение: $A \to B$ или $A \Rightarrow B$) — *импликация из $A$ в $B$*, которая ложна если и только если $A$ истинно, а $B$ ложно;
«$A$ равносильно $B$» (обозначение: $A \leftrightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$) — *эквиваленция $A$ и $B$*, истинна тогда и только тогда, когда $A$ и $B$ одновременно истинны или одновременно ложны.
Символы $\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ будем называть *логическими связками.* Используя логические связки, мы можем из высказываний получить новые высказывания, входящие в них высказывания называют *логическими переменными.* О функциях алгебры логики смотрите в конце листка.

5. — та же задача, что 15.

6. Докажите, что для любых двух высказываний $A$ и $B$ равносильны высказывания:
а) $A \to B$ и $\neg B \to \neg A$. Какой метод доказательства основан на этом факте?
б) $A \wedge B$ и $\neg(\neg A \vee \neg B)$.

7. Докажите, что для любых высказываний $A, B, C$ следующие высказывания являются истинными (такие высказывания называются *тавтологиями*): а) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$;
б) $((A \wedge B) \to C) \leftrightarrow ((A \wedge \neg C) \to \neg B)$.

8. Пусть $A$ и $B$ — два высказывания. Выразите через $A$ и $B$ высказывание (укажите равносильное высказывание):
а) $A \to B$, используя дизъюнкцию и отрицание;
б) $A \vee B$, используя конъюнкцию и отрицание.

9. а) Сколько всего существует функций логики высказываний от $n$ переменных?
б*) Можно ли любую логическую функцию от двух переменных выразить через дизъюнкцию и конъюнкцию?
в*) Докажите, что высказывание, составленное при помощи логических связок (из набора $\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$) из высказываний $A_1, A_2, \ldots, A_n$, можно выразить через эти высказывания с помощью только дизъюнкции и отрицания; с помощью только конъюнкции и отрицания.

10. Рассмотрим логические функции от двух переменных $f_{\overline{\text{k}}}(A,B) = \overline{A \wedge B}$; $f_{\overline{\text{d}}}(A,B) = \overline{A \vee B}$.
а) Какие логические функции представляют $f_{\overline{\text{k}}}(A,A)$, $f_{\overline{\text{d}}}(A,A)$, $f_{\overline{\text{k}}}(A, f_{\overline{\text{k}}}(B,B))$?
б) Получите $A \Rightarrow B$, используя только $f_{\overline{\text{d}}}$.
в) Докажите, что любую логическую функцию двух переменных можно получить, используя только $f_{\overline{\text{d}}}$; используя только $f_{\overline{\text{k}}}$.

**Определение 2B.** Утверждение $P$ называется *парадоксом*, если для некоторого утверждения $A$ из $P$ следует $A$ и $\neg A$.

11. Покажите, что парадоксом является утверждение: «Существует множество всех множеств, которые не являются элементами самих себя».

12. Путешественник попал к людоедам. Они разрешают ему произнести какое-нибудь высказывание и ставят условие, что если его высказывание будет истинным, то его сварят, а если ложным — зажарят. Какое высказывание следует произнести путешественнику?

### Дополнительные задачи

13. Треугольник называют 2-симплексом, треугольную пирамиду называют 3-симплексом, а их $n$-мерное обобщение называют $n$-мерным симплексом. Сколько у $n$-мерного симплекса
а) вершин; б) рёбер; в) граней размерности $k$?

14. Почему число $(1+\sqrt{2})^n$ при больших $n$ (и даже не очень больших) почти целое число: $(1+\sqrt{2})^5 \approx 82{,}0122$, $(1+\sqrt{2})^{10} \approx 6725{,}9999$, $(1+\sqrt{2})^{15} \approx 551614{,}000002$?

**Немного о логике**

*Логика высказываний*, или *пропозиционная логика*, или *исчисление высказываний* — это раздел математической логики, изучающий сложные высказывания (функции от простых высказываний), образованные из простых, и их взаимоотношения. В логике высказываний внутренняя структура простых высказываний не рассматривается, а учитывается лишь, с помощью каких связок и в каком порядке простые высказывания сочленяются в сложные. Важно лишь то, какие логические значения принимают простые высказывания.

Одним из способов изучать сложные высказывания (функции) логики является составление «таблиц истинности». Выпишем функции одного переменного от одного высказывания (одной переменной). Ответ удобно оформить таблицей, где 1 соответствует **«истине»**, 0 соответствует **«лжи»**.

Таблица 1.

| $A$ | $f_1(A)$ | $f_2(A)$ | $f_3(A)$ | $f_4(A)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

15. а) Какие функции из таблицы 1 называются нулевой функцией, тождественной функцией, отрицанием, единичной функцией? Выпишите в таблицу 2 функции логики от двух переменных:
б) Какие из следующих функций одной переменной: $A \wedge A$, $A \vee A$, $A \to A$, $A \wedge \neg A$, $A \vee \neg A$, $A \leftrightarrow A$, $\neg(\neg A)$ совпадают с нулевой, единичной, тождественной?

Чтобы проверить, что два высказывания равносильны (две функции логики высказываний равны), можно рассмотреть таблицы истинности этих высказываний. Например, чтобы установить равносильность $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$, можно составить «таблицы истинности» для $A \wedge B$ и $B \wedge A$ и убедиться, что они одинаковы. Можно также составить таблицу для высказывания (функции) $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$ и убедиться, что все логические значения равны 1.

Таблица 2.

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \to B$ | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | |
| 0 | 1 | | | | |
| 1 | 0 | | | | |
| 1 | 1 | | | | |

Например, из таблицы 3 видно, что $(A \vee \neg A) \leftrightarrow 1$ (то есть высказывание $A \vee \neg A$ является тавтологией).

Таблица 3.

| $A$ | $\neg A$ | $A \vee \neg A$ | 1 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |

## Листок 3. Множества и отображения

**Определение 3A.** *Понятие множества* в анализе, подобно понятию *прямой* в геометрии, определяется не конструктивно, а как «объект, удовлетворяющий аксиомам» (этот список *аксиом теории множеств* мы пока не будем уточнять). Как *прямая* и *точка* форомализуют известные пространственные образы, так *множества* формализуют житейские представления о совокупностях предметов произвольной природы. Множество состоит из *элементов*. Элементы могут быть любые: числа, стулья, другие множества... Принадлежность элемента $a$ множеству $A$ обозначается $a \in A$. Единственное множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. Все элементы в любом множестве, по определению, *различны*. Множество *задано*, как только про любой объект можно сказать, принадлежит он данному множеству или нет. Два множества *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов. Множество $A$ называется *подмножеством* множества $B$ (обозначение: $A \subset B$), если каждый элемент $a \in A$ лежит также и в $B$. Для любых двух множеств $A$ и $B$ множество $A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из них, называется их *объединением*; множество $A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно каждому из них, называется их *пересечением*; множество $A \setminus B$, состоящее из всех элементов множества $A$, которые не содержатся в $B$, называется их *разностью.*

1. Рассмотрим множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и множество $B = \{1, 3, 5\}$.
а) Выпишите все подмножества $C$ множества $A$, удовлетворяющие условиям $B \subset C$ и $C \subset A$.
б) Все подмножества множества $B$ образуют новое множество, обозначаемое $2^B$. Выпишите все элементы этого множества и пронумеруйте их подряд идущими натуральными числами начиная с 1.

2. Сколько всего подмножеств у множества, содержащего $n$ элементов?

3. Какие из перечисленных ниже свойств справедливы для любых множеств $A$, $B$ и $C$?

4. Выражаются ли: а) пересечение через разность? б) разность через пересечение и объединение?

**Определение 3B.** *Отображение* $A \xrightarrow{f} B$ *множества* $A$ *в множество* $B$ — это правило, сопоставляющее *каждому* элементу $a \in A$ *ровно один* элемент $f(a) \in B$, зависящий от $a$ и называемый

а) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; б) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
в) $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$; г) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
д) $A \setminus C = B \setminus C \Rightarrow A = B$; е) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
ж) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; з) $A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$.

*образом* $a$. Подмножество $f(A) \subset B$, состоящее из образов элементов множества $A$, называется *образом* отображения $f$. Отображения $A \xrightarrow{f} B$ и $A \xrightarrow{g} B$ *равны*, если $f(a) = g(a)\ \forall\, a \in A$. Отображение $B \xrightarrow{g} A$ называется *обратным* к отображению $A \xrightarrow{f} B$, если $g(f(a)) = a\ \forall\, a \in A$ и одновременно $f(g(b)) = b\ \forall\, b \in B$; в этой ситуации отображение $f$ (и отображение $g$) называют *обратимым* и пишут $g = f^{-1}$. Отображение $A \xrightarrow{f} B$ называется *отображением «на»* (или *сюръективным*, или *эпиморфным*, или *наложением*), если у каждого элемента $b \in B$ есть *прообраз* в $A$, т.е. $f(A) = B$. Отображение называется *отображением «в»* (или *инъективным*, или *мономорфным*, или *вложением*), если никакие два элемента из $A$ не переходят в один и тот же элемент $B$, т.е. $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$. Отображение, являющееся одновременно и вложением, и наложением, называется *взаимно-однозначным* (или *изоморфным*, или *биекцией*).

5. Нарисуйте все отображения: а) из $\{0, 1, 2\}$ в $\{0, 1\}$; б) из $\{0, 1\}$ в $\{0, 1, 2\}$.

6. Из отображений: $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{Z}$; $\mathbb{N} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{N}$; $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto px} \mathbb{Z}$ (с $p \in \mathbb{Z}$); $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto px} \mathbb{R}$ (с $p \in \mathbb{R}$) выберите все а) биекции, б) инъекции, в) сюръекции.

7. Равносильна ли взаимная однозначность обратимости?

8. Достаточно ли для того, чтобы $f$ было обратно к $g$, только одного условия
а) $f(g(b)) = b\ \forall\, b \in B$? б) $g(f(a)) = a\ \forall a \in A$?

9. Некоторое число делится на 2, но не делится на 4. Каких делителей у него больше: чётных или нечётных?

**Определение 3С.** *Декартовым произведением* множеств $X$ и $Y$ называется множество пар $(x, y)$ таких, что $x \in X$ и $y \in Y$. Обозначение: $X \times Y$.

10. а) Опишите все такие пары множеств $C$, $D$, для которых $C \times D = D \times C$.
б) Докажите, что для любых множеств $A$, $B$, $C$ верно $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ и $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

11. Дайте определение декартова произведения $n$ множеств и докажите, что для конечных множеств $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ верно равенство $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.

12. а) Докажите, что для конечных множеств $A$ и $B$ справедливо равенство $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
б) (**Формула включений-исключений**) Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — конечные множества. Докажите, что

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \ldots$$
$$+ (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

**Дополнительные задачи**

13. Докажите, что ни при каких натуральных числах $m$ и $n$ не может выполняться равенство $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$.

14. Найдётся ли 2016-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2016 разных 2016-значных полных квадратов? А 2021-значное число?

## Листок 4. Алгебра поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ и поля комплексных чисел

1. Докажите, что никакое рациональное число в квадрате не равно 2, т.е. число $\sqrt{2}$ не является рациональным.

2. При каких натуральных $n$ число $(\sqrt{2}+1)^n - (\sqrt{2}-1)^n$ будет целым?

3. а) Докажите, что если $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, то $a = c$ и $b = d$.

б) Докажите, что произведение и сумму чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, можно единственным образом представить в таком же виде.

4. а) Пусть $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = x+y\sqrt{2}$, где $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{Q}$. Докажите, что $(a-b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2}) = x - y\sqrt{2}$.

б) Докажите, что для рациональных чисел $a, b \in \mathbb{Q}$, т.ч. $a^2 - 2b^2 \neq 0$, существуют единственные числа $x, y \in \mathbb{Q}$, т.ч. $(a + b\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = 1$.

**Определение 4A.** Множество чисел вида $a+b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, вместе с операциями сложения и умножения на них называется *полем* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ содержит в себе рациональные числа, т.к. $a + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, и поэтому говорят, что $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ является *расширением* поля рациональных чисел.

В поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ можно (пытаться) решить алгебраические уравнения точно так же, как и в поле $\mathbb{Q}$.

5. Найдите все решения следующих уравнений в указанных полях: а) $(1+\sqrt{2})x = 1$ в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; б) $x^3 = 8$ и $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; в) $x^3 = 8$ и $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ в поле $\mathbb{Q}$.

6. Пусть $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен с рациональными коэффициентами. Докажите, что если $\alpha + \beta\sqrt{2}$ является корнем уравнения $P(x) = 0$, то $\alpha - \beta\sqrt{2}$ также является корнем этого уравнения.

7. Докажите, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

Известно, что уравнение $x^2 = -1$ не имеет решений в поле вещественных чисел (о полях см. в конце листка). Введём символ $i$, который будет обозначать решение уравнения $x^2 = -1$, т.е. $i^2 = -1$, точно так же, как символ $\sqrt{2}$ обозначал решение уравнения $x^2 = 2$. Заметим, что выражения вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{Q}$ или $a, b \in \mathbb{R}$, можно складывать и перемножать аналогично выражениям с $\sqrt{2}$.

8. В данной задаче буква $K$ обозначает поле вещественных или поле рациональных чисел. Пусть $a, b, c, d \in K$.

а) Представьте сумму $a + bi$ и $c + di$ в виде выражения $x + yi$, где $x, y \in K$. Покажите, что введённая операция коммутативна и ассоциативна.

б) Представьте произведение $a+bi$ и $c+di$ в виде выражения $x+yi$, где $x, y \in K$. Покажите, что введённая операция коммутативна и ассоциативна.

9. В данной задаче $K$ обозначает поле вещественных чисел или поле рациональных чисел. Пусть $a, b, c, d \in K$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

а) Дайте определение деления на $a + bi$ и докажите, что $\dfrac{a^2 + b^2}{a + bi} = a - bi$.

б) Докажите, что найдутся единственные числа $c, d \in K$, т.ч. $(a + bi)(c + di) = 1$.

**Определение 4B.** *Полем комплексных чисел* $\mathbb{C}$ называется множество выражений вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, с введёнными на этом множестве операциями сложения и умножения.

Каждое вещественное число $x \in \mathbb{R}$ можно рассматривать как комплексное число $x + 0i$, поэтому говорят, что поле комплексных чисел является *расширением* поля вещественных чисел.

10. Пусть квадратичный многочлен $P(x) = x^2 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ имеет отрицательный дискриминант.

а) Найдите все такие $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, что $P(\alpha + i\beta) = 0$. Такие комплексные числа $\alpha + \beta i$ называются *решениями* уравнения $x^2 + ax + b = 0$.

б) Дайте определение комплексного числа, являющегося решением уравнения $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен с комплексными коэффициентами и решите уравнение $ix^2 - 2x - 2i = 0$ в поле $\mathbb{C}$.

**Определение 4C.** *Сопряжением* комплексных чисел называется отображение $\overline{z}: \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$, сопоставляющее числу $z = a + bi$ число $\overline{z} = a - bi$.

11. Докажите, что для любых $z, w \in \mathbb{C}$: а) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$; б) $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$; в) $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$ и $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$.

**Определение 4D.** *Модулем* комплексного числа $z = a + bi$ называется число $\sqrt{a^2 + b^2}$. Обозначение: $|z|$.

12. Докажите, что для любых $z, w \in \mathbb{C}$: а) $|z| \cdot |w| = |z \cdot w|$; б) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

13. Докажите, не используя представления комплексных чисел в виде $x + yi$, что для $z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \text{ и } |\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}.$$

14. Докажите, что:

а) $(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot (\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$;

б) (**Формула Муавра**) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$.

в) Выразите $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

15. Пусть $P(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, $z \in \mathbb{C}$ — решение уравнения $P(x) = 0$. Докажите, что $\overline{z}$ также является решением этого уравнения.

16. Докажите, что если каждое из двух чисел является суммой квадратов двух целых чисел, то и их произведение является суммой квадратов двух целых чисел.

(*Подсказка*: Воспользуйтесь комплексными числами.)

17*. Пусть $p$ — простое число. Если $(a + b\sqrt{p})^n = x + y\sqrt{p}$, где $n \in \mathbb{N}$, $a, b, x, y \in \mathbb{Q}$, то $(a - b\sqrt{p})^n = x - y\sqrt{p}$.

*Используя этот факт, несложно решить задачу 13 Листка 3.*

### Дополнительные задачи. Привлекаем геометрию

18. Можно ли разбить на пары $2n$ человек $2n - 1$ способами так, чтобы каждый человек был в паре с каждым другим ровно при одном разбиении?

19. Пусть $a, b, c$ — положительные числа. Докажите, что

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2},$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b}$.

### Операции с числами

В заданиях этого листка можно пользоваться следующими свойствами операций над алгебраическими выражениями: коммутативностью и ассоциативностью сложения и умножения, дистрибутивностью, т.е. привычным способом раскрывать скобки, приведением подобных слагаемых, преобразованием дробей и т.п.

## Листок $4\frac{1}{2}$. Алгебраические структуры. Поле действительных чисел: начало[3].

*«За что я люблю числа? — переспросил Тэнго. — Несмотря на целую кучу заумных теорий, главные принципы в математике очень просты.»*
*Харуки Мураками.*

В задачах используются названия алгебраических структур, определенных ниже в разделе «Аксиоматика».

1. Какие из следующих множеств с указанной операцией образуют группу? Если группа коммутативная, укажите это (достаточно ответить да-нет, в случае отрицательного ответа указать аксиому, которая не выполняется:
а) натуральные числа с операцией сложения, с операцией умножения; целые числа с операцией сложения, с операцией умножения, с операцией вычитания; рациональные числа с операцией сложения, с операцией умножения; положительные рациональные числа с операцией умножения;
б) преобразования плоскости с операцией композиции: параллельные переносы плоскости, повороты плоскости, осевые симметрии плоскости, подобия плоскости;
в) матрицы $(2\times2)$ с операцией сложения, с операцией умножения;
г) вычеты по произвольному модулю с операцией сложения, вычеты по модулю 57 с операцией умножения.

2. Докажите, что в группе единичный элемент ровно один, а у каждого элемента ровно один обратный.

3. Верно ли, что в группе: а) $(a\cdot b)^2 = a^2\cdot b^2$; б) $(a\cdot b)^{-1} = a^{-1}\cdot b^{-1}$; в*) $a^n = e$, если в группе ровно $n$ элементов?

4. Какие из множеств задачи 1авг, если на них рассматривать обе операции (сложения и умножения), являются кольцами, коммутативными кольцами, полями, упорядоченными полями?

5. Верно ли, что в кольце: а) $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$; б) $a\cdot(-1) = (-1)\cdot a = -a$; в) $a\cdot(-b) = (-a)\cdot b = -(a\cdot b)$ и $(-a)\cdot(-b) = ab$; г) работает формула бинома Ньютона, если кольцо коммутативно; д) если $x+x=0$, то $x=0$?

6. Верно ли, что в поле:
а) $a\cdot b = 0 \Leftrightarrow (a=0 \vee b=0)$;
б) любое уравнение $ax+b=0$ ($x$ – неизвестное) имеет единственное решение, если $a\neq 0$;
в*) уравнение $x^2=a$ имеет не более двух решений;
г*) если $a\neq 0$ и $p$ – наименьшее число, при котором $a+\ldots+a=0$, где всего слагаемых $p$, то $p$ – простое число (такое число называется *характеристикой поля*)?
д*) Верно ли, что в группе с операцией сложения из $x+x=0$ следует $x=0$?

7. Матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ назовём комплексными, где $a$ и $b$ – действительные числа.
а) Найдите $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$. Покажите, что сумма и произведение комплексных матриц – комплексные матрицы.
б) Если комплексная матрица не является нулевой, то она обратима и обратная матрица является комплексной. Образуют ли комплексные матрицы с операцией сложения и умножения поле?
в*) Установите биекцию между полем комплексных матриц и полем комплексных чисел так, чтобы сумме матриц соответствовала сумма комплексных чисел, а произведению – произведение.

8*. **Тело кватернионов.** Рассмотрим множество матриц $\mathbb{H}$ вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$, где $\alpha$ и $\beta$ – комплексные числа,

[3] В данном курсе в конце листка 4 был дан этот материал в урезанном виде. Теперь он дополнен и для удобства чтения вынесен в отдельный листок

$\overline{\alpha}$ – сопряженное к $\alpha$ комплексное число, операции – сложение и умножение матриц. Докажите, что:
а) сложение и умножение матриц из $\mathbb{H}$ дают матрицы из $\mathbb{H}$, нулевая и единичная матрицы принадлежат $\mathbb{H}$;
б) все ненулевые матрицы из $\mathbb{H}$ обратимы и обратная матрица является матрицей из $\mathbb{H}$;
в) $\mathbb{H}$ с операцией сложения и умножения матриц образует тело, но не поле (называемое *телом кватернионов*).

9*. Докажите, что следующие множества с указанной операцией образуют группу:
а) обратимые элементы кольца с операцией умножения из этого кольца; ненулевые элементы поля с операцией умножения из этого поля;
б) матрицы с определителем 1 (специальная линейная группа), а также матрицы с определителем $\pm 1$ с операцией умножения;
в) множество биекций конечного множества с операцией композиции (группа перестановок из $n$ элементов, обозначается $S_n$).

10. Докажите, что в линейно упорядоченном множестве (см. оборот: АС13 и определения):
а) равносильны утверждения: всякое ограниченное сверху подмножество имеет ТВГ; всякое ограниченное снизу подмножество имеет ТНГ; выполнена аксиома полноты Гильберта (см. оборот: АС16);
б) в котором выполнено любое из условий пункта (а), верен принцип вложенных отрезков.

11. Докажите, что в упорядоченном поле а) $a \leqslant b \Leftrightarrow a - b \leqslant 0 \Leftrightarrow -b \leqslant -a$; б) $-1 < 0 < 1$; в) $a \neq 0 \Leftrightarrow 0 < a^2$.

12*. Докажите, что нельзя упорядочить (то есть ввести отношение порядка, удовлетворяющее аксиомам АС10–АС15): а) поле комплексных чисел; б) конечное поле.

13. **Модуль действительного числа.** Дайте определение модуля числа в поле действительных чисел и докажите следующие его свойства: а) $0 \leqslant |a|,\ a \leqslant |a|$; б) $|ab| = |a| \cdot |b|$ и $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

**Определение $4\frac{1}{2}$А.** *Интервал* $(a;b)$ в поле $\mathbb{R}$ – это множество всех чисел $x$ таких, что $a < x < b$; *отрезок* $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leqslant x \leqslant b\}$.

14. В поле действительных чисел $\mathbb{R}$ дайте определения: ограниченной, сходящейся (см. определения из листка 11) и бесконечно малой последовательности (см. определение из задачи 16 листка 7). Докажите ограниченность сходящейся последовательности.

15. Докажите, что в поле $\mathbb{R}$:
а) выполнена аксиома Архимеда;
б) монотонная ограниченная последовательность сходится (*теорема Вейерштрасса*);
в) ваше определение предела равносильно следующему: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N} :\ \forall n \geqslant k\ |a_n - a| < \varepsilon$;
г) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \alpha_n = a_n - a$ – бесконечно малая.

## Аксиоматика

*Алгебраическая структура* — это множество с операциями и отношениями, удовлетворяющими некоторым свойствам (аксиомам).

*Операция (бинарная) на множестве* — сопоставление каждым двум элементам множества (порядок важен) элемента этого множества, то есть операция на множестве — это отображение из декартового квадрата множества в само множество.

**Аксиомы группы.** На множестве имеется операция, мы её обозначаем «$\cdot$» (умножение), удовлетворяющая следующим аксиомам:
АС1. $\forall\ a, b, c\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – ассоциативность;
АС2. $\exists e\ \forall a\ a \cdot e = e \cdot a = a$ – существование единичного элемента (единицы), единичный элемент

также обозначают 1;
AC3. $\forall a\ \exists b\ a \cdot b = b \cdot a = e$ – существование обратного элемента, в этом случае пишут $b = a^{-1} = \frac{1}{a}$.

