Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год пятый

№ 1 (16)

Январь - март 2001 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

N 1 (16), 2001 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

N 1 (16), январь – март 2001 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2000 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 25.04.2001.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 5,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Воспоминания об Алексее Ивановиче Кострикине

И. Р. Шафаревич

Редакция представляет вниманию читателей воспоминания академика РАН Игоря Ростиславовича Шафаревича о выдающемся русском математике-алгебраисте Алексее Ивановиче Кострикине (1929 – 2000). А. И. Кострикин — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН с 1976 г., лауреат Государственной премии СССР (1968 г.). С 1972 г. до конца своих дней был заведующим кафедрой высшей алгебры механико-математического факультета МГУ, в 1977 – 1980 гг. — декан мех-мата. Автор популярного учебника по высшей алгебре для студентов математических специальностей, выдержавшего несколько переизданий на русском и английском языках. Был членом редколлегий российских математических журналов "Математический сборник" и "Вестник МГУ" (серия: "Математика и механика"), а также международных журналов "Communications in Algebra" и "Algebra Colloquium".

Я очень ярко помню, как впервые встретился с Алексеем Ивановичем. Это было в 1952 году. В то время на мехмате МГУ существовала так называемая "секретная группа", куда набирали студентов из всех университетов СССР. Чему их там учили, считалось секретом, но на самом деле было и тогда хорошо известно, а сейчас — тем более. Их готовили к занятиям тому, что сейчас называется "криптографией", то есть, шифровкой и разгадыванием шифров. И вот, ко мне обратился Александр Геннадиевич Курош, тогда заведовавший кафедрой алгебры, и сообщил, что в этой группе преподавали довольно серьезный курс алгебры, а теперь им надо писать дипломные работы — не могу ли я предложить несколько не слишком сложных тем? Я согласился, и мы с А. Г. Курошем рассказали на собрании группы о темах, которые предлагали. Я предложил одну тему, в которой надо было разобрать главу из книги XIX века, и переизменить в современных обозначениях и на современном математическом языке. Другая предлагала прочтение нескольких более современных работ. И тут что-то меня дернуло за язык и я, неожиданно для себя, рассказал о вопросе, который меня тогда занимал. Я сказал, что если кто-то хочет попробовать себя на исследовании нерешенного математического вопроса — то вот такой вопрос есть — хотя предприятие и сопряжено с риском. И рассказал о вопросе, который не сложно формулируется, не решен, но в его направлении появилось несколько любопытных работ. Вслед за этим, ко мне подошли два студента и сказали, что хотят писать работы по первым двум темам. А через несколько дней ко мне подошел молодой человек с широкой, обаятельной улыбкой и сказал, что берет третью тему, связанную с самостоятельным исследованием. Тут я не на шутку испугался: "Что за авантюру я затеял? Ведь он даже не имеет систематического мехматовского образования, не ходил на научные семинары!" И я сказал ему: "Давайте не будем торопиться! Сначала попробуйте решить все задачи, какие получатся, касающиеся теории групп в книге Ван-дер-Вардена." Через неделю он подошел ко мне и рассказал безупречные решения всех этих задач. Мне не оставалось ничего другого, как сообщить ему всю известную литературу по предложенному вопросу и ждать, что дальше произойдет. Этот студент и был Алексеем Ивановичем Кострикиным. Так состоялось наше знакомство.

Задачу, о которой идет речь, легко объяснить любому, знакомому с основными понятиями теории групп. Она восходит к вопросу, поставленному английским математиком В. Бернсайдом в 1902 году: будет ли конечной группа, имеющая конечное число образующих, в которой для каждого элемента x выполнено соотношение

$$x^n = 1. \tag{1}$$

Еще сам Бернсайд заметил, что проблему можно ставить двумя способами:

I – считая, что в соотношении (1) показатель n свой для каждого элемента x и

II – считая, что есть такой показатель n, единый для всех элементов x.

Наконец, среди специалистов по теории конечных групп, начиная с конца 1930-х годов все более популярной стал такой аналог вопроса Бернсайда: конечно ли число различных конечных групп, имеющих заданное число образующих и удовлетворяющих соотношению (1) для любого элемента x? Из положительного ответа на вопрос Бернсайда следовал бы положительный ответ на этот вопрос. Для него имеются разные названия, сам Алексей Иванович называл его "ослабленной проблемой Бернсайда" (ОПБ). Вот этим-то вопросом он и занялся. К тому моменту проблема Бернсайда (в постановке II) была решена в положительном смысле для $n = 2$ (что очевидно), $n = 3$ (что довольно элементарно; доказано самим Бернсайдом) и $n = 4$ (доказано И. Н. Сановым в 1940 году). Случай $n = 5$ считался в то время недоступным, как в проблеме Бернсайда, так и в ОПБ.

В своей дипломной работе А. И. Кострикин добился серьезных продвижений при $n = 5$. Его кандидатская диссертация содержала полное решение ОПБ для $n = 5$ (1955 г.). Его докторская диссертация содержала положительное решение ОПБ для произвольного простого показателя n (1958 г., доказательство опубликовано в 1959 г.).

Ситуация стала особенно драматичной, когда в 1959 году П. С. Новиков опубликовал краткое сообщение, в котором утверждал, что сама проблема Бернсайда (в постановке II) имеет отрицательное решение для $n \geq 72$. Доказательство оказалось очень сложным. Оно появилось только в 1968 году в работе П. С. Новикова и С. И. Адяна (для нечетных $n \geq 4381$), занимало в общей сложности более 120 страниц и публиковалось в трех последовательных выпусках журнала. (Отметим судьбу проблемы Бернсайда в постановке I. Эта проблема, конечно, тоже имеет отрицательное решение, но доказать это удалось гораздо проще, Е. С. Голоду в 1964 г. — работа занимает всего 3 страницы).

Результат А.И.Кострикина показал, таким образом, что занятия ОПБ были обоснованы — в этом случае мы получаем утверждение конечности, которое в связи с первоначальной постановкой Бернсайда не верно! Доказательство А. И. Кострикина основывается на новом методе, названном впоследствии “методом “сэндвичей Кострикина”. Доказательство Кострикина далеко не просто. Автору удалось “ужать” его в первой публикации примерно до 30 страниц текста — но за счет крайней лаконичности. За это он сам в последствии и поплатился: как мне рассказывал А. И. Кострикин, несколько лет спустя, когда он уже стал заниматься другими вопросами, он получил письмо от одного японского математика, читавшего курс лекций по его работе. Этот математик не мог восстановить доказательство одного места в работе Кострикина. Когда Кострикин стал заново перечитывать свою работу, ему сначала показалось, что в его доказательстве есть серьезный пробел и он очень испугался. Но потом, когда он опять “вошел” в свою работу, он понял, что рассуждение проводится полностью аналогично предшествующим страницам и было им опущено лишь ради достижения краткости.

Впоследствии Алексей Иванович опубликовал книгу “Вокруг Бернсайда”, в которой изложил доказательство вплоть до деталей и привел изложение ряда примыкающих вопросов.

Еще несколько слов о дальнейшей судьбе ОПБ (т.е. когда n — не простое). Еще в 1956 г. английские математики Хигман и Холл показали, что ее решение может быть сведено к случаю, когда n есть степень простого числа. Этот последний вопрос был решен Е. И. Зельмановым в 1990 г.. Зельманов использовал при этом метод “сэндвичей Кострикина” (наряду с другими методами). Таким образом, ОПБ теперь решена полностью. И, как мне кажется, несомненно, центральная заслуга в этом принадлежит Алексею Ивановичу.

Теперь, я думаю, пора обратиться от математической — к человеческой биографии Алексея Ивановича. Он родился в 1929 г. в деревне Большой Морец Еланского района Волгоградской области. Родители его были крестьяне. Как мне рассказывал Алексей Иванович, он несколько раз пытался научить грамоте свою мать Евдокию Степановну, но так и не преуспел в этом. Он хлебнул тяжесть крестьянской жизни в предвоенное и военное время, помнил, что два раза опухал от голода. Историю того, как он стал математиком, я знаю из его рассказа. После окончания средней школы он был направлен военкоматом в Ветеринарную Академию в Москве. Успешно сдал все экзамены и оставалось только представиться начальнику Академии. Надо было отрапортовать, “Товарищ генерал, рядовой Кострикин явился”. От смущения Алексей Иванович доложил: “Товарищ рядовой, генерал Кострикин явился”. На что генерал скомандовал: “Правое плечо вперед, шагом марш!” И Кострикин был отчислен. Обескураженный вернулся он на родину. Но преподаватель математики в школе уговорил его попробовать поступить в Саратовский Университет, где тогда объявили набор на 2-й поток математического факультета. Кострикин отправился в Саратов и ускоренным темпом сдал экзамены, сдавая по два экзамена в день. В Университете на него, очевидно, обратили внимание и когда был объявлен набор в "секретную группу" в Москве, его туда откомандировали. По окончании Университета он был направлен по специальности "секретной группы" в ведение КГБ. Вскоре произошло свержение Берии и, воспользовавшись наступившей в КГБ неразберихой, Кострикину удалось оттуда уволиться и поступить в аспирантуру Математического Института им. Стеклова Академии Наук СССР. Когда он окончил аспирантуру, то остался работать в отделе алгебры Института.

В Москву из Саратова Алексей Иванович переехал со своей женой Александрой Яковлевной, по образованию химиком. Она долгое время была основной материальной опорой их семьи, дополнившейся в 1953 году сыном Игорем. Она же получила для их семьи от завода, на котором работала, комнату в доме типа барака. Там Алексей Иванович нянчил сына и решал ОПБ. Маленькую отдельную квартиру они впервые получили в 1961 году. (Это было типично для тогдашней жизни — до того почти все жили в коммунальных квартирах.)

Мои воспоминания не претендуют на полноту — я расскажу только о тех работах Алексея Ивановича, которые меня с ним лично сталкивали. Одно такое направление я хорошо запомнил. Оно примыкает к центральной теме математики XIX-XX вв. — классификации простых групп Ли. Она была начата Софусом Ли и завершена его учениками Энгелем и Киллингом, а потом нашла множество применений. Мне представляется, что это — высшее понимание идеи симметрии, до которого дошла математика Нового Времени — точно так же, как конструкция всех правильных многогранников ("платоновых тел") была вершиной понимания идеи симметрии в Античной математике. Еще С. Ли обнаружил, что речь, собственно, идет о более простом объекте, впоследствии названном алгебрами Ли. Список простых алгебр Ли сейчас известен каждому алгебраисту, но при этом речь идет об алгебрах над полем комплексных чисел или, во всяком случае, как говорят алгебраисты, над полем характеристики 0. Над полями положительной характеристики все алгебры, открытые Ли, Энгелем и Киллингом, тоже существуют. Но были известны и примеры других, каких-то странных алгебр, так что все вместе они не укладывались в какую-либо общую картину. Этими "странными" алгебрами в 1960-е годы интересовался Алексей Иванович.

И вот, как-то в выходной день мы с ним отправились на целый день на прогулку за город. А возвращаясь домой, в поезде заговорили как раз об этом предмете. Дело в том, что меня тогда интересовала очень красивая и забытая теория Картана так называемых "псевдогрупп", построенная в начале XX века. Это было нечто вроде теории бесконечномерных простых алгебр Ли, но реализующихся как преобразования конечно мерного пространства. Я и сказал Алексею Ивановичу: "Знаете, одна из "странных" простых алгебр Ли в положительной характеристике очень похожа на одну из псевдогрупп в классификационном списке Картане. Тогда Алексей Иванович знал "назубок" известные примеры "странных" простых алгебр Ли в положительной характеристике, а я — список простых псевдогрупп, найденных Картаном. И это действительно незабываемое воспоминание — как под стук колес электрички возникал полнейший параллелизм двух теорий, на первый взгляд не имевших друг к другу никакого отношения.

Позже мы стали заниматься с Алексеем Ивановичем этим вопросом более систематично и опубликовали несколько работ, где, в частности, высказывали гипотезу, что простые алгебры Ли в положительной характеристике — это в точности те же алгебры Ли, которые существуют в характеристике 0 (и были найдены Ли-Энгелем-Киллингом) и те, которые соответствуют простым псевдогруппам, найденным Картаном (принцип соответствия был точно указан). Нам удалось доказать эту гипотезу лишь при некоторых, довольно существенных, ограничениях. К сожалению, в полном виде гипотезу доказали ни мои ученики, ни ученики Алексея Ивановича (он создал обширную школу в области алгебр Ли положительной характеристики). Гипотеза была доказана двумя американскими математиками — Бруком и Вильсоном. Поразительно, что (как выяснилось еще в наших совместных с Алексеем Ивановичем работах) в доказательстве существенную роль играет техника "сэндвичей Кострикина", разработанная в совершенно другой связи.

Поразительной чертой Алексея Ивановича было то, как он быстро откликался на новые идеи в математике. Помню, что когда возникла техника пучков в алгебраической геометрии (работы Кодаиры, Картана, Серра), он был одним из наиболее активных участников семинара на эту тему. Когда стал возникать интерес к арифметике эллиптических кривых, он был активнейшим сотрудником семинара и по этому вопросу, хотя оба не имели.прямого отношения к его непосредственным интересам и никак не отразились в его публикациях. Я помню, как один из самых влиятельных музыкантов XX века в России, пианист Генрих Густавович Нейгауз сказал об одном своем ученике: "Он любит не только свои десять пальцев, но и музыку." В переносном смысле это относится и к Алексею Ивановичу. Он готов был погрузиться в новый красивый раздел математики (особенно алгебры), совсем не заботясь о том, будет ли это полезно для его творческих планов.

Например, я помню, как в 1957 году мы решили с ним вместе разобраться в идеях только что появившейся книги Картана и Эйленберга "Гомологическая алгебра". Речь шла, собственно, о концепции "производных функторов". Мы увлеклись этим занятием и стали вычислять группы гомологий различных групп и алгебр. Эти группы гомологий являлись (в ситуации, которую мы для простоты рассматривали) конечномерными векторными пространствами, то есть определялись своей размерностью. Таким образом, любой конечной группе или конечномерной алгебре сопоставляется бесконечная последовательность натуральных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, которые мы называли числами Бетти (группы или алгебры). В некоторых простейших случаях нам удалось эту последовательность вычислить (в еще более простых случаях такое вычисление было проделано в книге Картана-Эйленберга). Чтобы записать в финитной форме бесконечную последовательность чисел, мы использовали прием, знакомый еще Эйлеру: принимаем эти числа за коэффициенты степенного ряда. Таким образом, каждой конечномерной алгебре A сопоставляется ряд $P_A(x) = 1 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots$. Мы называли его (по аналогии с топологией) рядом Пуанкаре алгебры A.

В рассмотренных нами примерах это всегда оказывалось разложением в ряд некоторой рациональной функции — так бесконечный ряд (или последовательность чисел) удавалось записать в финитной форме. Нас особенно поразила формула для ряда Пуанкаре прямой суммы алгебр: оказывается, складываются не ряды $P_A(x)$, а $\frac{1}{P_A(x)} - 1$. Мы решили опубликовать об этом короткую статейку, в которой высказывали гипотезу, что ряд Пуанкаре конечномерной алгебры всегда будет рациональной функцией. Как я узнал позже, эту же гипотезу независимо сформулировал Серр. (Я узнал это от него, когда он приезжал в Москву в 1962 году. Опубликована его гипотеза была в 1965 году.) К сожалению, в 1980 году было доказано, что гипотеза не верна. Но я уверен, что этим вопрос не закрыт. Если такой финитный объект как конечномерная алгебра определяет бесконечную последовательность, то она должна как-то выражаться в финитной форме. Может быть, нужно в чем-то изменить саму постановку вопроса?

Начиная с 1972 года Алексей Иванович становится заведующим кафедрой алгебры на мехмате МГУ. Тогда, после смерти А. Г. Куроша, начальство долго искало ему замену. Вопрос, собственно, решался двумя лицами: ректором И. Г. Петровским и заведующим отделением математики П. С. Александровым. Я помню, както П. С. Александров сказал мне — тут еще появилась кандидатура Кострикина. Не посоветуете ли Вы мне, как с ней бороться? На что я ответил, что вряд ли с этой кандидатурой надо бороться — речь идет об очень хорошем математике, человеке не склочном и организованном. Он может оказаться как раз очень удачным кандидатом. Кончилось тем, что именно Алексея Ивановича на эту должность пригласили. Он занимал ее до самой своей смерти. Сравнительно недавно, в связи с 70-летием Алексея Ивановича, кафедра организовала научную конференцию. Но Алексей Иванович был уже так болен, что не смог на ней присутствовать...

На основании лекций, которые он читал в Университете, Алексей Иванович написал учебник. Вообще говоря, написать аккуратный учебник по курсу алгебры, который на кафедре за многие десятилетия отработан — не хитрое дело. Но Алексею Ивановичу удалось написать очень оригинальный, не стандартный учебник. Этот учебник, как и книга "Вокруг Бернсайда", был переведен на английский язык. Дважды международные комиссии, отбирающие докладчиков для международных конгрессов математиков, предлагали Алексею Ивановичу сделать доклад. Он выступал с этими докладами на международных конгрессах в Стокгольме и Ницце.

Все эти (и многие другие) внешние знаки признания указывают на более глубокий факт. Каждый раздел математики: анализ, геометрия, алгебра, теория чисел — имеет свою специфику и свою эстетику. Алексей Иванович был истинным алгебраистом, он глубоко чувствовал красоту и содержательность алгебры. Именно это, в частности, привлекало к нему учеников и помогло ему создать большую научную школу. След, оставленный работами Алексея Ивановича и его учеников в алгебре, сохранится до тех пор, пока алгебра будет существовать.

ТЕЗИСЫ ПО АЛГЕБРЕ

А. Н. Земляков

Продолжаем публикацию учебных материалов ФМШ №18 (ныне СУНЦ) при МГУ. Вторая часть тезисов по алгебре соответствует второй четверти обучения на одногодичном потоке. (Первая часть с историко-методическим комментарием опубликована в предыдущем номере журнала.) Из-за большого объема материалов публикация осуществляется в двух номерах журнала — окончание второй части тезисов см. в следующем номере.

Содержание

Часть II (2-я четверть)
Поля, многочлены, уравнения

«Их тьма, им нет числа и сметы,
Их смысл досель еще не полн,
Но все их сменою одето,
Как пенье моря пеной волн.»
(Борис Пастернак)

Глава IV. Многочлены и уравнения над полями

«—Какой в этом смысл? — спросил Кролик, — Ну, — сказал Пух, — мы все время ищем Дом и не находим его. Вот я и думаю, что если мы будем искать эту Яму, то мы ее обязательно НЕ найдем, и тогда мы, может быть, найдем то, чего мы КАК-БУДТО не ищем, а оно-то есть то, что мы на самом деле ищем.»
(А. Милн)

§ 1. Введение

1. Догма. Большой теоретический и практический интерес представляет решение полиномиальных уравнений $P_n(x) = 0$, где $P_n(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$ — многочлен, $n = \deg P_n \geqslant 1$, и отыскание их корней.

2. При решении линейных уравнений ($n = 1$) возникает необходимость в операции деления:

$$ax = b \iff x = \frac{b}{a}.$$

3. Кольца «с делением» называются *полями.*

Определение. Кольцо $(F, +, \cdot)$ с единицей 1 называется *полем*, если (в дополнение к аксиомам кольца) выполнена аксиома

(O$\cdot$) (обратимость умножения) $\forall a \in F \setminus \{0\}\ \exists\, b (= a^{-1}) \in F:\ ab = 1.$

4. Примеры полей и не полей.

а) $\mathbb{Z}$ — не поле.
б) $\mathbb{Q}$ — поле.
в) $\mathbb{R}$ — поле.
г) $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ — не поле (почему?).

5. Для любого поля F (пока следует понимать $F = \mathbb{Q}$ или $F = \mathbb{R}$) линейное уравнение над F имеет единственное решение:

$$ax = b \iff x = a^{-1}b$$

(правомерно писать $\frac{b}{a}$, т.к. умножение коммутативно).

(Докажите единственность x или a^{-1}!)

6. *Полиномиальным уравнением* над полем F называется уравнение вида $P_n(x) = 0$, где $P_n \in F[x]$ — многочлен с коэффициентами $a_k \in F$; $F[x]$ — множество всех многочленов над F. Элемент $x_0 \in F$ называется *корнем* уравнения (или многочлена P_n), если верно, что $P_n(x_0) = 0$.

7. Догма. Хорошо, когда уравнения имеют корни.

§ 2. Квадратные уравнения

«Вагнер имел обыкновение говорить своим музыкантам:
«Дети мои, обращайте внимание на маленькие нотки, — большие пойдут сами собой.»»

(В. Ландовска)

8. Уже квадратное уравнение $x^2 = a$ над $F(\mathbb{Q} \vee \mathbb{R})$ не всегда имеет решение.

Пример А. $F = \mathbb{Q}$, $x^2 = 2$.

Пример Б. $F = \mathbb{R}$, $x^2 = -1$.

9. Трудность примера 8 А «легко преодолима»: хотя уравнение $x^2 = a$ при $a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ не обязательно имеет решение $x \in \mathbb{Q}$, зато в поле $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ (более широком) есть ровно два решения (это доказано в анализе:

$$x^2 = a \iff x = \sqrt{a} \vee x = -\sqrt{a}).$$

10. При решении конкретного уравнения, скажем, $x^2 = 2$, нет нужды переходить сразу переходить от $\mathbb{Q}$ к очень широкому полю $\mathbb{R}$ — можно «слегка» расширить $\mathbb{Q}$, присоединив к рациональным числам $\sqrt{2}$, т.е. рассмотреть множество чисел

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \mathbb{Q} + \sqrt{2} \cdot \mathbb{Q} = \{\alpha + \beta\sqrt{2} | \alpha \ \beta \in \mathbb{Q}\}, \quad \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}.$$

Это множество — поле (подполе $\mathbb{R}$ — докажите), и в этом поле уравнение $x^2 = 2$ имеет решение.

11. Присоединение $\sqrt{2}$ к $\mathbb{Q}$ можно понимать чисто алгебраически: считать $\sqrt{2}$ не действительным числом, а *символом*, т.ч. $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \in \mathbb{Q}$. Символы же вида $\alpha + \beta\sqrt{2}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, складываемые и умножаемые по правилам:

$$(+) \qquad (\alpha_1 + \beta_1\sqrt{2}) + (\alpha_2 + \beta_2\sqrt{2}) = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)\sqrt{2},$$

$$(\cdot) \qquad (\alpha_1 + \beta_1\sqrt{2}) \cdot (\alpha_2 + \beta_2\sqrt{2}) = (\alpha_1\alpha_2 + 2\beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\sqrt{2},$$

и образуют поле $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, в котором уравнение $x^2 = 2$ имеет решение. (Потеря при таком подходе — неочевидность некоторых аксиом кольца. Однако эта точка зрения потом поможет нам преодолеть трудность примера 8 Б.)

12. Большой минус подхода 10 – 11 в том, что, «научившись решать»уравнение $x^2 = 2$, в полученном поле $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ мы не сможем решить многие другие квадратные уравнения.

Пример. Уравнение $x^2 = 3$ не имеет решений в $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ (докажите).

Конечно, можно присоединить к $\mathbb{Q}$ (или $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$) $\sqrt{3}$ — так же, как в 10 – 11.

13. При рассмотрении кубических уравнений возникают сходные сложности.

Пример Уравнение $x^3 = 2$ не имеет решений в $\mathbb{Q}$.

А) Множество $F' = \mathbb{Q} + \sqrt[3]{2}\mathbb{Q} = \{\alpha + \beta\sqrt[3]{2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ не является полем (подполем в $\mathbb{R}$ — докажите).

Б) Правильное определение расширения $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = F$ (т.ч. F было полем) таково:

$$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \ldots ? \ldots \qquad \text{(каково?)}.$$

(**Догма.** Поля — хорошие объекты, и мы всегда будем хотеть иметь дело только с полями.)

14. (Существенность отличия кубических корней от квадратных.)

Если $a \in \mathbb{Q}$, $\sqrt[3]{a} \notin \mathbb{Q}$, то $x = \sqrt[3]{a}$ не является корнем никакого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ с $p, q \in \mathbb{Q}$ (т.е. $\sqrt[3]{a}$ нельзя представить в виде $\alpha + \beta\sqrt{\gamma}$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ — докажите).

15. Любое квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ над произвольным полем F линейной заменой $x + \alpha = z$ сводится к двучленному уравнению $z^2 = A$ (докажите).

16. Если мы говорим о произвольном поле F, то это значит, что нам важны только аксиомы поля (и не важна конкретная природа элементов F). (Можно «для конкретности»считать $F = \mathbb{Q} \vee \mathbb{R}$, но это, как правило, не нужно.) Иногда, кроме аксиом, требуется такое свойство поля F:

$$(\chi) \quad \forall n \in \mathbb{N}\, \forall a \in F \setminus \{0\} \;\; na \neq 0$$

(по определению, $na = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n} \in F$ для $a \in F$, $n \in \mathbb{N}$).

Все поля в этом семестре обладают свойством (χ). Посмотрите, где оно было использовано в 15?

17. А. **Одно свойство полей.** В произвольном поле F

$$\forall a, b \in F \;\; a \cdot b = 0 \implies a = 0 \;\vee\; b = 0.$$

Замечание. Если $z_1 \in F$ — корень уравнения $z^2 = A$, то $z_2 = -z_1$ — тоже его корень.

В. Две **Теоремы** о квадратных уравнениях.

I. Если уравнение $z^2 - A = 0$ над произвольным полем F имеет корень z_1, то его можно переписать в виде $(z - z_1)(z - z_2) = 0$ (или $(z - z_1)(z + z_1) = 0$).

II. Любое квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ над произвольным полем F имеет не более двух корней.

(Докажите все эти утверждения.)

18. Замечание. В теореме 17. В. II очень существенно, что F — поле. И над кольцами можно рассматривать квадратные уравнения, например над $\mathbb{Z}$). Оказывается, что бывают такие кольца, квадратные уравнения над которыми могут иметь любое число корней (например, 17 штук!).

