Константиновский сборник

Работы учащихся и учителей школы № 179
г. Москвы 2022–2023 учебного года

Приложение к журналу «Математическое образование».
Серия «Образование: история, персоналии, проблемы»

Выпуск 1 (08), февраль 2023 г.

Москва, 2023


179

Константиновский сборник

179

Работы учащихся и учителей школы № 179
г. Москвы 2022–2023 учебного года

Приложение к журналу «Математическое образование».
Серия «Образование: история, персоналии, проблемы»

Выпуск 1 (08), февраль 2023 г.

Москва, 2023

Приложение к журналу “Математическое образование”

ISSN 1992-6138

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Редактор серии Комаров С.И.

Редактор выпуска Рябичев А.Д.

Ответственный за выпуск Имайкин В.М.

Выпуск 1 (08), 2023 г.

В настоящем выпуске приведены математические работы учащихся и учителей школы № 179 г. Москвы. Работы школьников выполнены в рамках участия в проектах или специализации в 2022–23 учебном году.

Адрес электронной почты для материалов: matob@yandex.ru

Подписано в печать 09.02.2023. Объем 4 п.л. Тираж 400 экз. Цена свободная.

Константиновский сборник

Приложение к журналу «Математическое образование».
Серия «Образование: история, персоналии, проблемы»

Выпуск 1 (08), февраль 2023 г.

Содержание

Работы учащихся и учителей школы № 179 г. Москвы 2022–2023 учебного года

Предисловие

С. И. Комаров. О проектной деятельности в школе 179 — 1

Работы школьников

Д. Авдеев. Задачи по теме «Клеточная сетка» — 2

Ф. Васильева, Я. Больщикова, В. Печникова. Многоугольники, теорема Жордана и ослабление теоремы Шёнфлиса — 7

Т. Мухаметшин. *pqr*-Метод — 12

К. Щербаков. Топология — 18

Работы учителей

А. Рябичев. Погружения многообразий — 46

<u>Предисловие</u>

О проектной деятельности в школе 179

С. И. Комаров

Проектная деятельность является эффективной формой обучения школьников. В классах инженерного и биологического профилей 179-й школы такая деятельность всегда являлась неотъемлемой частью учебного процесса. В классах математического профиля эта форма обучения возникла на регулярной основе несколько лет назад, хотя Н.Н. Константинов и отдельные учителя пытались вовлекать в проектную деятельность отдельных учеников и ранее.

Приведем несколько положений, на которых строится проектная деятельность в математическом профиле:

- темы проектов могут быть предложены как потенциальными научными руководителями, так и самими учениками;

- круг тем проектов может быть максимально широк (не только математика – физика – информатика);

- проекты могут быть исследовательскими, учебно-исследовательскими, инженерными, методическими, и так далее;

- проекты могут быть коллективными или индивидуальными;

- необходимо выполнение двух важных условий: проект должен быть хоть сколько-то содержательным (программа что-то вычисляет, методическое пособие имеет логику и содержит задачи, прибор работает, ...) и проект не должен отнимать все силы ученика и научного руководителя.

В «Константиновском сборнике» № 1 (02), 2019 г. уже публиковались материалы проектов учащихся школы.

В настоящем сборнике мы продолжаем публикацию таких материалов и представляем «методические» проекты учеников.

В первом материале представлен небольшой курс в задачах по теме «Клеточная сетка» от учащегося 10 класса. Во втором — группа учащихся представила свой подход к теореме Жордана для плоской ломаной и доказательству ослабленной теоремы Шёнфлиса. В статье «pqr-Метод» автор представляет и развивает эффективный метод доказательства некоторых видов неравенств. Возможности метода демонстрируются на примере специально подобранных задач. В последнем материале представлено фактически небольшое учебное пособие школьника, являющееся введением в топологию, в котором приведены авторские доказательства классических результатов начального курса топологии.

Кроме того, опубликована статья учителя математики, который фактически является руководителем всех представленных в сборнике проектов.

Комаров Станислав Игоревич,
заместитель директора
ГБОУ Школа № 179 г. Москвы.

<u>Работы школьников</u>

Задачи по теме «Клеточная сетка»

Д. Авдеев

Мы даём ряд задач по интересной теме, также приводим их решения с пояснениями, а в конце обсуждаем направление для дальнейшего исследования. Статья была создана в рамках школьного проекта по математике.

1. История проекта

Данная статья является адаптированной версией проектной работы, выполненной мной за первое полугодие 10 класса. Мой проект — это листок с математическими задачами, который можно будет использовать на уроках математического анализа или на кружках по математике.

Я выбрал тему, на которую не сильно обращают внимания — «клеточная сетка», — и начал придумывать задачи. Это происходило в период с сентября по ноябрь. Параллельно с этим я записывал решения, где-то начиная с ноября по декабрь.

Как только пробная версия листочка была готова, я дал её на кружок 9 класса в 179 школе. Лично я думал, что задачи слишком простые для 9 класса (изначально я хотел дать листок 8 классам). К моему удивлению, из 7 задач были решены всего лишь две, причём многие школьники не решили даже одной задачи.

Тогда я отсортировал задачи по сложности (по своему усмотрению), хотя, например, на олимпиадах задачи часто не отсортированы, поэтому всегда надо читать все задачи. Однако из этого опыта можно сделать вывод, что данная тема нуждается в проработке у школьников, а мой листик может помочь в этом.

2. Задачи

Задача 1. Петя и Вася играют в игру на бесконечной клеточной сетке. Вася начинает вторым. Он находится в узле сетки и за один ход двигается в соседний узел: правый, левый, нижний или верхний. Петя же в свой ход блокирует один узел сетки. После блокировки Вася не может ходить в этот узел. Может ли Петя сделать так, что Вася не сможет сделать ход?

Задача 2. Внутри квадрата 100×100 строят клетчатую фигуру по следующим правилам. На первом шаге закрашивают любую клетку. На каждом следующем шаге закрашивают любую клетку, имеющую одну общую сторону с уже закрашенными, и не имеющую с ними других общих вершин и сторон. Какое максимальное число клеток может получиться?

Задача 3. Под одной из клеток бесконечного клетчатого поля сидит крот. За n-й ход мы можем проверить не более n^2 клеток. В конце хода, если мы не нашли крота, он перемещается под любую соседнюю по стороне клетку. Существует ли алгоритм действий, позволяющий рано или поздно поймать бедное животное?

Задача 4. Дана клетчатая сетка. Также имеется дерево — изначально это одна вершина в узле сетки. На шаге n мы из любых висячих вершин проводим **а)** всего n новых рёбер **б)** всего $4n$ новых рёбер (по своему желанию), чтобы снова получилось дерево. Каждое ребро проводится в соседний узел вправо, влево, вниз или вверх. Можно ли сделать процесс бесконечным? Если да, то приведите алгоритм, если нет, то какое максимальное число шагов мы можем сделать?

Задача 5. То же самое, что и в задаче 4, только теперь за один шаг мы одновременно из **каждой** висячей вершины проводим по два ребра (по своему желанию), чтобы снова получилось дерево. Вопрос тот же, можно ли сделать процесс бесконечным? Если да, то приведите алгоритм, если нет, то какое максимальное число шагов мы можем сделать?

Задача 6. **а)** То же, что в задаче 5, только теперь ребра могут проводиться ещё и в соседний узел влево-вверх, право-вверх, влево-вниз и вправо-вниз.

б) То же, что в предыдущем пункте, но теперь после всех ходов граф должен стать симметричным относительно горизонтальной и вертикальной прямых, проходящих через начальную вершину.

3. Решения

Решение задачи 1. Ответ: да, может. Сделаем огромный квадрат 100×100 с центром в месте, где стоит Вася. Петя в первые двенадцать ходов блокирует четыре угла квадрата по три узла сетки. Затем, если следующим ходом Вася может выйти на границу квадрата, то этот узел Петя закрывает, тем самым Вася никогда не попадёт на границу. Иначе мы просто спокойно закрываем границы квадрата. Когда границы будут закрыты, будем закрывать квадрат изнутри. Тогда в конце Вася проиграет. Мы победили закрыв $101 \cdot 101 - 1 = 10200$ узлов.

Идея: Кажется, что победит Вася, ведь у него целых 4 варианта движения, а Петя блокирует один узел. Возможно, при решении этой задачи у некоторых школьников возникли трудности с тем, что они не подумали обратное. Иногда интуитивный ответ может быть ошибочным, надо это помнить когда решаешь задачи.

Вопрос для читателя: кажется, можно победить, закрыв гораздо меньшее число узлов. *А можете ли вы победить, закрыв не более 60 узлов?*

Решение задачи 2. Пусть мы закрасили клетку. Заметим, что, так как с фигурой эта клетка должна иметь ровно одну сторону, то мы закрасим какие-то 2 новых узла сетки. Всего в квадрате $101 \cdot 101$ узлов. Так как вначале мы красим четыре узла сетки то максимальное число шагов, которое мы можем сделать равно $(101 \cdot 101 - 4)/2 + 1 = 5099$ (делим с округлением вниз). Для примера мы можем построить спираль начиная с левого верхнего узла квадрата (рекомендуем читателю сделать это самостоятельно).

Идея: Когда дают клеточную сетку, обычно мало информации которую можно анализировать. Основная составляющая — это узлы сетки. Поэтому это первое, на что можно посмотреть.

Решение задачи 3. Заметим интересный факт. За n проверок мы проверим площадь суммарным размером $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = (2n+1)(n+1)n/6$, что асимптотически равно n^3. А крот может посетить примерно n^2 различных клеток, что наталкивает на мысль, что мы можем поймать крота. И это правда.

Пропустим 99 ходов. На сотом шаге проверим любой квадрат 100×100. На следующем шаге проверим квадрат 104×104 из которого вырезали внутренний квадрат 98×98 (т. е. фигуру в виде «рамочки»). На следующем шаге проверим квадрат 108×108 из которого вырезали внутренний квадрат 102×102. Заметим, что на n-м шаге мы проверяем $12n$ клеток, что меньше n^2. Тем самым мы проверим, что крот не придёт в проверенную область и заодно будем приближаться к нему минимум на 1 клетку. Это однозначно победа.

Идея: Здесь задача вообще не о клеточной сетке. Иногда некоторые темы скрыты под маской других идей (часто такое бывает в олимпиадном программировании). Однако использованная идея полезна в некоторых случаях. Иногда в задачах стоит посчитать асимптотику (поэтому если вы программист, вам проще).

Решение задачи 4. а) Ответ да. Алгоритм такой: сначала проводим ребро вправо. Потом из самой правой висячей вершины проводим ребро вправо, а из всех висячих вершин (кроме первой) проводим ребро вниз. Получается милый треугольник, который бесконечно растёт.

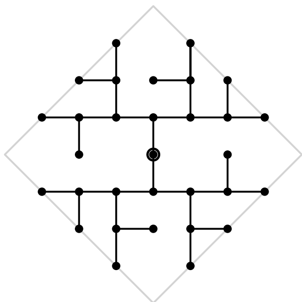
б) А это задача-шутка. Как бы мы не ходили нам придётся разрастаться во все соседние вершины, тем самым получая алгоритм (нарисуйте самостоятельно, что может получиться!).

Идея: В этой задаче в основном нет ничего интересного. Она была дана, чтобы было проще решить следующую задачу.

Решение задачи 5. Заметим, что после шага номер n всё наше дерево находится внутри "наклонного" квадрата с диагональю равной $2n$ клеток. Посчитаем число вершин внутри этого квадрата (или на границе). Их количество равно $4n(n+1)/2+1 = 2n(n+1)+1$ вершин. Нетрудно видеть, что на самом дереве после шага n всего $2^{n+1}-1$. Заметим, что если дерево можно построить, то

$$2^{n+1} - 1 \leq 2n(n+1) + 1$$

Понятно, что наибольшее n, при котором выполняется неравенство, равно 4. Пример:

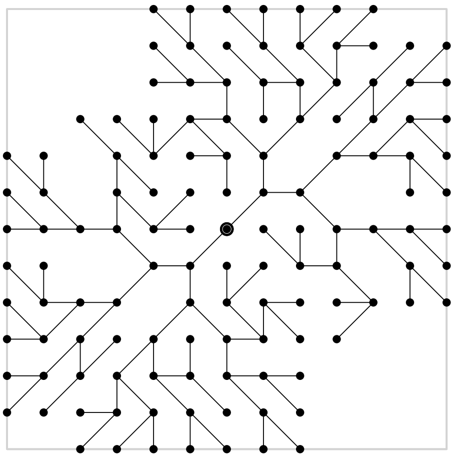


Идея: Опять же, полезно посчитать асимптотику. Также, тут полезно рисовать. Нарисовав пару ходов, вы поймете, что больше сделать не можете, это навлечёт вас на мысль, что ответ конечен.

Решение задачи 6. а) Решение аналогично предыдущей задаче, но только стороны квадрата параллельны осям координат и стороны квадрата равны $2n$ клеток. Количество вершин внутри этого квадрата (или на границе) равно $(2n+1)^2$. Как и в предыдущей задаче на самом дереве после шага n всего $2^{n+1}-1$ вершин. Заметим, что если дерево можно построить, то

$$2^{n+1} - 1 \leq (2n+1)^2$$

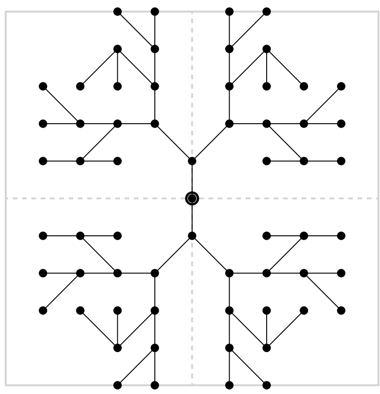
Понятно, что наибольшее n, при котором выполняется неравенство, равно 6. Пример:



б) Попробуем использовать идею предыдущей задачи, только дополнительно разделим квадрат со сторонами $2n$ на 4 квадрата со сторонами n и будем рассматривать эти квадраты отдельно.

Рассмотрим верхний левый квадрат. Пусть мы сделали $n = 6$ ходов. Тогда количество вершин дерева в верхнем левом квадрате равно $2^{n-1} + 1 = 2^5 + 1 = 33$. Заметим, что так как дерево симметрично, то первое ребро проходит по нижней границе квадрата, либо по правой границе. Мы будем рассматривать тот случай, когда первое ребро проходит по правой границе (в противном случае решается аналогично). Посчитаем число достижимых вершин в квадрате. Кажется, что их $(n+1)^2$. Но это не так.

Заметим, что так как мы сделали первый ход по правой границе, то левую границу мы никак не достигнем. Также мы не достигнем нижней и правой границы, так как дерево симметрично. Итого достижимы $(n+1)^2 - n - n - n + 1$ вершин, что равно 32, что меньше 33. Значит ходов не более 5, осталось только придумать пример. Вот он:



Идея: Решив предыдущую задачу, легко понять, что ответ конечен. Пункт а) полезен чтобы научиться хорошо придумывать примеры в задачах типа «Оценка + Пример». Пункт б) полезен чтобы научиться хорошо придумывать оценку в задачах типа «Оценка + Пример».

4. Дальнейшие обобщения

Можно придумывать множество вариаций задачи 5. Однако многие такие задачи непонятно, как решать. Наиболее интересна следующая задача.

Граф строится по тем же правилам что и в задаче 6а). Дано число k. Рассмотрим все возможные варианты деревьев. Для каждого дерева построим цикл длины k (ребра в цикле могут быть между соседними вершинами по диагонали или стороне клетки, вершины цикла — это узлы сетки). Пусть в цикле использовано m ребер из этого дерева. Из всех таких m возьмём максимум, перебрав все деревья и все циклы длины k. Чему равен этот максимум для фиксированного k?

Дмитрий Авдеев,
ученик 10 В класса
ГБОУ Школа № 179 г. Москвы.

Многоугольники, теорема Жордана и ослабление теоремы Шёнфлиса

Ф. Васильева, Я. Больщикова, В. Печникова

В этой статье мы формально определим что такое многоугольник, обсудим некоторые свойства многоугольников и докажем теорему Жордана для ломаной на плоскости и ослабление теоремы Шёнфлиса.

Этот текст является результатом работы на уроке "мат. специализация" в школе 179.

1. Введение

Определение 1. Подмножества плоскости X и Y называются *гомеоморфными*, если существует непрерывное взаимно-однозначное отображение $f : X \to Y$, причём обратное отображение $f^{-1} : X \to Y$ тоже непрерывно.

Мы будем обращаться с понятием непрерывности в большой степени неформально (как, например, в [3]). Тем не менее, для всех отображений, которые мы в дальнейшем строим, непрерывность может быть легко обоснована формально. Более точно, мы пользуемся фактами, что линейное отображение непрерывно, или что согласованно заданные непрерывные отображения на подмножествах задают непрерывное отображение объединения этих подмножеств. Лучше разобраться с общей топологией можно, например, по книгам [1] или [2]

Следующие утверждения — наш основной результат:

Теорема 1 (Жордан). *Любой многоугольник делит плоскость на 2 части.*

Теорема 2 (Ослабление теоремы Шёнфлиса). *Любой многоугольник делит плоскость на 2 части, при этом одна часть гомеоморфна диску, а вторая гомеоморфна плоскости с выколотой точкой.*

Но, прежде чем доказать Теорему Жордана, нам нужно определить, что такое многоугольник и т. д.

2. Теорема Жордана для многоугольника на плоскости

Определение 2. *Ломаной на плоскости* мы будем называть конечную последовательность точек $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^2$ (называемых *вершинами* ломаной) и отрезков $A_0A_1,\ A_1A_2, \ldots,\ A_{n-1}A_n$ (называемых *рёбрами* ломаной), таких что соседние отрезки не лежат на одной прямой.

Ломаная называется *несамопересекающейся*, если её звенья пересекаются только в вершинах и в каждой вершине пересекается не более двух звеньев.

Ломаная называется *замкнутой*, если A_0 и A_n совпадают.

Определение 3. *Многоугольником* будем называть замкнутую несамопересекающуюся ломаную.

Определение 4. Пусть на плоскости дан многоугольник. Вершину, лежащую на луче l, назовём *существенной* для луча l, если входящие в неё рёбра лежат по разные стороны от l. Ребро, лежащее на луче l, назовём *существенным* для луча l, если смежные с ним рёбра лежат по разные стороны от l.

Определение 5. Пусть на плоскости дан многоугольник. Будем называть *индексом луча l относительно данного многоугольника* сумму количества пересечений l с рёбрами многоугольника, через концы которых l не проходит, и количества существенных для l вершин и рёбер.

Определение 6. Точка B находится *внутри многоугольника*, если индекс любого луча выходящего из нее нечётен. Точка B находится *снаружи многоугольника*, если индекс любого луча выходящего из нее чётен.

Предложение 1. *Точка плоскости, не лежащая на многоугольнике, находиться либо внутри, либо снаружи многоугольника.*

Доказательство. Возьмём точку A, не лежащую на многоугольнике. Проведём из этой точки два луча k и l. Тогда чётность индексов k и l будет одинаковой.

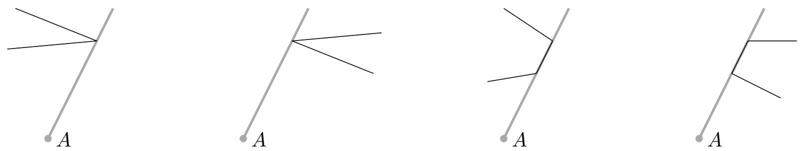


Рис. 1. Четыре случая, когда меняется индекс луча

Действительно, будем поворачивать луч от положения k к положению l. Индекс луча не будет меняться, за исключением четырёх случаев, когда луч натыкаемся на одну или несколько не существенных для луча вершин или рёбер многоугольника и сходит с них (см. рисунок 1). В этих случаях чётность индекса луча не меняется (см. рисунки 2 и 3).

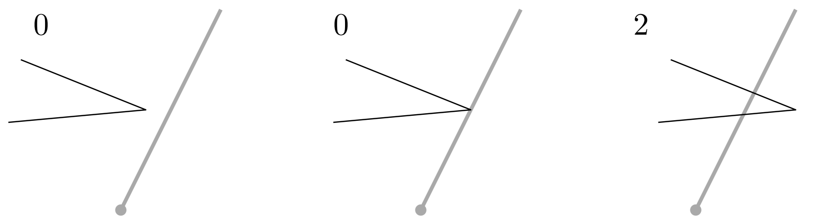


Рис. 2. Пересечение с углом

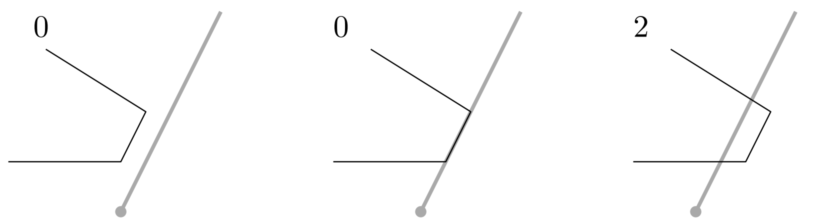


Рис. 3. Пересечение с ребром

Если же в промежуточном положении луч пересекает существенную вершину или ребро, его индекс не меняется.

Лемма 1. *Если две точки X и Y можно соединить отрезком, не пересекающим многоугольник, то X и Y находятся одновременно либо внутри, либо снаружи.*

Доказательство. Проведём луч a, который начинается в X и проходит через Y. Тогда у него будет тот же индекс, что и у луча, выходящего из Y и сонаправленного лучу a.

Лемма 2. *Любые две точки N и M внутри или любые две точки снаружи многоугольник можно соединить ломаной, которая не пересекает многоугольник.*

Доказательство. Пусть для определённости M и N находятся внутри многоугольника (для точек снаружи рассуждение аналогично).

Проводим из точек отрезки к ближайшим рёбрам многоугольника, но не соединяем его с ним. От отрезка, выходящего из M, будем "идти" вдоль рёбер многоугольника. По лемме 1 на каждом шаге пути мы остаёмся внутри многоугольника.

Когда мы дойдём до ближайшего ребра к точке точки N, мы будем с той же стороны от соответствующего ребра многоугольника, что и N — в противном случае луч, проведённый через точку N, и сонаправленный ему луч из точки N имеют разную чётность пересечений с многоугольником.

Нам остаётся дойти до N по отрезку, что завершает доказательство.

3. Разбиение на треугольники

В дальнейшем мы будем мерить углы в многоугольнике *с внутренней стороны* многоугольника.

Лемма 3. *В любом многоугольнике есть угол, меньший* $180°$.