**Аксиома коммутативной группы**: если дополнительно к аксиомам AC1-3 выполнена аксиома AC4, то группа называется *коммутативной* (*абелевой группой*):
AC4. $\forall\ a, b\ a \cdot b = b \cdot a$ – коммутативность.

**Аксиомы кольца.** Если на множестве имеется две операции: «$+$» (сложение) и «$\cdot$» (умножение), причем по отношению к сложению множество является коммутативной (абелевой) группой (аксиомы AC5-AC8, операция умножения удовлетворяет аксиомам AC1 и AC2, а также выполнена аксиома AC9, то такое множество называется *кольцом*; если операция умножения коммутативна (AC4), то получаем *коммутативное кольцо*:
AC5. $\forall a, b, c\ (a + b) + c = a + (b + c)$ – ассоциативность сложения;
AC6. $\forall a, b\ a + b = b + a$ – коммутативность сложения;
AC7. $\exists 0\ \forall a\ a + 0 = a$ – существование нуля: единичный элемент для операции сложения принято называть ***нулём***;
AC8. $\forall a\ \exists b\ a+b = 0$ – существование противоположного элемента по сложению, в этом случае пишут $b = -a$;
AC9. $\forall a, b, c\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ – дистрибутивность; связывает обе операции в кольце, в некоммутативном кольце должна быть выполнена ещё одна дистрибутивность: $\forall a, b, c\ a \cdot (b + c) = a \cdot c + a \cdot c$.

**Аксиомы тела.** Если в кольце для любого ненулевого элемента есть обратный, то это кольцо называется *телом*:
AC3'. $\forall a \neq 0\ \exists b\ a \cdot b = b \cdot a = e$.
Если в теле умножение коммутативно, то получаем *поле*, также в поле считается, что $0 \neq 1$.

Помимо операций на множестве (складывать и умножать вы привыкли с раннего детства) важным понятием является *отношение порядка* (выше-ниже, ближе-дальше, громче-тише, лучше-хуже и т.п.), с которым вы познакомились еще раньше.

**Аксиомы отношения порядка** $\leqslant$:
AC10. $\forall a, b, c$, если $a \leqslant b, b \leqslant c$, то $a \leqslant c$ – транзитивность отношения порядка;
AC11. $\forall a\ a \leqslant a$ – рефлексивность отношения порядка;
AC12. $\forall a, b$, если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $b = a$ – антисимметричность отношения порядка;

Отношения порядка называют *линейным порядком*, если выполнена аксиома
AC13. $\forall a, b\ a \leqslant b$ или $b \leqslant a$ – линейность отношения порядка.

Множество, в котором введено отношение линейного порядка, называют ***линейно упорядоченным множеством***.

**Определения 4Е.** Подмножество $M$ линейно упорядоченного множества $X$ *ограничено снизу(сверху)*, если $\exists x\ \forall m \in M\ m \leqslant x$ (соответственно $x \leqslant m$). В этом случае $x$ называется *верхней* (соответственно *нижней*) *гранью* подмножества $M$. Наименьшая из всех верхних граней называется *точной верхней гранью* $M$: ТВГ$(M)$ или $\sup(M)$. Наибольшая из всех нижней граней называется *точной нижней гранью* $M$: ТНГ$(M)$ или $\inf(M)$.

Если в поле задан линейный порядок $\leqslant$, причём выполнены аксиомы AC14 и AC15, то получаем *упорядоченное поле*:

AC14. $\forall a, b, c$, если $a \leqslant b$, то $a + c \leqslant b + c$ – прибавление к неравенству слева и справа одного и того же числа;
AC15. $\forall a, b$ и $c > 0$, если $a \leqslant b$, то $a \cdot c \leqslant b \cdot c$ – умножение неравенства слева и справа на одно и то же положительное число.

И, наконец, важнейшая аксиома поля действительных чисел:

AC16. **Аксиома полноты (непрерывности).** Если в линейно упорядоченном множестве взяты два непустых подмножества так, что всякий элемент одного множества меньше или равен каждого элемента другого множества, то существует элемент, который больше или равен каждого элемента первого множества и меньше или равен каждого элемента второго множества.

Задача 10 этого листка показывает, что существуют равносильные АС16 формулировки аксиомы полноты.

**ГРУППА** – выполнены аксиомы АС1, АС2, АС3;
**КОММУТАТИВНАЯ (АБЕЛЕВА) ГРУППА** – выполнены аксиомы АС1, АС2, АС3, АС4;
**КОЛЬЦО** – выполнены аксиомы АС5, АС6, АС7, АС8, АС1, АС2, АС9;
**КОММУТАТИВНОЕ КОЛЬЦО** – выполнены аксиомы кольца и аксиома АС4;
**ТЕЛО** – выполнены аксиомы кольца и аксиома АС3';
**ПОЛЕ (КОММУТАТИВНОЕ ТЕЛО)** – выполнены аксиомы поля, аксиома АС4 и $0 \neq 1$;
**УПОРЯДОЧЕННОЕ ПОЛЕ** – выполнены аксиомы поля и аксиомы АС10, АС11, АС12, АС13, АС14, АС15;
**ПОЛЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ** $\mathbb{R}$ - выполнены аксиомы упорядоченного поля и аксиома непрерывности АС16.

Оказывается, чтобы доказывать утверждения про действительные числа, возможно использование только аксиом АС1-АС16 и многочисленных следствий из них, которые вам известны (и которые доказывались, или еще нет, в курсах математики): свойства умножения на ноль, на минус единицу, свойство квадрата действительного числа, разнообразные свойства неравенств.

В ходе сдачи задач свойствами действительных чисел, известными вам из курса средней школы, можно пользоваться, но доказательство любого из них может быть спрошено преподавателем.

Возникает вопрос: существует ли несколько «разных» множеств действительных чисел? Оказывается, что такое множество в некотором смысле одно. Просто существуют разные модели действительных чисел. В школьном курсе математики рассматривают (почти без каких либо строгих определений и доказательств) действительные числа как бесконечные десятичные дроби. Другие модели множества действительных чисел и вопрос «единственности» множества действительных мы рассмотрим позже.

Первым, кто построил строгую теорию действительных чисел (1872 г.), был немецкий математик **Рихард Дедекинд** (1831-1916). Очень близкое по идее, но геометризованное построение теории действительных чисел (теория отношений отрезков), дано в «Началах» **Евклида** (около 300 г. до н.э.), хотя отношения отрезков древние греки не считали числами.

Ссылка на одно из изданий работы Р. Дедекинда на русском языке, доступное в интернете:
http://www.vixri.com/d/Dedekind%20R.Ju.%20_Nepreryvnost'%20i%20irracional'nye%20chisla.pdf

## Листок 5. Движения плоскости

**Определение 5А.** *Преобразованием* множества $X$ называется взаимно-однозначное отображение $f : X \to X$. *Тождественное* преобразование множества $X$ обозначается $Id_X(x) = x$.

1. Пусть $f$, $g$, $h$ — преобразования множества $X$.

а) Докажите, что $f \circ g$ также является преобразованием.

б) Докажите, что $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$; верно ли это свойство ля любых отображений из множества $X$ в себя?

в) Докажите, что если $f \circ g = f \circ h$, то $g = h$, и если $g \circ f = h \circ f$, то $g = h$.

*В данном листке $\mathbb{A}^2$ обозначает плоскость, знакомую вам из курса планиметрии.*

**Определение 5В.** Преобразование плоскости $\phi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ называется *движением*, если оно сохраняет расстояния, т.е. для любых двух точек $A, B \in \mathbb{A}^2$ расстояние между ними равно расстоянию между их образами: $|\phi(A)\phi(B)| = |AB|$.

2. Докажите, что множество всех движений плоскости образует группу с операцией композиции движений.

3. Докажите, что движение переводит а) окружность в окружность того же радиуса; б) отрезок в равный ему отрезок; в) прямую в прямую.

4. Докажите, что если движение плоскости имеет три неподвижных точки, не лежащие на одной прямой, то это движение — тождественное преобразование.

**Напоминание из геометрии.** 1. *Параллельный перенос*, переводящий точку $A$ в $B$, является композицией двух осевых симметрий с осями, перпендикулярными $AB$ и расстояние между которыми равно половине расстояния между $A$ и $B$.

2. *Поворот относительно точки* $O$ на некоторый угол $\alpha \leqslant 180^\circ$ является композицией двух осевых симметрий с осями, проходящими через точку $O$, угол между которыми равен $\dfrac{\alpha}{2}$.

**Определение 5C.** *Скользящая симметрия* — композиция осевой симметрии и параллельного переноса с направлением, параллельным оси симметрии.

5. Какое преобразование является композицией

а) параллельного переноса и осевой симметрии с осью, перпендикулярной направлению переноса;

б) параллельного переноса и поворота на ненулевой угол $\alpha \leqslant 180^\circ$?

6. а) Докажите, что если движение имеет две неподвижные точки, то это тождественной преобразование или осевая симметрия.

б) Докажите, что если движение имеет единственную неподвижную точку, то это движение — поворот.

7. Докажите, что если движение $S$ не имеет неподвижных точек, то $S$ — параллельный перенос или скользящая симметрия.

(*Указание*: пусть $S(A) = B$, тогда рассмотрите движение, являющееся композицией $S$ и параллельного переноса или осевой симметрии, переводящей $B$ в $A$.)

8. Постройте на данной прямой такую точку $X$, что а) сумма расстояний от $X$ до двух заданных точек минимальна; б) разность расстояний от $X$ до двух заданных точек максимальна.

**Определение 5D.** Всякая биекция фигуры на себя, при которой сохраняются расстояния между точками фигуры, называется *симметрией* этой фигуры.

9. Докажите, что множество симметрий фигуры с операцией композиции — это группа. Поэтому множество симметрий фигуры называют *группой симметрий фигуры.*

**Определение 5E.** Количество элементов в конечной группе называется *порядком группы.*

10. а) Какой порядок может быть у группы симметрий треугольника?

б) Укажите все элементы группы симметрий правильного треугольника и попарные композиции этих элементов.

11. а) Приведите пример четырёхугольников двух разных видов с группой симметрий порядка 2.

б) Приведите пример четырёхугольников двух разных видов с группой симметрий порядка 4.

12*. Какой наибольший порядок может иметь группа симметрий четырёхугольника?

13*. Верно ли, что если группа симметрий ограниченной фигуры бесконечна, то эта фигура — окружность?

## Листок 6. Муниципальный винегрет

1. Задайте формулой какую-нибудь квадратичную функцию, график которой пересекает оси координат в вершинах прямоугольного треугольника.

2. Пусть $a_1, a_2, a_3$ — произвольные вещественные числа, а $b_1, b_2, b_3$ — они же, но взятые в другом порядке. Доказать, что $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \leqslant a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

3. Доказать, что при любых положительных $a$ и $b$ выполняется неравенство $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8 \geqslant 64ab(a+b)^2$.

4. Докажите, что если для чисел $a$, $b$ и $c$ выполняются неравенства: $|a-b| \geqslant |c|$, $|b-c| \geqslant |a|$, $|c-a| \geqslant |b|$, то одно из этих чисел равно сумме двух других.

5. Найдите все тройки положительных чисел, для которых выполняется равенство $a^2(a-1)+b^2(b-1)+c^2(c-1)=a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)$.

6. Может ли число вида $\sqrt{c+d\sqrt{7}}$ равняться сумме нескольких чисел вида $\sqrt{a+b\sqrt{2}}$, где $a, b, c, d$ — целые.

7. Известно, что $a^2+b=b^2+c=c^2+a$. Какие значения может принимать выражение $a(a^2-b^2)+b(b^2-c^2)+c(c^2-a^2)$?

8. На доске записаны двузначные числа. Каждое число составное, но любые два числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел может быть записано?

9. Найдите такое наименьшее натуральное число $n$, что произведения всех ненулевых цифр чисел $n$ и $n+1$ отличаются ровно в 54 раза?

10. Назовём натуральное число *интересным*, если его можно разложить на натуральные множители, каждый из которых меньше, чем 30. Докажите, что из 10 000 интересных чисел всегда можно выбрать два, произведение которых является точным квадратом.

11. Найдите такое наибольшее $n$, что сумма четвёртых степеней любых $n$ простых чисел, больших 10, делится на $n$.

12. Сумма десяти натуральых чисел равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать НОД (наибольший общий делитель) этих чисел?

13. Сумма трёх различных чисел равна шести, а сумма их попарных произведений равна девяти. Докажите, что эти числа положительные.

14. Том Сойер взялся покрасить очень длинный забор, соблюдая условие: любые две доски, между которыми ровно две, ровно три или ровно пять досок, должны быть окрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество красок потребуется Тому для этой работы?

15. Дед Мороз пришёл в детский сад раздавать конфеты. Он обнаружил, что, хотя мальчиков в саду больше, чем девочек, он может все конфеты раздать поровну мальчикам, а может все конфеты раздать поровну девочкам. Дед Мороз, разумеется, раздал конфеты всем детям, каждому досталось по три. А если бы он и впрямь стал раздавать конфеты только девочкам, сколько бы получила каждая?

16. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагональ $AC$ делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон $BC$ и $AD$. В каком отношении она делит диагональ $BD$?

## Листок 7. Бесконечные множества

*В этом листке задачами с звездочкой «*» можно пользоваться без доказательства во всех задачах с бо́льшими номерами.*

**Замечание.** Биекция множества последовательностей из 0 и 1 длины $n$, в которых 0 встречается ровно $k$ раз, на множество $k$-элементных подмножеств $n$-элементного множества означает, что последовательностей 0 и 1 длины $n$, в которых 0 встречается ровно $k$ раз, столько же сколько способов выбрать $k$ предметов из $n$. Биекция множества симметрий правильного треугольника на множество перестановок трех букв $ABC$ означает, что порядок группы симметрий равностороннего треугольника равен порядку группы перестановок из трех элементов.

1. Установите биекцию (взаимно однозначное отображение) следующих бесконечных множеств:

а) четных натуральных чисел и нечётных натуральных чисел;

б) целых чисел и натуральных чисел;

в) бесконечных последовательностей из 0 и 1 и множеством всех подмножеств множества натуральных чисел.

**Определение 7A.** Множества $X$ и $Y$ называются *равномощными*, если существует взаимно однозначное отображение (биекция) $f : X \to Y$. Обозначение: $|X| = |Y|$.

2. Множество $X$ получено из множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ удалением нескольких (конечного количества) чисел. Являются ли равномощными множества $X$ и $\mathbb{N}$?

**Определение 7B.** Множество называется *счётным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$. Множество называется *несчётным*, если оно бесконечно и не является счётным.

3*. а) Докажите, что любое бесконечное подмножество множества натуральных чисел счетно.

б) Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

4. Придумайте формулу $f(m; n)$, которая каждой упорядоченной паре натуральных чисел ставит в соответствие натуральное число, причем это соответствие инъективно (разным парам ставит в соответствие разные числа).

5. Докажите, что:

а) если существует инъективное отображение из бесконечного множества X в множество N, то множество X счетно.

б) если из бесконечного множества удалить конечное множество, то получится множество той же мощности.

6. Докажите, что следующие множества счётны:

а) $\{x \in \mathbb{N} \,|\, x$ делится на 5 с остатком $1\}$ и множество простых чисел;

б) точки плоскости, координаты которых — целые числа;

в) множество конечных «слов» в языке с конечным алфавитом;

г) множество конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$.

7. Докажите, что

а) если $X$ счётно, а $Y$ конечно и непусто, то $X \times Y$ счётно;

б*) если $X$ бесконечно, а $Y$ конечно и непусто, то $|X \times Y| = |X|$.

**Определение 7C.** *Объединением* счётного числа множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ называется множество, состоящее из всех таких элементов $x$, что $x \in A_n$ хотя бы для одного натурального $n$. Обозначение: $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

8. Докажите, что следующие множества являются счётными: а) объединение конечного числа счётных множеств; б) декартово произведение двух счётных множеств; в) объединение счётного числа различных конечных множеств; г) объединение счётного числа счётных множеств.

9. Является ли счётным множество а) рациональных чисел $\mathbb{Q}$; б) многочленов с целыми коэффициентами; в) алгебраических чисел — корней многочленов с целыми коэффициентами?

10. Счётно ли множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц?
*Указание.* Как, имея конечный или счётный список последовательностей из 0 и 1, предъявить последовательность, которой нет в этом списке?

**Определение 7D.** Пусть $X$ — множество. Тогда $2^X$ — это множество всех его подмножеств.

**Определение 7E.** Говорят, что множество имеет мощность *континуума*, если оно равномощно множеству $2^{\mathbb{N}}$. Например, континуальным является множество всех бесконечных последовательностей из 0 и 1 (см. задачу 7.1в).

11. Докажите, что континуальными множествами являются а) отрезок, б) квадрат с внутренней частью.

12*. а) Является ли счетным множество всех многоугольников на плоскости, координаты вершин которых рациональны?;

Можно ли разместить на плоскости несчетное множество

б) непересекающихся окружностей?;

в) непересекающихся кругов?;

г) непересекающихся букв Т?

13*. Однако, если множество бесконечно, не стоит думать, что оно либо счётно, либо континуально. Докажите, что $|X| \neq |2^X|$.

14*. (**Теорема Кантора-Бернштейна**) Если множество $A$ равномощно какому-то подмножеству множества $B$, а множество $B$ равномощно какому-то подмножеству множества $A$, то $|A| = |B|$.

15*. Ровно за минуту до Нового Года Дед Мороз выдаёт Васе 10 конфет, после чего одну конфету у него забирает. За полминуты до НГ он ещё раз повторяет эту операцию. За четверть минуты — ещё раз. И так далее до бесконечности. Сколько конфет будет у Васи в Новом Году?

## Листок 8. Отношения на множестве. Порядок и эквивалентность

Примеры «отношений» на множестве:

1) Пусть $X$ — множество всех прямых на плоскости. Будем писать $aRb$, если прямая $a$ параллельна прямой $b$.

2) Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Будем писать $mRn$, если $m$ делит $n$.

3) Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Будем писать $nR_pm$, если $m - n$ делится на натуральное $p > 1$.

4) Пусть $2^X$ — множество всех подмножеств некоторого множества $X$. Будем писать $ARB$, если $A \subset B$.

**Определение 8А.** Отношение $R$ на множестве называется

– *транзитивным*, если $(aRb \ \wedge \ bRc) \Rightarrow aRc \ \forall a, b, c$ из множества;

– *симметричным*, если $aRb \Rightarrow bRa \ \forall a, b$ из множества;

– *антисимметричным*, если $(aRb \ \wedge \ bRa) \Rightarrow (a = b) \ \forall a, b$ из множества;

– *рефлексивным*, если $aRa \ \forall a$ из множества.

1. а) К какому виду отношений из определения 8.А относятся отношения из примеров 1-4?

б) Постройте отношение на множестве $\{1, 2, 3\}$, которое является рефлексивным и симметричным, но не транзитивным.

в) Задайте отношение на произвольном множестве, которое транзитивно, симметрично, антисимметрично и рефлексивно одновременно. Сколько таких разных отношений можно задать на множестве?

**Определение 8В.** *Отношением* на множестве $X$ называется всякое подмножество множества $X \times X$. Таким образом, отношением на множестве $X$ называется любой набор упорядоченных пар элементов множества $X$.

**Обозначения.** Пусть $R \subset A \times A$ — отношение на множестве $A$, и пусть $a, b \in A$. В ситуации, когда $(a, b) \in R$, пишут $aRb$ и говорят, что $a$ находится с $b$ в отношении $R$. В качестве $R$ могут выступать знакомые вам значки $=, \ \perp, \ < \ \ldots$

2. а) Сколько всего отношений можно задать на конечном множестве?

б) Сколько на конечном множестве из $n$ элементов можно задать рефлексивных отношений?

в) Сколько на конечном множестве из $n$ элементов можно задать симметричных отношений?

Среди отношений на множестве в математике особенно важны *отношения порядка* и *отношения эквивалентности.*

**Определение 8C.** Отношение на множестве называется
– *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, транзитивно и симметрично;
– *отношением порядка*, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

3. а) Какие отношения из примеров 1-4 являются отношениями эквивалентности или порядка?

б) Что вы можете сказать об отношении, если оно является одновременно отношением эквивалентности и отношением порядка?

4. а) Пусть $X$ — некоторое счётное множество. Как установить на нём отношение порядка $R$ такое, что для любых $a, b \in X$ выполнено одно из условий $aRb$ или $bRa$?

б) На множестве целых чисел задайте отношение эквивалентности $R$ такое, что среди любых 179 чисел найдутся два эквивалентных числа, и при этом найдутся 178 чисел, среди которых нет эквивалентных чисел.

**Определение 8D.** Отношение порядка $R$ на множестве $A$ называется *линейным порядком*, если выполнено условие $\forall a, b \in A : aRb \vee bRa$. При этом множество $A$ называется *линейно упорядоченным.*

5. Установите отношение линейного порядка на множестве а) конечных; б) бесконечных последовательностей нулей и единиц.

6. Сколько различных отношений линейного порядка можно задать на множестве из $n$ элементов?

**Определение 8E.** Пусть на множестве $X$ задано отношение эквивалентности $R$. *Классом эквивалентности элемента* $x \in X$ назовём множество всех элементов из $X$, эквивалентных $x$ (обозначение $[x]$). Множество классов эквивалентности называется *фактор-множеством* множества $X$ по отношению $R$, обозначается $X/R$.

7. а) Докажите, что любые два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются.

б) Пусть множество $X$ разбито на попарно непересекающиеся подмножества. Задайте отношение, классы эквивалентности которого совпадают с заданными подмножествами.

8. а) Сколько элементов в фактор-множестве $\mathbb{Z}/R$, если $mRn$ означает, что $m - n$ делится на фиксированное $p$?

б) Пусть $X$ — множество точек плоскости, не лежащих на фиксированной прямой $a$. Будем считать $ARB$, если отрезок $AB$ не пересекает прямую $a$. Докажите, что получается отношение эквивалентности на $X$. Сколько классов эквивалентности в фактор-множестве $X/R$?

в) Установите биекцию фактор-множества $X/R$ на множество точек окружности, если $X$ – множество лучей, $R$ – отношение сонаправленности.

9. Определите множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ как фактор-множество множества дробей.

10. Введите «привычное» отношение линейного порядка на множестве рациональных чисел как фактор-множестве из задачи 8.

**Замечание.** Естественный порядок на множестве натуральных чисел обладает таким свойством: всякое подмножество натуральных чисел содержит наименьший элемент, а множество неотрицательных рациональных чисел с естественным порядком не обладает этим свойством: например, нет наименьшего положительного рационального числа.

**Определение 8F.** Если для линейного порядка на множестве $X$ выполнено свойство: любое подмножество $X$ содержит наименьший элемент, то такой порядок называется *полным*, а само множество называется *вполне упорядоченным.*

11. Являются ли отношения линейного порядка из задачи 5 отношениями полного порядка?

12. а) На множестве натуральных чисел задайте линейный, но не полный порядок.

б) На множестве рациональных чисел задайте полный порядок.

13*. Задайте полный порядок на множестве точек отрезка.

### Дополнительные задачи

14. Докажите, что $\cos\dfrac{\pi}{7}-\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{1}{2}$.

15. Докажите, что многочлен $x^{15}-1$ имеет делители всех степеней от 1 до 14, т.е. для любого натурального числа $k\leqslant 14$ найдётся многочлен степени $k$ с целыми коэффициентами, делящий $x^{15}-1$.

## Листок 9. Новогодний. Вероятностный

1. У Деда Мороза есть 2022 карточки, пронумерованные натуральными числами от 1 до 2022. Какое наибольшее количество карточек можно взять, чтобы ни одна из взятых не была равна сумме двух других взятых карточек?

2. В коробке лежат 1 красный, 7 зелёных и 9 жёлтых новогодних шаров. Снегурочка наудачу достаёт один за другим несколько шаров.

а) Сколько существует способов достать 3 шара, если порядок доставания не важен? А сколько — 3 шара, если порядок доставания важен?

б) Какую долю составляет число способов достать один зелёный и один жёлтый шар от числа всех способов достать два шара, если порядок доставания не важен? А если порядок важен?