19. Резюме. Развита «общая теория квадратных уравнений» над произвольными полями; основные её положения — тезисы 15 и 17. В.

20. Дальнейшие планы. Сначала — обобщение 17 на уравнения более высоких степеней (число корней и разложение уравнений).

Затем — преодоление трудностей примера 8 Б (придется выйти за пределы поля действительных числе!) и общие вопросы о существовании корней.

Потом — практическое отыскание корней и упрощение уравнений в духе тезиса 15.

§ 3. Общая теория многочленов и уравнений.

«Разделяй и властвуй.»
(Людовик XI)

21. Очевидно, множество многочленов $f[x]$ над произвольным полем F с естественными операциями сложения и умножения образуют кольцо с единицей (но никоим образом не поле! — почему?). При умножении степени многочленов складываются:

$$\deg PQ = \deg P + \deg Q.$$

22. Многочлен $P_n(x) \in F[x]$ полагается понимать как формальное выражение, содержащее символ x. В частности, два многочлена считаются равными тогда и только тогда, когда их степени одинаковы и соответствующие коэффициенты равны друг другу. В принципе можно вообше не вводить символ переменной x, а записывать многочлен $P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ в виде строчки $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ (далее можно определить операции сложения и умножения строчек и работать только с ними; однако это неудобно и не отвечает потребностям практики).

23. Каждый многочлен $P \in F[x]$ можно трактовать как отображение

$$P : F \longrightarrow F : \quad x \mapsto P(x)$$

(точнее, многочленам соответствуют отображения). Понятие корня многочлена связано с этой трактовкой: корни $P(x)$ суть те элементы $x_0 \in F$, которые при отображении $P : F \longrightarrow F$ переходят в $0 \in F$.

24. Конечно, не каждая функция (отображение) $f : F \longrightarrow F$ (например для $F = \mathbb{R}$) соответствует многочлену $f(x) \in F[x]$ (почему? — это будет следовать из дальнейшего!). С другой стороны, некоторые функции соответствуют сразу нескольким неравным многочленам, если поле F не обладает одним свойством — об этом тоже речь пойдет дальше. (Напомним, что две функции $f_1, f_2 : A \longrightarrow B$ называются равными, если $\forall x \in A \; f_1(x) = f_2(x)$ — в этом существенное отличие функций от многочленов.)

25. Бессодержательное утверждение. Многочлены по своей записи весьма похожи на натуральные числа в позиционной (скажем, десятичной) системе счисления:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$
$$N = \bar{a}_n 10^n + \bar{a}_{n-1}10^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1 10 + \bar{a}_0 = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}.$$

26. Как и в кольце $\mathbb{Z}$, в кольце многочленов важную роль играет деление с остатком. Как и натуральные числа, многочлен P_n можно разделить на многочлен Q_m уголком:

$$\begin{array}{r|l} -\,P_n & Q_m \\ \cline{2-2} \cdots & S \\ \cdots & \\ \cline{1-1} R & \end{array}$$

Каковы степени частного и остатка S и R?

27. Существование деления с остатком в кольце $F[x]$.

$$\forall P \in F[x] \; \forall Q \in F[x] \setminus \{0\} \; \exists R, S \in F[x] \text{ т.ч.}$$

$$1) \quad P = QS + R,$$
$$2) \quad \deg R < \deg Q.$$

(Дайте доказательство безотносительно к «уголку» — индукцией по степени P. Как ax^n разделить с остатком на $Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$?).

28. Соглашение. Константы a_0, отличные от нуля, по определению (общему) имеют степень 0. Степенью многочлена $P(x) \equiv 0$ считается $-\infty$. В таком случае теорема 27 верна при всех Q (в т.ч. при $\deg Q = 0$). То же относится к соотношению $\deg P_1 P_2 = \deg P_1 + \deg P_2$.

29. Единственность деления с остатком. Если $P = QS + R = QS' + R'$ и $\deg R, \deg R' < \deg Q$, то $S = S'$, $R = R'$. (Докажите.)

30. Деление многочлена на двучлен. Разделив $P_n \in F[x]$ на двучлен $\lambda(x) = x - a$ с остатком:

$$P_n(x) = (x - a)P_{n-1}(x) + R,$$

будем иметь: $\deg R < \deg(x-a) = 1$, т.е. $\deg R = 0 \vee -\infty$ и R — константа. Простой способ вычисления этой константы дает:

Теорема Безу. $R = P_n(a)$ (докажите).

31. Для многочленов, как и для чисел, можно ввести понятие делимости:

$$P \,\vdots\, Q \iff \exists\, S \text{ т.ч. } P = QS \quad (P, Q, S \in F[x]).$$

Теорема. $x_0 = a$ является корнем $P_n(x) \in F[x]$, т.е. $P_n(a) = 0 \Leftrightarrow P_n(x)$ делится на $(x - a)$, т.е. $P_n(x) = (x - a)P_{n-1}(x)$. (Докажите.)

32. Принцип разложения. Если многочлен $P(x)$ удалось разложить хотя бы на два сомножителя:

$$P(x) = A(x) \cdot B(x) \qquad (\deg A,\ \deg B \geqslant 1),$$

то соответствующее уравнение $P(x) = 0$ сводится к двум уравнениям более низкой степени:

$$P(x) = 0 \iff A(x) = 0 \vee B(x) = 0.$$

Поэтому полезно уметь разлагать многочлены на множители.

33. Отнюдь не всякий многочлен разлагается. Такие многочлены, которые нельзя разложить на два сомножителя, оба не нулевой степени, называются *неприводимыми* (они аналогичны простым числам в $\mathbb{Z}$).

Пример Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ над $\mathbb{R}$ разложим тогда и только тогда, когда $b^2 - 4ac \geqslant 0$ (в случае $b^2 - 4ac < 0$ он будет неприводимым). Докажите это.

34. Путь. Аналогично арифметике, можно построить теорию разложения многочленов (НОД, подкольцо $a(x)F[x] + b(x)F[x]$, лемма о представлении НОД, взаимная простота, основная лемма о делимости), венцом которой является теорема о единственности разложения многочленов на неприводимые сомножители. Нам эта теория не потребуется.

35. Теорема о числе корней. Многочлен степени $n \geqslant 0$ над произвольным полем F не может иметь более, чем n различных корней. (Докажите.)

Из этой теоремы следует, что функция $x \mapsto \sin x$ не соответствует никакому многочлену над $\mathbb{R}$ (см. тезис 24.)

36. Теорема единственности. Если значения двух многочленов $P,\ \tilde{P}$, степени не больше n совпадают при $n + 1$ значении переменной x —

$$P(x_0) = \tilde{P}(x_0),\ P(x_1) = \tilde{P}(x_1),\ \ldots,\ P(x_n) = \tilde{P}(x_n),$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_n \in F$ различны, — то эти многочлены равны (в смысле равенства многочленов, т.е. покоэффициентно. Отсюда, в частности, следует, что $\forall x \in F$ $P(x) = \tilde{P}(x)$) (Докажите.)

37. В этой четверти все наши поля будут бесконечными, т.е. состоящими из бесконечного числа элементов. В случае бесконечного поля F из теоремы единственности получаем: если два многочлена P и $\tilde{P}$ совпадают (равны) как функции (т.е. $\forall\, x \in F$ $P(x) = \tilde{P}(x)$), то они равны и как многочлены (т.е. покоэффициентно). (Докажите.) Отсюда следует, что функции $F \longrightarrow F$ может соответствовать только один многочлен (ср. с тезисом 24).

§ 4. Полиномиальная интерполяция

«Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов. Это чудесный дар, который мы не понимаем и которого не заслуживаем.»
(Е. Вигнер, статья «Непостижимая эффективность математики в естественных науках»)

38. В математике и физике иногда возникает задача о проведении через заданные точки на плоскости $Oxy = \mathbb{R}^2$ графика многочлена, причем возможно более низкой степени (многочлены — это самые простые функции). Это т.н. задача полиномиальной интерполяции или задача обработки результатов экспериментов, т.е. получения физического закона (в этом случае на плоскости Oxy отмечаются результаты измерений). Обсудим эту задачу.

39. Теорема единственности. Через $n+1$ точку $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, где все x_k различны, можно провести не более одного графика $y = P_{\leqslant n}(x)$ многочлена степени $\leqslant n$. (Докажите.)

40. Примеры. А. Через 2 точки можно провести прямую $y = a$, или $y = a_1x + a_0$.

Б. Через 3 точки можно провести либо прямую, либо параболу $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ (как найти коэффициенты?), причем только одну.

В. Через 2 точки можно провести бесконечно много парабол (покажите).

41. Теорема существования.

А. Если $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ различны, то существует (и только один при каждом $k = 0, 1, 2, \ldots, n$) многочлен $P_k(x)$ такой, что

$$\deg P_k(x) = n,\ P_k(x_0) = 0,\ P_k(x_1) = 0, \ldots, P_k(x_n) = 0, \text{ кроме } P_k(x_k) = 1$$

(напишите формулу для $P_k(x)$).

Б. Через точки (x_k, y_k), $k = 0, 1, \ldots, n$, где все x_k различны, проходит график многочлена

$$y = P(x),\ P(x) = y_0P_0(x) + y_1P_1(x) + \cdots + y_nP_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_kP_k(x),$$

где $P_k(x)$ — из пункта А. Ясно, что степень $\deg P \leqslant n$ (за счет чего может оказаться $\deg P < n$?). (Докажите утверждение Б.)

42. Итог. Задача интерполяции решена. В действительности физикам часто хватает линейных и квадратичных функций (именно поэтому большинство физических законов утверждает линейную или квадратичную зависимость: $F = -kx$, $E \sim |A|^2$ и т.д.).

Разные задачи

43. При любом $n \in \mathbb{N}$

а) $(x^n - a^n) \vdots (x - a)$,

б) $(x^{2n+1} + a^{2n+1}) \vdots (x + a)$.

(Докажите и напишите соответствующие формулы.)

44. Использование «приема Безу». Известно, что $P(a) = A$, $P(b) = B$. Как найти остаток $R(x)$ от деления $P(x)$ на $(x-a)(x-b)$? (Заметим, что $\deg R < 2 \implies R(x) = a_1x + a_0$. Как найти коэффициенты a_1 и a_0?)

45. Неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{Q}$.

А. Над полем $\mathbb{R}$ любой многочлен нечетной степени $n \geqslant 3$ приводим (разлагается). (Докажите.)

Б. Приведите примеры многочленов степеней 3, 4, 5, неприводимых над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

В. Оказывается, что над полем $\mathbb{R}$ и любой многочлен четной степени $n \geqslant 4$ является приводимым (это мы докажем потом). Разложите на 2 множителя многочлены $P(x) = x^4 + 1$; $Q(x) = x^6 + x^3 + 1$.

46. Резюме. Развита общая теория многочленов. Ее ключевые положения — деление с остатком (тезисы 27, 29), теорема Безу и ее следствие (тезисы 30, 31) и теорема о числе корней (тезис 35). Попутно проанализирована задача полиномиальной интерполяции (тезисы 39, 41).

Глава V. Поле комплексных чисел

§ 5. Алгебра комплексных чисел

> «Эразм Дарвин считал, что время от времени следует производить самые дикие эксперименты. Из них почти никогда ничего не выходит, но если они удаются, то результат бывает потрясающий.»
>
> *(Дж. Литлвуд)*

47. Теперь мы вернемся к примеру 8 Б: уравнение $x^2 = -1$ не имеет решений в поле $\mathbb{R}$, и это нам не нравится — мы хотим построить такое поле, в котором уравнение $x^2 = -1$ имеет корни.

48. Поступим, как в т. 11: рассмотрим *символ* $\sqrt{-1}$ — его принято обозначать «i» — и присоединим его к $\mathbb{R}$, считая, что $i^2 = -1$. Иными словами, будем рассматривать так называемые *комплексные числа*, т.е. символы вида $a + bi$, где a и b — вещественные числа, складываемые и перемножаемые по правилам:

$$(+) \qquad (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$(\cdot) \qquad (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Теорема. Множество комплексных чисел

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

с определенными выше операциями сложения и умножения является полем. (Докажите — проверьте аксиомы поля).

49. Комментарий. Аксиомы $(K+)$, $(A+)$, $(H+)$, $(O+)$, $(K\cdot)$, $(H\cdot)$, как и (Д), практически очевидны из определений $(+)$ и $(\cdot)$. Совсем неочевидна справедливость аксиомы $(A\cdot)$, однако непосредственная проверка показывает, что она выполнена. Это можно воспринимать как «удачу»; почему так получается, возможно, прояснится во 2-ом семестре.

Аксиома $(O\cdot)$ (обратимость умножения) выполнена, конечно, потому, что $i^2 = -1$!!

50. Комплексные числа вида $a + 0i$ естественно отождествить с действительными числами и записывать просто как a. Таким образом, поле $\mathbb{C}$ содержит $\mathbb{R}$, т.е. $\mathbb{C}$ является расширением $\mathbb{R}$. В этом расширенном поле $\mathbb{C}$ уравнение $x^2 = -1$ имеет два корня:

$$x^2 = -1 \iff x = i \ \vee \ x = -i$$

(комплексные числа вида $z = 0 + bi$ принято записывать как $z = bi$ и называть «чисто мнимыми»).

51. Забавно, что раз уравнение $z^2 = -c$, где $c \in \mathbb{R}$, $c \geqslant 0$, можно решить в комплексных числах (выпишите корни), а общее квадратное уравнение над $\mathbb{R}$ заменой сводится к уравнению вида $z^2 = A$, $A \in \mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

то любое квадратное уравнение на $\mathbb{R}$ имеет в поле $\mathbb{C}$ решения! Более того, корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ вычисляются по старым формулам:

$$x = x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Они оба действительные при $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$ и комплексные при $D < 0$ (в последнем случае $\sqrt{D}$ нужно понимать как $\sqrt{|D|} \cdot i$).

В этом — существенное отличие расширения $\mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}[\sqrt{-1}]$ от расширений вида $\mathbb{Q} \rightsquigarrow \mathbb{Q}[\sqrt{a}]$ (см. т. 12).

52. Возникает вопрос: а как решать уравнения с комплексными коэффициентами?

Пример. Любое квадратное уравнение над $\mathbb{C}$

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (a, b, c \in \ a = a_0 + a_1 i \text{ и т.д.}, \ z = x + iy \in \mathbb{C})$$

как в т. 15, сводится к укороченному квадратному уравнению

$$w^2 = C, \quad \text{где } C = A + Bi \in \mathbb{C}, \ w = u + iv \in \mathbb{C}.$$

Теорема. Если $C \in \mathbb{C}$, $C \neq 0$, то уравнение $w^2 = C$ имеет ровно два комплексных корня $w = u + vi \in \mathbb{C}$ (т.е. существует ровно 2 квадратных корня из любого комплексного числа — докажите).

53. Из примера 52 следует, что любое квадратное уравнение над $\mathbb{C}$ имеет корни в $\mathbb{C}$. В поле $\mathbb{C}$ уже нет таких «пакостей», как в $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ (примеры 8 А и 8 Б). Возникает следующий вопрос: а как обстоит дело с кубическими и прочими уравнениями над $\mathbb{C}$ (в частности, над $\mathbb{R}$)? К его рассмотрению мы обратимся чуть позже, а сначала повозимся с комплексными числами «самими по себе». Заметим, что начало многообещающее: «присоединив» к $\mathbb{R}$ корень i всего одного квадратного уравнения $x^2 + 1 = 0$, в «новых» (комплексных) числах мы научились решать *сразу все* квадратные уравнения, в том числе с комплексными коэффициентами (хорошо!).

54. В поле действительных чисел важную роль играет отношение порядка $x_1 < x_2$. Оказывается в поле $\mathbb{C}$ *не существует* отношения $z_1 < z_2$, обладающего хорошими (естественными) свойствами.

Задача. Докажите, что нельзя определить неравенство между комплексными числами так, чтобы выполнялись условия:

а) $z \neq 0 \implies z > 0 \ \vee z < 0$,

б) $z_1 > 0 \ \wedge \ z_2 > 0 \implies z_1 z_2 > 0$.

55. Понятно, что корни уравнения $x^2 + 1 = 0$, т.е. i и $-i$, должны быть «равноправными». «Поэтому» рассмотрим перестановку этих корней: $i \to -i$, $-i \to i$. Для комплексных чисел $z = a + bi \in \mathbb{C}$ получим так называемую операцию *сопряжения*: отображение

$$* : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : \ z = a + ib \mapsto \overline{z} = a - ib.$$

Число $\overline{z}$ (физики пишут z^*) называется *комплексно сопряженным* к z.

Свойства операции сопряжения:

$$\begin{aligned}
&(+) \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2,\\
&(\cdot) \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2,\\
&(\mathbb{R}) \quad z = \overline{z} \ \Leftrightarrow \ z \in \mathbb{R},\\
&(!) \quad \text{если } z = x + iy, \text{ то } z\overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(Проверьте эти свойства.)

56. Свойства $(+)$ и $(\cdot)$ приятны сами по себе, а свойство $(!)$ имеет важное приложение — оно дает удобный способ деления в $\mathbb{C}$:

$$\frac{a + bi}{x + yi} = \frac{(a + bi)(x - yi)}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{(a + bi)(x - yi)}{x^2 + y^2}.$$

Именно так (сводя деление к умножению) и считают на практике.

57. Отображение $f : F \longrightarrow F$ поля F в себя, обладающее свойствами

$$\begin{aligned}
&(+) \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2),\\
&(\cdot) \quad f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2),
\end{aligned}$$

и такое, что $f(x)$ не есть тождественно нулевое, называется *автоморфизмом* поля F. Докажите, что любой автоморфизм поля F инъективен:

$$\forall\, x_1, x_2 \in F\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2).$$

Пример автоморфизма — комплексное сопряжение в $\mathbb{C}$.

Теорема. А. Поле $\mathbb{Q}$ имеет только один автоморфизм — тождественный:

$$\forall\, x\ f(x) = x.$$

Б. Поле $\mathbb{R}$ тоже имеет только один автоморфизм — тождественный.

В. Любой автоморфизм поля $\mathbb{C}$, переводящий действительные числа снова в действительные, совпадает либо с тождественным, либо с комплексным сопряжением.

58. Теорема 57 говорит о том, что у «хороших» полей ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) мало «хороших» автоморфизмов. Приведем еще один пример не тождественного автоморфизма. Для $a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$ рассмотрим поле $\mathbb{Q}[\sqrt{a}]$. Аналог комплексного сопряжения в этом поле — так называемое сопряжение Галуа:

$$* : \mathbb{Q}[\sqrt{a}] \longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{a}] :\ z = \alpha + \beta\sqrt{a} \mapsto \overline{z} = \alpha - \beta\sqrt{a}.$$

Докажите, что $* : z \mapsto \overline{z}$ — автоморфизм поля $\mathbb{Q}[\sqrt{a}]$ (в будущем это нам пригодится; впрочем, тогда и будет подробный разговор).

§ 6. Геометрия комплексных чисел

> «Я на башню всходил, и дрожали ступени,
> И дрожали ступени под ногой у меня.
>
> И чем выше я шел, тем ясней рисовались,
> Тем ясней рисовались очертанья вдали...»
>
> *(К. Д. Бальмонт)*

59. Комплексное число $z = x + yi \in \mathbb{C}$ можно трактовать как упорядоченную пару (x, y) действительных чисел (и вообще не вводить символ i). Пары же действительных чисел издавна принято изображать точками числовой (координатной) плоскости $\mathbb{R}^2$. Таким образом, получаем естественное биективное соответствие между $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$ («геометрическую интерпретацию комплексных чисел»). Плоскость $\mathbb{R}^2$, на которой изображаются $z \in \mathbb{C}$, называют *комплексной плоскостью* $\mathbb{C}$. На плоскости $\mathbb{C}$ выделены две оси — вещественная Ox и мнимая Oy.

Дальнейшая программа: перевод операций в $\mathbb{C}$ (сложение, умножение, вычитание, деление, сопряжение) на язык геометрии.

60. Пример. Отображение $z \to \overline{z}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ соответствует симметрии относительно вещественной оси.

61. Точки плоскости складывать не принято; геометрические объекты, которые можно складывать, — это векторы. С каждой точкой $z \in \mathbb{C}$ естественно связать вектор $\overrightarrow{Oz}$, который удобно тоже обозначить z. Возникают вопросы:

А. Как вектор суммы $z_1 + z_2$ комплексных чисел получается из векторов z_1 и z_2?

Б. Как по векторам z_1 и z_2 построить вектор разности $z_2 - z_1$?

Ответьте на эти вопросы.

62. Умножение в терминах векторов интерпретируется не столь очевидным образом. Введем для начала естественные геометрические характеристики комплексных чисел $z \in \mathbb{C}$ (= точек $z \in \mathbb{C}$; = векторов z).

$|z|$ — модуль z — это расстояние $\rho(z, 0)$ от z до 0; $|z| \geqslant 0$.

$\arg z$ — аргумент z — это величина угла xOz; $0 \leqslant \arg z < 2\pi$ $(z \neq 0)$.

63. Свойства модуля:

(1) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, (4)$|z_1 - z_2| = \rho(z_1, z_2)$ (расстояние между z_1 и z_2),

(2) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, (5)$\arg(z_1 + z_2) =?$,

(3) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ (в каком случае здесь будет равенство?),

64. «Стандартные» множества на комплексной плоскости, заданные соотношениями (точки z_0, z_1, z_2 заданы):

а) $|z| = a$, $(a > 0)$;

б) $|z| \leqslant a$; $|z| > a$;

в) $|z - z_0| = a$; $|z - z_0| \leqslant a$; $|z - z_0| > a$;

г) $|z - z_1| = |z - z_2|$; $|z - z_1| \geqslant |z - z_2|$;

д) $\arg z = \frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \pi$;

е) $\arg(z - i) = \frac{\pi}{3}$; $\arg(z + i) > \frac{\pi}{2}$;

ж) $|z - z_1| = 2|z - z_2|$;

з) $|z - z_1| \geqslant k|z - z_2|$, k задано.

Нарисуйте эти множества.

65. Тригонометрическая и «полярная» формы записи комплексных чисел. Обозначим для $z \in \mathbb{C}$ $|z| = r$, $\arg z = \varphi$. Пара (r, φ) называется *полярными координатами* точки $z \in \mathbb{C}$.

Для $z = x + iy$ можно писать

$$z = (x, y)_d = (r, \varphi)_p$$

(декартова и полярная записи z).

Очевидно, формулы перехода от полярных координат (r, φ) к декартовым (x, y) таковы:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Поэтому z можно записать в так называемой *тригонометрической* форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

66. Примеры тригонометрических и полярных форм:

а) $z = i$,	з) $z = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$,
б) $z = -1$,	и) $z = \cos\varphi - \sin\varphi$,
в) $z = 1 + i$,	к) $z = \sin\varphi + i\cos\varphi$,
г) $z = 1 - i$,	л) $z = -(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
д) $z = 1 + \sqrt{3}i$,	м) $\sin\varphi - i\cos\varphi$,
е) $z = -1 + \sqrt{3}i$,	н) $z = -\sin\varphi + i\cos\varphi$,
ж) $z = \cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{3}$,	о) $z = \operatorname{ctg}\varphi + i$.

Запишите эти числа в полярной и тригонометрической формах.

67. Пусть известна тригонометрическая (полярная) форма числа z. Найдем тригонометрическую (полярную) форму числа iz:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \;\Rightarrow\; iz = r(i\cos\varphi - \sin\varphi) = r(\;?\; + i\;?\;)$$

$$z = (r, \varphi)_p \;\Rightarrow\; iz = (\;?\;,\;?\;)_p.$$

Таким образом, умножение z на i имеет простой и красивый геометрический смысл (какой?). Вопрос: каков геометрический смысл умножения комплексного z на действительное k $(k > 0,\; k < 0)$?

68. Перемножив «в лоб» два числа $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, записанные в тригонометрической форме, из известных формул тригонометрии найдем тригонометрическую форму произведения $z_1 z_2$:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2(?\; + i\,?) = r(\cos\psi + i\sin\psi),$$

где $r = ?,\; \psi = ?$.

Таким образом, доказана

Теорема о геометрическом смысле умножения комплексных чисел. При умножении комплексных чисел их модули перемножаются —

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

— а аргументы складываются по модулю 2π —

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}.$$

69. В полярной форме предыдущая теорема выглядит коротко и изящно:

$$(r_1, \varphi_1)_p \cdot (r_2, \varphi_2)_p = (r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2 \pmod{2\pi})_p.$$

(Число φ, взятое по модулю 2π, можно записать как $2\pi\left\{\frac{\varphi}{2\pi}\right\}$, где $\{a\}$ обозначает дробную часть числа a.)

70. В предыдущих рассмотрениях $z_1 \neq 0$ и $z_2 \neq 0$, ибо аргумент числа $z = 0$ не определен. Конечно, если один из сомножителей равен 0, то и произведение равно 0 — в этом случае геометрический смысл тривиален.

71. Совершенно аналогичным образом можно выяснить геометрический смысл деления (впрочем, можно воспользоваться для этого теоремой 68 и тем фактом, что $z = \frac{z_2}{z_1} \Leftrightarrow zz_1 = z_2$).

Выпишите модуль и аргумент частного; запишите деление в полярной форме.

72. «Стандартные» множества на комплексной плоскости:

а) $\arg(iz) = \frac{2\pi}{3}$; $\arg(-iz) = \frac{\pi}{4}$;

б) $\arg((1+i)z) = \frac{\pi}{3}$; $|(1+i)z| = 2$;

в) $\arg \frac{z-z_1}{z-z_2} = \alpha$, где $\alpha = 0; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \pi$;

г) $\arg(z^2) = \frac{\pi}{2}$; $\arg(z^3) = \frac{\pi}{2}$;

д) $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k$, $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| \geqslant k$.

73. Числа $z \in \mathbb{C}$ такие, что $|z| = 1$ (т.е. точки единичной окружности) записываются в виде $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, где $\varphi \in \mathbb{R}$. Можно рассмотреть отображение

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : \ \varphi \mapsto z(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi = (1, \varphi)_p,$$

при котором действительная ось как бы наматывается на окружность.