Доказательство. Берём прямую a вне многоугольника и двигаем её в его сторону. Когда прямая a натыкается на многоугольник, то она натыкается либо на угол, который в этом случае не может быть больше $180°$, либо на ребро, в этом случае углы при этом ребре меньше $180°$.

Лемма 4. *В любом многоугольнике, кроме треугольника, можно провести диагональ, лежащую внутри него.*

Доказательство. Берём угол в многоугольнике, меньший $180°$ с вершиной A. Обозначим через B и C соседние вершины сторон угла A. Пусть нельзя провести диагональ внутри многоугольника между B и C. Тогда внутри треугольника ABC лежат некоторые вершины многоугольника.

Проведём прямую x через A параллельно отрезку BC. Будем вести прямую x от A параллельно отрезку BC. Первое, на что натыкается прямая x внутри угла, будет либо угол, из вершины которого можно провести диагональ к вершине A, либо ребро, к вершинам которого также можно будет провести диагональ.

Лемма 5. *При разбиении многоугольника Σ внутренней диагональю на два многоугольника Σ_1 и Σ_2, точки внутри Σ (не принадлежащие диагонали) лежат либо внутри Σ_1, либо внутри Σ_2.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Возьмём точку A внутри Σ, которая лежит одновременно внутри Σ_1 и Σ_2, либо одновременно снаружи Σ_1 и Σ_2. Рассуждая как в лемме 2, мы можем дойти из A до точки A' рядом с диагональю, не пересекая Σ и саму диагональ. Тогда по лемме 1 точка A' также лежит внутри Σ и одновременно внутри Σ_1 и Σ_2, либо одновременно снаружи Σ_1 и Σ_2.

Проведём из A' луч k через диагональ. Он имеет одинаковый по чётности индекс с Σ_1 и Σ_2, обозначим индексы луча n и m соответственно. Получается, что k пересекает Σ всего $n + m - 2$ раза (мы вычитаем 2, поскольку пересечение k с диагональю посчитано дважды). Полученная сумма чётна. Следовательно, точка A' лежит снаружи Σ. Откуда выходит противоречие, так как A' находится внутри Σ.

Предложение 2. *Любой многоугольник можно разделить на треугольники $n-3$ диагоналями.*

Доказательство. База: треугольник разбит на треугольники (достаточно провести 0 диагоналей).

Шаг: пусть все многоугольники с количеством вершин меньше n можно разбить на треугольники. В многоугольнике с n вершинами можно провести диагональ, разбивающую многоугольник на 2 многоугольника с меньшим количеством вершин, а их мы можем разбить на треугольники по предположению индукции. Если в одном из них k вершин, то в другом вершин $n-k+2$. Значит, всего диагоналей будет проведено $1+(k-3)+(n-k+2-3)=n-3$.

Отметим, что по лемме 5 диагонали, проведённые в предположении индукции, будут лежать внутри исходного многоугольника. Эти диагонали не пересекаются также вследствие леммы 5.

Следующее утверждение про *выпуклый* многоугольник мы оставляем читателю в качестве упражнения (указание: оно может быть доказано по индукции аналогично предложению 2).

Лемма 6. *Любые $n-3$ непересекающихся диагонали в выпуклом n-угольнике делят его на треугольники.*

Лемма 7. *Внутренность произвольного многоугольника гомеоморфна внутренности вписанного многоугольника.*

Доказательство. Берём многоугольник Σ с n вершинам и делим его на треугольники (по предложению 2). Нумеруем вершины Σ по кругу. Берём окружность и вписанный в неё n-угольник Σ'. Нумеруем вершины Σ' по кругу. Соединим вершины Σ' с теми же номерами, которые были соединены в Σ.

Отрезки соединения не пересекают друг друга. Действительно, диагональ AB делит Σ на 2 многоугольника. Вершины от номера A до номера B по часовой принадлежат одному многоугольнику, а вершины от номера B до номера A по часовой — другому. Следовательно, точки от номера A до номера B по часовой и от номера B до номера A по часовой (не считая A и B) не соединяются, ведь диагональ, лежащая внутри первого многоугольника, не попадает внутрь второго многоугольника, а их внутренности не пересекаются по лемме 5.

По лемме 6 в итоге Σ' разбивается на треугольники. Треугольник ABC из Σ отображаем в треугольник $A'B'C'$ из Σ' аффинным преобразованием (сторона AB отображается в $A'B'$ линейно). Так же делаем с остальными треугольниками. Это задаёт гомеоморфизм внутренностей Σ и Σ'.

4. Доказательство ослабления теоремы Шёнфлиса

Предложение 3. *Многоугольник делит плоскость на две части, одна из них (внутренность многоугольника) гомеоморфна диску.*

Доказательство. Сперва докажем утверждение для внутренности вписанного многоугольника. Назовём центр его окружности O. Проведём любой радиус OA пересекающий многоугольник в точке B. Растянем равномерно отрезок OA в OB. Таким образом отобразим все точки. Это задаёт гомеоморфизм.

Поскольку по лемме 7 внутренность любого многоугольника гомеоморфна внутренности вписанного многоугольника, любой многоугольник гомеоморфен диску.

Лемма 8. *При разбиении многоугольника на треугольники в предложении 2 найдётся треугольник с двумя сторонами, являющимися ребрами многоугольника.*

Доказательство. Пусть мы провели диагональ в Σ. Выберем одну из частей, на которые Σ делится этой диагональю. Далее, при разбиении этой части диагональю выберем меньшую часть, только 1 ребро которой является диагональю, а остальные — рёбрами Σ. Будем делать так при проведении каждой новой диагонали. Часть, полученная в конце этого процесса — и есть требуемый треугольник.

Предложение 4. *Точки вне многоугольника образуют множество, гомеоморфное плоскости с выколотой точкой.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по числу вершин многоугольника.

База: плоскость с выколотым треугольником гомеоморфна плоскости с выколотой точкой. Для доказательства можно рассуждать как в предложении 3, заменив радиусы на лучи, проведённые из точки внутри треугольника.

Шаг: пусть после выкалывания внутренности любого многоугольника с $n-1$ вершиной оставшаяся часть плоскости гомеоморфна плоскости с выколотой точкой.

Проведём в данном n-угольнике Σ диагонали, разбивающие его внутренность на треугольники. По лемме 8 существует треугольник с двумя сторонами, являющимися ребрами многоугольника. Назовем его ABC со стороной AC являющийся диагональю. Заменим в Σ ломаную ABC на отрезок AC и обозначим получившийся многоугольник через Σ'.

Зададим гомеоморфизм из плоскости без внутренности Σ в плоскость без внутренности Σ'. Для этого выберем точку O вне Σ рядом с точкой B, так что B лежит внутри треугольника AOC. Для любой точки E на AC проведем отрезок OE. Обозначим пересечение OE и ломаной ABC через F. Растянем отрезок OF до отрезка OE. Это задаёт гомеоморфизм четырёхугольника $AOCB$ и треугольника AOC. Точки плоскости вне AOC пусть переходят в себя.

Построенный гомеоморфизм сводит утверждение предложения для многоугольника Σ к предположению индукции.

Благодарности

Мы благодарны нашему научному руководителю, Андрею Рябичеву, за научные консультации, помощь в редактировании текста и подготовке рисунков. Также мы благодарны Константину Щербакову, Артёму Толстоброву, Никите Горбачеву и Яше Васильеву за помощь в поиске неточностей.

Литература

[1] Виро О.Я., Иванов О.А., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М. Элементарная топология. - Москва, Издательство МЦНМО, 2010.

[2] Вербицкий М.С. Начальный курс топологии. Задачи и теоремы. - Издательство МЦНМО, 2017. - 352 с.

[3] Прасолов В.В. Наглядная топология. - М.: МЦНМО, 1995. - 111 с.

Фотиния Васильева,
Ярослава Больщикова,
Валерия Печникова,
учащиеся 9 КЛ класса
ГБОУ Школа № 179 г. Москвы.

pqr-Метод

Т. Мухаметшин

Эта статья была создана в рамках школьного проекта по математике. Суть проекта состояла в том, чтобы изучить эффективный и универсальный метод для доказательства некоторых неравенств по материалам летней конференции турнира городов и другим источникам (см. [1], [2]) и последующего упрощения теоретического материала и демонстрации возможностей метода путём создания подборки задач из известных олимпиад и их решения.

Была прочитана лекция по теории на кружке 179 школы, а также был проведён семинар по решению задач из §7, по результатам которого мы поняли, что метод легко освоить и решать с его помощью сложные задачи.

Статью можно давать на математических кружках для 9-11 классов, проходя подряд по теории, а затем решать и разбирать задачи.

1. Введение

Допустим, вам встретилось какое-то непонятное симметрическое неравенство от трёх переменных, и в голову не приходит никаких мыслей, как его доказать. На помощь может прийти технический метод, не требующий сложных идей. Об одном таком методе и пойдёт речь.

Определение 1. *Симметрическим многочленом от переменных a, b, c называется многочлен, который переходит в себя при любых перестановках переменных, то есть $G(a, b, c) = G(a, c, b) = G(b, a, c) = G(b, c, a) = G(c, a, b) = G(c, b, a)$.*

Рассмотрим такое кубическое уравнение $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, что a, b, c — его корни, тогда по теореме Виета:

$$p = a + b + c,$$

$$q = ab + bc + ac,$$

$$r = abc,$$

где a, b, c — переменные неравенства.

Теорема 1. *Любой симметрический многочлен от трёх переменных выражается через p, q, r.*

Доказательство. Назовём S_k выражение $a^k+b^k+c^k$, т. е. сумму одночленов из одной переменной в одинаковой степени. Докажем, что S_k выражается через p, q, r. Очевидно, $S_1 = p$. Для $k = 2$, $k = 3$ многочлены S_k явно выражены через p, q, r в следующем разделе. Для $k \geq 4$ оказывается выполненным соотношение

$$S_k = p \cdot S_{k-1} - q \cdot S_{k-2} + r \cdot S_{k-3}.$$

Это легко проверить, сделав обратную замену p, q, r:

$$(a + b + c)(a^{k-1} + b^{k-1} + c^{k-1}) - (ab + bc + ac)(a^{k-2} + b^{k-2} + c^{k-2}) + abc(a^{k-3} + b^{k-3} + c^{k-3}) =$$

$$= a^k + ba^{k-1} + ca^{k-1} + b^k + ab^{k-1} + cb^{k-1} + c^k + ac^{k-1} + bc^{k-1} - ba^{k-1} - bca^{k-2} -$$

$$-ca^{k-1} - ab^{k-1} - cb^{k-1} - acb^{k-2} - abc^{k-2} - bc^{k-1} - ac^{k-1} + bca^{k-2} + abc^{k-2} + acb^{k-2}$$

. Всё кроме a^k, b^k, c^k сокращается, что и требовалось проверить.

Далее, любой симметрический многочлен от трёх переменных состоит из свободных членов, из одночленов с одной переменной, с двумя и тремя (какая-то группа может быть пустой). Будем выражать по группам: со свободными членами всё понятно. Для одночленов с одной переменной, из-за симметричности многочлена — если есть одночлен a^k, то обязаны быть b^k и c^k (т. е. получится несколько групп для разных степеней), которые вместе дают S_k, а оно уже выражается через p, q, r.

У одночленов из двух переменных есть отличное свойство — так как если есть a^tb^m, то в силу симметричности исходного многочлена еще есть и a^tb^m, a^tc^m, b^ta^m, b^tc^m, c^ta^m, c^tb^m, их сумма это $S_t \cdot S_m - S_{t+m}$, ведь

$$(a^t+b^t+c^t)(a^m+b^m+c^m)-(a^{t+m}+b^{t+m}+c^{t+m}) = a^{t+m}+b^{t+m}+c^{t+m}+a^tb^m+a^tc^m+b^ta^m+$$

$$+b^tc^m+c^ta^m+c^tb^m-(a^{t+m}+b^{t+m}+c^{t+m}) = a^tb^m+a^tc^m+b^ta^m+b^tc^m+c^ta^m+c^tb^m.$$

А так как любое S_k выражается через p, q, r, то это тоже можно выразить через p, q, r.

С одночленами с тремя переменными всё просто — из-за симметричности, если есть одночлен $a^xb^yc^z$, то есть и $a^xc^yb^z$, $b^xa^yc^z$, $b^xc^ya^z$, $c^xb^ya^z$, $c^xc^yb^z$. В них содержится какая-то максимальная степень r (минимальная из x, y, z) — вынесем её и получим $r^t \cdot A$ (где A — сумма одночленов с двумя переменными) — что по предыдущему случаю выражается через p, q, r.

Значит, любой многочлен разбивается на группы, каждая из которых состоит из "подгрупп" для разных степеней (например, многочлен $a^2+b^2+c^2+a^3+b^3+c^3$, состоит из группы одночленов с одной переменной, с двумя подгруппами: S_2 и S_3), все из которых выражаются через p, q, r. Сложим всё и получим заветное разложение.

2. Полезные разложения

Следующие разложения помогают быстрее переводить условие неравенства в p, q, r.

- $a^2+b^2+c^2 = p^2-2q$
- $a^3+b^3+c^3 = p^3-3pq+3r$
- $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b = pq-3r$
- $a^4+b^4+c^4 = p^4-4p^2q+2q^2+4pr$
- $(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2 = q^2-2pr$
- $(a+b)(b+c)(c+a) = pq-r$
- $a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b = p^2q-2q^2-2r$
- $(a-b)^2\cdot(b-c)^2\cdot(c-a)^2 = -4p^3r+p^2q^2+18pqr-4q^3-27r^2$

3. *pqr*–Леммы

Определим многочлен $T(p,q,r) = -4p^3r+p^2q^2+18pqr-4q^3-27r^2 = (a-b)^2\cdot(b-c)^2\cdot(c-a)^2$. Снова рассмотрим уравнение $x^3-px^2+qx-r=0$. Пусть a, b, c — корни этого уравнения (возможно, комплексные).

Теорема 2. *Числа a, b, c будут вещественными тогда и только тогда, когда $T(p,q,r) \geq 0$ (т. е. дискриминант уравнения неотрицательный) и p, q, r вещественные.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно, ведь при вещественных a, b, c имеем

$$T(p,q,r) = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2 = (a-b)^2 \cdot (b-c)^2 \cdot (c-a)^2,$$

т. е. произведение квадратов вещественных чисел, которое точно неотрицательно. Суммы и произведения вещественных — вещественное, значит условие про p, q, r выполняется.

Докажем утверждение в обратную сторону: уравнение нечётной степени всегда имеет хотя бы один вещественный корень, без ограничения общности пусть a вещественное, разложим уравнение $x^3 - px^2 + qx - r = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$ на $(x-a)(x^2-(b+c)x+bc)$. Докажем, что либо корни уравнения $x^2 - (b+c)x + bc$ вещественны, либо они комплексно сопряжены.

Пусть есть комплексный корень $b = x + yi$, тогда $c = (b+c) - x - yi$. Отсюда $bc = (x+yi)(b+c-x-yi) = (x(b+c) - x^2 - y^2) + ((b+c)y - 2xy)i$. Но мы знаем, что bc вещественно, ведь $bc = \frac{p}{a}$. А значит, $(b+c)y - 2xy = 0$, т. е. $b + c = 2x$, откуда следует что $c = x - yi$.

Предположим теперь, что у уравнения $x^3-px^2+qx-r = 0$ один вещественный и два сопряжённых корня. Тогда число $(a-b)(b-c)(c-a) = -(a^2-(b+c)a+bc)(b-c)$ чисто мнимое, так как $b-c$ чисто мнимое, а другая часть — вещественна. Но тогда $T(p,q,r) = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ будет отрицательным (свойство комплексных чисел), что противоречит условию. Значит все корни, т. е. a, b, c, вещественные.

Лемма 1 (о неотрицательности).

$$(p,q,r \geq 0 \text{ и } T(p,q,r) \geq 0) \iff a,b,c \geq 0$$

Доказательство. Очевидно, что если $a, b, c \geq 0$, то и $p, q, r \geq 0$. Так как $T(p,q,r)=(a-b)^2(b-c)^2(a-c)^2$, то и $T(p,q,r) \geq 0$, при вещественных a, b, c (что верно по условию).

Если же $T(p,q,r) \geq 0$ и $p, q, r \geq 0$, то по доказанному ранее a, b, c вещественные. Но так как a, b, c — это корни уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, то они будут неотрицательными. Действительно, иначе имеем $x^3 < 0$, $-px^2 \leq 0$, $qx \leq 0$, $-r \leq 0$, так как $p, q, r \geq 0$. А это в сумме даст отрицательное число. Поэтому корни не могут быть меньше нуля, что и требовалось доказать.

Рассмотрим следующие полезные леммы, при $a, b, c \geq 0$. Заметим, что по основной теореме алгебры уравнение $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ имеет ровно три комплексных корня: a, b, c (может и с нулевой мнимой частью). Однако, по доказанному ранее, при $T(p,q,r) \geq 0$ и вещественных p, q, r числа a, b, c будут вещественными, а при $p, q, r \geq 0$ — неотрицательными.

Следовательно, для любых фиксированных неотрицательных значениях двух переменных из p, q, r и для всевозможных неотрицательных значениях оставшейся, неотрицательные корни уравнения $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ будут существовать при выполнении $T(p,q,r) \geq 0$.

Во всех нижеследующих формулировках мы по умолчанию предполагаем $a, b, c \geq 0$.

Лемма 2 (лемма о p). *При фиксированных значениях q и r, причём $r > 0$, максимальное и минимальное возможное значение p достигаются при равенстве каких-то двух переменных (без ограничения общности $a = b$). Если $r = 0$, то p может быть сколь угодно большим, т. е. нет максимума.*

Доказательство. Так как $a, b, c \geq 0$, то по лемме о неотрицательности: $p, q, r \geq 0$ и $T(p,q,r) \geq 0$.

Первый случай: $r \neq 0$: $T(p,q,r) = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2$, где всё, кроме p является константой (по сути, уравнение перепишется в виде $-4p^3 + kp^2 + tp + z$, где k, t, z — постоянные величины). Так как $T(p,q,r) \geq 0$, то у нас получится кубическое неравенство от p, с отрицательным старшим коэффициентом. Поскольку $p \geq 0$, решением неравенства может являться только отрезок (значений p) или одна точка. Действительно, при $p = 0$ значение $T(p,q,r)$ отрицательно, ведь $z < 0$ по предположению, при достаточно больших p значение $T(p,q,r)$ также становится отрицательным.

Концы отрезка или же точка — это нули $T(p,q,r)$, то есть нули выражения $(a-b)^2(b-c)^2(a-c)^2$, что достигается при равенстве каких-то двух переменных (без ограничения общности можно считать, что $a=b$). Значит, минимальное и максимальное p для заданных q и r достигается при равенстве двух переменных, что и требовалось доказать.

Второй случай: если же $r=0$, то одно из чисел a,b,c равно 0. В этом случае $T(p,q,r)=p^2q^2-4q^3$. Если $q=0$, то есть две равные переменные. Если $q\neq 0$, то p может быть сколь угодно большим.

Лемма 3 (лемма о q). *При фиксированных значениях p и r максимальное и минимальное возможное значение q достигаются при равенстве каких-то двух переменных (без ограничения общности $a=b$).*

Проведём аналогичные рассуждения, что и при доказательстве леммы о p: условие $T(p,q,r)\geq 0$ также должно выполнятся, $T(p,q,r)=-4p^3r+p^2q^2+18pqr-4q^3-27r^2$, где всё, кроме q является константой, перепишется в виде: $kq^2+tq-q^3+z\geq 0$, где k,t,z — постоянные величины.

Аналогично, допустимым решением может являться или точка или отрезок, в каждом из случаев должно выполняться равенство каких-то двух переменных из a,b,c, а значит, минимальное и максимальное q для заданных p и r достигается при равенстве двух переменных, что и требовалось доказать.

Лемма 4 (лемма об r). *При фиксированных значениях p и q максимальное и минимальное возможное значение r достигаются при равенстве двух переменных (без ограничения общности $a=b$) или же при наличии переменной, которая равна* 0 *(без ограничения общности $c=0$).*

Доказательство. Проделаем всё то же самое, получим квадратное неравенство $tr-27r^2+z\geq 0$, где t,z — постоянные величины. Как и в прошлых леммах, решением может являться или точка (с ней всё понятно) или отрезок.

Если отрезок имеет неотрицательный левый конец, то в каждом из случаев должно выполняться равенство каких-то двух переменных из a,b,c, а значит, минимальное и максимальное r для заданных p и q достигается при равенстве двух переменных.

Если же левый конец отрезка меньше 0, то удовлетворяет условию отрезок с концами 0 и правым концом изначального отрезка (допустимые r всегда существует по доказанному ранее). Поэтому минимальное $r=0$, а это значит, что какая-то переменная равна 0. Максимально r при равенстве каких-то двух, что и требовалось доказать.

4. Алгоритм решения задач

Решение задач будет примерно таким: выражаем неравенство через p,q,r, а затем пытаемся выразить одну переменную через две другие (если есть какое-то дополнительное условие на какую-то переменную, то нужно стараться выразить именно её), а затем мысленно «зафиксировать» их и посмотреть, когда значение какой-то из частей получившегося неравенства будет максимальна или минимальна. Теперь, применив лемму о соответствующей (зафиксированной) переменной, сделать обратную замену на a, b, c, с выполнением условия леммы. А затем «в лоб» добить упрощенное неравенство (будет оставаться всего одна или две переменные).

Часто через pqr легко увидеть какое-то (с виду скрытое) полезное разложение (например, как в задаче 3) или применить какое-нибудь вспомогательное неравенство (как, например, в задаче 2).

5. Примеры решения задач с помощью pqr

Задача 1 (Неравенство Седракяна). Пусть $a,b,c\geq 0$, докажите, что $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$.

Решение. Переведём условие в pqr: $p^2-2q\geq q$, т. е. надо доказать, что $p^2\geq 3q$. Зафиксируем p и r. Докажем, для неравенство для максимального q, тогда оно будет верно и для остальных.

По лемме о q, максимальное значение достигается при равенстве двух переменных. Пусть $a = b$. Тогда $p^2 = (2a+c)^2$, $3q = 3(a^2+2ac)$. Перенесём всё в одну часть. Надо доказать, что $a^2-2ac+c^2 \geq 0$, что верно, т. к. $(a-c)^2 \geq 0$.

Задача 2. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1$. Докажите, что $(a-1)(b-1)(c-1) \geq 8$.