Такую долю называют *вероятностью* достать два названных шара.

3. Дед Мороз и Снегурочка бросают по одному кубику с числами от 1 до 6 на гранях.

а) Какова вероятность того, что выпадет пара 2 и 3? А какова — 3 и 3?

б) Выпадание какой суммы вероятнее: 6, 7 или 8?

4. Деду Морозу пришли четыре конверта с письмами, на каждом красовалось по одному натуральному числу. Дед Мороз наудачу выбрал два конверта. Снегурочка заметила, что сумма чисел на выбранных конвертах могла с равной вероятностью быть меньше семи, больше семи и равна семи. Найдите все варианты того, какой набор чисел (с точностью до перестановки) начертан на конвертах.

5. У Деда Мороза скопилась целая корзина порванных рукавиц, а именно, десять разных пар. Снегурочка наугад вытащила из корзины 8 рукавиц и зашила их. Какова вероятность того, что из зашитого всё-таки нельзя составить ни одной пары?

6. У Деда Мороза имеется много подарков, которые готовились целый год. Он наудачу берёт $n$ из них и смотрит, какой из них в какой день недели был изготовлен. При каком наименьшем $n$ вероятность того, что найдутся два подарка с совпадающими днями недели, составит не менее 50%?

7. Дед Мороз разыграл билеты в 2022-местный кинотеатр на новогоднее представление. Но вот беда: один из билетов достался Бабе-Яге, которая не сумела прочитать, что́ в нём написано. Яга прибежала на сеанс первой и заняла наугад выбранное место. Дальше стали по одному подходить остальные 2021 обладателей билетов. Если такой обладатель видел, что его место свободно, он туда и садился, иначе же занимал случайно выбранное свободное место. Какова вероятность того, что зритель, пришедший 2022-ым, займёт ровно то место, которое записано в его билете?

## Листок 10. Графы

Напоминаем, что в задачах на отыскание чего-либо требуется (если не оговорено иначе) найти все возможные варианты и показать, что других нет. В конце можно прочитать пояснения к этому листку.

1. В 9Д классе ГОУ ЦО г. Урюпинска каждый учебный день какие-то два ученика остаются в классе на дежурство. Классный руководитель как-то вечером заметил, что каждый ученик успел подежурить ровно три раза. Могло ли так оказаться, что к тому моменту прошло ровно 179 дежурств?

**Определение 10A.** *Граф* — это набор объектов, в который входят:
1. объекты, называемые *вершинами*; часть набора, образуемая всеми вершинами, называется *множеством вершин*;
2. объекты, называемые *рёбрами*; часть набора, образуемая рёбрами, носит название *множество рёбер*.

При этом каждому ребру сопоставляется две вершины из множества вершин, про которые говорят, что они *соединены* этим ребром или *являются концами* этого ребра.

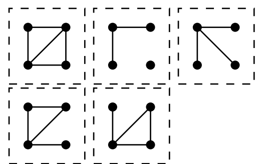
Здесь и далее условимся, что если не сказано ничего иного, то в графе конечное число вершин, у каждого ребра два конца различны, никакие два ребра не соединяют одну и ту же пару вершин, и порядок вершин на ребре не важен.

2. Можно ли нарисовать на плоскости 15 окружностей так, чтобы одна пересекалась ровно с одной из оставшихся, две — ровно с двумя, три — ровно с тремя, четыре — ровно с четырьмя и пять — ровно с пятью из оставшихся окружностей?

**Определение 10B.** *Степенью* вершины называется число рёбер, из этой вершины выходящих.

**Теорема 10C.** Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству всех его ребер.

3. В некоторой стране целых четыре столицы и много других городов. Некоторые города соединены двусторонними авиалиниями, причём из каждой столицы выходит по 179 авиалиний, а из остальных городов — по 42. Президент страны хочет, чтобы из каждой столицы можно было долететь до любой другой напрямую или с пересадками в других городах. Докажите, что, как бы ни летали самолёты, желание президента либо уже выполнено, либо может быть выполнено, если запустить всего одну новую авиалинию.

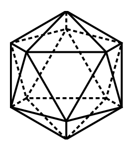


4. а) Вначале был граф с пятью вершинами. Для каждой из пяти вершин нарисовали, какой граф останется после удаления этой вершины вместе с исходящими из неё рёбрами. Вы видите справа пять получившихся графов, каждый в отдельной рамке. Восстановите изначальный граф.

б) В графе известны степени всех вершин: $6, 5, 3, 3, 2, 2, 1$.
Восстановите исходный граф.

в) В графе известны степени всех вершин: $5, 5, 4, 4, 4, 1, 1$. Восстановите исходный граф.

5. В некоторой компании из шести человек любые двое либо знакомы друг с другом, либо не знакомы. Докажите, что среди этих шести человек найдутся трое попарно знакомых или трое попарно незнакомых.



6. Юный геометр Стёпа собрался сделать себе икосаэдр — это многогранник, изображённый справа. Все его рёбра должны быть равны 10см. У Стёпы есть трёхметровый кусок проволоки, из неё он спаяет каркас и обтянет тканью. На какое наименьшее количество кусков придётся разделить проволоку?

7. В любом ли графе о двух или более вершинах найдутся две вершины одинаковой степени?

8. В R-ской Городской Думе 17 депутатов, из них любые двое либо дружат, либо враждуют, либо равнодушны друг к другу. Докажите, что среди R-ских депутатов найдутся трое попарно дружащих или трое попарно враждующих, или трое попарно равнодушных друг к другу.

9. На доске был нарисован граф с $n$ вершинами. Петя пронумеровал вершины натуральными числами от 1 до $n$ одним способом, а Вася — другим. Оказалось, что какие два номера $x$ и $y$ ни возьми, выполнено ровно одно из двух: ребром соединены либо две вершины с Петиными номерами $x$ и $y$, либо две вершины с Васиными номерами $x$ и $y$. Найдите хотя бы один пример графа, который мог быть на доске, если а) $n = 4$; б) $n = 5$; в*) $n = 8$.

В следующих задачах считаем, что в графе есть хотя бы одна вершина. Ребер может не быть.

10. В стране 360 городов, некоторые из них соединены двусторонними авиалиниями. Из каждого города выходит 179 или 180 линий, причём оба варианта встречаются. Верно ли, что из любого

города можно долететь до любого другого, сделав не более двух пересадок?

**Теорема 10D.** Если в графе две вершины соединены хотя бы одним маршрутом, то они соединены хотя бы одним простым путём. Если для двух вершин существует цикл, их содержащий, то существует простой цикл, содержащий те же две вершины.

**Теорема 10E.** Набор вершин графа можно разбить на непустые группы так, что любые две вершины из одной и той же группы соединены хотя бы одним маршрутом, а любые две вершины из разных групп не соединены никаким маршрутом. Каждая такая группа вместе со всеми рёбрами, соединяющими вершины из этой группы, называется *компонентой связности.*

11. В графе $n$ вершин, степень каждой не менее $(n-1)/2$. Докажите, что граф связен.

12. Учитель начальной школы В.И. Пупкин изготовил 66 наклеек: на двух наклейках изображены буквы А, на двух — буквы Б, на двух – буквы В, ..., на двух — буквы Я. Маленькая дочка Пупкина расклеила их в каком попало порядке на 33 чистых листа картона, по одной на каждую из двух сторон каждого листа. Докажите, что эти картонки можно так развесить на стене, чтобы на сторонах, обращённых к зрителю, были по одному разу все буквы алфавита.

13. В связном графе $n$ вершин, степень каждой чётна. Докажите, что граф останется связным при удалении любого ребра.

14. Пусть $n$ — натуральное число, и требуется определить, какое наибольшее число рёбер может иметь несвязный граф с $n$ вершинами. Решите эту задачу а) для $n = 5$; б) для каждого из возможных $n$.

15. Пусть $m$ — натуральное число, и требуется определить, какое наименьшее число рёбер может иметь связный граф с $m$ вершинами. Решите эту задачу а) для $m = 5$; б) для каждого из возможных $m$.

16*. В парламенте работают 2022 депутатов и 2022 сенаторов, каждый из которых либо состоит в партии, либо беспартийный. Некоторые депутаты дружат с некоторыми сенаторами. Депутаты из партии взялись разрабатывать один закон, и каждый депутат взял в помощь своего друга-сенатора, причём никакой сенатор не помогал сразу двум депутатам. Затем за другой закон взялись все состоящие в партии сенаторы, и каждый сенатор аналогично взял себе в помощь друга-депутата. Докажите, что весь парламент можно разбить на пары вида «депутат–сенатор» так, чтобы каждый парламентарий-партиец оказался в паре со своим другом.

17*. В связном графе более двух вершин. В нём взяли все простые цепи и выписали их в порядке убывания длин. Цепи одинаковой длины выписывались в произвольном порядке. Докажите, что цепи, оказавшиеся в этом списке на первом и втором месте, обязаны иметь хотя бы одну общую вершину.

18*. Докажите теорему: а) 10C; б) 10D; в) 10E.

### Графы в математике: что это такое и с чем их едят

В целом ряде задач приходится рассматривать набор объектов, а между некоторыми из них — те или иные попарные связи: города и дороги, люди и знакомства, соперники на турнире и поединки... Граф (см. определение 10A) — это один из способов описания подобной картины: объекты становятся вершинами, связи — рёбрами, и каждой связи ставится в соответствие пара вершин, между которыми эта самая связь и есть. Приведём несколько примеров графов.

• схема линий метро: вершины — станции; две вершины соединены ребром, если от одной станции до другой можно добраться, проехав одну станцию на поезде или пройдя пешком по переходу; отметим, что целая линия метро не является ребром (на ней более двух станций), а вот отрезок линии между двумя соседними станциями является.

• граф друзей в социальных сетях: вершины — пользователи; две вершины соединены ребром, если два пользователя являются друзьями.

• генеалогическое древо того или иного рода: вершины — люди; две вершины соединены, если из двух соответствующих людей один является родителем другого.

Граф удобно рисовать, изображая вершины точками, а рёбра — линиями так, что каждое ребро соединяет сопоставленные ему вершины.

Вообще говоря, из определения 10А не следует, что каждое ребро в графе соединяет две различных вершины. В некоторых задачах полезно рассматривать рёбра с совпадающими концами. Такие рёбра называют *петлями*.

В теории графов до сих пор не устоялась единая система терминов. Существуют разные подходы к определению графа, разные авторы могут разрешать или запрещать разные расширения. Мы будем считать, что если не сказано ничего другого, то в графе конечное число вершин, нет петель и кратных рёбер, и для ребра не важен порядок вершин на нём. В этом случае любая пара вершин либо соединена ребром, либо не соединена ничем, и для задания такого графа достаточно перечислить все вершины и указать, какие пары из них смежны. Тем не менее, вершины и рёбра — это самостоятельные объекты, и им могут быть присущи и другие свойства: цвет, пропускная способность, длина (для ребра), ограничение степени (для вершины) и прочая, и прочая, и прочая. На рисунках подобные свойства нередко изображаются, например, цветом, формой или размером элементов.

Напоследок, перечислим ещё несколько понятий. О ребре и его концевой вершине может говориться, что ребро *выходит* из вершины, что вершина *лежит* на ребре или что ребро и вершина *инцидентны* друг другу. Две вершины, соединённые ребром, ещё называются *смежными*. Вершина степени 0 часто носит название *изолированной*, вершина степени 1 — *висячей*.

*Маршрутом* в графе называется последовательность из вершин и рёбер, которая начинается и заканчивается вершиной, и в которой любые два соседних элемента — это вершина и исходящее из неё ребро. Первая вершина последовательности называется *началом* маршрута, последняя — *концом* маршрута. Число рёбер маршрута (с учётом их повторений) называется *длиной* маршрута.

Можно разрешить и маршруты, состоящие из одной-единственной вершины и ничего более — длина такого маршрута равна нулю. Мы будем считать, что если не сказано ничего другого, то на маршруте хотя бы одно ребро есть.

Маршрут называется *замкнутым*, если начало и конец маршрута — одна и та же вершина, и *незамкнутым* в противном случае.

*Путём* называется такой маршрут, в котором никакое ребро не встречается дважды. Замкнутый путь ещё называется *циклом*, а незамкнутый — *цепью*.

Путь называется *простым*, если в нём никакие две вершины не совпадают, за исключением того, быть может, что совпадают начальная и конечная вершина. Если начало совпадает с концом, мы получаем *простой цикл*, если не совпадают — *простую цепь*.

Граф называется *связным*, если между любыми двумя вершинами существует хотя бы один маршрут. В противном случае графе называется *несвязным*.

Хоть маршрут и является последовательностью вершин и рёбер, редко какая запись маршрута содержит все элементы. Например, на маршруте поезда дальнего следования (в сети железных дорог вершины — станции, рёбра — отрезки путей между станциями) прописывают только вершины. С другой стороны, программа-навигатор при прокладке маршрута по городу (в улично-дорожной сети вершины — перекрёстки или тупики, рёбра — отрезки улиц между перекрёстками) обычно перечисляет улицы, по которым этот маршрут проходит. С третьей стороны, описание городского автобусного маршрута может включать в себя как и улицы, так и перекрёстки.

### Дополнительные задачи

19. Пусть $P = a + b + c$, $T = ab + ac + bc$, где $a, b, c$ — длины сторон треугольника. Доказать, что $3T \leqslant P^2 < 4T$.

20. Найдите все целые $k$, для которых число $n = 1 + k + k^2 + k^3 + k^4$ является полным квадратом. (*Подсказка*: имеется ровно три таких целых $k$.)

## Листок 11. Топология прямой

**Внимательно прочитайте текст в конце листка!** В листке можно пользоваться свойствами рациональных чисел, аксиомами Гильберта и следствиями из них (то есть синтетической геометрией), не использующими понятия длины отрезка.

1. Какие множества могут получаться при:

а) пересечении всех интервалов, содержащих данный отрезок, полуинтервал (отрезок без одного из концов), интервал;

б) объединении всех интервалов, содержащихся в данном отрезке, интервале, луче?

2. Существует ли бесконечная система интервалов такая, что пересечение любого конечного числа интервалов из этого набора не пусто, а пересечение всех интервалов этого набора пусто?

3. Укажите все внутренние, внешние, граничные, изолированные, крайние точки следующих множеств: а) интервал, отрезок, луч, прямая $R$; б) множество точек $A_n$ с координатами $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

4. а) Пусть $Y$ — непустое множество точек. Докажите, что любая точка прямой $R$ — либо внутренняя, либо внешняя, либо изолированная, либо неизолированная граничная точка множества $Y$.

б) Может ли непустое множество иметь более двух крайних точек?

в) Найдётся ли множество, у которого счетное число внутренних точек?

5. Докажите, что любое непустое подмножество луча имеет крайнюю точку. (*См. Теорему 1.*)

6. Докажите, что если $x$ — граничная точка множества $Y$, то

а) либо $x \notin Y$, либо в любой её окрестности бесконечно много точек, не принадлежащих $Y$;

б) либо $x \in Y$, либо в любой её окрестности бесконечно много точек, принадлежащих $Y$.

в) Выкинем из множества все граничные точки. Может ли так оказаться, что ничего не выкинуто? Выкинуто всё?

7. Докажите, что а) интервал, дополнение к отрезку — открытые подмножества прямой;

б) отрезок, дополнение к интервалу — замкнутые подмножества прямой;

в) существуют множества, не являющиеся ни замкнутыми, ни открытыми.

8. Верно ли утверждение: а) множество $Y$ замкнуто титтк его дополнение $R \backslash Y$ — открыто;

б) граничная точка подмножества множества $Y$ является либо граничной, либо внутренней точкой $Y$?

9. Докажите, что а) произвольное пересечение (то есть пересечение произвольного количества) ограниченных множеств и конечное объединение (то есть пересечение конечного количества) ограниченных множеств ограничено;

б) конечное пересечение и произвольное объединение открытых множеств открыто;

в) конечное объединение и любое пересечение замкнутых множеств замкнуто.

10. Верно ли, что а) множество граничных точек любого множества замкнуто;

б) ограниченное открытое множество определяется рациональными точками, которые оно содержит?

11. Найдите все множества, являющиеся одновременно а) связными и ограниченными; б) открытыми и замкнутыми.

12. Докажите, что любое открытое подмножество множества $\mathbb{R}$ либо совпадает с $\mathbb{R}$, либо представляет собой объединение конечного или счетного множества непересекающихся интервалов и открытых лучей.

13. Пусть ограниченное счетное множество точек $Y = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ таково, что все его точки изолированы. Докажите, что тогда

а) найдется неизолированная граничная точка множества $Y$;

б) если такая точка единственна, то вне любого интервала, содержащего эту точку, лежит только конечное множество точек из $Y$.

14*. Пусть множество $Y$ замкнуто и ограничено. Тогда из любого набора интервалов, объединение которых содержит $Y$, можно выделить конечный набор набора интервалов, объединение которых содержит $Y$.

15*. Докажите а) теорему 1; б) теорему 2 (аксиому Архимеда).

В листке 11 все действие происходит на некоторой прямой $R$. На этой прямой выделены точки $O$ и $E$. Отрезок $OE$ считаем единичным. Точке $O$ сопоставим координату 0, точке $E$ — координату 1.

В листке определено много понятий, которые часто встречаются в математике. При их помощи изучаются подмножества прямой. Говорят, что на множестве задана *топология*, если задана система открытых множеств, удовлетворяющих свойствам из задачи 9б (при этом само множество и его пустое подмножество считаются открытыми).

**Определение 11А.** Точку $A$ называем *рациональной* точкой прямой $R$, если существуют натуральные числа $m$ и $n$ такие, что $n \cdot OA = m \cdot OE$. Если точка $E$ лежит между $O$ и $A$, то точка $A$ считается *положительной* рациональной точкой и ей сопостовляем число $\frac{m}{n}$. Если точка $O$ лежит между $A$ и $E$, то точка $A$ считается *отрицательной* рациональной точкой и ей сопоставляем число $\frac{-m}{n}$.

**Определение 11В.** *Окрестностью* точки называется произвольный содержащий её интервал (то есть отрезок без концов). Пусть $Y \subseteq R$. Точка $x \in R$ называется
— *внутренней точкой* множества $Y$, если у неё найдётся окрестность, целиком содержащаяся в $Y$,
— *внешней точкой* множества $Y$, если у неё найдётся окрестность, не пересекающаяся с $Y$,
— *граничной точкой* множества $Y$, если она не является ни внутренней, ни внешней,
— *изолированной точкой* множества $Y$, если у $x$ найдётся окрестность, пересечение которой с $Y$ состоит только из $x$;
— *крайней точкой* множества $Y$, если эта точка граничная для $Y$ и $Y$ содержится в одном из лучей с началом в этой точке.

**Определение 11С.** Подмножество $U \subseteq \mathbb{R}$ называется
— *ограниченным*, если оно лежит в некотором отрезке;
— *открытым*, если все его точки $U$ внутренние;
— *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки;
— *связным*, если для любых его различных точек $A$ и $B$ отрезок $[AB]$ содержится в $U$.

**Теорема 1. Следствие аксиомы полноты Гильберта.** Пусть на прямой $R$ даны два непустых множества $X$ и $Y$ таких, что никакая точка одного множества не лежит между двумя точками второго множества. Тогда найдётся точка $C$ такая, что для любых двух отличных от $C$ точек, одна из которых принадлежит $X$, а другая — $Y$, точка $C$ лежит между ними.

**Теорема 2. Аксиома Архимеда.** Пусть множество точек $A_1, A_2, A_3, \ldots$ прямой $R$ таково, что для любого $i \in \mathbb{N}$ $A_iA_{i+1} = A_{i+1}A_{i+2}$ и $A_{i+1}$ лежит между $A_i$ и $A_{i+2}$. Тогда это множество точек не ограничено.

Теоремы 1 и 2 можно использовать при решении задач листка 11.

## Листок 12. Бесконечно малые последовательности

В листке 12 по-прежему всё действие происходит на некоторой прямой $R$. На этой прямой выделены точки $O$ и $E$. Отрезок $OE$ считаем единичным. Точке $O$ сопоставляем координату 0, точке $E$ — координату 1.

**Определение 12А.** *Последовательность элементов множества* $X$ — это отображение $\mathbb{N} \xrightarrow{x} X$. Вместо $x(n)$ обычно пишут $x_n$ и называют его *$n$-тым членом* последовательности. Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ коротко обозначается через $(x_n)$.

Отметим, что *последовательность* не следует путать с *множеством* её значений и неверно думать о последовательности как о «занумерованном множестве». Всюду в этом листке речь будет идти о последовательностях точек на прямой и последовательностях рациональных точек на прямой.

1. а) Задайте следующие последовательности как отображение $(x_n)$ из $\mathbb{N}$: 0, 1, 0, 1, … и $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots$;

б) Задайте рекуррентно последовательность: $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, …

2. а) Дайте определения *ограниченной*, *неограниченной*, *монотонно возрастающей*, *монотонно убывающей* последовательностей точек на прямой.

б) Является ли последовательность из задачи 1 б) монотонной? ограниченной?

**Определение 12B.** Последовательность $(x_n)$ называется *постоянной* (или *константой*), если $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots$.

3. Исследуйте на ограниченность и монотонность следующие последовательности: а) $x_n = n$ и $x_n = \frac{1}{n}$; б) $x_n = (-1)^n \cdot n$ и $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$; в) $x_n = \frac{n-2}{2n+3}$.

**Определение 12C.** Последовательность называется *бесконечно малой*, если для любой окрестности, содержащей 0, вне этой окрестности лежит конечное число членов этой последовательности.

4. Без отрицаний запишите, что значит «последовательность $x_n$ не является бесконечно малой».

5. Докажите, что если последовательность бесконечно малая, то она ограничена.

6. Есть ли среди последовательностей задачи 3 бесконечно малые последовательности?

7. Пусть $x_n$ — бесконечно малая последовательность, все члены которой различны.

а) Верно ли, что 0 является предельной точкой множества значений этой последовательности?

б) Может ли у такой последовательности быть более одной предельной точки?

8. Верно ли, что последовательность является бесконечно малой, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k\ \ -\varepsilon < x_n < \varepsilon\ \ (x_n \in (-\varepsilon; \varepsilon))$?

9. Докажите, что последовательность $(x_n)$ является бесконечно малой титтк $(|x_n|)$ бесконечно малая.

10. а) Составим последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ из последовательностей $(x_n)$ и $(y_n)$. Будет ли эта последовательность бесконечно малой, если $(x_n)$ и $(y_n)$ - бесконечно малые последовательности?

б) Верно ли, что если $x_n$ бесконечно малая, то последовательность $t \cdot x_n$, $t \in \mathbb{N}$ тоже бесконечно малая?

11. Последовательности $(x_n)$ и $(y_n)$ бесконечно малые, а последовательность $(z_n)$ такова, что $x_n \leq z_n \leq y_n$ $(z_n \in [x_n; y_n])$ при всех натуральных $n$. Докажите, что последовательность $(z_n)$ бесконечно малая.

12. Является ли последовательность $x_n$ бесконечно малой: а) $x_n = \frac{2n}{n^2+1}$; б) $x_n = \frac{2n+1}{3n+2}$; в) $x_n = \frac{3^n + 4^n}{(-5)^n + 2^n}$?

## Листок 13. Свойства бесконечно малых последовательностей. Предел последовательности

В этом листке можно пользоваться понятием координатной прямой, для которой точкам прямой соответствуют числа, которые можно складывать, умножать и сравнивать. При этом выполнены все «привычные» свойства сложения, умножения и сравнения чисел. Все необходимые определения и утверждения из предыдущих листков также имеют место на такой координатной прямой.

1. Для последовательности чисел $(x_n)$ найдите (если это возможно) по данному числу $\varepsilon > 0$ какой-либо номер $k$, начиная с которого верно, что $-\varepsilon < x_n < \varepsilon$: **а)** $x_n = \frac{(-1)^n-2}{n}$, $\varepsilon = 0{,}1$; **б)** $x_n = \frac{n^2}{n^3-2}$, $\varepsilon = 0{,}01$.