Функция $z(\varphi)$ обладает свойством

$$z(\varphi_1 + \varphi_2) = z(\varphi_1) \cdot z(\varphi_2),$$

которое совпадает с основным свойством показательной функции. Удобно такое обозначение:

$$z(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi \overset{\text{об}}{=} e^{i\varphi}.$$

74. Обозначение $e^{i\varphi}$ введено нами формально: с тем же успехом вместо $e^{i\varphi}$ можно писать R^{φ}. Однако можно показать (это задача анализа), что если e — неперово число, то для $e^{i\varphi}$ справедлива та же предельная формула, что и для обычной показательной функции a^x, $a = e$ $(x \in \mathbb{R})$:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n; \qquad e^{i\varphi} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n$$

(предел в $\mathbb{C}$).

Можно определить функцию e^z и при любом $z \in \mathbb{C}$:

$$\text{для } z = x + iy \quad e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

При этом, очевидно, справедливо соотношение:

$$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

Замечательно то, что аналогичную функцию a^z ($a \in \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$) при $a \neq e$ (для всех $z \in \mathbb{C}$) однозначно определить нельзя! В знак исключительности функции $z \mapsto e^z$ ее часто обозначают $\exp z$ и называют комплексной экспонентой.

75. Кривые на комплексной плоскости (t — действительный параметр, пробегающий ось $\mathbb{R}$):

а) $z = z_1 + tz_2$,
б) $z = tz_1 + (1-t)z_2$, $t \in [0,1]$;
в) $z = 2 \cdot e^{i2t}$;
г) $z = 2^t \cdot e^{it}$;
д) $z = t + it^2$;
е) $z = t + it$;
ж) $z = t^2 + it^3$;
з) $z = t + i\sqrt{1-t^2}$, $t \in [-1,1]$.

(Нарисуйте.)

76. Изобразите множество решений квадратного уравнения при всех значениях параметра $t \in \mathbb{R}$:
а) $z^2 - 2tz + 1 = 0$,
б) $z^2 + 2z + t = 0$.

77. Алгебраическая запись геометрических свойств.

А. Точки z_1, z_2, z_3 образуют равносторонний треугольник тогда и только тогда, когда

$$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3.$$

Б. Если $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$, $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, то точки z_1, z_2, z_3, z_4 образуют прямоугольник.

В. Выпишите необходимое и достаточное условие того, что точки z_1, z_2, z_3, z_4 образуют параллелограмм.

Г. Точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} \in \mathbb{R}$ (т.е. отношение является действительным числом).

Д. Точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной прямой (или окружности) тогда и только тогда, когда

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} : \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4} \in \mathbb{R}.$$

Е. Угол между окружностями (или прямыми), проведенными через тройки точек z_1, z_2, z_3 и z_2, z_3, z_4 равен

$$\alpha = \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} : \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4}\right).$$

Глава VI. Уравнения и многочлены над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$

§ 7. Уравнения над полем $\mathbb{C}$

«Даль покрыта туманом —
Где предел наших странствий?
....
Мы выходим из устья
И поплыли рекою.»
(Ций Юань)

78. Обратимся к простейшему уравнению степени n над полем $\mathbb{C}$ — к двучленному уравнению $z^n = A$. В принципе это уравнение (и вообще любое уравнение над $\mathbb{C}$) можно решать так: подставив $z = x + iy$, $A = \alpha + i\beta$, произвести вычисления (возвести в степень, если нужно, перемножить и сложить) и записать уравнение в виде:

$$f(x,y) + ig(x,y) = \alpha + i\beta \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y) = \alpha, \\ g(x,y) = \beta. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение над $\mathbb{C}$ эквивалентно системе двух уравнений над $\mathbb{R}$. **Утверждение:** систему решить трудно.

Пойдем другим путем.

79. Возведение $z \in \mathbb{C}$ в степень n проще всего выполнять в полярных координатах:

$$\text{если } z = (r,\varphi)_p, \text{ то } z^n = (r,\varphi)_p^n = (r^n, n\varphi \,(\mathrm{mod}\, 2\pi))_p.$$

Последняя формула называется формулой Муавра; в тригонометрической форме формула Муавра выглядит так:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

80. Записав уравнение $z^n = A$ в полярных координатах,

$$(r,\varphi)_p = (a,\alpha)_p,$$

получаем:

$$r^n = a \Rightarrow r = \sqrt[n]{a} \ (r \geqslant 0!),$$

$$n\varphi \,(\mathrm{mod}\, 2\pi) = \alpha, \text{ т.е. } n\varphi = \alpha + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi = \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n} = \varphi_k,$$

и $z_k = (\sqrt[n]{a}, \varphi_k)_p$ будут корнями исходного уравнения. Поскольку φ_k рассматриваются по модулю 2π, достаточно взять $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ (т.е. среди z_k будут только n различных).

Изобразите найденные нами корни уравнения $z^n = A$ — числа $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ — на комплексной плоскости. (Какого вида многоугольник образуют эти точки, и почему?)

81. Итак, $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall A \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ уравнение $z^n = A$ имеет ровно n корней:

$$z_k = \left(\sqrt[n]{|A|};\ \frac{1}{n}\arg A + k\frac{2\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, 2\dots, n-1.$$

(Докажите (геометрически), что сума корней равна нулю: $\sum\limits_{k=0}^{n-1} z_k = 0$.)

Замечание. Здесь опять выявилось большое отличие комплексного случая от действительного: если двучленные уравнения над $\mathbb{R}$ имеют 0, 1 или 2 решения, то двучленное уравнение над $\mathbb{C}$ имеет столько решений, какова его степень (за исключением тривиального уравнения $z^n = 0$ — оно имеет единственное решение $z_0 = 0$).

82. Примеры уравнений (найдите их корни):

а) $z^n + 1 = 0$;	д) $1 + z + z^2 + z^3 = 0$;
б) $z^2 + i = 0$;	е) $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$;
в) $z^3 = 1$;	ж) $1 - z^2 + z^4 - z^6 = 0$;
г) $z^5 = 1$;	(уравнения е)–ж) сведите к двучленным).

83. Осторожно! В комплексном случае обозначение $\sqrt[n]{A}$ $(A \in \mathbb{C})$ употребляется для *множества всех n* корней уравнения $z^n = A$.

Функции $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ (аналогичной $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ для $x \in \mathbb{R}$) нет! (Она есть, но «многозначная»!).

84. Итак, введя комплексные числа, мы смогли решить все квадратные уравнения, также простейшие — двучленные — уравнения произвольной степени. У этих уравнений в поле $\mathbb{C}$ всегда есть корни. Оказывается, справедлива следующая поразительная теорема.

Основная теорема алгебры.

$$n \geqslant 1 \quad\Rightarrow\quad \forall\, P_n(z) \in \mathbb{C}[z]\ \ \exists\, z_0 \in \mathbb{C} \text{ т.ч. } P_n(z_0) = 0.$$

(В частности, любое уравнение с действительными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень! Напомним, что мы заботились лишь об одном уравнении — $x^2 + 1 = 0$!).

85. Алгебраический подход (в духе тезиса 78) к доказательству этой теоремы (ОТА) ничего не проясняет. Первое строгое (стыдливо-геометрическое) доказательство ОТА дал в 1799 г. Гаусс (геометрическую интерпретацию доказательства он утаивал до 1833 г. — тогда геометрия считалась неприличной!). Его идея такова. Перепишем, как в т. 78, уравнение в виде системы. Каждое из уравнений системы задает некоторую кривую не плоскости (x, y), и достаточно показать, что две полученные кривые пересекаются!

Мы обсудим более современное доказательство ОТА — с помощью геометрии отображений $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$.

§ 8. Отображения $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ и существование корней.

«Быть иль не быть, вот в чем вопрос.»
(Шекспир, «Гамлет»)

86. Любая формула $w = f(z)$ задает отображение $f : z \mapsto w = f(z)$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в себя. Существование решения уравнения $f(z) = 0$ эквивалентно существованию точки, переходящей при отображении f в точку 0. Отображения, заданные формулами, нередко имеют разумную геометрическую интерпретацию.

87. Интерпретация некоторых линейных отображений.

$$z \mapsto w = az + b, \quad \text{где } a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0.$$

а) $z \mapsto z + z_0$;
б) $z \mapsto e^{i\alpha} z$;
в) $z \mapsto e^{i\alpha} z + b$;
г) $z \mapsto kz$ $(k \in \mathbb{R},\ k > 0)$;
д) $z \mapsto ke^{i\alpha} z$.
(Укажите геометрический смысл каждого из этих отображений.)

88. Алгебраическая запись геометрических преобразований:
а) $R_{z_0}^{\alpha}$ (поворот около точки z_0 на угол α),
б) $H_{z_0}^{k}$ (гомотетия с центром в z_0 и с коэффициентом k),
в) $Z_{z_0}^{k,\alpha}$ (поворотная гомотетия с центром в z_0).
(Каждое из этих преобразований запишите как линейное отображение комплексной плоскости в себя; начните со случаев $z_0 = 0$.)

89. Классификация линейных отображений $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$.

$$\text{Отображение } w = az + b \text{ есть } \begin{cases} \text{перенос при } a = 1; \\ \text{поворот при } |a| = 1,\ a \neq 1; \\ \text{гомотетия при } a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1; \\ \text{поворотная гомотетия в остальных случаях.} \end{cases}$$

(Докажите. Для трех последних преобразований найдите центры по известным коэффициентам a и b.)

90. С помощью линейных отображений $z \mapsto az + b$ весьма удобно отыскивать композиции геометрических преобразований (ибо ничего не стоит выписать композицию линейных функций).

А. Для композиции поворотов

$$R_0^{\alpha} \circ R_1^{\beta} \text{ при } (\alpha, \beta) = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

найдите центры и углы.

Б. Выясните, какими преобразованиями могут оказаться композиции:
а) двух поворотов,

б) двух гомотетий,

в) двух поворотных гомотетий,

г) переноса с одним из упомянутых преобразований?

91. Теорема о трех центрах гомотетий. $H^{k_2}_{z_2} \circ H^{k_1}_{z_1} = H^{k_2 k_1}_{z_3}$, причем центры z_1, z_2, z_3 этих трех гомотетий лежат на одной прямой. (Докажите.)

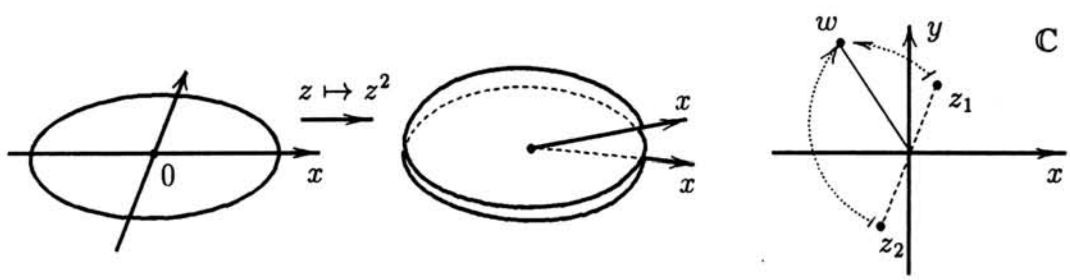
Иллюстрация: точки пересечения трех пар общих внешних касательных трех произвольных окружностей лежат на одной прямой.

92. Перейдем от линейных к произвольным полиномиальным отображениям $z \mapsto w = P_n(z)$ ($P_n(z) \in \mathbb{C}[z]$). Совсем простой геометрической интерпретации эти отображения при $n \geqslant 2$ уже не имеют, однако кое-что про них можно сказать.

93. Квадратичные отображения. Отображение $z \mapsto w = z^2$ удобно рассмотреть в полярных координатах:

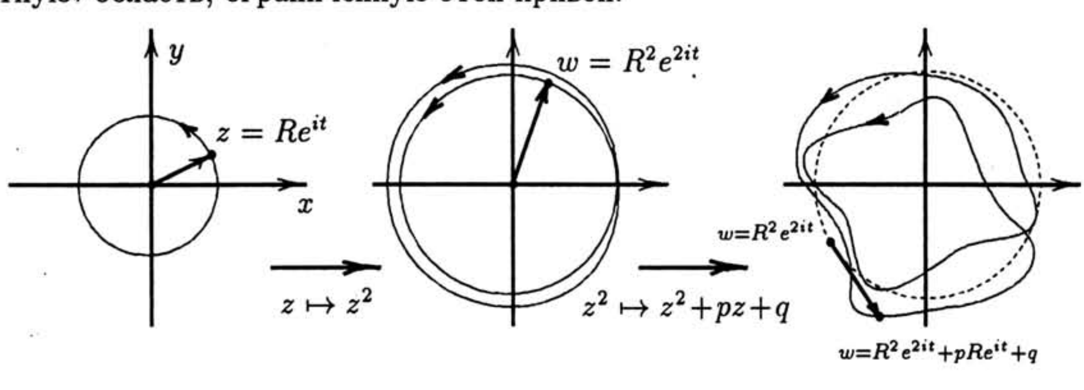
$$z \mapsto z^2: \ (r, \varphi)_p \mapsto (r^2, 2\varphi)_p.$$

Комплексная плоскость при этом отображении как бы дважды накладывается сама на себя: в одну точку $w = (\rho, \psi)_p$ переходят две точки $z_1 = \left(\sqrt{\rho}, \frac{\psi}{2}\right)$ и $z_2 = \left(\sqrt{\rho}, \frac{\psi}{2} + \pi\right)$ (два корня уравнения $z^2 = w$).



Квадратичные отображения общего вида $z \mapsto w = z^2 + pz + q$ ($p, q \in \mathbb{C}$) преобразуют комплексную плоскость менее понятным образом. Однако при этом отображении в каждую точку $w \in \mathbb{C}$ по-прежнему переходят ровно две точки — за одним исключением (докажите и найдите «исключение»).

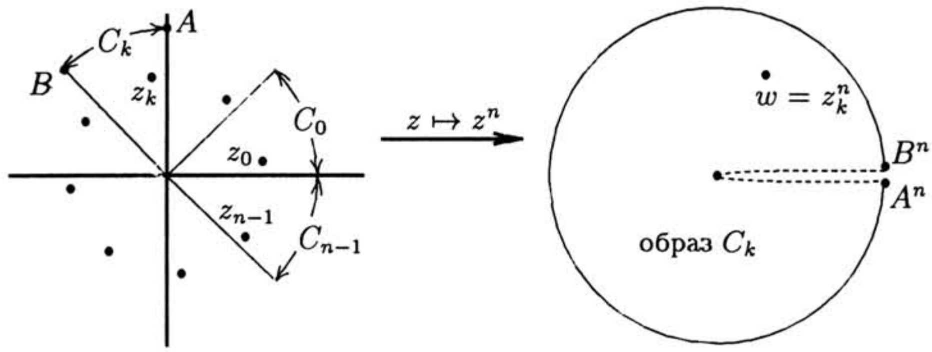
Если рассмотреть окружность $|z| = R$ ($z = Re^{it}$), то при отображении $w = z^2$ она переходит в окружность $|w| = R^2$, но проходимую дважды: $w = Re^{2it}$. При общем отображении $w = z^2 + pz + q$ окружность $|z| = R$ переходит в кривую $w = R^2 e^{2it} + pRe^{it} + q$, точки которой получаются из соответствующих точек двойной окружности $|w| = R^2$ сдвигами на $pRe^{it} + q$. Круг $|z| \leqslant R$ переходит в «двулистную» область, ограниченную этой кривой.



94. Отображение $z \mapsto w = z^n: \ (r, \varphi)_p \mapsto (r^n, n\varphi)_p$, состоит в n-кратном наворачивании комплексной плоскости на себя: при этом отображении каждый из углов-секторов

$$C_k = \left\{ z \,\middle|\, k\frac{2\pi}{n} \leqslant \arg z \leqslant (k+1)\frac{2\pi}{n} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

переходит на всю плоскость w, и в каждую из точек w переходит ровно n точек z (по одной из каждого сектора C_k) — эти точки суть корни двучленного уравнения $z^n = w$.



Рассмотрим общее полиномиальное отображение

$$z \mapsto w = P_n(z) = z^n + a_{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = z^n + Q_{<n}(z).$$

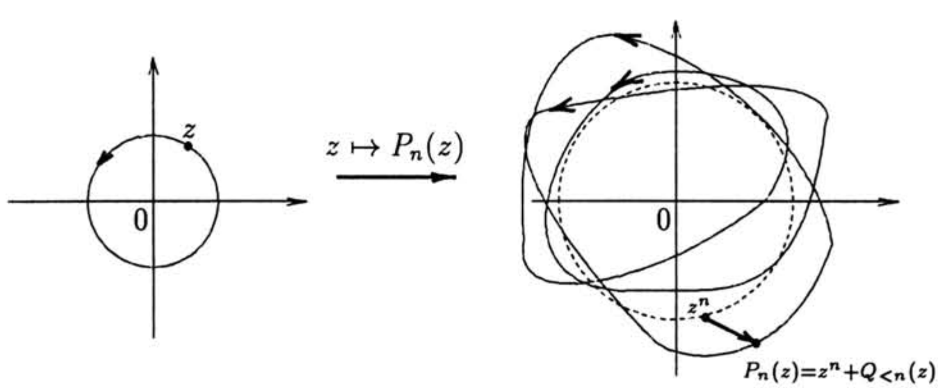
Образ окружности $|z| = R$ $(z = Re^{it})$ при этом отображении есть кривая:

$$\Gamma_R = \left\{ z = R^n e^{nit} + a_{n-1} R^{n-1} e^{(n-1)it} + \cdots + a_1 R e^{it} + a_0 \,\middle|\, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \right\}.$$

Точки кривой Γ_R получаются из соответствующих точек $w = R^n e^{nit}$ окружности $|w| = R^n$, проходимой n раз (при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$) сдвигами на

$$a_{n-1} R^{n-1} e^{(n-1)it} + \cdots + a_1 R e^{it} + a_0 = Q_{<n}(Re^{it}).$$

Кривая Γ_R, таким образом, представляет собою пошевеленную n-кратную окружность $|w| = R^n$. Ясно, что кривая Γ_R является границей образа круга $\{|z| \leqslant R\}$ при рассматриваемом полиномиальном отображении.



Заметим, что вопрос о том, сколько точек при отображении $z \mapsto P_n(z)$ переходят в данную точку w, эквивалентен вопросу о числе корней уравнения $P_n(z) = w$.

95. Теперь мы в состоянии уяснить, почему справедлива ОТА (основная теорема алгебры — см. т. 84): любое полиномиальное уравнение $P_n(z) = 0$ над $\mathbb{C}$ имеет хотя бы один корень. Геометрически это означает, что при отображении $z \mapsto P_n(z)$ в точку $w = 0$ переходит хотя бы одна точка z_0. Чтобы увидеть это, рассмотрим круг $K_R = \{|z| \leqslant R\}$ большого радиуса и его образ $\widetilde{K}_R$ при отображении $z \mapsto P_n(z)$. Представим отображение $z \mapsto P_n(z)$ в виде композиции

$$z \mapsto z^n \mapsto z^n + Q_{<n}(z) = P_n(z).$$

При первом отображении круг K_R n раз накручивается на круг K_{R^n} так, что его границей становится n-кратная окружность $w = R^n e^{nit}$. При втором отображении этот n-кратный круг деформируется, его граница сдвигается, как описано в т. 94, но если R достаточно велико, то величина сдвига значительно меньше радиуса круга K_{R^n}, т.е. R^n;

$$|Q_{<n}(Re^{it})| \leqslant n \cdot (\max |a_k|) \cdot R^{n-1} \ll R^n.$$

и поэтому точка $w = 0$ остается внутри кривой Γ_R (границы образа $f(K_R)$ круга K_R). Отсюда ясно, что образ круга K_R при отображении $z \mapsto w = P_n(z)$ содержит точку $w = 0$, т.е. в точку $w = 0$ переходит хотя бы одна точка $z_0 \in \mathbb{C}$, что и требовалось уяснить.

96. Этот набросок (тезисы 94—95) при желании нетрудно превратить в строгое доказательство (см. книжки: Курант и Роббинс, «Что такое математика»[1], гл. V, приложение 3; Стинрод и Чинн, «Первые понятия топологии», гл. 2). Мы не будем этого делать, но будем в дальнейшем пользоваться ОТА.

97. Отображения $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, соответствующие различным функциям $w = f(z)$, весьма интересны и безотносительно к ОТА — своими геометрическими свойствами и приложениями (например, с их помощью рассчитывают профили крыла самолета, корабельного винта и т.д.).

98. Примеры. Докажите, что отображения:

А) $f : z \mapsto w = \frac{z-1}{z+1}$ переводит окружность $|z| = 1$ на мнимую ось $i\mathbb{R}$;

Б) $f : z \mapsto w = \frac{z+i}{z-i}$ переводит действительную ось $\mathbb{R}$ в окружность $|z| = 1$;

В) $f : z \mapsto w = \frac{1}{z}$ переводит прямые $x = c$ и $y = c$ (где $x + iy = z$) в окружности, проходящие через точку $w = 0$.

99.** Отображения вида $f : z \mapsto w = \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, называются *дробно-линейными*.

Свойства дробно-линейных отображений.

А. *Сохранение (инвариантность) двойного отношения:* если точки w_k суть образы точек z_k при дробно-линейном отображении ($k = 0, 1, 2, 3$), то

$$\frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0} : \frac{w_2 - w_3}{w_1 - w_3} = \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} : \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}.$$

---

[1] Книга переиздана в 2001 г. издательством "Регулярная и хаотическая динамика" (Ижевск) при участии Фонда математического образования и просвещения — *прим. ред.*

Б. *«Круговое свойство»:* при любом дробно-линейном отображении окружности и прямые переходят в окружности и прямые (при этом прямая может перейти в окружность и наоборот). Указание: см. т. 77. Д.

В. *Сохранение углов (конформность):* углы между окружностями (и прямыми) не меняются при любом дробно-линейном отображении.

Дробно-линейные отображения играют важную роль при построении так называемой модели Пуанкаре плоскости Лобачевского.

100. Оказывается, любое «приличное» отображение $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ обладает свойством сохранения углов. Грубо говоря, это объясняется тем, что углы между кривыми — понятие локальное, а любое «приличное» отображение локально можно рассматривать как линейное, $z \mapsto w \approx az + b$. Осталось заметить, что при линейных отображениях углы сохраняются.

Однако вернемся к алгебре.

§ 9. Общая теория многочленов над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$

(Следствия из основной теоремы алгебры)

«Я приближался к месту моего назначения.»
(А. С. Пушкин «Капитанская дочка»)

101. Итак, справедлива ОТА — основная теорема алгебры:

$$\forall\, P(z) \in \mathbb{C}[z]\ \deg P \geqslant 1 \implies \exists\, z_0 \in \mathbb{C} \text{ т.ч. } P(z_0) = 0,$$

т.е. любое полиномиальное уравнение над $\mathbb{C}$ (в частности, над $\mathbb{R}$) имеет хотя бы один комплексный корень.

Теперь мы применим общую теорию многочленов (см. гл. II) к многочленам над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$, чтобы получить из ОТА фундаментальные следствия.

(Отметим, что одна из важнейших причин широкого употребления комплексных чисел в физике (например, в квантовой физике) — это именно справедливость ОТА.)

102. Теорема о разложении над полем $\mathbb{C}$. Любой многочлен $P_n(z) \in \mathbb{C}[z]$ представляется в виде

$$P_n(z) = a(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n), \quad \text{где } a, z_k \in \mathbb{C}.$$

(Замечание. Наиболее аккуратное и короткое доказательство этого очевидного следствия ОТА — индукция по n.)

103. В частности, любой многочлен над $\mathbb{R}$ разлагается в произведение комплексных двучленов:

$$P_n(x) = a(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n),\ a \in \mathbb{R},\ z_k \in \mathbb{C}.$$

Заметим, что если квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ с действительными p и q имеет комплексные корни z_1, z_2, то они комплексно сопряжены друг другу: $z_2 = \overline{z}_2$. Это наводит на такое утверждение.

Лемма о комплексных корнях действительного многочлена. Если $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ и для $z_0 \in \mathbb{C}$ $p(z_0) = 0$, то и $P(\overline{z}_0) = 0$. (Докажите.)

104. Таким образом, комплексные корни многочленов над $\mathbb{R}$ компонуются в пары комплексно сопряженных, и для каждого корня z_0 из $P_n(x)$ можно вынести сразу два линейных множителя:

$$P_n(x) = (x - z_0)(x - \overline{z}_0)P_{n-2}(x), \quad \text{где } P_{n-2}(x) \in \mathbb{C}[x] \text{ (!)}.$$

Если $z_0 = \alpha + i\beta$, то $(x - z_0)(x - \overline{z}_0) = \Big((x-\alpha) - i\beta\Big)\Big((x-\alpha) + i\beta\Big) = (x-\alpha)^2 + \beta^2$. Таким образом, два комплексно-сопряженных сомножителя можно заменить одним действительным — вида $x^2 + px + q$, где $p^2 - 4q < 0$ (проверьте!)

$$P_n(x) = (x^2 + px + q)P_{n-2}(x).$$

Из теоремы о делении следует, что $P_{n-2}(x) \in \mathbb{R}[x]$.

105. Теорема о разложении над полем $\mathbb{R}$. Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ представляется в виде

$$P(x) = a(x - x_1)\cdots(x - x_k)(x^2 + p_1x + q_1)\cdots(x^2 + p_l + q_l),$$

где $a, x_r, p_s, q_s \in \mathbb{R}$ и $p_s^2 - 4q_s < 0$ (т.е. трехчлены $x^2 + p_sx + q_s$ нельзя разложить дальше). (Докажите индукцией по n.)

106. Из теоремы о разложении вытекает описание всех неприводимых многочленов над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ (см. т. 33 и 45):
над $\mathbb{C}$ неприводимыми являются только $p_1(z) = az + b$ (или $z - z_0$),
над $\mathbb{R}$ — $p_1(x) = ax + b$ (или $x - x_0$) и $p_2(x) = ax^2 + bx + c$, где $b^2 - 4ac < 0$.