Решение. $(a-1)(b-1)(c-1) = abc - ac - bc + c - ab + a + b - 1 = r - q + p - 1$. По условию (приведём к общему знаменателю и умножим на знаменатель) $bc + ac + ab = abc$, т. е. $q = r$, т. е. $r - q + p - 1 = p - 1$, значит, нужно доказать, что $p - 1 \geq 0$.

Зафиксируем q, r. По лемме о p минимальное значение p достигается при равенстве двух переменных, пусть $a = b$. Тогда, из условия: $c = \frac{a}{a-2}$, $p = a + a + \frac{a}{a-2} = \frac{2a^2-3a}{a-2}$, надо доказать, что $p - 1 = \frac{2a^2-3a}{a-2} - 1 \geq 8$, что равносильно $\frac{2a^2-3a}{a-2} \geq 9$.

Далее, по условию $a, b, c \geq 0$, а $c = \frac{a}{a-2}$, то $a - 2 > 0$, иначе $c < 0$. Зная это, можно умножить обе части на $(a-2)$ и перенести всё в левую сторону: $2a^2 - 3a - 9(a-2) = 2a^2 - 12a + 18$, нужно доказать неотрицательность этого выражения, а это верно, так как $2a^2 - 12a + 18 = 2(a-3)^2 \geq 0$.

Задача 3. Для неотрицательных чисел a, b, c докажите, что $(ab + bc + ac)^2 \geq 3abc(a + b + c)$.

Решение. Запишем неравенство через p, q, r: $q^2 \geq 3pr$. Если $p = 0$, то в силу неотрицательности $a = b = c = 0$, для которых неравенство очевидно выполняется. В противном случае разделим обе части на p.

В полученном неравенстве $q^2/p \geq 3r$ зафиксируем q, p, по лемме об r, максимальное значение достигается при равенстве двух переменных (если докажем для максимального r, то будет верно и для остальных). Пусть $a = b$, т. е. (обратная замена) $\frac{(a^2+2ac)^2}{2a+c} \geq 3a^2c$. Перенесём всё в одну сторону и раскроем скобки, получим $\frac{a^4+4a^3c+4a^2c^2-6a^3c-3a^2c^2}{2a+c} \geq 0$, так как знаменатель положительный, смотрим только на числитель, он равен $a^4 - 2a^3c + a^2c^2 = (a^2 - ac)^2 \geq 0$,

6. Упражнения

Докажите следующие неравенства для неотрицательных a, b, c:

1. $p^2 \geq 3q$
2. $q^3 \geq 27 \cdot r^2$
3. $\frac{3r}{q} \leq \sqrt[3]{r} \leq \frac{p}{3} \leq \sqrt{\frac{p^2-2q}{3}}$ (Неравенства о средних)
4. $p^3 + 3r - 3pq + 3r \geq pq - 3r$ (Неравенство Шура)
5. $2(p^3 + 3r - 3pq) \geq pq - 3r$

7. Задачи

7.1. Блок «Разложения и вспомогательные неравенства»

Задача 1. [Олимпиада Бельчонок 2021/2022] Периметр треугольника равен 4, докажите, что сумма квадратов его сторон больше 5.

Задача 2. [Всерос 1996] Докажите, что если a, b, c — положительные числа и $ab+bc+ca > a+b+c$, то $a + b + c > 3$.

Задача 3. Действительные a, b, c таковы, что $\frac{1}{(a+b+c)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите равенство

$$\frac{1}{(a+b+c)^{2023}} = \frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}}.$$

(Указание: воспользоваться разложением $pq - r$.)

7.2. Блок «Технические задачи на леммы»

Задача 4. [Всесоюзная олимпиада 1991] Пусть a, b, c — неотрицательные числа, такие что $a+b+c = 1$. Докажите, что

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

Задача 5. Пусть a, b, c — положительные числа и $a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что:

$$(a+b+c)(1+abc) \geq 6.$$

Задача 6. Пусть a, b, c — неотрицательные числа и $a+b+c = 3$. Докажите, что:

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ac} \geq \frac{2}{1+abc}.$$

Задача 7. [Турнир Колмогорова 2022, Тверь] Сумма обратных величин положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите неравенство:

$$\frac{(b+c)}{(a+bc)} + \frac{(a+c)}{(b+ac)} + \frac{(b+a)}{(c+ab)} \geq \frac{12}{(a+b+c-1)}.$$

Задача 8. [Турнир городов 1996/1997 задача 11.5] Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{(1+a+b)} + \frac{1}{(1+b+c)} + \frac{1}{(1+a+c)} \leq 1.$$

Литература

[1] Доледенок А.В., Меньщиков А.Б., Семченков А.С., Фадин М.А. *pqr*-метод. - Летняя конференция Турнира городов, август 2016. https://www.turgor.ru/lktg/2016/3/3-1ru.pdf

[2] Patrick Corn, Pi Han Goh, Jimin Khim. The *uvw* Method.
https://brilliant.org/wiki/the-uvw-method/

Тагир Мухаметшин,
ученик 10 В класса
ГБОУ Школа № 179 г. Москвы.

Топология

К. Щербаков

В данном тексте вводятся основные понятия и утверждения элементарной топологии. Приводятся определение и примеры гомеоморфизмов, гомеоморфных топологических пространств. Далее, рассматриваются такие топологические инварианты, как линейная связность, односвязность и эйлерова характеристика, и приводятся примеры негомеоморфных пространств. Определяются понятия триангулированного пространства и поверхности. В разделе 5 изучаются различные объекты, которые можно получить, склеивая разные стороны квадрата и некоторые их свойства. Определяется понятие связной суммы поверхностей, рассматриваются свойства ориентируемых и неориентируемых поверхностей. В разделе 9 формулируется и доказывается полная классификация поверхностей. Далее, изучается, что происходит с ориентируемыми поверхностями при их разрезании. Предлагается другое определение рода, основанное на разрезании поверхностей, и доказывается его равносильность приведённому ранее определению.

Текст был создан в результате работы на специализации по топологии в школе 179. Многие доказательства из текста, вероятно, являются классическими, но получены автором самостоятельно.

Оглавление

1. О чем вообще топология? 19

2. Примеры гомеоморфизмов 19
2.1. Не единственность гомеоморфизма . . . 19
2.2. Окружность и многоугольники . . . 20
2.3. Теоремы Жордана и Шёнфлиса . . . 20
2.4. Интервал и прямая . . . 20
2.5. Диск и плоскость . . . 20
2.6. Не гомеоморфизм между окружностью и полуинтервалом . . . 21

3. Примеры топологических инвариантов 21
3.1. Линейная связность . . . 22

4. Поверхности и триангуляции 23
4.1. Двумерные многообразия . . . 23
4.2. Триангуляции . . . 23

5. Что можно получить из квадрата? 27
5.1. Сфера . . . 27
5.2. Цилиндр . . . 27
5.3. Лента Мёбиуса . . . 28
5.4. Тор . . . 28
5.5. Бутылка Клейна . . . 29
5.6. Проективная плоскость . . . 29

6. Связные суммы 31

7. Ориентируемость 33

8. Эйлерова характеристика **36**
8.1. Определение 36
8.2. Эйлерова характеристика некоторых поверхностей 37

9. Классификация поверхностей **39**

10. Режем ориентируемые поверхности **43**

11. Другое определение рода **43**

1. О чем вообще топология?

Топология — раздел математики, в широком смысле, изучающий непрерывность. В частности, в топологии изучаются непрерывные отображения между объектами. Мы часто будем ссылаться на непрерывность нестрого, однако все утверждения, связанные с непрерывностью, которые мы будем использовать без доказательства, несложно выводятся строго из базовых понятий анализа. Неформально, *топологические пространства* — объекты (множества точек), про отображения между которыми можно говорить, непрерывно оно или нет.

Определение 1.1. Пусть X и Y — топологические пространства. Тогда *гомеоморфизмом* называется непрерывная биекция $f\colon X \to Y$ такая, что f^{-1} тоже непрерывно. Если между X и Y существует гомеоморфизм, будем писать $X \simeq Y$ и говорить, что X и Y гомеоморфны.

Теорема 1.1. *Гомеоморфность — отношение эквивалентности.*

Доказательство. Для доказательства теоремы 1.1, достаточно проверить три утверждения про отношение гомеоморфности: рефлексивность, симметричность и транзитивность.

Рефлексивность. Тождественное отображение $\mathrm{id}\colon X \to X$ является гомеоморфизмом, значит $X \simeq X$.

Симметричность. Пусть $X \simeq Y$, $f\colon X \to Y$ является гомеоморфизмом. Тогда обратная к нему биекция $f^{-1}\colon Y \to X$ непрерывна и тоже является гомеоморфизмом, так как $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$ — непрерывно. Значит, $Y \simeq X$.

Транзитивность. Пусть $X \simeq Y$, $Y \simeq Z$, $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — гомеоморфизмы. Тогда их композиция $g \circ f\colon X \to Z$ — непрерывная биекция (как композиция непрерывных биекций) и обратная к ней биекция $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ тоже непрерывна. Значит, это гомеоморфизм и $X \simeq Z$.

Из того, что гомеоморфность является отношением эквивалентности, непременно следует, что все топологические пространства разбиваются на классы гомеоморфности. И, на самом деле, часто топологов интересуют именно классы гомеоморфности пространств, а не сами пространства

2. Примеры гомеоморфизмов

2.1. Не единственность гомеоморфизма

Важно отметить, что между двумя гомеоморфными топологическими пространствами может существовать много разных гомеоморфизмов. Например, любая непрерывная монотонная функция, у которой и область определения, и область значения — отрезки, является гомеоморфизмом этих отрезков.

2.2. Окружность и многоугольники

Утверждение 2.1. *Произвольный n-угольник гомеоморфен окружности.*

Доказательство. Для построения гомеоморфизма введём на объектах координаты. На окружности зафиксируем начало координат и дадим точкам координаты из полуинтервала $[0;1)$ пропорционально величине дуги, отсчитываемой против часовой стрелки от начала координат до данной точки. На многоугольнике обозначим координату одной из вершин за ноль и, обходя многоугольник против часовой стрелки, на каждой стороне будем линейно увеличивать координату на $\frac{1}{n}$. Таким образом, все точки многоугольника также получат координаты из $[0;1)$. Сопоставив каждой точке многоугольника точку с такой же координатой на окружности, получим биекцию. Она непрерывна, как и обратное к ней отображение. Значит, это гомеоморфизм.

2.3. Теоремы Жордана и Шёнфлиса

Гомеоморфны бывают и двумерные объекты. Например, любые два круга гомеоморфны, потому что на них можно ввести одинаковые полярные координаты, считая радиус круга равным 1, тогда сопоставление точке одного круга точки с такими же координатам другого будет гомеоморфизм. Класс гомеоморфности кругов называют диском и обозначают D^2. Например, любой эллипс с внутренностью гомеоморфен кругу, потому что растяжение эллипса относительно одной из его осей, при котором он переходит в круг, является гомеоморфизмом.

Теорема 2.1 (Жордана). *Любая замкнутая кривая без самопересечений на плоскости делит плоскость на две связные части и является их общей границей.*

Теорема 2.2 (Шёнфлиса). *Одна из частей, на которые замкнутая кривая без самопересечений делит плоскость, гомеоморфна диску.*

Эти две теоремы несмотря на простоту формулировки довольно сложны в доказательстве и здесь это доказательство приводить не будем, хотя на эти теоремы часто придётся ссылаться.

2.4. Интервал и прямая

Утверждение 2.2. *Интервал гомеоморфен прямой.*

Доказательство. Сначала покажем, что интервал гомеоморфен открытой полуокружности. Возьмём полуокружность с диаметром равным длине интервала и расположим их так, чтобы рассматриваемый интервал и диаметр, соединяющий концы полуокружности образовывали прямоугольник, как на рис. 1. Теперь интервал можно спроецировать на полуокружность по направлению, перпендикулярному ему. Полученное преобразование является гомеоморфизмом, а значит, интервал гомеоморфен полуокружности с выколотыми концами.

Теперь докажем, что полуокружность без концов гомеоморфна прямой. Расположим прямую в той же плоскости, параллельно интервалу. Будем проецировать точки из центра полуокружности на прямую. Тогда каждая точка полуокружности перейдёт на прямую, потому что концы выколоты, а у каждой точки на прямой будет ровно один прообраз. Таким образом, это биекция. Более того, это отображение, как и обратное к нему, непрерывно. Следовательно, это гомеоморфизм.

2.5. Диск и плоскость

Двумерной аналогией предыдущего утверждения является следующее утверждение.

Утверждение 2.3. *Диск без границы гомеоморфен плоскости*

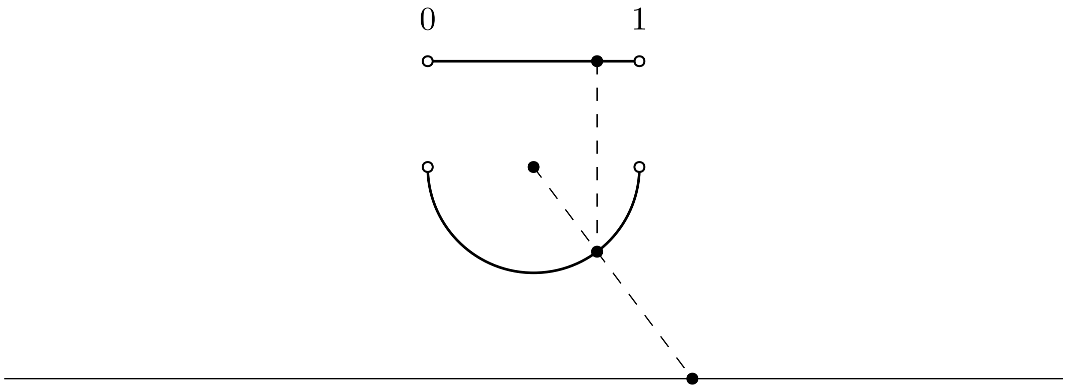


Рис. 1. Интервал и прямая

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству утверждения 2.2: сначала строим гомеоморфизм между открытым диском и полусферой без границы, затем проецируем полусферу на плоскость. Первый гомеоморфизм можно построить, спроецировав точки внутренности большого круга полусферы на эту полусферу. Далее, проецируя из центра шара на плоскость, параллельную большому кругу и касающуюся полусферы, получаем гомеоморфизм между открытой полусферой и плоскостью.

Схожим образом строится гомеоморфизм сферы без одной точки и плоскости: нужно спроецировать сферу из удалённой точки на плоскость, касающуюся сферы в диаметрально противоположной точке. Из последнего гомеоморфизма следует переформулировка теорем Жордана и Шёнфлиса для сферы:

Лемма 2.1. *Любая замкнутая несамопересекающаяся кривая на сфере делит сферу на две части, гомеоморфные диску и является их общей границей.*

Доказательство. Удалив произвольную точку, не лежащую на кривой и спроецировав всё на плоскость, получаем, что сфера разбилась на две части, одна из которых гомеоморфна диску. Удалив точку внутри этой части, получим то же и про вторую часть.

2.6. Не гомеоморфизм между окружностью и полуинтервалом

Отличие гомеоморфизмов от произвольных непрерывных отображений можно продемонстрировать на следующем примере. Рассмотрим полуинтервал $[0;1)$ и окружность. На окружности зафиксируем точку начала и введём координаты, как мы это уже делали в пункте 2.4. Построим отображение из полуинтервала на окружность, переводящее точку полуинтервала в точку на окружности с той же координатой. Тогда это отображение действительно будет непрерывно.

Но эта биекция не является гомеоморфизмом! Действительно, рассмотрим обратное отображение из окружности в полуинтервал. В любой окрестности точки на окружности с координатой 0 есть и точки с координатой больше 0.9, и точки с координатой меньше 0.1 — они переходят в разные концы полуинтервала. Значит, обратное отображение не непрерывно и эта биекция не является гомеоморфизмом.

3. Примеры топологических инвариантов

Для того чтобы доказать, что два топологических пространства гомеоморфны, достаточно построить между ними гомеоморфизм. Для того же, чтобы выяснить, что два пространства не гомеоморфны, то есть что гомеоморфизма не существует, используются топологические инварианты — свойства пространств, не меняющиеся при гомеоморфизмах, но различные для некоторых пространств.

3.1. Линейная связность

Оказывается, что между окружностью и полуинтервалом не существуем гомеоморфизма. Для доказательства несуществования этого гомеоморфизма можно воспользоваться инвариантом, основанным на понятии связности.

Введём на множестве точек топологического пространства отношение связанности: будем говорить, что две точки *связанны*, если между ними существует путь, то есть непрерывное отображение из отрезка в рассматриваемое пространство, при котором концы отрезка переходят в эти две точки. Очевидно, для этого отношения выполняются свойства рефлексивности (каждая точка связанна с собой) и симметричности (если X связанна с Y, то и Y связанна с X), свойство транзитивности выполняется, потому что два пути можно склеить, присоединив к концу одного пути второй. Следовательно, все точки распадаются на классы эквивалентности, один такой класс называется *компонентой линейной связности.*

Определение 3.1. Топологическое пространство называется *линейно связным,* если оно состоит из единственной компоненты линейной связности.

Далее мы для краткости иногда будем называть линейную связность просто связностью. Несмотря на то, что в общем случае связность — другое, менее геометрически наглядное понятие, чем линейная связность, для рассматриваемых пространств эти два понятия взаимозаменяемы.

Утверждение 3.1. *Число компонент линейной связности и отношение линейной связанности двух конкретных точек — топологические инварианты.*

Доказательство. При гомеоморфизме любой путь переходит в путь. А значит, образы связанных точек связанны, и наоборот. Следовательно, если два пространства гомеоморфны, то они оба имеют одно и то же число компонент линейной связности.

Используя линейную связность, можно говорить и о большем. Для этого докажем следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть $X \simeq Y$. Тогда для любой точки $x \in X$ существует точка $y \in Y$ такая, что $X \setminus \{x\} \simeq Y \setminus \{y\}$.*

Доказательство. Пространства X и Y гомеоморфны, значит между ними существует гомеоморфизм f. Рассмотрим в качестве точки y точку $f(x)$. Тогда биекцию между $X \setminus \{x\}$ и $Y \setminus \{y\}$ можно установить, сопоставив каждой точке первого множества её образ при f. Она будет непрерывной, так как исходная биекция была непрерывной. Обратная к ней тоже будет непрерывной, так как биекция, обратная к исходной, была непрерывной. Значит, полученные пространства гомеоморфны.

Используя эту лемму можно доказать следующее.

Утверждение 3.2. *Гомеоморфизма между полуинтервалом и окружностью не существует.*

Доказательство. Будем действовать от противного: пусть существует гомеоморфизм f из полуинтервала I в окружность ω. Выберем на полуинтервале точку x, отличную от крайней. Тогда по лемме 3.1 существует и гомеоморфизм между полуинтервалом без точки $I \setminus \{x\}$ и окружностью без точки $\omega \setminus \{f(x)\}$. Однако у полуинтервала без точки x две компоненты связности, а у окружности без точки — только одна. Противоречие, значит, окружность и полуинтервал не гомеоморфны.

Однако если вырезать из окружности одну точку, получится пространство, гомеоморфное интервалу. Биекция, аналогичная построенной в §2.6 в этот раз будет гомеоморфизмом. Это одномерный аналог упомянутого гомеоморфизма между сферой без точки и плоскостью.

Используя те же соображения можно доказать, что, например, два набора окружностей, склеенных по одной точке гомеоморфны если и только если в них одинаковое количество окружностей. Достаточность следует из того, что любые две окружности без точки гомеоморфны (произвольным образом сопоставляем окружности и строим гомеоморфизм, переводя общую точку в общую точку). А необходимость следует из леммы 3.1: при выкидывании общей для всех окружности точки, пространство распадается на компоненты линейной связности — интервалы, количество которых совпадает с количеством окружностей.

4. Поверхности и триангуляции

4.1. Двумерные многообразия

Часто встречаются топологические пространства, которые локально устроены так же, как обычные евклидовы пространства. Например, сфера локально похожа на плоскость — зная только о топологическом устройстве небольшой окрестности точки на сфере, невозможно отличить её от плоскости.

Неформально, топологические пространства, локально устроенные как плоскость, называются двумерными многообразиями. Для строгого определения необходимо понять, что означает понятие «локально».

Определение 4.1. *Окрестность* точки — открытое множество, содержащее эту точку.

Для метрических пространств (на которых определено расстояние между точками) можно определить ε-окрестность точки как множество точек, находящихся на расстоянии меньше ε от данной. Тогда открытое множество — множество, в которое каждая точка входит с некоторой ε-окрестностью.

В общем случае постулируются свойства набора открытых множеств, задающего топологию пространства.

Определение 4.2. Связное топологическое пространство, некоторая окрестность каждой точки которого гомеоморфна пространству $\mathbb{R}^2$, называется *двумерным многообразием.*

Так, например, сфера является двумерным многообразием, потому что каждая её точка содержится в некотором сферическом сегменте, который, аналогично построениям в §2.4 гомеоморфно отображается в плоскость проекцией из середины стягивающего его круга.

Некоторые топологические пространства имеют особые точки по сравнению с двумерными многообразиями (как, например, диск имеет границу), но несмотря на это они похожи на обычную евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ в окрестностях всех точек, кроме особых. Поэтому можно расширить класс многообразий следующим образом.

Определение 4.3. Связное топологическое пространство, для каждой точки которого некоторая окрестность гомеоморфна либо плоскости $\mathbb{R}^2$, либо полуплоскости $\mathbb{R}^2_{x\geqslant 0}$, называют *двумерным многообразием с краем.* Точки, для которых верное первое условие, назовём внутренними, а точки, для которых верно второе — граничными, последние составляют край.

4.2. Триангуляции

Оказывается, что часто намного удобнее работать не с произвольными пространствами, а с триангулированными.

Определение 4.4. *Триангулированное двумерное пространство* — топологическое пространство, склеенное из конечного числа, вершин, рёбер и треугольников так, что выполняются два условия:

1. Концы каждого ребра приклеиваются к двум различным вершинам.
2. Периметр каждого треугольника приклеивается к циклу из трёх рёбер.

Определение 4.5. *Поверхность* — это связное триангулированное пространство, являющееся двумерным многообразием.

Сформулируем критерий того, что триангулированное пространство является поверхностью.

Теорема 4.1. *Триангулированное пространство является поверхностью тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1. *Оно связно.*
2. *Каждое ребро приклеивается к сторонам ровно двух треугольников.*
3. *Рёбра выходящие из каждой вершины можно упорядочить по циклу так, чтобы любые два соседних были приклеены к сторонам какого-то одного треугольника.*

Доказательство теоремы 4.1. Пусть для некоторого триангулированного пространства выполнены указанные выше условия. Докажем, что тогда это двумерное многообразие. Для этого проверим, что у каждой его точки есть окрестность, гомеоморфная плоскости. Все точки триангулированного пространства можно разделить на три группы.