2. Докажите, что $(x_n)$ бесконечно малая последовательность (б.м.п.) титтк $\forall\varepsilon > 0\,\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant k\ |x_n| < \varepsilon$ (т.е. $-\varepsilon < x_n < \varepsilon$). В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ или $(x_n)$ — б.м.п.

3. Докажите, что если последовательность отличных от нуля чисел $(x_n)$ бесконечно малая, то

а) последовательность $(\frac{1}{x_n})$ неограничена. Верно ли обратное утверждение?

б) последовательность $(\frac{1}{a+x_n})$ ограничена, если $a \neq 0$.

4. а) Докажите, что $(x_n)$ — б.м.п. титтк $(|x_n|)$ — б.м.п.

б) Докажите, что если $(x_n)$ — б.м.п., а $(y_n)$ — ограниченная последовательность, то $(x_n \cdot y_n)$ — б.м.п. Верно ли обратное утверждение?

5. Докажите, что бесконечно малой последовательностью являются а) сумма, разность и б) произведение бесконечно малых последовательностей.

6. Пусть $a$ и $b$ — числа (точки координатной прямой), $(x_n - a)$ и $(y_n - b)$ — б.м.п. Докажите, что а) $(x_n + y_n - a - b)$ — б.м.п.; б) $(x_n y_n - ab)$ — б.м.п.

7. Пусть $a$ и $b \neq 0$ — числа, $(x_n - a)$ и $(y_n - b)$ — б.м.п. Докажите, что, начиная с некоторого $y_k$, все члены последовательности $(y_n)$ не равны 0 и $(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b})$ — б.м.п.

**Определение 13A.** Пусть $(x_n)$ — последовательность чисел (точек координатной прямой), тогда $(x_n)$ *стремится* к $a$, если $(x_n - a)$ — б.м.п. Пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, говорят «*предел* последовательности $(x_n)$ равен $a$». Если последовательность имеет предел, то она называется *сходящейся*, в противном случае — *расходящейся*.

8. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ титтк $\forall\varepsilon > 0\,\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant k\,|x_n - a| < \varepsilon$ $(-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon)$.

9. а) Может ли последовательность не иметь ни одного предела или иметь несколько пределов?

б) Верно ли, что сходящаяся последовательность ограничена?

в) Какие арифметические свойства пределов следуют из задач 6 и 7?

Пусть $(x_n)$ — последовательность, $a$ — число. Рассмотрим условия:

1. $\forall\varepsilon > 0\,\forall k \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant k\,|x_n - a| < \varepsilon$.
2. $\forall\varepsilon > 0\,\forall k \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant k\,|x_n - a| > \varepsilon$.
3. $\forall\varepsilon > 0\,\forall k \in \mathbb{N} : \exists n \geqslant k\,|x_n - a| < \varepsilon$.
4. $\forall\varepsilon > 0\,\forall k \in \mathbb{N} : \exists n \geqslant k\,|x_n - a| > \varepsilon$.
5. $\forall\varepsilon > 0\,\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant k\,|x_n - a| > \varepsilon$.
6. $\forall\varepsilon > 0\,\exists k \in \mathbb{N} : \exists n \geqslant k\,|x_n - a| > \varepsilon$.
7. $\exists\varepsilon > 0\,\forall k \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant k\,|x_n - a| < \varepsilon$.
8. $\exists\varepsilon > 0\,\forall k \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant k\,|x_n - a| > \varepsilon$.
9. $\exists\varepsilon > 0\,\forall k \in \mathbb{N} : \exists n \geqslant k\,|x_n - a| > \varepsilon$.
10. $\exists\varepsilon > 0\,\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant k\,|x_n - a| < \varepsilon$.

10. Для каждого из условий 2-5, 8, 10 приведите пример последовательности, удовлетворяющей ему, или докажите, что такой последовательности не существует.

11. Есть ли среди условий 1-10 условия, определяющие а) ограниченную последовательность; б) неограниченную последовательность; в) постоянную последовательность; г) расходящуюся последовательность?

## Листок 14. Основы теории чисел

Главной целью этого листка является доказательство Основной теоремы арифметики при помощи идей, которые полезны в общей теории делимости в математике. Если кто-то готов рассказать иное доказательство основной теоремы арифметики, отвечая на все «почему» по ходу доказательства, то это будет оценено по достоинству!

В этом листке все числа **целые**, если не сказано иное.

1. Докажите, что натуральное число является полным квадратом тогда и только тогда, когда оно имеет нечётное число натуральных делителей.

2. Пользуясь только определением делимости, докажите что: а) если $a$ делится на 2 и на 3, то оно делится на 6; б) если $a$ делится на 2, на 3 и на 5, то оно делится на 30.

3. Кузнечик прыгает по числовой прямой, начиная в точке 0. Его прыжок может быть двух размеров — $a$ ед. или $b$ ед. Найдите координаты всех точек, в которых может побывать кузнечик, если а) $a = 5$, $b = 179$; б) $a = 57$, $b = 180$.

4. а) Сколько прыжков каждого размера и в каком направлении должен сделать кузнечик из задачи 3 при указанных там размерах прыжков, чтобы попасть в точку с координатой 3?

б) Верно ли, что если кузнечик может попасть в точки с координатами $m$ и $n$, то он может попасть в точку с координатой $m + n$?

5. Пусть $I(a, b)$ — множество всех таких целых чисел $n$, которые можно представить в виде $n = ka+mb$ с какими-либо целыми $k$ и $m$. Иными словами, $I(a, b) = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = ka+mb;\ k, m \in \mathbb{Z}\}$. Пусть $d = d(a, b)$ — *наименьшее* положительное число в $I(a, b)$.

а) Опишите множества $I(-2, 4)$, $I(0, 0)$, $I(0, b)$ и найдите в них $d$.

Докажите, что: б) чи́сла $a, b$, а также суммы, разности и любые целые кратные чисел из $I(a, b)$ также принадлежат $I(a, b)$;

в) все числа из $I(a, b)$ делятся на любой общий делитель чисел $a$ и $b$ (в том числе $d$).

6. Докажите, что а) Если $a$ и $b$ отличны от нуля, то все числа из $I(a, b)$ делятся на $d$ (в том числе $a$ и $b$);

б) $d =$ НОД$(a, b)$.

**Замечание.** Обратите внимание, что в задаче 6 доказано важное свойство НОД: НОД$(a, b)$ делится на любой общий делитель $a$ и $b$.

7. (**Две важные теоремы.**) а) Целые числа $a$ и $b$ взаимно просты титтк существуют такие целые числа $x$ и $y$, что $ax + by = 1$.

б) Пусть $p$ — простое число, $a$ и $b$ — целые. Если $ab$ делится на $p$, то $a$ делится на $p$ или $b$ делится на $p$.

8. Даны взаимно простые целые числа $a$ и $b$, $(x_0; y_0)$ — решение в целых числах уравнения $ax+by = 1$. Опишите множество всех решений в целых числах уравнения $ax + by = 1$.

9. **(Основная теорема арифметики.)** Докажите, что: а) любое натуральное число $n > 1$ раскладывается на простые множители;

б) (**каноническое разложение**) для любого натурального $n > 1$ найдутся такие различные простые $p_1, \ldots, p_k$ и натуральные $a_1, \ldots, a_k$, что $n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, причём такие наборы определены однозначно.

10. Пусть $a, b, c$ — целые числа, причём $a$ и $b$ взаимно просты. Докажите: а) если $c$ делится на каждое из чисел $a$ и $b$, то $c$ делится на $ab$.

б) если $a$ делит $bc$, то $a$ делит $c$.

11. а) Сформулируйте и обоснуйте алгоритм нахождения НОД $(a; b)$ и НОК $(a; b)$, если известны канонические разложения чисел $a$ и $b$.

б) Докажите, что НОД $\left(\frac{a}{\text{НОД}\,(a;b)}; \frac{b}{\text{НОК}\,(a;b)}\right) = 1$.

12. а) Докажите, что для натуральных $a \geqslant b$ справедливы равенства: НОД $(a,b) =$ НОД $(a-b,b)$, НОД $(a,b) =$ НОД $(r,b)$, где $r$ — остаток от деления $a$ на $b$.

б) Докажите, что $\frac{a\cdot b}{\text{НОД}\,(a,b)} =$ НОК $(a,b)$.

13. а) Найдите каноническое разложение $20!$ и $C_{20}^{10}$. б) Решите в целых числах уравнение $x^{42} = y^{55}$. в) Про натуральные числа $a$ и $b$ известно, что НОД $(a;b) = 15$, НОК $(a;b) = 840$. Найдите $a$ и $b$.

14. Найдите НОК и НОД следующих пар чисел двумя способами — с помощью результата задачи 12 и с помощью разложения на простые множители:

а) 888 и 1221; б) 1728 и 1944.

*Посмотрите, запись какого способа нахождения НОД у вас будет короче.*

15. Найдите НОД: а) $\underbrace{11\ldots}_{200\text{ единиц}}$ и $\underbrace{11\ldots}_{70\text{ единиц}}$; б) $2^{2022}-1$ и $2^{672}-1$.

16. а) Докажите, что дробь $\frac{21n+4}{14n+3}$ несократима при всех натуральных $n$.

б) Найдите все целые числа $n$, для которых $2n^2-5$ делится на $2n-1$.

17. Разложите на простые множители числа 5 611 261 и 5 456 887.

*Подсказка*: найдите НОД этих чисел.

### Целые числа, простые и составные числа, делимость и остатки: ликбез

Бог создал целые числа, всё остальное — дело рук человека.

*Леопольд Кронекер*

Напомним, что *натуральными числами* называются числа $1, 2, 3, \ldots$, возникающие при счёте каких-либо объектов. Мы пока не будем давать строгого определения, а сочтём натуральные числа известными. Совокупность всех натуральных чисел обозначается буквой $\mathbb{N}$, а фраза «$x$ — натуральное число» или «$x$ принадлежит набору натуральных чисел» коротко записывается как $x \in \mathbb{N}$. Отметим также, что по отечественной традиции, в отличие от западной, нуль не считается натуральным числом. В некоторых книгах можно встретить обозначение $\mathbb{N}_0$ — это набор, состоящий из натуральных чисел и нуля.

*Целыми числами* называются натуральные числа, противоположные натуральным чи́сла, и нуль. Совокупность всех целых чисел обозначается буквой $\mathbb{Z}$.

Для натуральных и целых чисел определены сложение $+$ и умножение $\cdot$, а также сравнение $\leqslant$. Свойства этих операций мы тоже сочтём известными из младших классов и не будем выяснять, откуда они следуют. Здесь лишь перечислим самые основные свойства в рамке справа. И напомним ещё, что *модулем числа* $x$ называется величина $|x|$, равная $x$ при $x \geqslant 0$, и $-x$ при $x < 0$.

| для всех $a, b, c \in \mathbb{Z}$ | |
|---|---|
| $a+b=b+a$ | $a\cdot b=b\cdot a$ |
| $a+(b+c)=(a+b)+c$ | $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ |
| $a+0=a$ | $1\cdot a=a$ |
| $a+(-a)=0$ | $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ |
| $a\leqslant a$ | $a\leqslant b\leqslant c\Rightarrow a\leqslant c$ |
| $a\leqslant b,\ b\leqslant a\Rightarrow a=b$ | $a\leqslant b,\ c\geqslant 0\Rightarrow ac\leqslant bc$ |

В следующем определении все числа натуральные.

**Определение 14А.** Говорят, что число $a$ *делится на* число $b$ (или, что то же самое, $b$ *делит* $a$), если существует такое число $c$, что $a = bc$. В этом случае число $b$ называют *делителем* числа $a$, и пишут $b|a$ или $a\,\vdots\, b$.

Число $n$ называется *составным*, если оно имеет более двух различных делителей, и *простым*, если у него ровно два делителя: $n$ и 1. Единица не является ни простым, ни составным.

Для двух или более чисел $x, y, z, \ldots$ существует хотя бы одно $d$, являющееся делителем каждого из них — например, единица. Наибольшее из таких $d$ называется *наибольшим общим делителем* чисел $x, y, z, \ldots$ и обозначается НОД $(x, y, z, \ldots)$.

Для тех же $x, y, z, \ldots$ существует и хотя бы одно такое $k$, для которого все эти числа являются делителями — например, произведение всех $x, y, z, \ldots$. Наименьшее из таких $k$ называется *наименьшим общим кратным* чисел $x, y, z, \ldots$ и обозначается НОК $(x, y, z, \ldots)$.

Два числа $m, n$ называются *взаимно простыми*, если НОД $(m, n) = 1$. Три или более числа $m, n, p, \ldots$ называются *взаимно простыми в совокупности*, если НОД $(m, n, p, \ldots) = 1$, и *попарно взаимно простыми*, если для любой пары из них верно, что НОД этой пары равен единице.

Для целых чисел определение делимости сохраняется, но надо помнить, что смена знака у делимого или делителя не влияет на делимость. Как правило, говоря о целых числах, под простым или составным числом, НОДом или НОКом понимают натуральное число. Тем самым, целое число может быть простым, составным, противоположным простому, противоположным составному, и отдельно идут $-1, 0, 1$. В задачах могут понадобиться как только натуральные делители, так и все целочисленные, поэтому внимательно читайте условие.

В этом листке нужно доказать основную теорему арифметики (задача 9), согласно которой любое натуральное число $n$ можно записать в виде произведения $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$ простых чисел, причём разложение определено в известном смысле однозначно. О единице обычно говорят, что она раскладывается в пустое произведение. Для целых ненулевых чисел аналогичная теорема тоже верна, но с поправкой на знак: $n = \pm p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, \ldots, p_k$ — простые числа.

**Определение 14B.** Говорят, что целое число $a$ *делится с остатком* на натуральное $b$, если $a = kb + r$, где $k$ и $r$ целые и $0 \leqslant r < b$. Число $r$ называется *остатком*, $k$ — *неполным частным* (*частным* при $r = 0$).

**Теорема 1.** (Деление с остатком.) Для всякого целого $a$ и натурального $b$ существует единственное представление числа $a$ в виде $a = kb + r$, где $k$ и $r$ целые и $0 \leqslant r < b$.

В листке теоремой 1 можно пользоваться **без доказательства**.

# Листки по математическому анализу. Класс 10Д, 2022/23 учебный год

## Лмсток 15. Геометрия комплексных чисел

**Определение 15А.** Комплексные числа можно рассматривать как точки на вещественной (декартовой) плоскости $\mathbb{R}^2$ так, что числу $x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, соответствует точка с координатами $(x, y)$.

Данное представление комплексных чисел называется *комплексной плоскостью.*

1. а) Комплексные числа $z = 2 + i$ и $w = -3i$ изображены на комплексной плоскости точками $Z$ и $W$ соответственно. Какому комплексному числу соответствует середина отрезка $ZW$? точка $U$ отрезка $ZW$, т.ч. $ZU : UW = 2 : 3$?

б) Решите пункт а) в общем виде: $Z$ и $W$ — произвольные точки плоскости, $ZU : UW = k : m$.

в) Выразите координаты вектора $\vec{ZW}$ через $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} z$, $\operatorname{Im} w$ и покажите, что длина отрезка $ZW$ равна $|z - w|$.

2. Изобразите на комплексной плоскости множество точек $z = x + iy$, удовлетворяющее условию: а) $\operatorname{Re} z > 0$; б) $|z| < 1$; в) $2x + 3y = 1$; г) $(z - a)(\overline{z} - \overline{a}) = 1$, где $a \in \mathbb{C}$.

3. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда комплексные координаты $a, b, c, d$ его вершин удовлетворяют условию $a + c = b + d$.

4. а) Найдите площадь треугольника на комплексной плоскости, вершинами которого являются точки $0, 1 + i, -1 + 2i$.

б) Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Выразите площадь треугольника на комплексной плоскости, вершинами которого являются $0$, $z_1$ и $z_2$, через числа $x_1, x_2, y_1, y_2$.

5. Докажите, что отрезки $AB$ и $CD$ перпендикулярны друг другу тогда и только тогда, когда для комплексных чисел $a, b, c, d$, соответствующих концам этих отрезков, верно, что $\frac{a-b}{c-d}$ является чисто мнимым числом.

6. Найдите алгебраическое условие на переменные $a, b, c$ (не использующее $\operatorname{Re} a$, $\operatorname{Im} z$, и т.п.), которое верно в том и только в том случае, когда точки комплексной плоскости $a, b, c$ лежат на одной прямой.

7. Докажите, что если диагонали вписанного в окружность четырёхугольника перпендикулярны, то расстояние от центра окружности до любой стороны четырёхугольника равно половине длины соответствующей противоположной стороны.

8. Пусть $z_1, z_2, z_3, z_4$ – различные комплексные числа. Верно ли, что число $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} : \frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$ является вещественным, если **а)** $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 = \operatorname{Im} z_3 = \operatorname{Im} z_4 = 0$, **б)** $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 = \operatorname{Re} z_3 = \operatorname{Re} z_4 = 0$?

9. Точка $D$ симметрична центру описанной около треугольника $ABC$ окружности относительно прямой $AB$. Докажите, что расстояние $CD$ выражается формулой $|CD|^2 = R^2 + |AC|^2 + |BC|^2 - |AB|^2$, где $R$ — радиус описанной окружности.

**Определение 15B.** Число $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} : \frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$ называется *двойным отношением* четырёх комплексных чисел $z_1, z_2, z_3, z_4$.

10. Докажите, что если точки, соответствующие комплексным числам $z_1, z_2, z_3, z_4$ лежат на одной окружности, то их двойное отношение вещественно.

11. а) Рассмотрим преобразование комплексной плоскости, заданное прибавлением комплекного числа $\omega = a + bi : z \to z + \omega$. Имеется ли у этого преобразования неподвижная точка? Докажите по определению, что это движение. Какое?

б) Рассмотрим преобразование $z \to \omega z$, где $\omega$ — фиксированное число. Имеется ли у этого преобразования неподвижная точка? Докажите по определению, что это подобие. С каким коэффициентом?

в) Пусть $|\omega| = 1$, тогда умножение на $\omega$ — это поворот (почему?). Выразите $\mathrm{Re}\,\omega$ и $\mathrm{Im}\,\omega$ через тригонометрические функции угла поворота.

12. Каким углам поворота соответствует умножение на комплексные числа $i$, $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$? Укажите все возможные углы.

13. Найдите все решения уравнения $z^n = 1$ в комплексных числах.

14. Рассмотрим треугольник с вершинами в точках с комплексными числами $a$, $b$ и $c$. Выразите через $a$, $b$, $c$ комплексное число, соответствующее:

а) точке пересечения медиан; б) точке пересечения высот; в*) центру вписанной окружности; г*) центру описанной окружности.

15. Пусть комплексным числам $a, b, c, d$ на комплексной плоскости соответствуют точки $A$, $B$, $C$ и $D$ соответственно.

а) Покажите, что $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{1}{2}(a\overline{b} + \overline{a}b)$; выразите отсюда через $a, b, c, d$ скалярное произведение $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$ и условие перпендикулярности векторов $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$;

б) Покажите, что $a\overline{b} = \overline{a}b$ — критерий коллинеарности векторов. Выведите отсюда критерий параллельности векторов $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$;

в) Покажите, что $\sin\angle AOB = \dfrac{\overline{a}b - a\overline{b}}{2i|a||b|}$ и $\cos\angle AOB = \dfrac{\overline{a}b + a\overline{b}}{2i|a||b|}$. Запишите и выведите формулу для синуса и косинуса произвольного угла.

г*) Пусть число $z$ соответствует точке пересечения прямых $AB$ и $CD$. Выразите $z$ через $a, b, c, d$.

16. Докажите, что сумма квадратов медиан треугольника равна $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон.

17. В прямоугольном треугольнике $ABC$ на гипотенузе $AB$ построен квадрат вне треугольника. Найдите расстояние от вершины $C$ прямого угла до центра квадрата $Q$, если длины катетов $BC$ и $AC$ равны соответственно $a$ и $b$.

18*. **Теорема Птолемея.** Во вписанном в окружность четырёхугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

19*. **Теорема Ньютона.** В описанном около окружности четырёхугольнике середины диагоналей коллинеарны с центром окружности.

20*. **Теорема Симпсона.** Ортогональные проекции точки, лежащей на описанной около треугольника окружности, на прямые, содержащие его стороны, коллинеарны.

21*. **Теорема Паскаля.** Точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны вписанного шестиугольника, лежат на одной прямой.

## Листок 16. Введение в теорию групп

**Определение 16A.** *Операцией*, или, более точно, *бинарной операцией* на некотором множестве $G$ называется отображение, которое каждой упорядоченной паре $(g_1, g_2)$ элементов $G$ ставит в соответствие единственный элемент $g \in G$. Другими словами, можно сказать, что это некоторое отображение $G^2 \to G$.

В данном листке операцию будем обозначать точкой «$\cdot$»: $g = g_1 \cdot g_2$.

**Определение 16B.** Множество $G$ с заданной операцией «$\cdot$» называется *группой*, если

1) $\exists e \in G$: $\forall a \in G$ $a \cdot e = e \cdot a = a$;

2) $\forall a \in G$ $\exists a^{-1} \in G$: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$;

3) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a, b, c \in G$.

Элемент $e$ называется *единицей* группы $G$, элемент $a^{-1}$ называется *обратным* к $a$.

Если при этом в группе выполнено тождество $a \cdot b = b \cdot a$, то группа называется *коммутативной* или *абелевой.*
(*Тождество* — это равенство, выполненное для любых элементов.)

1. Какие из следующих множеств с указанной операцией образуют группу? Если группа коммутативная, укажите это (достаточно ответить да-нет, в случае отрицательного ответа указать тождество, которое не выполняется):
а) числовые множества: натуральные числа с операцией сложения, с операцией умножения; целые числа с операцией сложения, с операцией умножения, с операцией вычитания; рациональные числа с операцией сложения, с операцией умножения; положительные рациональные числа с операцией умножения;
б) преобразования плоскости с операцией композиции: параллельные переносы плоскости, повороты плоскости, осевые симметрии плоскости, подобия плоскости;
в) матрицы (2×2) с операцией сложения; невырожденные матрицы с операцией умножения;
г) вычеты по произвольному модулю с операцией сложения, ненулевые вычеты по модулю 57 с операцией умножения, ненулевые вычеты по модулю 179 с операцией умножения.

2. а) Докажите, что в группе единичный элемент ровно один, а у каждого элемента ровно один обратный.

б) Докажите, что в группе $a \cdot b = a \cdot c \Leftrightarrow b = c \Leftrightarrow b \cdot a = c \cdot a$. Говорят, что в группе можно *сокращать* слева и справа.

3. Докажите, что коммутативность в группе равносильна любому из тождеств: $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ или $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.
(Натуральная степень элемента группы определяется естественным образом; определение корректно ввиду ассоциативности.)

4. Докажите, что для $a, b \in G$, где $G$ — группа: 1) $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$; 2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

**Определение 16C.** Группа $G$, в которой число элементов конечно, называется *конечной*, в противном случае она называется *бесконечной.* Количество элементов в группе $G$ называется *порядком* группы $G$ и обозначается $|G|$.

5. а) Покажите, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists$ группа $G$: $|G| = n$. б) Докажите, что все биекции множества из $n$ элементов с операцией композиции образуют группу (*группа перестановок из $n$ элементов*, обозначается $S_n$). Сколько элементов в этой группе? в) Сколько элементов в группе симметрий правильного $n$-угольника? (Симметрия геометрической фигуры — это любое движение плоскости, переводящее её в себя.)

6. Докажите, что группами являются следующие множества:

а) $SL_2(\mathbb{Z}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d$ — целые и $ad - bc = 1\}$ с операцией умножения матриц;

б) обратимые элементы кольца с операцией умножения из этого кольца, в частности, ненулевые элементы поля с операцией умножения.

**Определение 16D.** Пусть $A \subset G$, где $G$ — группа с операцией «$\cdot$». Если $A$ тоже является группой с операцией «$\cdot$», то она называется *подгруппой* группы $G$.

7. В этой задаче $G$ — группа.