107. Конечно, возникает вопрос о единственности разложений из т. 102 и 105. Заметим, что если $P_n(z) = a(z - z_1)\cdots(z - z_n)$, то корнями $P_n(z)$ являются числа $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и только они. Если все z_k различны, то набор всех корней однозначно определяется многочленом $P_n(z)$ и однозначно определяет разложение $P_n(z)$. Разложение единственно и в том случае, когда среди $z_1, z_2, \ldots, z_n$ есть одинаковые — тогда разложение определяется набором корней и их *кратностей.*

Определение. Корень z_0 многочлена $P(z)$ называется *кратным корнем кратности* $\nu \geqslant 1$, если $P(z)$ делится на $(z - z_0)^\nu$, но не делится на $(z - z_0)^{\nu+1}$.

108. Аналогично устанавливается и единственность разложения над $\mathbb{R}$:

$$P(x) = a(x - x_1)\cdots(x - x_k)(x^2 + p_1x + q_1)\cdots(x^2 + p_l + q_l).$$

Сравнивая в этом равенстве степени левой и правой частей, получим соотношение: $n = k + 2l$. Следовательно, если n нечетно, то и k нечетно $\Rightarrow k \neq 0$. Тем самым независимо от теоремы о промежуточном значении (но с использованием ОТА) доказана следующая

Теорема. Любой многочлен нечетной степени над полем $\mathbb{R}$ имеет по крайней мере один действительный корень.

109. Система Виета. Разложим приведенный (т.е. со старшим коэффициентом 1) многочлен над $\mathbb{C}$ (или, если это возможно, над $\mathbb{R}$) на линейные множители:

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n).$$

раскрыв в последнем выражении скобки, из написанного равенства получим систему соотношений между корнями многочлена (взятыми столько раз, какова их кратность) и коэффициентами многочлена — так называемую систему Виета (выпишите ее).

110. Теорема Виета.

А. Корни $z_1, \dots, z_2$ уравнения $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$, взятые каждый столько раз, какова его кратность, дает решение $(z_1, \dots, z_n)$ системы Виета данного уравнения:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + \dots + z_n = -a_{n-1}, \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n = a_{n-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n a_0. \end{cases}$$

Б. Обратно, если $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ — решение выписанной системы Виета, что $z_1, z_2, \dots, z_n$ — *полный набор* корней соответствующего уравнения (т.е. это все корни уравнения, и каждый встречается в наборе $z_1, z_2, \dots, z_n$ столько раз, какова его кратность).

(Таким образом, все равно, что решать — полиномиальное уравнение, или же его систему Виета!)

(Докажите теорему Виета.)

§ 10. Формулы для корней уравнения.

«Кардано, у которого отвращение к применению отрицательных чисел было меньше, чем у его современников, ... осмелился даже (не без ораторских предосторожностей) ... оперировать с выражениями, содержащими квадратные корни из отрицательных чисел.»

(Н. Бурбаки)

111. Итак, любое уравнение $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ имеет, с учетом кратностей, n комплексных (или действительных) корней. Остается научиться их находить. При $n = 1$ задача тривиальна. При $n = 2$ имеем простые формулы:

$$x^2 + px + q = 0 \iff x = x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

где $\pm\sqrt{c}$ — условное обозначение для двух (комплексных) корней из (комплексного) числа c. Эти формулы получаются приведением уравнения к виду $(x+\alpha)^2=\beta$.

112. Попытаемся написать аналогичные формулы для корней общего кубического уравнения

$$x^3+ax^2+bx+c=0.$$

Идея: заменой $x+\alpha=z$ привести это уравнение к простейшему виду $z^3=C$, т.е. «убить» коэффициенты при 1-ой и 2-ой степенях.

Подставив в уравнение $x=z-\alpha$, получим:

$$(z-\alpha)^3+a(z-\alpha)^2+b(z-\alpha)+c=0,$$

т.е.

$$z^3+(-3\alpha+a)z^2+(3\alpha^2-2a\alpha+b)z+C=0.$$

Мы хотим, чтобы $-3\alpha+a=0$, откуда $\alpha=\frac{a}{3}$. Но тогда коэффициент при z равен

$$3\alpha^2-2a\alpha+b=-\frac{a^2}{3}+b,$$

и ни с какой стати не обязан равняться 0! Идея провалилась.

113. То, что предыдущая идея ничего не сможет дать, нетрудно увидеть сразу: если после замены $x+\alpha=z$ уравнение приводится к виду $z^3=C$, то корни $x_1,\ x_2,\ x_3$ исходного уравнения на комплексной плоскости $\mathbb{C}\ni x$ образуют равносторонний треугольник, а так бывает далеко не всегда!

Кое-что мы таки получили: произвольное кубическое уравнение линейной заменой можно свести к *укороченному* кубическому —

$$z^3+pz+q=0.$$

114. Далее мы будем иметь дело уже с укороченным уравнением, которое удобно записать в виде:

$$x^3+Ax=B.$$

При $A=0$ или $B=0$ уравнение легко решается; интересующий нас случай $A\neq 0$, $B\neq 0$.

Еще идея: решать вместо уравнения его систему Виета. Имеем:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=A, \\ x_1x_2x_3=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=-(x_1+x_2), \\ x_3(x_1+x_2)=A-x_1x_2, \\ x_3\cdot x_1x_2=B. \end{cases}$$

После исключения x_3 и замены $x_1+x_2=u,\ x_1x_2=v$ получается вроде бы простая система:

$$\begin{cases} -u^2=A-v, \\ -uv=B, \end{cases}$$

НО ... ... ?!

И эта идея провалилась.

115. Формула дель Ферро (Кардано – Тарталья). Число x, заданное формулой

$$x = \sqrt[3]{\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{B}{2} - \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}},$$

удовлетворяет уравнению

$$x^3 + Ax = B \qquad (!)$$

(Проверьте, предполагая, что A и B действительны, а корни (радикалы) — арифметические.)

Эту формулу впервые в 1500 году написал Сципион дель Ферро (Кардано и Тарталья лишь спорили друг с другом). В принципе до нее нетрудно догадаться (например, можно привлечь соображения размерности, симметрии и наибольшей простоты).

116. Пример. Уравнение $x^3 + x = 2$ имеет действительный корень $x_1 = 1$, разлагается: $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$ — и не имеет больше действительных корней. Формула дель Ферро дает:

$$x_1 = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{28}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{28}{27}}} = 1 \qquad (!),$$

если оба кубических радикала брать действительными. Чтобы получить комплексные корни рассматриваемого уравнения, нужно значение хотя бы одного из радикалов брать комплексным; тем самым для двух корней мы получаем из формулы дель Ферро 8 возможностей!

Эйлер первым указал, как выбирать значения радикалов в формуле дель Ферро; уточненные формулы, дающие ровно 3 корня, называются формулами дель Ферро – Эйлера (Кардано – Тарталья).

117. Формулы дель Ферро – Эйлера. Случай $\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27} > 0$.

Введем обозначения для кубических корней из 1:

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad \varepsilon_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \overline{\varepsilon}_1.$$

Если $C \in \mathbb{R}$, то три значения комплексного кубического радикала $\sqrt[3]{C}$ записываются в виде:

$$\varepsilon_k \sqrt[3]{C}, \text{ где } \sqrt[3]{C} \text{ — действительный корень, } k = 0, 1, 2.$$

Формула дель Ферро, таким образом, дает следующие 9 «кандидатов» в корни укороченного кубического уравнения $x^3 + Ax = B$:

$$x = x_{k,l} = \varepsilon_k \sqrt[3]{\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}} + \varepsilon_l \sqrt[3]{\frac{B}{2} - \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}}, \quad k, l = 0, 1, 2.$$

Вычислим $x^3 + Ax$:

$$x^3 + Ax = B + \varepsilon_k \varepsilon_l \sqrt[3]{-A^3} x + Ax = B \text{ в случае } \varepsilon_k \varepsilon_l = 1, \text{ т.е. } \varepsilon_l = \frac{1}{\varepsilon_k} = \overline{\varepsilon}_k.$$

Таким образом, правильные формулы (дель Ферро – Эйлера) записываются так:

$$x = x_k = \varepsilon_k \sqrt[3]{\ldots} + \overline{\varepsilon}_k \sqrt[3]{\ldots}, \quad k = 0, 1, 2.$$

118. Формулы дель Ферро – Эйлера. Случай действительных A и B.

В этом случае уравнение $x^3 + Ax = B$ можно исследовать с помощью математического анализа — рассматривая сечения графика $y = x^3 + Ax$ прямыми $y = B$. Найдем производную $(x^3 + Ax)' = 3x^2 + A$. Отсюда получаем следующее.

А. Если $A > 0$, то при любом B уравнение $x^3 + Ax = B$ имеет один действительный корень (и два комплексно-сопряженных). В этом случае $\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27} > 0$, и корни даются формулами из т. 117.

Б. Если $A < 0$, то функция $y = x^3 + Ax$ имеет локальные максимум и минимум:

$$y_{\max(\min)} = \mp \frac{2A}{3} \sqrt{-\frac{A}{3}} \quad \text{при} \quad x = \pm \sqrt{-\frac{A}{3}}.$$

В случае $|B| > y_{\max}$, т.е. $B^2 > y^2_{\max}$ или $B^2 + \frac{4A^3}{27} > 0$, уравнение имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня, как и выше.

В случае $|B| < y_{\max}$, т.е. $B^2 + \frac{4A^3}{27} < 0$, уравнение имеет три действительных корня.

Заметим, что в этом случае, несмотря на то, что все три корня x_1, x_2, x_3 действительны, под кубическим радикалом в формуле дель Ферро стоят комплексные числа вида $\alpha \pm i\beta$. Именно это обстоятельство (а отнюдь не желание «научиться решать» уравнение $x^2 + 1 = 0$) привело математиков XVI–XVII к необходимости введения комплексных чисел! Формула имеет вид $x = \sqrt[3]{\zeta} + \sqrt[3]{\overline{\zeta}}$, и если выбирать комплексно-сопряженные значения радикалов (их три), то мы как раз и получим корни $x \in \mathbb{R}$.

119. Обратимся теперь к общему уравнению 4-ой степени

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Как мы уже видели, сводить его к уравнению вида $z^4 = C$ бессмысленно (ничего не получится). Выясним, нельзя ли заменой $x + \alpha = z$ свести это уравнение к биквадратному:

$$z^4 + Az^2 + B = 0.$$

Биквадратное уравнение можно переписать в виде $(z^2 + p)^2 = q$, откуда $z_{1-4} = \pm\sqrt{-p \pm \sqrt{q}}$. Выведите отсюда, что исходное уравнение сводится к биквадратному тогда и только тогда, когда его корни связаны соотношением $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. (В случае $p, q \in \mathbb{R}$ нарисуйте на комплексной плоскости 4 возможных способа расположения корней z_{1-4} биквадратного уравнения.)

Таким образом, отнюдь не любое уравнение степени 4 можно свести к биквадратному (с помощью формул Виета напишите условие на коэффициенты, при котором выполнено «условие биквадратности» $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$). Пойдем другим путем.

120. Схема Феррари решения уравнений 4-ой степени. Во-первых, «укоротим» исходное уравнение: заменой $x + \alpha = z$ «убьем» коэффициент при 3-ей степени — для этого достаточно взять $\alpha = \frac{a}{4}$. Полученное уравнение запишем в виде:

$$z^4 = Az^2 + Bz + C.$$

Попробуем теперь подобрать y так, чтобы в правой части уравнения

$$(z^2 + y)^2 = \left(Az^2 + Bz + C\right) + \left(2yz^2 + y^2\right),$$

равносильного укороченному, получился полный квадрат. Трехчлен

$$(A + 2y)z^2 + Bz + (C + y^2)$$

является полным квадратом в том случае, когда его дискриминант равен 0:

$$B^2 - 4(A + 2y)(C + y^2) = 0 \ \text{ или } \ 8y^3 + 4Ay^2 + 8Cy + 4AC - B^2 = 0.$$

Таким образом, y должно удовлетворять кубическому уравнению (т.н. *разрешающему* уравнению для данного уравнения степени 4), а кубические уравнения мы умеем решать!

Итак, найдя y из разрешающего уравнения, приведем укороченное уравнение к виду:

$$(z^2 + y)^2 = \alpha(z + \beta)^2.$$

Это же уравнение разлагается на два квадратных (если $\alpha < 0$, то комплексных), и задача решена. В принципе можно проделать выкладки и выписать формулы для корней исходного уравнения (содержащие квадратные и кубические радикалы). Впервые их в 1545 г. написал Феррари — ученик Кардано.

121. Естественно теперь попытаться аналогичным образом решить общее уравнение степени 5, потом 6, и т.д. — выписать формулы для их корней. Эти и были заняты математики в течении трех веков — с 1545 до 1831 года. Попытки были безуспешными, хотя «по дороге»было получено много других изящных результатов. Наконец, в 1831 г. Абель и Галуа доказали, что общее уравнение степени $\geqslant 5$ неразрешимо в радикалах — его корни нельзя выразить через коэффициенты с помощью алгебраических операций, т.е. сложения, умножения, вычитания, деления и извлечения корней (любых степеней)!

122. Замечания.

А. Конечно, среди уравнений высших степеней есть и разрешимые в радикалах, например,

$$z^{17} = a \text{ или } (x - a)(x^2 + px + q)(x^2 + rx + a) = P_5(x) = 0.$$

Б. С другой стороны, на радикалах «свет клином не сошелся» — например, корни общего уравнения степени 5 можно выписать, используя («вместо радикалов») так называемые эллиптические функции.

В. Из теоремы Абеля – Галуа (после некоторого уточнения формулировки) следует, что не любое алгебраическое число с помощью радикалов выражается через рациональные числа (замечание в 1 части тезисов).

Г. Мы не будем доказывать теорему Абеля – Галуа — это весьма красиво, но довольно хлопотно (теория Абеля – Галуа положила начало теории групп) — однако, мы продемонстрируем одну из идей доказательства (по-видимому, принадлежащую Гауссу — рассмотрение расширение полей и их автоморфизмов) на модельной задаче: на проблеме разрешимости уравнений в квадратных радикалах.

123. Еще об уравнениях степени 4.

А. Выясните, нельзя ли укороченное уравнение $z^4 = Az^2 + Bz + C$ решить так: сделать замену $z = w + y$ и подобрать y так, чтобы в правой части полученного уравнения

$$(w+y)^4 = A(w+y)^2 + B(w+y) + c$$

стоял полный квадрат (после чего уравнение разлагается).

Б. Проверьте, что корни уравнения

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$$

задаются весьма изящными формулами Эйлера:

$$z = \frac{1}{2}(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}),$$

где $y_{1,2,3}$ — корни так называемого *резольвентного* уравнения

$$y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)y = q^2 = 0,$$

а значения $\sqrt{y_k}$ выбираются так, чтобы $\sqrt{y_1}\sqrt{y_2}\sqrt{y_3} = -q$. (Как можно догадаться до этих формул?)

Александр Николаевич Земляков,
кандидат педагогических наук,
ведущий научный сотрудник
лаборатории дифференциации образования
Института общего среднего образования
Российской академии образования (ИОСО РАО).

E-mail: zemmm@yandex.ru

ГДЕ ОШИБКА?

А. В. Жуков

Предлагаем вниманию читателей учебное пособие, посвященное анализу ошибок школьников в математических рассуждениях и способом их предотвращения и обнаружения. Автор пособия — Александр Владимирович Жуков — преподаватель детского компьютерного клуба, г. Москва. Сокращенный вариант пособия был опубликован в журнале "Домашний лицей", №№1 – 3 за 2000 г., посвященном актуальным вопросам образования и воспитания школьников. Адрес редакции журнала "Домашний лицей": 117630, Москва, Старокалужское шоссе, 1; подписной индекс в каталоге Роспечати — 71605.

В нашем журнале пособие публикуется в двух номерах, окончание — в следующем номере.

Содержание.

На ошибках учатся, ...
но лучше учиться на ошибках других.

Ошибаются все.

Человек сколько живет, столько и ошибается — уж такое он грешное создание. Не надо думать, что это только у вас синус получился больше единицы, катет длиннее гипотенузы, а площадь круга — $S = \sqrt{8}r^2$ (r – радиус). В последнем факте был уверен византийский ученый XI в. Михаил Пселл. Он предполагал, что для площади круга лучше всего подходит формула $S = \sqrt{S_1 S_2}$, где S_1, S_2 — площади вписанного в круг и описанного около него квадратов, из неё как раз и следует, что число π *«равно»* $\sqrt{8}$. Индийский математик Брахмагупта (VII в.) считал, что площадь всякого четырёхугольника со сторонами a, b, c, d выражается формулой $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$, что неверно уже для большинства ромбов (пожалуйста, проверьте). Французский математик XVII в. Пьер Ферма утверждал, что для любого натурального n все числа вида $2^{2^n}+1$ простые, то есть имеют делителем только себя и единицу, но его заблуждение опроверг другой известный математик XVII в. Леонард Эйлер, показав, что число $2^{2^5}+1$ делится на 641 и, следовательно, простым числом не является. Подобных примеров в истории математики известно много. Для нас же важен практический вывод, который следует из рассмотрения всех этих примеров: ошибаться свойственно всем людям без исключения, в том числе и великим математикам. Следовательно, от ошибок не застрахованы и экзаменаторы, проверяющие вашу конкурсную работу. Они об этом знают, и для исправления возможных своих ошибок придумали даже специальное подразделение, работающее во время конкурсных экзаменов, — так называемую комиссию по рассмотрению аппеляций, или аппеляционную комиссию (слово аппеляция происходит от латинского appellatio — обращение).

Если вы абсолютно уверены в том, что в вашей конкурсной работе никаких ошибок нет, а вам несправедливо занизили бал, — смело обращайтесь в эту комиссию. Опыт работы аппеляционных комиссий показывает, что часть заявлений абитуриентов (хотя сравнительно и небольшая) бывает обоснованной и решается в пользу заявителей.

Из-за чего случаются ошибки?

Прежде всего — из-за нерационально спланированных занятий в преддверии экзаменов. Такие явления, как забывчивость, рассеянность, зачастую возникают вследствие «и денного и ночного» корпения над учебниками. «Перед смертью не надышишься» — гласит известная поговорка, «не вдруг Москва строилась» — утверждает другая. Нельзя за 2 – 3 дня «вызубрить» то, для хорошего усвоения чего требуются годы и годы. Поэтому улучшайте свои знания и шлифуйте свою технику загодя, помятуя о том, что во время подготовки к экзаменам у вас обязательно должен быть хороший и полноценный отдых.

Хуже обстоят дела, когда рассеянность — не следствие переутомления, а черта характера. Однако, если вы — человек достаточно целеустремленный и способны преодолевать трудности (а иначе зачем вам поступать в вуз?), то с этой отрицательной чертой характера вполне можно совладать.

Не позволяй душе лениться! —
Чтоб в ступе воду не толочь,
Душа обязана трудиться
И день и ночь, и день и ночь!

Николай Заболоцкий.

Очень дисциплинируют характер человека занятия программированием. Знаете ли вы, что у программистов существует поверье: во всякой вновь написанной программе имеется по крайней мере одна ошибка? Педантичный и строгий учитель — компьютер — очень скрупулёзно исследует любое ваше программное творение, обратит внимание на каждую точку и запятую. А ведь «с кем поведешься, от того и наберёшься...». Конечно, можно найти и другие «дисциплинирующие» занятия, например, рисование, вязание, шахматы...

И все же, при всех остальных прекрасных душевных и деловых качествах, удача на экзамене улыбается лишь тем, у кого прочные и надежные знания. Нужно не только очень хорошо знать предмет, но и представлять, где вас могут поджидать опасные «подводные камни» — типичные ошибки, нужно уметь их распознавать и защищаться от них. К рассмотрению наиболее типичных ошибок, допускаемых абитуриентами на вступительных экзаменах по математике, мы и переходим. «Заблаговременно предупрежденный — заблаговременно вооружен!»

ЧАСТЬ I. РАЗ ОШИБКА, ДВА ОШИБКА...

1. «Дикие» ошибки

Ошибки типа $8x + 5x = 13 + 2x$, $c + \frac{a}{b} = \frac{c+a}{b}$, $ak + bk = k^2(a + b)$, $\sin 6x = 3\sin^2 x$ свидетельствуют о крайне низкой математической культуре их авторов. Они простительны для новичков, делающих первые шаги в математике, и совсем не к лицу «тертым калачам», рискнувшим испытать себя в качестве абитуриентов. У вас таких ошибок быть не должно!

2. Откуда звон? (Ошибки призрачного знания)

Ошибки следующего рассмотренного нами типа также служат индикаторами весьма низкой математической культуры, но, в отличие от совершенно непредсказуемых «диких» ошибок, в большинстве своём могут быть предсказаны и объяснены. Возникают они, как правило, на почве поверхностной эрудиции и ложных аналогий. В подобной ситуации оказываются дети, срывающие в лесу ядовитые ягоды, потому что они «так похожи на съедобные!» Ходьбу по ложному следу отмечают преподаватели английского языка, выделяя целый класс слов — так называемых «ложных друзей переводчика». Например, английское слово compositor означает наборщик, а не композитор, точно так же слово statist переводится словом статистик, а не статист, resin — вовсе не резина, а смола и т. д.

Путаница обыкновенная

Вот типичные ответы абитуриентов, знакомых с математикой «понаслышке»:

«выражение $\sin 5$ бессмысленно, так как синус не может быть больше единицы»;

«разве может $\lg x = -1$? Ведь -1 не входит в область определения логарифма!»;

«$-\cos x = \cos x$, так как $\cos x$ — функция четная»;

«$\sin(\frac{3}{2}\pi + \alpha) = \cos\alpha$, так как для угла в четвертой четверти косинус положительный»;

«если $x \leqslant 3y$, то отношение x к y равно 3» и т. п.

Коварные степени

Очень много ошибок связано с вычислениями, в которых участвуют показательные функции. В конкурсных работах можно встретить «тождества» вида $2^x 3^y = 6^{x+y}$, $2 \cdot 3^x = 6^x$ и им подобные.

Найдите ошибки в «решениях» следующих задач.

1. Решите уравнение $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

«Решение.» Избавляясь от знаменателей, имеем $2^{2+x} = 3^{2+x}$, откуда в силу равенства показателей степеней получаем $2 = 3$, а это невозможно.

Ответ. Уравнение корней не имеет.

2. Решите уравнение $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3$.

«Решение.» Из равенства $2x + x = 3$ следует $x = 1$. Как показывает проверка, корень найден правильно.

3. Решите уравнение $6^x = 2 \cdot 3^{x^2}$.

«Решение.» Запишем уравнение в виде $2^x 3^x = 2 \cdot 3^x 3^x$. Поскольку $3^x \neq 0$, то, разделив обе части этого уравнения на 3^x, получим $2^x = 2 \cdot 3^x$, откуда $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2$, или $x = \log_{\frac{2}{3}} 2$.

«Орешек» Н. Г. Чернышевского

Одна из распространенных ошибок «призрачного знания» — так называемая ошибка линейности. О ней мы поговорим ниже, а сейчас расскажем историю об известном писателе и публицисте XIX в. Николае Гавриловиче Чернышевском. 28 июня 1986 года он обращается к своему брату Александру с просьбой помочь ему найти каверзную ошибку в следующих рассуждениях.

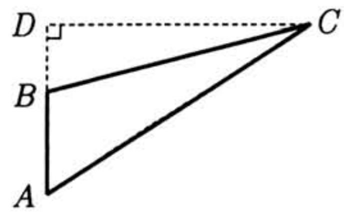


Рис. 1

Возьмем произвольный треугольник ABC и пристроим к нему прямоугольный треугольник BCD. Тогда по теореме Пифагора

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \qquad \text{и} \qquad BC^2 = CD^2 + BD^2.$$

Подставив из второго выражения $CD^2 = BC^2 - BD^2$ в первое равенство, получим

$$AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2. \tag{$*$}$$

Но $AD = AB + BD$, поэтому $AD^2 - BD^2 = AB^2$. С учетом последнего выражения равенство $(*)$ запишется так $AC^2 - BC^2 = AB^2$ или $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Аналогичным образом Чернышевский *«доказывает»* равенство $BC^2 = AC^2 + AB^2$, после чего следует парадоксальный вывод о равенстве квадрата стороны в произвольном треугольнике сумме квадратов двух других сторон, и обращается к своему брату: «Не поможешь ли уже хотя бы ты, а то придется, видимо, как Илье Муромцу, сидеть мне, добру молодцу, сиднем 30 лет? Я дал себе зарок не сходить со стула, пока не решу этой задачи, но что-то не удается».

Массовая ошибка линейности

Так преподаватели «окрестили» ошибку призрачного знания, появляющуюся в различных неверных формулах, но имеющею одну и ту же природу — *линейность.* Одну из таких ошибок «высветил» в своем письме к брату Н. Г. Чернышевский: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. В отдельных работах абитуриентов эта ошибка продолжает «светиться» до сих пор. Довольно выразительный пример этой ошибки показан в следующем «решении».

1. Решите уравнение $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1$.

«Решение.» Возведем обе части исходного уравнения в квадрат: $x+1+2x+3 = 1$, отсюда получаем $3x = -3$, $x = -1$. Проверкой убеждаемся, что корень найден правильно.

Несмотря на то, что ответ в данном решении найден правильно, но это произошло случайно — при возведении левой части уравнения в квадрат использовалось ошибочное тождество $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Вот другие примеры подобного рода «тождеств», встречающихся в работах абитуриентов:

$\sqrt{x^2+y^2} = x + y$;

$\cos^2(\alpha+\beta) = \cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta$;

$\lg^2(10x) = 1 + \lg^2 x$;

$|x+y| = |x| + |y|$;

$\cos 3\alpha + \cos\alpha = \cos 4\alpha$ и т. п.