1. Точки, лежащие строго внутри треугольников. Для таких точек рассмотрим внутренность соответствующего треугольника. Она гомеоморфна открытому диску, значит, и плоскости.
2. Точки, лежащие строго внутри рёбер. У каждой такой точки на каждом из двух треугольников с границей – этим ребром, есть окрестность, гомеоморфная полуплоскости — половина круга с центром в этой точке. Но мы склеиваем два треугольника по этому ребру, то есть окрестности склеиваются по их границе. Склеив две полуплоскости по их границам, получим окрестность точки, гомеоморфную плоскости.
3. Точки, лежащие в вершинах. Рёбра, выходящие из данной вершины, можно упорядочить по циклу так, чтобы любые два соседних ребра были соединены треугольником. Расположим рёбра на плоскости именно в таком порядке так, чтобы между соседними был один и тот же угол (для этого придётся сжать некоторые треугольники). Тогда внутренность круга на плоскости радиусом меньше, чем длина всех рёбер и с центом в вершине будет являться окрестностью данной точки, гомеоморфной плоскости.

Таким образом, если триангулированное пространство удовлетворяет вышеприведённым условиям, то оно является поверхностью.

Пусть триангулированное пространство не удовлетворяет одному из этих условий. Тогда есть несколько вариантов.

1. Какое-то ребро приклеено не к двум треугольникам

   Если оно не приклеено ни к одному треугольнику, то некоторая окрестность точка на ребре гомеоморфна интервалу, а значит, она не может быть гомеоморфна плоскости, потому что по лемме 3.1 тогда существовал бы и гомеоморфизм между интервалом без точки и плоскостью

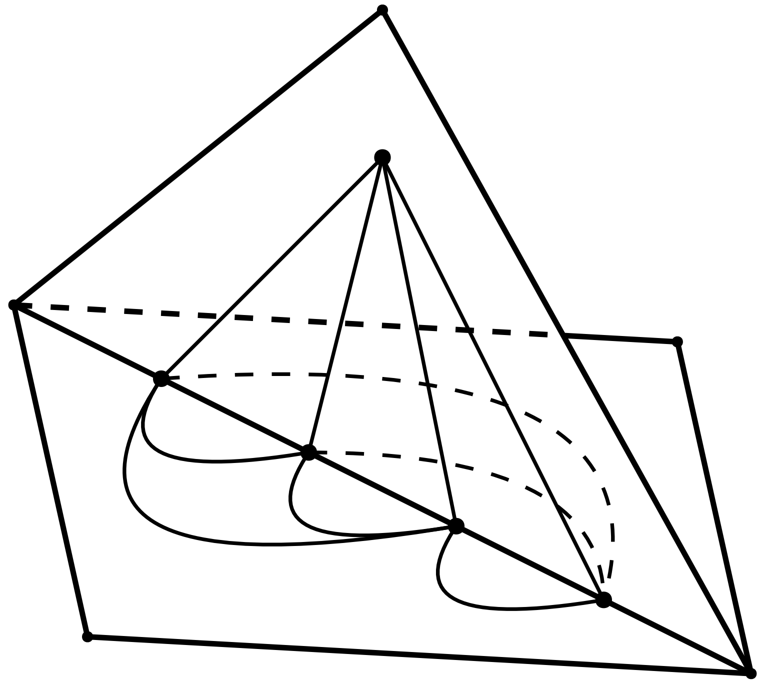


Рис. 2. Граф K_5 на трёх треугольниках

без точки, но у них разное число компонент связности: у интервала без точки их две, а у плоскости без точки — только одна.

Если ребро приклеено ровно к одному треугольнику, то любая достаточно малая окрестность данной дочки гомеоморфна полуплоскости, а значит, никакая окрестность точки на нём не гомеоморфна плоскости. Тот факт, что полуплоскость не гомеоморфна плоскости мы пока оставим без доказательства, но он верен.

Если же ребро приклеено более, чем к двум треугольникам, то на любой окрестности данной точки можно разместить полный граф на 5 вершинах K_5 следующим образом: 4 вершины расположим на ребре и попарно соединим их, проводя рёбра на частях двух треугольников. А пятую вершину расположим на другом треугольнике, примыкающем к этому ребру и соединим её со всеми четырьмя вершинами (см. рис. 2). Таким образом на любой окрестности точки этого ребра, можно расположить граф K_5 без самопересечений, а на плоскости это сделать невозможно. Значит, никакая окрестность точки на таком ребре не гомеоморфна плоскости, следовательно, это не поверхность.

2. Рёбра, выходящие из какой-то вершины нельзя упорядочить по циклу так, чтобы между двумя соседними был треугольник. Если какое-то ребро присоединено не к двум треугольникам, то, как мы уже доказали, пространство не является поверхностью. Иначе, все рёбра выходящие из данной вершины разбиваются на циклы, в каждом из которых соседние рёбра склеены треугольником. Если цикл один, то предположение не выполняется. Если их хотя бы два, то окрестность этой вершины не может быть гомеоморфна плоскости, потому что тогда по лемме 3.1 существовал бы гомеоморфизм между плоскостью без точки и окрестностью этой вершины без самой вершины. Но окрестность такой точки без этой точки имеет хотя бы две компоненты связности, так как каждый цикл из рёбер вместе с примыкающими треугольниками образует свою компоненту связности, а плоскость без точки связна. Значит, окрестность вершины не гомеоморфна плоскости.

3. Пространство несвязно. Тогда оно не может быть поверхностью, так как определение поверхности включает в себя связность.

Значит, если хотя бы одно из вышеуказанных условий не выполняется, то пространство не является поверхностью. Таким образом, эти условия являются критерием поверхности для триангулированного топологического пространства.

Схожим образом можно поступить и для поверхностей с краем. Критерий поверхности с краем для триангулированных пространств выглядим следующим образом:

Теорема 4.2. *Триангулированное топологическое пространство является поверхностью с краем тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1. *Оно связно.*

2. *Каждое ребро приклеено либо к одному, либо к двум треугольникам.*

3. *Рёбра, выходящие из каждой вершины можно упорядочить по циклу или линейно так, чтобы между любыми двумя соседними был треугольник, а между несоседними не было треугольников.*

Доказательство теоремы очень похоже на доказательство предыдущей теоремы, поэтому здесь мы его опустим. Рёбра, приклеенные к одному треугольнику, и вершины, рёбра из которых можно правильным образом упорядочить линейно, называются *граничными.* Остальные вершины и рёбра — *внутренними.* Граничные вершины и рёбра образуют *границу* или *край.*

Введённые определения позволяют упростить доказательство многих утверждений.

Теорема 4.3. *Край поверхности с краем гомеоморфен объединению окружностей.*

Доказательство теоремы 4.3. Рассмотрим произвольную граничную точку. По определению, рёбра из неё выходящие можно линейно упорядочить так, чтобы треугольник был между двумя соседними и только между ними. А значит, из каждой граничной точки выходит ровно два граничных ребра. Из внутренних же точек, граничные рёбра не выходят, так как для них к любому выходящему ребру примыкает ровно два треугольника.

Значит, в графе, состоящем из всех вершин и только граничных рёбер, степень любой вершины — это 0 или 2. Значит, это объединение отдельных вершин — внутренних вершин и циклов, составляющих границу. Таким образом, край состоит из объединения рёбер, склеенных по циклам. Каждый цикл гомеоморфен окружности (это многоугольник), а значит, край поверхности с краем гомеоморфен объединению окружностей, что и требовалось доказать.

В дальнейшем мы иногда будем называть *дырками* компоненты границы, гомеоморфные окружности.

Для последующей работы с триангуляциями полезно определить следующее понятие.

Определение 4.6. Если есть две триангуляции поверхности, каждая вершина первой триангуляции является вершиной второй, и каждое ребро первой является объединением нескольких рёбер второй, то вторая триангуляция называется *измельчением* первой.

Лемма 4.1. *Если две триангуляции одной поверхности пересекаются по конечному числу точек, то у них существует общее измельчение.*

Доказательство. Объединим вершины и рёбра обеих триангуляций, добавив вершины на пересечения рёбер. Тогда полученные рёбра и вершины делят поверхность на многоугольники. Триангулируем все такие многоугольники, получим триангуляцию, содержащую в себе вершины и, возможно, поделенные, рёбра и первой триангуляции, и второй. Она будет являться общим измельчением двух данных триангуляций.

Чтобы использовать только что доказанную лемму можно было для всех триангуляций, с точностью до некоторой малого шевеления, необходима следующая лемма. Доказательство её приводить здесь не будем.

Лемма 4.2. *Если две триангуляции пересекаются по бесконечному числу точек, то одну из них можно сколь угодно мало деформировать так, чтобы две полученные триангуляции пересекались по конечному числу точек.*

5. Что можно получить из квадрата?

Возьмём квадрат $[0;1] \times [0;1]$ и будем склеивать разными способами его стороны.

5.1. Сфера

Склеим две пары соседних сторон. Для каждого фиксированного $t \in [0;1]$ точку вида $(0,t)$ отождествим с точной $(t,0)$, а точку вида $(1,t)$ — с точкой $(t,1)$.

Утверждение 5.1. *Полученная поверхность окажется гомеоморфной сфере.*

Доказательство. Действительно, разрезав квадрат по диагонали так, чтобы склеиваемые пары находились в одной и той же части, получим два конуса. Значит, наша поверхность гомеоморфна двум конусам, склеенным по основаниям. А эта конструкция гомеоморфна сфере, так как, если вписать в неё сферу так, чтобы она касалась обоих конусов, проекция из её центра на конусы будет биекцией и гомеоморфизмом. Значит, это склейка сферы.

Отметим, что для получения сферы можно было обойтись и двумя склеенными сторонами двуугольника (геометрически, его сторонами будут не отрезки), потому что, на рассматриваемой конструкции (рис. 3) обе красных стороны идут сразу за чёрными и направлены в ту же сторону, а значит, есть эти пары разноцветных сторон можно рассматривать как не четыре, а лишь две изогнутые стороны.

5.2. Цилиндр

Склеим две стороны так, чтобы точка $(0,t)$ склеивалась с точкой $(1,t)$. Получим *цилиндр.*

Утверждение 5.2. *Это поверхность с краем, её край — объединение двух окружностей.*

Доказательство. Все внутренние точки квадрата остались внутренними, точки на склеенных сторонах тоже стали внутренними. Действительно, их окрестность была гомеоморфна полуплоскости, а в процессе склейки мы отождествили каждую из таких точек с какой-то другой точкой, окрестность которой тоже была гомеоморфна полуплоскости. Таким образом, окрестности склеились по краю и окрестность точки на цилиндре будет гомеоморфна плоскости. Окрестность точки внутри двух других сторон квадрата не изменились и остались гомеоморфны полуплоскости. Точки в углах квадрата склеились по парам и их окрестности тоже стали гомеоморфны полуплоскости, так как при склеивании двух секторов по радиусу получается сектор — склеив окрестности, получим окрестность, гомеоморфную полуплоскости. Значит, край полученной поверхности составляют

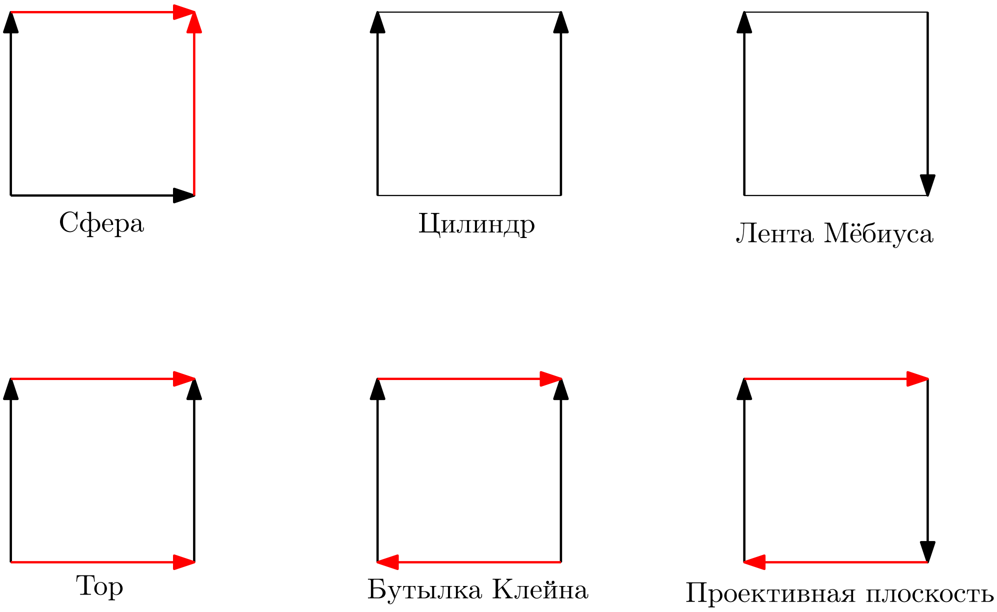


Рис. 3. Поверхности, полученные из квадрата

точки отрезков $(0,0)-(1,0)$ и $(1,0)-(1,1)$. У каждого из этих двух отрезков склеены между собой концы, а общих точек они не имеют. Значит, край цилиндра составляют две окружности.

Утверждение 5.3. *Цилиндр можно представить как декартово произведение окружности на отрезок* $\mathbb{S}^1 \times [0;1]$.

Доказательство. Рассматривая квадрат как произведение двух отрезков, при склейке двух сторон все концы всех «горизонтальных» отрезков (вида $(0,t)-(1,t)$) отождествились и они стали окружностями.

5.3. Лента Мёбиуса

Возьмём квадрат $[0;1]\times[0;1]$ и склеим две его противоположные стороны так, чтобы точка $(0,t)$ склеивалась с точкой $(1,1-t)$. Полученный объект называется *лентой Мёбиуса.*

Утверждение 5.4. *Лента Мёбиуса — поверхность с единственной компонентой края.*

Доказательство. По соображениям, аналогичным приведённым в доказательстве утверждения 5.2, граничными станут точки, которые лежали на двух не склеенных сторонах $(0,0)-(1,0)$ и $(0,1)-(1,1)$. Точка $(0,0)$ склеивается с точкой $(1,1)$, а точка $(0,1)$ — с точкой $(1,0)$. Таким образом граница ленты Мёбиуса будет гомеоморфна двум отрезкам с соответственно склеенными вершинами, то есть окружности $(0,0)-(0,1)-(1,0)-(1,1)-(0,0)$.

Вскоре мы выясним, что есть ещё один способ получить ленту Мёбиуса из квадрата, склеивая две смежные стороны в противоположных направлениях.

5.4. Тор

Рассмотрим цилиндр из §5.2 и склеим две компоненты его границы так, чтобы нигде не образовывалось ленты Мёбиуса как части поверхности, то есть точку $(t,0)$ склеим с точкой $(t,1)$. Полученное пространство называется *тором.*

Утверждение 5.5. *Тор является поверхностью.*

Доказательство. Окрестность каждой граничной точки цилиндра гомеоморфна полуплоскости, при склеивании двух таких точек получаем окрестность результата, гомеоморфную плоскости. Полученная поверхность гомеоморфна декартову произведению двух окружностей, в этом случае аналогично §5.2 мы «замкнули» две стороны, они стали окружностями, и произведение двух отрезков (квадрат) превратилось в произведение двух окружностей.

5.5. Бутылка Клейна

Компоненты границы цилиндра из §5.2 можно склеить и по-другому. Склеим каждую точку $(t, 0)$ с точкой $(1-t, 1)$. Это пространство называется *бутылкой Клейна.*

Утверждение 5.6. *Бутылка Клейна — поверхность.*

Доказательство. Рассуждение полностью аналогично доказательству утверждения 5.5.

Бутылку Клейна нельзя отобразить в $\mathbb{R}^3$ без самопересечений, но можно в $\mathbb{R}^4$.

Утверждение 5.7. *Бутылка Клейна получается при склеивании двух лент Мёбиуса по их границе.*

Доказательство. На рис. 4 показано, как, предварительно переклеив бутылку Клейна, её можно разрезать на две части, гомеоморфные ленте Мёбиуса. Сначала разрежем квадрат по диагонали и склеим стороне, которая должна склеиваться «с переворотом». Тогда порядок сторон изменится и одна из диагоналей полученного четырёхугольника будет делить его на два треугольника со склеенными сторонами. Разрежем по этой диагонали, получится два треугольника, в каждом из которых склеена пара сторон. Если такой треугольник разрезать по одной из чевиан, проведённых к вершине между двумя склеиваемыми сторонами, станет видно, что это лента Мёбиуса, а её граница — третья сторона этого треугольника. Таким образом, при некотором разрезании бутылки Клейна получаются две ленты Мёбиуса, а значит, и при склейке двух лент Мёбиуса по границе получается бутылка Клейна, так как две ленты Мёбиуса можно склеить единственным с точностью до гомеоморфизма способом.

5.6. Проективная плоскость

Отождествим пары противоположных сторон квадрата в противоположных направлениях. Получим *проективную плоскость.*

Утверждение 5.8. *Проективная плоскость — поверхность.*

Доказательство. Здесь рассуждение также полностью аналогично доказательству утверждения 5.5.

Отметим, что для проективной плоскости, как и для сферы, можно обойтись только двумя сторонами двуугольника, склеенными «в противоположных направлениях». Более того, при склейке проективной плоскости из квадрата (и двуугольника тоже) каждая точка склеивается с симметричной ей. Таким образом, если каждую точку границы диска склеить с противоположной, получится проективная плоскость. Ещё один способ получить проективную плоскость — отождествить каждую точку сферы с противоположной.

Утверждение 5.9. *При заклеивании ленты Мёбиуса по границе диском (её граница — окружность), получается проективная плоскость.*

Доказательство. Обоснование этого приведено на рис. 5.

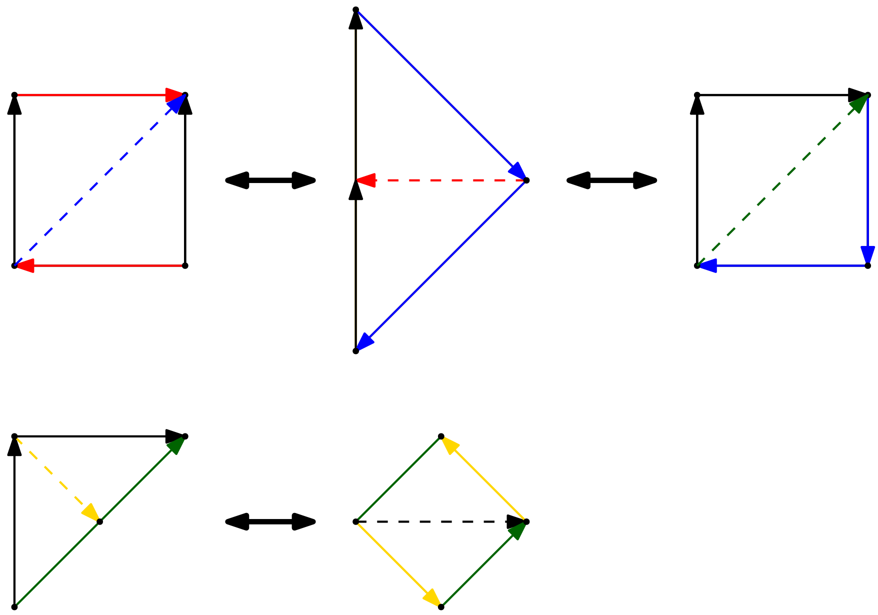


Рис. 4. Бутылка Клейна как две ленты Мёбиуса

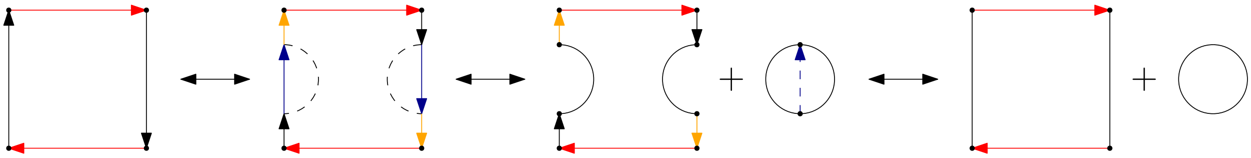


Рис. 5. Лента Мёбиуса, заклеенная диском

6. Связные суммы

Определение 6.1. Пусть X и Y — поверхности. Вырежем из них по одному треугольнику триангуляции и склеим то, что осталось по границам. Результат называется *связной суммой* $X\#Y$.

То же определение можно переформулировать, вырезая не треугольник, а произвольный открытый диск. Такие две формулировки равносильны.

Утверждение 6.1. *Связная сумма поверхностей — поверхность.*

Доказательство. Проверим, выполняется ли условие поверхности для связной суммы поверхностей с точки зрения триангуляций. Для вершин, рёбер и точек, не находящихся на разрезе, примыкающие рёбра и треугольнички не изменились, значит для них всё ещё выполняется условие поверхности.

К каждому ребру на разрезе примыкало два треугольника, но один мы вырезали и к ним осталось приклеено по одному треугольнику. Но мы такие рёбра склеили по парам, то есть каждое такое ребро склеилось с каким-то ещё. Таким образом, к каждому ребру оказалось приклеено два треугольника и условие поверхности выполнилось.

Для каждой вершины вырезанного треугольника все выходящие из неё рёбра можно было упорядочить по циклу так, чтобы соседние были сторонами одного треугольника. После того как один из этих треугольником мы выкинули, оставшиеся рёбра стало возможно упорядочить линейно. Аналогично, линейно можно упорядочить рёбра, исходящие из соответствующей вершины на остатке второй поверхности. Говоря по-другому, у нас получились поверхности с краем. Причем крайними рёбрами будут именно рёбра вырезанного треугольника. А значит, склеив эти рёбра, мы получим для этой вершины рёбра, которые можно правильным образом упорядочить по циклу.

Значит, связная сумма поверхностей — поверхность.

Для корректности определения связной суммы необходимо доказать следующее.

Утверждение 6.2. *Результат связной суммы не зависит от расположения вырезанных треугольников.*

Доказательство. Докажем, что можно заменить вырезанный треугольник на соседний — тогда так постепенно можно дойти до любого другого треугольника.

Рассмотрим в триангуляции два произвольных соседних треугольника и некоторую окрестность соседствующих с ними треугольников. Тогда, если вырезать один треугольник, эта окрестность будет гомеоморфна диску с дыркой, то есть кольцу. То же самое произойдёт, если мы вырежем другой треугольник. Значит, существует гомеоморфизм этой окрестности, который «передвигает дырку». Построим его так, чтобы при нём граница окрестности была неподвижна. Тогда эта же биекция будет гомеоморфизмом всей поверхности с краем. Следовательно, не важно, какой именно треугольник вырезать.