а) Покажите, что $A \subset G$ является подгруппой в $G$, если: $a, b \in A \Rightarrow a \cdot b \in A$ и $a^{-1} \in A$.

б) Пусть $A, B$ — подгруппы в $G$. Тогда $A \cap B$ — подгруппа в $G$.

в) Пусть $a \in G$. Тогда $\{e, a, a^2, a^3, \dots\}$ — подгруппа в $G$. Она называется *циклической* подгруппой, порождённой элементом $a$ и обозначается $<a>$. Количество элементов в $<a>$ называется *порядком* элемента $a$ в группе $G$.

8. Опишите все подгруппы в группах с операцией сложения: а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ — множество вычетов по модулю $n$).

**Определение 16E.** Пусть $H$ — подгруппа в $G$ и $g \in G$. Множество элементов вида $\{gh : h \in H\}$ называется *левым смежным классом* по подгруппе $H$ и обозначается $gH$. Аналогично определяется *правый смежный класс* $Hg$.

9. Пусть $G$ — конечная группа, $H \subset G$ — её подгруппа. Докажите, что:

а) количества элементов в левых смежных классах и в правых смежных классах по подгруппе $H$ равны;

б) любые два левых (правых) смежных класса по подгруппе $H$ либо совпадают, либо не имеют общих элементов.

10. *Начальные теоремы теории конечных групп.*

а) (**Теорема Лагранжа**.) Порядок подгруппы делит порядок группы.

б) Порядок элемента группы делит порядок группы.

в) Если $a \in G$, тогда $a^{|G|} = e$.

г) Как из п. в) следует Малая теорема Ферма и её обобщение — теорема Эйлера?

11*. Рассмотрим множество матриц $\mathbb{H}$ вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$, где $\alpha$ и $\beta$ – комплексные числа, $\overline{\alpha}$ – сопряженное к $\alpha$ комплексное число, операции – сложение и умножение матриц. Докажите, что:

а) $\mathbb{H}$ является коммутативной группой с операцией сложения.

б) $\mathbb{H} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ является некоммутативной группой с операцией умножения.

в) Для операции сложения и умножения в $\mathbb{H}$ выполнены левые и правые дистрибутивности.

Множество $\mathbb{H}$ с операциями сложения и умножения называется ***телом кватернионов***.

12**. Приведите пример двух матриц из $SL_2(\mathbb{Z})$ четвёртого и третьего порядка, произведение которых имеет бесконечный порядок.

## Листок 17. Предел функции

**Определение 17A.** (**Предел функции по Коши**) Пусть дана функция $f$, определённая в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$. Число $b \in \mathbb{R}$ называется *пределом* функции $f$ в точке $a$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x$ из проколотой $\delta$-окрестности точки $a$ (обозначение $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$) выполнено: $|f(x) - b| < \varepsilon$. *Обозначения:* $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$ (читается «$f(x)$ стремится к $b$ в точке $a$»).

**Замечание.** Значение $f$ в точке $a$ не влияет на существование предела и на его значение. Вообще говоря, точка $a$ даже не обязана входить в области определения функции $f$.

1. При помощи определения 1 найдите пределы (с явным отысканием $\delta$ по $\varepsilon$): а) $\lim\limits_{x \to 10} 4x$; б) $\lim\limits_{x \to 0} x^2$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$; г) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^k - 1}{x - 1}$, $k \in \mathbb{N}$.

2. Что станет с определением предела функции по Коши, если убрать требование а) $\varepsilon > 0$; б) $\delta > 0$?

**Определение 17B.** (**Предел функции по Гейне**) Пусть дана функция $f$, определённая в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$. Число $b$ называется *пределом* функции $f$ в точке $a$, если для каждой сходящейся к $a$ последовательности $(x_n)$ элементы которой отличны от $a$, справедливо равенство $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$.

3. Зачем нужно требование «все элементы которой отличны от $a$»?

4. Сформулируйте без отрицания: а) «функция $f(x)$ не имеет предела по Коши в точке $a$»;

б) «функция $f(x)$ не имеет предела по Гейне в точке $a$».

5. При помощи определения 2 найдите пределы или докажите, что их не существует: а) $\lim\limits_{x\to1}\{x\}$; б) $\lim\limits_{x\to3}2(x+3)$; в) $\lim\limits_{x\to0}\sin x$; г) $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$.

6. Докажите равносильность определений «по Гейне» и «по Коши».

7. (**Теорема «о двух милиционерах»**) а) Пусть для функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ верно, что $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ для всех $x$ в некоторой окрестности точки $a$, причём функции $g(x)$ и $h(x)$ имеют одинаковый предел при $x\to a$. Докажите по Коши, что существует предел функции $f(x)$ при $x\to a$, равный этому же значению.

б) Докажите то же самое по Гейне.

8. а) Докажите, что если функция определена в некоторой проколотой окрестности точки $a$ и имеет предел в этой точке, то она ограничена в некоторой окрестности точки $a$.

б) Пусть дана функция $f(x)$, и известно, что $\lim\limits_{x\to a}f(x)>0$. Докажите, что существует такая проколотая окрестность точки $a$, в которой эта функция принимает только положительные значения.

в) Докажите, что если функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $a$ и имеет ненулевой предел в этой точке, то функция $1/f(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки $a$.

**Определение 17С.** Функция $f(x)$, определённая в проколотой окрестности точки $a$, называется *бесконечно малой в точке* $a$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

В этом листке бесконечно малые функции будем обозначать греческими буквами $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и т.п. В задачах 9 – 11 данные функции определены в некоторой проколотой окрестности точки $a$.

9. а) Дайте определение бесконечно малой функции на языке «$\varepsilon-\delta$».

б) Докажите, что $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ титтк $f(x)=b+\alpha(x)$.

10. а) Докажите, что если $\alpha_1(x),\alpha_2(x)$ — бесконечно малые, то $\forall a,b\in\mathbb{R}\ a\alpha_1(x)+b\alpha_2(x)$ — бесконечно малая (то есть любая линейная комбинация бесконечно малых — бесконечно малая).

б) Докажите, что если $f(x)$ ограничена в проколотой окрестности точки $a$, $\alpha(x)$ — бесконечно малая, то $f(x)\cdot\alpha(x)$ — бесконечно малая в $\overset{\circ}{U}(a)$. В частности, $\alpha_1(x)\cdot\alpha_2(x)$ — бесконечно малая.

11. Приведите пример двух бесконечно малых функций $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ в точке $a$ таких, что а) $o_1(x)/o_2(x)$ имеет предел; б) $\alpha_1(x)/\alpha_2(x)$ ограничена и не имеет предела в точке $a$; в) $\alpha_1(x)/\alpha_2(x)$ не ограничена.

12. Докажите, что бесконечно малыми в точке 0 являются следующие функции: а) $x\cdot\sin\frac{1}{x}$; б) (<<Первый замечательный предел») $1-\frac{\sin x}{x}$.

13. а) Сформулируйте и докажите по Коши теоремы о пределе суммы и разности двух функций. б) Докажите то же самое по Гейне.

14. а) Сформулируйте и докажите теоремы о пределе произведения и отношения двух функций. б) Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенствах.

15. а) Даны функции $f(x)$, $g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to b}g(x)=c$. Верно ли, что $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=c$?

б) Докажите предыдущее утверждение, если $g(b)=c$.

в) Докажите утверждение пункта а), если $f(x)\neq b$ в некоторой окрестности точки $a$.

16*. а) Приведите пример функции, определённой на $\mathbb{R}$ и не имеющей предела ни в одной точке.

б) Приведите пример функции, определённой на $\mathbb{R}$, не имеющей предела ни в одной точке и такой, что её модуль имеет предел в каждой точке.

в) Существует ли функция, определённая на $\mathbb{R}$ и имеющая предел ровно в одной точке?

г) Существует ли функция, определённая на $\mathbb{R}$ и имеющая предел в счётном множестве точек?

17*. а) Существует ли функция, имеющая предел в каждой иррациональной точке и не имеющая предела ни в какой рациональной точке?

б) Существует ли функция, имеющая предел в каждой рациональной точке и не имеющая предела ни в какой иррациональной точке?

18*. Приведите пример функции, определённой на $\mathbb{R}$, не равной тождественно нулю ни на каком интервале, но имеющей в каждой точке нулевой предел.

19*. а) Приведите пример функции, определённой на $\mathbb{Q}$, имеющей в каждой действительной точке бесконечный предел.

б) Существует ли функция, определённая на $\mathbb{R}$, принимающая сколь угодно большие значения в любой окрестности любой точки?

20*. Существует ли функция, принимающая на любом отрезке все действительные значения? Что можно сказать про её предел в точках области определения?

## Листок 18. Непрерывность и дифференцируемость — начало

**Определение 18A.** Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности $U(a)$ действительного числа $a$, называется *непрерывной в точке* $a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

1. а) Пусть $f_a(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ a, & x = 0. \end{cases}$ При каких $a$ получается функция $f_a(x)$, непрерывная на всей области определения?

б) Пусть $g_a(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x \in [0; \frac{\pi}{2}); \\ a, & x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ При каких $a$ получается функция $g_a(x)$, непрерывная на $[0; \frac{\pi}{2}]$?

2. Докажите непрерывность в каждой точке области определения многочлена, дробно-рациональной функции, тригонометрических функций.

**Определение 18B.** Функция $f(x)$ *непрерывна на множестве* $X$, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Множество всех точек непрерывности называется *областью непрерывности* функции $f(x)$.

3. Укажите область непрерывности: а) **функции Дирихле**: $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$

б) **функции Римана**: $R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in \mathbb{Q} \text{ и } x = \frac{m}{n} \text{ — несократимая дробь, } n > 0, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

4. Докажите, что сумма, произведение, частное непрерывных в данной точке функций являются непрерывными в данной точке функциями. Дайте необходимые уточнения самостоятельно.

5. а) **Локальное знакопостоянство.** Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(a)$ числа $a$, $f(a) \neq 0$ и $f(a)$ непрерывна в $a$, то существует окрестность $V(a)$ числа $a$ такая, что $f(x)$ на $V(a)$ имеет знак $f(a)$.

б) **Локальная ограниченность.** Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(a)$ числа $a$ и $f(x)$ непрерывна в $a$, то существует окрестность $V(a)$ числа $a$ такая, что $f(x)$ ограничена на $V(a)$.

в) **Глобальная ограниченность.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке. *Указание*: можно провести апагогическое рассуждение и применить метод деления пополам.

г) **Достижение экстремального значения.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она принимает на нём своё наибольшее и наименьшее значение, то есть $\exists\, c, d \in [a;b]\, \forall\, x \in [a;b] : f(c) \leq f(x) \leq f(d)$. *Указание*: можно провести апагогическое рассуждение, рассмотрев функцию $\frac{1}{f(x)-t}$ для некоторого $t$.

6. **Теорема о промежуточном значении.** а) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает в концах отрезка значения разных знаков, тогда $\exists c \in [a;b] : f(c) = 0$. *Указание*: можно провести прямое рассуждение и применить метод деления пополам.

б) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает в концах отрезка разные значения, тогда для любого числа $t$, находящегося между $f(a)$ и $f(b)$ $\exists c \in [a;b] : f(c) = t$.

в) Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и $t > 0$ $\exists \sqrt[n]{t}$. *Указание: рассмотрите функцию $x^n$ на нужном промежутке.*

**Определение 18С.** Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности $U(a)$ действительного числа $a$, называется *дифференцируемой в точке* $a$, если существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Этот предел называется *производной функции* $f(x)$ *в точке* $a$ и обозначается $f'(a)$ или $\frac{df}{dx}|_{x=a}$ или $f'(x)|_{x=a}$.

7. Укажите все $a$ из области определения функции, в которых существует производная $f'(a)$ и найдите $f'(a)$ $(n \in \mathbb{N})$: а) константа и $x^n$; б) $|x|$ и $\frac{1}{x^n}$; в) $\sqrt[n]{x}$, $x > 0$; г) $\sin x$ и $\cos x$.

8. Докажите, что если функция $f(x)$, определённая в некоторой области $U(x_0)$ действительного числа $x_0$, дифференцируема в точке $x_0$, то $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$. Верно ли обратное утверждение?

9. **Арифметические свойства производной.** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности $U(x_0)$ действительного числа $x_0$ и дифференцируемы в точке $x_0$. Докажите, что:

а) если $v(x) = af(x)+bg(x)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, то $v(x)$ дифференцируема в $x_0$ и $v'(x_0) = af'(x_0)+bg'(x_0)$;

б) если $v(x) = f(x) \cdot g(x)$, то $v(x)$ дифференцируема в $x_0$ и $v'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$ (**формула Лейбница**);

в) если $v(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $g(x_0) \neq 0$, то $v(x)$ дифференцируема в $x_0$ и

$$v'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

*Указание*: удобно сначала доказать эту формулу для $\frac{1}{g(x)}$.

## Листок 19. Новый год. Геометрическая вероятность и не только

**Определение 19А.** Пусть $A$ — геометрическая область на прямой, на плоскости, в пространстве и т.д., и из $A$ случайным образом (равновероятно) выбирается точка $x$. Пусть также $B \subset A$ – область. Тогда *вероятность попадания точки $x$ в $B$* равна отношению $|B|/|A|$, где через $|X|$ обозначена мера области $X$ в объемлющем пространстве: длина, площадь, объём, ...

1. В некоторой школе $n$ этажей. Школу сверху вниз насквозь пронизывают две лестницы, на каждой есть входы на каждый этаж. Иных путей с этажа на этаж нет. Мособрнадзор на каждой лестнице перекрыл каждый участок между двумя соседними этажами Большой Страшной Дверью. Рособрнадзор наугад выбрал половину Дверей и открыл их, оставив вторую половину закрытой. Какова вероятность того, что в школе можно пройти с любого этажа на любой?

2. На отрезке $[0;1]$ случайно выбираются $n$ точек. Требуется вычислить, какова вероятность того, что все выбранные точки окажутся в отрезке $[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$. Решите эту задачу для а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 3$.

3. Деду Морозу пришли четыре конверта с письмами, на каждом красовалось по одному натуральному числу. Дед Мороз наудачу выбрал два конверта. Снегурочка заметила, что сумма чисел на выбранных конвертах могла с равной вероятностью быть меньше семи, больше семи и равна семи. Найдите все варианты того, какой набор чисел (с точностью до перестановки) начертан на конвертах.

4. Дед Мороз тестировал двухметровую палку, из которой собирался сделать себе новый посох. Но палка разломилась в двух случайных точках. Какова вероятность того, что из трёх обломков можно сложить треугольник?

5. Дед Мороз, собираясь навестить детский баскетбольный клуб, бросал мячи в мешок. Первый раз он попал, второй промазал, а далее, если при $N \geq 2$ бросках было $m$ попаданий, то $(N+1)$-й бросок заканчивался попаданием с вероятностью $m/N$ и промахом с вероятностью $1 - m/N$. Дед Мороз бросил мяч 180 раз. Какова вероятность того, что в цель попало ровно 57 мячей?

6. Снегурочка разгребает письма Деду Морозу, приходившие целый год. Она наудачу берёт $n$ из них и для каждого смотрит, в понедельник ли, во вторник ли, ..., в воскресенье ли пришло это письмо. При каком наименьшем $n$ вероятность того, что найдутся два письма с совпадающими днями недели, составит не менее 50%?

7. Дед Мороз и Снегурочка договорились встретиться в определённом месте между пятью и шестью часами дня. При этом они условились, что пришедший на место встречи первым будет ждать другого только в течение $n$ минут. При каком $n$ вероятность того, что встреча состоится, больше $\frac{1}{2}$, если и Дед Мороз, и Снегурочка придут в назначенное место случайным образом между пятью и шестью часами дня?

8. Дед Мороз разыграл билеты в 2018-местный кинотеатр на новогоднее представление. Но вот беда, по одному билету досталось Бабе-Яге и Кощею Бессмертному, которые не умели читать ничего хорошего и не разобрали, какие места значились в их билетах. Яга прибежала первой и заняла наугад выбранное свободное место. Кощей прибежал вторым и поступил аналогично. Затем по одному стали приходить остальные 2016 обладателей билетов. Если зритель видел, что его место свободно, он садился на него, иначе выбирал наудачу одно из свободных мест и шёл туда. С какой вероятностью зритель, пришедший 2018-ым, займёт своё место?

9. Некий снеговик учил математику. Дед Мороз выбрал ему случайным образом два действительных числа $a$ и $b$, по модулю не превосходящие $10^9$, и велел решить уравнение $ax + b = 0$. Снеговик всё сделал правильно. Какова вероятность того, что найденный корень больше единицы?

10. У Деда Мороза имелась цветовая палитра в виде круга, разбитого на секторы, где каждый сектор был покрашен в какой-то свой цвет. Готовя шары для ёлки, Дед Мороз красил каждый шар в один из цветов палитры. Однажды Дед Мороз изготовил целый мешок таких товаров; неверно, что всех цветов поровну. Снегурочка наудачу извлекла из мешка один шар, записала его цвет, положила обратно, затем ещё раз повторила. Дед Мороз рассчитал вероятности двух событий:

(1) оба шара имеют один и тот же цвет;

(2) цвета́ шаров находятся на палитре в соседних секторах, причём второй — по часовой стрелке относительно первого.

У какого из событий вероятность больше?

11. Дед Мороз изготовил три ледяных правильных тетраэдра. Он хочет расставить на их 12 гранях такие числа, чтобы при одновременном бросании всех трёх тетраэдров сумма чисел на тех гранях, на которые эти тетраэдры приземлились, с равной вероятностью принимала все возможные значения из списка $1, 2, \ldots, n$. Для каких натуральных $n$ подходящий расклад чисел есть?

12. В этой задаче подсчитывается вероятность того, что случайно выбранная хорда на окружности не превосходит радиуса окружности. Напрямую вычислив эту вероятность, покажите, что она: а) больше $\frac{1}{\pi}$; б) меньше $\frac{1}{\pi}$; в) равна $\frac{1}{\pi}$.

## Листок 20. Теоремы о дифференцируемых функциях

**Определение 20A.** Пусть дана функция $y = f(x)$ и точка $A(x_0; f(x_0))$ на графике этой функции. Пусть $B(x; f(x))$ — произвольная точка на графике. Обозначим $k(x)$ — угловой коэффициент прямой $AB$. Прямая $l$, проходящая через точку $A$, называется *наклонной касательной* к графику функции $f(x)$ в точке $x_0$, если её угловой коэффициент $k = \lim\limits_{x\to x_0} k(x)$.

1. Докажите, что наклонная касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ существует титтк $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$. При этом угловой коэффициент касательной $k = f'(x_0)$.

2. Пусть точка движется по прямой так, что её координата в момент времени $t$ равна $x(t)$. Почему тогда следует считать, что скорость $v(t) = x'(t)$ (знак производной отвечает за направление скорости)? Какие ещё физические величины следует определять как производные (в математическом смысле) других величин (они могут зависеть от времени, а могут от других параметров)?

3. Докажите, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности $U$ точки $x_0$ верно равенство $f(x_0+h) = f(x_0)+K\cdot h+\alpha(h)\cdot h$, где $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h) = 0,\ x_0 + h \in U$, причём $K = f'(x_0)$.

4. **Непрерывность и дифференцируемость сложной функции.** Пусть $h(x) = f(g(x))$, функция $g$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$, функция $f$ определена в некоторой окрестности точки $g(x_0)$, тогда

а) если $g$ непрерывна в $x_0$, а $f$ непрерывна в $g(x_0)$, то $h$ непрерывна в $x_0$;

б) если $g$ дифференцируема в $x_0$, а $f$ дифференцируема в $g(x_0)$, то $h$ дифференцируема в $x_0$ и $h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

**Определения 20B.** Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке и существует окрестность $U$ точки $x_0$ такая, что $\forall x \in U\ f(x) \leqslant f(x_0)\ (f(x) \geqslant f(x_0))$, тогда точка $x_0$ называется точкой *локального максимума* (*локального минимума*) функции $f(x)$. Точки локального максимума и точки локального минимума называются точками *локального экстремума.*

5. **Классические теоремы о дифференцируемых функциях.**

а) **Теорема Ферма.** Пусть $x_0$ точка *локального экстремума* функции $f(x)$, дифференцируемой в точке $x_0$, тогда $f'(x_0) = 0$. Верно ли обратное утверждение? Каков геометрический и физический (механический) смысл леммы Ферма?

б) **Теорема Ролля.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема во всех точках интервала $(a; b)$ и $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $x_0 \in (a; b)$, в которой $f'(x_0) = 0$. Каков геометрический смысл теоремы Ролля?

в) **Теорема Лагранжа (о конечном приращении).** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во всех точках интервала $(a; b)$, тогда существует точка $x_0 \in (a; b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(x_0) \cdot (b - a)$. (*Указание*: рассмотрите функцию $f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$). Каков геометрический смысл числа $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ и теоремы Лагранжа?

г) **Теорема Коши.** Пусть функции $f$ и $g$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы во всех точках интервала $(a; b)$, тогда существует точка $x_0 \in (a; b)$ такая, что $g'(x_0) \cdot (f(b) - f(a)) = f'(x_0)\cdot(g(b) - g(a))$. Для доказательства рассмотрите подходящую функцию. Какой факт о векторах скорости и смещения при движении частицы в плоскости можно получить из теоремы Коши?

д*) **Теорема Дарбу.** Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема в каждой точке некоторой окрестности отрезка $[a; b]$. Тогда производная $f'(x)$ принимает на $[a; b]$ все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$.

6. Найдите точку $x_0$ из теоремы Ролля для данных функций и отрезков: а) $y = 3x^2 - 24x + 48,\ x \in [3; 5]$; б) $y = \sin x,\ x \in [-17\pi; -15\pi]$; в) $y = \operatorname{tg} x,\ x \in [0; \pi]$.

7. Найдите точку $x_0$ из теоремы Лагранжа для данных функций и отрезков: а) $y = x^3,\ x \in [0; 1]$; б) $y = \sqrt{x},\ x \in [1; 8]$; в) $y = \sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

8. Выведите из классических теорем о производной следующие утверждения (сами теоремы могут быть ещё не доказаны).

а) Если функция $f$ дифференцируема на $(a; b)$ и $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a; b)$, то $f$ постоянна на $(a; b)$; если функции $f$ и $g$ дифференцируемы на $(a; b)$ и $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in (a; b)$, то $f - g$ постоянна на $(a; b)$.

б) Если функция $f$ дифференцируема на $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in (a; b)$, то $f$ строго возрастает (убывает) на $(a; b)$.

9. Пусть функция $f$ строго возрастает на $(a; b)$. Верно ли, что $\forall x \in (a; b)$ (1) $f'(x) > 0$; (2) $f'(x) \geqslant 0$?

10. **Непрерывность и дифференцируемость обратной функции.** а) Если функция $f$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a; b]$, тогда определена на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$ обратная функция $g$, которая непрерывна на нём.

б) Если функции $f$ и $g$ взаимно обратны на некотором промежутке и непрерывны в точках $x_0$ и $f(x_0)$ соответственно, функция $f$ дифференцируема в $x_0$ и $f'(x_0) \neq 0$, то $g$ дифференцируема в точке $f(x_0)$, причём $g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

11. Используя утверждение задачи 10, найдите производную $\arcsin x$ и $\arccos x$.

## Комментарий к листкам 18 и 20

**1. Касательное расслоение.** С понятием производной связана полезная геометрическая конструкция. Зафиксируем точку $x \in \mathbb{R}$. В этой точке можно рассматривать приращения аргумента, которые будем обозначать $h$: если аргументу $x$ придать приращение $h$, получим $x + h$. Рассмотрим еще одну числовую прямую $\mathbb{R}$, такую же, как исходная, но с началом координат, сдвинутым в точку $x$. Такая прямая называется *касательной прямой к исходной прямой* $\mathbb{R}$ *в точке* $x$ и обозначается $T_x\mathbb{R}$ (T от латинского слова tangens — касательный).