Почему для произвольной функции так хочется написать $f(x+y) = f(x) + f(y)$? Неизвестно. На этот вопрос должны ответить психологи. Мы же отметим, что, как показал в XIX веке французский математик Огюстен Коши (1789—1857), в классе непрерывных функций, определенных на всем множестве действительных чисел, условие $f(x+y) = f(x) + f(y)$ с неизбежностью влечет $f(x) = kx$, где k — константа. Другими словами, графиком функции $y = f(x)$ является прямая линия. Отсюда и происходит слово «линейность» в характеристике ошибки.

Нужно ли определять первичные понятия?

Если бы вы, следуя древнегреческому математику Евклиду (III в. до н. э.) определили точку как «то, что не имеет частей», то экзаменаторы сочли бы ваш ответ не соответствующим современным научным воззрениям. Принято считать, что такие понятия, как точка, прямая, плоскость, натуральное число, равенство, множество являются первичными понятиями, не нуждающимися в определении.

Не бывает несущественных деталей

Математические определения отличаются от всевозможных других разъяснений четкостью и лаконичностью — они не содержат «наводящих» или второстепенных мелочей. Усваивать эти определения нужно не «в общем и целом,» а во всей их полноте, в частностях и мелких деталях. Игнорирование какого-либо, как представляется, «несущественного штришка» порой приводит к ошибкам.

Найдите ошибки в «решениях» следующих задач.

1. Решите уравнение $\sin(\frac{1}{3}\arccos x) = 1$.

«Решение.» Исходное уравнение равносильно уравнению $\frac{1}{3}\arccos x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, откуда $x = \cos(\frac{3}{2}\pi + 6\pi n) = 0$.

Ответ. $x = 0$.

2. Из бака равномерно выливается вода. Можно ли объем воды в баке V считать линейной функцией от времени t?

«Решение.» Да, мы можем принять $V(t) = V_0 - at$, где $V(t)$ — объем воды в баке на момент времени t, V_0 — начальный объем, a — скорость уменьшения объема. Указанная функциональная зависимость является линейной функцией.

3. Является ли зависимость $y(x) = (-2)^x$ показательной функцией?

«Решение.» Да, это зависимость вида $y = a^x$, то есть показательная функция.

Кажущаяся очевидность

Одно из удивительных свойств человеческой психики состоит в том, что иногда на ум приходит ответ, не вызывающий никаких сомнений в своей очевидности, но при более скрупулезном рассмотрении оказывающийся или неверным, или приближенным. Такие «скоропалительные» ответы особенно вредны на устном экзамене, где отвечающий старается произвести на экзаменатора впечатление хорошо знающего предмет человека, быстро и уверенно ориентирующегося в «технических деталях». Так, одни отвечающие, решая уравнение $(x-1)^{10} = x - 1$, мгновенно находили *«ответ»* $x = 1$, а другие — столь же мгновенно — *«ответ»* $x = 2$. Конечно, подумав не торопясь, они не потеряли бы одну из двух возможностей. А торопиться в таких случаях совсем не нужно, ведь экзамен — это не соревнование на скорость сообразительности.

Очевидное — невероятное?

Интуиция (наитие, «шестое чувство», «божья искра») — верный помощник во многих затруднительных ситуациях, но полагаться всецело на одну лишь интуицию опасно: сколь легко она протягивает руку помощи, столь легкомысленно она затем может увести в заоблачные дали своей раскрепощенной фантазии. На сей счет существует немало классических примеров. Попробуйте прикинуть, не прибегая к точным расчетам, длину диагонали прямоугольника с длинами сторон 100 метров и 1 метр — вы увидите, что «интуитивный» ответ не очень хорошо соответствует истине. Другая классическая задача связана с обручем, который плотно облегает Землю по экватору (предполагается, что Земля — идеальный шар). Если удлинить обруч на 1 *м* и равномерно приподнять над планетой — сможет ли пролезть мышь в образовавшийся зазор? (Кажется, что нет, но это — обычный подвох интуиции).

Следующий вопрос вполне может возникнуть на экзамене по математике. Будет ли произведение двух возрастающих функций также функцией возрастающей? Не торопитесь произносить ответ, который вам подсказывает интуиция.

Найдите ошибку в интуитивно очевидном «решении» следующей задачи.

1. Дан тетраэдр $ABCD$, у которого $\angle BDC = \angle CDA = \angle ADB = 90°$, $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$. Точка M, принадлежащая грани ABC, равноудалена от всех остальных граней тетраэдра. Вычислить расстояние DM.

«Решение.» Вычислим объем тетраэдра $ABCD$ двумя способами. С одной стороны $V = \frac{1}{3} \cdot CD \cdot S_{\triangle ADB} = \frac{1}{6}abc$, с другой стороны $V = \frac{1}{3} \cdot DM \cdot S_{\triangle ABC}$. Площадь треугольника ABC найдем по формуле Герона

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-k)(p-l)(p-m)}, \qquad p = \frac{k+l+m}{2},$$

где k, l, m — длины сторон $\triangle ABC$, которые могут быть вычислены по теореме Пифагора из прямоугольных треугольников ADB, ADC и BDC : $k = \sqrt{a^2+b^2}$, $l = \sqrt{a^2+c^2}$, $m = \sqrt{b^2+c^2}$. Окончательно получаем

$$DM = \frac{3V}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}\frac{abc}{\sqrt{p(p-k)(p-l)(p-m)}}.$$

Ложные аналогии

Человек довольно часто попадает в плен ложных аналогий и не всегда целым и невредимым выбирается из этого плена. Так, наряду с настоящими грибами — хорошо, если в корзинке, а не в тарелке, — попадаются «ложные» грибы, вместе со съедобными ягодами — красивые ягоды-обманки и так далее. Аналогичная ситуация возникает и при решении задач. Записывая «тождество» $2^x 3^y = 6^{x+y}$, абитуриент пользуется ложной аналогией с верными тождествами $2^x 2^y = 2^{x+y}$ и $2^x 3^x = 6^x$. Некоторые факты пространственной геометрии могут быть предугаданы из фактов плоской геометрии: существует множество аналогий между треугольниками и тетраэдрами, квадратами и кубами, окружностями и сферами. Вместе с тем, имеются и аналогии, вводящие в заблуждение, поэтому ко всем рассуждениям по аналогии нужно относиться с осторожностью. Если из условия задачи следует, что две плоскости перпендикулярны третьей и «внутренний голос» подсказывает: «Ты же знаешь, что если две линии перпендикулярны третьей, то они параллельны друг другу? Значит, и наши плоскости ...» — отнеситесь критически к этому совету.

Правильно ли следующее рассуждение?

1. Известно, что если длина n и ширина m прямоугольника измерены с некоторой точностью в пределах $n_{min} \leqslant n \leqslant n_{max}$, $m_{min} \leqslant m \leqslant m_{max}$, то истинная площадь прямоугольника находится в пределах $n_{min}m_{min} \leqslant S \leqslant n_{max}m_{max}$. Точно так же, произведение двух произвольных функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, определенных на некотором отрезке $[a, b]$, оценивается неравенствами

$$f_{\min}(x)\varphi_{\min}(x) \leqslant f(x)\varphi(x) \leqslant f_{\max}(x)\varphi_{\max}(x),$$

где $f_{\min}(x), \varphi_{\min}(x), f_{\max}(x)$ и $\varphi_{\max}(x)$ — наименьшие и наибольшие значения соответствующих функций на этом отрезке.

Найдите ошибку в «решении» следующей задачи.

2. В какой точке функция $y = (1 + \sin x)(5 - \sin x)$ принимает наибольшее значение на числовой прямой?

«Решение.» Известно, что если данное положительное число нужно разложить на два слагаемых таким образом, чтобы их произведение было наибольшим, то эти слагаемые нужно взять одинаковыми. Поскольку $(1 + \sin x) + (5 - \sin x) = 6$, то следует взять $1 + \sin x = 5 - \sin x = 3$, отсюда $\sin x = 2$, что невозможно. Следовательно, функция $y = (1+\sin x)(5-\sin x)$ экстремальных значений не имеет.

Вредные и полезные предрассудки

Сначала приведем пример вредного предрассудка. Некоторые абитуриенты почему-то уверены, что сложная комбинация иррациональных чисел обязательно должна быть числом иррациональным. Например, у них не вызывает сомнений иррациональность числа

$$\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}},$$

хотя, несмотря на свой «устрашающий» вид, это число равно 2, поскольку подкоренные выражения равны соответственно $(1 + \sqrt{3})^3$ и $(1 - \sqrt{3})^3$.

С подобными предрассудками в большинстве случаев бороться несложно — всегда нужно руководствоваться правилом: «сначала подумай, а потом скажи (напиши)». Кроме вредных предрассудков, встречаются и полезные. Так, известно предубеждение, что «некруглый» ответ свидетельствует об ошибке в решении. Ну что же, порой лишний раз проверить себя бывает совсем неплохо!

3. Оговорки, описки и прочие несуразности

Не секрет, что обстановка на экзамене у многих экзаменующихся вызывает повышенную нервозность. Печать излишней эмоциональности накладывается на ответы — ответы приобретают оттенок сумбурности, изобилуют оговорками, описками и прочими несуразностями. Сделать обзор всех встречающихся несуразностей не так-то просто, ибо возможности человеческой фантазии неисчерпаемы. Так, один из чрезмерно разволновавшихся абитуриентов назвал косинус «кисинусом» (может быть, это проявление ложной аналогии: если кошку можно назвать киской, то чем косинус хуже?), а другой на экзамене по биологии сочинил фразу «искупаемый проглодит длиннозавр» (см. «Квант», 1984, № 9, стр.48).

Небрежность в построении фраз иногда приводит к некорректным формулировкам. Так, в правдоподобных с первого взгляда фразах: «число 999 делится или на 3, или на 9», «три числа a, b, c, различны, если $a \neq b \neq c$» содержатся логические ошибки.

Если некоторое уравнение не имеет корней, то нельзя утверждать «уравнение не решается», ведь решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что оно корней не имеет.

Нельзя записывать ответ в форме, в которой одновременно участвуют и радианы и градусы; пустое множество – ь виде $\{\varnothing\}$ (фигурные скобки здесь лишние), модуль называть «числом без знака» и т. п.

Чтобы подобных оплошностей было поменьше — не торопитесь, уделите должное внимание выбору формулировок. Во время ответа будьте аккуратны и внимательны не только при вычислениях и расчетах, но и при построении фраз, уделите время и правильному оформлению ответа.

4. Все ли у вас в порядке с логикой?

Большинство ошибок абитуриентов имеет ту или иную логическую подоплеку, однако в некоторых из них нарушения законов логики маскируется коварной и не всегда верной обыденной, «житейской» логикой.

«Я тебе — про Ерему, а ты мне — про Фому»

— Что такое длина окружности? — спрашивает экзаменатор.

— Длина окружности — это число $2\pi R$, — отвечает абитуриент.

Если спрашивается про Ерему, то и отвечать нужно про Ерему — в данном случае нужно было ответить, что длиной окружности называется предел периметров правильных вписанных в окружность многоугольников, при неограниченном возрастании числа их сторон. Вот еще несколько примеров из серии ответов «про Фому».

Вопрос: Какая геометрическая фигура называется параллелограммом?

«Ответ». Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно равны.

Вопрос: Какие треугольники называются подобными?

«Ответ». Треугольники называются подобными, если они имеют равные углы.

Вопрос: Что такое площадь прямоугольника?

«Ответ». Площадь прямоугольника — это число ab, где a и b — длины его сторон.

«Женская логика»

Так образно называют логическую ошибку, когда из истинности некоторого зерждения делается вывод об истинности утверждения, в некотором роде противоположного данному. «Ага, ты говоришь, что пани Моника — красавица. Значит, по-твоему, я уродина?» — это типичный образчик неверного заключения в стиле «женской логики». Применительно к математическим рассуждениям эта ошибка проявляется в неверном выводе, будто из истинности прямой теоремы следует истинность противоположной ей теоремы.

Схема ошибки:

«Если есть A, то есть и B. Но A нет, следовательно, нет и B».

Примеры:

1. «Мы знаем, что если четырехугольник — ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны. Но данный четырехугольник — не ромб. Значит, его диагонали не перпендикулярны.»

2. «Через прямую, перпендикулярную данной плоскости, проходит плоскость, перпендикулярная данной. Следовательно, если прямая не перпендикулярна плоскости, то через нее не проходит плоскость, перпендикулярная данной».

«Шиворот — навыворот»

Так условно можно назвать логическую ошибку, когда доказательство данного утверждения подменяется доказательством утверждения, обратного к данному.

Схема ошибки:

«Из A следует B. Значит, из B следует A».

Несостоятельность такого рассуждения показывает следующий простой пример. Если некоторое число делится на 10, то оно делится и на 5, однако обратное утверждение неверно. Вместе с тем, в «школьной математике» существует масса других примеров, когда одновременно бывают справедливыми и прямая, и обратная к ней теоремы (теорема Фалеса и обратная к ней, теорема Пифагора и обратная к ней и т. п.). По-видимому, множество таких «обратимо-истинных» теорем и создает психологические предпосылки для невольных заблуждений.

В ответах абитуриентов ошибка «шиворот-навыворот» (впрочем, как и другие логические ошибки), искусно маскируясь, часто проходит мимо внимания отвечающих. Они искренне недоумевают:«а разве я не прав?» На вопрос: «какой вид (по отношению к углам) имеет треугольник со сторонами 3, 4, 5?» отвечают: «так как $3^2 + 4^2 = 5^2$, то по теореме Пифагора этот треугольник прямоугольный». О числовой последовательности a, b, c, d, где $a + d = b + c$ говорят, что она образует арифметическую прогрессию («потому что арифметическая прогрессия обладает этим свойством»).

Найдите ошибку в «решениях» следующих задач.

1. Докажите равенство $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}+\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}=\sqrt{20}$.

«Решение.» После возведения обеих частей данного равенства в куб и группировки слагаемых будем иметь

$$34\sqrt{5}+3\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}\left(\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}+\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}\right)=20\sqrt{20}.$$

Если вместо выражения в круглых скобках подставить $\sqrt{20}$, то получим

$$34\sqrt{5}+3\sqrt[3]{1445-1444}\sqrt{20}=20\sqrt{20}\Leftrightarrow 34\sqrt{5}=17\sqrt{20}\Leftrightarrow 34\sqrt{5}=34\sqrt{5}.$$

Получили верное тождество, следовательно, исходное равенство справедливо.

2. Докажите неравенство

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}, \qquad \text{где } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0. \tag{$*$}$$

«Доказательство». Возведем обе части неравенства $(*)$ в квадрат и преобразуем полученное выражение: $(a+b)^2 \geqslant 4ab \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2-4ab \geqslant 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geqslant 0$. Последнее неравенство очевидно выполняется, следовательно, справедливо и неравенство $(*)$.

«Уравнение пропало!»

Некоторые абитуриенты приходят в замешательство, когда в результате элементарных преобразований исходное уравнение приводится к виду $0 = 0$.

Задача 1. Решите уравнение $x^{\lg 2}2^{-\lg x} = 1$.

«Решение.» Прологарифмируем обе части этого уравнения

$$\lg x^{\lg 2} + \lg 2^{-\lg x} = \lg 1 \Leftrightarrow \lg 2 \lg x - \lg x \lg 2 = 0 \Leftrightarrow \lg x - \lg x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Далее полученный результат трактуется так:«мы видим, что уравнение пропало, значит, оно решений не имеет». На самом же деле из полученного решения следует сделать вывод: поскольку исходное уравнение в области определения входящих в него выражений равносильно верному тождеству $0 = 0$, то ему удовлетворяет все множество чисел из области определения — в рассматриваемом случае множество всех $x > 0$.

Бывает и так, что исходное уравнение совершенно законными преобразованиями приводится к неверному тождеству. Не надо пугаться: именно в этом случае исходное уравнение решений не имеет (см. ниже пункт Модуль как «пожиратель» уравнений). Так, например, уравнение $1 + \frac{1}{2}\cos 2x = \cos^2 x$ равносильно неверному равенству $1 = 0$, и поэтому у него корней нет. Следует, однако, быть внимательным и каждый раз тщательно следить за равносильностью преобразований. Найдите ошибку в *«решении»* следующей задачи.

2. Решите уравнение $(x-1)^2 = (x-2)^2$.

«Решение.» Это уравнение равносильно уравнению $x-1 = x-2$, откуда получаем $1 = 2$, что невозможно. Значит, исходное уравнение решений не имеет.

Ох уж эти параметры!

С огромными трудностями абитуриенты сталкиваются, решая уравнения с параметрами. Это не мудрено, поскольку введение одного-единственного параметра в какое-либо уравнение сразу же превращает это уравнение в обширный класс уравнений, и порой разобраться в причудливом устройстве этого класса бывает не так просто.

Задача (МГИЭМ, 1994). Найдите все значения, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(x+y)^2 = 12,\\ x^2+y^2 = 2(a+1)\end{cases} \qquad (*)$$

имеет в точности два решения.

«Решение.» Замечаем, что система $(*)$ обладает симметрией. Вид этой системы не изменится, если переменные x и y переставить местами: наряду с каждым ее решением (x_0, y_0) она имеет также решение (y_0, x_0) . Следовательно, можно положить $x = y$. В этом случае из первого уравнения получаем $x^2 = 3$, чему соответствуют в точности два решения $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}$; а затем из второго уравнения находим искомое значение параметра a: $a = 2$.

Комментарий. Несмотря на то, что значение параметра найдено правильно, тем не менее приведенное выше «решение» содержит несколько логических ошибок. Во-первых, отсутствует должное обоснование того, что можно ограничиться лишь рассмотрением частного случая $x = y$. Правильно рассуждать здесь можно было бы, например, так. Предположим, что среди решений системы $(*)$ имеется решение (x_0, y_0), причем $x_0 \neq y_0$. Тогда в силу симметрии системы она будет иметь также решения (y_0, x_0), $(-x_0, -y_0)$, $(-y_0, -x_0)$. Поскольку нас интересует только случай, когда система имеет в точности два решения, то предположение $x_0 \neq y_0$ должно быть отброшено. Во-вторых, допущена весьма распространенная логическая ошибка типа «шиворот-навыворот», состоящая в игнорировании «обратного хода» рассуждений. Мы предположили, что решение существует и, исходя из этого, нашли какое-то значение для параметра a. Но совсем не очевидно, что при этом значении параметра a решение существует! При $a = 2$ система $(*)$ запишется так:

$$\begin{cases}(x+y)^2 = 12,\\ x^2+y^2 = 6.\end{cases}$$

Из первого уравнения найдем $y = \pm\sqrt{12} - x$ и, подставив во второе уравнение, получим $x^2 + 12 \mp 2\sqrt{12}x + x^2 = 6$, $x^2 \mp \sqrt{12}x + 3 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{12} \pm \sqrt{12-12}}{2} = \pm\sqrt{3}$$

и, соответственно, $y_{1,2} = \pm 2\sqrt{3} \mp \sqrt{3} = \pm\sqrt{3}$. Таким образом, при $a = 2$ действительно получается два решения $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ и $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

Найдите ошибку в «решении» следующей задачи (МГУ, 1989).

1. Найти все такие значения c, что при любом значении b система

$$\begin{cases}(1+3x^2)^c + (b^2-4b+5)^y = 2,\\ x^2y^2 - (2-b)xy + c^2 + 2c = 3\end{cases}$$

имеет не менее одного решения (x, y).

«Решение.» Поскольку при любом значении b система должна иметь решение, то, в частности, она должна иметь решение при $b = 2$. В этом случае система принимает вид

$$\begin{cases}(1+3x^2)^c = 1,\\ x^2y^2 + c^2 + 2c = 3\end{cases}$$

и имеет решение только при трех значениях c: $0, 1, -3$.

Осторожно: «соображения симметрии»

Часто, привлекая «соображения симметрии» для решения системы уравнений, абитуриенты упускают из виду, что эти соображения позволяют найти одно или несколько решений системы уравнений, но совсем не гарантируют, что таким образом будут найдены все решения. Если учесть, что обычно в задачах требуется найти именно все, а не какие-то отдельные выборочные решения, то «соображения симметрии» не могут считаться универсальным средством (хотя в эффективности им, конечно, не откажешь).

Найдите ошибку в «решениях» следующих задач.

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^3 + e^x = y^3 + e^y,\\ x^2 + 3xy + y^2 = 20.\end{cases}$$

«Решение.» Из симметрии системы следует равенство $x = y$. С учетом этого равенства из второго уравнения получаем $5x^2 = 20$, откуда $x = \pm 2$. Решением системы являются пары $(2, 2)$, $(-2, -2)$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = \sqrt{6},\\ \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} = \sqrt{2}.\end{cases}$$

«Решение.» Вид этой системы уравнений не изменится, если переменные x и y поменять местами. Поэтому будем искать решение, для которого $x = y$. Тогда

$$\begin{cases}2\sqrt{x+1} = \sqrt{6},\\ 2\sqrt{1-x} = \sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4(x+1) = 6,\\ 4(1-x) = 2,\\ x+1 \geqslant 0,\\ 1-x \geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

«Ответ»: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Могучие «мелочи»

В решениях задач довольно часто используются различные логические значки: квадратные и фигурные скобки, значок $\Rightarrow$ (следует), значок $\Leftrightarrow$ (равносильно) и другие. Несмотря на свою миниатюрность, эти значки несут на себе колоссальную логическую нагрузку — небрежность в обращении с ними чревата последствиями, сравнимыми с последствиями от небрежного обращения с тонким лазерным инструментом хирурга.

1. Решите уравнение $(x-1)(x-3)=0$.

«Ответ»: $\begin{cases} x=1 \\ x=3. \end{cases}$

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=4, \\ xy=3. \end{cases}$

«Ответ»: $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$ *и* $\left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=1. \end{array}\right.$

3. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{x+3}{x-4}>0, \\ x^2-25<0. \end{cases}$

«Решение.» $\begin{cases} \frac{x+3}{x-4}>0, \\ x^2-25<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<-3 \end{array}\right. \\ -5<x<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4<x<5, \\ -5<x<-3. \end{cases}$

Многочисленные примеры ошибок, связанных со значками $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$, будут рассмотрены в разделе «Уравнения и неравенства».

5. «Сюрпризы» модуля

Модуль в тумане

Сначала приведем два примера, в которых проявляются ошибки, связанные с весьма туманным представлением о модуле и его свойствах.

1. Решите неравенство: $|x^2+3x|+x^2-2 \geqslant 0$.

«Решение.» Согласно определению модуля, рассмотрим два случая.

1) $x \geqslant 0$. В этом случае неравенство принимает вид

$$x^2+3x+x^2-2 \geqslant 0.$$

Квадратный трехчлен $2x^2+3x-2$ имеет корни -2, $\frac{1}{2}$. Учитывая, что мы пока рассматриваем только случай $x \geqslant 0$, следует взять неотрицательные решения неравенства $2x^2+3x-2 \geqslant 0$: $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$.

2) $x < 0$. В этом случае исходное неравенство равносильно неравенству

$$-x^2 - 3x + x^2 - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 3x + 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{2}{3}].$$

«Ответ»: $(-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$.

2. Докажите неравенство $|x + y| > |x - y|$ при $x > 0$, $y > 0$.
«Доказательство»: $|x + y| = |x| + |y| > |x| - |y| = |x - y|$.

Модуль как «пожиратель» уравнений

В решениях уравнений и неравенств, содержащих модули, довольно часто возникает ситуация, условно названная ранее «Уравнение пропало!» (см. 4. Все ли у вас в порядке с логикой?).

1. Решите уравнение $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$.

Решение. Анализ стоящих под знаками модулей выражений показывает, что исходное уравнение по-разному записывается на трех числовых множествах:
1) $(-\infty, -3] \cup [3, \infty) : x^2 - 9 + x^2 - 4 = 5$;
2) $(-3, -2] \cup [2, 3) : -x^2 + 9 + x^2 - 4 = 5$;
3) $(-2, 2) : -x^2 + 9 - x^2 + 4 = 5$.

Во втором случае уравнение «пропадает»: «5=5». Мы уже знаем, что повода для паники нет: просто решением уравнения является любое число из рассматриваемого промежутка $(-3, -2] \cup [2, 3)$. В двух других случаях находим еще два решения $x = -3$ и $x = 3$.

Ответ: $[-3, -2] \cup [2, 3]$.

2. Решите уравнение $|x+1|+|x+2| = 2$. Это уравнение по-разному записывается на каждом из трех промежутков: $(-\infty, -2]$, $(-2, -1)$, $[-1, \infty)$. Заметим, что на промежутке $(-2, -1)$ оно «пропадает» — приводится к виду «$1 = 2$». Паниковать не нужно — на этом промежутке уравнение решений не имеет.

Работая с модулями, будьте готовы к «сюрпризам»!

6. «Зри в корень»!

Вынесенное в заголовок крылатое изречение Козьмы Пруткова нашло постоянную прописку в публикациях, в которых читателей призывают проникнуть в «сердцевину» проблемы, в самое ее существо. Не умаляя общефилософской значимости данного призыва, рассмотрим ряд математических вопросов и задач, где он может быть применен во всей своей возможной широте.

Итак, смотрите в корень — и, может быть, вам удастся найти ошибки, традиционно досаждающие абитуриентам?

1. Квадрат какого числа равен 16777216?

«Ответ»: 4096.

2. Упростите выражение $\sqrt{x^2}$.

«Ответы»: а) x; б) $\pm x$.

3. Упростите выражение $\left(\sqrt{x}\right)^2$.

«Ответ»: $|x|$.

4. Можно ли упростить выражение $\left(\sqrt{10-5\sqrt{5}}\right)^2$?

«Ответы»: а) это выражение равно $10-5\sqrt{5}$; б) это выражение равно $|10-5\sqrt{5}|$.

5. Решите неравенство $(x+7)\sqrt{x+3} \geqslant 0$.

«Решение.» Арифметическое значение квадратного корня всегда неотрицательно, поэтому достаточно рассмотреть неравенство $x+7 \geqslant 0$, откуда получаем ответ $x \geqslant -7$.

6. Решите уравнение $\sqrt[3]{x-10} = -3$.