В последнем доказательстве мы воспользовались утверждениями, что диск с любой дыркой гомеоморфен кольцу, и что если есть гомеоморфизм из диска в диск, то есть и гомеоморфизм, сохраняющий границу. Эти утверждения более фундаментальные, чем доказываемые теоремы и здесь останутся без доказательства.

Утверждение 6.3. *Связная сумма не зависит от того, из какой триангуляции вырезать треугольник.*

Доказательство. Пусть есть две триангуляции поверхности, из каждой вырезали треугольник. Докажем, что они гомеоморфны. Деформируем по лемме 4.2 одну из триангуляций, чтобы они пересекались по конечному числу точек, рассмотрим общее измельчение, существующее по лемме 4.1.

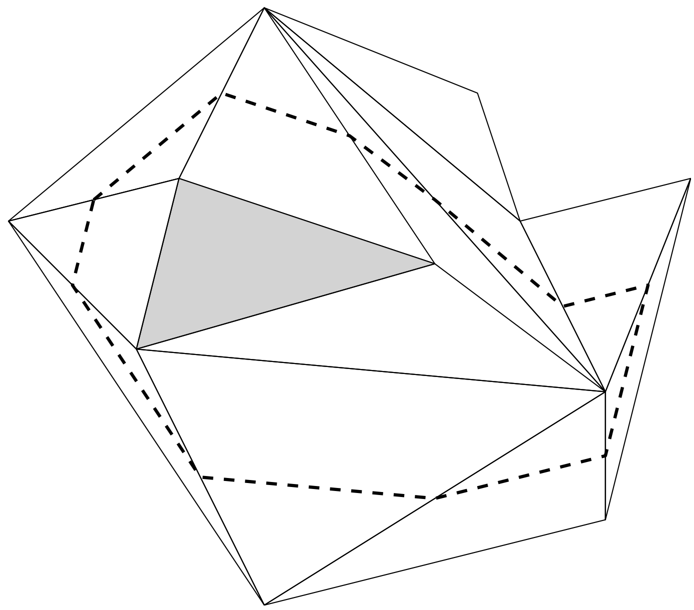


Рис. 6. Двигаем дырку

Тогда, так как в утверждении 6.2 мы научились передвигать треугольник по триангуляции, достаточно доказать, что поверхность без треугольника исходной триангуляции гомеоморфна поверхности без треугольника измельчения.

Для доказательства последнего удалим в измельчении треугольник, содержащийся в удалённом треугольнике исходной триангуляции. Тогда окрестность удалённого треугольника большей триангуляции гомеоморфна диску с дыркой при обоих способах вырезать треугольник. Значит, поверхность без треугольника измельчения гомеоморфна поверхности без треугольника исходной триангуляции, следовательно, не важно, из какой триангуляции вырезать треугольник.

Таким образом, мы доказали корректность определения связной суммы поверхностей. Докажем некоторые полезные свойства.

Лемма 6.1. *Связная сумма ассоциативна:* $(X\#Y)\#Z = Z\#(Y\#Z)$

Доказательство. Для того, чтобы построить $(X\#Y)\#Z$ необходимо вырезать из X и Y по треугольнику и отождествить периметры дырок, а затем вырезать треугольник из результата и Z и снова отождествить периметры дырок. Выберем при втором построении треугольник, который был в исходной триангуляции поверхности Y. Тогда в итоге получим поверхность Y, из которой вырезали два треугольника, периметры которых отождествили с X и Z соответственно.

При построении $X\#(Y\#Z)$ можно сделать то же: сначала вырезать по одномуь треугольнику из Y и Z и отождествить дырки, а затем из Y (уже в составе связной суммы с Z) и X и отождествить новые дырки.

Таким образом, мы получим идентичные конструкции, значит, и гомеоморфные поверхности.

Лемма 6.2. *Связная сумма коммутативна:* $X\#Y = Y\#X$

Доказательство. Для построения $X\#Y$ необходимо вырезать по одному треугольнику из X и Y и отождествить полученные дырки. Для построения $Y\#X$ необходимо сделать в точности то же самое. Значит, эти две поверхности гомеоморфны.

Теорема 6.1. *Связная сумма любой поверхности и сферы гомеоморфна изначальной поверхности.*

Доказательство. Вырежем из сферы открытый диск, оставшаяся поверхность будет гомеоморфна диску. Тогда при построении связной суммы, мы вырежем из поверхности диск и приклеим по его границе остаток сферы, то есть снова диск. А значит, получится поверхность, гомеоморфная исходной.

Теорема 6.2. *Связная сумма двух проективных плоскостей гомеоморфна бутылке Клейна.*

Доказательство. Если вырезать из проективной плоскости диск, получится лента Мёбиуса, а при склеивании двух лент Мёбиуса по границе, как мы уже доказали в §5.6, получается бутылка Клейна.

При помощи связной суммы можно получать бесконечное количество поверхностей, которые, как мы скоро докажем, будут попарно не гомеоморфны. Например, можно «сложить» произвольное натуральное число торов и получить «сферу с ручками», причём «ручек» у сферы будет столько же, сколько торов мы связно сложили.

7. Ориентируемость

Все изученные нами поверхности разделяются на две группы: те, из которых можно вырезать ленту Мёбиуса, и те, из которых нельзя. Например, из сферы вырезать ленту Мёбиуса нельзя, а из проективной плоскости можно.

Определение 7.1. Поверхность называется *неориентируемой,* если некоторая её часть гомеоморфна ленте Мёбиуса, и *ориентируемой* иначе.

Утверждение 7.1. *Ориентируемость — топологический инвариант.*

Доказательство. При гомеоморфизме лента Мёбиуса переходит в ленту Мёбиуса, а потому, если в какой-то поверхности была часть, гомеоморфная ленте Мёбиуса, то и в гомеоморфных ей поверхностях такая часть будет.

Лемма 7.1. *Поверхность ориентируемая тогда и только тогда, когда для всех треугольников её триангуляции можно вести циклический порядок обхода вершин так, чтобы для каждого ребра направление его прохода в треугольниках, которые к нему приклеены, было противоположным.*

Указанный способ ориентировать треугольники будем называть *правильным.* Сперва мы докажем вспомогательные утверждения.

Утверждение 7.2. *Треугольники пространства, гомеоморфного диску, можно ориентировать правильным образом.*

Доказательство утверждения 7.2. Переведём гомеоморфизмом пространство в диск, вложим диск в плоскость, и определим на плоскости направления «по часовой стрелке» и «против часовой стрелки». Тогда зададим на каждом треугольнике направление обхода против часовой стрелки. Такой способ ориентации треугольников будет правильным, ведь если какое-то ребро в двух треугольниках при обходе против часовой стрелки проходится в одном направлении, то оба треугольника должны лежать в одной полуплоскости относительно этого ребра, что невозможно.

Более того, при таком способе задать направления, обходя диск по границе против часовой стрелки, мы будем проходить каждое ребро в том же направлении, в котором оно проходится при обходе прилегающего к нему треугольника.

Утверждение 7.3. *Треугольники пространства, гомеоморфного сфере с двумя дырками, можно ориентировать правильным образом.*

Доказательство. Рассуждение аналогично доказательству утверждения 7.2, потому что сферу с двумя дырками тоже можно вложить в плоскость.

Утверждение 7.4. *Возможность правильным образом ориентировать треугольники пространства не зависит от триангуляции.*

Доказательство. Очевидно, что при деформациях триангуляции возможность правильно ориентировать треугольники не изменяется, поэтому, из лемм 4.2 и 4.1, достаточно доказать, что возможность ориентировать треугольники какой-то триангуляции равносильна возможности ориентировать треугольники её измельчения.

Действительно, если ориентировано измельчение, то для каждого треугольника большей триангуляции верно, что он является границей (некоторые рёбра которой объединены) некоторого диска, триангуляция которого ориентирована. Тогда, как мы показали в доказательстве утверждения 7.2, для такого треугольника существует обход, направления которого совпадают с направлениями прохода рёбер в обходе треугольников измельчения. Выбрав такой обход, получим правильную ориентацию большей триангуляции.[1]

Если же дана ориентация большей триангуляции, то для каждого её треугольника можно выбрать треугольник измельчения, тогда из того же утверждения для одного из способов правильно ориентировать внутренность треугольника на границе направления прохода будут совпадать с направление обхода большого треугольника. Ориентировав все треугольники измельчения внутри каждого большого треугольника таким образом, получим правильную ориентацию измельчения.

Утверждение 7.5. *Из диска нельзя вырезать ленту Мёбиуса.*

Доказательство утверждения 7.5. Как мы доказали в §5.3, граница ленты Мёбиуса гомеоморфна окружности. Однако из теоремы Жордана любой разрез, гомеоморфный окружности, делит диск (сферу с дыркой) на диск и диск с дыркой, то есть кольцо. Ни одна из этих частей не гомеоморфна ленте Мёбиуса: диск с дыркой и лента Мёбиуса не гомеморфны из числа компонент границы, а диск и лента Мёбиуса — из того, что любой отрезок от границы до границы делит диск на две части, но не любой такой отрезок делит ленту Мёбиуса.

Теперь можно доказать исходную лемму.

Доказательство леммы 7.1.

Пусть поверхность неориентируемая. Тогда, по определению, из неё можно вырезать ленту Мёбиуса. Из утверждения 7.5 внутри ленты Мёбиуса будет находиться какой-то отрезок ребра. Добавим на это ребро две вершины так, чтобы они обе лежали внутри ленты Мёбиуса, и соединим их с двумя вершинами треугольников, примыкающих к рассматриваемому ребру. Таким образом, мы получили новую триангуляцию, в которой есть ребро, полностью лежащее внутри ленты.

Проведём на ленте Мёбиуса разрез, при разрезании по которому образуется одна часть, гомеоморфная диску. Продеформируем ленту так, чтобы концы этого разреза попали в концы ребра, находящегося внутри ленты Мёбиуса, см. рис. 7. Тогда, разрезав по границе ленты Мёбиуса и этому ребру, мы получим прямоугольник. Назовём это ребро «разделяющим».

Теперь построим общее измельчение триангуляции и ленты Мёбиуса, повторив алгоритмы из доказательств лемм 4.2 и 4.1.

Ориентируем один из треугольников на ленте Мёбиуса. Тогда, если все треугольники можно правильно ориентировать, сделать это можно единственным способом, так как можно последовательно

[1] Под ориентацией триангуляции будем иметь ввиду ориентацию всех её треугольников

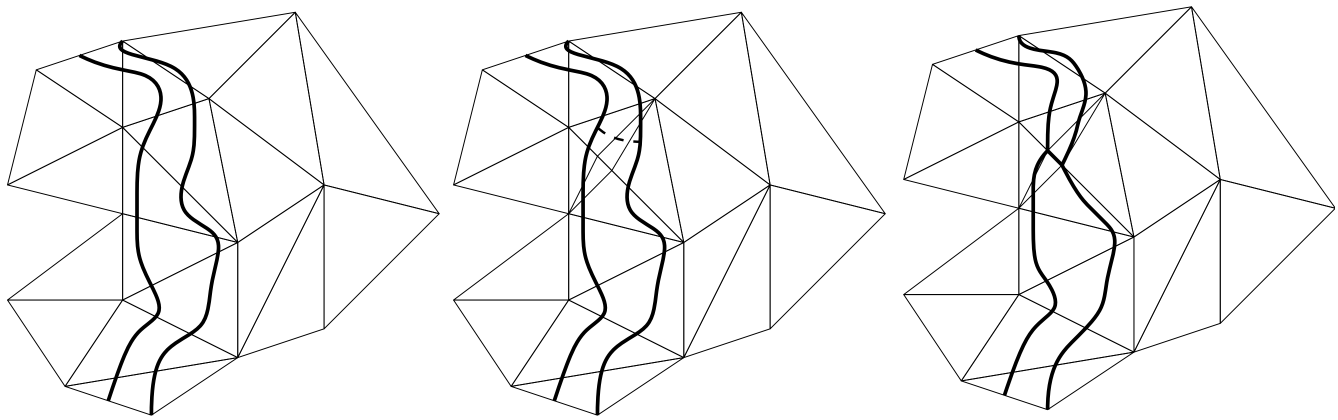


Рис. 7. Деформация ленты Мёбиуса

ориентировать по одному треугольнику, граничащему с уже ориентированным. При разрезании ленты Мёбиуса по разделяющему ребру получается пространство, гомеоморфное диску, следовательно, игнорируя разделяющее ребро, по утверждению 7.2, можно ориентировать все треугольники правильным образом, то есть так, чтобы на всех рёбрах внутри ленты Мёбиуса, кроме разделяющего, направления обхода были противоположны.

Как мы доказали в 7.2, при ориентации диска, его граничные рёбра обходятся в соответствующих треугольниках так же, как в одном из способов обойти его границу. Следовательно, это верно и для результата разрезания ленты Мёбиуса по разделяющему ребру.[2] Таким образом, при склеивании этого результата разрезания по разделяющему ребру обратно в ленту Мёбиуса, только при одном способе склеивания будет получаться пространство, треугольники которого можно ориентировать. При одном из способов склеивания получается цилиндр, при другом лента Мёбиуса. По утверждению 7.3, на цилиндре ориентировать треугольники можно, значит на ленте Мёбиуса нельзя. Противоречие, значит, если можно правильным образом задать направление обхода всех треугольников, то поверхность ориентируемая.

Пусть поверхность ориентируема. Произвольным образом зададим направление обхода одного из треугольников. Тогда направление обхода всех граничащих с ним по ребру треугольников определяются однозначно. Будем по очереди задавать направление обхода. Если в какой-то момент мы получили первое противоречие, то из поверхности можно вырезать ленту Мёбиуса. Действительно, рассмотрим развёртку всех уже ориентированных треугольников. Её внутренность — открытый диск. Причем, если снова объединить все треугольники в один многоугольник, сохраняя направление обхода (это возможно, потому что единственное противоречие на границе), получится многоугольник, некоторые пары сторон которого мы должно склеить, причём так, чтобы треугольники было невозможно ориентировать. Можно рассмотреть контур, проходящий вдоль всех рёбер (но не по ним), и совпадающим с границей только на той паре рёбер, на которой возникло противоречие. Тогда полученный контур будет делить поверхность на ленту Мёбиуса и ещё что-то, потому что, если бы он образовывал цилиндр, противоречия при попытке ориентировать треугольники не возникало бы. Следовательно, при склейке получится лента Мёбиуса, значит поверхность неориентируема. Противоречие. Значит, если поверхность ориентируема, то все треугольники можно правильным образом ориентировать.

Все поверхности разбиваются на две группы: ориентируемые и неориентируемые. Из известных примеров, сфера и тор — ориентируемые (соответствующие способы ориентировать треугольники несложно получить на триангуляциях из двух треугольников, которые мы использовали ранее), а

[2]Часто, говоря о разрезаниях, мы имеем в виду, что рёбра разреза «раздваиваются» остаются на обеих компонентах

проективная плоскость и бутылка Клейна — нет.

Утверждение 7.6. *Связная сумма двух ориентируемых поверхностей ориентируема.*

Доказательство. Введём ориентацию треугольников на каждой из двух поверхностей, тогда, после того, как мы вырезали по одному треугольнику, возможно, изменив ориентации всех треугольников одной поверхности на противоположные, при склейке по границе можно получить правильную ориентацию на всех треугольниках связной суммы.

Утверждение 7.7. *Связная сумма неориентируемой поверхности и какой-то ещё — неориентируема.*

Доказательство. Из первой поверхности можно вырезать ленту Мёбиуса, а если она проходила через вырезанный фрагмент, часть ленты, содержащую его можно заменить на окрестность некоторого пути, «обходящего» этот фрагмент.

Все пока что известные нам поверхности, кроме «тривиальной» сферы, получаются либо как связная сумма нескольких торов, либо как связная сумма нескольких проективных плоскостей.

Прежде чем доказывать, что это все возможные поверхности, проверим, что эти поверхности действительно разные. Ориентируемая поверхность не может быть гомеоморфна неориентирумой, убедимся, что между собой они разные. Для этого рассмотрим ещё один инвариант поверхности.

8. Эйлерова характеристика

8.1. Определение

Определение 8.1. Пусть есть произвольная поверхность. Посчитаем количество вершин V, рёбер E и треугольников F в его триангуляции. Тогда число $\chi = V - E + F$ называется *эйлеровой характеристикой* поверхности.

Теорема 8.1. *Эйлерова характеристика сферы равна* 2.

Доказательство. Докажем более общее утверждение: для любого плоского (нарисованного без самопересечений) связного графа на сфере $V - E + F = 2$, где V и E — количества вершин и рёбер соответственно, а F — количество граней, то есть частей, на которые граф делит сферу. Тогда это будет верно и для триангуляции, потому что триангуляция тоже является плоским графом.

Запустим индукцию по числу граней.

База: грань одна. Тогда в графе нет циклов, потому что если цикл есть, то рёбра цикла по теореме Жордана делят сферу на две части, а значит, граней хотя бы две. Следовательно, наш граф — это дерево. В любом дереве 1 грань, а количество рёбер на один меньше количества вершин[3], следовательно, для любого дерева $V - E + F = 2$.

Переход: пусть в графе есть больше одной грани. Выкинем одно произвольное ребро, разделяющее две грани, тогда количество граней уменьшится на один, и количество рёбер уменьшится на один, то есть значение рассматриваемого выражения не изменится. Связность графа не нарушится, потому что, если ребро является мостом (при его удалении граф распадается на две компоненты связности), оно не может разделять две грани. Действительно, из точки с одной стороны этого ребра можно дойти до точки с другой, обойдя вдоль одной из потенциальных компонент связности графа.

[3]Это можно доказать индукцией по числу рёбер. Если в дереве нет рёбер, то для него $V = 1,\ E = 0$ и вершин на одну меньше, чем рёбер. В дереве с рёбрами есть висячая вершина. Удалим висячую вершину вместе с исходящим из неё ребром. По предположению индукции в полученном графе рёбер на одну меньше, чем вершин, значит и в изначальном графе это верно.

По предположению индукции в полученном графе выражение равно двум, значит и в изначальном графе оно тоже равно двум.

Следовательно, для любого графа для сферы $V - E + F = 2$. Значит, на сфере $\chi = 2$.

Утверждение 8.1. *Эйлерова характеристика не зависит от триангуляции поверхности.*

Доказательство. Пусть есть две триангуляции поверхности. По лемме 4.2 одну из них можно пошевелить так, чтобы они пересекались по конечному числу точек. При этом $V-E+F$ не изменится. Тогда у двух полученных триангуляций по лемме 4.1 есть общее измельчение.

Научимся получать из триангуляции более крупную, сохраняя $V-E+F$ (см. рис. 8). Рассмотрим вершины и рёбра мелкой триангуляции, лежащие строго внутри треугольников, соответствующих треугольникам крупной. Если такие есть, рассмотрим внутренность одного треугольника, соответствующего треугольнику крупной триангуляции с рёбрами или вершинами внутри. Она гомеоморфна сфере без точки. Добавим эту точку, назвав её вершиной. Получим граф на сфере, в котором все рёбра с концами на границе большого треугольника станут рёбрами с концом в добавленной точке. По уже доказанному утверждению, для него $V-E+F = 2$. Обратно убирая добавленную точку, получим, что для вершин, рёбер и треугольников внутри данного треугольника выполняется равенство $V-E+F = 1$. То есть заменив всю внутренность треугольника на один треугольник, мы не изменим значение этого выражения. Сделаем так для всех треугольников, соответствующих треугольникам мелкой триангуляции, внутри которых есть вершины или рёбра. Таким образом, «лишние» вершины останутся только на сторонах треугольников, которые мы хотим получить. Будем последовательно удалять такие вершины. Количества вершин и рёбер будут уменьшаться на один, количество граней будет постоянно. Значит, значения выражения $V - E + F$ будет постоянным. В конце концов мы получим требуемую более крупную триангуляцию, не изменив значение эйлеровой характеристики.

Следовательно, $V-E+F$ для обеих триангуляций совпадает со значением этого выражения для рассмотренного измельчения.

Утверждение 8.2. *Две триангуляции гомеоморфных поверхностей имеют одно и то же значение выражения* $V - E + F$.

Доказательство. Действительно, если есть две гомеоморфные поверхности, можно рассмотреть образ рёбер и вершин триангуляции первой поверхности при гомеоморфизме и получить некоторую триангуляцию второй (здесь нам не важно, что полученные треугольники, и рёбра могут не являться геометрическими треугольниками и отрезками, это никак не влияет на вышеприведённые рассуждения). А значит, для этой триангуляции эйлерова характеристика совпадает с характеристикой другой триангуляции второй поверхности. А поскольку первая триангуляция с точки зрения соотношений «склеенности» между рёбрами, вершинами и треугольниками ничем не отличается от триангуляции первой поверхности, получаем, что эйлеровы характеристики гомеоморфных поверхностей совпадают. Значит, эйлерова характеристика — топологический инвариант поверхности.

8.2. Эйлерова характеристика некоторых поверхностей

Как мы уже доказали, эйлерова характеристика сферы равна 2. Попробуем найти эйлерову характеристику других известных нам поверхностей.

Утверждение 8.3. *Эйлерова характеристика тора равна* 0.

Доказательство. Рассмотрим триангуляцию тора, состоящую из восьми треугольников, склеенных аналогично схеме склейки сторон квадрата, рассмотренной выше. В ней четыре вершины (они пронумерованы на рис. 9), двенадцать рёбер и восемь треугольников. Значит, $\chi = V - E + F = 4 - 12 + 8 = 0$.