Зачем нужна такая конструкция: при определении производной в точке $x$ сама точка фиксирована, а в качестве переменной, по которой берется предел, выступает приращение $h$: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ — выражение под знаком предела является функцией от $h$. Поэтому полезно считать, что приращения живут в своем собственном пространстве $T_x\mathbb{R}$. Его также полезно рассматривать как одномерное векторное пространство, в котором приращения $h$ — одномерные векторы с обычными правилами сложения и умножения вектора на число.

Касательные прямые можно рассмотреть в каждой точке $x$ исходной прямой. Множество всех касательных прямых $T_x\mathbb{R}$ во всех точках $x$ прямой называется *касательным расслоением* $T\mathbb{R}$ *данной прямой*, исходная прямая $\mathbb{R}$ называется *базой* расслоения, а отдельная прямая $T_x\mathbb{R}$ — *слоем* расслоения в данной точке $x$.

**Геометрический пример.** Касательные прямые к действительной прямой как бы сливаются с ней (так же как график линейной функции сливается со своей касательной в каждой точке), и картинка получается не очень внятная. Если в качестве исходного пространства взять не прямую, а, например, окружность (мы можем изучать функции на окружности — это то же самое, что изучать периодические функции на прямой), то картинка получится более наглядной. Касательная прямая к окружности в каждой точке — это обычная касательная, которую мы считаем числовой прямой с нулем, помещенным в точку касания.

**2. Линейные отображения одномерных векторных пространств.** Числовая прямая является одномерным векторным пространством над полем вещественных чисел, т.е. над самой собой. Каждое число можно считать вектором, сложение чисел — сложением векторов, лежащих на одной прямой, обычное умножение чисел — умножением вектора на число; в этом случае надо указывать, какой множитель мы считаем вектором, а какой числом. Чтобы избежать путаницы, обычно числа-векторы обозначают латинскими буквами, а числа-элементы поля — греческими. Естественным базисом этого пространства является число-вектор 1, так как любое другое число-вектор ему пропорционально. При этом базисом является и любой другое ненулевое число.

Отображение $l : \mathbb{R}_1 \mapsto \mathbb{R}_2$ называется *линейным*, если $l(\alpha x + \beta y) = \alpha l(x) + \beta l(y)$. Линейные отображения одномерных пространств устроены очень просто. Действительно, $x = x \cdot 1$, здесь мы считаем $x$ элементом поля, а 1 — вектором. Тогда $l(x) = l(x \cdot 1) = x \cdot l(1)$. Теперь в пространстве-образе считаем $x$ вектором, а $k = l(1)$ — элементом поля. Итак, для любого линейного отображения $l$ найдется такое число $k$, что $l(x) = kx$.

**Композиция линейных отображений. Обратное линейное отображение.** Пусть $l_1$, $l_2$ — линейные отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $l_1(h) = k_1 h$, $l_2(h) = k_2 h$. Тогда композиция $l = l_2 \circ l_1$ этих линейных отображений, очевидно, также является линейным отображением и определяется формулой $l(h) = kh$, где $k = k_1 \cdot k_2$.

Пусть $l$, — линейное отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $l(h) = kh$. Обратное отображение $l^{-1}$ существует титтк $k \neq 0$. При этом оно является линейным и задается формулой $l^{-1}(h) = (1/k)h$.

**3. Дифференциал.** Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, причем $f(x_0) = y_0$. В этом случае возникает линейное отображение из касательного пространства $T_{x_0}\mathbb{R}$ в касательное пространство $T_{y_0}\mathbb{R}$, определенное формулой $p = f'(x_0) \cdot h$, $h \in T_{x_0}\mathbb{R}$, $p \in T_{y_0}\mathbb{R}$. Это отображение называют *дифференциалом функции* $f(x)$ *в точке* $x_0$ и обозначают $df(x_0)$: $df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h$, $h \in T_{x_0}\mathbb{R}$.

**Пример.** Пусть $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$. а) $x_0 = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$. Тогда $df(0)(h) = 0 \cdot h = 0$ для любого $h \in T_0\mathbb{R}$. Таким образом, $dx^2(0)$ — нулевое линейное отображение из $T_0\mathbb{R}$ в $T_0\mathbb{R}$.

б) $x_0 = 1/2$, $f(1/2) = 1/4$, $f'(1/2) = 1$. Тогда $df(1/2)(h) = 1 \cdot h = h$ для любого $h \in T_{1/2}\mathbb{R}$. Хотя численные значения прообраза и образа совпадают, лежат они в разных пространствах: прообраз в $T_{1/2}\mathbb{R}$, а образ — в $T_{1/4}\mathbb{R}$.

в) Аналогично, $df(1)(h) = 2h$, $df(-2)(h) = -4h$.

**4. Теоремы о производной сложной функции и производной обратной функции.** Понятия касательного пространства и дифференциала проясняют смысл теорем о производной сложной и обратной функции.

**Теорема о дифференциале композиции отображений.** Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0$ и дифференцируема в точке $x_0$, функция $g(y)$ определена в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ и дифференцируема в точке $y_0$. Тогда композиция $g \circ f$ отображений $g$ и $f$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$, дифференцируема в точке $x_0$, причем дифференциал композиции $g \circ f$ в точке $x_0$ равен композиции дифференциалов: $d(g \circ f)(x_0) = dg(y_0) \circ df(x_0)$.

**Теорема о дифференциале обратного отображения.** Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0$ и дифференцируема в точке $x_0$, и обратная функция $f^{-1}(y)$ определена в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$. Тогда если дифференциал исходной функции в точке $x_0$ ненулевой, то обратная функция дифференцируема в точке $y_0$ и ее дифференциал в этой точке обратен к дифференциалу исходной функции в точке $x_0$: $df^{-1}(y_0) = (df(x_0))^{-1}$.

**Замечание.** В случае анализа функций одной переменной эти новые понятия и формулировки не выглядят очень существенными, но они играют решающую роль в случае анализа функций многих переменных. Например, теоремы о дифференциале композиции отображений и о дифференциале обратного отображения в многомерном случае имеют такие же формулировки, как вышеприведенные для одномерного случая. Но формулировку, как в задаче 10 б) листка 20, в многомерном случае дать нельзя, поскольку отсутствует деление. Кстати, и определение дифференцируемости отображения в многомерном случае дается так же, как в задаче 3 листка 20, а определение типа Определения 3 листка 18 дать нельзя, опять же поскольку нет деления. (Определение этого типа годится только для так называемых *частных производных*).

**Литература.** Зорич В.А. Математический анализ, часть 1. См. главы V, VII, VIII.

## Листок 21. Разное. Экспонента и логарифм

1. а) Пусть функция $f(x)$ на интервале $(a;b)$ дифференцируема и её производная всюду на $(a;b)$ равна 0. Докажите, что $f(x)$ постоянна на $(a;b)$, т.е. $f(x) = const$.

б) Докажите, что если две функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют равные производные на ограниченном или неограниченном интервале, то на этом интервале $f(x) - g(x) = const$.

в) Верно ли утверждение 1б на объединении двух интервалов, пересечение которых пусто?

**Определение 21A.** Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной на множестве* $X$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in X : |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

2. Докажите, что а) линейная функция равномерно непрерывна на любом ограниченном множестве;

б) функция $\frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на полуинтервале $(0;1]$.

3. Докажите теорему: непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нём.

4. Пусть $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ — представление числа $a > 0$ в виде суммы $n$ положительных слагаемых. Докажите, что произведение $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ принимает наибольшее значение, когда $a_1 = \ldots = a_n = \frac{a}{n}$. (*Указание*: воспользуйтесь неравенством о средних.)

5. Докажите, что а) $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n^k})^n = 1$, если $x < 0$ и $k > 1$ ($k$ — целое или рациональное);

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n^k})^n = 1$ при любом $x$ и $k > 1$ ($k$ — целое или рациональное).

6. Рассмотрим для каждого действительного числа $x$ последовательность $e_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$. Докажите, что:

а) $\forall x\ \exists k \in \mathbb{N} : e_{k+1}(x), e_{k+2}(x), e_{k+3}(x), \ldots$ — монотонно возрастающая последовательность; (*Указание*: воспользуйтесь задачей 4.)

б) $\forall x$ последовательность $e_n(x)$ ограничена и сходится.

**Определение 21B.** Функция $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$ называется *экспонентой.*

7. **Свойства экспоненты.** Докажите, что: а) $\exp(0) = 1$ и $\forall x\ \exp(x) > 0$;
б) $\forall x\ \exp(x) \geqslant 1 + x$;
в) $\forall x\ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$;
г) область значений экспоненты есть $\mathbb{R}^+$;
д) $\exp(x) < \frac{1}{1-x}$, если $|x| < 1$;
е) $\lim\limits_{x\to 0}\exp(x) = 1$;
ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} = 1$;
з) $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\cdot\exp(x_2)$ — функциональное уравнение для экспоненты;
и) экспонента всюду дифференцируема (а, значит, непрерывна) и $\exp'(x) = \exp(x)$;
к) экспонента монотонно возрастает на всём $\mathbb{R}$.

Из задачи 7к следует, что экспонента имеет обратную функцию на всей области определения.

**Определение 21C.** Обратная к экспоненте функция называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln x$.

8. **Свойства натурального логарифма.** а) Укажите область определения, область значений, промежутки монотонности $\ln(x)$.
б) Найдите $\ln'(x)$.
в) Используя задачу 7з, запишите функциональное уравнение для $\ln(x)$.

**Определение 21D.** *Число* $e = \exp(1)$.

9. **Свойства числа** $e$**.** а) Докажите, что $2 < e < 3$.
б) Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^n$.

в) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$ для любого рационального $x$.
г) Докажите, что $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!})$.
д) Докажите, что $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall x>0\ \exp(x) > 1+\frac{x}{1!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$.
е) Докажите, что $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{1!}+\ldots+\frac{x^n}{n!})$.

## Листок 22. Первообразная. Функция площади

1. а) Покажите, что производные функций $0.2\sin 5x$, $0.2\sin 5x+2$, $0.2\sin 5x-e$ совпадают на области дифференцируемости, укажите эту область.
б) Найдите функцию $f(x)$, определённую на $\mathbb{R}$, такую, что $f'(x)=\cos 5x, f(0)=-3$.
в) Найдите функцию $g(x)$, определённую на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, такую, что на области определения $g'(x) = 1/x^2, g(1)=1, g(-1)=0$.

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором (конечном или бесконечном) промежутке $I$

**Определение 22A.** *Первообразной* функции $f(x)$ на промежутке $I$ называется всякая функция $F(x)$ со следующими свойствами:
1) $F(x)$ непрерывна на $I$ и дифференцируема во всех внутренних (то есть не являющимся концами) точках $I$;
2) $F'(x)=f(x)$ для всех внутренних точек $x$ промежутка $I$.

**Определение 22B.** Если у функции $f(x)$ на промежутке $I$ существует первообразная, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на $I$. Совокупность всех первообразных функции $f$ (на промежутке $I$) называется её *неопределённым интегралом* (на $I$) и обозначается через $\int f(x)\,dx$. Символ $\int$ называется *знаком интеграла*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ – *подынтегральным выражением.*

2. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные функции $f(x)$ на промежутке $I$. Докажите, что $F_1(x)=F_2(x)+C$ для некоторой константы $C$. Почему графики двух различных первообразных на промежутке не могут иметь на нём общую точку?

В частности, если $F(x)$ – какая-либо первообразная функция $f(x)$, то множество всех её первообразных (на промежутке $I$) имеет вид $\{F(x)+C \mid C\in\mathbb{R}\}$. Это записывается следующим образом: $\int f(x)\,dx = F(x)+C$. Отметим, что для всякой дифференцируемой на $I$ функции $f(x)$ выполняется равенство $\int f'(x)\,dx = f(x)+C$.

**Замечание.** Когда мы пишем $C$, надо отличать просто число $C$ от постоянной функции, принимающей одно и то же значение $C$. Разница хорошо видна геометрически: число изображается точкой на числовой прямой, на координатной оси ОХ или ОУ, в зависимости от обстоятельств. А график постоянной функции, определенной на некотором промежутки — это часть горизонтальной прямой (параллельной ОХ), лежащая над этим промежутком. Если промежуток фиксирован, постоянная функция $C$ полностью определяется своим значением $C$, тогда функцию и число, в принципе, можно отождествить. Обратите внимание, что так сделано выше в записи $\{F(x)+C \mid C\in\mathbb{R}\}$. Здесь слева $C$ — функция, а справа $C$ — число-значение; в этом случае соответствующую точку надо изображать на оси ОУ.

3. а) Найдите все функции $F(x)$, определённые всюду, кроме точки 0, для которых $F'(x)=1/x$.
б) Найдите все функции $F(x)$, определённые всюду, кроме точек $\frac{\pi}{2}+\pi k$ ($k\in\mathbb{Z}$), для которых $F'(x)=1/\cos^2 x$.

4. Найдите первообразную $F(x)$ указаной функции $f(x)$ с указанным условием на указанном промежутке: а) $f(x)=\sqrt{x}$, $F(1)=5$, $x\in(0;+\infty)$; **б)** $f(x)=4/x^3$, $F(1)=-2$, $x\in(0;+\infty)$; **в)** $f(x)=4/x^3$, $F(-1)=5$, $x\in(-\infty;0)$.

5. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены на промежутке $I$ и имеют на нём первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно. Докажите, что для любых $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ функция $c_1F_1(x)+c_2F_2(x)$ является первообразной для функции $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$. Иными словами, $\int(c_1f_1(x)+c_2f_2(x))\,dx = c_1\int f_1(x)\,dx + c_2\int f_2(x)\,dx$.

6. Используя таблицу простейших неопределённых интегралов, найдите следующие интегралы:
а) $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)\,dx$; б) $\int\dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int\dfrac{x^2+3}{1+x^2}dx$.

7. Докажите, что если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$, то одна из первообразных функций $f(kx+t)$, где $k$ и $t$ – константы, равна $\frac{1}{k}F(kx+t)$ на промежутке $(c;d)$. Как выражаются $c$ и $d$ через $a,b,k,t$?

8. Найдите следующие интегралы, используя задачу 22.7:
а) $\int(\sin 7x+4\cos 5x)\,dx$; б) $\int\dfrac{dx}{(ax+b)^n}\,(a\neq 0,\ n\in\mathbb{N})$; в) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{12-4x-x^2}}$.

**Определение 22C.** Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. *Функцией площади* для функции $f(x)$ называется функция $S_f(x)$, определённая на $[a,b]$ и обладающая следующими свойствами:
1) $S_f(a)=0$;
2) для любых двух точек $c,d\in[a,b]$ с условием $c<d$ справедливы неравенства $m(d-c)\leqslant S_f(d)-S_f(c)\leqslant M(d-c)$, где $m$ и $M$ – соответственно минимальное и максимальное значения функции $f(x)$ на отрезке $[c,d]$.
Если $f(x)\geqslant 0$ при всех $x\in[a,b]$, то значение $S_f(b)$ называют *площадью под графиком* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

В дальнейшем мы покажем, что функция площади существует для всякой функции, непрерывной на отрезке.

9. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Докажите, что:
а) $S_f(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$;
б) при всех $x\in[a,b]$ справедливо равенство $S_f(x)=F(x)-F(a)$,
где $F(x)$ – произвольная первообразная функции $f(x)$ на $[a,b]$.

**Замечание.** Значение $S_f(b)$ имеет геометрический смысл площади под графиком функции $f(x)$ на $[a,b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

10. Найдите площади под графиками следующих функций на указанных отрезках: а) $x^n$ на $[0,1]$; б) $\sin x$ на $[0,\pi]$; в) $1/x$ на $[1,t]$, где $t>1$ – параметр.

11. При каждом $a>0$ обозначим через $S_a(t)$ площадь под графиком функции $1/x^a$ на отрезке $[1,t]$, где $t>1$. При каких значениях параметра $a$ существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty}S_a(t)$? Чему равен этот предел?

# Листок 23

### Часть 1. Движения пространства. Группы симметрий многогранника. Действие групп на множествах

**Определение 23A.** *Движением пространства* называется такая биекция пространства на себя, что для любых двух точек расстояние между их образами равно расстоянию между этими точками. Говорят, что движение *сохраняет расстояние.*

1. а) Дайте определение плоскостной симметрии и докажите, что плоскостная симметрия является движением.
б) Докажите, что при движении плоскость переходит в плоскость.
в) Докажите, что множество всех движении пространства образует группу с операцией композиции движений. Каковы порядки центральной, осевой и плоскостной симметрий в группе движений пространства?

**Определение 23B.** Пусть $g$ — отображение пространства в себя. Точка $A$ называется *неподвижной* точкой отображения $g$, если $g(A)=A$.

2. Укажите множество неподвижных точек:
а) тождественного преобразования, осевой симметрии, центральной симметрии, плоскостной симметрии, композиции двух плоскостных симметрий с пересекающимися плоскостями симметрии;
б) композиции трёх плоскостных симметрий с различными параллельными плоскостями симметрии.

3. а) Докажите, что композиция двух плоскостных симметрий с различными параллельными плоскостями симметрии является параллельным переносом на некоторый вектор и наоборот, любой параллельный перенос можно представить в виде композиции двух плоскостных симметрий. Как определяется вектор переноса по плоскостям симметрии и наоборот?
б) Композицию двух плоскостных симметрий с пересекающимися плоскостями симметрии можно назвать поворотом вокруг прямой пересечения плоскостей симметрии. Почему? На какой угол происходит поворот? Какое движение является обратным поворотом и почему?

4. Докажите, что: а) если движение имеет три неподвижные точки $A$, $B$ и $C$, не лежащие на одной прямой, то неподвижны все точки плоскости $ABC$;
б) если движение имеет четыре неподвижные точки $A$, $B$, $C$ и $D$, не лежащие в одной плоскости, то неподвижны все точки пространства.
(Полезно знать следующий факт: *четыре сферы, центры которых не лежат в одной плоскости, не могут иметь более одной общей точки.*)

5. Докажите, что любое движение пространства можно представить как композицию не более четырёх плоскостных симметрий.
(Полезно знать следующий факт: *точка, равноудалённая от точек $A$ и $B$, лежит в плоскости, относительно которой точки $A$ и $B$ симметричны.* Что это за плоскость?)

**Определение 23C.** Множество движений, переводящих многогранник в себя, называется *группой симметрий* многогранника.

6. а) Почему множество движений, переводящих многогранник в себя, является группой с операцией композиции движений, и почему эта группа конечна?
б*) Докажите, что у всех этих движений есть общая неподвижная точка.

7. а) Дана треугольная пирамида $ABCD$, в которой $AB = AC = 3$, $BC = 4$, $BD = CD = 6$. Сколько элементов может быть в группе симметрий такой пирамиды?
б) Докажите, что группа симметрий правильного тетраэдра изоморфна группе перестановок $S_4$. (Полезно знать, что *группа перестановок порождается транспозициями.*)

**Определение 23D.** Пусть $G$ — группа биективных преобразований множества $X$ (не обязательно всех). Будем говорить, что точки $x, y \in X$ *эквивалентны* относительно $G$, и писать $x \underset{G}{\sim} y$, если существует такое преобразование $g \in G$, что $gx = y$.

8. Докажите, что отношение $x \underset{G}{\sim} y$ является отношением эквивалентности.

**Определение 23E.** Класс эквивалентности точки $x \in X$ называется её *орбитой* и обозначается $Gx$. Иначе, $Gx = \{gx : g \in G\}$.

9. Опишите орбиты элементов множества $X$ относительно действия группы $G$, если:
а) $X$ — плоскость, $O$ — фиксированная точка, $G$ — группа поворотов вокруг точки $O$;
б) $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $G = S_n$.

**Определение 23F.** Подмножество элементов группы $G$, оставляющих точку $x$ на месте, называется *стабилизатором* точки $x$ и обозначается $St(x)$. Иначе, $St(x) = \{g \in G : gx = x\}$.

**Определение 23G.** Понятие орбиты и стабилизатора может относиться не только к точке, но и к любому подмножеству множества $X$.

10. Докажите, что $St(x)$ — подгруппа в $G$.

11. Найдите стабилизаторы всех точек из задачи 2.

**Теорема 23H.** Имеется взаимно однозначное соответствие между орбитой $Gx$ и множеством смежных классов $G/St(x)$, при котором точке $y = gx \in Gx$ соответствует смежный класс $gSt(x)$.

**Следствие.** Если $G$ — конечная группа, то $|G| = |Gx||St(x)|$.

12. Докажите теорему и следствие из неё.

13. Докажите, что $St(gx) = gSt(x)g^{-1}$.

14. Пусть $G$ — конечная группа и $X$ — конечное множество. Тогда $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_r$ — разбиение на орбиты с представителями $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Докажите, что $|X| = \sum_{i=1}^{r} |G/St(x_r)|$.

15. Найдите группу симметрий тетраэдра.

16. Сколько элементов в группе симметрий а) куба? б) октаэдра? в) икосаэдра? г) додекаэдра? (*Указание: выберите вершину и рассмотрите её орбиту и стабилизатор.*)

### Часть 2. Действие групп на множествах. Нормальные подгруппы

Для любой группы $G$ можно определить три её важных действия на самой себе:
1) Действие $L_g$ *левыми сдвигами*: $L_g(x) = gx$.
2) Действие $R_g$ *правыми сдвигами*: $R_g(x) = xg$.
3) Действие $I_g$ *сопряжениями*: $I_g(x) = gxg^{-1}$.

17. Докажите, что для любого элемента $g \in G$ отображения $L_g$, $R_g$ и $I_g$ являются биекциями группы $G$ на себя.

18. **Теорема Кэли.** Докажите, что любая группа порядка $n$ изоморфна некоторой подгруппе группы $S_n$.

19. Пусть $H$ — подгруппа группы $G$. а) Опишите орбиты подгруппы $H$ относительно левых и правых сдвигов. б) Что является стабилизатором подгруппы $H$ при этих действиях?

**Определение 23 I.** Подгруппа, остающаяся на месте при любом сопряжении, называется *нормальной.*

20. Докажите, что подгруппа $H$ нормальна тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in G$ $gH = Hg$.

21. Пусть $H$ — подгруппа в $G$. Введём операцию на множестве левых смежных классов по подгруппе $H$ по правилу: $aH \cdot bH = abH$. Докажите, что операция определена корректно, то есть не зависит от выбора представителей смежных классов тогда и только тогда, когда подгруппа $H$ нормальна.

22. а) Докажите, что в абелевой группе все подгруппы нормальны. б) Докажите, что любая подгруппа индекса 2 нормальна.

23. Докажите, что пересечение нормальных подгрупп является нормальной подгруппой.

24. Рассмотрим группу симметрий квадрата $D_4$ (*группа диэдра*). Является ли нормальной в $D_4$ подгруппа:
а) $C$, порождённая центральной симметрией?
б) $D_1$, порождённая симметрией относительно одной из диагоналей?
в) $D_2$, порождённая симметриями относительно обеих диагоналей?
г) Является ли нормальной подгруппа, порожденная всеми элементами подгрупп $D_1$ и $D_2$?

**Определение 23J.** Назовём *центром* группы $G$ множество элементов, которые коммутируют со всеми элементами группы. Обозначение: $Z(G)$.

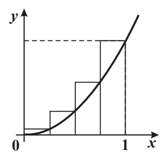
25. Докажите, что центр всегда является нормальной подгруппой.

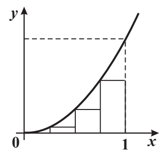
## Листок 24. Определённый интеграл

**Определение 24A. Интегральная сумма**
Пусть функция $f(x)$ определена на некотором отрезке $[a;b]$.
1) Разобьём отрезок $[a;b]$ на $n$ частей, то есть выберем точки $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Обозначим это разбиение, то есть набор всех получившихся маленьких отрезков, буквой $T$, *диаметром* $d(T)$ разбиения назовём наибольшую из длин отрезков разбиения.
2) На каждом отрезке разбиения $[x_{i-1}; x_i]$ выберем некоторую точку $c_i$, то есть $x_{i-1} \leqslant c_i \leqslant x_i$.
Обозначим набор всех выбранных точек буквой $C$ и назовём его *отмеченными точками разбиения.*
3) Составим сумму $S = f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + f(c_3)(x_3 - x_2) + \ldots + f(c_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) + f(c_n)(x_n - x_{n-1})$.
Если обозначим $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$, то $S = f(c_1)\Delta_1 + f(c_2)\Delta_2 + f(c_3)\Delta_3 + \ldots + f(c_{n-1})\Delta_{n-1} + f(c_n)\Delta_n$.
Эта сумма называется *интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, соответствующей данному разбиению $T$ и данному набору выбранных точек $C$* и обозначается $S(f, [a;b], T, C)$.