«Решение.» Поскольку мы рассматриваем только арифметическое значение корня, то это уравнение решить нельзя.

7. Решите уравнение $(x-10)^{\frac{1}{3}} = -3$.

«Решение.» Возведем обе части этого уравнения в куб, после чего получим $x - 10 = -27$, откуда $x = -17$.

7. Хорошо ли вам знакома теорема Виета?

Найдите ошибки в ответах на следующие вопросы.

1. Если в уравнении $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p, q действительные числа, $q > 0$, то верно ли, что корни его одного знака?

«Ответ». Да, верно, поскольку по теореме Виета коэффициент q равен произведению корней, и, стало быть, при $q > 0$ эти корни одного знака.

2. Можно ли утверждать, что при $q < 0$ корни вышеуказанного уравнения разных знаков?

«Ответ». Если предыдущий ответ ошибочен, то, наверное, и здесь нельзя утверждать, что корни одного знака.

Комментарий. Выше приведен характерный пример так называемого «психологического» решения. Запомните: наитие, интуиция, эмоции не всегда подсказывают правильное решение. Будьте бдительны вдвойне, если экзаменатор, скажем, своим неожиданным ответом (вопросом?) вас ошарашил и вывел из душевного равновесия. В таком случае, как говорится,«можно наломать дров» — еще больше допустить глупостей.

3. Дано уравнение: $x^2 + x + 1 = 0$. Можно ли составить квадратное уравнение, корни которого были бы на единицу больше, чем корни данного уравнения?

«Ответ». Конечно, можно. Пусть y_1, y_2 — корни искомого уравнения, а x_1, x_2 — корни данного. Тогда, по теореме Виета, $x_1 + x_2 = -1$; $x_1x_2 = 1$. Привлекая условие, получаем:

$$y_1 + y_2 = x_1 + 1 + x_2 + 1 = (x_1 + x_2) + 2 = 1;$$

$$y_1y_2 = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1.$$

Итак, требуемое уравнение имеет вид $y^2 - y + 1 = 0$.

8. Графики

Сложно ли построить график сложной функции?

Обычно поступающие имеют хорошие представления о графиках элементарных функций, подробно изучаемых в школе. Вместе с тем, у них возникают трудности, когда речь заходит о сложных функциях, каким-либо образом комбинируемых из элементарных.

Найдите ошибку в «решениях» следующих задач.

1. Построить графики функций а) $y = \lg(-x)$; б) $y = |x^2 - 1|$; в) $y = x^{\frac{1}{\lg x}}$.

«Решение.» а) Поскольку отрицательные числа логарифмов не имеют, то график этой функции построить нельзя.

б) Построим график функции $y = x^2 - 1$. Графиком функции $y = |x^2 - 1|$ будет только та часть построенного графика, которая лежит не ниже оси Ox (рис. 2б)).

в) Выполним преобразования: $y = x^{\frac{1}{\lg x}} = x^{\log_x 10} = 10$. Графиком этой функции является прямая линия (рис. 2в)).

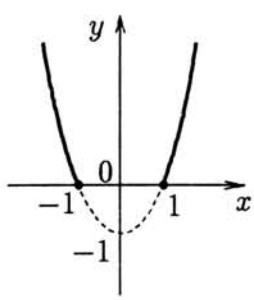


Рис. 2 б)

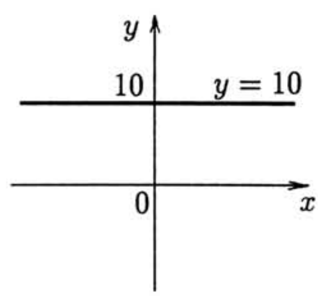


Рис. 2 в)

Поступающим известно, что графики некоторых сложных функций могут быть получены из графиков элементарных функций их преобразованием в координатной плоскости — сдвигом, сжатием или растяжением вдоль координатных осей. Здесь очень часто возникает путаница, какое преобразование делать раньше: то ли сжатие, то ли сдвиг, то ли вдоль одной оси, то ли вдоль другой.

Найдите ошибку в «решении» следующей задачи.

2. Построить график функции $y = 2\cos(2x + \frac{\pi}{3})$.

«Решение.» График этой функции построим, отправляясь от графика функции $y_1 = \cos x$. Для этого последовательно выполним следующие операции.

1) График функции $y_2 = \cos 2x$ получим сжатием графика функции $y_1 = \cos x$ вдоль оси x в 2 раза;

2) Перенесем полученный график как твердое тело вдоль оси x на $\frac{\pi}{3}$ единиц влево — получим график функции $y_3 = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$.

3) Растянув последний график в два раза вдоль оси Oy, найдем (см. рис. 3) искомый график функции $y = 2\cos(2x + \frac{\pi}{3})$.

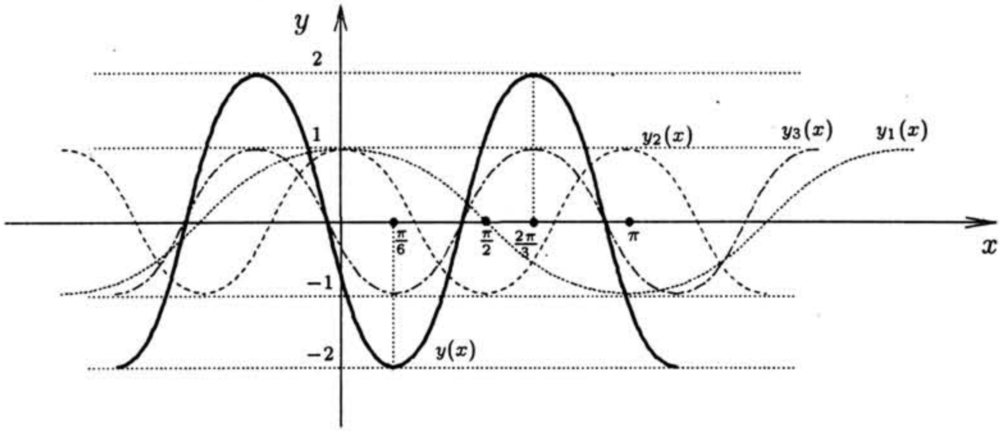


Рис. 3

Графическое решение уравнений

Графики помогают увидеть решение уравнения или неравенства, не прибегая к сравнительно сложным аналитическим выкладкам. Вместе с тем графический метод решения уравнений не всегда безупречен, и им нужно пользоваться с осторожностью.

Найдите ошибку в «решениях» следующих задач.

1. Решите уравнение $2^x = 3^x - 1$.

«Решение.» Построим на одном чертеже графики двух функций $y_1 = 2^x$ и $y_2 = 3^x - 1$. Из чертежа видно,что эти графики пересекаются в точке $(1; 2)$. Следовательно, решением уравнения является $x = 1$.

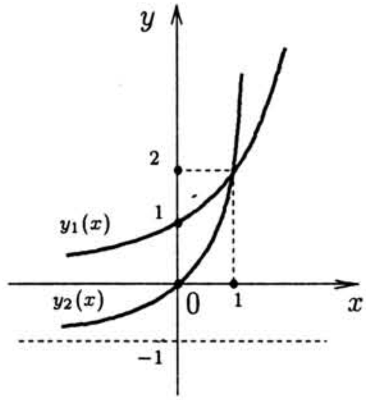


Рис. 4

2. Сколько решений имеет уравнение $\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x$?

«Решение.» Нарисуем на одном чертеже графики двух функций $y_1 = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ и $y_2 = \log_{\frac{1}{16}} x$. Из чертежа видно, что эти графики имеют одну общую точку. Следовательно, исходное уравнение имеет одно решение.

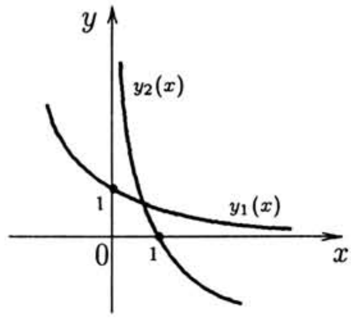


Рис. 5

9. Уравнения

Уравнения — традиционный и непременный элемент любого экзаменационного задания по математике. В основе типичных ошибок, сопутствующих решению уравнений, лежит стремление абитуриентов найти *какие-нибудь* корни, при этом очень часто упускается из виду, что нужно найти *все* корни, ничего не потеряв, но и не приобретя *лишних* корней.

Вначале мы рассмотрим стандартные ошибки, связанные с приобретением лишних «корней», а затем познакомимся с некоторыми ситуациями, когда корни уравнений теряются.

Щедроты четной степени

Довольно часто посторонние «корни» возникают при возведении в четную степень обеих частей уравнения. Найдите ошибки в «решениях» следующих задач.

1. (МГУ, 1995, факультет почвоведения). Решите уравнение

$$\sqrt{8x^2-7} = 3x-4.$$

«Решение.» $\sqrt{8x^2-7} = 3x-4 \Leftrightarrow (\sqrt{8x^2-7})^2 = (3x-4)^2 \Leftrightarrow 8x^2-7 = 9x^2-24x+16 \Leftrightarrow x^2-24x+23=0; x_1=1, x_2=23.$

2. (СПбГЭУ, 1994). Решите уравнение $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$.

«Решение.» ОДЗ: $\begin{cases} 2x-4 \geqslant 0, \\ x+5 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 2$. Возведем обе части исходного уравнения в квадрат: $2x-4-2\sqrt{(2x-4)(x+5)}+x+5 = 1 \Leftrightarrow 3x = 2\sqrt{(2x-4)(x+5)} \Leftrightarrow$

$9x^2 = 4(2x-4)(x+5) \Leftrightarrow x^2 - 24x + 80 = 0$;
$x_1 = 4, x_2 = 20$. Проверка показывает, что найденные значения принадлежат ОДЗ.

«Ответ»: 4; 20.

3. (МГУ, 1995, геологический факультет). Решите уравнение

$$\sqrt{\sin x} = -\cos x.$$

«Решение.» Область допустимых значений: $\sin x \geqslant 0$. Возведем обе части исходного уравнения в квадрат: $\sin x = \cos^2 x$ или $\sin x = 1 - \sin^2 x$. После замены $y = \sin x$ имеем $y^2 + y - 1 = 0$, откуда $y_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ — посторонний корень, так как $y_1 < -1$, а $\sin x \geqslant -1$; $y_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Поскольку $0 < y_2 < 1$, то этот корень подходит. Итак, $x = (-1)^n \arcsin \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \pi n$, n — целое.

Бойтесь операций, «дары» приносящих

В заголовке — несколько вольная перефразировка известного изречения: «бойтесь данайцев, дары приносящих». По легенде, данайцы подарили враждующим с ними жителям Трои деревянного коня, в чреве которого спрятались воины. Под покровом ночи они открыли ворота города. Троя была данайцами взята и разрушена. Лишние «корни», возникающие при решении уравнений, — тоже своеобразные нежелательные «дары», от которых на экзамене лучше предусмотрительно отказаться. «Дары» же эти приносят «данайцы» — операции возведения в четную степень (с ее «дарами» мы уже познакомились), отбрасывание знаменателя, так называемые «тождественные» и другие преобразования (с ними нам еще предстоит познакомиться). Здесь мы рассмотрим несколько примеров, когда лишние «корни» появляются в результате игнорирования свойств некоторых функций.

Найдите ошибки в «решениях» следующих задач.

1. Решите уравнение $\lg_x \sqrt{2x^2 + x - 2} = 1$.

«Решение.» Используя определение логарифма, запишем исходное уравнение так $x = \sqrt{2x^2 + x - 2}$. Возведя обе части последнего уравнения в квадрат и приведя подобные члены, получаем: $x^2 + x - 2 = 0$, откуда $x_1 = 1, x_2 = -2$.

2. (ИСАА, 1995). Найти x, если известно, что числа $-1, x+2, \sin(\arcsin x)$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию.

«Решение.» Поскольку $\sin(\arcsin x) = x$, то мы имеем геометрическую прогрессию $-1, x+2, x$. По свойству геометрической прогрессии $(x+2)^2 = (-1)x$. Следовательно, $x^2 + 5x + 4 = 0$, и получаем корни $x_1 = -4, x_2 = -1$.

3. (МПГУ, 1995). Решите уравнение $\sqrt{1 - \sin^2 x} + \frac{1}{2\operatorname{tg} x} = 0$.

«Решение.» Воспользовавшись тригонометрическими тождествами

$$1 - \sin^2 x = \cos^2 x, \qquad \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x},$$

исходное уравнение перепишем в виде $\sqrt{\cos^2 x} + \frac{\cos x}{2\sin x}$ или $\cos x(1 + \frac{1}{2\sin x}) = 0$. Отсюда либо $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, n — целое, либо $1 + \frac{1}{2\sin x} = 0$, $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, k — целое.

«Ответ»: $\frac{\pi}{2}+\pi n, (-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$, n, k — целые.

Союз неразрозненных частей

Иногда уравнение удается разложить на совокупность элементарных уравнений, решение которых находится сравнительно просто. Если при этом не обращать внимание на общую «родословную» полученных элементарных уравнений — рассматривать их изолированно друг от друга, вне их связи с исходным уравнением, то можно допустить ошибки.

Найдите ошибки в «решении» следующей задачи.

1. (МГУ, 1995, географический факультет). Решите уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} x(\cos 2x+3\sin x-2)}{\sqrt{187\pi^2+36\pi x-36x^2}}=0.$$

«Решение.» Дробь равна нулю, если хотя бы один из сомножителей в числителе равен нулю. Из уравнения $\operatorname{tg} x=0$ находим $x=\pi n, n$ — целое. Решим теперь уравнение $\cos 2x+3\sin x-2=0$. Поскольку $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, то это уравнение запишется $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$, отсюда $\sin x_1=\frac{1}{2}$, $\sin x_2=1$ и, соответственно, получаем два множества решений $x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$, k — целое, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m$, m — целое. Объединяя все решения вместе, получим окончательный ответ.

«Ответ»: $\pi n, (-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi k, \dfrac{\pi}{2}+2\pi m$, n, k, m — целые.

Небезобидные «тождественные» преобразования

Бывает так, что при упрощении уравнений подвох случается в том месте, где его обычно не ожидают, например, при использовании безобидных с виду «тождественных» преобразований.

Найдите ошибки в «решениях» следующих задач.

1. Решите уравнение $x^2+\frac{1}{x-1}=\frac{x+1}{x^2-1}+1$.

«Решение.» Воспользовавшись тождеством $x^2-1=(x-1)(x+1)$, запишем: $x^2+\frac{1}{x-1}=\frac{x+1}{x^2-1}+1 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+1 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm 1$.

2. (МГУ, 1995, геологический факультет). Решите уравнение

$$\lg_2(11-x)+\lg_2(x+1)=\lg_2((x+1)(x^2+5x-5)).$$

«Решение.» Воспользовавшись тождеством $\lg_a bc=\lg_a b+\lg_a c$, уравнение запишем так $\lg_2(11-x)+\lg_2(x+1)=\lg_2(x+1)+\lg_2(x^2+5x-5)$ или $\lg_2(11-x)=$ $=\lg_2(x^2+5x-5)$. Отсюда $11-x=x^2+5x-5$; $x^2+6x-16=0; x_1=-8, x_2=2$.

3. Решите уравнение

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=0.$$

«Решение.» Воспользовавшись тождеством $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, уравнение запишем так $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 0$, откуда $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$ или $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1$. В первом случае $x = 2\pi n$, n — целое, во втором $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, k— целое.

«Ответ»: $2\pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, n, k — целые.

Следует иметь в виду, что многие равенства, используемые для преобразований уравнений, имеют разный смысл при разных значениях входящих в них букв. Так, например, в равенстве $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ слева стоит выражение, имеющее смысл и при отрицательных значениях переменных a и b, а справа — только лишь при положительных значениях этих величин. Каждый раз, проводя «тождественные» преобразования, нужно очень аккуратно отслеживать сужение или расширение области допустимых значений входящих в «тождества» переменных.

Части равносильны, а целые — нет

Представьте, что некоторые части велосипеда заменяются на равнозначные (звонок — на звонок, педаль — на педаль и т. д.). И вот после всех этих равнозначных замен велосипед неожиданным образом превращается в некий комбайн, на котором теперь можно не только ездить по дорогам, но и пахать поле, плавать по морям, парить в небесах ... Примерно такое же впечатление возникает, когда знакомишься с «решением» следующей задачи.

1. Решите уравнение $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$.

«Решение.» Возведем обе части этого уравнения в куб и сгруппируем слагаемые, вынося общий множитель за скобки:

$$3x - 2 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}\right) = 1.$$

Выражение в скобках, согласно условию, равно 1, поэтому имеем

$$3x - 3 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 1 - x.$$

Возведя обе части этого уравнения в куб, получим уравнение $(2x-1)(x-1) = (1-x)^3$, корни которого $x_1 = 0, x_2 = 1$.

«Ответ»: 0; 1.

Невосполнимые потери

Посторонние «корни» — досадное, но терпимое неудобство. С ними можно совладать, сделав проверку. Хуже обстоит дело с потерей корней — если корень потеряется, то уже никакая подстановка найденных решений в исходное уравнение не поможет.

Найдите ошибки в «решениях» следующих задач.

1. (МГУ, 1995, химфак). Решите уравнение $\cos 2x = 2(\cos x + \sin x)$.

«Решение.» Поскольку $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$, то исходное уравнение равносильно уравнению $\cos x - \sin x = 2$, откуда

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ -\sin x = 1. \end{cases}$$

Эта система корней не имеет.

«Ответ»: $\varnothing$.

2. (МГУ, 1995, физфак) Решите уравнение $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 1 - \cos x$.

«Решение.» Поскольку справедливо тождество $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$, то мы имеем: $\frac{1-\cos x}{\sin x} = 1 - \cos x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-\cos x = 0, \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2\pi n, \\ x \neq \pi k \end{cases} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \text{ — целое.}$$

Системы уравнений

Если ошибки возникают при решении «одиночных» уравнений, то что же можно ожидать от целых их «коллективов» — систем уравнений? Найдите ошибки в «решениях» следующих задач.

1. (МГУ, 1994, биологический факультет). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$$

«Решение.» Из первого уравнения выразим x через y и подставим это выражение $x = 6 - 2y$ во второе уравнение. После приведения подобных членов получим $3y^2 - 13y + 10 = 0$, откуда $y_1 = 1, y_2 = \frac{10}{3}$. Если подставить значение $y_1 = 1$ во второе уравнение, то будем иметь $3x^2 - x - 44 = 0$, откуда $x_1 = -\frac{11}{3}, x_2 = 4$. Если же подставить $y_2 = \frac{10}{3}$, то получим соответственно $x_3 = -\frac{2}{3}, x_4 = \frac{16}{9}$.

«Ответ»: $(-\frac{11}{3}, 1), (4, 1), (-\frac{2}{3}, \frac{10}{3}), (\frac{16}{9}, \frac{10}{3})$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3 = 10x + y, \\ y^3 = x + 10y. \end{cases}$

«Решение.» Складывая и вычитая уравнения системы, получим

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 11(x + y), \\ x^3 - y^3 = 9(x - y), \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 11, \\ x^2 + xy + y^2 = 9. \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение последней системы из первого, находим $-2xy = 2$, или $x = -\frac{1}{y}$. Подставим это выражение в первое уравнение последней системы: $\frac{1}{y^2} + 1 + y^2 = 11$. Сделав замену $y^2 = t$, это уравнение приводим к виду $t^2 - 10t + 1 = 0$

и находим его корни $t_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$. Соответственно получаем решения исходной системы $y_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}}$ и $x_{1,2,3,4} = \dfrac{1}{\mp\sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}}}$.

10. Неравенства

Неравенства — не равенства

Приемы решения неравенств во многом перекликаются с приемами решения уравнений. И для тех, и для других, например, равносильным преобразованием считается прибавление к обеим частям одинаковых числовых выражений. Некоторые неравенства не могут быть решены прежде чем не будут найдены корни соответствующего уравнения (сказанное, например, относится к квадратным неравенствам). Эти и другие аналогии между уравнениями и неравенствами порой уводят не очень опытных решающих по ложному следу.

Найдите ошибки в следующих рассуждениях.

1. Решите неравенство $\operatorname{tg} x < 1$.

«Решение.» $x < \frac{\pi}{4} + \pi n$, n — целое.

2. Верно ли, что если $\alpha < \beta$, то $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$?

«Ответ». Да, верно, поскольку $\operatorname{tg} x$ — функция возрастающая.

3. Решите неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 4$.

«Решение.» $x < \lg_{\frac{1}{3}} 4$.

4. Решите неравенство $\lg_2 x < 1$.

«Решение.» $\lg_2 x < 1 \Leftrightarrow x < 2$.

5. (МПГУ, 1995, устный экзамен). Решите неравенство $\lg_{\frac{1}{2}} x > \lg_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}$.

«Решение.» Из условия следует $x > \frac{1}{x}$, откуда $x^2 > 1$; $x < -1$ или $x > 1$.

«Ответ»: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

6. Числа a, b, c, d в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Докажите неравенство $ad \leqslant bc$.

«Решение.» Проверим неравенство на конкретных числах. Пусть, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, тогда $1 \cdot 4 < 2 \cdot 3$. Взяв другие числа, например, $a = 5$, $b = 10$, $c = 15$, $d = 20$, получим $5 \cdot 20 < 10 \cdot 15$ и так далее. Значит, неравенство справедливо.

На что умножаем?

Прибавление одинаковых количеств к обеим частям неравенства — «безобидная» операция, не нарушающая его равносильности. Иное дело — умножение.

Найдите ошибки в «решениях» следующих задач.

1. (МГИЭТ-ТУ, 1994). Решите неравенство $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{13}$.

«Решение.» Домножив обе части этого неравенства на $13x$, получаем $13 \geqslant x$. *«Ответ»*: $(-\infty, 13]$.

2. (МГУ, 1995, геологический факультет). Решите неравенство

$$\frac{7}{(x-2)(x-3)} + \frac{9}{x-3} + 1 \leqslant 0.$$

«Решение.» Домножив обе части этого неравенства на $(x-2)(x-3)$, получаем $7 + 9(x-2) + (x-2)(x-3) \leqslant 0$ или $x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$. Корни квадратного трехчлена $x_1 = -5, x_2 = 1$, поэтому решение неравенства: $[-5, 1]$.

Значок неравенства, в отличие от значка равенства, имеет «направление» — он, как флюгер за направлением ветра, очень чутко реагирует на знак домножаемого выражения. Каждый раз, когда это выражение отрицательно, значок неравенства должен повернуться в противоположную сторону. Тот, кто об этом забывает, рискует допустить ошибку.

Иррациональные неравенства

От радикалов обычно избавляются, возведя в одну и ту же степень обе части неравенства. Следует, однако, иметь в виду, что если степень четная, то в результате такой операции может получиться неравенство, не равносильное исходному.

Найдите ошибки в «решениях» следующих задач.

1. (МГУ, 1995, экономический факультет). Решите неравенство

$$2\sqrt{x^2 + x - 2} > 2x - 1.$$

«Решение.» Область допустимых значений (ОДЗ): $x^2 + x - 2 \geqslant 0$, значит, $x \leqslant -2$ или $x \geqslant 1$. Возведем обе части неравенства в квадрат: $4x^2 + 4x - 8 > 4x^2 - 4x + 1$ или $8x > 9$. Отсюда $x > \frac{9}{8}$ — это множество входит в ОДЗ.
«Ответ»: $(\frac{9}{8}, \infty)$.

2. (СПбГУ, 1994, экономический факультет). Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}} \geqslant \frac{1}{1+x}.$$

«Решение.» ОДЗ: $2 - x > 0$, $x \neq -1$. Возведем обе части исходного неравенства в квадрат: $\frac{1}{2-x} \geqslant \frac{1}{(1+x)^2}$. Избавляясь от знаменателей с учетом того, что $2 - x > 0$, $(1+x)^2 > 0$, получаем $1 + 2x + x^2 \geqslant 2 - x$ или $x^2 + 3x - 1 \geqslant 0$. Корни квадратного трехчлена $x_1 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$; $x_2 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$. Учитывая ОДЗ, получаем ответ: $(-\infty, \frac{-3-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, 2)$.

Логарифмические неравенства

Часто ошибки возникают из-за невнимания к особенностям логарифмической функции. Найдите ошибки в «решениях» следующих задач.

1. (МГУ, 1989, механико-математический факультет). Решите неравенство

$$(\lg_{\sqrt{8}-2}(2x-1))(\lg_2(1+2x-x^2)) \geqslant 0.$$

«Решение.» ОДЗ: $2x-1>0, 1+2x-x^2>0$. В области допустимых значений исходное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\lg_{\sqrt{8}-2}(2x-1)\geqslant 0,\\ \lg_2(1+2x-x^2)\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}\lg_{\sqrt{8}-2}(2x-1)\leqslant 0,\\ \lg_2(1+2x-x^2)\leqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-1\geqslant 1,\\ 1+2x-x^2\geqslant 1\end{cases}\\ \begin{cases}0<2x-1\leqslant 1,\\ 0<1+2x-x^2\leqslant 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 1\leqslant x\leqslant 2.$$

«Ответ»: [1,2].

2. (МГУ, 1995, факультет почвоведения). Решите неравенство

$$\frac{1}{\lg_x 2} - \lg_2\frac{1}{x} \leqslant 2.$$

«Решение.» Пользуясь свойствами логарифмов, преобразуем левую часть неравенства: $\frac{1}{\lg_x 2} - \lg_2\frac{1}{x} = \lg_2 x + \lg_2 x = 2\lg_2 x$. Итак, исходное неравенство равносильно неравенству $\lg_2 x \leqslant 1$, откуда $x \leqslant 2$.

11. Начала анализа

Капризный инструмент

Производная — весьма тонкий и эффективный инструмент исследования функций. Как и со всяким сложным инструментом, с ним нужно обращаться бережно и умеючи.

Отыщите ошибки в «решениях» следующих задач.