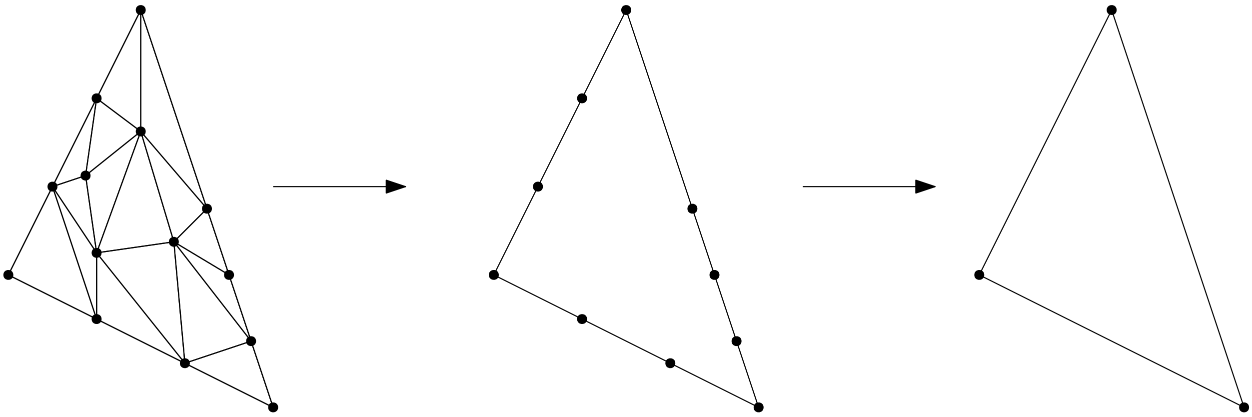


Рис. 8. Триангуляции

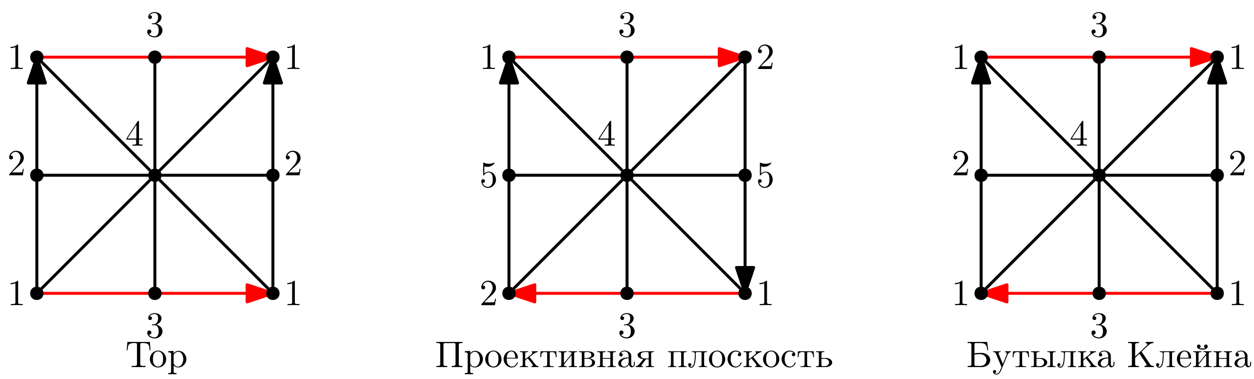


Рис. 9. Подсчёт эйлеровой характеристики

Утверждение 8.4. *Эйлерова характеристика проективной плоскости равна* 1.

Доказательство. Аналогично, в изображённой триангуляции проективной плоскости пять вершин, двенадцать рёбер и восемь треугольников. Значит, для проективной плоскости $\chi = 5-12+8 = 1$. А для бутылки Клейна $\chi = 4 - 12 + 8 = 0$, как и для тора.

Теорема 8.2. *Пусть* X *и* Y *— поверхности. Тогда* $\chi(X\#Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2$.

Доказательство. Воспользуемся определением связной суммы через триангуляции. Пусть в триангуляции поверхности X есть V_X вершин, E_X рёбер и F_X треугольников, а в поверхности Y есть V_Y, E_Y и F_Y вершин, рёбер и треугольников соответственно. Тогда $\chi(X) = V_X - E_X + F_X$ и $\chi(Y) = V_Y - E_Y + F_Y$. Рассмотрим связную сумму $X\#Y$. В ней $V = V_X + V_Y - 3$ вершин, так как три вершины двух поверхностей отождествляются и мы их посчитали дважды. Аналогично, рёбер в ней $E = E_X + E_Y - 3$, так как три ребра мы тоже склеили. А треугольников в ней $F = F_X + F_Y - 2$, так как два треугольника мы выкинули, а все остальные оставили без изменений. Таким образом, её эйлерова характеристика равна

$$\chi(X\#Y) = V - E + F = (V_X + V_Y - 3) - (E_X + E_Y - 3) + (F_X + F_Y - 2) =$$

$$= (V_X - E_X + F_X) + (X_V - E_Y + F_Y) - 2 = \chi(X) + \chi(Y) - 2,$$

что и требовалось доказать.

Результат теоремы согласуется с тем, что связная сумма любой поверхности со сферой эта изначальная поверхность, потому что $\chi(X\#S^2) = \chi(X) + \chi(S^2) - 2 = \chi(X) + 2 - 2 = \chi(X)$, и с тем, что связной суммой двух проективных плоскостей с эйлеровой характеристикой 1 является бутылка Клейна со значением $\chi = 0 = 1 + 1 - 2$. Более того, из этой теоремы следует, что связная сумма n торов имеет эйлерову характеристику $2 - 2n$ (доказать это можно по индукции). При разных n она принимает разные значения. Значит, бесконечное количество поверхностей, представляющих собой связную сумму торов, попарно не гомеоморфны. А связная сумма n проективных плоскостей имеет эйлерову характеристику $2 - n$. Значит, между собой они все тоже не гомеоморфны.

Теперь мы можем приступить к доказательству того, что любая поверхность принадлежит одной из этих двух серий.

9. Классификация поверхностей

Теорема 9.1 (о классификации поверхностей). *Любая ориентируемая поверхность гомеоморфна сфере или связной сумме нескольких торов, а любая неориентируемая — связной сумме нескольких проективных плоскостей.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы рассмотрим развёртку поверхности. «Разрежем» триангуляцию по некоторым рёбрам так, чтобы её можно было расположить на плоскости в виде многоугольника. Такой многоугольник называют фундаментальным многоугольником данной поверхности. Заметим, что у такого многоугольника всегда чётное число сторон. Пометим, какие рёбра и в каком направлении мы склеивали и изобразим развёртку в виде выпуклого многоугольника (или двух дуг, если стороны всего две). Такую процедуру мы уже делали для сферы, тора, бутылки Клейна и проективной плоскости, там фундаментальным многоугольником был квадрат (для сферы и проективной плоскости фундаментальным многоугольником может быть и двуугольник).

Сначала докажем теорему для ориентируемых поверхностей. Заметим, что если поверхность ориентируема, то направление склейки двух сторон может быть только одно, так как при противоположном будет образовываться лента Мёбиуса. Действовать будем индукцией по числу сторон

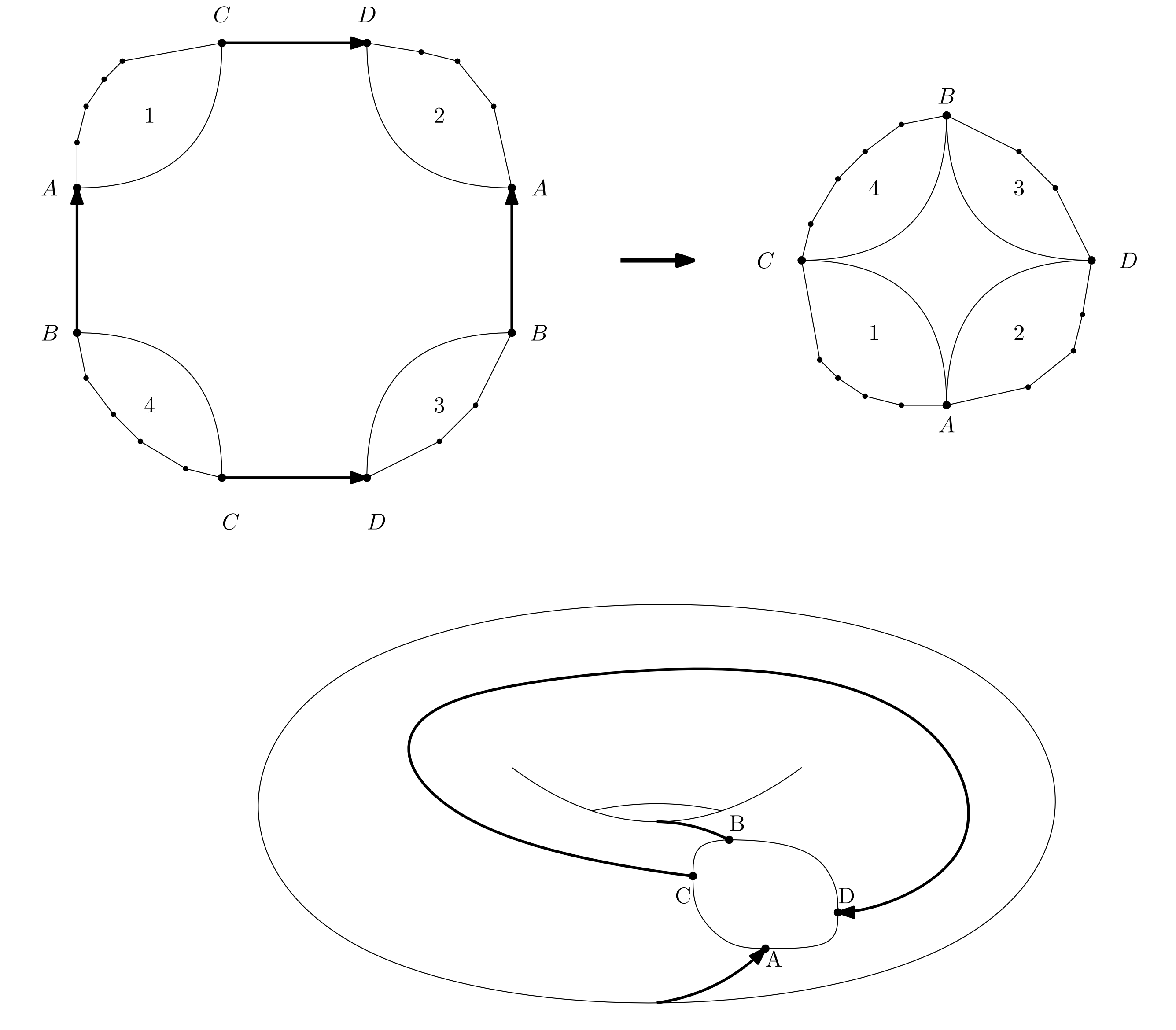


Рис. 10. Выделение из поверхности тора

фундаментального многоугольника. Если стороны две, то при их склейке действительно получается сфера. Если стороны четыре, то, как мы уже проверили, из ориентируемых поверхностей может получиться либо тор, либо сфера.

Пусть теперь есть больше четырёх сторон. Разобьём их на пары склеиваемых. Будем говорить, что две пары «зацеплены», если при обходе многоугольника стороны этих пар будут чередоваться (если забыть про все остальные стороны).

Если «зацепленных» пар нет, наша поверхность гомеоморфна сфере. Действительно, рассмотрим пару, в которой расстояние между сторонами (количество сторон на меньшей из двух образованных парой частей границы) наименьшее. Если между её сторонами есть ещё одна сторона, то её расстояние между рёбрами в её паре строго меньше рассматриваемого, потому что вторая сторона её пары тоже обязана находиться на этой же дуге. Таким образом, две ближайшие стороны, образующие пару имеют общий конец. А следовательно, их вторые концы тоже склеиваются и эту же поверхность можно получить из фундаментального многоугольника без этих двух сторон. Повторяя последнюю процедуру для полученных поверхностей, будем уменьшать количество пар сторон. При этом пере-

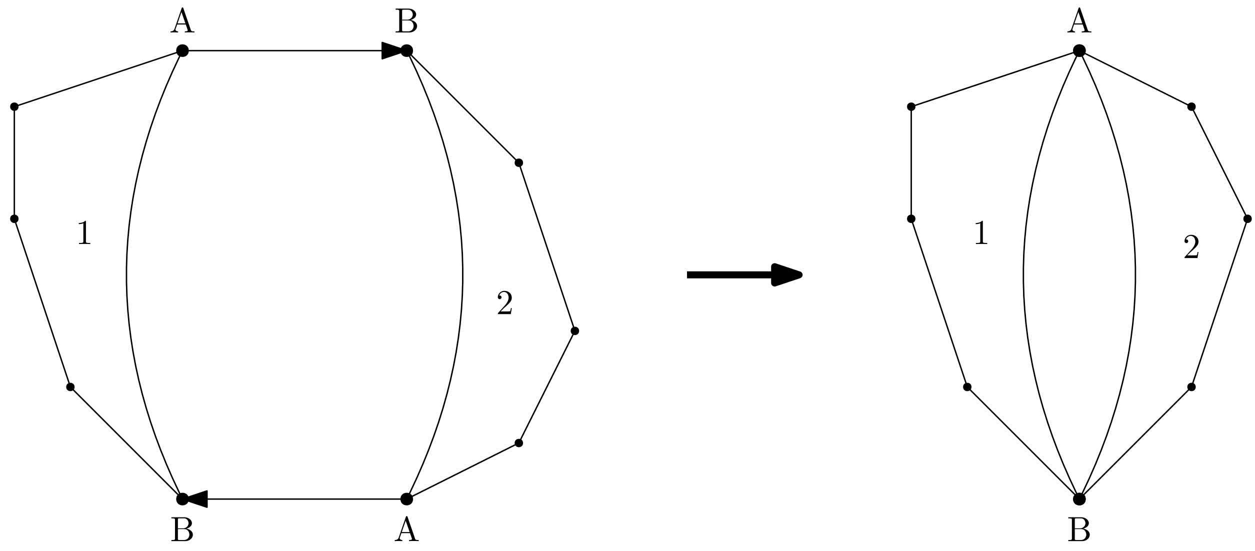


Рис. 11. Выделение из поверхности проективной плоскости

сечений пар не будет образовываться, поэтому процесс остановиться только когда останется ровно одна пара сторон. Тогда полученный фундаментальный многоугольник, как мы уже убедились ранее, соответствует сфере. Значит, и исходная поверхность была гомеоморфна сфере.

Если же есть две «зацепленных» пары, проведём четыре разреза, оставив четыре (возможно, меньше, если какие-то из рёбер этих двух пар соседние) части с оставшимися вершинами и ещё одну часть с этими двумя парами сторон. Последняя часть представляет собой тор с дыркой (поверхность с одной компонентой края, при заклеивании которой диском получается тор). Следую обозначениям рисунка 10, дырка идёт по вершинам $A-C-B-D-A$. Оставшиеся четыре части по разрезам приклеиваются к этой дырке. Заменим тор с дыркой на диск, получим фундаментальный многоугольник, в котором на четыре стороны меньше. Результатом связной суммы поверхности, соответствующей этому многоугольнику и тора будет изначальная поверхность. По предположению индукции, «уменьшенный» фундаментальный многоугольник соответствует связной сумме нескольких торов (или сфере). Значит, и изначальная поверхность гомеоморфна сфере или связной сумме нескольких торов, что и требовалось доказать.

Таким образом, утверждение теоремы доказано для всех ориентируемых поверхностей. Докажем его для неориентируемых.

Сначала докажем индукцией по числу сторон фундаментального многоугольника, что любая поверхность гомеоморфна связной сумме нескольких (возможно, нуля) торов и проективных плоскостей. База для двух и четырёх сторон верна и проверяется перебором всех возможных таких многоугольников (получатся сфера, тор, проективная плоскость и бутылка Клейна). Докажем переход, пусть количество сторон больше четырёх. Для ориентируемых поверхностей утверждение мы уже доказали. Если поверхность неориентируема, то в любом её фундаментальном многоугольнике есть пара сторон, склеиваемых так, чтобы образовывалась лента Мёбиуса. Лента Мёбиуса это проективная плоскость с дыркой. Наша поверхность — какие-то части, приклеенные к границе ленты Мёбиуса, то есть связная сумма проективной плоскости и того, что от поверхности останется при правильном выкидывании этих двух рёбер (одну из частей придётся перевернуть, чтобы склеивались соответствующие вершины, см. рис. 11). Таким образом, применяя предположение индукции, получаем, что эта поверхность — связная сумма нескольких проективных плоскостей и торов.

Утверждение 9.1. *Связная сумма тора и проективной плоскости гомеоморфна связной сумме трёх проективных плоскостей.*

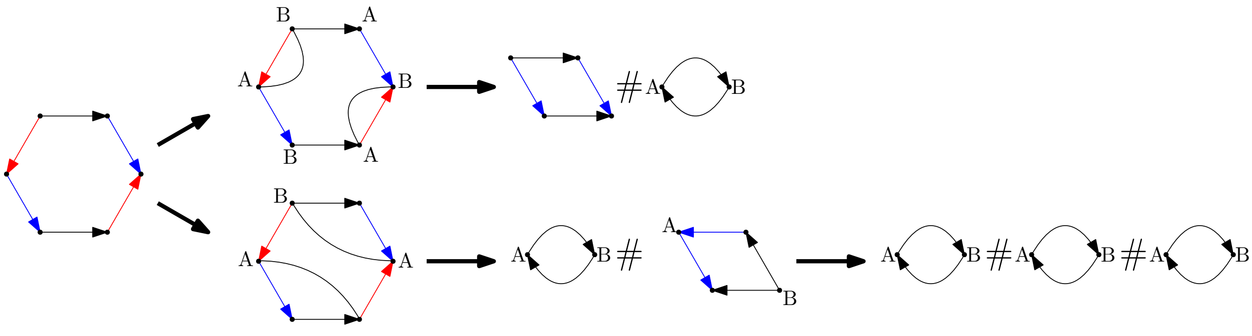


Рис. 12. Неоднозначность разложения

Доказательство. Для доказательства этого утверждения рассмотрим пример конкретного фундаментального многоугольника, из которого можно, как было показано выше, «вытащить» и тор, и проективную плоскость. На рисунке 12 показано, как из данного многоугольника при выделении тора остаётся одна проективная плоскость, а при выделении проективной плоскости остаётся многоугольник, который, как было доказано в §5.5, даёт бутылку Клейна, то есть связную сумму двух проективных плоскостей. Таким образом, связная сумма тора и проективной плоскости гомеоморфна связной сумме трёх проективных плоскостей, что и требовалось доказать.

Используя это утверждение нетрудно доказать, что любая неориентируемая поверхность представляется в виде суммы только проективных плоскостей: хотя бы одна проективная плоскость в связную сумму точно входит (иначе поверхность ориентируема), а если есть ещё хотя бы один тор, последовательно будем заменять каждый тор на две проективные плоскости, пользуясь тем, что он в сумме с этой проективной плоскостью даёт то же самое, что и бутылка Клейна. В итоге неориентируемая поверхность представится как связная сумма только проективных плоскостей.

Теорема о классификации поверхностей доказана.

Разложение ориентируемой поверхности в связную сумму торов (для сферы будем считать количество торов нулевым), а неориентируемой — в связную сумму проективных плоскостей назовём *каноническим.*

Теперь можно корректно определить понятие рода поверхности.

Определение 9.1. *Род g* поверхности X — это количество торов в её каноническом разложении, если она ориентируемая и количество проективных плоскостей, если она неориентируемая.

Например, род сферы 0, тора 1, проективной плоскости 1, бутылки Клейна 2. Если род поверхности X равен $g(X)$, а поверхности Y равен $g(Y)$, то род их связной суммы $g(X\#Y)$ равен $g(X)+g(Y)$, если обе поверхности ориентируемые или обе неориентируемые, $g(X)+2g(Y)$, если X неориентируемая, а Y — ориентируемая и $2g(X)+g(Y)$ иначе.

В новых терминах, если поверхность X ориентируемая, то $\chi(X)=2-2\cdot g(X)$ и $g(X)=\frac{2-\chi(X)}{2}$, а если неориентируемая, то $\chi(X)=2-g(X)$ и $g(X)=2-\chi(X)$.

Как мы доказали выше, край любой поверхности с краем гомеоморфен объединению окружности. Будем называть *родом и ориентируемостью поверхности с краем* соответственно род и ориентируемость поверхности, полученной при заклеивании всех дырок поверхности дисками. Тогда, например, диск — ориентируемая поверхность с краем рода 0, тор с дыркой — ориентируемая рода 1, а лента Мёбиуса — неориентируемая рода 1.

Понятие эйлеровой характеристики можно распространить и на поверхности с краем (да и на вообще любые триангулированные пространства). Заметим, что если есть поверхность с краем, то, как мы уже доказали, её край представляет собой объединение окружностей. А значит, каждую такую дырку можно заклеить диском. Эйлерова характеристика диска равна единице, а поскольку характеристика границы диска, то есть окружности, равна нулю, выражение $V - E + F$ для неграничных вершин, рёбер и треугольников диска тоже равно единице. Значит, при заклеивании одной дырки в поверхности с краем, эйлерова характеристика увеличивается на один. Значит, эйлерова характеристика ориентируемой поверхности рода g с n дырками — $\chi = 2 - 2g - n$, так как прибавив n раз единицу, мы должны получить характеристику поверхности рода g. Аналогично, для неориентируемой поверхности с n дырками, $\chi = 2 - g - n$.

поверхность (поверхность с краем)	ориентируемость	род	эйлерова характеристика
сфера	+	0	2
тор	+	1	0
связная сумма двух торов	+	2	−2
проективная плоскость	−	1	1
бутылка Клейна	−	2	0
связная сумма тора и проективной плоскости	−	3	−1
диск	+	0	1
цилиндр	+	0	0
лента Мёбиуса	−	1	0

10. Режем ориентируемые поверхности

В этом разделе мы попробуем понять, что произойдёт с ориентируемой поверхностью, если разрезать её по замкнутому пути (без самопересечений). Такой пусть гомеоморфен окружности, поэтому при разрезании по нему в полученных поверхностях (одной или двух) возникнет две дырки в совокупности. Больше, чем на две части поверхность распасться не может, потому что в каждой из частей должен быть край, но образуется не более, чем две компоненты края.

Если поверхность X при разрезании по некоторому замкнутому несамопересекающемуся пути распалась на две поверхности с краем X_1 и X_2, то при заклеивании двух дырок в этих поверхностях с краем, связной суммой полученных поверхностей будет исходная поверхность X. Действительно, если вырезать эти самые дырки и склеить поверхности по их границе, получится исходная поверхность. Следовательно, $g(X) = g(X_1) + g(X_2)$.

Если же поверхность X при разрезании по рассматриваемому пути не распалась на две поверхности, мы получили какую-то поверхность с краем.