1. Пусть функция постоянна на отрезке $[a;b]$: $f(x) = d = \mathrm{const}$. Докажите, что любые интегральные суммы на этом отрезке равны.

2. Пусть $f(x)$ рассматривается на отрезке $[0;1]$. Разобьём отрезок $[0;1]$ на $n$ равных частей (такое разбиение называется *равномерным*). Найдите интегральную сумму, если отмеченные точки разбиения — это левые концы отрезков разбиения, и интегральную сумму, если отмеченные точки разбиения — это правые концы отрезков разбиения. Найдите предел разности интегральных сумм при $n \to \infty$, если он существует.
Решите задачу для а) $f(x) = x$; б) $f(x) = x^2$ (см. рисунок справа); в) $f(x) = 1/x$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$.




3. Для функций задачи 2 найдите пределы рассмотренных интегральных сумм при $n \to \infty$, если они существуют.

**Определение 24B.** Пусть $f(x)$ ограничена на $[a;b]$ и $T$ — разбиение множеством точек $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка $[a, b]$.
Для каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, введём величины $M_i = \sup\limits_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$ и $m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} f(x)$.
Положим $S(T) = S(f, T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ и $s(T) = s(f, T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.
Величина $S(T)$ (соответственно $s(T)$) называется *верхней* (соответственно *нижней*) *суммой Дарбу́* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, отвечающей разбиению $T$.

4. Пусть $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция. Докажите, что:
(*Здесь вам понадобится равномерная непрерывность непрерывной на отрезке функции.*)
а) для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение данного отрезка, что $S(T) - s(T) < \varepsilon$.
б) существует единственное число $I$ такое, что для любого разбиения $T$ выполнено неравенство $s(T) \leqslant I \leqslant S(T)$.
в) $I = \lim\limits_{n\to\infty} S(T_n) = \lim\limits_{n\to\infty} s(T_n)$, где $T_n$ — равномерное разбиение отрезка $[a;b]$ на $n$ частей.
г) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ такое, что $\forall T, C$: $d(T) < \delta \Rightarrow |S(f,[a;b],T,C) - I| < \varepsilon$.

**Определение 24C.** Число $I$ из задачи 24.4 называется *определённым интегралом* (*интегралом Ри́мана*) функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой* на отрезке $[a;b]$.

**Замечание.** В задаче 4 доказано, что непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём.

5. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывны на отрезке $[a;b]$. Докажите, что:
а) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, где $a \leqslant c \leqslant b$; (*аддитивность интеграла*)
б) $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, где $k$ — константа, и $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$; (*линейность интеграла*)
в) $S_f(t) = \int\limits_a^t f(x)dx$, где $a \leqslant t \leqslant b$, — *функция площади* для $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ (см. листок 22).

6. Пусть $f(x)$ ограничена на $[a;b]$ и $T_1, T_2$ – произвольные разбиения отрезка $[a,b]$. Докажите, что $m(b-a) \leqslant s(f,T_1) \leqslant S(f,T_2) \leqslant M(b-a)$, где $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

**Определение 24D.** Если для ограниченной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ существует единственное число $I$ такое, что для любого разбиения $T$ выполнено неравенство $s(T) \leqslant I \leqslant S(T)$, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a;b]$. Название и определение числа $I$ такие же, как в определении 24.C.

**Замечание.** Таким образом мы расширили понятие интегрируемости на класс ограниченных на отрезке функций.

7. а*) Докажите, что для интегрируемой ограниченной на отрезке функции верны утверждения задачи 24.4.
б) Докажите, что ограниченная функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение $T$ отрезка $[a;b]$, для которого $S(f,T) - s(f,T) < \varepsilon$.

8. Найдите разность $S(T) - s(T)$ для заданной функции, заданного отрезка и заданного разбиения:
а) для функции $\operatorname{sgn} x$ и функции Дирихле на отрезке $[-1;1]$ и равномерного разбиения из $2n+1$ точки;
б) для функции Римана на отрезке $[0;1]$ и равномерного разбиения из 12 точек.

9. Интегрируема ли на отрезке $[0;1]$ функция Дирихле?

10*. Докажите, что функция Римана интегрируема на отрезке $[0;1]$ и найдите её интеграл.

11*. Докажите, что всякая функция, имеющая конечное число точек разрыва на отрезке, интегрируема на нём.

**Функция Дирихле́**

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

**Функция Римана**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \text{ где } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \text{ и НОД}(m,n){=}1; \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

**Комментарий.** Обратите внимание, что в листке дано определение интеграла по *ориентированному отрезку*, т.е. по отрезку с заданным направлением от $a$ к $b$. Это видно из формулы $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$. Если проходить отрезок в другом направлении, от $b$ к $a$, величина $\Delta_i$, а значит, и весь интеграл, сменит знак на противоположный. Тем самым интеграл положительной функции может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от выбранной ориентации отрезка. Можно определить интеграл без учета ориентации отрезка, положив $\Delta_i = |x_i - x_{i-1}|$. В этом случае интеграл положительной функции всегда положителен. См. далее комментарий к листку 28.

# Листки по математическому анализу. Класс 11Д, 2023/24 учебный год

## Листок 25. Метрические пространства

**Определение 25A.** *Метрическим пространством* называется множество $X$ с заданной функцией «расстояния» или *метрикой* $d(x, y)$, определенной для любых $x, y \in X$ и удовлетворяющей следующим аксиомам:

1. $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (симметричность);
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (неравенство треугольника).

Подмножество $Y$ метрического пространства $X$, рассматриваемое как метрическое пространство (с той же метрикой), называется *подпространством* пространства $X$.

1. Пусть $X$ — метрическое пространство с метрикой $d$. Докажите, что $d(x, y) \geq 0$ для любых $x, y \in X$.

2. Поездка на московском метрополитене от станции $A$ до станции $B$ требует времени, которое зависит от выбранного маршрута, времени ожидания поездов и т.п. Выберем из всех возможных случаев тот, при котором затраченное время окажется наименьшим, и назовём это время расстоянием от станции $A$ до станции $B$. Является ли такое расстояние метрикой на множестве станций московского метро? Если нет, предложите дополнительные условия, при которых введённое расстояние будет метрикой.

**Определение 25B.** Множество последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ длины $n$, состоящих из действительных чисел, называется *$n$-мерным арифметическим пространством* $\mathbb{R}^n$. (Обычные прямая, плоскость и пространство — это $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ соответственно).

3. Как задается привычная (евклидова) метрика на координатной прямой, координатной плоскости, координатном (трехмерном) пространстве, в $\mathbb{R}^n$? Как задать метрику на множестве комплексных чисел?

4. Является ли метрическим пространством $\mathbb{R}^n$ с метрикой а) $d_1(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |y_k - x_k|$; б) $d_\infty(x, y) = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |y_k - x_k|$?

**Определение 25C.** Пусть $p$ — фиксированное простое число. Любое рациональное число $r$ можно представить как $r = p^n \frac{a}{b}$, где $a$ и $b$ — целые числа, не делящиеся на $p$, а $n$ — целое. Тогда $|r|_p = p^{-n}$ — *$p$-адическая норма.* Если $r = 0$, то $|r|_p = 0$.

5. Пусть $p$ — фиксированное простое число.
а) Докажите, что $d_p(x, y) = |x - y|_p$ определяет на $\mathbb{Q}$ метрику, превращая $\mathbb{Q}$ в метрическое пространство с *$p$-адической метрикой.* Для каждого простого $p$ определяется своя метрика.
б) Докажите, что $p$-адическая метрика удовлетворяет *сильному неравенству треугольника*:

$$d_p(x; y) \leqslant \max(d_p(x; z); d_p(z; y)).$$

**Определение 25D.** Пусть $X$ — метрическое пространство, $x_0 \in X$ — произвольная точка, $\varepsilon > 0$ — действительное число. Множество $U_\varepsilon(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$ называется $\varepsilon$-окрестностью точки $x_0$ (или *открытым шаром* с центром $x_0$ и радиусом $\varepsilon$). Множество $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq \varepsilon\}$ называется *замкнутым шаром* с центром $x_0$ и радиусом $\varepsilon$.

6. а) Как выглядят шары в пространствах $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ относительно метрик из задачи ?
б) Что из себя представляют в $\mathbb{Q}$ с $p$-адической метрикой открытый и замкнутый шары с центром в 0 и радиусом 1?

**Определение 25E.** Отображение метрических пространств $F : X \to Y$ называется *изометрией*, если оно взаимно-однозначно и сохраняет расстояния между точками: для любых $x_1, x_2 \in X$ выполнено равенство $d_Y(F(x_1), F(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$. Метрические пространства, между которыми существует изометрия, называются *изометричными*.

**Замечание.** В дальнейшем мы будем отождествлять $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ с прямой, $\mathbb{R}^2$ — с плоскостью, а $\mathbb{R}^3$ — с пространством. Кроме того, мы будем отождествлять $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$ ($(a, b) \leftrightarrow a + bi$).

7. Докажите, что множество $C[a, b]$ всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, снабженное метрикой $d(f, g) = \max\limits_{a \le t \le b} |f(t) - g(t)|$ (эта метрика называется *равномерной*), является метрическим пространством.

8. Дайте определения предельной точки подмножества метрического пространства, предела последовательности точек метрического пространства, предела отображения метрических пространств $F : X \to Y$ в точке $x_0 \in X$, непрерывности отображения метрических пространств $F : X \to Y$ в точке $x_0 \in X$ (в двух вариантах: по Коши и по Гейне).

**Определение 25F.** Подмножество $U$ в метрическом пространстве $X$ называется *открытым*, если для любой точки $x \in U$ найдётся некоторая $\varepsilon$-окрестность, целиком содержащаяся в $U$.

9. Докажите, что объединение любого набора и пересечение любого конечного набора открытых множеств открыто.

10. Докажите, что отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств непрерывно всюду тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества открыт.

11. Докажите, что непрерывное отображение $f$ отрезка $I$ в себя имеет неподвижную точку, то есть найдётся $x \in I$, что $f(x) = x$.

**Определение 25G.** Последовательность $(x_n)$ точек метрического пространства $X$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что если $m, n > N$, то $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

12. а) Докажите, что сходящаяся последовательность является фундаментальной. б) Верно ли обратное?

**Определение 25H.** Метрическое пространство $X$ называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в нём является сходящейся.

13. Докажите, что полными являются следующие метрические пространства: а) $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой; б) $C[a, b]$ из задачи 25.7.

14. а) Верно ли, что если из полного метрического пространства $X$ удалить открытое подмножество $U \neq X$, то получающееся пространство $X \setminus U$ (с той же метрикой) является полным?
б) Является ли $\mathbb{Q}$ с $p$-адической метрикой полным метрическим пространством?

**Определение 25 I.** Отображение $f\colon X \to X$ из метрического пространства $X$ в себя называется *сжимающим*, если найдётся константа $0 < \theta < 1$, что для любых $x, y \in X$ верно: $d(f(x), f(y)) < \theta d(x, y)$.

15. а) Докажите, что сжимающее отображение $f$ полного метрического пространства $X$ имеет неподвижную точку, то есть найдётся $x \in X$, что $f(x) = x$. *Подсказка: докажите, что любая последовательность* $(f^n(x))$ *фундаментальна.*
б) Верно ли это в неполном метрическом пространстве?

16*. Пусть функция $\alpha(x)$ дважды непрерывно дифференцируема (то есть вторая производная непрерывна) на отрезке $[a, b]$, имеет на нём корень $\tilde{x}$, причём $\alpha'(x) \neq 0$ всюду на $[a, b]$. Рассмотрим

функцию $f(x) = x - \dfrac{\alpha(x)}{\alpha'(x)}$.
а) Докажите, что $\alpha(\tilde{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$;
б) Докажите, что $f$ и $f'$ непрерывны;
в) Докажите, что найдётся такое $\delta > 0$, что $f$ на $U_\delta(\tilde{x})$ осуществляет сжимающее отображение.
г) Что всё это значит и как это применять?
д) Найдите $\sqrt{2}$ с точностью до трёх знаков после запятой.

17*. **Пополнение метрических пространств.** Докажите, что любое непустое метрическое пространство можно изометрически вложить в полное метрическое пространство.

## Листок 26. Знакомство с дифференциальными уравнениями

**Определение 26A.** *Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка* (разрешенным относительно производной) называют уравнение вида $y' = f(x, y)$ (*), где $f(x, y)$ — заданная (известная) функция двух переменных $x, y$.
Для простоты считаем, что $f(x, y)$ определена при всех $x \in R, y \in R$.

**Определение 26B.** Функция $y = \varphi(x)$ называется *решением дифференциального уравнения* (*), если при подстановке её вместо $y$ в уравнение (*) получается тождество: $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

1. Проверьте, что данная функция является решением данного дифференциального уравнения ($C = const$): а) $y = C(x^2 + 4)$, $y' = 2xy/(x^2 + 4)$; б) $y = Ce^{x^2}$, $y' = 2xy$; в) $y = 2Ce^{2x}/(1 - Ce^{2x})$, $y' = y(y + 2)$; г) $y = e^x/(C - x)$, $y' = y + y^2e^{-x}$.

Обратите внимание, что в пунктах в) и г) правая часть уравнения определена при всех $x, y$, но решение определено не для всех $x$.

**Определение 26C.** *Простейшим дифференциальным уравнением* называется уравнение вида $y' = f(x)$ (в этом частном случае функция $f(x, y)$ зависит только от одной переменной $x$).

2. Найдите все решения простейших дифференциальных уравнений: а) $y' = cos^2 x$; б) $y' = 2x/(x^2 + 4)$; в) $y' = 5xe^{x^2+4}$; г) $y' = e^{-x^2}$; д) $y' = f(x)$, где $f(x)$ — заданная непрерывная на всей числовой прямой функция.

Как показывает пример задач 1 и 2, в общем случае дифференциальное уравнение имеет не одно, а бесконечно много решений (при всех возможных значениях произвольной постоянной $C$).

**Определение 26D.** Решение уравнения, зависящее от произвольной постоянной, называют *общим решением*. Единственное решение можно выделить, поставив так называемую *задачу Коши*: найти решение уравнения, которое в заданной точке $x_0$ принимает заданное значение $y_0$.

3. Решите задачу Коши для следующих уравнений: а) $y' = cos^2 x$, $y(\pi/8) = \pi/9$; б) $y' = 2x/(x^2+4)$, $y(2) = 3$; в) $y' = e^{-x^2}$, $y(0) = 0$; г) $y' = f(x)$, $y(-5) = -6$.

**Определение 26E.** *Уравнением с разделяющимися переменными* называется уравнение вида $y' = f(x)g(y)$ (т.е. правая часть представляется в виде произведения двух заданных функций, каждая от одной переменной).

4. Имеется мнемонический алгоритм решения уравнения с разделяющимися переменными: $y' = f(x)g(y)$; $dy/dx = f(x)g(y)$; $dy/g(y) = f(x)dx$; $\int dy/g(y) = \int f(x)dx$; вычисляем интегралы в левой и правой частях, получим некоторое функциональное соотношение между переменными $y$ и $x$, из него выражаем $y$ как функцию от $x$. Докажите, что тогда эта функция $y(x)$ является решением исходного уравнения. *Указание:* Возьмите производную по $x$ от последнего равенства, считая, что $y = y(x)$, примените формулу производной сложной функции.

5. Найдите общее решение уравнения с разделяющимися переменными: а) $y' = ky$, $k = const$; б) $y' = 2xy/(x^2 + 4)$; в) $y' = 2xy$; г) $y' = y(y + 2)$.

6. Для каждого из пунктов задачи 5 поставьте задачу Коши и найдите ее решение.

**Определение 26F.** *Линейным* называется дифференциальное уравнение вида $y' = a(x)y + b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ - заданные функции одной переменной. Если $b(x) = 0$, уравнение называется *линейным однородным*, иначе *линейным неоднородным.*

7, а) Пусть функция $a(x)$ непрерывна на всей числовой прямой. Напишите формулу общего решения линейного однородного уравнения $y' = a(x)y$.
б) Докажите, что линейная комбинация двух решений линейного однородного уравнения тоже является решением.

8. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение $y' = a(x)y+b(x)$, функции $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны на всей числовой прямой. Запишем соответствующее однородное уравнение $y' = a(x)y$. Запишем общее решение однородного уравнения (обозначим его $y_{\text{о}}$). Допустим, мы знаем *какое-то решение* неоднородного уравнения (его можно назвать *частным решением*, обозначим его $y_{\text{ч}}$). Докажите, что общее решение неоднородного уравнение представляется суммой этого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

9. Проверьте, что следующим способом можно найти частное решение неоднородного уравнения: найдем общее решение соответствующего однородного уравнения. В его формулу входит произвольная постоянная $C$. Будем считать ее функцией от $x$: $C = C(x)$. Подставим нашу формулу с $C(x)$ вместо $C$ в неоднородное уравнение. Проверьте, что из него можно найти $C(x)$ и тем самым найти частное решение неоднородного уравнения (а значит, и его общее решение).

10. Найдите общие решения линейных уравнений: а) $y' = ky + b$, $k, b = const$; б) $y' = y + x$; в) $y' = \cos x - y$; г) $y' = 2xy + 5$.

**Замечание. О пользе решения дифференциальных уравнений. Рекомендации по литературе.**

Дифференциальные уравнения оказались очень удобным и мощным средством математического описания реальных явлений. Например, даже такое простое уравнение, как в задаче 9 а), показывает приближенно, как регулируется работа ядерного реактора. О применении дифференциальных уравнений есть две хорошие книги, написанные просто и понятно: 1. Земляков А.Н. Математический анализ реальности. Изд. МЦНМО, 2013. 2. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях, М., Наука, 1987 (доступна онлайн).

Для введения в научную теорию обыкновенных дифференциальных уравнений есть хорошие учебники (для примера, три, в порядке усложнения): 3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Физматлит, 2009. 4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 5. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. МЦНМО, 2012.

## Листок 27. Ряды Тейлора

1. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – произвольные числа. Докажите, что существует единственный многочлен $P$ степени $n$, т.ч. $P(0) = a_0$, $P'(0) = a_1$, …, $P^{(n)}(0) = a_n$. Как выражаются коэффициенты $P$ через $a_0, \ldots, a_n$?

**Определение 27A.** Пусть $f$ – функция, $n$ раз дифференцируемая в точке 0. Многочлен $P_n(x)$ степени $n$, для которого $P_n^{(i)}(0) = f^{(i)}(0)$ при $i = 0, 1, \ldots, n$, называется *многочленом Тейлора $n$-го порядка функции $f$ с центром в точке* 0.

2. Найдите многочлены Тейлора $n$-го порядка для следующих функций с центром в точке 0: а) $\sin x$ и $\cos x$; б) $e^x$; в) $\ln(1 + x)$; г) $(1 + x)^a$ (где $a \in \mathbb{R}$); д) $\arcsin x$; е*) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

3. Пусть $\alpha < a < b < \beta$ и $g$ – $n$ раз дифференцируемая на $(\alpha; \beta)$ функция, т.ч. $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(n-1)}(a) = 0$ и $g(b) = 0$. Докажите, что существует $\xi \in (a; b)$, т.ч. $g^{(n)}(\xi) = 0$.

**Определение 27B.** Пусть $f$ – дифференцируемая $n$ раз функция в окрестности $U$ нуля, $P_n(x)$ – многочлен Тейлора $n$-го порядка с центром в точке 0. Тогда $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ называется *формулой Тейлора* с центром в точке 0, а $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ – *остаточным членом* $n$-го порядка формулы Тейлора.

4. Пусть $f$ – дифференцируемая $n+1$ раз функция в окрестности $U$ нуля и $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ – формула Тейлора с центром в точке 0.
а) (**Остаточный член в форме Лагранжа**). Докажите, что для любой точки $x \in U$ существует точка $\xi$, лежащая между $x$ и 0, т.ч. $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$. (*Указание*: Рассмотрите функцию $g(t) = f(t) - P_n(t) - Mt^n$, где $M$ определяется из равенства $f(x) = P_n(x) + Mx^n$.)
б) (**Остаточный член в интегральной форме**). Докажите, что для любой точки $x \in U$ существует точка $\xi$, лежащая между $x$ и 0, т.ч. $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$.

**Определение 27C.** Пусть $f$ – бесконечно дифференцируемая в окрестности нуля функция. Ряд (как функция от $x$) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ называется *рядом Тейлора функции $f$ с центром в точке* 0.

5. Пусть $f$ – бесконечно дифференцируемая в окрестности $U \ni 0$ функция, причём существует $c \in \mathbb{R}$, т.ч. $\forall n \forall x \in U\, |f^{(n)}(x)| < c$. Докажите, что на $U$ ряд Тейлора функции $f$ с центром в точке 0 сходится в каждой точке $x$ к $f(x)$.

6. Докажите, что ряды Тейлора с центром в нуле следующих функции сходятся к значению функции всюду на области определения: а) $e^x$; б) $\sin x$ и $\cos x$; в) $\arcsin x$.

7. Докажите, что:
а) $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{x^9}{9} - \dfrac{x^{11}}{11} + \ldots,\ x \in [-1;1]$;
б) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,x^4 + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,x^6 + \ldots,\ x \in (-1;1)$;
в) $\ln\dfrac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{x^9}{9} + \ldots\right),\ x \in (-1;1)$.

8. а) Вычислите в нуле сотую производную функции $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$. б) Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$.

9. Пусть $a_n$ – последовательность чисел, т.ч. что при некотором $R > 0$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится. Докажите, что сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ является непрерывной функцией на $(-R;R]$.

10. Докажите, что: а) $\ln 2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$; б) $\dfrac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ (*Указание*: используйте ряд Тейлора для $\operatorname{arctg} x$).

11. а) Докажите, что $\dfrac{\pi}{4} = 4\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{239}$. $\Big($Сначала докажите, что $\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{u+v}{1-uv}\right)$.$\Big)$
б) Найдите приближённое значение числа $\pi$, используя первые три члена ряда для $\operatorname{arctg} x$ из задачи 27.7а.
в) Найдите приближённое значение числа $\pi$, используя первые 6 членов ряда 27.10б.

12. а) Докажите, что $\ln 2 = \ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}\right) + \ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}}\right)$, $\ln 3 = \ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}\right) + \ln 2$.

б) Используя первые 4 члена ряда 27.7в, вычислите приближённое значение $\ln 2$ и $\ln 3$.

13*. Пусть $f$ – непрерывная на $[a, b]$, $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируемая на $(a, b)$ функция, $x_0 \in (a, b)$ т.ч. $f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
Когда можно сказать, что точка $x_0$ является локальным минимумом или максимумом функции $f$?

14*. Пусть $f, g$ – функции, дифференцируемые в точке 0 соответственно $n+1$ и $m+1$ раз, $m \leq n$. Обозначим $P_f, P_g$ – соответствующие многочлены Тейлора $n$-го и $m$-го порядков в точке 0.
Выразите через $P_f$ и $P_g$ многочлен Тейлора для $f(g(x))$ $m$-го порядка с центром в точке 0.

## Листок 28. Интеграл. Продолжение

1. Найдите определённый интеграл $\int\limits_{-57}^{179} [x]\{x\}\, dx$.

2. **Формула интегрирования по частям.** Пусть функции $u, v$ дифференцируемы на промежутке $\mathcal{I}$. Тогда
$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\, dx.$$

3. **Формула замены переменной в интеграле.** Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $\mathcal{E}$ первообразную $F(x)$, а $t(x)$ – дифференцируемая функция на интервале $\mathcal{I}$, где $t(\mathcal{I}) \subset \mathcal{E}$. Тогда
$$\int f(t(x))t'(x)\, dx = F(t(x)) + C.$$

Эти формулы принято записывать в сокращённом виде: $\int u\, dv = uv - \int v\, du$; $\int f(t(x)) \cdot t'(x)\, dx = \int f(t)\, dt$.

4. Найдите с помощью формул интегрирования неопределённые интегралы: а) $\int x^2 e^x\, dx$; б) $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$; в) $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$.

5. Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует $\int\limits_a^b f(x)\, dx$.

6.**Линейность определённого интеграла (интеграла Римана).** Пусть $f, g$ – две интегрируемых на $[a; b]$ функции, $k, l$ – два действительных числа.

Докажите, что тогда функция $k \cdot f(x) + l \cdot g(x)$ тоже интегрируема на $[a, b]$ и $\int\limits_a^b (k \cdot f(x) + l \cdot g(x))dx = k \cdot \int\limits_a^b f(x)\, dx + l \cdot \int\limits_a^b g(x)\, dx$. См. задачу 5 б) листка 24.

7. **Аддитивность определённого интеграла.** Пусть функция $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ и число $c \in (a; b)$ таковы, что $f$ интегрируема на отрезках $[a; c]$ и $[c; b]$. Докажите, что тогда $f$ интегрируема и на $[a; b]$, причём $\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx$. См. задачу 5 а) листка 24.

8. Пусть числа $c, d$ и функция $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ таковы, что $f$ интегрируема на $[a; b]$ и при всех $x \in [a; b]$ выполнено $d \leqslant f(x) \leqslant c$. Тогда $d(b - a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\, dx \leqslant c(b - a)$.

9. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Определим на $[a; b]$ функцию $S_f(x)$ следующим образом: $S_f(a) = 0, S_f(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt$ при $a < x \leqslant b$. Докажите, что $S_f(x)$ является первообразной для $f(x)$ на $[a; b]$.

10. **Формула Ньютона-Лейбница.** а) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на нём, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

б) Приведите такой пример функции $f(x)$ и отрезка $[a;b]$, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует, но формула Ньютона-Лейбница неверна.

11. Вычислите следующие интегралы: а) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{7-4x^2}}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx$; г) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx$; д) $\displaystyle\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$; е) $\displaystyle\int\limits_0^1 \arccos x\,dx$; ж) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \cos^3 x\,dx$; з) $\displaystyle\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$.

12. При всех целых значениях $m, n$ найдите значения интегралов: (1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$, (2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx$, (3) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx$.

13. Какой знак имеет значение интеграла $\int\limits_{-2}^{2} x^{2023} 2024^x\,dx$?

14. Дайте необходимые определения и найдите следующие *несобственные* интегралы или докажите их расходимость:
а) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$; в) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$; г) $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$.

15. Докажите, что $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$.

16. Докажите сходимость несобственного интеграла $\Gamma(t) = \int\limits_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,dx$ при всех $t > 0$.

17. Докажите, что $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$ при всех $t > 0$. Функция $\Gamma(t)$ называется *гамма-функцией Эйлера.*

**Определение 28A.** Множество точек на прямой имеет *меру нуль*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся система (конечная или счётная) интервалов, покрывающая все точки множества и такая, что сумма длин этих интервалов меньше $\varepsilon$.

18. Любое конечное или счётное множество точек на прямой имеет меру нуль.

**Определение 28B.** Разделим отрезок $[0;1]$ на три равные части. Рассмотрим множество, оставшееся после удаления среднего интервала $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$. Каждый из оставшихся отрезков опять разделим на три части и удалим средние интервалы и так далее. Множество всех точек, которые не удалятся ни на каком этапе этой процедуры, называется *Канторовым множеством.*

19. а) Докажите, что Канторово множество имеет мощность континуума (равномощно отрезку). б) Докажите, что Канторово множество имеет меру нуль.

20. **Критерий Лебега интегрируемости функции на отрезке.** Ограниченная на отрезке функция интегрируема по Риману на нём тогда и только тогда, когда множество точек разрыва функции на отрезке имеет меру нуль.

**Комментарий**. Формула Ньютона-Лейбница (задача 10 а)) снова показывает, что интеграл определен по *ориентированному* отрезку $[a;b]$. Действительно, знак правой части зависит от того, в каком порядке мы берем точки $a$ и $b$. Из этой же формулы получаем: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$.

## Листок 29. Важные теоремы математического анализа

1. **Интеграл Римана.**

**а)** Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$, то:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{c_0}^{c_1} f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,dx.$$

**б)** Если интегрируемые на $[a,b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворят неравенству $m \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant M$, то и

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

**в)** Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то имеется точка $\xi \in (a,b)$ такая, что

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$

Величина $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется (*интегральным*) *средним* функции $f(x)$.

**г)** Если интегрируема функция $f(x)$, то интегрируема также функция $|f(x)|$, причем

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

2. **Правило Лопиталя.**

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и дифференцируемы на интервале $(a,b)$, причём $g'(x) \neq 0$ на $(a,b)$ и

**а)** $f(a) = g(a) = 0$; **б)** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Предположим, что существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = k$.

Докажите, что предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен $k$.

**в)** Используя правило Лопиталя, найдите пределы: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}$ при $\alpha > 0$.

3. **Интегральный признак сходимости ряда.**

**а)** Пусть $f(x)$ непрерывна, неотрицательна и монотонна на $[1,+\infty)$ и существует $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_1^k f(x)\,dx$ и $f(n) = a_n$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится.

**б)** Используя интегральный признак сходимости, докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^t}$ сходится при любом $t > 1$.

4. **Разное.**

**а)** Если функция $f(x)$ интегрируема, то функция $|f(x)|$ тоже интегрируема, см. задачу 1 г).

**б)** Пусть $g(x) \geqslant 0$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$. Тогда мера множества точек, в которых $g(x) > 0$, равна 0.

**в)** Пусть $\{f_n(x) : [a;b] \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ – такая последовательность непрерывных функций, что при всех $x \in [a;b]$ верно $f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant f_3(x) \geqslant \ldots$. Известно также, что при всех $x \in [a;b]$ выполнено $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Докажите, что $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \to 0$ при $n \to \infty$.

## Листок 30. Основная теорема алгебры и не только

**Определение 30А.** Пусть задана последовательность комплексных чисел $z_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Она называется *сходящейся к точке* $z_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $k \geq N$ выполняется неравенство $|z_k - z_0| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0$ или $z_k \to z_0$.

**Замечание.** Согласно определению, понятие сходимости для комплексных последовательностей сводится к сходимости к нулю вещественной последовательности $|z_k - z_0|$.

1. Докажите: последовательность комплексных чисел сходится титтк сходится последовательность действительных и последовательность мнимых частей этих чисел.

2. При каких комплексных $z$ последовательность $z_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n$ сходится? Найдите для этих $z$ предел данной последовательности.

3. Для произвольной последовательности комплексных точек $z_k$ точек прямоугольника $\Pi = [A, B] \times [C, D]$ существует подпоследовательность $z_k$, сходящаяся к некоторой точке $z_0 \in \Pi$.

**Определение 30В.** Рассмотрим функцию $\Phi(z)$, определённую при всех $z \in \mathbb{C}$ и принимающую вещественные значения. Функция $\Phi(z)$ называется *непрерывной в точке* $z_0$, если для любой последовательности $z_k$, сходящейся к $z_0$, последовательность значений $\Phi(z_k)$ сходится к $\Phi(z_0)$.

4. Рассмотрим произвольный многочлен $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$ с комплексными коэффициентами и старшим коэффициентом $a_n = 1$, $n \geq 1$.
а) Функция $\Phi(z) = |f(z)|$ непрерывна при всех $z \in \mathbb{C}$.
б) Если в некоторой точке $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство $|f(z)| > 0$, то найдётся $h \in \mathbb{C}$ такое, что $|f(z + h)| < |f(z)|$.
в) Для любого числа $M > 0$ существует $R > 0$ такое, что из неравенства $|z| \geq R$ следует, что $|f(z)| \geq M$.

5. **Основная теорема алгебры.** Любой многочлен с комплексными коэффициентами степени выше нулевой имеет хотя бы один корень.

**Определение 30С.** Пусть задана последовательность комплексных чисел $z_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Она называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $k, m \geq N$ выполняется неравенство $|z_k - z_m| < \varepsilon$.

6. Последовательность комплексных чисел фундаментальна титтк она сходящаяся.

7. Докажите, что для любого комплексного $z$ сходится последовательность $z_n = 1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + \ldots + \dfrac{z^n}{n!}$. Таким образом, $\exp(z) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ — функция, определённая на всём множестве комплексных чисел.

8. **Свойства** $\exp z$**.**
а) Чему равны $\exp 0$, $\exp 1$, $\overline{\exp(it)}$?
б) $\lim\limits_{z\to 0} \exp z = 1$.
в) Найдите $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\exp z - 1}{z}$.
г) Докажите, что $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$.
д) Докажите, что $\forall t \in \mathbb{R}\ |\exp(it)| \leqslant 1$.

**Определение 30D.** Пусть $t \in \mathbb{R}$. Тогда $\cos t = \operatorname{Re} \exp(it)$, $\sin t = \operatorname{Im} \exp(it)$.

9. **Свойства** $\sin$ **и** $\cos$**.**
а) $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.
б) $\cos(t_1 + t_2) = \cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2$, $\sin(t_1 + t_2) = \sin t_1 \cos t_2 + \cos t_1 \sin t_2$.
в) $\exists\, \delta > 0\ \forall\, t \in (0; \delta)\ 0 < \sin t < t < \operatorname{tg} t$.

10. Используя по аналогии выражение для $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ через $z$ и $\overline{z}$, определите $\cos z$ и $\sin z$ для $z \in \mathbb{C}$ и найдите $\cos i$ и $\sin i$.

## Листок 31. Староновогодний

1. Исидора Поликарповна украшает ёлку красными, синими, зелёными и желтыми шариками (хотя бы один шарик каждого цвета есть на ёлке, количества шариков попарно различны). Не синих шариков — 14, не желтых — 15, не красных — 17, а красных шариков — не меньше всех. Сколько шариков висит на ёлочке?

2. Маше Колобошиной родители подарили на Новый год развивающий компьютер «Умникус-2024». Этот компьютер отвечает правильно с равной вероятностью на все вопросы (распределение вероятности верного ответа непрерывно равномерно на отрезке от 0 до 1). На первый Машин вопрос компьютер ответил верно. С какой вероятностью он ответит верно на второй вопрос?

3. Дед Мороз из Афанасия Афанасьевича получился не самый лучший, ведь даже на Новый год воспитатель решил сэкономить на подарках. Перед каждым ребёнком он ставит 100 коробок, в одной из которых лежит подарок, а оставшиеся 99 — пустые, затем ребёнок может написать на бумажках вопросы (по одному вопросу на каждой бумажке), после чего Снегурочка в исполнении неповторимой Исидоры Поликарповны Горошко перемешивает эти бумажки и отдаёт их Деду Морозу. Тот, в свою очередь, отвечает на все вопросы честно, кроме, может быть, одного (ребёнок об этом знает). Какое наименьшее количество вопросов нужно задать Деду Морозу, чтобы наверняка забрать подарок?

4. Королева пчёл Марфа проводит парад. Для проведения парада королева выделила треугольную площадку. В начале парада три пчелы вылетают из разных углов этой площади и летят с постоянной скоростью по прямой к флажкам, стоящим на противоположных сторонах. Известно, что каждая пчела пролетает свой путь за две минуты. Королева хочет, чтобы через минуту после старта все три пчелы оказались на одной прямой. Может ли придворный расставить флажки так, чтобы пожелание королевы было исполнено?

5. Афанасий Афанасьевич и Исидора Поликарповна долго спорили по поводу того, кто из них будет вырезать снежинки и украшать ими окна, и в итоге они решили сыграть в игру: Афанасий Афанасьевич загадывает клетку на шахматной доске. Исидора Поликарповна проводит замкнутую несамопересекающуюся ломаную по границам клеточек, а затем Афанасий Афанасьевич отвечает, оказалась ли задуманная им клеточка внутри или снаружи этой ломаной. Если Исидора Поликарповна за два подобных вопроса сможет назвать цвет клетки, она победила и освобождается от работы ножницами, иначе — нет. Афанасий Афанасьевич — человек хитрый, поэтому он скажет, что загадал клетку другого цвета и укажет на любую подходящую, если такая найдётся. Кто же всё-таки будет вырезать и развешивать снежинки?

6. Склад в улье имеет вид квадрата со стороной 179 клеток. В некоторые клетки залит мёд. На каждую строку и на каждый столбец выделен страж. Если в строке или в столбце ровно одна клетка заполнена мёдом, страж внимательно её охраняет, иначе отвлекается. Какое наибольшее количество клеток можно заполнить так, чтобы каждая внимательно охранялась хотя бы одним стражем?

7. Королева пчёл Берта решила устроить революцию в улье Марфы. Марфа, услышав об этом, сказала каждому из своих 179 стражей каждый день приводить по одному другу в королевскую гвардию. Берта подговорила одного из стражей, и он стал революционером. Каждую ночь он должен убивать одного из стражей, а каждый день приводить в гвардию ещё одного революционера. Революция случится только тогда, когда в гвардии не останется ни одного честного стража. Случится ли революция, если первое убийство произошло до первого прихода новобранцев?

8. Исидора Поликарповна и Афанасий Афанасьевич всегда подбрасывали монетку, чтобы решить, кому придётся распечатывать новогодние грамоты, однако в этот раз помощница воспитателя засомневалась в честности Штейнмана-Лопуховского. Она решила, что его монетка нагружена неправильно и собирается подбросить его монету три раза, а затем поставить на то, что выпадет чаще. Насколько увеличится вероятность выигрыша Исидоры Поликарповны, если считать, что вероят-

ность выпадения орла принимает любое значение от 0 до 1 с равной вероятностью, а распределение этой вероятности равномерно?

9. В пчелином танце есть лишь два движения. Некоторые последовательности движений указывают на определённое место в лесу, где можно собирать мёд, причём каждое место обозначено не более чем 13 движениями. Также известно, что если указать на два места подряд, мы не укажем на новое место. Какое наибольшее количество мест пчёлы могут описать?

## Листок 32. Формальные степенные ряды

**Определение 32A.** Бесконечное выражение $a(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots$, где $a_i$ — числа из некоторого поля $\mathbb{F}$ (у нас $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), а $t$ — переменная, называется ***формальным степенным рядом***.
• Два ряда *равны*, если равны все их соответственные коэффициенты.
• Совокупность всех формальных степенных рядов с коэффициентами из $\mathbb{F}$ обозначается $\mathbb{F}[[t]]$.
• *Многочлен* — это ряд с конечным числом ненулевых коэффициентов, так что $\mathbb{F}[t] \subset \mathbb{F}[[t]]$.
• Сопоставление рядам $f_1, f_2, \ldots, f_n$ нового ряда $g$ называется *формальной алгебраической операцией*, если каждый коэффициент $g$ вычисляется конечным числом арифметических действий над конечным числом коэффициентов рядов $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

**Замечание.** Сложение и умножение рядов *являются* формальными операциями, а «вычисление значения ряда при данном числовом значении $t$» — нет.

1. Напишите явное выражение для коэффициента при $t^n$ у суммы и у произведения двух рядов через коэффициенты самих этих рядов.

2. Для любого конечного множества $M$ положим $C_M(t) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{k\geqslant 0} c_k t^k$, где $c_k$ — это число всех $k$-элементных подмножеств в $M$. Для двух непересекающихся конечных множеств $A$ и $B$ выразите $C_{A\cup B}(t)$ и $C_{A\times B}(t)$ через $C_A(t)$ и $C_B(t)$.

3. **Деление.** Ряд $a(t)$ называется *обратимым*, если существует ряд $a^{-1}(t)$, такой что $a(t)a^{-1}(t) = 1$. Докажите, что $a(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots$ обратим тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$, причём $a^{-1}$ единственнен, и его отыскание есть формальная операция.

4. Найдите $n$-тый коэффициент ряда: а) $(1-t)^{-1}$; б) $((1-t)^2)^{-1}$; в) $((1-t)^m)^{-1}$; г) $((t-1)(t+2)(t-3))^{-1}$; д) $((t+1)^2(t-2)(t+3)^3)^{-1}$; е) $(t^2+t-1)^{-1}$; ж) $(t^2+t+1)^{-1}$.

5. **Замена переменного.** Являтся ли формальной алгебраической операцией подстановка вместо $t$ произвольного ряда с нулевым свободным членом?

6. Подставим $t + \vartheta$ вместо $t$ в ряд $f(t) \in k[[t]]$, сгруппируем результат по степеням $\vartheta$ и запишем его в виде $f(t+\vartheta) = \sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t) \cdot \vartheta^k$. Выразите коэффициенты каждого из рядов $f^{(k)}(t)$ через коэффициенты исходного ряда $f(t)$.

**Определение 32B.** Ряд $f^{(1)}(t)$ из задачи 6 называется *производной* $f$ и обозначается $f'$ или $\frac{d}{dt}f$.

7. Согласуются ли определения производной для рядов и многочленов, и верно ли, что в задаче $f^{(k)} = (f^{(k-1)})' = \dfrac{d^k}{dt^k} f$?

8. Докажите, что для любого ряда $f(t) \in k[[t]]$ ряд $f(t_1) - f(t_2) \in k[[t_1, t_2]]$ делится в $k[[t_1, t_2]]$ на $(t_1 - t_2)$, и при подстановке в частное $t_1 = t_2 = t$ получится ряд $f'(t)$.

9. Пусть $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots$ и $g(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \ldots$. Выразите через $f, g, f', g'$ производные: а) $(f \pm g)'$; б) $(\alpha f(t))'$, где $\alpha = \text{const}$; в) $(t^m f(t))'$; г) $(f \cdot g)'$; д) $(\frac{f}{g})'$ при $b_0 \neq 0$; е) $(f(\alpha t))'$, где $\alpha = \text{const}$; ж) $(F(t^m))'$; з) $(f(g(t)))'$ при $b_0 = 0$.

10. Вычислите $m$-тую производную от $(1-t)^{-1}$ и сопоставьте это с задачей 4.

11. Разложите в формальный степенной ряд $(1-t)^{-m}$ с произвольным $m \in \mathbb{N}$.

## Листок 33. Числовые ряды

**Определение 33A.** Пусть $(a_n)$ — последовательность действительных чисел. Сумму $a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$ $(p \leqslant q)$ принято обозначать символом $\sum\limits_{n=p}^{q} a_n$.

• Выражение $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ обозначают символом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и обычно называют *рядом* или *бесконечным рядом.*

• Элементы последовательности $(a_n)$, рассматриваемые как элементы ряда, называют *членами ряда*; элемент $a_n$ называют *$n$-м членом ряда.*

• Сумму $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ называют *частичной суммой ряда* или *$n$-й частичной суммой ряда.*

• Если последовательность $(s_n)$ частичных сумм ряда сходится, то ряд называется *сходящимся.* Если последовательность $(s_n)$ не имеет предела, то ряд называют *расходящимся.*

• Предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$ последовательности частичных сумм, если он существует, называется *суммой ряда.* В этом случае пишут так: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

1. **Критерий Коши сходимости ряда.** Докажите, что ряд $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ (m \geqslant n > N \Rightarrow |a_n + \ldots + a_m| < \varepsilon)$.

2. а) Докажите, что если в ряде изменить только конечное число членов, то получающийся при этом новый ряд будет сходиться если сходился исходный ряд, и будет расходиться, если исходный ряд расходился.

б) Докажите, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n$.

3. **Необходимый признак сходимости.** Докажите, что для того, чтобы ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ сходился, необходимо, чтобы его члены стремились к нулю при $n \to \infty$, т.е. необходимо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. Исследуйте сходимость рядов: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ при $|a_n| < 10$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

**Определение 33B.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

5. Посчитайте сумму ряда $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \ldots$. Сходится ли этот ряд абсолютно?

6. Докажите, что ряд $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$, члены которого — неотрицательные числа, сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.

**Замечание.** Сумма сходящегося ряда с положительными членами совпадает с точной верхней гранью частичных сумм.

7. **Признак сравнения.** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами. Докажите, что если $\exists\, N \in \mathbb{N}, C > 0\ \forall\, n > N\ a_n \leqslant C \cdot b_n$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ вытекает расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

8. Исследуйте сходимость рядов (при помощи признака сравнения): а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+1/n)^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$.

9. **Предельный признак сравнения.** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с положительными членами. Докажите, что если предел отношения общих членов этих рядов $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ равен конечному,

отличному от нуля числу, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

10. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с положительными членами. Докажите, что если $\exists\, N \in \mathbb{N}$ $\forall\, n > N$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ вытекает расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

11. Исследуйте ряды на сходимость: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-)^n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n\pi/3)}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$.

12. Найдите сумму ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n})$.

13. **Признак Даламбера.** Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = D$. Докажите, что:

а) если $D < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится;

б) если $D > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

в) существуют как абсолютно сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $D = 1$.

14. Исследуйте сходимость рядов: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(n+5)7^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$.

15. **Признак Коши.** Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = D$. (Знаком $\overline{\lim}$ обозначают *верхний предел*, т.е. наибольшую предельную точку значений выражения.) Докажите, что:

а) если $D < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится;

б) если $D > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

в) существуют как абсолютно сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $D = 1$.

16. Исследуйте сходимость рядов: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^100}{2^n}$.

17. **Признак Раабе.** Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, т.ч. $a_n > 0$, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right) = D$. Докажите, что:

а) если $D < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, причём $D$ может быть нулевым или отрицательным;

б) если $D > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, в частности, ряд сходится при $D = +\infty$;

в) существуют как абсолютно сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $D = 1$.

*Указание.* Признаки Даламбера и Коши вытекают из сравнения испытуемого ряда с геометрической прогрессией. Для доказательства признака Раабе вместо геометрической прогрессии в качестве образца для сравнения попробуйте рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^p$.

**Определение 33C.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*, если сам он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится. То есть, если $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} a_n$ существует (и не бесконечен), но $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$.

18. Докажите, что если ряд условно сходится, то ряды, составленные из его положительных и отрицательных членов, расходятся.

**Определение 33D.** *Знакочередующийся* ряд — числовой ряд, члены которого попеременно принимают значения противоположных знаков, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$, $b_n \geqslant 0$.

19. **Признак Лейбница.** Докажите, что знакочередующийся ряд $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$, $b_n \geqslant 0$ сходится, если $b_n \geqslant b_{n+1}$, начиная с некоторого номера $N$, и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

20. Исследуйте сходимость рядов: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{3n+1}{4n+7}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^4 \cdot 7^n}{n!}$.

**Определение 33E.** Для сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ величина $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = S - s_n$ называется *остаточным членом ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ или просто *остатком.*

**Замечание.** Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то величины $r_n$, очевидно, не определены.

21. а) Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $r_n \to 0$.

б) Докажите, что при выполнении условий теоремы Лейбница остаток $r_n$ сходящегося знакочередующегося ряда $s_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^i b_i$ будет по модулю меньше первого отброшенного слагаемого, т.е. $|r_n| < b_{n+1}$.

**Замечание.** Факт из пункта б) позволяет оценить погрешность вычисления неполной суммы ряда, т.е. его остаток.

в) Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ достаточно взять, чтобы найти его сумму с точностью 0,01? Найдите сумму с этой точностью.

22. Исследуйте сходимость рядов: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n/2)^n}{n!}$.

23. Переставьте члены ряда $\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \ldots = 0$ так, чтобы: а) он сходился, но сумма стала бы не равной нулю; б) он расходился.

24. Пусть при перестановке ряда новый номер члена ряда отстоит от старого не более чем на $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что тогда переставленный ряд сходится к той же сумме.

25. **Теорема Римана.** Пусть дан числовой ряд, который сходится условно. Докажите, что:

а) для произвольного числа можно так поменять порядок элементов ряда, что сумма нового ряда станет равна этому числу;

б) можно так переставить элементы ряда, чтобы сумма ряда стремилась к $+\infty$ или к $-\infty$ или же вовсе не стремилась ни к какому пределу, конечному или бесконечному.