1. (МЭИ, 1988). Найдите производную $f'(x)$, где

$$f(x) = \left[\frac{(x+1)^2+1}{(x+1)^2-1} - \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2+1}\right]\cdot\left[(x+1)^3 - \frac{1}{x+1}\right].$$

«Решение.» Преобразуем выражение для $f(x)$:

$$f(x) = \frac{[(x+1)^2+1]^2-[(x+1)^2-1]^2}{(x+1)^4-1}\cdot\frac{(x+1)^4-1}{x+1} = \frac{4(x+1)^2}{x+1} = 4x+4,$$

следовательно, $f'(x) = 4$.

«Ответ»: 4.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 + 6|x|$ на отрезке $[-2, 1]$.

«Решение.» Данная функция по-разному записывается на промежутках $(-\infty, 0)$ и $[0, \infty)$. На первом промежутке $y = x^3 - 6x$, на втором — $y = x^3 + 6x$. При $-\infty < x < 0$ имеем $y' = 3x^2 - 6$. Производная в этом случае обращается в нуль при $x = -\sqrt{2}$ и $x = \sqrt{2}$ — последнее значение не принадлежит промежутку $(-\infty, 0)$. На промежутке $(-\infty, -\sqrt{2})$ производная положительная, на промежутке $(-\sqrt{2}, 0)$ — отрицательная, поэтому в точке $x = -\sqrt{2}$ функция имеет максимум. На всем промежутке $[0, \infty)$ производная $y' = 3x^2 + 6$ больше нуля и экстремумов нет.

«Ответ»: точка $x = -\sqrt{2}$ является точкой максимума, в ней наибольшее значение функции равно $4\sqrt{2}$.

3. Сравните две функции $y_1(x) = \operatorname{tg}\operatorname{tg} x$ и $y_2(x) = \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

«Решение.» Найдем производную функции $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$:

$$y'(x) = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{tg} x)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{1}{\cos^2(\operatorname{tg} x)} - 1\right).$$

Поскольку на рассматриваемом промежутке $\cos x > 0$, $\frac{1}{\cos^2(\operatorname{tg} x)} - 1 > 0$, то $y'(x) > 0$. Следовательно, $y_1(x) > y_2(x)$.

Случай с параболой Нейля

Найдите ошибку в «решении» следующей задачи.

1. Напишите уравнение касательной к кривой $y = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $x_0 = -8$.

«Решение.» Уравнение касательной записывается формулой

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0),$$

где $y'(x_0)$ — значение производной функции $y(x)$ в точке $x = x_0$.

Имеем $y'(x) = (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. Поскольку дробная степень не определяется для отрицательного основания, то выражение $(-8)^{-\frac{1}{3}}$ не имеет смысла, следовательно, касательной к кривой $y = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $x_0 = -8$ не существует.

Применим формулу Ньютона-Лейбница

Формула Ньютона-Лейбница занимает одно из центральных мест в школьном курсе математического анализа. Абитуриенты знают ее хорошо, однако условия применимости этой формулы часто ускользают из их поля зрения.

Найдите ошибку в «решении» следующей задачи.

1. (МЭТИС, 1981). Решите неравенство

$$\frac{9x - 15}{19} < \int\limits_0^x \frac{dy}{(y+1)^2} - 1.$$

«Решение.» По формуле Ньютона-Лейбница $\int\limits_0^x \frac{dy}{(y+1)^2} = -\frac{1}{y+1}\Big|_0^x = 1 - \frac{1}{x+1}$, поэтому исходное неравенство равносильно неравенству $\frac{9x-15}{19} < -\frac{1}{x+1}$ или $\frac{9x^2-6x+4}{19(x+1)} < 0$. Дискриминант квадратного трехчлена в числителе отрицателен, поэтому всегда $9x^2 - 6x + 4 > 0$ и, значит, $x + 1 < 0, x < -1$.

«Ответ»: $(-\infty, -1)$.

Жуков Александр Владимирович,
кандидат технических наук,
преподаватель детского компьютерного клуба.

sunshi@online.ru

Сверхстепени и их разности

А. Ю. Эвнин

А. Ю. Эвнин — старший преподаватель Челябинского педагогического университета, автор нашего журнала (№3(14), 2000 г.). В предлагаемой заметке при помощи элементарных методов теории чисел изучается делимость разностей сверхстепеней. Материал можно использовать в классах с углубленным изучением математики и на факультативных занятиях.

Под *сверхстепенью* будем понимать выражение вида $a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$, в котором число a встречается некоторое конечное число раз.

На 58-й американской студенческой олимпиаде (William Lowell Putnam competition), состоявшейся в декабре 1997 г., предлагалась следующая задача.

Докажите, что для $n \geq 2$ число

$$\overbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}^{n \text{ цифр}} - \overbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}^{n-1 \text{ цифр}} \quad \textit{делится на } n. \qquad (*)$$

Заметка посвящена ответу на вопрос: насколько сильно можно обобщить утверждение $(*)$?

Функция Эйлера. В последующих выкладках широко будет использоваться функция Эйлера $\varphi(n)$ — число натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n. Непосредственно из определения следует, $\varphi(n) \leq n-1$ при $n \geq 2$. Хорошо известны[1] следующие свойства функции Эйлера:

- если числа n и m взаимно просты, то $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ (это свойство называют *мультипликативностью*);
- если p — простое число, а k — натуральное, то $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$;
- если a и n взаимно простые числа, то $a^{\varphi(n)} - 1$ делится на n (теорема Эйлера).

[1] См., например, статью *А. Егоров, А. Котова.* Необыкновенные арифметики. — "Квант" 3/4 за 1993 г. или Прил. к "Кванту" 2 за 1994 г.

Последовательности сверхстепеней и их разностей. Пусть a — произвольное натуральное число, большее 1. Последовательность сверхстепеней зададим соотношениями $u_0 = 1$, $u_{n+1} = a^{u_n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Пусть теперь $b_n = u_n - u_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

С помощью введенных обозначений задача $(*)$ может быть сформулирована так: доказать, что при $a = 2$ для произвольного n имеет место соотношение $b_n \vdots n$ (запись $x \vdots y$ обозначает, как обычно, факт делимости x на y). Мы докажем, в частности, что имеет место значительно более сильное утверждение: $b_n \vdots n!$ при произвольном a.

Укажем сначала рекуррентную формулу для последовательности (b_n)

$$b_n = u_{n-1}(a^{b_{n-1}} - 1).$$

Действительно,
$b_n = u_n - u_{n-1} = a^{u_{n-1}} - a^{u_{n-2}} = a^{u_{n-2}}\left(a^{u_{n-1}-u_{n-2}} - 1\right) = u_{n-1}\left(a^{b_{n-1}} - 1\right)$.

Заметим также, что последовательность (u_n), очевидно, является возрастающей, в силу чего $u_{n+1} = a^{u_n} \vdots a^{u_{n-1}} = u_n$ для произвольного n.

В дальнейшем будем считать, что число a имеет следующее разложение на простые множители: $a = p_1^{r_1} \ldots p_s^{r_s}$, где $p_1, \ldots, p_s$ — различные простые числа, $r_1, \ldots, r_s$ — натуральные числа.

Основные результаты

1°. *В последовательности (b_n) каждый член (начиная со второго) делится на предыдущий (значит, и на все предыдущие).*

Утверждение докажем по индукции. База индукции: $b_2 = a(a^{a-1} - 1) \vdots a - 1 = b_1$. Индукционный шаг. Пусть $b_k \vdots b_{k-1}$. Тогда $a^{b_k} - 1 \vdots a^{b_{k-1}} - 1$ и $b_{k+1} = u_k(a^{b_k} - 1) \vdots u_{k-1}(a^{b_{k-1}} - 1) = b_k$.

2°. *b_n делится на n для произвольного n.*

Доказательство. Представим число $n \geq 2$ в виде $n = p_1^{l_1} \ldots p_s^{l_s} t$, где t — число, взаимно простое с a. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ имеем $n - 1 \geq l_i$ и $u_{n-1} \vdots a^{n-1} \vdots a^{l_i} \vdots p_i^{l_i}$. Значит, $u_{n-1} \vdots p_1^{l_1} \ldots p_s^{l_s}$. Далее вновь применим индукцию. Очевидно, что $b_2 = a^a - a$ — четное число (как разность чисел одинаковой четности). Предположим, что для $k < n$ справедливо $b_k \vdots k$. Поскольку $\varphi(t) \leq \varphi(n) < n$, в частности, имеем $b_{\varphi(t)} \vdots \varphi(t)$. В силу 1^o $b_{n-1} \vdots b_{\varphi(t)}$ (опять же потому, что $\varphi(t) \leq n - 1$). Таким образом, $b_{n-1} \vdots \varphi(t)$ и $a^{b_{n-1}} - 1 \vdots a^{\varphi(t)} - 1$. Последняя же разность по теореме Эйлера кратна t.

Итак, $u_{n-1} \vdots p_1^{l_1} \ldots p_s^{l_s}$ и $a^{b_{n-1}} - 1 \vdots t$. Поэтому $b_n = u_{n-1}(a^{b_{n-1}} - 1) \vdots p_1^{l_1} \ldots p_s^{l_s} t = n$. Утверждение доказано.

3°. *b_n делится на k для произвольного $k \le n$.*

Утверждение непосредственно следует из 1^o и 2^o.

4°. *Если $x - 1 \vdots k^m$, то $x^k - 1 \vdots k^{m+1}$ (x, k, m— натуральные числа).*

Для доказательства воспользуемся формулой

$$x^k - 1 = (x-1)(x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + 1).$$

Так как $x \equiv 1 (\operatorname{mod} k)$, то $x^j \equiv 1 (\operatorname{mod} k)$ и $\sum_{j=0}^{k-1} x^j \vdots k$.

Применив n раз утверждение 4^o, получим

5°. *Если $x - 1 \vdots k$, то $x^{k^n} - 1 \vdots k^{n+1}$.*

6°. *Если $n \ge 4$, то $b_n \vdots 2^n$.*

Если a четно, утверждение очевидно. Для нечетного a имеем следующую цепочку выкладок.

$b_2 \vdots 2 \Rightarrow b_3 = u_2(a^{b_2} - 1) \vdots a^2 - 1 \vdots 4 \Rightarrow b_4 = u_3(a^{b_3} - 1) \vdots a^4 - 1 \vdots 16$.

Предположим теперь, что при $k \ge 4$ число b_k имеет вид $b_k = 2^k t$. Тогда, применив 5^o, получим $b_{k+1} = u_k((a^t)^{2^k} - 1) \vdots 2^{k+1}$ (поскольку $a^t - 1 \vdots 2$).

7°. *Если p — простое число, не являющееся делителем числа a, $n \ge \varphi(p-1) + 1$, то $b_n \vdots p^{n-(\varphi(p-1)+1)}$.*

Доказательство.

Сначала докажем, что b_n делится на $p - 1$. Представим число $p - 1$ в виде $p - 1 = p_1^{j_1} \ldots p_s^{j_s} t$, где t — число, взаимно простое с a. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ имеем

$n - 1 \ge \varphi(p-1) \ge \varphi(p_i^{j_i}) = p_i^{j_i - 1}(p_i - 1) \ge p_i^{j-i-1} \ge j_i$ и

$b_n \vdots u_{n-1} \vdots a^{n-1} \vdots (p_i^{r_i})^{n-1} \vdots p_i^{n-1} \vdots p_i^{j_i}$. Таким образом, $b_n \vdots p_1^{j_1} \ldots p_s^{j_s}$. Осталось проверить, что b_n делится на t. Так как $\varphi(t) \le \varphi(p-1) \le n-1$, имеем (в силу 3^o) $b_{n-1} \vdots \varphi(t)$. Поэтому $b_n = u_{n-1}(a^{b_{n-1}} - 1) \vdots a^{b_{n-1}} - 1 \vdots a^{\varphi(t)} - 1 \vdots t$.

Переходим к доказательству собственно утверждения 7^o. Оно будет вестись индукцией по n. При $n = \varphi(p-1) + 1$ утверждение тривиально. Пусть при $k \ge \varphi(p-1) + 1$ число b_k представимо в виде $b_k = p^{k-(\varphi(p-1)+1)} \cdot (p-1)v$. Тогда $a^{b_k} - 1 = (a^{v(p-1)})^{p^{k-(\varphi(p-1)+1)}} - 1$. В силу того, что a и p взаимно простые числа, $a^{p-1} - 1 \vdots p$ (по *малой теореме Ферма*, являющейся очевидным частным случаем теоремы Эйлера). Значит, $a^{v(p-1)} - 1$ также делится на p. С помощью 5^o заключаем, что $a^{b_k} - 1 = (a^{v(p-1)})^{p^{k-(\varphi(p-1)+1)}} - 1 \vdots p^{k+1-(\varphi(p-1)+1)}$. Итак, $b_{k+1} \vdots a^{b_k} - 1 \vdots p^{k+1-(\varphi(p-1)+1)}$. Утверждение доказано.

8°. *Для любого простого числа p, не превосходящего n, число b_n делится на p^{n-p+1}.*

Доказательство. Для $p = 2$ утверждение следует из 6^o и того, что $b_2 \vdots 2, b_3 \vdots 4$. Поэтому можно считать: $p \geq 3$. Если p делит a, то $b_n \vdots u_{n-1} \vdots p^{n-1} \vdots p^{n-p+1}$. Пусть теперь p не является делителем a. Тогда в силу 7^o $b_n \vdots p^{n-(\varphi(p-1)+1)}$. Так как (при $p \geq 3$) $\varphi(p-1) \leq p-2$, отсюда получаем, что $b_n \vdots n^{n-p+1}$.

9°. *b_n делится на $n!$ для произвольного n.*

Доказательство. Из 3^o следует, что $b_2 \vdots 2!$, $b_3 \vdots 3!$ Будем далее считать, что $n \geq 4$. Как известно, в разложении числа $n!$ на простые множители простое число p входит с кратностью $f_p = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + [\frac{n}{p^3}] + \ldots$. Нужно доказать, что $b_n \vdots p^{f_p}$, где p — произвольное простое число, не превосходящее n.

С помощью суммирования членов геометрической прогрессии оценим сверху кратность f_p:

$$f_p \leq n(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots) = \frac{n}{p-1}.$$

Делимость b_n на "нужную" степень двойки следует теперь из 6^o. Действительно, с одной стороны, $f_2 \leq n$, а, с другой стороны, $b_n \vdots 2^n$ при $n \geq 4$.

Если $p = n$, то делимость b_n на p следует из 2^o.

Пусть теперь $p \geq 3$ и $n \geq p+1$. Легко проверить, что при этом $\frac{n}{p-1} \leq n-p+1$. Действительно,
$\frac{n}{p-1} \leq n-p+1 \iff n \leq (p-1)n-(p-1)^2 \iff n(p-2) \geq (p-1)^2$. Последнее неравенство (поскольку $n \geq p+1$) будет следствием неравенства $(p+1)(p-2) \geq (p-1)^2$, которое равносильно тому, что $p \geq 3$. Итак, $f_p \leq \frac{n}{p-1} \leq n-p+1$ и $b_n \vdots p^{n-p+1} \vdots p^{f_p}$. Утверждение доказано.

Заметим, что утверждение 9^o выполняется "с большим запасом." Приведем пример. Пусть $a = 2,\ n = 11$. Тогда $11! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$. Используя 7^o, получим, что $b_{11} \vdots 2^{u_9} \cdot 3^9 \cdot 5^8 \cdot 7^8 \cdot 11^6 \cdot 13^6 \cdot 17^2 \cdot 19^4$, где $u_9 > 10^{100}$.

10°. *Если $p > 3$ есть простое число и $n \geq \frac{p+1}{2}$, то b_n делится на $p^{n-\frac{p+1}{2}}$.*

Доказательство. Число $p-1$ четно. Представим его в виде $p-1 = 2^k \cdot t$, где t — нечетное число. Тогда $\varphi(p-1) = \varphi(2^k) \cdot \varphi(t) = 2^{k-1} \cdot \varphi(t) \leq 2^{k-1} \cdot t = \frac{p-1}{2}$. Значит, $\varphi(p-1)+1 \leq \frac{p+1}{2}$. Поэтому если $n \geq \frac{p+1}{2}$, то $n \geq \varphi(p-1)+1$ и в силу 7^o $b_n \vdots p^{n-(\varphi(p-1)+1)} \vdots p^{n-\frac{p+1}{2}}$. Следствием из 6^o и 10^o является следующее утверждение

11°. *Если $n \geq 4$, то $b_n \vdots 10^{n-3}$.*

Стало быть, $a_n - a_{k+3} = b_n + b_{n-1} + \ldots + b_{k+4}$ делится на 10^k при $n \geq k+4$.

Положив $a_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_{n,k} 10^k$ (в записанном ряде в действительности конечное число ненулевых слагаемых), мы имеем, что $d_{n,k} = d_{k+3,k}$ для всех $n \geq k+4$. Таким образом, можно определить *бесконечную сверхстепень* как (формальный) ряд

$$a^{a^{\cdots a^{\cdots}}} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k 10^k,$$

где $d_k = \lim\limits_{n\to\infty} d_{n,k} = d_{k+3,k}$.

12°. *Пусть a — четное число. Тогда при $n \geq 5$ число b_n делится на $(n!)^2/3$.*

Доказательство. Запишем сначала разложение числа $n!^2/3$ на простые множители:

$$n!^2 = 2^{2f_2} \cdot 3^{2f_3-1} \prod_{3<p\leq n} p^{2f_p}.$$

Легко проверить, что если $n \geq 5$, то $u_{n-2} \geq 2(n-1)$, в силу чего $u_{n-1} = a^{u_{n-2}}$ кратно числу $a^{2(n-1)}$, а, значит, и числу $2^{2(n-1)}$. Поскольку $b_n = u_n - u_{n-1}$ делится на u_{n-1} (следовательно, и на $2^{2(n-1)}$) и $2f_2 \leq 2(n-1)$, делимость b_n на требуемую степень двойки гарантирована.

Для дальнейшего нам потребуется более точная оценка для числа f_p. Мы докажем, что $f_p \leq \frac{n-1}{p-1}$. Для этого возьмем такое натуральное k, для которого $n < p^{k+1}$. Тогда

$$f_p = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] = \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{p^i}\right] < \sum_{i=1}^{\infty}\frac{n}{p^i} = \frac{n}{p-1}.$$

Легко видеть, что на интервале $(\frac{n-1}{p-1}, \frac{n}{p-1})$ целых чисел нет. Поэтому $f_p \leq \frac{n-1}{p-1}$.

В частности, имеем $f_3 \leq \frac{n-1}{2}$. Значит, в разложении числа $n!^2/3$ на простые множители тройка входит с кратностью $2f_3 - 1 \leq n-2$. В то же время из 8^o следует, что $b_n \vdots 3^{n-2}$, т.е. $b_n \vdots 3^{2f_3-1}$.

Пусть теперь простое число p не меньше 5. Использование утверждения 10^o и верхней оценки для f_p сводит доказательство к проверке выполнения неравенства $2(\frac{n-1}{p-1}) \leq n - \frac{p+1}{2}$. Выпишем цепочку равносильных ему неравенств.

$$4(n-1) \leq 2n(p-1) - (p^2-1); \quad 2n(p-3) \geq p^2 - 5.$$

Поскольку $n \geq p$, последнее неравенство будет следствием неравенства $2p(p-3) \geq p^2 - 5$, или $p^2 - 6p + 5 \geq 0$, которое выполняется при $p \geq 5$.

Утверждение доказано.

13°. *Пусть $a = 4$. Тогда b_n делится на $(n!)^2$ при любом n.*

Ввиду 12^o достаточно проверить, что b_n кратно $2^{2(n-1)}$ (так как $f_2 \leq n-1$) и $3^{(n-1)}$ (так как $f_3 \leq \frac{n-1}{2}$).

Первое почти очевидно: $b_2 = 4^4 - 4$ делится на $4 = 2^2$; если $n \geq 3$, то $u_{n-2} \geq 2(n-1)$ и $b_n \vdots u_{n-1} = 4^{u_{n-2}} \vdots 2^{2(n-1)}$.

Второй факт доказывается по индукции. Заметим, что $b_2 = 4^4 - 4$ делится на 3. Предположим теперь, что b_k делится на 3^{k-1}. Тогда $b_{k+1} = u_k(4^{b_k} - 1)$ делится на $4^{3^{k-1}} - 1 = 2^{2\cdot 3^{k-1}} - 1 = 2^{\varphi(3^k)} - 1$, что, в свою очередь, кратно 3^k по теореме Эйлера. Итак, b_{k+1} делится на 3^{k+1}, что и требовалось доказать.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить С. И. Токарева за внимание к данной работе (и, в частности, за формулировку утверждения 13°).

Эвнин Александр Юрьевич
Южно-Уральский Государственный Университет
старший преподаватель кафедры
прикладной математики
e-mail: evnin@prima.susu.ac.ru

Историческая реконструкция математического знания

Лео Роджерс

Редакция предлагает вниманию читателей перевод статьи Rogers L. "Is the historical reconstruction of mathematical knowledge possible?" опубликованной в сборнике "Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique", 1995 г. Сборник издан во Франции Институтом исследований в области математического образования (IREM). Настоящая публикация осуществляется с любезного разрешения редактора сборника, директора IREM г. Luc Trouche. Перевод выполнен Андреем Ивановичем Щетниковым, консультантом Центра Образования г. Междуреченска Кемеровской области.

Изучение математики, обучение математике

Парадигма, всё ещё широко распространённая в обучении математике, и подвергнутая критике ЛАКАТОСОМ (LAKATOS 1961), ДАУСОНОМ (DAWSON 1969), мною (ROGERS 1976) и другими, исходит из формалистской методологии, согласно которой обучение начинается с предъявляемого без особых оснований или объяснений списка определений и аксиом, образующих сложно организованную искусственную систему; за ними следуют тщательно излагаемые леммы и теоремы, и для каждой теоремы приводится доказательство.

Студентам предъявляется требование следовать по этому пути, и хотя официально их поощряют задавать вопросы, вскоре эти вопросы теряются в переплетениях и технических деталях изложения, и зачастую они оказываются отставленными в сторону как недостаточно "математически зрелые".

Эта картина может быть расценена как карикатура на математическое образование, однако стандартный способ изложения зачастую производит на студентов впечатление полной бессмыслицы, поскольку они ничего не знают ни о причинах, по которым преподаватель выбрал такой подход, ни о том, чем руководствовались математики, когда ставили свои задачи. Значительная часть математики предстаёт перед ними как набор итоговых результатов и инструментальных техник.

Этот дедуктивный стиль объявляется сущностью математики, и хотя считается допустимым упоминать об открытии и создании новых идей по ходу дела, эти идеи редко рассматриваются в историческом контексте, поскольку считается, что любые новые идеи должны быть представлены студентам сразу же в "строгой" манере[1].

Со времени первой атаки ЛАКАТОСА прошло тридцать лет, однако многие установки остались непроницаемыми для изменений. Традицию трудно переломить, и формально-дедуктивная защита выстроена крепко. Во всяком случае, хотя некоторые изменения на уровне от начальной школы до колледжа и имели место, они были сделаны только в результате большой затраты усилий, и их сохранение требует большого количества энергии [2].

А общераспространённая концепция математики остаётся прежней.

Математическая деятельность

Достаточно беглого взгляда на попытки дать определение математики, чтобы увидеть, что они зависят от времени, места, окружения и культуры. Некоторые классические определения выглядят теперь полностью неуместными, особенно с тех пор, как в конце XIX века возросла роль абстрактных математических подходов и широких обобщений. Математика не только развилась как предметная область, но и стала играть новые роли в новых практиках.

Философия интуиционизма, ЛАКАТОС и позднее АТМ в Англии[3] начали описывать математику как человеческую деятельность, избегая таким образом некоторых прежних ловушек, но создавая при этом новые. Фраза "математика — это

[1] Похоже, что формалистский подход к обучению зародился в XVIII столетии у ХРИСТИАНА ВОЛЬФА: "В моих лекциях я уделил основное внимание трём аспектам: (1) я не употребил ни одного слова, которого я не объяснил бы прежде, с целью избежать двусмысленности или логических пробелов; (2) я не использовал ни одной теоремы, которую я не доказал бы прежде; (3) я постоянно связывал теоремы и определения друг с другом в непрерывную логическую цепь. Общеизвестно, что этих правил придерживаются в математике. Если сравнить математический способ обучения с логическим подходом, обсуждаемым в моей книге об умозаключениях, то можно будет увидеть, что математический способ обучения является ничем иным, как точным приложением правил умозаключения. Поэтому не имеет значения, следовать ли математическому способу обучения или правилам умозаключения, поскольку таковые верны. Поскольку я показал, что математическое мышление отражает естественное мышление, а логическое умозаключение является всего лишь отчётливо усовершенствованным естественным мышлением, тем самым я вполне могу заявить, что мой способ обучения следует естественному образу мышления" (WOLFF 1726/1973, стр. 52-54; цит. по: WITTMANN, 1992; курсив мой - Л. Р.). Хотя в этой вере и содержатся серьёзные изъяны, всё же данная официальная догма является значимым "рабочим принципом" для многих преподавателей математики. Последний критический обзор этого подхода сделан в популярной книге DAVIS, HERSH 1981, pp. 274-284.

[2] Я говорю об изменениях, произошедших в Англии приблизительно за последние двадцать лет, и предполагаю, что несмотря на эти изменения, стиль школьной математики в значительной степени остаётся под сильным влиянием формалистской парадигмы. См., в частности, работы АТМ по исследованиям (с 1966), приведшие к появлению работ BURTON 1984, MASON, BURTON, STACCY 1985, а также разработок Открытого Университета Решения Задач и Математического Мышления.

[3] Интуиционизм укоренён в кантианской философии, и в идее априорного восприятия. Хотя я и не утверждаю, что более поздние подходы школы ПОППЕРА/ПОЙА/ЛАКАТОСА относятся к той же традиции, некоторая общность этих подходов основывается на подчёркивании существенно более значимой роли человеческой личности в создании математики, и на разработке следствий из этого тезиса. Осознание роли социального и культурного окружения в создании математики является сравнительно недавним достижением.