Поверхность X была ориентируемой, поэтому окрестность разреза была гомеоморфна цилиндру, и мы получили поверхность с двумя дырками. Выясним род этой поверхности, используя эйлерову характеристику. Для этого триангулируем исходную поверхность так, чтобы границей разреза был цикл из рёбер и вершин триангуляции. Пусть для неё $\chi = V - E + F$, а её род равен $g = 1 - \frac{\chi}{2}$. Тогда при разрезании мы удваиваем количество рёбер и вершин, которые были на разрезе. Но при этом не меняется выражение $V - E + F$, потому что количества рёбер и вершин в него входят с разным знаком, а количество рёбер в замкнутом цикле совпадает с количеством вершин. Чтобы узнать род полученной поверхности, заклеим две дырки открытыми дисками и получим поверхность без края. При заклеивании одной дырки значение $V - E + F$ увеличивается на 1, следовательно, эйлерова характеристика полученной поверхности без края имеет значение $\chi' = V - E + F + 2 = \chi + 2$, а род равен $g' = 1 - \frac{\chi'}{2} = 1 - \frac{\chi+2}{2} = \frac{\chi}{2} = g - 1$. Таким образом, род поверхности уменьшился на один.

11. Другое определение рода

Задача 1. Пусть на поверхности X есть несколько непересекающихся (и не самопересекающихся) замкнутых кривых, которые не делят её на части. Как оценить их максимальное количество?

Решение. Сначала решим задачу для ориентируемых поверхностей. Пусть мы провели максимальное возможное число n таких кривых, то есть больше провести нельзя. Тогда, разрезав поверхность по этим кривым, мы получим сферу с дырками. Действительно, заклеив дырки, мы можем получить только поверхность, на которой нельзя провести замкнутую кривую, не делящую её на части (иначе кривая могла бы «обойти» дырки и мы получили бы ещё одну такую кривую на изначальной поверхности). Если при заклеивании поверхность получилась неориентируемой, то в ней можно выделить ленту Мёбиуса, а на ней провести замкнутую кривую, которая не поделит её на части — при разрезании ленты Мёбиуса посередине получается цилиндр. Если же получилась ориентируемая поверхность рода хотя бы один, то можно представить поверхность как связную сумму торов, в которой вырезали несколько дырок, провести кривую «вокруг ручки» одного из торов и получить ещё одну требуемую кривую. На сфере же не существует ни одной такой кривой по теореме Жордана.

Таким образом, поверхность, которую мы получим, разрезав исходную по кривым это сфера с дырками. Причём количество дырок в ней равно $2n$, так как каждый разрез добавлял по две компоненты границы, гомеоморфные окружности, потому что достаточно малая окрестность разреза гомеоморфна цилиндру (лента Мёбиуса невозможна, потому что поверхность ориентируемая).

Триангулируем изначальную поверхность так, чтобы все проведённые кривые являлись циклами из рёбер. Пусть её эйлерова характеристика — χ. Тогда мы получим некоторую триангуляцию и для сферы с дырками.

Как мы уже выяснили, эйлерова характеристика такой поверхности с краем равна $V - E + F = 2 - 2n$, потому что дырок $2n$, а род сферы это 0.

С другой стороны, при подсчёте Эйлеровой характеристики изначальной поверхности мы насчитали бы столько же треугольников, вершин и рёбер, не лежащих на проведённых кривых. В вершины и рёбра, лежащие на разрезах мы посчитали два раза вместо двух. Однако на каждом разрезе количество рёбер равно количеству вершин, поэтому вклад каждого разреза в изменение $V - E + F$ нулевой, потому что количества вершин и рёбер берутся с разными знаками. Значит, эйлерова характеристика изначальной поверхности тоже равна $2 - 2n$, то есть $n = \frac{2-\chi}{2}$. Значит, если поверхность ориентируемая, n — это её род.

Наглядно, на поверхности рода n, то есть сфере с n ручками можно провести n кривых вокруг каждой из ручек. Они не поделят поверхность на части.

Таким образом, мы доказали, что для ориентируемой поверхности род равен наибольшему числу непересекающихся кривых, расположенных на поверхности, которые не делят её на части.

Для неориентируемых поверхностей доказательство результат будем таким же: наибольшее число кривых — неориентируемый род g поверхности. Пример очевиден: выделим связную сумму g проективных плоскостей, в каждой из них есть лента Мёбиуса, которую можно разрезать вдоль замкнутой кривой, не разделив поверхность на части. Оценка же доказывается схоже с доказательством для ориентируемых поверхностей. Отличие состоит в том, что на неориентируемой поверхности малая окрестность кривой может быть гомеоморфна как цилиндру, так и ленте Мёбиуса, а значит, при каждом разрезе может образовываться либо 2 дырки, либо 1 дырка. Значит, после n разрезов образуется от n до $2n$ дырок и, согласно приведённым выше утверждениям, $2 - 2n \leqslant \chi \leqslant 2 - n$. Подставляя $\chi = 2 - g$ для неориентируемой поверхности, имеем $2 - 2n \leqslant 2 - g \leqslant 2 - n \Leftrightarrow n \leqslant g \leqslant 2n \Rightarrow n \leqslant g$. То есть, число таких кривых не превосходит род поверхности. Пример на количество, равное роду мы уже построили.

Таким образом, можно сформулировать другое определение рода поверхности, равносильность которого предыдущему мы только что доказали.

Определение 11.1. *Род поверхности* — это наибольшее число непересекающихся несамопересекающихся замкнутых кривых на поверхности, не делящих её на части.

Из доказательства видно, что на ориентируемых поверхностей каждую такую кривую можно проводить любым возможным образом, от этого максимальное их количество не уменьшится, а на неориентируемой для достижения максимального количества необходимо проводить кривые так, чтобы их окрестность была гомеоморфна ленте Мёбиуса, а не диску. Например, если на связной сумме тора и проективной плоскости провести первую кривую «вокруг» ручки тора, провести ещё две кривые так не получится.

Благодарности

Автор выражает признательность Андрею Рябичеву за научные консультации, ценные советы по созданию текста и помощь в его редактировании.

Щербаков Константин,
ученик 9 Б класса
ГБОУ Школа № 179 г. Москвы.

Погружения многообразий

А. Рябичев

Этот текст основан на прочитанном мною докладе на конференции “Dark geometry fest”, посвящённой геометрическим методам и их приложениям, 17 июля 2022, см. [1]. Мы будем двигаться в направлении теоремы Смейла-Хирша, а для этого разберём самый простой её частный случай — теорему Уитни-Грауштейна о гладких кривых на плоскости.

Текст написан доступно и местами неформально, он рассчитан в первую очередь на людей, интересующихся математикой, но пока не изучивших её достаточно глубоко.

1. Вместо предисловия: как выучить топологию

Основная цель данной статьи — продемонстрировать читателю один из разделов современной математики, называемый *дифференциальной топологией* (который не так широко известен, как, например, теория множеств или классический анализ). В нём гибкие топологические методы применяются к многообразиям и отображениям между ними. Что это такое — об этом речь пойдёт далее. Но чтобы не загонять себя в тупик абстрактных определений, мы начнём со вполне наглядного результата (и попутно разберём все определения, нужные, чтобы его сформулировать и доказать).

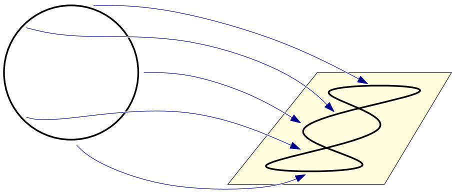
Тем, кто сильно загорелся выучить топологию и уже жаждет выяснить путь к ней, я рекомендую для этого книги Хатчера [6] и Фоменко-Фукса [5]; в них похожий материал изложен в немного разной последовательности и существенно разном стиле. Чтобы углубиться в дифференциальные методы, полезен учебник Хирша [7]. Для плотного изучения буквально предмета статьи (и последующих широко обобщающих его методов) я могу порекомендовать книги Громова [2] и Мишачёва-Элиашберга [3] — они, опять же, написаны в совершенно разном стиле, и первая далеко покрывает содержание второй.

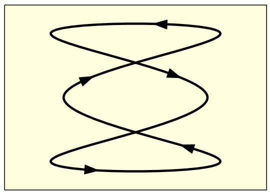
С моей точки зрения, однако, главное в изучении математики — вовсе не чтение большого количества хорошо подобранных книжек и статей, а в первую очередь — самостоятельное решение задач и их сдача преподавателю. В этом желающим может помочь, например, Независимый московский университет. И функция эта не может быть реализована нашей статьёй, цель которой — возвращаясь к началу, — лишь обозначить направление исследования.

2. Кривые на плоскости

Определение 1. *Замкнутой кривой на плоскости* называется непрерывное отображение $\alpha : S^1 \to \mathbb{R}^2$.

Здесь S^1 обозначает окружность, $\mathbb{R}^2$ — плоскость. Под *отображением* из окружности в плоскость мы подразумеваем любое правило (соответствие), при котором у каждой точки x на окружности есть ровно один образ $\alpha(x)$ на плоскости. Образы разных точек окружности могут совпадать на плоскости, это не запрещено.





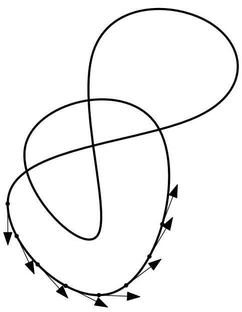
Непрерывность нашего отображения проще воспринимать умозрительно, так что *близкие точки переходят в близкие*; исчерпывающая формализация этого понятия чересчур трудоёмка и требует отдельной большой работы, выходящей далеко за рамки статьи.

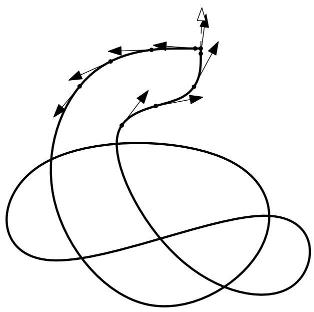
Чтобы задать кривую в тексте, мы часто будем рисовать лишь множество точек на плоскости, которым что-либо соответствует (образ отображения). Хотя, формально, соответствие между множеством точек на окружности и нарисованным множеством несёт гораздо больше информации — о том, какая именно точка куда перешла. Как мы увидим впоследствии, почти всей этой информацией мы для наших целей можем пренебречь. Почти всей — за исключением "направления обхода" кривой на плоскости, по мере того как точка на окружности бежит в положительном направлении (против часовой стрелки).

3. Гладкие кривые

Определение 2. Мы будем называть кривую $\alpha : S^1 \to \mathbb{R}^2$ *гладкой,* если её вектор скорости $\dot\alpha$ в каждой точке $x \in S^1$ ненулевой и $\dot\alpha$ непрерывно зависит от x.

На рисунке ниже кривая, изображённая слева, является гладкой, а кривая справа — нет, поскольку в "точке излома" у неё нельзя определить вектор скорости (производную), чтобы он был ненулевым.[1]

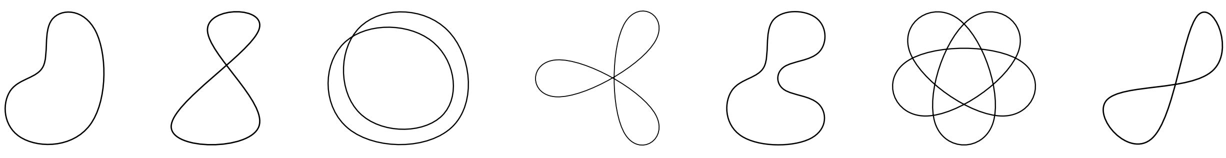




Другими словами, $\dot\alpha$ задаёт непрерывное отображение $S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Действительно, вектор скорости $\dot\alpha$ может принимать любые значения на плоскости, кроме начала координат $(0,0)$.

Определив новый объект, естественно попытаться решить задачу о классификации:

Вопрос 1. Как описать все гладкие замкнутые кривые на плоскости?



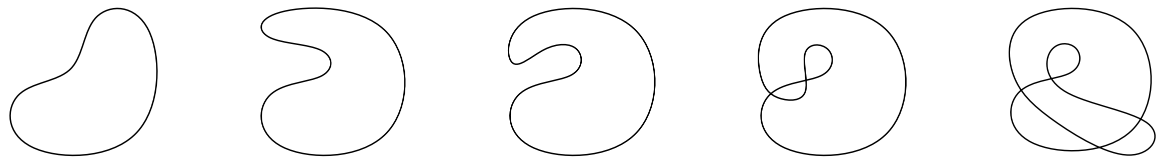
[1] Вообще говоря, *гладкие кривые*, по общепринятому определению гладкости, должны были бы являться лишь *непрерывно-дифференцируемыми*, а кривые с ненулевым вектором скорости правильнее было бы называть *погруженными кривыми.* Используемая нами терминология иногда применяется именно по отношению к кривым, к тому же она в целом выглядит более лаконичной и менее пугающей.

Понятно, что всего таких кривых бесконечно много — более точно, континуальное множество. Было бы удобнее решать задачу о классификации, считая некоторые кривые “эквивалентными” — но какие именно?

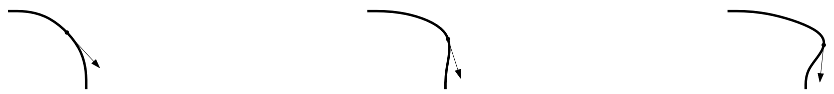
Например, пятая кривая на рисунке выше — это всего лишь немного сплющенная первая. А вторая похожа на повёрнутую и растянутую последнюю. Это наводит на мысль о некоторых деформациях, как, собственно, и принято в топологии…

4. Деформация гладких кривых

Гладкую кривую можно деформировать так, чтобы она оставалась гладкой в любой момент времени.



От рассматриваемых деформаций мы дополнительно требуем, чтобы вектор скорости в каждой точке зависел от времени непрерывно (поскольку это тоже важная часть структуры гладкой кривой, а все преобразования должны быть непрерывными).



Деформация, удовлетворяющая этим двум условиям, называется *регулярной гомотопией.* Про кривые, которые можно получить друг из друга с её помощью, говорят, что они *регулярно гомотопны.*

Таким образом, наше определение замкнуто на сущности гладкой кривой и не использует никаких сторонних понятий, поэтому оно довольно естественно. Важно отметить при этом, что в процессе регулярной гомотопии кривая может не только растягиваться и сжиматься, но ещё на ней могут появляться и исчезать самопересечения (как в примере выше).

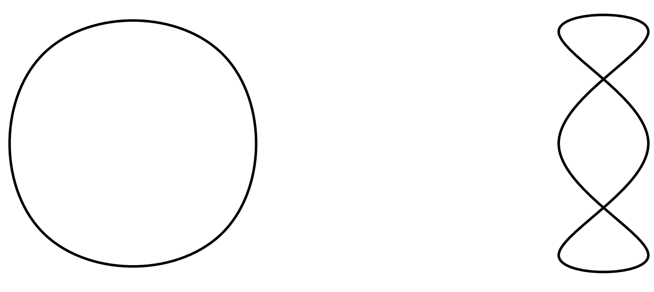
Более формально, регулярная гомотопия это гладкое отображение $S^1 \times [0;1] \to \mathbb{R}^2$. Следующее утверждение несложно доказать, пользуясь любой из версий определения регулярной гомотопии.

Лемма 1. *Регулярная гомотопность является отношением эквивалентности.*

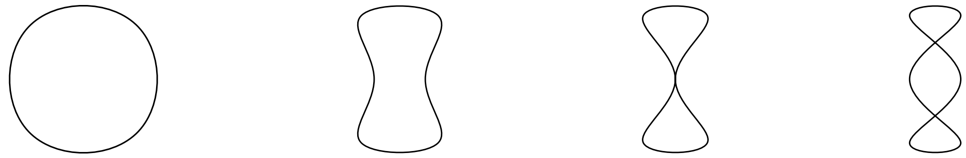
Таким образом, все кривые делятся на непересекающиеся *классы эквивалентности*, которые в дальнейшем и будут представлять для нас интерес.

5. Примеры регулярных гомотопий

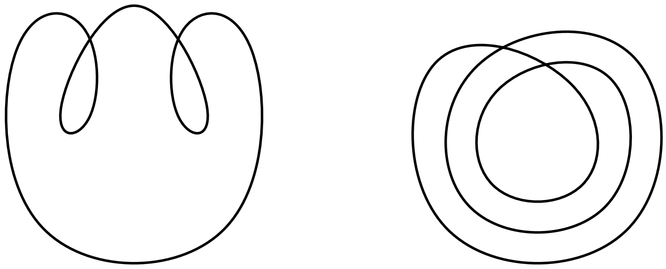
Возьмём такие две кривые α_0 и α_1:



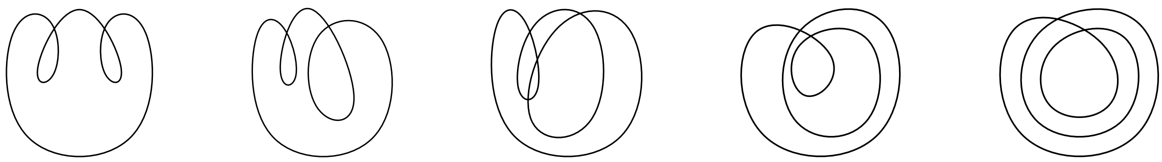
Существует ли между ними регулярная гомотопия? Немного подумав, мы получаем утвердительный ответ, построив регулярную гомотопию явно:



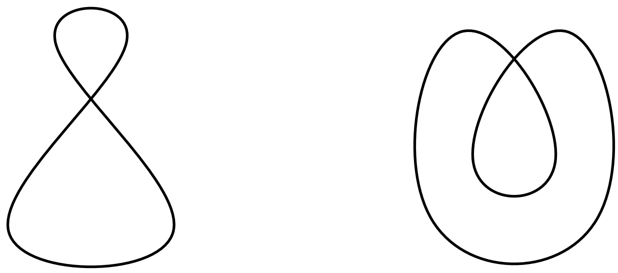
А для таких двух кривых?



Здесь ситуация уже кажется запутанной. Тем не менее, мы всё же можем построить желаемую регулярную гомотопию и это не так сложно:



А для таких?



Попытки построить регулярную гомотопию так же легко, как в предыдущие разы, встречают некое препятствие: в какой-то момент в процессе деформации кривая перестаёт быть гладкой. Кажется, что ответ — “нет”, но как это доказать? Ведь то, что у нас не получается предъявить регулярную гомотопию, вовсе не означает, что её не существует — она может быть устроена довольно сложно и т. п.

Чтобы решать задачи подобного сорта, в топологии (как и во многих других областях) используется один и тот же важный математический приём.

6. Общеобразовательное отступление. Инварианты

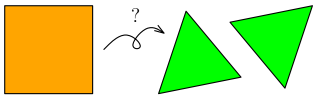
Чтобы доказать, что что-то нельзя сделать, часто используют *инварианты*.

Инвариант — некая величина, не меняющаяся в рамках данной задачи. Зачастую нахождение правильного инварианта равносильно решению задачи. Для тех читателей, кто мало сталкивался с инвариантами ранее, мы разберём несколько почти тривиальных примеров.

Задача 1. В ряд стоят 100 фишек. Разрешено менять местами фишки, стоящие через одну. Можно ли переставить фишки в обратном порядке?

Ответ: *нет, нельзя.* Первая фишка может оказаться только на нечётных позициях. Однако в конце ей надо оказаться на сотой позиции, т. е. на чётной. *Чётность позиции первой фишки — инвариант.*

Задача 2. Можно ли квадрат со стороной 1 разрезать на части и сложить из них два правильных треугольника со стороной 1?



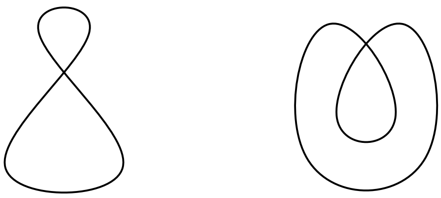
Ответ: *нет, нельзя.* Площадь квадрата больше суммарной площади двух треугольников (докажите это самостоятельно!). *Площадь — инвариант.*

Задача 3. Маша разломила шоколадку на 8 кусков. Затем она разломила один из кусков еще на 8, и т. д. Могло ли у неё в какой-то момент получиться ровно 179 кусков?

Ответ: *нет, не могло.* Каждый раз число кусков даёт остаток 1 при делении на 7, в то время как 179 даёт остаток 4. *Остаток* $\pmod 7$ — *инвариант.*

7. Инварианты регулярной гомотопии гладких кривых

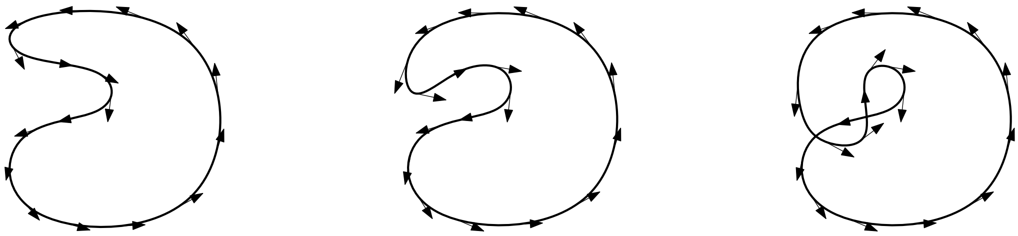
Какой же инвариант "различает" эти две кривые?



Ответ: *число оборотов вектора скорости.* Назовём это число $r(\alpha)$. Чтобы его вычислить, нужно, двигаясь по кривой, отмечать направление вектора скорости, а затем сосчитать, какое суммарное число оборотов (с учётом знака) у нас получилось. Обороты против часовой стрелки считаются со знаком "+", а по часовой — со знаком "−".

Действительно, у первой кривой это число равно 0, а у второй оно равно 2. Это можно посчитать вручную, внимательно проследив за вектором скорости при обходе кривой.

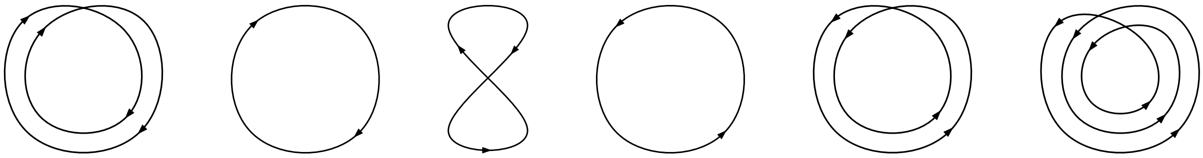
Но как же доказать, что функция $r(\,\cdot\,)$ является инвариантом? Для этого используется следующий аргумент: в процессе регулярной гомотопии кривой α число $r(\alpha)$ тоже должно *меняться непрерывно.*



Но в каждый момент времени $r(\alpha)$ является целым. Поэтому оно вообще не может меняться! Строгое доказательство можно найти, например, в [6], §1.1.

8. Попарно не регулярно гомотопные кривые

Для кривой α число $r(\alpha)$ может принимает целое значение. Легко придумать серию кривых, значения функции $r(\cdot)$ на которых — в точности все целые числа. Нужно просто вращать вектор скорости разное количество раз, например так:



Таким образом, мы получили бесконечную серию попарно не регулярно гомотопных кривых. Назовём их соответственно $\ldots,\ \gamma_{-2},\ \gamma_{-1},\ \gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ldots$, по числу оборотов вектора скорости, т. е. так что $r(\gamma_m) = m$.

Кстати, если пройти кривую γ_0 в противоположную сторону, получится кривая γ_0', вообще говоря, не входящая в наш набор.

Задача 4. *Кривые γ_0 и γ_0' на рисунке выше регулярно гомотопны.*

Далее для краткости мы будем считать регулярно гомотопные кривые *одинаковыми* и обращаться к ним как к одному и тому же объекту. С этой точки зрения, для кривой γ_0 не существенно направление обхода — в то время как для любой другой γ_m, при $m \neq 0$, изменение направления обхода превращает её в *другую* кривую γ_{-m}.

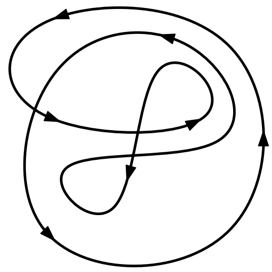
9. Классификация кривых с точностью до регулярной гомотопии

Теперь естественно задаться вопросом: существуют ли кривые (с точностью до регулярной гомотопии), не входящие в серию $\ldots,\ \gamma_{-2},\ \gamma_{-1},\ \gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ldots$? Других кривых бы не существовало в случае выполнения следующего предположения:

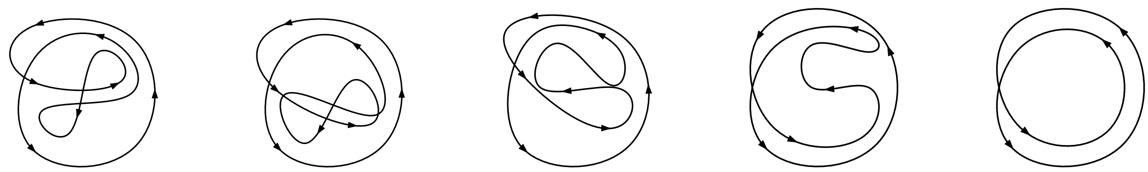
Гипотеза 1. *Кривые с одинаковым числом $r(\cdot)$ регулярно гомотопны.*

Такое предположение согласуется с предыдущим упражнением про кривые γ_0 и γ_0'. Действительно, мы видим, что $r(\gamma_0) = r(\gamma_0') = 0$, а ещё γ_0 и γ_0' регулярно гомотопны.

Проверим нашу гипотезу для следующей кривой α



Для неё число $r(\alpha)$ равно 2. Значит, она должна быть регулярно гомотопна кривой γ_2 из перечня выше. И действительно, регулярную гомотопию можно построить явно:



10. Доказательство Гипотезы о классификации

Как можно доказать Гипотезу? Естественная идея — привести все кривые к неким каноническим видам!

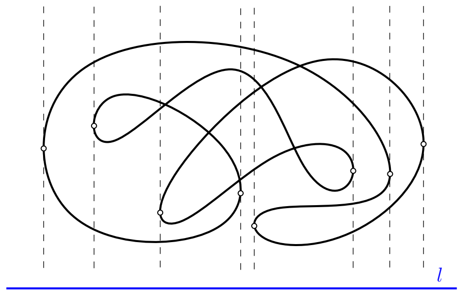
А именно, если дана кривая α, можно попробовать её максимально упростить, в надежде что получится γ_k для какого-нибудь k.

Доказательство Гипотезы. Шаг 1

Возьмём кривую α.

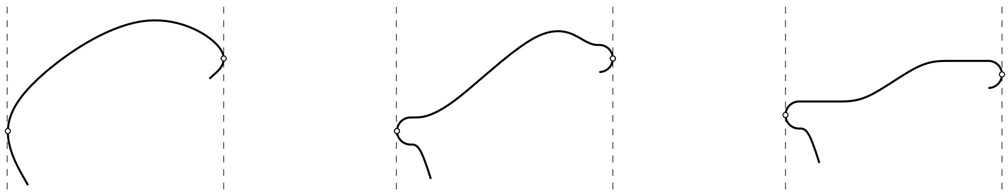
Выберем прямую l, такую что α имеет лишь конечное число касательных, перпендикулярных l. Если вектор скорости $\dot{\alpha}$ всё время поворачивается, то подойдёт любая прямая.[2]

[2]В общем случае, такая прямая l существует по лемме Сарда. Однако, чтобы применить лемму Сарда к $\dot{\alpha}$, надо потребовать для α гладкости порядка 2. С другой стороны, в геометрии часто принято считать все отображения бесконечно гладкими, поэтому мы не должны чувствовать себя обременёнными таким дополнительным предположением.

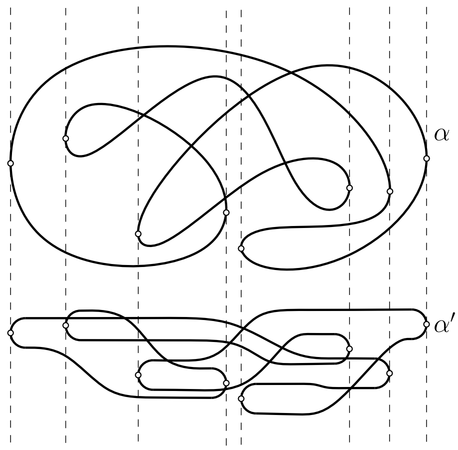


Доказательство Гипотезы. Шаг 2

Далее “сплюснем” кривую α так, чтобы она состояла из участков, “почти параллельных l”, и “разворотов”.



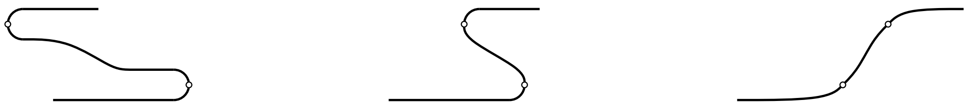
Назовём полученную кривую α'. Фактически, α' описывается последовательностью разворотов, их направлением и их “координатой” по оси l, все остальные данные легко меняются под действием регулярной гомотопии.



Доказательство Гипотезы. Шаг 3

Заметим, что по ходу движения можно различить развороты “направо” и “налево”, в том смысле как если бы мы сами ехали по кривой. При этом развороты каждого из этих видов могут выглядеть двумя способами. На рисунке ниже — пара разворотов “направо” и пара разворотов “налево”.

Теперь будем деформировать α' следующим образом. Если подряд встречаются два разворота в противоположных направлениях, то их можно *сократить*.

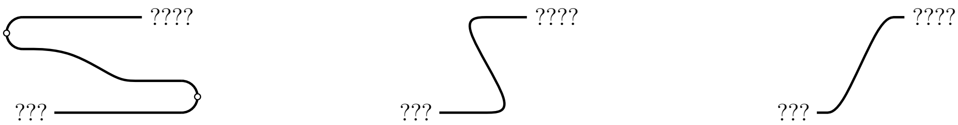


Доказательство Гипотезы. Шаг 3. Уточнение

Более точно, пусть нам встретилось два разворота в противоположных направлениях. Перед первым разворотом и после второго есть ещё какие-то фрагменты кривой.

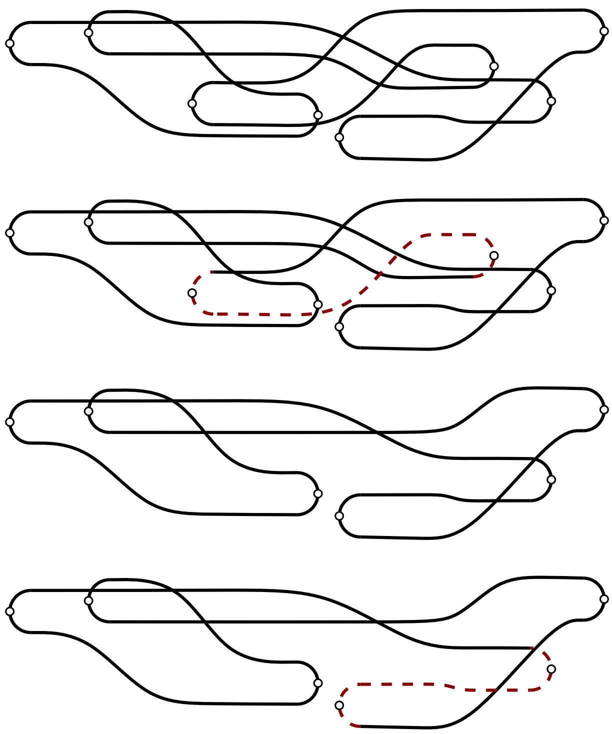
Если требуется, “потянем” за концы до первого разворота и после второго разворота так, чтобы в итоге эти концы накладывались при проекции на l. При этом на фрагментах кривой за концами все развороты остаются неизменными и лишь “раздвигаются” в противоположные стороны, новых разворотов не возникает.

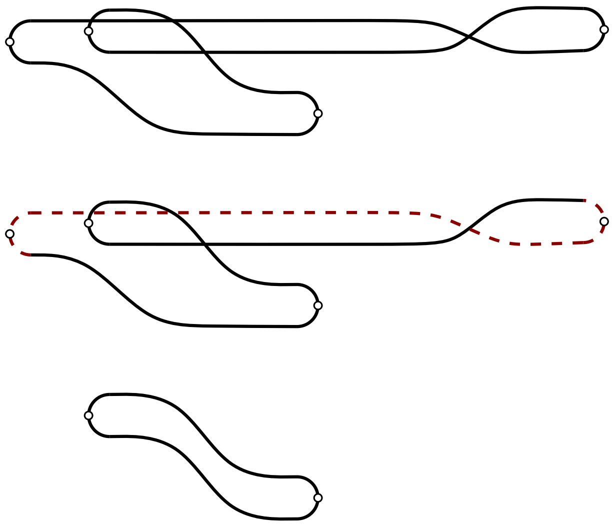
С полученным участком кривой можно проделать процедуру *сокращения разворотов* (хотя с исходным, возможно, было нельзя).



Доказательство Гипотезы. Шаг 4. Пример

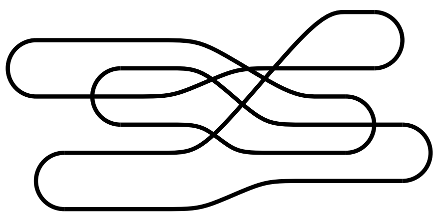
Понятно, что процедуру *сокращения разворотов* можно применять, пока не останутся только развороты в одном направлении. Попробуем сделать это с нашей кривой α':



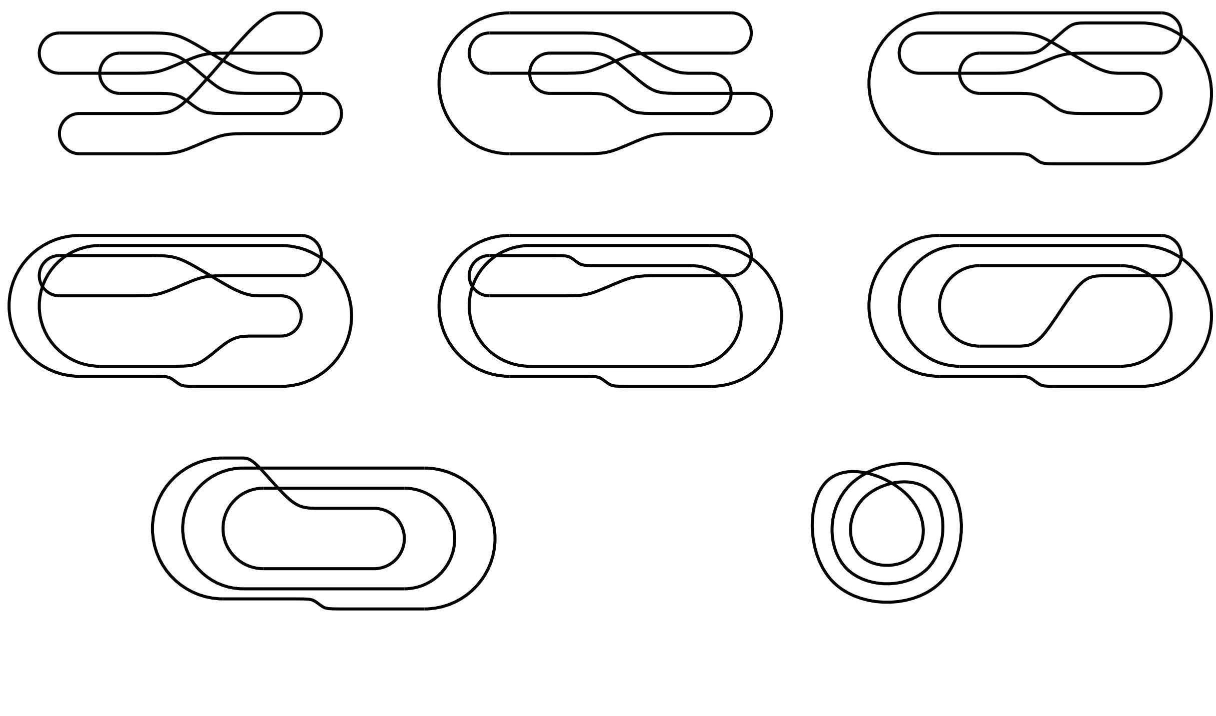


Доказательство Гипотезы. Шаг 4

Итак, процедуру *сокращения разворотов* можно применять, пока не останутся только развороты в одном направлении. В итоге кривая будет выглядеть как-то так:



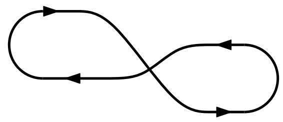
Её можно аккуратно "собрать" в соответствующую кривую из таблицы.



Доказательство Гипотезы. Шаг 4. Финиш

Итак, **гипотеза доказана:** мы умеем деформировать любую кривую α в кривую γ_k для какого-нибудь k.

Но погодите! Описанная процедура не может дать в конце кривую γ_0! Действительно, у полученной после сокращения кривой *все развороты идут в одном и том же направлении*, а у γ_0 — нет.

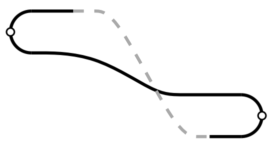


Другими словами, даже если бы α была регулярно гомотопна γ_0, в конце нашего алгоритма мы получаем γ_k при некотором $k \neq 0$. Но мы уже доказали, что γ_0 не регулярно гомотопна γ_k, что даёт противоречие.

Доказательство Гипотезы. Шаг 4. Уточнение

На самом деле, на Шаге 3 процедуру "потягивания" за концы можно применять не ко всем кривым. Действительно, в уточнении к Шагу 3 мы неявно используем, что фрагменты за потягиваемыми концами не соединяются.

Но если бы они соединялись, потянуть в разные стороны за концы было бы невозможно.



А это имеет место ровно в том случае, когда наша кривая — это γ_0, либо γ_0'.

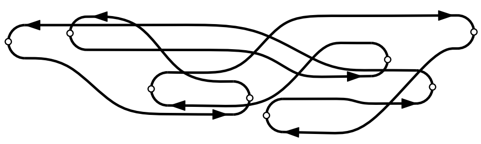
Доказательство Гипотезы. Шаг 4. Теперь точно финиш

Таким образом, алгоритм завершается, если
- если остались только развороты в одинаковом направлении;
- если остались два разворота в противоположных направлениях.

Во втором случае получилась кривая γ_0 или γ_0', а в первом — кривая γ_k для $k \neq 0$.

Доказательство Гипотезы. Замечание

Вспомним, для какого $k \in \mathbb{Z}$ кривая α' регулярно гомотопна γ_k? Разумеется, только для $k = r(\alpha)$. Оказывается, конце Шага 2 можно вычислить значение k наглядно. Как это сделать?



Задача 5. Это число k равно полуразности числа поворотов направо и числа поворотов налево, то есть
$$r(\alpha') = \frac{r_L - r_R}{2}.$$

Например, для кривой на рисунке выше оно равно $\frac{5-3}{2} = 1$. И действительно, явный подсчёт показывает, что при обходе кривой в заданном направлении вектор скорости совершает суммарно 1 оборот против часовой стрелки. Это полностью согласуется с разобранным выше примером к Шагу 4, где мы показали что данная кривая регулярно гомотопна кривой γ_1.

Доказательство Гипотезы. Подведение итогов

Можно резюмировать результат следующим образом.

Теорема 1 (Уитни-Грауштейн). *Любая гладкая замкнутая кривая α на плоскости регулярно гомотопна ровно одной кривой γ_k из набора в §8. При этом номер k равен числу оборотов вектора скорости $r(\alpha)$.*

Представленное доказательство является авторским, проделанные в нём комбинаторно-геометрические представления кажутся довольно естественными.[3] Два других доказательства Теоремы Уитни-Грауштейна можно найти в §5.2 книги Прасолова [4].

11. Обобщение Теоремы Уитни-Грауштейна

В этом разделе мы неформально и в общих чертах наметим аналог доказанной выше теоремы для произвольных размерностей. Обрисованные здесь определения не претендуют на полноту — на полноценное их освоение уходит не один семестровый курс…

11.1. Многообразия

Гладкое многообразие — это, грубо говоря, множество, склеенное из кусков евклидова пространства как папье-маше. Куски евклидова пространства называются *картами*. При этом функции склейки (отображения замены координат) между картами должны быть непрерывно-дифференцируемыми (обычно — бесконечное число раз).

У многообразия X в каждой точке можно откладывать *касательные вектора*, про которые принято думать как про инфинитезимально-малые вектора в локальных координатах. Множество всех касательных векторов во всех точках образует *касательное расслоение*, оно обозначается TX.

Пусть M, N — пара многообразий. Для отображения $M \to N$ можно говорить про *производную*. Более точно, если отображение $f : M \to N$ *гладкое* (непрерывно-дифференцируемое в локальных координатах), для него определён *дифференциал* $df : TM \to TN$.

По сути, дифференциал отображения — это прямое обобщение производной функции. Дифференциал показывает, куда перешёл какой касательный вектор. Наглядно: если точка x движется в M со скоростью v, то по определению её образ $f(x)$ будет двигаться в N со скоростью $df(v)$ в тот же момент времени.

Важное свойство дифференциала: для каждого слоя касательного расслоения к M, т. е. множества векторов, выходящих из одной точки M, дифференциал является *линейным отображением* (сохраняет структуру векторного пространства).

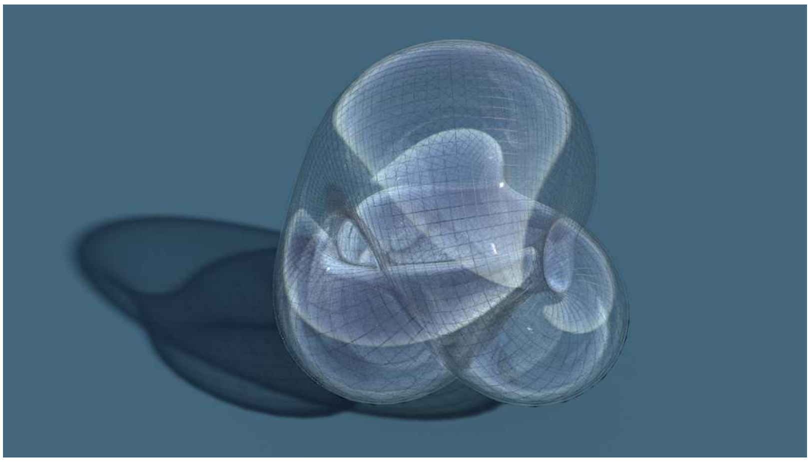
11.2. Погружения

Пусть $\dim M < \dim N$. Гладкое отображение $M \to N$ называется *погружением*, если в каждой точке $x \in M$ дифференциал df_x имеет ранг $\dim M$.

[3] Отдельный интерес представляет то, что в нашем доказательстве явно видны места, где для аккуратного обоснования построений применимы классические теоремы анализа — лемма Сарда.

Теорема 2 (Смейла-Хирша.). *Непрерывное отображение $f : M \to N$ можно продеформировать в погружение если и только если существует послойное вложение $F : TM \to TN$, накрывающее f.*

Например, эта теорема позволяет легко доказать, что существует погружение проективной плоскости в пространство. Одно из таких погружений называется *поверхность Боя (Boy surface)*, оно показано на рисунке ниже.



Теорема Смейла-Хирша была доказана примерно в 60-х годах прошлого века и неоднократно усовершенствовалась. В дальнейшем Миша Громов развил аналогичную технику для большего класса задач. Эта техника называется *h-принцип* и активно применяется в современной науке.

12. Вместо послесловия: упражнения для знатоков

Задача 6. Докажите, что любую гладкую кривую можно разбить на конечное количество несамопересекающихся дуг.

Задача 7. Верно ли, что любая гладкая кривая делит плоскость на конечное число частей?

Задача 8. В определении из §4 опустим требование *непрерывности* изменения вектора скорости в процессе регулярной гомотопии. Как изменится описание классов регулярной гомотопности замкнутых кривых на плоскости?

Задача 9. Докажите, что для любой прямой l и гладкой замкнутой кривой α существует по меньшей мере две точки на α, касательные в которых перпендикулярны l.

Задача 10. Постройте послойное вложение $T\mathbb{RP}^2 \to T\mathbb{R}^3$.

Благодарности

Я горячо благодарен организаторам фестиваля [1] (за их работу, за возможность выступить, и вообще желаю им процветания и успехов в их труде), а также участникам фестиваля, без которых также не возникла бы вся эта деятельность. Кроме того, я признателен Дарье Рыченковой за многочисленные стилистические замечания, которые несомненно помогли сделать статью лучше, а Сашечке Пилипюк — за ряд полезных уточнений по содержанию текста (все оставшиеся огрехи, как языковые, так и математические — остаются полностью на совести автора).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке конкурса «Молодая математика России».

Литература

[1] Страница конференции “Dark geometry fest” https://vk.com/dark_geometry_fest

[2] М. Громов, Соотношения с частными производными М.: Мир, 1990.

[3] Н. М. Мишачёв, Я. М. Элиашберг, Введение в h-принцип. М.: МЦНМО, 2004

[4] В. В. Прасолов, Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2014

[5] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989

[6] А. Хатчер, Алгебраическая топология. М.: МЦНМО, 2011

[7] М. Хирш, Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979

Андрей Рябичев
НМУ, школа № 179 г. Москвы
E-mail: `ryabichev@179.ru`