то, чем занимаются математики" является трюизмом, однако она не проясняет нам, кто такие "математики".

Деятельностный акцент развился в интерес к тому, что мы сейчас называем процессом; были затрачены значительные усилия на объяснение стоящего за этим словом комплекса таких идей, как математизация, обобщение и моделирование, обсуждались также язык, визуализация и другие стороны человеческого общения[4]. С конца 1960 г. по этим вопросам вышло достаточно много литературы.

В этой литературе мы можем обнаружить скрытую общераспространённую веру в то, что в процессе изучения математики нечто создается и воссоздаётся учащимся, и элементы такой творческой деятельности объявляются общими для детей, школьников, студентов и математиков. Необходимым следствием этой веры является признание обсуждения и общения в качестве жизненных основ для роста математического знания.

Развитие математики и значение истории

До середины 1960 гг. имелось несколько широких предположений о значении истории математики для математики; эти предположения, как мы это сейчас понимаем, прямо проистекали из принятой методологии изучения математики и обучения математике. В силу этих предположений верили, что математика развивается существенно иначе, нежели естественные науки, не требуя эвристических или индуктивных рассуждений, и никак не соотносится с современными ей философскими или метафизическими идеями и социальными обстоятельствами.

КРОУ (CROWE 1992) приводит следующий список этих предположений:

- Философы и преподаватели математики настаивают на том, что математика имеет дедуктивную структуру; тем самым задача историка математики заключается в отслеживании этих дедуктивных цепочек для отдельных разделов математики. Единственное исключение делается для того случая, когда выставляется новый набор аксиом для нового "дедуктивного двигателя". Поскольку математика является чисто рациональной, единственный критерий оценки новых математических сущностей состоит в том, могут ли они быть выведены из исходных допущений.

- Математическое знание растёт путём накопления. Стандартный пример — неевклидова геометрия, которая не противоречит евклидовой геометрии и тем самым не отменяет её. Математика может быть улучшена. Скудная математика прошлого замещается более рафинированной современной математикой.

- Математика свободна от метафизики. В отличие от естественных наук, природа математических сущностей является априорной, бесспорной и неоспоримой.

[4]Исследования по языку (PIMM, LABORDE и др.), по воображению и визуализации (GOLDIN, DREYFUS, TALL) представлены в материалах последних конференций по психологии математического образования (Proceedings of PME) и в работе NESHER, KILPATRICK 1990.

- Строгость, доказательство и точность не зависят от времени. Будучи доказанной однажды, теорема остаётся истинной навсегда.

- В математике нет революций. См., например, ФУРЬЕ: "эта трудная наука формируется медленно, но она сохраняет всякий однажды достигнутый результат: она растёт и крепнет среди перемен и ошибок человеческого ума" (FOURIER 1822, р. 7). Многие примеры такой уверенности могут быть найдены в утверждениях математиков вплоть до наших дней.

Исследования КРОУ в "Истории векторного анализа" (CROWE 1967) показывают безосновательность всех этих предположений (быть может, за исключением последнего)[5].

Если мы допускаем, что математика является человеческой деятельностью, нам следует принять также и то, что математика, создаваемая людьми, обладает в некотором смысле и своей собственной жизнью... Проблема состоит в том, что математика в качестве продукта человеческой деятельности отождествляется с корпусом Знаний, в результате чего она исключается из самой породившей её деятельности. В определённом смысле люди работают над известной математикой и укрепляют её; это напряжение между индивидуальным и социальным является ведущей темой книги УАЙЛДЕРА (WILDER 1968).

Мы можем рассматривать математику как живой растущий организм, в значительной мере автономный от породившей его деятельности. Математика, исходно созданная отдельными людьми и в определённом смысле принадлежавшая им, становится собственностью математического сообщества, и в качестве общественной деятельности она развивает свои собственные законы роста, свою собственную диалектику, и отстраняется от своего прошлого[6].

Отстранение от прошлого означает, что на современной сцене математика обязана действовать согласно допущениям формалистской парадигмы, описанными выше. Мы столь упорно пытаемся показать, что математика является наукой обо всём, что вычёркиваем то частное, чем она занималась исходно[7]. Но если мы ре-

[5] 5 Замечу, что КРОУ настаивает на употреблении выражения "в математике". Это означает, что мы допускаем "революционные" изменения в символике, номенклатуре, метаматематике, методологии и даже в историографии, но все эти изменения не касаются математики как таковой. Мне думается, что это приводит нас к проблеме определения, что такое математика: путь, по которому современные философы отказываются идти (см. сноску 2). Вопрос об определении математических "революций" всесторонне рассмотрел GILLES 1992.

[6] Развитая УАЙЛДЕРОМ концепция "укрепления" описывает ситуацию, в которой математики последовательно очищают частные понятия, а авторы учебников перестраивают целые математические области в соответствии с новыми категориями абстракции или частными способами изложения. Интересно рассмотреть, каким образом определение математики как отдельного автономного корпуса знаний ведёт к неявному предположению о существовании "законов", по которым происходит её эволюция. Эта и другие проблемы, касающиеся взаимоотношений между математикой, её создателями и обществом, рассматривали также WILDER, BLOOR, CROWE, D'AMBROSIO, KITCHER и др. (см. библиографию).

[7] Можно считать это парафразом РАССЕЛА: "...математика является таким предметом, в котором мы не знаем ни о чём мы говорим, ни является ли сказанное нами истинным" (RUSSELL 1956).

шим заглянуть за формалистский занавес, нам сразу же придётся переосмыслить нашу собственную роль в этой диалектике идей.

Я утверждаю, что реконструкция диалектики, поиск доводов, побуждений, исходных постановок задач, догадок, оправданий и т.д. осуществимы только при условии изучения истории самого предмета, через попытки реконструировать исторические ситуации. Такая реконструкция по необходимости будет умозрительной и неточной, и она конечно же зависит от доступных данных[8]. Более того, частичные интерпретации доступных данных зависят от философской установки личности, выполняющей эти интерпретации, как я это покажу ниже. И всё же важно отметить, что после работ ЛАКАТОСА понятие рационального перестало быть связанным с одной лишь описанной выше строгой дедуктивной формой, и его значение стало включать в себя "эвристику".

Реконструкция истории

Основное назначение истории — изучение изменений, происходящих во времени — является насущно значимым не только для той математики, которую мы изучаем сегодня, но также и для общения математиков всех уровней.

Изучая историю математики, мы имеем дело с двумя основными аспектами равной важности. Во-первых, это прошлое как таковое — документы, архивы, события и т. д., в своей совокупности называемые "фактами" — поскольку они составляют основу тех теорий прошлого, из которых развились современные теории и методы. Читая документы, мы пытаемся раскрыть содержащиеся в них концепты, так что значение архивов состоит не только в том, что они позволяют определить последовательность событий, но также в том, что их изучение раскрывает эмпирические факты, какими являются задачи, и теоретические факты, касающиеся решения этих задач. В этом смысле концепты составляют часть исходных данных истории математики.[9] [10]

Во-вторых, вслед за сбором фактов мы делаем попытки реконструировать и интерпретировать прошлое. Значение отдельного события или концепта, превращение его из простого относящегося к прошлому факта в исторический факт су-

[8]Это утверждение существенно, но значительная часть работы уже сделана. Заметьте, что оно означает не то, что мы не можем преподавать математику, не зная её истории, но то, что исторический фон доставляет нам идеи и сведения, на которых мы можем основывать наши подходы к преподаванию. Вовсе не требуется, чтобы каждый учитель математики был в равной степени и историком математики! См. также FREUDENTHAL 1983. Работы IREMS во Франции также привели к созданию многочисленных комментариев и эпистемологических статей, посвящённых процессам исторического открытия.

[9]Даже "факты" являются противоречивыми. К примеру, см. работу HOYRUP 1991, где показано, как рассмотрение одних и тех же античных культурных практик учёными разных дисциплин может привести к весьма различным выводам о том, что происходило в прошлом на самом деле.

[10]"Концепты" являются опасными вещами. Отсутствует какое-либо согласие в том, что представляет собой концепт; сделано много попыток расширить эту идею употреблением таких терминов, как концептуальная сеть, схема, рамка, и т.д. Текучим является также различение "концепта как объекта" и "концепта как инструмента", сделанное DOUADY, PERRIN-GLORIAN 1989.

щественно зависит от того, как мы его истолкуем. Эти интерпретации простираются от сознательных оценок и усилий по реконструкции событий, принадлежащих историкам математики, до неосознанных истолкований, сделанных работающими математиками или преподавателями математики.

Любая программа рациональной реконструкции истории математики должна учитывать разнообразие подходов к сбору, упорядочению и истолкованию исходных сведений (фактов, мнений и предположений), и многообразие источников, из которых эти сведения черпаются.

Эти подходы распределяются по четырём различным рубрикам: эмпирическая реконструкция; концептуальная реорганизация; социальное, экономическое и культурное развитие; образцы открытий.

Эмпирическая реконструкция на протяжении долгого времени понималась большинством людей как история математики в собственном смысле. Такая история заключается в изучении источников, сборе фактов, выстраивании их в хронологическом порядке, и последующем изложении с целью дать объективный отчёт об историческом прогрессе математических идей. Попытки реконструировать математику прошлого путём изучения документов и раскрыть её движущие силы через существенные задачи своего времени в основном подчинялись описанной выше вере в "парадигму прогресса": считалось, что в прошлом математика была как бы менее развита, менее полна и менее правильна, чем сегодня. Этот подход часто называют "индуктивистским" или "интерналистским". Он стремится представить развитие математики в её истории, ставившиеся физические и математические задачи, возникшую в результате исследований новую математику и её приложение к физическим и математическим задачам как эволюционный прогресс, по ходу которого математика становится лучше и лучше; при этом подразумевается, что математика прошлого постепенно отвергается как неуместная, неточная и имеющая изъяны.

Этот подход должен быть по необходимости избирательным, и тем самым попытка представить объективный отчёт о всех фактах оказывается невозможной. Имеется много учебников по истории математики, основанных на такой философии и показывающих предубеждённость автора; хорошим примером служит классический текст КЭДЖОРИ (CAJORI 1896), стремившегося не только дать индуктивистский отчёт об истории математики, но также внушить, что преподавание математики должно отражать исторический прогресс[11].

Концептуальная реорганизация имеет дело как с текущей математикой, так и с истолкованием прошлого. Современная математика оценивает математику прошлого, описывая её на языке принятых сегодня концепций и решая, сознательно или неосознанно, обладает ли данный раздел математики значением и достоин-

[11] Книга КЭДЖОРИ "История элементарной математики с указанием на методы её преподавания" возникла вслед за его более существенной работой по истории математики (1893); в ней заметно влияние ГЕРБЕРТА СПЕНСЕРА и идеи "биогенетического закона" (онтогенез повторяет филогенез). Эта тема воспроизводится и в других книгах по преподаванию математики с исторической точки зрения; к примеру см. BRANFORD 1908.

ствами, и правильно ли доказана данная теорема. Оценка прошлого в терминах настоящего опасна для всех аспектов истории, а не только для математики; но она особенно опасна в математике, и её сложно избежать из-за концепции абстрактной математической структуры.

Со структурами математики связаны глубокие философские и психологические вопросы, имеющие важное отношение к изучению истории математики, поскольку мы имеем в ней дело с основными концепциями, описывающими сами эти структуры, их появление, расширение и развёртывание, равно как и случайность либо обязательность правил действия с ними. Для примера можно привести господство концепции абстрактной группы и то, как оказалось возможным увидеть групповые структуры в математике прошлого[12].

Такой подход составляет прямой контраст с описанным выше эмпирико-индуктивистским подходом, который ограничивался отбрасыванием математики прошлого как несовершенной и неполной.

Необдуманное приписывание истории современных стандартов строгости проявилось в полном переписывании истории в современных учебниках. Учебник не только стремится обратить исторический порядок, начиная с текущих принятых определений и пытаясь "критиковать" их путём немотивированных и зачастую непостижимых возражений, но вдобавок к этому он отодвигает исторический фон математики, важную "память" математической культуры, которая сегодня оказалась доступной лишь немногим.

Каждая фаза математической истории влечёт за собой переоформление, упрочнение, новое начало. С практической точки зрения принято считать, что быстрый рост общего числа письменных текстов способствует повышению эффективности коммуникации, и нет никакого иного выбора. В итоге студенты отсекаются от исторического фона математики, и важно предупредить об этой опасности как студентов, так и преподавателей.

Социальное, экономическое и культурное развитие. Здесь история изучается с точки зрения сил, внешних по отношению к математической теории и структурам. Этот подход рассматривает влияние социальных изменений на центры математического развития; связь различных форм покровительства со свободой развития, приоритетами и манерами математики; влияние отдельных лиц на исследовательские программы; технические и социальные проблемы, подлежащие рассмотрению математики; требования инвесторов и ограничения со стороны экономических условий. Эти аспекты встроены в конкретную культуру и конкретное время. Хотя эти влияния и не касаются деталей математических теорий, однако они часто определяют основное направление и темпы развития математики [13].

[12]МЭЙ (MAY 1972) оценивает такой подход к истории как один из "смертных грехов". К примеру см. многочисленные исторические заметки БУРБАКИ, где события в прошлом рассматриваются как прямые предшественники современных теорий, а также ZEEMAN 1974.

[13]Тому есть много примеров: развитие математического мастерства, техники и обозначений было вызвано возникновением городов-государств и центров торговли; развитием письменности, связи и изобретением печати; развитием техники; военными нуждами, и т. д. К примеру, см. BLOOR 1991 и WILDER 1981.

Общества также могут выступать "носителями" математического знания; это показывают разнообразные ситуации, в которых используются разные виды специализированной математики, от торговли до инженерного дела. Сами теории могут "социально существовать" как минимум двояко: в первом случае потребители вносят существенный вклад в развитие теории, во втором случае они хотя и не делают таких вкладов, но всё же понимают, что теория даёт важный вклад в их собственную сферу деятельности, и во всю математику в целом.

Кроме людей, очевидными носителями математического знания являются учебники, журналы, монографии и т. п.; сегодня применяются и другие средства: кино, видео, компьютерные диски и электронная почта.

Возможно, что теория может иметь математическое существование, но если она не принята и не используется математическим сообществом, это существование не является социальным, и она не оказывает никакого (или почти никакого) влияния на последующее развитие математики[14].

Образцы открытий исследуются равно философами и историками, — в том смысле, что попытки историков точно выяснить, что именно открыл тот или иной математик, предполагают наличие стоящей за данным открытием философии, веру в некоторую логику открытия. Различие между историком и философом состоит в акценте интересов: имея дело с анализом проблемных ситуаций, философ ориентирован по преимуществу на понимание теоретических систем и критических доводов, тогда как историк стремится реконструировать сами эти проблемные ситуации. Философ использует исторические факты в качестве материала, тогда как историк устанавливает эти факты. Каждая из этих двух деятельностей очевидно не исключает другую.

Здесь мы имеем дело с попытками построить философию математики на основе исследования особенностей индивидуальных творческих процессов; изучая такого рода исторические вклады, историческая наука пытается сформулировать логику математического открытия и психологию изобретения. Эта область затрагивает одну значительнейшую проблему, связанную с математикой, а именно: как сделать математику значимой в рамках всей культуры в целом, и интеллектуально доступной на всех уровнях. Эта проблема не может быть разрешена без хорошей философии: та же, в свою очередь, должна обращаться к истории за большей частью своего материала.

Важно различать гипотетическую реконструкцию исходной задачи, представляющую собой догадку о реальной задаче, с которой имел дело математик, и

---

[14]О математическом существовании я говорю в том смысле, как если бы кто-нибудь построил теорию, удовлетворяющую определённым заявленным критериям, но она не вошла бы в практику других математиков. Это в принципе возможно, но трудно привести тому примеры, потому что мы о них к несчастью ничего не будем знать. Однако мы можем рассматривать квадратуру круга и трисекцию угла в качестве такого рода примеров; таковы также некоторые крайние формы интуиционизма и конструктивизма. Для своего социального существования математика вовсе не должна быть "живой" в данный момент. Достаточно, чтобы было засвидетельствовано использование математической практики и теории той или иной группой людей в то или иное время.

проблему понимания реконструкции. Слияние метазадач и метатеорий историков математики с имевшимися в истории задачами и теориями математиков способно привести к обширной дискуссии.

БАШЛЯР (BACHELARD 1940) определил эпистемологический профиль как анализ деятельности индивида, основанный на анализе понятий, и эпистемологическое препятствие как такое понятие или метод, которое препятствует прорыву индивида к новому эпистемологическому состоянию (пример: ГАМИЛЬТОН и открытие кватернионов). Согласно БАШЛЯРУ, история науки должна объяснять прошлое на языке его собственных понятий и признавать отвергнутые результаты наравне с признанными достижениями[15].

Герменевтика, математика и её история

Классическая герменевтика возникла в девятнадцатом столетии как теория, обобщающая воспроизводящиеся попытки улучшить истолкование античных текстов. Герменевтика имеет дело с пониманием, и прежде всего — пониманием письменного текста, однако идее текста может быть придан и более широкий смысл, используемый сегодня[16]. Тем самым она может иметь отношение к весьма широкому кругу вопросов, от анализа текста до природы исторического понимания и философии общения.

В герменевтике традиционно проводилось различение гуманитарных наук и наук о природе. Обращая внимание прежде всего на смыслы, герменевтика отграничивала гуманитарные науки от тех, где исключение человеческих элементов являлось рабочим принципом. Что касается математики, то глубинная вера в то, что человеческие элементы могут быть исключены из неё, распространена здесь настолько широко, что о ней даже не принято говорить.

Однако математические сущности и отношения между ними встроены в комплексную знаковую систему, созданную людьми для своих нужд, и смыслы этой знаковой системы могут быть понятны лишь тем, кто хочет заниматься математикой или применять её[17].

Поскольку история является деятельностью по интерпретации, и поскольку в истории математики мы постоянно исследуем смыслы интересующих нас текстов, представляется ясным, что абсолютная точность постижения того, что именно хотел сообщить автор текста, постоянно остаётся под вопросом. Хорошим примером тому служит публикация "нематематических" идей ИСААКА НЬЮТОНА (FAUVEL 1988), когда математический истэблишмент Англии полностью проигнорировал философские и метафизические идеи, которые могли привести НЬЮТОНА к

[15]Тому есть множество примеров в естественных науках. Так теория теплорода является ценным достижением, но отвергнутым результатом. Сходные эпизоды в математике обычно попросту игнорируются.

[16]Текстами в современном смысле являются все формы письменности, включая музыкальную и танцевальную нотацию, а также фотографии, кино- и видеофильмы, плакаты и живопись.

[17]17 КОЭН (COHEN 1985) выделяет четыре признака, по которым можно определить, произошла ли научная революция: (1) свидетельства современников (включая оценку учёными их собственной работы); (2) критическая проверка документированной истории предмета; (3) суждения компетентных историков, особенно историков науки и философии; (4) общее мнение работающих сегодня учёных.

формулировке концепции "силы". Формула "$F = ma$" с герменевтической точки зрения ещё требует интерпретации (ROGERS 1990).

Значимость для обучения

Педагогика имеет дело и с творчеством, и с открытиями. Эвристика стимулирует математические открытия, доставляя принципы анализа действий в аналогичных ситуациях. Эвристические подходы, характерные для творческого развития математических понятий, позволяют создавать такие ситуации, в которых учащиеся могут изменить свои понятийные представления. Примером попыток внедрить эвристику в практику обучения служат воплощения широкой программы ПОЙА, сделанные БАРТОНОМ (BURTON 1984) и другими.

Изучая историю математики, мы не только исследуем разные стороны процесса развития математики, но и многое узнаём о важных контекстах её существования: психологическом, социальном, культурном, экономическом и других. Я должен сказать, что хотя изучение математики в аудитории ни в каком смысле не способно отразить историю, всё же нам есть чему поучиться у разных точек зрения на историю, описанных выше.

Библиография

ATM 1966. The development of mathematical activity in children: the place of the problem in this development. ATM Derby.

ATM 1980. Mathematical investigation in the classroom. ATM Derby.

BACHELARD G. 1940. La philosophie du non: Essai d'une philosophie du nouvel espirit scientifique. Paris, Presse Universitaires de France. [БАШЛЯР Г. Философское отрицание: Опыт философии нового научного духа. В кн.: БАШЛЯР Г. Новый рационализм. М., Прогресс, 1987, с. 160-283.]

BLOOR D. 1976/1991. Knowledge and social strategy. Univ. of Chicago Press.

BRANFORD B. 1908. A study of mathematical education including the teaching of arithmetic. Oxford.

BURTON L. 1984. Thinking things through. Oxford, Blackwell.

CAJORI F. 1893. A history of mathematics. NY, Macmillan.

CAJORI F. 1896. A history of elementary mathematics with hints on methods of teaching. NY, London, Macmillan. [КЭДЖОРИ Ф. История элементарной арифметики с указанием на методы преподавания. Одесса, Mathesis, 1917.]

COHEN I. B. 1985. Revolution in science. Harvard Univ. Press.

CROWE M. J. 1967. A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system. Notre Dame Univ. Press.

CROWE M. J. 1975. Ten 'laws' concerning the patterns of change in the history of mathematics. Historia Mathematica, 2, pp. 161-166.

CROWE M. J. 1975. Afterword (1992): a revolution in the historiography of mathematics? In GILLES (1992), op. cit., pp. 306-316.

D'AMBROSIO U. 1985. Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. For the learning of mathematics, 5, pp. 44-48.

DAVIS P. J, HERSH R. 1981. The mathematical experience. Harvester Press (rep. Penguin 1990).

DAWSON S. 1969. The implication of the work of Popper, Polya and Lakatos for a model of mathematics instruction. Unpublished dissertation. Univ. of Alberta, Canada.

DOUADY R., PERRIN-GLORIAN J. 1989. Un processus d'apprentisage du concept d'aire de surfase plane. Educational Studies in Mathematics, 20, pp. 387-424.

FAUVEL J. et al. (Eds.) 1989. Let Newton be! Oxford Univ. Press.

FOURIER J. 1822. Theorie analitique de la chaleur. Tr. Freeman A. as "Analytical theory of heat", Dover, 1955.

FREUDENTHAL H. 1983. Didactical Phenomenology of mathematical structures. Reidel.

GILLES D. (Ed.) 1992. Revolutions in mathematics. Oxford, Clarendon Press.

HOYRUP J. 1991. Changing trends in the historiography of Mesopotamian mathematics. Privately circulated contribution to the conference of contemporary trends in the historiography of sciences. Corfu.

KITCHER P. 1983. The nature of mathematical knowledge. Oxford.

LAKATOS I. 1961. Essays in the logic of mathematical discovery. Ph. D. Dissertation. Cambridge. First published as "Proofs and refutations" in British Journal for the Philosophy of Science (1962) and later as LAKATOS I. 1972. Proofs and refutations. Eds. Worall J. and Zahar E. Cambridge. [ЛАКАТОС И. Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы. М., Наука, 1967.]

MASON J., BARTON I., STACCY K. 1985. Thinking mathematically. Open University.

MAY K. 1972. Bibliography and research manual in the history of mathematics. Toronto.

NESHER P., KILPATRICK J. 1990. Mathematics and cognition. Cambridge Univ. Press.

NEWNANN J. R. (Ed.) 1956. The world of mathematics. 4 vol. Vol. 3 (1578-1590). Allen and Unwin.

ROGERS L. 1975. The history of mathematics and its implication for teaching. Unpublished dissertation. Leicester, School of Education.

ROGERS L. 1990. The great ocean of truth. Essay review of FAUVEL 1988 in Mathematics Teaching N 136 Sept. 1991, pp. 48-49.

RUSSELL B. 1956. Mathematics and the metaphysicians.

SEEGER F., STEINBRING H. 1972. The dialogue between theory and practice in mathematical education: overcoming the broadcast metaphor. Bielfeld, Institut fur Didaktik der Mathematik.

WILDER R. L. 1968/1974. The evolution of mathematical concepts. Wiley.

WILDER R. L. 1981. Mathematics as a cultural system. Pergamon.

WITTMANN E. C. 1992. One source of the broadcast metaphor: mathematical formalism. In: SEEGER F., STEINBRING H. 1972., op. cit., p. 116.

WOLFF C. 1973. Ausfuhrlishe Nachriht von seinen eigenen Schriften. Kap. 3: Von der Lerhart des Autoris. ss. 52-124. Ges. Werke, 1. Abt. Deutsche Schriften Band 9. Hildesheim/NY/Olms.

ZEEMAN C. 1974. Research, ancient and modern. Bulletin of the Institute of mathematics and its applications, 10, pp. 272-281.

Leo Rogers
Roehampton Institute
London SW 15 5 PH

Содержание приложения “Обозрение Z”

Предлагаем вниманию читателей содержание очередных номеров научно-популярного приложения “Обозрение Z” к журналу “Математическое образование”. Напоминаем, что как электронная, так и бумажная версии приложения распространяются только по предварительным заказам. Об условиях заказа см. страницу о Фонде математического образования и просвещения (предпоследняя страница журнала).

Номер 3 – номер одной пубрики

Рубрика — Ш Т Л
XX юбилейный Турнир имени Ломоносова

Номер 4

ПАНОРАМА ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ
М. Н. Вялый, А. Ю. Китаев, А. Х. Шень. Физическая реализация квантового компьютера

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
П. Картье. Математика и искусство (окончание)

ЖИВАЯ ПЛАНЕТА
А. Н. Моталов. Грибки — друзья или враги? (окончание)

Рубрика ССР

Некролог: В.В.Кожинов

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, ул. Солдатская, д. 8, корп. 2, к. 69.

Контактные телефоны: (095) 362-82-56, (095) 261-53-12.

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

Страница Фонда в сети Internet: www.fmop.dnttm.ru

e-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2000 год (включая стоимость пересылки) – 35 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2000 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810600000000342, БИК 044525342

С сентября 2000 выходит "Обозрение Z" — научно-популярное приложение к журналу "Математическое образование". Условия подписки (адрес, реквизиты, стоимость одного номера) — те же, что и для журнала.

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 30 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 40 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents