Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год четвертый

№ 3 (14)

Июль - сентябрь 2000 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

N 3 (14), 2000 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

N 3 (14), июль – сентябрь 2000 г.

Содержание

Всероссийская конференция “Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков”

Информационное сообщение о конференции 2

Решение Конференции 6

Обращение Конференции 9

Р. Г. Хазанкин. Математическое образование и средняя школа 12

Учителям и учащимся средней школы
Студентам и преподавателям математических специальностей

А. Ю. Эвнин. Две заметки по комбинаторике 27

Школьный курс геометрии: содержание образования

А. И. Щетников. Материалы к проектированию курса геометрии для средней школы 35

Образовательные инициативы

Условия задач 12-й летней Конференции Турнира Городов 43

Информация

Содержание приложения “Обозрение Z” 69

Книги артели “Напрасный труд” 70

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2000 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 29.12.2000.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Всероссийская конференция “Математика и общество.

Математическое образование на рубеже веков”

Фонд математического образования и просвещения принял активное участие в Всероссийской конференции “Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков”, состоявшейся 19 – 22 сентября 2000 г. в городе Дубна на базе санатория “Ратмино”. В работе конференции участвовала делегация Фонда в составе Генерального директора С. И. Комарова, главного редактора журнала “Математическое образование” В. М. Имайкина и консультанта по общим вопросам В. Г. Попова. Издаваемая Фондом литература была широко представлена на выставке-продаже математической литературы, проходившей во время конференции. Наш журнал публикует краткое информационное сообщение о конференции, взятое, с небольшими изменениями, с Web-сайта МЦНМО (подробней см. ниже), Решение и Обращение конференции, а также стенограмму пленарного доклада Заслуженного учителя России Романа Григорьевича Хазанкина.

Информационное сообщение о конференции

Дубна, “Ратмино”, 18 – 22 сентября 2000 г.

На конференции работали две большие секции:

- Секция среднего и среднего специального образования
- Секция высшего образования

Каждая из них в свою очередь состояла из нескольких подсекций.
Различные материалы Конференции:

научную программу,
тезисы некоторых докладов,
итоговые документы —

можно посмотреть на Web-сайте Московского Центра непрерывного математического образования, принявшего на себя основную тяжесть работы по организации конференции.

http://www.mccme.ru/conf2000

Контактные координаты Оргкомитета Конференции: Адрес: 121002, Москва, Б.Власьевский пер., дом 11 Телефон: (095)-241-0500; 241-1237 FAX: (095)-291-6501 E-mail: conf2000@mccme.ru

Общее описание научной программы Конференции

Возрождая традиции, заложенные в российском образовании, Конференция посвящена проблемам математического образования всех уровней — от начальной школы до аспирантуры. Цель проведения Конференции — выработка концепции математического образования в высшей и средней школе для повышения качества образования в нашей стране в целом и поднятия математического образования на новый уровень, соответствующий требованиям времени.

Во время работы Конференции обсуждались следующие вопросы:

- роль математики и математического образования для отдельной Личности, России и Человечества. Философские проблемы математики;
- концепция математического образования в средней школе (задачи образования, общие принципы, структура и содержание образования, учебные планы, число часов, выделяемых на математику, проблемы модернизации образования и др.);
- проблемы углублённого математического образования. Проблемы воспитания профессионального математика от средней школы до аспирантуры и докторантуры;
- концепция высшего математического образования, его структуры и содержания;
- проблемы естественнонаучного, гуманитарного, инженерного и экономического математического образования, роль фундаментальных наук в специальном образовании. Проблемы математического образования в средних специальных учебных заведениях;
- перспективы математического образования в будущем, отражение достижений современной математики в образовании;
- проблемы математической литературы, учебников, пособий.

Научная программа Конференции включала пленарные и секционные доклады, а также научные совещания.

Приводим сисок пленарных докладов:

- "Математическое образование: настоящее и будущее" (докл. акад. РАН В. А. Садовничий).

- “О математическом образовании в средней школе” (докл. заслуженный учитель России Р. Г. Хазанкин).

- “Проблемы подготовки учителей математики” (докл. член-корр. РАН В. Л. Матросов, Е. И. Смирнов).

- “Общие проблемы многоуровневого образования” (докл. чл-корр. РАН Л. Д. Кудрявцев)

- “О работе комиссии РАН по образованию” (докл. акад. РАН Д. В. Аносов).

- “Нужна ли в школе математика?” (докл. акад. РАН В. И. Арнольд).

- “О концепции математического образования”, (докл. профессор В. М. Тихомиров).

- “Математика и информатика” (докл. акад. РАН Ю. И. Журавлёв).

Конференция проходила четыре полных дня. Первая половина дня — пленарные доклады. После обеда — работа по секциям. На конференции работали:

СЕКЦИЯ среднего и среднего специального образования, в рамках которой работали подсекции:
1. Общее математическое образование;
2. Углубленное математическое образование;

СЕКЦИЯ высшего образования, с подсекциями:
1. Профессионального и естественнонаучного математического образования;
2. Математического образования для инженеров и экономистов;
3. Математического образования для гуманитариев;
4. Математического образования для педагогов.

Кроме того, были проведены Круглые столы, где развернулись горячии дискуссии по актуальным проблемам математического образования. Некоторые вопросы для обсуждения:

1. “Актуальные проблемы математического образования (концепции, стандарты, ...)”

2. “Какая математика может стать стержнем **любого** образования? (Возможно ли возрождение идеи Платона?)”

3. “Математические классы: вчера, сегодня, завтра.”

4. “Математические соревнования школьников.”

5. “Актуальные проблемы математического образования (тесты, экзамены, 12-летка)”

Были организована выставка математической литературы и круглый стол по издательской деятельности “Проблемы учебного книгоиздания”.

К началу Конференции Издательством МЦНМО был издан сборник тезисов докладов участников, а также ряд брошюр по темам, имеющим непосредственное отношение к программе Конференции. Планируется более подробное издание трудов Конференции.

Решение Первой Всероссийской Конференции "Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков."

Дубна, 18-22 сентября 2000 года

Мы, представители педагогической и научной общественности, собрались в год, объявленный ЮНЕСКО годом математики, чтобы обсудить тревожное состояние российского образования. Развал системы образования таит угрозу национальной безопасности страны, развитию гражданского общества, модернизации экономики, что может привести к катастрофическим последствиям для народов России.

Глобализация и усложнение экономических и социальных процессов требуют высокого уровня логической и математической культуры общества в целом. В этих условиях политика, направленная на уменьшение роли и веса математики в системе школьного и вузовского образования, представляется разрушительной.

В коренном улучшении нуждается система подготовки учителей. Незамедлительно следует предпринять шаги, способствующие возвращению должного уважения к профессиям учителя школы и преподавателя вуза, повышению их социального статуса, резкому повышению нынешнего уровня зарплаты учителей, преподавателей вузов, всех других работников образования. Необходимо также снизить наполняемость классов, нагрузку на учителя, улучшить снабжение учебно-методической литературой.

Конференция обсудила планируемые радикальные меры, существенно меняющие всю систему образования в стране, и пришла к выводу, что введение 12-летнего обучения и всеобщего тестирования как основного способа оценки знаний учащихся необратимо ухудшит уровень математического образования в России.

Предполагаемое введение системы тестирования является неэффективным способом решения проблемы унификации выпускных и вступительных экзаменов. По данным ЮНЕСКО, единственная из развитых стран мира, в максимальной степени применяющая эту систему, — США — находится на одном из последних мест по качеству математического образования. В России нет механизма, который в США и развитых странах компенсирует негативные последствия недостатков системы образования.

Мы убеждены, что сохранение качества образования на должной высоте является необходимым условием развития страны и обеспечения ее безопасности.

Конференция постановляет:

1. Обратиться с просьбой к Президенту Российской Федерации:

- рассмотреть вопрос о возможности значительного увеличения заработной платы и пенсии работникам государственной сферы образования.

2. Обратиться к Правительству Российской Федерации с просьбой

а) провести независимую экспертизу с привлечением широкого круга специалистов и общественности состояния образования в средней школе на предмет целесообразности перехода к 12-летней школе;

б) рассмотреть вопрос о недопустимости сокращения числа часов на математику, как в школе, так и в вузах;

в) организовать издание массовыми тиражами нескольких вариантов дешевых базовых учебников для средней и высшей школы, поддержать издание методической литературы для учителей и математических журналов;

г) при внесении проектов законодательных и нормативных актов в области образования в обязательном порядке практиковать их обсуждение с привлечением Российской Академии Наук, Российской Академии Образования, научных обществ, школьной и вузовской общественности, средств массовой информации;

д) стабилизировать школьные и вузовские учебные планы и программы по математике на 5-10 лет;

е) довести до сведения органов государственной власти Российской Федерации настоящий документ.

3. Обратиться к Государственной Думе Федерального Собрания Российской Федерации с просьбами:

- рассмотреть возможность внесения поправок в федеральные законы "Об образовании", "О пенсионном обеспечении", "О бюджете" с целью существенного повышения качества образования. В частности, предусмотреть увеличение зарплат и пенсий учителей и преподавателей, а также включение в пенсионный стаж времени, посвященного повышению квалификации и уходу за детьми;

- при заслушивании проектов федеральных законов, касающихся проблем образования, практиковать привлечение Российской Академии Наук, Российской Академии Образования, школьной и вузовской общественности.

4. Обратиться к руководителям органов власти субъектов Федерации с просьбой рассмотреть возможность реализации предложений Конференции.

5. Просить руководство Российской Академии Наук и Российской Академии Образования принимать участие в регулярной экспертной оценке учебных программ, систем проверки качества знаний, реформ образования и т.д.

6. Обратиться ко всем работникам образования Российской Федерации с просьбой обсудить решения Конференции и принять участие в их реализации.

7. Создать на основе Оргкомитета конференции общественную Комиссию по математическому образованию. Поручить Комиссии подготовить предложения о создании Российской Ассоциации математики и математического образования.

8. Секретариату Конференции:

а) подготовить публикацию трудов Конференции, б) опубликовать список участников Конференции,

в) предоставлять отечественным и иностранным СМИ возможно более полную информацию о работе Конференции.

Обращение Первой Всероссийской Конференции “Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков.”

Дубна, 18-22 сентября 2000 года

1. Мы, участники Всероссийской Конференции по математическому образованию, с удовлетворением отмечаем в качестве одного из важнейших достижений нашей Конференции сам факт ее проведения. Мы считаем, что подобные конференции должны стать регулярными. Тем самым мы не только возрождаем традицию российского математического образования начала XX века, но и содействуем более успешному его развитию в XXI веке. Очень важно, что в нашей Конференции приняли участие работники математического образования всех уровней — от начальной и до высшей школы. Мы все одна семья, у нас общие интересы и общие цели. Мы убеждены, что качество математического образования страны — один из важнейших факторов, определяющих уровень ее экономического и общественнополитического развития. Мы считаем, что математическое образование есть благо, на которое имеет право любой человек, и обязанность общества (государства и внешних организующих структур) предоставить каждой личности возможность воспользоваться этим правом.

2. Мы считаем целесообразным создать общественный орган, постоянно действующий между конференциями и избираемый на очередной конференции. Этот орган призван не только исполнять функции Оргкомитета, но и следить за изменениями, происходящими в нашем общем и математическом образовании и помогать распространению лучших достижений. Следует добиваться, чтобы мнение этого органа учитывалось руководителями государства при принятии решений, затрагивающих интересы российского математического образования.

3. Мнсгие недавние решения и проекты руководителей образования вызывают у нас серьезное беспокойство. Прежде всего, это переход на двенадцатилетнее обучение, замена конкурсного экзамена единым тестом. Мы опасаемся, что они не только не будут способствовать развитию образования в России, но, наоборот, приведут к снижению его уровня. Чрезмерное увлечение разного рода непродуманными инновациями, неразумное копирование иностранного опыта, завышенная оценка достижений в области образования западных стран, недооценка собственных, забвение национальных традиций, реформирование ради реформирования — таковы некоторые наблюдаемые сегодня тенденции, создающие внутреннее напряжение в российском математическом (и не только математическом) образовании. Развал сложившейся системы образования таит угрозу для национальной безопасности страны, что может привести к необратимым последствиям для судеб народов России.

4. Мы считаем необходимым, чтобы информация о нашей Конференции, о принятых ею решениях дошла до всех учителей и преподавателей России, до ученых и простых любителей математики и рассчитываем на более широкое и активное

участие математической общественности в работе Оргкомитета и будущих конференций.

5. Мы обращаемся ко всем школьникам и студентам России, изучающим математику, независимо от их успехов и отношения к ней. Поверьте нам, мы заботимся о вашем будущем, о вашем интеллектуальном, и даже психическом здоровье. Плохое математическое образование, низкая математическая культура в XXI веке могут стать серьезным препятствием не только на пути развития страны, но и в достижении успеха в жизни, значительно ограничить свободу личности. И наоборот, хорошее математическое образование, математическая культура могут защитить вас от многочисленных опасностей, таящихся на пути вашего развития, повысить ваши шансы на самореализацию в выбранной профессии.

6. Многие доклады Конференции были посвящены проблемам перехода от школы к ВУЗу. Мы прекрасно понимаем те социально-демографические проблемы, о которых заботятся руководители образования, знаем из первых рук все недостатки конкурсного экзамена в его традиционной форме, но все же опасаемся, что его замена на единый тест, да и просто на тестирование (при этом обычно имеются в виду самые примитивные формы тестирования), может иметь самые печальные последствия для нашего математического образования в целом, привести к обвальному снижению его уровня и даже к социальному напряжению и увеличению и без того значительного социального расслоения в образовании. Надо искать новые технологии, сочетающие достоинства и традиционного экзамена, и тестовых форм оценки качества знания.

7. Мы считаем, что математики-профессионалы должны более активно и регулярно заниматься проблемами математического образования, практическими и научными. Примером в этом им могут служить многие выдающиеся математики России отдаленного и недавнего прошлого. Положительно оценивая деятельность Комиссии по школьному математическому образованию отделения математики РАН, мы все же считаем, что роль РАН в вопросах образования, учитывая интеллектуальные, политические и административные возможности РАН, могла бы быть значительнее. Важно, чтобы в вопросах образования профессиональные ученые и преподаватели установили равноправное партнерство: учиться друг у друга и учить друг друга должны и ученые-математики, и учителя математики. Мы полагаем также, что вклад педагогической науки в школьное образование значительно меньше, чем вклад общества в развитие этой науки. Мы призываем математиков более активно осваивать новые предметные области приложений математики и активно обмениваться знаниями с коллегами. Мы просим руководителей образования всех уровней развивать дифференцированный подход к обучению математическим дисциплинам учащихся и студентов, в особенности будущих экономистов и гуманитариев.

8. Мы благодарим руководство Международной Комиссии по Математическому Образованию (ICMI) за моральную и материальную поддержку нашей конференции и надеемся на будущее более тесное сотрудничество с этой комиссией. В связи с этим считаем полезным создание в нашей стране бюро ICMI. Мы обращаемся к Исполкому ICMI с просьбой активнее привлекать к сотрудничеству ученых

и преподавателей из России. Высокая квалификация наших специалистов в области математического образования будет содействовать развитию математической науки и образования в мире.

9. Сегодня в обществе складывается искаженное и даже негативное представление о математике и математическом образовании. К сожалению, математическое сообщество мало занимается общественной пропагандой математического знания, создания, как теперь принято говорить, положительного "имиджа" математики в общественном сознании. Это, безусловно, ошибка, которую надо исправлять. И делать это мы должны сообща, все вместе и каждый в отдельности, в меру своих возможностей. В этой связи мы хотели бы обратиться к российской общественности и представителям СМИ. Пожалуйста, не бойтесь предоставлять математикам, ученым и учителям, эфирное время и газетное пространство. Среди них много интересных людей, которым есть что сказать обществу и которые могут это сделать.

10. Необходимо вернуть традиционный для России высокий социальный статус профессии учителя, преподавателя ВУЗа, ученого. Необходимо стабильное эволюционное развитие системы образования, внимание к ней и поддержка со стороны общества и государственной власти бизнеса, активная позиция научно-педагогической общественности, солидарность в отстаивании принципиальных позиций.

Математическое образование и средняя школа

Заслуженный учитель России Р. Г. Хазанкин

Статья представляет собой стенограмму пленарного доклада на Конференции Заслуженного учителя России Романа Григорьевича Хазанкина, отредактированную автором. Ее текст значительно отличается от текста, вошедшего в Сборник тезисов докладов.

1. Реформа математического образования и средняя школа

Корабль образования должен двигаться галсами, так как движение в одном направлении либо приведет его в тупик, либо посадит на мель. 30 лет назад реформа математического образования, контуры которой задал А. Н. Колмогоров, приняла одно из возможных направлений. Наступило время сделать очередной галс. Речь ни в коем случае не должна идти об отказе от уже сделанного, о возврате назад, а лишь о некотором повороте, отражающем произошедшие за это время кардинальные изменения в обществе. Из чего исходить при выборе нового направления?

Сегодня мы живем в других социально-политических реалиях. Если раньше истина директивно задавалась сверху и была единственной, то сегодня одни и те же явления могут оцениваться с различных точек зрения — монополии на истину не существует.

Происходит глобализация восприятия мира. Мы начинаем острее воспринимать сложность и взаимосвязанность идущих в природе и обществе процессов, в том числе и явлений самоорганизации.

Резко изменилась и продолжает меняться информационная среда. Человеку, находящемуся в лавинах информационных потоков, необходимо научиться быстро перерабатывать большой объем зачастую противоречивой информации, адаптироваться в этих условиях. Может быть через 5-6 лет эта проблема остро встанет, кстати я хочу сказать, что даже в таком маленьком городе Белорецке, где я живу и работаю много лет, где всего 70 тысяч жителей и население сокращается, у половины учеников школы есть дома компьютер, а часть, не знаю точно какая, плавает в сети Интернет, и понятно, что в этих новых условиях как-то нужно пересматривать цели и средства образования, подход, методические технологии.

Все это показывает, что нужно более решительно подходить к реформе образования, прекратить топтаться на месте, поскольку математическое образование наиболее способствует:

- изучению физики, химии, биологии, астрономии, экономики — я имею в виду школьные предметы;

- развитию порядочности и самостоятельности в здоровой социальной среде, воспитанию нравственных качеств в овладении любой профессией;

- успешному продолжению образования;

- развитию эстетических чувств (красивый факт, красивая задача или решение, изящное доказательство).

Математика универсальна, всеобща, приобщает к мировой культуре именно потому, что не существует национальной, государственной или ведомственной математики.

На происходящие изменения в восприятии мира постоянно реагирует структура вузовского математического образования. Я хочу сказать доброе слово именно вузовскому математическомуобразованию. Оно реформировалось моментально, в течение просто считанных месяцев. Чего не скажешь о нашем школьном образовании. К примеру, читаются такие курсы, как "Дискретная математика", "Исследование операций", "Системный анализ", "Теория игр", "Теория принятия решений". Появились новые прикладные курсы по математике: "Финансовая математика", "Актуарная математика", "Теория риска" и пр.

Все это заставляет задуматься о возможности осторожных и продуманных изменений, как в содержании, так и в методических технологиях школьного математического образования.

В первую очередь стоит подумать о введении в школьную программу элементов теории графов, в частности как способа описания сложных структур, воспринимаемых при этом как единое целое. Тем более, что графы являются прекрасной базой для развития алгоритмического мышления, а это способствует и изучению информатики.

Демонстрации различных подходов к решению одной и той же задачи способствует изучение комбинаторики.

Анализу сложных процессов, протекающих в природе и обществе, способствует изучение математической логики.

Естественный вопрос, который при этом возникает — как можно расширять и без того перегруженную школьную программу. Очевидно, что появление новых ростков на дереве всегда сопровождается отмиранием высохших неплодотворных ветвей. На мой взгляд, уже нет никакой необходимости заниматься тригонометрическими изощренностями, трудными задачами с параметрами, изучением искусственных приемов решения уравнений и систем уравнений, сложными задачами на прогрессии, мудреными задачами на выражение одних логарифмов через другие и прочими тупиковыми задачами, являющимися далеко не лучшим образцом так называемой "абитуриентской" математики.

Здесь бы я хотел немножко остановиться. Думаю, что получу как следует от аудитории за данное предложение. Ну, а когда боксер чувствует, что ему дадут как следует, он должен все-таки как-то подготовиться к защите. Колмогоров еще тогда, много лет назад, говорил, что разрыв между той математикой, которая есть сегодня, и той математикой, которой оканчивается очень часто вузовское образование, составляет более чем век. В школе мы изучаем максимум ту математику, которая сформировалась в 18 веке. Мечтой Андрея Николаевича было сделать так, чтобы мы уже в школе изучали современную математику.

Что происходит на сегодня? Масса замечательных методических пособий. На кружках мы с детьми теорией графов занимаемся уже давно. Журнал "Квант" дал просто замечательные образцы того, как можно дать ребятам этот замечательный инструмент. А школьная программа топчется на месте: в качестве реформы содержания традиционные разделы меняют местами. Иногда у меня рождается такая ассоциация — мы живем в двухкомнатной квартире "хрущевке", в ней стоит старинная мебель, дорогая, но вот рано или поздно приходится купить что-то новое. Некуда поставить. И начинаем таскать эту мебель из одной комнаты в другую. Но все не так, все непривычно, и в результате говорим: ладно пусть стоит как стоит. Так нашему сердцу дороги сложные тригонометрические задачи. Идей-то никаких нет, кстати говоря. Извините, я не имею, конечно, в виду тригонометрические задачи, которые красивы, где есть музыка. Но когда дают архисложные преобразования на вступительных экзаменах, которые нужно дожимать технически — вот прочитал задачу, все ясно, что делать — но технически для ее воплощения нужно полчаса. Я не приветствую это, это уже получается не математика, чем тогда она отличается от любой другой рутинной работы. Необходимо уменьшить число рутинных задач, ну договориться — вот давайте эти сто задач решать обязательно. Но сто первую не надо. Вот и высвободится время. Однако учителя иногда по 700-800 задач прорешивают с ребятами по тригонометрии — лучше от этого не становится

2. ВУЗ и средняя школа

Как уже отмечалось, одной из задач школьного математического образования является подготовка к учению в высшей школе. Но между этими двумя ступенями образования существует и постоянно расширяется щель, куда набивается грязь ничем не оправданных требований на вступительных экзаменах по математике. Хорошие учителя вынуждены тратить драгоценное время на решение совершенно искусственных, зачастую не развивающих ученика задач, о которых абитуриент может забыть на следующий день после вступительного экзамена, поскольку нигде и никогда (если он не будет заниматься репетиторством) эти навыки ему не понадобятся.

Никто не сомневается в том, что мехмат МГУ и Физтех — это два ведущих вуза в стране, и нет претензий к тому, как ими составляются варианты вступительных экзаменов — очень продуманная система задач. Однако во многие провинциальные вузы варианты вступительных экзаменов по математике гораздо изощреннее. В этом году в Магнитогорском горно-металлургическом институте на вступительном экзамене даются две задачи, которые я не решил, не решили мои коллеги, хотя в общем-то, более тридцати лет работаем учителями математики, в том числе в классах с углубленным изучением математики, умеем решать олимпиадные задачи, но вот за час, я такую задачку, какая там дается, не смогу решить.

Еще один пример. Года три назад я проводил курсы повышения квалификации для уфимских учителей, следует отметить, что это высококвалифицированная аудитория; приносят задачу со вступительных экзаменов в Уфимский нефтяной университет: "Роман Григорьевич! Что это за задача?" Задача — ясная. Функциональное уравнение решить. Ни много — ни мало!

Замечено, чем вуз провинциальнее, тем больше степеней свободы. Считаю, что это — грязное дело, потому как вуз диктует школе, учителю правила игры: нам не нужны глубокие знания теории, способность творить и т.д., выполните наши требования к вступительным экзаменам, а дальше — наше дело. Плохо, что экзамены в вуз являются как бы его натуральным хозяйством и не подвергаются публичному критическому анализу математической общественности. При этом последствия перехода к общероссийскому тестированию непредсказуемы. Следует учитывать, что мы живем в очень сложном и противоречивом обществе. Представляется целесообразным создание общественного совета, который бы оценивал (разумеется, после экзаменов) варианты вступительных экзаменов различных вузов. Стоит подумать также о создании общероссийской базы задач вступительных экзаменов, сгруппированных по сложности (по аналогии с известным "задачником Сканави"), из которой бы вузы черпали материал. Разумеется, это не исключает и творческую деятельность коллективов вузов, если она получает положительную оценку общественного совета.

Представляется достаточно спорной практика большинства вузов в проведении ранних вступительных испытаний в завуалированной форме, в виде олимпиад, которым присваивают статус региональных и прочих. Поскольку это нарушает ритм работы школ, принцип равноправия абитуриентов и т.д.

Хочу отметить большую позитивную роль заочных школ, организованных ведущими вузами: мехмат МГУ, МФТИ, Санкт-Петербургским университетом, МИФИ, Новосибирским университетом и др. Их материалы отличает высокий уровень дидактической проработки. Они способствуют не только обучению, но и воспитанию школьников. Чрезвычайно велика их польза для учителей.

Взаимодействие школы и вузов было бы более плодотворным, если бы в той или иной форме существовала обратная связь от вуза к школе. Учителям Тьмутараканской средней школы было бы замечательно знать — какие именно пробелы математической подготовки наблюдаются у студентов-первокурсников, выпускников этой школы.

В этом должны быть заинтересованы и вузы, поскольку в результате такого мониторинга они бы получили (надо полагать) более подготовленных студентов. Впрочем, я понимаю всю идеалистичность этого предложения о связи с вузом. Тем не менее, не могу об этом не сказать. Я вспоминаю свои чувства, когда декан механико-математического факультета МГУ Олег Борисович Лупанов, трижды присылал мне письма, где перечислялись студенты, которые успешно закончили там первый, второй курс, учатся на "отлично". Какое это имело в то время огромное значение для меня! Когда декан мехмата МГУ присылает письмо и извещает о том, что ваши ребята — молодцы, они так хорошо подготовлены.

Прошло много времени. Сейчас есть очень мощные современные средства связи, способы обработки информации и так далее. Можно отследить результативность работы любой школы, заметить успех. У учительницы бы крылья выросли!

Возможны, видимо, и другие формы взаимодействия школьных и вузовских математиков. И было бы интересно обсудить их в рамках данной конференции.

3. Учитель и ученик

Поскольку речь идет о тех проблемах, которые сегодня постоянно возникают в школе в связи с математическим образованием, то мне бы, как особую, хотелось выделить проблему взаимодействия учителя и ученика. Есть эта проблема в любом учебном заведении, и не только на уроках математики. И тем не менее, на такой представительной конференции, я думаю, пусть прозвучит, каким бы мы хотели видеть сегодняшнего учителя математики. Тем более, тема конференции "Математическое образование на рубеже веков". Может быть, не сегодняшнего учителя, может быть, завтрашнего.

Проблема состоит в том, что в младшей школе дети работают только под руководством учителя, но чем старше школьники, тем все более актуальнее становится задача учителя — учить учеников самостоятельности. Ученики всячески провоцируют учителя на исполнение роли няньки, задают многочисленные вопросы вместо того, чтобы приступить к самостоятельной деятельности. Однако взросление учащихся должно сопровождаться переходом от обучения фактам и их использованию к обучению математической деятельности. Что такое математическая деятельность учителя и учащихся старшей школы? Это, прежде всего, решение задач, а не упражнений, их постановка, исследование, отыскание метода, его реализация, анализ результатов, попытка обобщения и т.д. Для интеллектуального роста задачи нужно "крутить".

Учитель математики просто обязан быть исследователем, хотя бы на уровне школьных математических задач. Учиться выделять ключевые задачи, ключевые методы и ключевые идеи и вооружать школьника этими задачами, методами и идеями.

В Белорецкой компьютерной школе, где я преподаю детям математику, учителя обучают школьников более чем семидесяти ключевым методам решения задач. Каждый такой метод имеет свое, порой шуточное, название, что помогает учащимся в распознавании этих методов, что особенно важно в условиях дефицита времени.

Учитель не должен уставать удивляться красоте и мощи математических методов. И должен постоянно восхищать этим своих учеников. Да, это трудно. На это нужно много душевных сил, причем изо дня в день. Но в этом суть учительской профессии — и это нужно делать!

Учитель математики должен быть очень терпеливым потому, что нельзя ожидать от учеников мгновенных результатов. Если делается все (в смысле разумной достаточности), делается профессионально и честно, то рано или поздно ученик себя проявит. Нужно терпеливо ждать.

Математика — наука "замечательная", в ней нужно замечать. Учитель должен побуждать учеников к поиску истины. Что это значит? Это значит, что на каждом этапе школьного математического образования, я думаю, что и в младших классах, нужно учить детей наблюдать, сравнивать, замечать закономерности, формулировать гипотезы, учить доказывать или отказываться от гипотезы, если найден контрпример. Важно учить школьника самостоятельно строить определения и их отрицания, показывать, что в математике почти ничего не следует зазубривать. Следует понять, научиться применять и тогда все запомнится само собой.

Необходимо использовать ошибки, не превращая их во что-то порочное. Ошибки — явление неизбежное и нужно учить их находить и не бояться делать их самому.

Учитель должен быть не нравоучителем, а советчиком, помощником. Один из важнейших советов, который хороший учитель может дать детям — математике нельзя научить, ей можно только научиться. Учитель этому только способствует.

Приведу несколько примеров. Знакомясь с очередным новым учебником, читаю во введении, что очень трудно, например, дать определение — что такое стул. Прихожу к своим шестиклассникам, а я веду математику с шестого по одиннадцатый класс и геометрию начинаю с шестого класса. Предлагаю ребятам дать определение — что такое стул? Причем дал это задание в конце урока, под занавес, на дом.

Ну, раз во введении было написано, что трудно дать определение этого понятия, дал на дом эту задачу. Говорю, трудно будет, попробуйте с родителями вместе. Напишите на листочках, и чтобы в начале урока у меня стопочка листочков лежала на столе. Прихожу в класс на следующий день, беру верхний листочек, читаю: "Стулом называется предмет мебели, предназначенный для того, чтобы на нем сидеть во время работы или отдыха, и состоящий из сидения и спинки (хотя, впрочем, может быть и без спинки), а также ножек, от одной до четырех (одна ножка, например, — стул музыкальный)". Талантливейшие ребятишки. Я сам лучше бы не придумал определения. С автором учебника об этом поговорил, и он вынужден был признать, что не прав.

Должен сказать о том, что, может быть, нужно изучать элементы математической логики — в старших классах очень много определений, особенно в классах с углубленным изучением математики, в курсе алгебры и начал анализа.

Другой пример. Два урока потратил для того, чтобы ввести обозначения, доказать кое-какие формулы, отрицания конъюнкции и отрицания дизъюнкции и так далее, с помощью таблиц истинности. И потом показал ребятам, как правильно строить определения. После этого наблюдаю такую картину: в фойе школы стоят дети — школьники-старшеклассники — и предлагают друг другу такие задачи: "А сформулируй-ка мне определение, какая функция не является неубывающей?" Я наблюдал все это с удовольствием и с восторгом.

Очень часто пишут, что трудно, что ребята не могут... Да, трудно им потому, что инструмента нет. Трудно потому, что учитель чего-то боится, боится отступить на шаг от школьной программы. Ну нет этого в школьной программе, есть в программе факультативных занятий.

Я убеждался неоднократно: когда даешь ребятам возможность что-то творчески сделать еще до того, когда учитель все продиктовал, ребята работают просто замечательно.

Учитель не должен уставать восхищаться красотой и силой математических методов. Хотя обманом я занимаюсь, притворяюсь каждый раз. Да, знаю я, как решается эта задача. Но каждый год, приступая к решению этой задачи, кто-то из учеников, решает задачу буквально за минуту. Я, конечно, к доске его не вызываю, прохожу между рядами, спрашиваю, даю возможность другим сообразить, как у тебя, каким способом и так далее. И когда уже появится несколько таких точек кипения в классе, потом я подхожу и пишу: итак, предлагается такая идея, и такая идея, и такая идея — все идеи записываю. И потом предлагаю ребятам, а в это время и у других уже начинает что-то получаться, предлагаю выйти к доске и что-то рассказать. Да я еще до урока понимал, что они так сделают. Но на самом уроке восторгу нет пределов: молодец, как ты здорово придумал! Для меня это новое решение, я его только что увидел, просто молодец!

Скучно становится, когда сидишь на каком-нибудь открытом уроке, и учитель старается как можно больше упражнений прорешать. Я не сторонник такого общения учителя со школьниками. Заранее установка: учитель — умный, ученик — дурак. Ученику не предлагается что-то придумать самому, ему предлагаются только задачи, аналогичные тем упражнениям, которые уже разобраны. Поэтому я не люблю тех учебников, где, скажем, однотипных упражнений дается тридцать, сорок, пятьдесят, сто. Зачем такие?!

Мне кажется уместным сформулировать один из принципов обучения школьников, который я называю принципом четырех "СО". Урок математики - это

- СОтрудничество,
- СОпереживание,
- СОрадование,
- СОзидание.

Мне хотелось бы объяснить, почему и сорадование, и сопереживание. Сейчас принято ругать всякие иностранные фильмы. А один из фильмов, который я очень люблю — это "Крокодил Данди" и "Крокодил Данди-2". И там есть такая ситуация, когда двое молодых красивых людей полюбили друг друга. Но вот конфликтная ситуация и женщина выбегает из отеля и ныряет в подземку. Мужчина понимает, что он сейчас ее потеряет навсегда потому, что он не знает ее адреса, бросается за ней. Потом получается так, что она оказывается одной из первых, потом поток людей, а потом, он — один из последних... Сейчас придет электричка — они расстанутся навсегда. Он кричит: "Я тебя люблю, я тебя люблю!" А она: "Не слышу!"

– Я тебя люблю!

– Ей передают: "Я тебя люблю!"

И когда до нее доходит, все видят, что до нее дошло, начинают аплодировать, начинают радоваться за этих двух молодых людей, подставляют руки, и он по рукам перебирается к ней. Вот такой момент и сорадования, и сопереживания.

Я всегда ученикам об этом рассказываю потому, что одна из задач, которые я ставлю ребятам — это воспитание критического отношения к себе и доброжелательного отношения друг к другу. И на уроках математики это великолепно можно сделать, замечательно можно сделать. Во время математических боев ребята оппонируют друг другу, но очень тактично, очень вежливо, на "Вы" друг друга называют, радуются когда ученик, который отвечает, хорошо ответил. Доброжелательно идет иногда помощь. Все это нужно делать обязательно. Ни в коем случае нельзя делать так, что учитель — большой командир, все молчат и только один ученик у доски парится и так далее.

Но ведь я уже устал просто с учителями разговаривать по этому поводу. Урок математики может создать такую атмосферу, о которой только мечтать приходится.

Можно подумать, что я идеализирую, учителей, способных создать такую атмосферу, нет. Таких учителей много. Я их знал раньше, знаю теперь. В Нижнем Тагиле работал замечательный педагог, учитель математики, Борис Соломонович Гельруд. К сожалению сегодня его нет с нами, но сегодня с нами есть очень много людей, которые — великолепные учителя математики, потрясающие учителя. Рафаил Калманович Гордин. Три дня назад я был у него на уроке. Понимаете, я получил такой заряд, мне хватит, может быть, на целый год. Побыть на уроке у такого педагога — это счастье. Рустэм Гусманович Женодаров, который работает в нашей школе учителем математики — талантливейший человек, замечательный математик, как он работает с детьми! Вот научился крутить задачи — я у него учусь. Учатся все коллеги.

Я думаю, что также работает Валерий Адольфович Рыжик, которого я знаю много лет. Замечательный педагог. И многие-многие другие.

В этом разделе я попытался сформулировать свое видение идеального учителя математики. В следующих разделах попытаемся понять, что препятствует становлению таких учителей, а значит и развитию школьного математического образования. Потому что, я считаю, в центре всех проблем — фигура учителя.

4. Педагогическое образование и учитель

Несколько слов о подготовке учителя. Считаю этот вопрос одним из центральных. Педагогический вуз считается тем лучше, чем ближе он к классическому университету. Добавлю, чем больше там докторов наук и кандидатов, а не тем, как там готовят к профессии.

Будущий учитель постигает (зачастую, с огромным трудом) массу математических курсов, не видя никакой связи со школьным курсом математики. Преподаватели этих предметов, зачастую, читают лекции в мировое пространство, не видя в слушателях будущих учителей.

Было бы идеально, если бы каждый предмет педагогического вуза вносил свой вклад в формирование учителя-профессионала, а каждая лекция была бы образцом преподавания математики.

В педагогических вузах должны изучаться педагогические теории и технологии, не только модные сегодня, но и имевшие место в истории педагогической науки. Только за время моей педагогической деятельности была затрачена масса интеллектуальных, материальных ресурсов на разработку и введение или попытки внедрения таких теорий, как теория поэтапного формирования умственных действий, программированное обучение, алгоритмизация, оптимизация учебного процесса, система развивающего обучения, научная организация труда учителя и другие.

Во всем этом есть рациональные зерна. Ошибкой является требование считать тот или иной подход единственно возможным. Отношение к педагогическим теориям отличается субъективизмом в оценках специалистов, как ни в одной области человеческих знаний. Ну, пожалуй, только медицина может поконкурировать, потому что у нас теперь уже в любой аптеке тебе расскажут, чем лечиться и как лечиться, сколько принимать и т.д. Все считают себя специалистами в области медицины.

В реальной практике педагог должен использовать самые разные технологии, теории, только так можно обеспечить высокий уровень образования. Недостаточное внимание при подготовке учителя математики уделяется методологическим вопросам. Где, скажите, будущего учителя учат, например, общим подходам к постановке и решению проблем, педагогическим эвристикам (использованию ассоциации, аналогии, преодолению стереотипов, обобщению задач, сведению задач к раннее решенным, предварительному рассмотрению частных случаев и др.)?

Хочу привести такой пример. Вот неделю назад я встречался со студентами одного из крупнейших педагогических университетов. Хороший университет, прекрасные ученые работают в этом университете. Условия для студентов созданы просто великолепные. Пятый курс. Я задавал во время встречи им разные вопросы. Все-таки они завтра станут учителями. Ну, например, какие они учебники знают. Виленкин. Все ..., никаких учебников больше не написано, оказывается.

А что знают о методах решения школьных задач? Пятьдесят человек в аудитории, мне было перечислено четыре метода: метод математической индукции, аналитический метод, как было сказано. Дальше был назван векторный метод, метод координат... Вот и все, понимаете, больше нет.

И это уже почти готовый учитель... Спрашиваю, а вы метод перебора, метод полного перебора знаете?... А что, есть разве такой?... Основной метод, вообще-то. И знаете, работать этим методом просто замечательно!

Неужели авторы программ для педагогических вузов полагают, что умение решать, скажем, уравнение струны автоматически приведет к умению решать задачи элементарной геометрии. Известно, что именно элементарная геометрия — один из лучших полигонов для развития логики, развития мышления, способствует развитию пространственных представлений.

Несмотря на обилие прекрасных учебных и методических пособий по геометрии студент педагогического вуза, за редким исключением, не получает адекватной подготовки в этой области. Ну откуда я это знаю? Вот приходят учителя. У нас в школе в старших классах введено предметное преподавание: один учитель ведет алгебру, другой учитель — геометрию. Спрашиваю, что вы будете преподавать? Все, что угодно, только не геометрию. Я ничего не понимаю.

...Элементарную геометрию преподавать не хочет. Понятно, боится, потому что легче решать задачки по алгебре, там общеизвестные алгоритмы для решения очень многих задач. Но не готовы студенты к творческой работе. Я бы сказал, за редким исключением. И вот почему. Очень хорошо знаком с тем, как готовят студентов в Кировском педагогическом университете. Там по совместительству проработал десять лет. И замечательно готовят там студентов по геометрии. Когда студенты приезжали на педпрактику — это были блестящие студенты. К сожалению, сейчас, из-за того, что нужны большие деньги на переезды, на проживание, студенты теперь не ездят на педпрактику в другие города. А вообще было здорово.

Следует отметить, что в большинстве педагогических вузов практически не уделяется внимания особенностям работы в профильных классах и технологиям работы с одаренными школьниками. При этом проблема в России признана важной. Существует программа вариативного образования и Президентская программа "Одаренные дети".

Я хочу здесь привести один пример, негативный очень. В одном педагогическом вузе, не буду говорить в каком, на стене я увидел простыню "Тысяча задач на интегральное и дифференциальное исчисления", которые студент первого или второго курса обязательно должен прорешать и сдать зачет.

Я подошел к этой простыне, почитал. Там все эти интегралы, каждый следующий, такой же как и предыдущий, я не понял, может быть задачник расклеили и так далее. Тысячу задач рутинных нужно перерешать... Нигде не увидел, например, листочек такой "Сто задач или пятьдесят задач на трапецию". А ведь красивые задачи!

В математическом педагогическом образовании существует серьезнейший пробел. На факультетах начального обучения учат работе с младшими школьниками, а на физико-математических — в основном со старшими. А вот работе с учениками пятых и шестых классов практически нигде не учат или учат, но очень мало времени этому уделяют. Но именно этот возрастной период является наиболее благоприятным для развития интереса к изучению математики, для большой части школьников. Как правило, очень часто в пятом-шестом классе оказывается выпускница вуза, которая умеет интегрировать и дифференцировать, много чего еще умеет, но работать с пятиклассниками не умеет. В учительской среде эта проблема известна, но заниматься ее решением никто не собирается. Как говорится, а воз и ныне там.

5. Учитель и педагогическая среда

Под педагогической средой мы понимаем как администрацию всех уровней, так и коллег по цеху. Сюда же отнесем и активных родителей учащихся. К сожалению, среда зачастую препятствует творческой деятельности учителя. Возможны, как минимум, два подхода к преподаванию математики. Первый состоит в четком выполнении школьной программы, обучению школьников стандартным задачам, своевременному проведению контрольных работ и выставлению оценок в журналы. Второй — развитию творчества ребят. При этом результатов учащиеся достигают не одновременно. Оценка при таком подходе вообще не целесообразна. При этом учителя практикуют проведение зачетов. То есть, оценка — только после того, как зачет получен.

Учитель проводит затем контрольную работу и так далее. Получил, скажем, два (у меня пятибалльная система оценок, есть все — один, два, три, четыре, пять). Получил два, я ее не выставляю, там пустая клеточка остается — тебе нужно еще поработать. Давай вот таким способом наметим, как поработать. И потом эта пустая клеточка заполняется.

Но кто гонит больше всех учителя? Педагогическая среда, администрация — как же так, нет оценок. Родители очень часто по телефону донимают учителя —

нет оценки! Ну разные дети — разные скорости у них прохождения материала. Учатся в одном классе тридцать человек. Как это они одновременно могут, я не понимаю. Всем это понятно. Нет, педагогическая среда очень консервативна по отношению к учителю. Машет рукой: выставляй оценки!

Среда требует от учителя постоянного вранья. Ранее говорилось о вступительных экзаменах в вузы, но чем лучше выпускные экзамены в школе? Чиновники от образования, плохо представляющие школьные реалии, присылают задания для выпускных экзаменов по алгебре и началам анализа в одиннадцатом классе, которые средний школьник выполнить не в состоянии. И это справедливо как для общеобразовательных, так и для математических классов. Так в этом году поиск решения шестого задания математических классов потребовал двух часов у квалифицированных учителей — выпускников мехмата МГУ. Во время экзамена мне звонили коллеги из разных городов с просьбой объяснить решение этой и других задач этого варианта.

Естественно в таких условиях среда вынуждает учителя закрывать глаза на массовое списывание. А чего стоит учителю обеспечение “медальности” выпускной работы по математике. Требования медальной комиссии превосходят требования редакции математических журналов к рукописям статей.

Приведу один из многочисленных одиозных примеров. Лет пять назад в Новосибирске заканчивал школу четырнадцатилетний юноша. Блестящему ученику, призеру различных конкурсов, ужу ставшему студентом вуза, медальная комиссия “зарубила” работу по математике поскольку он посмел написать: “точки A и B — нули функции”. По мнению комиссии следовало писать: “абсциссы точек A и B — нули функции” (разумеется, точки A и B лежали на оси абсцисс). Вот и приходится учителю во время экзамена, да и после экзамена, буквально пасти кандидата на медаль.

Я уже не говорю о злоупотреблениях, связанных с золотой лихорадкой. Учитель не может всем этим безобразиям сильно сопротивляться, давят и администрация, и коллеги (кому же хочется выглядеть белой вороной!), и родители... Чего стоит хотя бы периодическая аттестация, при которой все это учитывается? Аттестационные требования носят формальный характер, постоянно меняются, а порой честным путем просто не выполнимы. Учитель всецело зависит от администрации школы: именно она определяет — давать учителю часы для факультатива или нет, создавать для конкретного учителя профильный класс или нет, командировать его на повышение квалификации или нет.

В мире есть и другой опыт. Например, во Франции каждый учитель в течение года обязан повысить квалификацию независимо от воли администрации.

Среда вынуждает учителя быть пассивным исполнителем: директор школы может с гордостью сказать: “Наш коллектив работает над проблемой развивающего обучения”. Это же просто блеф — и проблемы-то такой не существует, и не может вся школа работать на одну идею. Трескотня подменяет цель. Среда каждый раз преподносит учителю математики очередной сюрприз — то разработанные в недрах научно-исследовательских институтов обязательные результаты обучения, то образовательные стандарты, теперь — тесты. При этом никакого анализа и широкого обсуждения эффективности предыдущих новаций с привлечением учительской общественности не проводится.

Я не против стандартов. Я за то, чтобы, ну поработали, ну разработали, ну внедрили. Так давайте через год, через два соберемся, посмотрим, что это дало. Учителей надо спросить.

В последние годы учителя были участниками альтернативной системы оценки качества их работы, не зависящей от администрации. Речь идет о Соросовской образовательной программе. Возможно, некоторые подходы этой программы довольно спорны, но было бы замечательно ее опыт творчески перенести на нашу действительность.

Есть такое предложение: подумать о том, чтобы разряды учителю, восьмой-девятый, еще в techинституте присваивали. Прошел практику, и школьный коллектив плюс методист собираются и думают — присваивать ему разряд или нет. Вторую педпрактику прошел — еще один разряд.

Я когда-то учился в металлургическом техникуме. После первой же практики мне был присвоен четвертый разряд волочильщика проволоки. Что мне тогда было — семнадцать лет. Приходит учитель молодой в школу сегодня, ему приходится восьмой разряд ставить и давать зарплату пятьсот рублей.

6. Школа и современная наука

Разумеется, школьное математическое образование не может быть оторвано от математической науки. В математике, как ни в какой другой науке, творческая деятельность школьника близка к работе квалифицированного исследователя. Уже семикласснику возможно сформулировать некоторые нерешенные проблемы. Важнейшим мостом, по которому современные математические идеи проникают в школьную среду, являются математические олимпиады, турниры и конференции. В их организации и проведении участвуют крупнейшие специалисты, влияние которых трудно переоценить. В предлагаемых задачах напрямую используются современные математические идеи. Замечательно, что в этой области мы видим сегодня многообразие подходов. Наряду с традиционными олимпиадами, проводимыми Министерством образования, проводится Турнир Городов с его замечательными конференциями и соросовские олимпиады. В них могут принять участие все желающие без чьего-либо разрешения, без затрат на переезды.

На конференциях Турнира Городов могут предлагаться только что решенные, а может даже и не решенные математические проблемы. На одной из последних конференций школьники успешно штурмовали знаменитую проблему Борсука, поставленную более шестидесяти лет назад и решенную совсем недавно. При этом некоторые школьники пошли дальше авторов решения.

Математики-профессионалы, участвующие в составлении олимпиадных задач, зачастую тем самым вносят большой вклад в обогащение содержания элементарной математики. Многие идеи, которые десять-пятнадцать лет назад эксплуатировались только на олимпиадах и казались экзотическими, в ряде школ сегодня входят в обязательную программу. Примером могут служить инварианты, группы преобразований, графы.

Невозможно переоценить роль журнала “Квант” как проводника современных математических идей в школьную среду. Часто журнал служил трибуной, с которой к школьникам напрямую обращались крупнейшие современные математики. Неоценима роль любимых многими школьниками и учителями разделов журнала — “Квант для младших школьников”, “Задачник Кванта”. Здесь постоянно предлагались лучшие образцы трудных, но невероятно привлекательных задач. Раздел “Математический кружок” стал для вдумчивого учителя подлинным заочным университетом. Остается сожалеть, что в последние годы журнал утратил прежнюю популярность и стал менее доступным как по содержанию, так и по цене.

Не могу не отдать должное вот чему. Я всегда получал журнал “Квант”, выписывал двадцать номеров, один на каждую парту, потому что учебник-учебником, а вот пришел журнал “Квант” — порешаем из него. Что значит учить детей математике? Это очень часто научить читать, писать и говорить. Вузовские преподаватели знают, что есть некоторые студенты, которые умеют читать, есть — не умеют читать. Школьную программу знает, а вот читать научную статью не умеет. Я это делал всегда, и у меня были любимые авторы: Васильев, Гутенмахер, Дубровский. Я очень благодарен этим людям. Сегодня нет Николая Борисовича Васильева с нами, и я хочу добрым словом его вспомнить.

Децентрализация издательской деятельности привела к появлению массы новых книг и журналов, входящих в сокровищницу библиотеки учителя математики (если, конечно, он в состоянии их купить). Замечательная энциклопедия элементарной математики (издательства “Аванта-плюс”), книги издательства Московского центра непрерывного математического образования, ФАЗИС, Дрофа. Хочу особо отметить недавние издания, которые произвели на меня сильнейшее впечатление. Это выпуски “Математического просвещения”. Вот в третьем номере, как раз памяти Васильева, геометрические статьи Прасолова и Чернавского, Раздел о проблеме Борсука, графы.

Думаю, что высокий международный авторитет отечественного математического образования во многом обязан именно влиянию большой науки на школьное образование. В этой области у нас прекрасные традиции.

7. Ученик и его учебник математики

Огромная роль хорошего учебника по математике общеизвестна. В этом направлении в последние годы проводится большая серьезная работа. Появилось много альтернативных учебников, созданы учебники для гуманитариев, для общеобразовательной школы, для углубленного изучения математики. Однако учебника двадцать первого века, к сожалению, не появилось и вряд ли он скоро появится. (Речь не идет о компьютерных учебниках.)

Многолетний опыт работы в школе показывает, что учебники, в первую очередь, интересны их создателям, во вторую очередь — учителям. От учителей низкий поклон всем авторам учебников, любых. А вот большинство детей использует их только как задачники для выполнения домашних заданий. Почему так происходит? Наверное, в первую очередь потому, что устарела концепция учебника. Авторы стараются сохранить строгость изложения, которое часто сильно формализовано. Такой учебник читать ребенку не интересно. Нет интриги, которая бы провоцировала ученика к дальнейшему чтению. Да, в строгом учебнике, как правило, не видно личности автора, отсутствует юмор, интересные исторические ссылки, неформальные творческие задания, красивые иллюстрации и так далее.

Исходя из этих критериев на сегодняшний день ни один известный мне учитель математики не поставил ни одному учебнику "пять". Я звонил из дома все лето, мне надо было доклад подготовить, месяца за два до этой конференции. Звонил знакомым учителям и задавал несколько вопросов, в том числе: "Назовите учебник, за который сегодня вы поставили бы пятерку?" Долгое и недоуменное молчание и потом: "Ну, пожалуй, что на "пять" нет ни одного, но хорошие учебники все-таки есть".

Я хочу здесь успокоить авторов учебников и сказать вот что: может быть, моя выборка несколько нерепрезентативна, потому что я звонил очень хорошим учителям, но многие из них не работают в пятых-шестых классах.

Тем не менее отрадно, что по крайней мере некоторые учебники хороши. Здесь хочется отметить комплект учебников по геометрии Игоря Федоровича Шарыгина. Здесь сквозит свежий взгляд на изложение геометрии, многое упрощено, что с позиции учителя и практики весьма оправдано. Некоторые доказательства и решения вызывают восторг учителя и ученика. За многими вещами стоит важный критерий — изящество.

Безусловно, большим событием в жизни учебников является труд А. Д. Александрова, А. Л. Вернера и В. И. Рыжика "Геометрия для углубленного изучения". В этих учебниках капитально изложена теория. Хотя порой несколько тяжеловесно.

Несколько хуже обстоит дело с учебниками по алгебре. Таких ярких учебников, как по геометрии, на сегодняшний день маловато. Ограничимся тем, что отдадим должное сборнику задач по алгебре восьмых-девятых классов М. Л. Галицкого, А. М. Гольдмана и Л. И. Звавича. Очень популярный задачник, все его отмечают.

Речь идет только о тех учебниках, которые широко известны учительской аудитории. Из менее известных весьма добротный учебник Д. Терешина и А. Калинина "Стереометрия-10". И учителя интересуются: "Когда будет "Стереометрия-11"? Ждут.

Очень хорошие учебники по алгебре седьмых-восьмых классов общеобразовательных учебных заведений Константина Соломоновича Муравина и Георгия Константиновича Муравина и Георгия Владимировича Дорофеева. Быстро стали авторитетными книгами, очень добротная система упражнений, просто, ясно и вместе с тем хороший дополнительный материал для любознательного школьника.

Хочется сказать, что очень многих книг нет в регионах, очень многих. Учитель вправе ожидать появления принципиально других учебников, таких, которые детям будут доступны и интересны. И это можно сделать достаточно быстро, если отойти от личных амбиций и никому не нужной конкуренции.

Замечательной учебной литературы для школы создано великое множество. Многие учебные пособия отвечают самым изысканным вкусам. Нужно всем этим богатством разумно распорядиться. В качестве одного из примеров приведу книгу

И. М. Гельфанда, С. М. Львовского и А. Л. Toома “Тригонометрия” — замечательная книга. Вот такую тригонометрию я согласен изучать. Язык понятен, доступен, изящен. Все есть в этой небольшой по объему книжке.

8. Учитель и его престиж

Все, о чем мы говорили выше, невозможно осуществить если не поднять престиж учительской профессии. Государство, если оно хочет выжить, обязано побеспокоиться о том, чтобы подрастающее поколение воспитывали и обучали нормальные люди. Сегодня каждый учитель (может быть, за исключением учителей Москвы) просто беден. А раз беден, значит — ущербный человек. Но ущербный человек всегда опасен. Нужно прекратить практику повышать учителю зарплату на пятнадцать-двадцать процентов один раз в три года. Нужно достойно оплачивать труд учителя. Я согласен получать в десять раз меньше моего американского коллеги, но не в сто раз, ребята!

Нужна моральная поддержка учительской профессии. За последние тридцать лет был снят всего один хороший фильм, героями которого были учителя-профессионалы и увлеченные математикой ученики. Назывался он “Расписание на послезавтра”. Главную роль в этом фильме исполнил талантливый и тонкий актер Олег Даль. Ведь были времена, когда все средства массовой информации обращались к этой теме. Но сегодня, к сожалению, учитель — не герой нашего времени.

Джордж Сорос, как бы к нему ни относились различные слои населения, дал прекрасный пример бережного отношения к талантливому учителю. Необходимо как можно быстрее создавать частные общественные фонды, из которых учителя могли бы получать гранты. Если этого не сделать очень скоро, придется заносить учителя математики в красную книгу. Это не шутка, это очень серьезно. Уже многие годы наши лучшие ученики не идут в учительскую профессию. Закончить я хотел бы вот чем. При въезде в Новосибирский Академгородок большими буквами написан замечательный лозунг: “Да здравствует то, благодаря чему мы, несмотря ни на что!”

Спасибо.

Хазанкин Роман Григорьевич
Научно-методический руководитель Белорецкой компьютерной школы
Учитель математики БКШ
Башкортостан, Белорецк, ул. Карла Маркса, 120, БКШ
телефоны: (34792) 4-38-32, 4-38-29
e-mail: mailto:bcs@poikc.bashnet.ru

Две заметки по комбинаторике

А. Ю. Эвнин

А. Ю. Эвнин — старший преподаватель Южно-Уральского Государственного университета. В первой заметке приведены простые доказательства основных комбинаторных тождеств. Материал доступен учащимся старших классов средней школы и может быть использован на факультативных занятиях. Вторая заметка иллюстрирует применение неэлементарного метода из теории функций комплексной переменной к решению элементарной комбинаторной задачи о подсчете числа счастливых билетов. Заметка может заинтересовать студентов и преподавателей математических специальностей вузов.

1. Депутаты, спикер и комбинаторные тождества

Предметом статьи являются ряд соотношений для чисел сочетаний C_n^k. Все они интересны сами по себе и многие находят применение при решении различных комбинаторных задач. Однако не менее интересны *способы* их доказательства (или получения). Это особенно важно при первоначальном изучении комбинаторики. Очень полезно предложить учащимся доказательства, исходящие из *комбинаторной природы* соотношений. Общая схема рассуждений здесь такова. Пусть доказывается тождество $f(n, k, ...) = g(n, k, ...)$. По виду левой и правой частей реконструируется задача на *подсчет числа комбинаций* определенного вида ($n, k, \ldots$ выступают в роли параметров), решая которую одним способом, получаем в качестве ответа $f(n, k, \ldots)$, а другим способом — $g(n, k, \ldots)$.

Напомним, что C_n^k — *число сочетаний из* n *по* k, то есть число k-элементных подмножеств n-элементного множества. Другими словами, C_n^k есть количество способов выбрать из n различных элементов k элементов (порядок выбранных элементов не важен). В частности, $C_n^0 = C_n^n = 1, C_n^1 = n$.

Для понимания данной статьи не требуется никаких сведений по комбинаторике, кроме правила произведения и формулы для числа подмножеств n-элементного множества (соответствующие сведения приведены в Приложении).

В нижеприводимых соотношениях значения параметров предполагаются такими, чтобы все выражения имели смысл (например, если в формуле присутствует C_n^k, то предполагается, что $0 \le k \le n$).

Имеют место следующие тождества:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$;	**2)** $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$;
3) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;	**4)** $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0 (n \ge 1)$;
5) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k = 1$;	**6)** $C_{m+n}^k = \sum\limits_{s=0}^{k} C_m^s C_n^{k-s} (m, n \ge k)$;
7) $C_{2n}^n = \sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$;	**8)** $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$;
9) $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m}$;	**10)** $\sum\limits_{p=0}^{k} C_{m+p}^m = C_{m+k+1}^{m+1}$;
11) $\sum\limits_{p=0}^{k} C_{n+p}^m = C_{n+k+1}^{m+1} - C_n^{m+1}$;	**12)** $\sum\limits_{k=m}^{n-r+m} C_k^m C_{n-k}^{r-m} = C_{n+1}^{r+1}$;
13) $\sum\limits_{k=0}^{m} C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_n^m \cdot 2^m$;	**14)** $\sum\limits_{n=k}^{m} \frac{1}{n} C_n^k = \frac{1}{k} C_m^k$;
15) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_n^k = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.	

Тождества 1)–3) разбираются в [1]. Тождества 6), 7), 10), 11) предлагаются там же в качестве упражнений (задачи 439, 440)[1]. Для замкнутости изложения мы приведем доказательства всех тождеств.

Доказательства тождеств

1) Задача выбора из n элементов k элементов равносильна задаче выделения из n элементов $n-k$ элементов, которые *не выбираются.* Первая задача решается C_n^k способами, а вторая C_n^{n-k} способами.

2) Пусть в парламенте n депутатов, включая спикера. Подсчитаем число способов составить парламентскую делегацию из k человек. С одной стороны, это число сочетаний C_n^k.

Произведем подсчет по-другому. Для того, чтобы сформировать делегацию, включающую спикера, нужно из $n-1$ рядовых депутатов выбрать $k-1$; это можно сделать C_{n-1}^{k-1} способами. Если же спикер в делегацию не входит, то ее членов можно выбрать C_{n-1}^k способами (из $n-1$ рядовых депутатов выбирается k человек). Таким образом, всего имеется $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ способов составить делегацию.

3) 2^n — число всех подмножеств n-элементного множества. Так как C_n^k — число всех его k-элементных подмножеств, то просуммировав C_n^k по k от 0 до n, вновь получим общее число всех подмножеств.

4) Найдем количество подмножеств n-элементного множества, имеющих четное число элементов. Оно совпадает с количеством способов составить парла-

[1] К сожалению, два из пяти предлагаемых в [1] соотношений приведены с опечатками.

ментскую делегацию из четного числа человек, если в парламенте всего n депутатов.

Произвольная делегация такого вида может быть получена в результате выполнения следующей процедуры. Сначала относительно каждого из депутатов, не считая спикера, будем принимать решение, войдет данный депутат в делегацию или нет. Согласно правилу произведения, эти решения могут быть вынесены 2^{n-1} способами. Спикер включается в делегацию только в том случае, когда в ней нечетное число "рядовых" депутатов. Таким образом, общее число делегаций с четным числом членов равно 2^{n-1}.

Поскольку общее число подмножеств есть 2^n, подмножеств с нечетным числом элементов также 2^{n-1}, то есть столько же, сколько и с четным числом элементов. Значит,

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots,$$

поскольку части записанного равенства выражают собой число подмножеств n-элементного множества соответственно с нечетным и четным числом элементов. Полученное равенство равносильно доказываемому.

5) Данное соотношение является другой формой записи предыдущего тождества.

6) Решим такую задачу. *Имеется m мужчин и n женщин. Из них нужно сформировать делегацию из k человек. Каким числом способов это можно сделать?* Ответ очевиден: C_{m+n}^k. Будем классифицировать делегации по числу мужчин. Если в делегацию входят s мужчин и $k-s$ женщин, то мужчин можно выбрать C_m^s способами, а женщин — C_n^{k-s} способами; значит, число делегаций с s мужчинами равно $C_m^s C_n^{k-s}$. Суммируя $C_m^s C_n^{k-s}$ по s от 0 до k, получим общее число делегаций.

7) Для доказательства достаточно в предыдущем соотношении положить $k = m = n$ и применить 1).

8) Доказательство тождества может быть получено из решения следующей задачи: *Каким числом способов можно из n кандидатов выбрать k депутатов и среди последних спикера?* Депутаты выбираются C_n^k способами, после чего спикер выбирается k способами; таким образом, общее число способов равно $C_n^k \cdot k$. То же число можно подсчитать по-другому. Будем сначала избирать спикера (из n кандидатов), а затем из оставшихся $n-1$ кандидата — еще $k-1$ депутата. Указанная процедура может быть выполнена $n \cdot C_{n-1}^{k-1}$ способами. Доказано, что $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$. Отсюда вытекает полезное рекуррентное соотношение: $C_n^k = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$, применяя которое несколько (точнее, k) раз, можно, кстати, вывести формулу для числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot C_{n-2}^{k-2} = \ldots =$$

$$\frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{1} C_{n-k}^0 = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

9) Это тождество — обобщение предыдущего (если в 9) положить $m = 1$, то получим 8)) и может быть доказано с помощью решения задачи, также являющейся обобщением ранее рассмотренной: *Каким числом способов можно выбрать из n кандидатов k депутатов и среди последних m членов президиума?*

10) Общее число $m+1$-элементных подмножеств множества $\{1, 2, 3, \dots, m+k+1\}$ равно C_{m+k+1}^{m+1} (правой части доказываемого тождества). Будем *классифицировать* указанные подмножества по их наибольшему элементу, который, очевидно, принимает значения: $m+1, m+2, \dots, m+k+1$. Найдем число подмножеств с наибольшим элементом $m+p+1$. Поскольку наибольший элемент уже выбран, оставшиеся m элементов выбираются из множества $\{1, 2, \dots, m+p\}$ — значит, число таких подмножеств равно C_{m+p}^m. Суммируя C_{m+p}^m по p от 0 до k, вновь получим общее число $m+1$-элементных подмножеств (левую часть доказываемого тождества).

11) Тождество доказывается на основе предыдущего:

$$\sum_{p=0}^{k} C_{n+p}^m = \sum_{i=m}^{n+k} C_i^m - \sum_{i=m}^{n-1} C_i^m = [p = i - m] =$$

$$\sum_{p=0}^{n+k-m} C_{m+p}^m - \sum_{p=0}^{n-1-m} C_{m+p}^m = C_{n+k+1}^{m+1} - C_n^{m+1}.$$

12) Упорядочим элементы $r+1$-элементного подмножества множества $\{1, 2, \dots, n\}$ по возрастанию: $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_{r+1} \le n$. Подсчитаем число таких $r+1$-элементных подмножеств, в которых $m+1$-й по величине элемент равен $k+1$, т.е. $i_{m+1} = k+1$. Тогда для чисел $i_1, i_2, \dots, i_m$ выполняются соотношения $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m \le k$, в силу чего их можно выбрать C_k^m способами. Аналогично, оставшуюся часть подмножества (числа $i_{m+2}, \dots, i_{r+1}$ из промежутка от $k+2$ до $n+1$) можно выбрать C_{n-k}^{r-m} способами. Таким образом, общее число подмножеств указанного вида равно $C_k^m C_{n-k}^{r-m}$. Суммируя найденные выражения по всем возможным значениям k, получим C_{n+1}^{r+1} — общее число $r+1$-элементных подмножеств. Тождество доказано. Заметим, что оно является обобщением тождества 10). Укажем также на следующие интересные частные случаи: $\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = C_{n-1}^3; \sum_{k=1}^{n} kC_{n-k+2}^2 = C_{n+3}^4$ (напомним, $k = C_k^1$).

13) Решим задачу: *Каким числом способов можно из n кандидатов выбрать m депутатов и среди депутатов некоторых (может быть, всех, а может быть, никого) наградить?*

С одной стороны, депутаты выбираются C_n^m способами, а награжденные выделяются 2^m способами (столько подмножеств имеет множество из m элементов), и, значит, ответ к задаче: $C_n^m \cdot 2^m$.

С другой стороны, если число награждаемых депутатов равно k $(0 \le k \le m)$, то их можно выбрать C_n^k способами, после чего остальные $m-k$ депутатов выбираются C_{n-k}^{m-k} способами. Суммируя $C_n^k C_{n-k}^{m-k}$ по k от 0 до m, вновь получим ответ к рассматриваемой задаче. Тождество доказано.

14) Используя соотношение 8), преобразуем общий член суммы: $\frac{1}{n}C_n^k = \frac{1}{k}C_{n-1}^{k-1}$. Имеем:

$$\sum_{n=k}^{m} \frac{1}{n}C_n^k = \sum_{n=k}^{m} \frac{1}{k}C_{n-1}^{k-1} = \frac{1}{k}\sum_{n=k}^{m} C_{n-1}^{k-1} = [\text{в силу } 10)] = \frac{1}{k}C_m^k.$$

15) Воспользовавшись 14) тождеством, заменим $\frac{1}{k}C_n^k$ на $\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}C_j^k$ и в полученной двойной сумме поменяем порядок суммирования:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}C_n^k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}C_j^k =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k-1}C_j^k = [\text{в силу } 5)] = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.$$

В заключение заметим, что богатейший материал по рассматриваемому вопросу можно найти в [2] и [3].

Приложение.

Теорему, которую мы сейчас сформулируем и докажем, часто называют *основным принципом комбинаторики* .

Правило произведения. *Пусть подсчитывается количество объектов, каждый из которых строится в результате последовательного выполнения n действий. Первое действие может быть выполнено a_1 способами, второе — a_2 способами,..., последнее — a_n способами, при этом* количество *способов выполнить каждое действие не зависит от того, какими были предыдущие действия. Тогда общее количество объектов равно $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.*

Доказательство проводится методом математической индукции.

При $n = 1$ доказываемое утверждение очевидно. Пусть $n = 2$. Закодируем последовательность действий упорядоченной парой чисел (i, j), где i — номер способа выполнить первое действие, а j — второе. Тогда всевозможные способы выполнить два действия можно описать прямоугольной таблицей

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \ldots & (1,a_2) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \ldots & (2,a_2) \\ & & \ldots & & \\ (a_1,1) & (a_1,2) & (a_1,3) & \ldots & (a_1,a_2) \end{matrix}$$

В таблице a_1 строк и a_2 столбцов, а, значит, $a_1 \cdot a_2$ элементов. Утверждение для случая двух действий доказано.

Переходим к *индукционному шагу.* Предположим, что правило произведения справедливо при $n = k \geq 2$. Последовательность из $k+1$ действия будем кодировать упорядоченным набором чисел $(i_1, i_2, ..., i_k, i_{k+1})$, где i_j— номер способа выполнить j-е действие. Таких наборов — столько же, сколько *упорядоченных пар* $((i_1, i_2, ..., i_k), i_{k+1})$, в которых первый элемент — упорядоченный набор из k элементов. По предположению число наборов $(i_1, i_2, ..., i_k)$ равно $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k$; второй элемент пары — i_{k+1} — по условию выбирается a_{k+1} способами. Всего пар будет $(a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k) \cdot a_{k+1} = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k \cdot a_{k+1}$, что и требовалось доказать.

Число подмножеств конечного множества. Пусть A — множество, содержащее n элементов. Для малых n подсчитаем число всевозможных подмножеств множества A. Для этого составим следующую таблицу.

n	A	все подмножества A	число подмножеств
1	$\{a\}$	$\phi, \{a\}$	2
2	$\{a, b\}$	$\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$	4
3	$\{a, b, c\}$	$\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$	8

Возникает предположение, что число всех подмножеств n-элементного множества равно 2^n. Справедливость его легко доказать с помощью правила произведения. Действительно, произвольное подмножество n-элементного множества можно получить в результате выполнения следующих n действий: 1-е действие "определяет судьбу" 1-го элемента множества — быть ему в формируемом подмножестве или нет, 2-е действие касается 2-го элемента, ..., n-е действие — n-го элемента. Таким образом каждое из n действий может быть выполнено двумя способами. Согласно правилу произведения, число способов выполнить все n действий, а, значит, и число всех подмножеств исходного множества равно 2^n.

Литература

[1] Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. *Алгебра и математический анализ для 11 класса.*— М.:Просвещение,1993.

[2] Виленкин Н.Я. *Комбинаторика.*— М.:Наука,1969.

[3] Риордан Дж. *Комбинаторные тождества.*— М.:Наука,1982.

2. Число счастливых билетов как интеграл

Трамвайные билеты имеют шестизначные номера. Билет называют *счастливым*, если сумма его первых трех цифр равна сумме трех последних. Задаче подсчета числа счастливых билетов с помощью рекуррентных соотношений посвящены сюжет в классической книге Н.Я. Виленкина "Комбинаторика", а также несколько публикаций в журнале "Квант" [2]. В одной из них ("Интегралом по счастливым билетам!", 1978, №11) приводится аналитическое выражение для числа H счастливых билетов: $H = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\frac{\sin 10x}{\sin x})^6 dx$. Там же указывается, что несколько читателей журнала независимо друг от друга, используя различный математический аппарат, вывели эту формулу. Мы приведем новый способ получения формулы, доступный изучавшим в минимальном объеме теорию функций комплексной переменной (это соответствует, например, второму курсу высших технических учебных заведений).

Отметим сначала, что число счастливых билетов совпадает с числом билетов, у которых сумма цифр равна 27. Для доказательства этого факта покажем, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством "счастливых" 6-значных номеров и множеством 6-значных номеров с суммой цифр 27. Это соответствие задается так. В произвольном "счастливом" номере заменим 3 последние цифры на цифры, дополняющие их до 9 (например, 147624 → 147375). Если сумма трех первых (и трех последних) цифр равна k, то после указанного преобразования сумма трех последних цифр станет равной $27 - k$, а общая сумма шести цифр будет равна 27.

Рассмотрим функцию $f(x) = (x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^9)^6$. Раскрыв скобки, не меняя порядка множителей и не приводя подобные, получим

$$f(x) = (x^0 + x^1 + \ldots + x^9)(x^0 + x^1 + \ldots + x^9)\ldots(x^0 + x^1 + \ldots x^9) =$$
$$= x^0x^0\ldots x^0 + x^0x^0\ldots x^1 + \ldots + x^{i_1}x^{i_2}\ldots x^{i_6} + \ldots + x^9x^9\ldots x^9.$$

Общий член полученной суммы есть произведение $x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}x^{i_4}x^{i_5}x^{i_6}$, где x^{i_j} — есть некоторое слагаемое из j-й скобки. Каждый такой член поставим в соответствие шестизначному номеру $i_1i_2i_3i_4i_5i_6$. Ясно, что это соответствие является взаимно однозначным. Поэтому после приведения подобных

$$f(x) = \sum x^{i_1}x^{i_2}x^{i_3}x^{i_4}x^{i_5}x^{i_6} = \sum x^{i_1+i_2+i_3+i_4+i_5+i_6} = \sum_{k=0}^{54} a_k x^k$$

коэффициент при x^k есть в точности количество шестизначных номеров с суммой цифр k.

Замечание. Если обозначить через a_k количество шестизначных номеров с суммой цифр k, то функция $f(x)$ является *производящей* для последовательности (a_k). цифр k. Джордж Пойа в книге "Математика и правдоподобные рассуждения" приводит следующую образную характеристику метода производящих функций: "Производящая функция является устройством, отчасти напоминающим мешок.

[2]Этому же вопросу посвящена статья С. К. Ландо "Счастливые билеты" в сборнике "Математическое просвещение", третья серия, выпуск 2, 1998 г. — *прим. ред.*

Вместо того, чтобы нести много предметов, что могло бы оказаться затруднительным, мы собираем их вместе, и тогда нам нужно нести лишь один предмет — мешок".

Итак, задача сведена к вычислению коэффициента a_{27} при x^{27} многочлена $f(x) = \left(\frac{x^{10}-1}{x-1}\right)^6$. Для функции $\frac{f(x)}{x^{28}}$ искомое число будет *вычетом*, и вычислить его можно с помощью интеграла по единичной окружности с центром в начале координат комплексной плоскости:

$$a_{27} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|x|=1}\left(\frac{x^{10}-1}{x-1}\right)^6 \frac{dx}{x^{28}} = [x = e^{i\varphi}] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{10i\varphi}-1}{e^{i\varphi}-1}\right)^6 \frac{ie^{i\varphi}}{e^{28i\varphi}}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{5i\varphi}-e^{-5i\varphi}}{e^{i\varphi/2}-e^{-i\varphi/2}}\right)^6 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin 5\varphi}{\sin\varphi/2}\right)^6 d\varphi = [y = \varphi/2] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin 10y}{\sin y}\right)^6 dy.$$

Заметим, что точно так же можно получить число "счастливых" $2n$-значных номеров в k-ичной системе счисления: $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin kx}{\sin x}\right)^{2n} dx$. Таким образом, общее решение классической *комбинаторной* задачи записывается с помощью *интеграла* от тригонометрической функции!

Чему все-таки равно число (традиционных) счастливых билетов? Ответ: **55252** (примерно каждый восемнадцатый билет — счастливый). Наиболее быстрый практический способ получения этого результата состоит в последовательном вычислении коэффициентов при степенях x не выше 27-й в разложениях многочленов $P_i(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^9)^i$ для $i = 1, 2, \ldots, 5$ и последующем определении коэффициента при x^{27} в многочлене $P_6(x)$. Выкладки могут быть облегчены следующим соотношением: если $P_i(x) = \sum_{k=0}^{9i} a_{i,k}x^k$, то $a_{i,k} = a_{i,9i-k}$ (докажите его!). Несложно получить рекуррентную формулу для вычисления коэффициентов $P_i(x)$ через коэффициенты предшествующего многочлена $P_{i-1}(x)$. Попробуйте это сделать и, применяя найденную формулу, не более чем через 5 минут Вы сможете убедиться в правильности приведенного ответа!

Эвнин Александр Юрьевич
Южно-Уральский Государственный Университет
старший преподаватель кафедры
прикладной математики
e-mail: evnin@prima.susu.ac.ru

Материалы к проектированию курса геометрии для средней школы

А. И. Щетников

Андрей Иванович Щетников — консультант среднего учебного заведения “Новая школа” города Новосибирска, автор нашего журнала (№1 (8), 1999 г.). В статье изложены основные идеи проекта современного курса геометрии для средней школы. В разделе “Информация” настоящего номера приведены данные о книгах, выпущенных в Новосибирске группой издателей, в которую входит А. И. Щетников.

1. Основная проектная идея.

Необходимость создания новых учебников геометрии широко обсуждается сегодня педагогической общественностью. В статьях В. И. Арнольда, В. А. Успенского, И. Ф. Шарыгина и других известных деятелей математического образования (да и просто в разговорах многих людей старшего поколения) отмечается, что геометрия в современной школе из ясного и привлекательного предмета, каким она была прежде, стала предметом скучным и малопонятным.

Традиционное содержание «хорошего» (= «понятного», «интересного», «разумного») школьного курса геометрии в сознании наших соотечественников связано прежде всего с учебником А. П. Киселева, по которому училось не одно поколение российских гимназистов и советских школьников. Однако прямое восстановление преподавания геометрии «по Киселёву», не учитывающее изменений, произошедших в педагогической теории и практике за вторую половину XX века, вряд ли оказалось бы успешным. Отсюда возникает задача разработки такого систематического курса геометрии для средней школы, в котором традиции российского гимназического образования сочетались бы с современными идеями развивающего обучения, понимаемого в достаточно широком смысле.

Я полагаю, что в качестве девиза, выражающего основную проектную идею такого курса, могут быть взяты следующие слова Д. Д. Мордухай-Болтовского: «Следует рассматривать всякое школьное доказательство как наложение двух доказательств — интуитивного и логического, взаимно усиливающих убедительность друг друга. Первое осуществляется *подвижной* моделью и ей соответствующим процессом воображения, второе развёртывает *силлогизмы*, приводящие к обоснованию этих операций. То доказательство лучше, где ясно выявляются оба этих слоя — *интуитивный* и *логический*» [3, I, 309].

2. Как начинать систематическое изучение геометрии?

2.1. Систематическое изложение геометрии от принятых без доказательства аксиом к выводимым из этих аксиом теоремам является общепринятым. Однако такое построение курса приводит к известным дидактическим трудностям. Статус аксиом как «начал» геометрии подкрепляется обычно в школьном преподавании ссылкой на их очевидность. Но многие первые в порядке следования теоремы выглядят не менее очевидными, нежели принятые аксиомы. Зачем же их тогда доказывать? Кроме того, доказательства этих теорем оказываются весьма сложными для понимания. Ведь по причине исходной ограниченности средств многие из них проводятся методом «от противного». Но начинать курс с косвенных доказательств очевидных теорем — значит создавать у учащихся представление о геометрии как о весьма надуманной науке.

Ещё Аристотель говорил, что «обучение надо иногда начинать не с первого и не с того, что есть начало в предмете, а оттуда, откуда легче всего научиться». И можно задать целостный образ геометрии за счёт пропедевтической части курса, которая помогала бы учащимся осваивать предметные и деятельностные смыслы геометрии.

2.2. Пропедевтическая часть нашего курса начинается с рассмотрения теорем о *неочевидной равновеликости фигур*. В качестве самой первой теоремы такого рода рассматривается следующая: *если через произвольную точку на диагонали прямоугольника провести две прямые, параллельные сторонам прямоугольника и разделяющие его на четыре прямоугольных части, то прямоугольные части, лежащие «по бокам» от диагонали, будут равны по площади (рис. 1).*

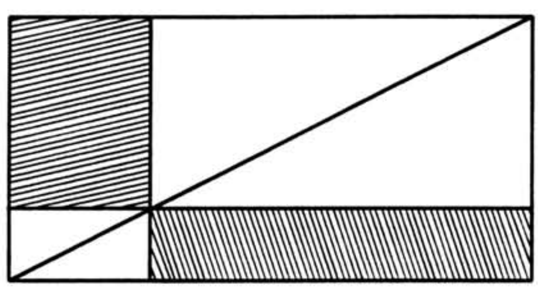


Рис. 1

Истинность таких теорем демонстрируется с помощью преобразований чертежа, основанных на базовых *очевидностях* двух типов. К первому типу относятся утверждения об очевидном равенстве фигур. Ко второму — утверждения о соотношениях, имеющих место при действиях над геометрическими величинами.

За рассмотрением нескольких таких теорем (включающим попытки учеников самостоятельно доказывать их и разбор этих попыток в классе) следует аналитическая работа по составлению списка лемм, использованных в доказательствах. Обсуждается идея синтетического изложения геометрии, при котором сначала перечисляются все леммы, принятые без доказательства (такие леммы называются аксиомами), а затем — теоремы с их доказательствами в порядке вывода (так, чтобы каждая теорема опиралась на факты, уже признанные истинными).

2.3. (Из опыта апробации курса.) Каждый ученик выполнял в своей тетради чертёж к первой теореме. И «произвольную точку на диагонали» почти все поставили не на диагональ, а в угол клетки тетради, близкий к диагонали. Поэтому прямоугольники, площади которых определялись «по клеточкам», оказались неравными. Учитель продемонстрировал на доске доказательство и предложил классу: «Или в моём доказательстве найдите ошибку, или у себя в тетрадях». Итог обсуждения: такая незаметная на глаз разница привела к ощутимой ошибке в площади — стало быть, чертежам не всегда можно слепо доверять; они станут нашими помощниками лишь тогда, когда мы будем смотреть на них «умным зрением».

3. Аксиомы

3.1. Согласно античным представлениям, аксиомы представляют собой исходные недоказуемые принципы той или иной научной дисциплины, являющиеся началами всякого доказательства и признаваемые истинными в силу их интуитивной убедительности. К набору аксиом в античной геометрии неявно, самой практикой геометрического исследования предъявлялись требования *независимости* (если некоторые из принятых аксиом могут быть выведены из других аксиом, то общее число аксиом следует уменьшить, часть из них объявив теоремами) и *полноты* (если какую-нибудь теорему не удаётся доказать на основе уже принятых аксиом, то набор аксиом пополняется ещё одной аксиомой). Эти требования отнюдь не приводили к полной формализации доказательств. Ведь истинность многих *неявно принятых лемм* постигалась путём не доказательства, но непосредственного рассмотрения чертежа.

В современной математике от каждой аксиоматической системы требуют *не истинности, но непротиворечивости* (из системы аксиом не должны выводиться и некоторое утверждение, и его отрицание). Если набор аксиом может быть непротиворечиво пополнен как некоторой новой аксиомой, так и её отрицанием, то в таком случае две различные системы аксиом порождают *две различные геометрии.*

3.2. Неформальная античная математика опирается на очевидность лемм, формальная современная математика — на непротиворечивость аксиом. Мы знаем, что очевидность может обмануть нас. И тем не менее её следует сперва возвести на трон, чтобы потом подвергнуть критике.

Большинство современных школьных учебников геометрии написано с сильнейшей оглядкой на современное понимание аксиоматики. Стремясь построить курс на основе дидактического принципа «научности», автор такого учебника разрабатывает некоторую систему аксиом, удовлетворяющую требованиям независимости и полноты. Стремясь удовлетворить также дидактическому принципу «понятности», он пытается выбрать такие аксиомы, чтобы каждая из них была «как можно более понятной» для ученика. Однако какая бы система аксиом не была выбрана автором, её «научность» обычно остаётся для ученика (впрочем, и для большинства учителей) тайной за семью печатями. Ведь формальные требования к аксиомам автор внутри учебника не обсуждает.

3.3. Мы не видим смысла применительно к началу изучения планиметрии настаивать на принципиальной значимости упомянутых выше «научных» требований к аксиоматике. Тем самым

(1) мы не стремимся устранить все неявные леммы. В частности, в нашем курсе нет явно выделенных аксиом о взаимном расположении точек и прямых (типа аксиомы Паша о том, что прямая, пересекающая одну из сторон треугольника во внутренней точке и не проходящая через противоположную вершину, пересекает также одну из оставшихся сторон). Осмысленное выделение и использование таких аксиом требует способности работать на достаточно высоком уровне логической абстракции, чего мы никак не можем ожидать от учащихся, только приступивших к изучению систематического курса геометрии.

(2) Мы не выставляем требования независимости аксиом. В частности, три признака равенства треугольников мы принимаем за аксиомы, обосновывая их истинность работой с механическими моделями, демонстрирующими свойство «жёсткости» треугольника. Доказательство этих признаков наложением мы не используем принципиально (ведь такое доказательство в рамках школьного курса оказывается лишённым явно выставленных посылок), а пользоваться косвенными доказательствами в самом начале курса мы не хотим (тем более что принципы и приёмы косвенного доказательства удобно изучать в теме «параллельные прямые»).

4. Определения

4.1. В дидактическом плане в курсе геометрии можно выделить определения двух различных типов. Сообщая учащимся определение первого типа, учитель вводит *новое* название некоторого объекта одновременно с указанием его свойств (номинальное определение) или способа его построения (конструктивное определение). При работе с определением второго типа (которое также может быть номинальным или конструктивным) название и внешний вид изучаемого объекта учащимся *известны заранее* (круг, квадрат, прямоугольник), и определение психологически воспринимается учениками как излишнее: «мы ведь и так это знаем».

Учебную работу с определениями второго типа имеет смысл вести в групповых формах. Каждая группа учащихся строит своё определение предложенного объекта; группы обмениваются своими определениями, изображают объект по чужим определениям и вновь обмениваются построенными изображениями; если построенное определение не соответствует исходной природе объекта, то вернувшееся изображение играет роль *контрпримера*. Еще один приём работы с определениями второго типа состоит в том, что знакомое название заменяется в определении на незнакомое. Например, учащимся предлагается изобразить геометрическую фигуру по такому определению: «периферией называется линия, все точки которой равноудалены от данной точки».

4.2. Вообще говоря, всякое определение должно быть *оправдано*: следует показать, что объект с указанными в определении свойствами действительно существует. К примеру, мы определяем параллельные прямые как не имеющие общей точки. Но то, что такие прямые существуют, вытекает из следующей теоремы: «две прямые, пересекающие третью под равными соответственными углами, не имеют общей точки».

А как обстоит дело с оправданием других определений (например, с оправданием определения треугольника)? При формальном разворачивании геометрии это существование вытекает из аксиом о расположении точек и прямых. В неформализованном курсе эти аксиомы подразумеваются, не будучи названными явно; поэтому нет речи и о строгом оправдании; «ясно ведь, что можно построить».

А существование окружности? Элементарными методами мы можем доказать не существование окружности как замкнутой линии, но существование бесконечного множества точек, равноудалённых от данной точки. Переход от этого множества к собственно линии требует принятия какой-либо аксиомы непрерывности. Евклид постулирует существование окружности с данным центром и данным радиусом. Это постулируемое существование важно лишь в построениях с помощью циркуля. Что касается теорем элементарного характера, то в них мы имеем дело не с окружностью, но с некоторой совокупностью точек, равноудалённых от данной точки; слово «окружность» употребляется в их формулировках по сути дела для краткости.

4.3. Точка зрения современной математики: дерево определений восходит к неопределимым понятиям; дерево теорем — к аксиомам; но корни у этих деревьев срослись: аксиомы в своей совокупности суть определения первых понятий в их взаимном друг к другу отношении.

4.4. Определение (в узком смысле) представляет собой *достаточный* список условий, задающих определяемый объект. Один и тот же объект может быть задан разными определениями; при этом нужно доказывать эквивалентность этих определений. Перечень свойств является *избыточным* определением (к примеру, подобные треугольники традиционно определяются как такие, у которых соответственные углы равны и соответственные стороны пропорциональны, — но было бы достаточно потребовать равенства углов). При работе с избыточными определениями нужно доказывать, что разные условия согласуются друг с другом. Но такого рода работу имеет смысл организовывать на специально выделенных уроках, а не только по ходу дела.

5. Теоремы

5.1. Учитель может привести в классе следующие аргументы в пользу доказательного рассуждения по сравнению с непосредственным измерением и вычислением.

(1) Измерительное знание относится к одной конкретной фигуре, доказательное — ко всем фигурам рассматриваемого класса.

(2) Измерения проводятся с некоторой погрешностью, зависящей от качества инструментов и умения ими владеть; точность доказательства «абсолютна», и не зависит от точности выполнения чертежей.

(3) *Единственность* объекта, обладающего некоторым свойством, зачастую не может быть установлена непосредственным рассмотрением чертежа. Эта единственность или принимается за аксиому на основе некоторых правдоподобных рассуждений (такова аксиома о том, что через две точки проходит единственная прямая), или доказывается косвенным путём (такова теорема о том, что прямая касается окружности в одной точке).

(4) В задачах на построение аналогом измерения был бы механический подбор, но он всегда остаётся неточным и иногда оказывается весьма затруднительным.

(5) Хорошо проведённое доказательство не только устанавливает некоторый факт, но также и «объясняет» его.

(6) Путём доказательств можно установить многое, основываясь на небольшом числе принятых предпосылок.

Из этих аргументов только первые два естественно вводятся с самого начала изучения курса. Но для заметной части учащихся и они не являются достаточно убедительными. (Здесь можно привести пример аккуратной ученицы, выполняющей очень тщательные построения: «Ведь чем точнее я всё сделаю, тем более верными будут мои результаты», — резонно замечает она.) Вторая пара аргументов добавляется по мере изучения соответствующих разделов курса. Последние два аргумента носят заведомо рефлексивный характер: они понятны лишь тому, кто уже многое уяснил для себя.

Поэтому учителю следует понимать, что *задача принятия всеми учащимися нормы доказательного рассуждения ставится не на несколько уроков, а на весь первый год изучения курса.* Мы не знаем, как ввести эту норму иным путём, отличным от привыкания к ней. Может быть, стоит разыграть серию уроков, на которых доказательства теорем рассматривались бы перед лицом *суда*, требующего для каждого высказанного утверждения ссылки на статью закона?

5.2. Опыт работы с косвенными доказательствами меняет природу признаваемой учащимися очевидности. Если в начале изучения курса очевидность связана с непосредственным созерцанием чертежа, то затем она встраивается в систему геометрических рассуждений. К примеру, при доказательстве теоремы о том, что из точки на прямую можно опустить только один перпендикуляр, ученик изображает чертёж, на котором из точки к прямой проведены две явных наклонных, помечает эти наклонные как перпендикуляры и говорит: «Но ведь очевидно, что эти линии не могут пересекаться».

5.3. Внутри учебного процесса нам представляется важным различить действия по *поиску и объяснению* доказательства и по *оформлению* доказательства. Содержание пропедевтической части курса позволяет проводить это различение со ссылкой на «смотри!» Пифагора и на «систему» Евклида. Указанные действия желательно выдержать в подчёркнуто разном стиле, используя разные знаковые системы. Чертёж при поиске доказательства можно делать от руки, а при оформлении —с помощью инструментов. Элементы чертежа при поиске доказательства желательно обозначать цветом и называть по этому цвету («синий треугольник» «красный угол» и т. п.), и только при оформлении — с помощью буквенной символики. Некоторые треугольники при поиске и объяснении доказательств рекомендуется закрашивать «сплошь». Параллельность сторон параллелограмма можно подчеркнуть продлением этих сторон за пределы фигуры. И так далее, и тому подобное: вообще же можно сказать, что лейтмотивом нашей методики является «формирование хорошего гештальта».

Сюда же относятся и требования к ясности речи, в том числе к употреблению развитой системы глаголов, описывающих те или иные манипуляции: «подвинем, перевернём, наложим, перегнём, сместим, закрепим, отрежем, вставим». К примеру, то, что стороны параллелограмма равны, мы не просто «видим», — но понимаем, что одна сторона переходит в другую параллельным переносом.

6. Устройство учебника. Организация ситуаций учения-обучения.

6.1. В настоящее время объём экспериментального учебника «Геометрия 7-11», [11], по которому мы работаем, составляет всего 176 страниц. Сделать книгу такой компактной удалось прежде всего за счёт того, что доказательства большинства простых теорем в ней опущены. Предполагается, что основу учебного процесса составит не разбор и заучивание готовых доказательств, но работа по их поиску.

Учебная книга малого объёма оказывается в этом отношении исключительно удобной. К примеру, предлагая классу доказать очередную теорему, после разбора её формулировки учитель спрашивает: «А какие аксиомы и уже доказанные теоремы можно попытаться использовать при доказательстве? Какие определения нам нужно восстановить?» Тонкую книжку можно быстро пролистать в поисках нужных фактов; а если такое пролистывание производится регулярно, из урока в урок, ученики постепенно привыкают работать с корпусом геометрического знания в целом, а не с его отдельными фрагментами.

6.2. В традиционной методике преподавания геометрии учитель сам доказывает теорему о площади треугольника, а потом организует «закрепление» материала на задачах вида *«в треугольнике высота 5 см, основание 3 см; определите его площадь»*. Конечно, здесь нет никакой геометрии, а есть только арифметика на уровне начальной школы — но в итоге учащиеся запоминают формулу. Мы же стараемся каждый урок строить так, чтобы доказательства теорем учащиеся искали самостоятельно (индивидуально, в парах, в группах, в коллективном обсуждении под руководством учителя); а для «закрепления» подбирать такие задачи, в которых нужно провести рассуждение того же типа, что и в доказанной теореме.

Мы стремимся к тому, чтобы доказательство теоремы никогда не заучивалось в готовом виде, но всегда отыскивалось. На то, чтобы эта идея была в какой-то мере присвоена школьниками, ушло полтора года. Однако нам виден главный результат нашей работы на сегодняшний день: большинство учащихся в классе уже *не боится* поиска доказательств (подчеркнём здесь, что речь идёт об обычном классе обычной школы!). Свидетельством тому является большое количество «поисковых» геометрических чертежей в их черновиках.

6.3. Завершая эти заметки, я хочу привести курьёзную, но педагогически действенную интерпретацию учения Платона о том, что *знание есть припоминание*. Предложим учащимися задачу такого уровня, чтобы они могли пытаться её решить, но мало кто получил бы решение. Затем покажем им решение и сравним со сделанными попытками. Через месяц, когда всё это будет достаточно крепко забыто, вновь предложим ту же самую задачу. Теперь при новой попытке решения учащиеся в своей поисковой работе будут пытаться вспомнить то, что происходило месяц назад. Если такие действия будут на разных задачах повторяться регулярно, то можно надеяться и на то, что учащиеся станут *вспоминать и то, что никто им не показывал,* — а ведь это и есть цель всякого разумного обучения.

Литература

[1] Вертгеймер М. Продуктивное мышление. М., 1987.

[2] Гильберт Д. Основания геометрии. М., 1948.

[3] Евклид. Начала. Пер. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского. В 3 т. М., 1948-51.

[4] Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. В 2 т. М., 1987.

[5] Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. М., 1972.

[6] Мордухай-Болтовский Д. Д. Философия. Психология. Математика. М., 1997.

[7] Пойа Д. Математическое открытие. М., 1970.

[8] Успенский В. А. Что такое аксиоматический метод? Ижевск, 2000.

[9] Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. В 2 ч. М., 1982-83.

[10] Шарыгин И. Ф. Об изучении геометрии // Приложение к кн.: Шарыгин И. Ф. 2200 задач по геометрии. М., 1998.

[11] Щетников А. И. Геометрия // Новосибирск, АНТ, 2000.

Условия задач 12-й летней Конференции Турнира Городов.

Август 2000 г.

12-я летняя Конференция Турнира Городов состоялась в начале августа 2000 г. в окрестностях г. Малоярославец Калужской области. Условия задач Конференции, публикуемые ниже, содержатся на Web-сайте Московского Центра непрерывного математического образования по адресу
www.mccme.ru/olympiads/turgor

Паркеты и мозаики

М. Л. Гервер

Листая «Реферативный журнал», я наткнулся на следующее занятное утверждение: *Попытка выложить плоскость многоугольниками с числом сторон больше 6 приводит к неограниченному росту наибольшего из их диаметров при одновременном стремлении к нулю наименьшей из их площадей.* Убедимся в том, что сформулированное утверждение неверно; слегка изменим его, — и оно станет верным, а потом получим его обобщения.

Подготовительные задачи

1. Можно ли разбить треугольник на невыпуклые 4-угольники?
2. Можно ли разбить треугольник
   a) на выпуклые 5-угольники? b) на выпуклые 6-угольники?
3. При каких n плоскость можно разбить
   a) на равные выпуклые n-угольники? b) на равные невыпуклые n-угольники?
4. a) Можно ли разбить плоскость на выпуклые 7-угольники?
   b) При каких $n > 6$ плоскость можно разбить на выпуклые n-угольники?

Определения. Разбиения плоскости на многоугольники M_j будем называть *паркетами*. Если все M_j – *выпуклые* и у каждого M_j число сторон не меньше m (у разных M_j число сторон может быть разным), назовем паркет *m-паркетом.*

5. Докажите, что m-паркеты существуют при любом m.

6. Пусть П – произвольный 7-паркет из многоугольников M_j. Верны ли тогда следующие два утверждения?

a. Для любого $D > 0$ среди M_j найдется многоугольник с диаметром больше D.

b. Для любого $s > 0$ среди M_j найдется многоугольник с площадью меньше s.

Определения. Разбиения многоугольников на многоугольники M_j будем называть *мозаиками*. Пусть D_j – диаметры, а s_j – площади многоугольников M_j, и пусть диаметры ограничены сверху числом D, а площади отделены от 0 числом s:

$$D_j \le D, \quad s_j \ge s > 0 \quad \text{при всех } j. \tag{$*$}$$

Мозаику из многоугольников M_j назовем тогда (D, s)-*мозаикой*. Если условия $(*)$ выполняются для паркета из многоугольников M_j, назовем его (D, s)-*паркетом*.

7. Пусть многоугольники M_j, образующие (D, s)-мозаику, покрывают круг K радиуса R; k – число многоугольников, имеющих общие точки с K; k^* – число многоугольников, имеющих общие точки с границей K. Докажите, что тогда

$$k^*/k \le c/R,$$

где c – константа, зависящая от D и s (можно взять $c = 4D^3/s$).

Основные задачи

8. a) Докажите, что при $n > 6$ плоскость нельзя выложить выпуклыми n-угольниками, если их диаметры ограничены, а площади отделены от 0.

b) Докажите, что плоскость нельзя выложить выпуклыми многоугольниками с числом сторон больше 6 у каждого многоугольника, если их диаметры ограничены, а площади отделены от 0. Короче говоря, (D, s)-паркет не может быть 7-паркетом.

Характеристика $\chi(M)$ многоугольника M Для произвольного многоугольника M выкрасим в *черный* цвет углы M, *меньшие* π, а для углов, *больших* π (такие углы существуют, если многоугольник M – невыпуклый), выкрасим дополнительные к ним (*внележащие*) углы M в *белый* цвет.

Вычтем из суммы черных (внутренних, меньших π) углов многоугольника M сумму белых (внележащих, меньших π) углов M.

Разность назовем *характеристикой* многоугольника M и обозначим ее символом $\chi(M)$.

9. Вершины многоугольника M, к которым прилежат черные и белые углы, будем называть *выступами* и *вмятинами* соответственно. Чему равна характеристика невыпуклого $(p+m)$-угольника M с p выступами и m вмятинами?

10. Докажите, что никакой выпуклый многоугольник V нельзя разбить на конечное число k невыпуклых многоугольников M_j с неположительными характеристиками $\chi(M_j)$, $1 \le j \le k$.

11. Докажите следующие утверждения:

a) Для любого $n > 1$ *правильный* треугольник T можно разбить на три *равных* $(2n-1)$-угольника с характеристикой π, а также на три *равных* $2n$-угольника с характеристикой 2π.

b) Для любого нечетного $n > 3$ треугольник можно разбить на девять n-угольников с характеристикой 3π.

c) Треугольник нельзя разбить ни на какое конечное число k многоугольников M_j с характеристиками $\chi_j > 3\pi$, $1 \le j \le k$.

12. Докажите следующие утверждения:

a) Никакой многоугольник M с положительной характеристикой χ нельзя разбить на конечное число k многоугольников M_j с неположительными характеристиками $\chi(M_j)$, $1 \le j \le k$. Никакой многоугольник с характеристикой $\chi \le 0$ нельзя разбить на k многоугольников M_j с характеристиками $\chi(M_j) < \chi$, $1 \le j \le k$.

b) Никакой многоугольник M с характеристикой $\chi = -\pi$ нельзя разбить на $k > 1$ многоугольников M_j с отрицательными характеристиками $\chi(M_j)$, $1 \le j \le k$.

c) Никакой многоугольник M с характеристикой $\chi = -r\pi < 0$ нельзя разбить на $k > r$ многоугольников M_j с отрицательными характеристиками $\chi(M_j)$, $1 \le j \le k$.

13. Докажите, что при любом $n > 1$ (а в случае $\chi = 3\pi$ или 4π – при любом $n > 2$) плоскость можно разбить и на равные $(2n-1)$-угольники с характеристикой $\chi = \pi$ или 3π, и на равные $2n$-угольники с характеристикой $\chi = 0$, 2π или 4π.

14. Существуют ли (D, s)-паркеты, составленные из многоугольников M_j

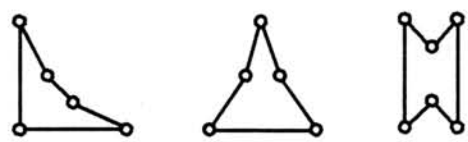
a) с характеристиками $\chi_j > 4\pi$? b) с характеристиками $\chi_j < 0$?

15. Докажите, что плоскость нельзя замостить многоугольниками M_j с характеристиками $\chi(M_j) \ge 5\pi$, если число вершин u_j и диаметры D_j многоугольников M_j ограничены сверху, а их площади s_j отделены от 0: $u_j \le U$, $D_j \le D$, $s_j \ge s > 0$.

16. Докажите, что плоскость нельзя замостить многоугольниками M_j с характеристиками $\chi(M_j) < 0$, если число вершин u_j и диаметры D_j многоугольников M_j ограничены сверху, а их площади s_j отделены от 0.

Эквивалентность. Последовательность $\Pi(M)$ Два $(p+m)$-угольника с одной и той же последовательностью p выступов и m вмятин назовем *эквивалентными*.

Пусть $\phi_1, \ldots, \phi_n$ – последовательные углы n-угольника M. Классу n-угольников, эквивалентных M, сопоставим периодическую последовательность $\Pi(M)$ из плюсов и минусов – с периодом, состоящим из знаков разностей $\pi - \phi_j$, $1 \le j \le n$, так что плюсы соответствуют выступам, а минусы – вмятинам n-угольника M.



Для многоугольников на рисунке получатся последовательности

$$(--+++),\quad (-+-++),\quad (-++-++),$$

так здесь и далее обозначаются последовательности с периодами

$$--+++,\qquad -+-++,\qquad -++-++.$$

Замечание Класс многоугольников, эквивалентных M, однозначно восстанавливается по периоду последовательности $\Pi(M)$. Подчеркнем: именно по периоду, а не по самой последовательности $\Pi(M)$. Например, последовательности с периодами

$$\Pi = -+-++ \quad \text{и} \quad \Pi' = -+-++-+-++-+-++$$

отвечают неэквивалентным многоугольникам M и M', хотя период Π' – это утроенный период Π, так что $\Pi(M) = \Pi(M')$.

Отказавшись от условия $(*)$, но рассматривая только такие паркеты, что *с каждым кругом пересекается лишь конечное число многоугольников,* зададимся вопросом:

Для каких M существует паркет из многоугольников, эквивалентных M?

Пока он решен не полностью, и в задачах 17 и 18 не все ответы известны.

17. a) Для каких из трех многоугольников M на рисунке существует паркет из многоугольников, *эквивалентных* M?

b) Существует ли паркет из эквивалентных 7-угольников M_j с последовательностью $\Pi(M_j) = (++--++-)$?

18. Какие из следующих утверждений верны?

a) Для существования паркета из многоугольников, эквивалентных M, не является необходимым, но достаточно, чтобы последовательность $\Pi(M)$ содержала три плюса подряд, т.е. чтобы у M какие-нибудь три выступа не были разделены вмятинами.

b) Если в $\Pi(M)$ нет трех плюсов подряд, но содержатся три минуса подряд, то не существует паркета из многоугольников, эквивалентных M.

c) Если в $\Pi(M)$ нет двух минусов подряд, но $\Pi(M)$ содержит идущие подряд пять знаков $++-++$, то существует паркет из многоугольников, эквивалентных M.

d) Если в $\Pi(M)$ нет трех плюсов подряд, но $\Pi(M)$ содержит серию из идущих подряд четырех знаков $--+-$, то не существует паркета из многоугольников, эквивалентных M.

e) Если в $\Pi(M)$ нет трех плюсов подряд и $\Pi(M) \neq (++-++-)$, то не существует паркета из многоугольников, эквивалентных M, в котором к каждой вершине примыкают минимум три многоугольника.

f) Если в $\Pi(M)$ нет трех плюсов подряд и $\chi(M) < 0$, то не существует паркета из многоугольников, эквивалентных M.

Дробные части степеней

А. Я. Белов & А. А. Егоров & С. А. Дориченко

Общая постановка задачи.

Пусть α — действительное число, $|\alpha| > 1$. Что можно сказать о множестве предельных точек дробных частей степеней α?

Предварительные задачи.

1. Найдите сотую десятичную цифру после запятой числа

$$\textbf{а)}\ (2+\sqrt{3})^{1000};\quad \textbf{б)}\ (2+\sqrt{5})^{1000};\quad \textbf{в)}\ (2+\sqrt{5})^{2001}.$$

2. Докажите, что последовательность $\{1{,}5^n\}$ не имеет предела.

Серия А. Дробные части степеней произвольных чисел.

А1. Докажите, что существует такое $\alpha > 1$, что при всех n выполняется неравенство $\frac{1}{3} < \{\alpha^n\} < \frac{2}{3}$

А2. Пусть $S \subset \mathbb{N}$ — бесконечное подмножество натурального ряда. Тогда найдётся такое α, что множество $\{a \mid a = [\alpha^n]\}$ имеет бесконечное пересечение с S.

А3. Пусть дана последовательность отрезков $[a_n, b_n]$, $0 \leqslant a_n < b_n \leqslant 1$, причем длина каждого из них не меньше 10^{-6}. Докажите, что найдется такое x, что $\{x^n\}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ лежит в $[a_n, b_n]$.

А4. Верно ли утверждение предыдущего пункта, если среди отрезков $[a_n, b_n]$ имеются отрезки сколь угодно малой длины?

А5.** Докажите, что для любого $\beta \in [0, 1]$, существует такое α, что $\lim\limits_{n\to\infty} \{\alpha^n\} = \beta$.

Серия В. Числа Пизо.

В1. Докажите, что десятичная запись числа $\{(3+\sqrt{7})^{3n}\}$ начинается с n девяток.

В2. Докажите, что не существует предел

$$\textbf{а)}\ \lim_{n\to\infty}\{(4+\sqrt{7})^n\};\quad \textbf{б)}\ \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{3+\sqrt{7}}{3}\right)^n\right\}.$$

Обозначения. Ближайшее целое число к числу α обозначим символом $[[\alpha]]$, а расстояние от числа α до ближайшего к нему целого числа — символом $\{\{\alpha\}\}$.

В3. Пусть α — рациональное нецелое число, большее 1. Докажите, что последовательность $\{\{\alpha^n\}\}$

а) не стремится к 0; **б)** не имеет предела.

В4. Пусть $\alpha = \sqrt[n]{m}$ — иррационально. Может ли $\lim\limits_{n\to\infty} \{\{\alpha^n\}\} = 0$?

В5. Пусть $\alpha > 1$ — вещественный иррациональный корень квадратного трехчлена $x^2 + bx + c$, где a, b — целые числа. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \{\{\alpha^n\}\} = 0$ тогда и только тогда, когда модуль второго корня квадратного трехчлена меньше 1.

В6. Пусть $\alpha > 1$ — вещественный иррациональный корень квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, где a, b и c — целые взаимно простые числа и $a > 1$. Возможно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} \{\{\alpha^n\}\} = 0$?

В7. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — все корни многочлена степени k с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Докажите, что сумма $\alpha_1^n + \cdots + \alpha_k^n$ является целым числом при любом натуральном n, если **а)** $k = 2$; **б)** $k = 3$; **в)** k — любое натуральное число.

В8. Пусть α – наибольший действительный корень многочлена

$$x^3 - x - 1 = 0$$

Докажите, что расстояние от числа α^n до ближайшего целого стремится к нулю.

В9. Пусть α – наибольший действительный корень многочлена

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 1 = 0$$

Найдите 90 знаков после запятой у чисел **а)** α^{2000}; **б)** α^{2001}.

Определение 1. Число α называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Наименьшая степень такого многочлена называется степенью алгебраического числа α.

Определение 2. Вещественное число $\alpha > 1$ называется *числом Пизо*, если оно является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, причем все остальные корни этого многочлена (в том числе и комплексные) по модулю строго меньше 1.

B10. Пусть α — число Пизо. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\{\{\alpha^n\}\} = 0$.

B11*. Докажите, что для каждого натурального k найдется неприводимый многочлен степени k с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, один из корней которого больше 1, а модули остальных корней меньше 1. Попробуйте привести примеры таких многочленов (для каждого k).

Замечание. Для решения следующих трудных задач B12, B13 о числах Пизо могут быть полезными приводимые ниже задачи B16 — B25.

B12. Пусть $\alpha > 1$, причём $\lim\limits_{m\to\infty}\{\{\alpha^m\}\} = 0$. Кроме того, пусть $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, где $a_i \in \mathbb{Z}$, причём n — минимальное число, такое что α — корень уравнения n-й степени с целыми коэффициентами. Тогда все прочие корни этого уравнения по модулю меньше 1.

B13. Распространите результат задачи B12 на корни уравнений вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, где a_i — взаимно простые в совокупности. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty}\{\{\alpha^n\}\} = 0$, то $a_0 = 1$.

B14. Докажите, что если α — алгебраическое число и $\lim\limits_{n\to\infty}\{\{\alpha^n\}\} = \beta$, то $\beta = 0$.

B15*. Существует ли такое неалгебраическое число α, что $\lim\limits_{n\to\infty}\{\{\alpha^n\}\} = 0$?

* * *

B16. Докажите, что многочлен из определения 1 *неприводим* (то есть не раскладывается в произведение двух многочленов ненулевой степени с целыми коэффициентами) и является *минимальным* (по степени) среди всех многочленов с целыми коэффициентами, имеющих корнем α.

B17. Пусть α — корень уравнения $a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k = 0$. Обозначим $u_n = \alpha^n, v_n = [[\alpha^n]]$. Докажите, что $a_0u_n + a_1u_{n-1} + \cdots + a_ku_{n-k} = 0$ при $n \geqslant k$, а если $\lim\limits_{n\to\infty}\{\{\alpha^n\}\} = 0$, то $a_0v_n + a_1v_{n-1} + \cdots + a_kv_{n-k} = 0$ для всех достаточно больших n.

B18. Пусть $b_n = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i\lambda_i^n$, где все $a_i \neq 0$ и числа $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ попарно различны. Обозначим $\lambda = \max|\lambda_i|$. Докажите, что существует такое $\varepsilon > 0$, что при всех n выполнено

$$\max(|b_n|, |b_{n+1}|, \ldots, |b_{n+k}|) > \varepsilon\lambda^n$$

(ε зависит от k и наборов $\{a_i\}$, $\{\lambda_i\}$, но не от n).

B19. Докажите, что последовательность $a_n = \sum \beta_i\alpha_i^n$, где $\beta_i \neq 0$ и числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ попарно различны, имеет предел при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда при каждом i либо $|\alpha_i| < 1$, либо $\alpha_i = 1$.

Определение 3. *Линейной рекуррентой порядка* k называется последовательность чисел $\{x_n\}$ такая, что при всех n выполняется соотношение

$$a_0x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + \cdots + a_kx_n = 0.$$

Числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ называются *коэффициентами* данной линейной рекурренты. Степенная функция $x_n = \lambda^n$ есть линейная рекуррента первого порядка, а последовательность Фибоначчи — второго.

B20. Решите задачи B21 – B25 для $k = 2$.

B21. а) Докажите, что последовательность $\{x_n = \lambda^n\}$ есть линейная рекуррента порядка k с коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_k$ тогда и только тогда, когда λ есть корень *характеристического уравнения*

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k = 0.$$

б) Докажите, что если характеристическое уравнение не имеет кратных корней, то линейная рекуррента u_k с коэффициентами $a_0, \ldots, a_k$ имеет вид $u_n = \sum_s \beta_s \lambda_s^n$, где λ_s суть корни характеристического уравнения.

Определение 4. Функции $f_1, \ldots, f_k$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\mu_1, \ldots, \mu_k$, не все равные нулю, такие, что $\sum_i \mu_i f_i \equiv 0$.

B22. Докажите, что если функции $f_1, \ldots, f_k$ линейно зависимы с комплексными коэффициентами и принимают рациональные значения, то они линейно зависимы с рациональными коэффициентами.

B23. Последовательность чисел u_n можно рассматривать как функцию $u(n)$ из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{C}$. Положим $u_s(n) = u(n+s)$. Докажите, что последовательность u_n есть линейная рекуррента порядка k тогда и только тогда, когда функции $u_0(n), \ldots, u_k(n)$ линейно зависимы.

B24. а) Пусть комплексные числа $\beta_1, \ldots, \beta_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ таковы, что при всех натуральных n число

$$\sum_i \beta_i \alpha_i^n$$

целое, $\beta_1 \neq 0, \ldots, \beta_k \neq 0$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ненулевые попарно различные числа. Докажите, что числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ являются корнями некоторого уравнения k-ой степени с целыми взаимно простыми коэффициентами.

б) Докажите, что старший коэффициент этого уравнения равен 1.

B25. Могут ли все члены линейной рекурренты $a_0 x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \cdots + a_k x_n = 0$ порядка k с целыми коэффициентами быть целыми, если $a_0 > 1$ и многочлен $a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k$ неприводим?

Серия С. Первые цифры степеней.

C1. Докажите, что последовательность первых цифр чисел 2^{2^n} непериодична.

Указание. Рассмотрите последовательность $\{2^n \lg 2\}$.

C2. Пусть $\lg \alpha$ — иррациональное число. Докажите, что

а) последовательность первых цифр чисел α^{2^n} непериодична;

б) при некоторых α последовательность первых цифр α^{10^n} периодична.

C3. Постарайтесь указать как можно большее γ, что последовательность первых цифр α^{γ^n} была бы непериодичной для всех α, кроме счётного множества. Рассмотрите случаи $\gamma = 3, 4, \ldots, 9$.

Пусть $a_k \in (0,1)$ — последовательность вещественных чисел такая, что $a_{n+1} = \{2a_n\}$.

C4. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ периодична (начиная с некоторого номера) тогда и только тогда, когда $a_0 \in \mathbb{Q}$.
C5. Пусть a_0 иррационально.
а) Докажите, что при любом k найдётся такое n, что $|a_{n+k} - a_n| > 0,1$.
б) Найдите максимальное ε, такое, что для любого k найдётся n, для которого $|a_{n+k} - a_n| > \varepsilon$.
C6. Обобщите результаты пунктов C4 – C5 для последовательностей, заданных условием вида $a_{n+1} = \{ma_n\}$.

Дополнительные задачи

При решении следующих задач может оказаться полезной следующая теорема:
Теорема Руше. Если два многочлена $f(z)$ и $g(z)$ при всех комплексных z, лежащих на окружности $|z| = R$, удовлетворяют неравенству

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|,$$

то внутри круга $|z| < R$ многочлены $f(z)$ и $g(z)$ имеют одинаковое количество корней.

Корни подсчитываются с учётом кратности; так, уравнение $z^n = 0$ имеет корень $z = 0$, кратность которого равна n. Поэтому, например, если для многочлена $g(z)$ выполнено неравенство

$$|z^n - g(z)| < |z^n| + |g(z)|$$

при всех z таких, что $|z| = 1$, то внутри круга $|z| < 1$ многочлен $g(z)$ имеет ровно n корней (с учётом кратности).
D1. Докажите, что в каждом интервале $(k; k+1)$, где $k \in \mathbb{N}$, найдётся:
а) число Пизо степени 2;
б) число Пизо степени 3;
в) число Пизо степени $n \geqslant 4$;
г) докажите, что для фиксированных натуральных чисел n и k количество чисел Пизо степени n на интервале $(k; k+1)$ конечно.

Общий вопрос. Пусть $\alpha > 1$ — алгебраическое число, $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Верно ли, что множество предельных точек последовательности $\{\alpha^n\}$ бесконечно?
E1. Этот вопрос для $\alpha = \frac{3}{2}$.
E2. Этот же вопрос для произвольного рационального $\alpha > 1$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$.
E3. Этот же вопрос для $\alpha = \sqrt{2}$.
E4. Этот же вопрос для произвольного алгебраического $\alpha > 1$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$.
E5. Пусть $\alpha > 1$ — алгебраическое число. Известно, что при некотором λ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \{\lambda\alpha^n\}$. Докажите, что α — число Пизо.

Экстремальные графы

С.Берлов, Д.Карпов

Широко известным типом задач теории экстремальных графов является вопрос о нахождении $ex(v, H)$ – наибольшего количества ребер, которое может быть в графе, имеющем v вершин и не содержащем запрещенный подграф H.

Определение. Для любого графа H через $ex(v, H)$ обозначим наибольшее возможное количество ребер, которое может быть в графе с v вершинами, не содержащем подграфа H.

Через K_n мы будем обозначать полный граф с n вершинами, а через $K_{m,n}$ – полный двудольный граф, в долях которого m и n вершин.

Оценки

1) Найдите наибольшее количество ребер в графе с v вершинами, не содержащем "звезды" с n вершинами.

2) Найдите $ex(v, K_3)$.

3) Найдите наибольшее количество ребер в графе с n вершинами, в котором нет двух треугольников с общим ребром.

4) Докажите, что

$$ex(v, K_{2,2}) \leqslant \frac{v(1+\sqrt{4v-3})}{4}.$$

5) В долях двудольного графа, не содержащего $K_{2,n}$, w и $v-w$ вершин. Докажите, что в нем не более, чем

$$\frac{v+\sqrt{v^2+8(n-1)(v-2)w(v-w)}}{4}$$

ребер.

6) Докажите, что

$$ex(v, K_{2,n}) \leqslant \frac{v(1+\sqrt{1+4(n-1)(v-1)})}{4}.$$

7) Докажите, что

$$ex(v, K_{m,n}) \leqslant \frac{1}{2}(m-1)^{1/n}v^{2-1/n}+\frac{nv}{4}.$$

Примеры.

8) Докажите, что существует бесконечно много v таких, что

$$\frac{\sqrt{nv^3}}{2}+\frac{nv}{4} > ex(v, K_{2,n+1}) > \frac{\sqrt{nv^3}}{2}-\frac{nv}{4}.$$

9) Докажите, что существует бесконечно много v таких, что

$$ex(v, K_{2,n+1}) > \frac{\sqrt{nv^3}}{2}-\sqrt{nv}.$$

10) Докажите, что для нечетного простого p

$$ex(p^3, K_{3,3}) > \frac{p^5 - p^4}{2}.$$

Упаковка правильных многогранников

Алексей Таламбуца и Аркадий Скопенков

Проблема (P, Q). Даны два выпуклых многогранника P и Q. При каком наибольшем $p = p(P, Q)$ в многограннике с ребром 1, гомотетичном Q, можно поместить многогранник с ребром p, гомотетичный P?

В этом цикле задач правильный тетраэдр и правильный октаэдр сокращенно называются тетраэдром и октаэдром. Их построение напоминалось на представлении задачи.

Задача 1. Решите проблему a) (тетраэдр, куб); a') (октаэдр, тетраэдр); b) (октаэдр, куб); b') (куб, октаэдр); c)* (куб, тетраэдр); c')* (тетраэдр, октаэдр).

Проблема (Q, n). Дан правильный многогранник Q. При каком наибольшем $p = p(Q, n)$ в многограннике с ребром 1, гомотетичном Q, можно поместить n непересекающихся тетраэдров с ребром p?

Задача 2. Решите проблему a) (куб, 2); b) (октаэдр, 2); c)* (тетраэдр, 5); d)* (тетраэдр, 2); e)* (куб, 3).

Задача 3. Для каждой высоты тетраэдра проведено $n+1$ перпендикулярных ей плоскостей, делящих ее на равные части. Докажите, что проведенные плоскости разбивают тетраэдр на тетраэдры и октаэдры. Чему равно число тех и других?

Промежуточный финиш. Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его грани — одинаковые правильные многоугольники и двугранные углы при всех ребрах равны. Далее все многогранники подразумеваются правильными.

Следующие задачи являются подсказками.

Задача 4. Докажите, что существует

a) правильный додекаэдр (т.е. многогранник, каждая грань которого — пятиугольник).

b) правильный икосаэдр (т.е. многогранник, в каждой вершине которого сходится 5 ребер).

Не существует других типов правильных многогранников, кроме пяти построенных (этот факт не используется в данной задаче).

Задача 5. Для каждого из пяти построенных правильных многогранников существует:

a) сфера, проходящая через все его вершины (описанная сфера);

b) сфера, касающаяся всех его граней (вписанная сфера).

Задача 6. Пусть в правильный многогранник Q с ребром 1 помещен правильный многогранник P. Докажите, что если

а) четыре некомпланарные вершины многогранника P являются вершинами многогранника Q, или

а') четыре грани многогранника P являются гранями многогранника Q,

то ребро многогранника P равно $p(P, Q)$.

Задача 7. Решите проблему а) (куб, додекаэдр); а') (икосаэдр, октаэдр); b) (тетраэдр, додекаэдр); b') (икосаэдр, тетраэдр).

Задача 8. Получите оценки числа $p(P, Q)$ для оставшихся пар $P \neq Q$ (используйте рисунки!).

Задача 9. а) Если многогранник Q находится внутри сферы диаметра d, то $p(Q, 2) \leqslant d\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

b) Для любого многогранника Q с ребром 1 (кроме тетраэдра) $p(Q, 2) = d\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, где d есть диаметр описанной около Q сферы.

с) Решите проблемы (додекаэдр, 2) и (икосаэдр, 2).

Задача 10. Получите оценки числа $p(Q, n)$ для оставшихся пар Q, n.

Египетские дроби

К. Кохась

Задачу представляли А. Болтенков, В. Бугаенко, К. Кохась

1. Условия задач

Одним из древнейших письменных документов человечества является т. наз. *папирус Ринда*, датируемый ориентировочно 1600 г. до н. э. Замечательно, что это также древнейшее математическое сочинение. Древние египтяне записывали рациональные дроби как суммы чисел, обратных натуральным: $2/5 = 1/3 + 1/15$, $6/7 = 1/2 + 1/3 + 1/42$ и т. д. Папирус содержит математические задачи и таблицы, представляющие дроби $2/(2n+1)$, со знаменателями от 5 до 331 в виде суммы дробей с числителем 1.

Дроби с числителем единица мы будем называть *египетскими дробями*, а разложение рационального числа в сумму попарно различных египетских дробей — *египетской суммой*. Мы будем рассматривать только положительные рациональные числа.

1.1 а) Для каких натуральных N единицу можно представить в виде суммы N различных египетских дробей?

б) Существуют ли египетские разложения единицы, в которых все знаменатели нечётны?

1.2 а) Докажите, что любое положительное рациональное число m/n может быть представлено в виде суммы нескольких различных египетских дробей.

б) Докажите, что если $m < n^2$, то существует египетское разложение дроби m/n, в котором не более $2^n - 1$ слагаемых.

в) Докажите, что всякую дробь $m/n < 1$ можно разложить в сумму не более $\min(m, \log_2 mn)$ различных египетских дробей.

г) Докажите, что всякую дробь $m/n < 1$ можно разложить в сумму различных египетских дробей со знаменателями, не превосходящими n^2.

1.3 Докажите, что при каждом s уравнение $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_s} = 1$ в натуральных числах имеет лишь конечное множество решений.

1.4 Докажите, что для любого натурального n существует такой интервал $(a_n, b_n) \subset (0, 1)$, что все рациональные числа из этого интервала не представимы в виде суммы не более чем n египетских дробей.

1.5 а) Может ли сумма нескольких последовательных египетских дробей (знаменатели которых являются последовательными натуральными числами) быть целым числом?

б) Тот же вопрос, но знаменатели должны являться последовательными нечётными натуральными числами.

в) Тот же вопрос, но знаменатели должны образовывать произвольную арифметическую прогрессию.

г) Докажите,что равенство $\frac{1}{a} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+m}$ возможно лишь при $a = n+1$, $m = 1$.

1.6 Пусть f_n — числа Фибоначчи. Докажите, что при всех m, n $\quad \frac{1}{f_{n-1}f_n} = \frac{1}{f_m f_{m+1}} + \sum_{i=n}^{m} \frac{1}{f_{i-1}f_{i+1}}$.

1.7 Верно ли, что для каждой правильной дроби вида $\frac{n}{19}$, $2 \leqslant n \leqslant 18$, существует египетское разложение со знаменателями не превосходящими 95?

Малые числители

1.8 Найдите египетское разложение $\frac{2}{2n+1}$ в сумму наименьшего числа слагаемых.

1.9 Докажите, что представление числа $\frac{3}{n}$ в виде суммы двух египетских дробей возможно в том и только том случае, когда n имеет множитель, дающий остаток 2 при делении на 3.

1.10 Пусть $a_n = \#\{a : \exists m_1, m_2 \quad \frac{a}{n} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\}$ Докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n $\; a_n < n^\varepsilon$.

Открытая проблема (Erdös, Straus). Уравнение

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \tag{1}$$

при $n > 3$ разрешимо в натуральных числах. Вычислительный эксперимент для $n < 10^8$ подтверждает эту гипотезу.

1.11 Докажите, что уравнение (1) разрешимо при всех n, кроме, быть может, $n \equiv 1, 121, 169, 289, 361, 529 \pmod{840}$.

1.12 Докажите, что число 1 нельзя, а число 1/2 можно представить в виде конечной суммы чисел, обратных квадратам различных натуральных чисел.

1.13 Пусть u_n — число способов разложить $1/n$ в сумму не обязательно различных египетских дробей, $\{u_n\} = \{1, 2, 2, 3, 2, 5, 2, 4, 3, 5, \dots\}$. Найдите явную формулу для $\{u_n\}$.

2. Промежуточный финиш

2.1 Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \frac{1}{i_1 i_2 \dots i_k} = n,$$

где суммирование ведется по всевозможным наборам чисел $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $k = 1$, 2, ..., n, из множества $\{1; 2; \dots; n\}$.

Способы разложения на египетские дроби

В этом разделе мы рассматриваем различные способы получить представление рационального числа $\frac{a}{b}$ в виде египетской суммы.

Определение 2.1. Жадный алгоритм. *Выберем наибольшую дробь вида* $\frac{1}{n_1}$, *которая не превосходит* $\frac{a}{b}$. *Потом возьмем наибольшую дробь вида* $\frac{1}{n_2}$, $n_2 > n_1$, *для которой* $\frac{1}{n_2} \leqslant \frac{a}{b} - \frac{1}{n_1}$. *Потом возьмем наибольшую дробь вида* $\frac{1}{n_3}$, $n_3 > n_2$, *для которой* $\frac{1}{n_3} \leqslant \frac{a}{b} - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}$. *И так далее.*

Если на каждом шаге мы выбираем нечетные n_i, *то полученный метод будем называть* нечетным жадным алгоритмом.

2.2 (Леонардо Пизанский (Фибоначчи), 1202) Докажите, что жадный алгоритм в какой-то момент остановится.

2.3 Если $\frac{a}{b}$ — правильная дробь, то она может быть представлена в виде

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_1 q_2 q_3} + \dots + \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_n},$$

где q_1, q_2, ..., q_n — целые и положительные числа, причем $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \dots \leqslant q_n$.

2.4 Пусть $0 < \alpha < 1$, $\alpha = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots$ — разложение, полученное при помощи жадного алгоритма. Докажите, что $d_{k+1} \geqslant d_k^2 - d_k + 1$ при всех k.

2.5 Докажите, что если $\alpha = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots$, где при всех k $\quad d_{k+1} \geqslant d_k^2 - d_k + 1$, причем в бесконечном числе случаев выполнено строгое неравенство, то число α иррационально.

2.6 Зафиксируем натуральное n. Пусть $1 = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_n}$. Докажите, что $d_n \leqslant r_n - 1$, где последовательность r_n (*последовательность Сильвестра*) задана начальным условием $r_2 = 2$, и рекуррентным соотношением $r_{n+1} = r_n^2 - r_n + 1$.

Открытая проблема. Докажите, что нечетный жадный алгоритм завершается за конечное число шагов, если знаменатель исходного числа нечетен.

Определение 2.2. Разрешение конфликтов. *Пусть* $\frac{a}{b} < 1$. *Положим*

$$\frac{a}{b} = \underbrace{\tfrac{1}{b} + \tfrac{1}{b} + \cdots + \tfrac{1}{b}}_{a \text{ слагаемых}}.$$

Когда несколько слагаемых в разложении совпадают, будем исправлять эту «неправильную» ситуацию. Каждый шаг алгоритма состоит в замене каких-то слагаемых другими. Будем рассматривать следующие разновидности этого метода.

- Метод парных замен.

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y} \longrightarrow \begin{cases} \frac{2}{y}, & \text{если } y \text{ — четно,} \\ \frac{2}{y+1} + \frac{2}{y(y+1)}, & \text{если } y \text{ — нечетно.} \end{cases}$$

- Метод подразбиения. *Если какое-либо слагаемое* $\frac{1}{y}$ *встречается больше одного раза, выполним одну замену*

$$\frac{1}{y} \longrightarrow \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y(y+1)}$$

2.7 Докажите, что алгоритм парных замен в какой-то момент остановится.

2.8 Докажите, что если, начав с числа $\frac{1}{n}$, мы на каждом шаге подразбиваем все дроби, входящие в полученное разложение, то после каждого шага будет получаться египетская сумма.

2.9 а) Докажите, что можно действовать так, что в какой-то момент алгоритм подразбиений остановится.

б) Докажите, что алгоритм подразбиений в какой-то момент остановится в любом случае.

Определение 2.3. Метод двоичного разложения. *Пусть* $\frac{a}{b} < 1$. *Разложим число* $\frac{a}{b}$ *в бесконечную двоичную дробь. Она будет смешанной периодической. Пусть период имеет длину* n. *Можно считать, что начальная непериодическая часть имеет длину больше* n. *Каждой единице, предшествующей первому периоду, соответствует дробь вида* $\frac{1}{2^k}$. *Каждой единице из периода также соответствует некоторая египетская дробь.*

2.10 Какая египетская дробь соответствует единицам из периода двоичной записи $\frac{a}{b}$?

Аналогичный метод работает и в системах с другими основаниями, например, в шестиричной. Проблемы с $\frac{4}{6}$ и $\frac{5}{6}$ решаются просто: $\frac{4}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$, $\frac{5}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$. В десятичной системе счисления этот метод непосредственно на работает, поскольку не удается представить числа 4, 7, 8, 9 в виде суммы различных делителей числа 10. Назовем число N *практичным*, если все натуральные числа, не превосходящие N (в случае нечетного N — все кроме 2) можно представить в виде суммы нескольких (быть может, одного) различных делителей числа N. Пример четного практичного числа — 6, пример нечетного практичного числа — 945. Благодаря задаче 1.8, мы можем с минимальными изменениями распространить метод двоичного разложения на случай, когда основание системы счисления — практичное число. Отметим, что нечетных практичных чисел бесконечно много:

2.11 Если $N > 5$ — нечетное практичное число, то $3N$ — тоже практичное число.

Определение 2.4. Метод двоичного остатка. *Для разложения числа a/b, $(b \neq 2^n)$ в египетскую сумму выберем число $p = 2^k > b$. Разделим ap на b с остатком: $ap = sb + r$. Разложим r/p, s/p в сумму обратных степеней двойки, и получим требуемое разложение $\frac{a}{b} = \frac{s}{p} + \frac{1}{b} \cdot \frac{r}{p}$.*

Этим способом получаются разложения с четными знаменателями.

2.12 Докажите, что любое рациональное число с нечетным знаменателем представимо в виде египетской суммы с нечетными знаменателями.

2.13 а) Докажите, что любое число меньше $n!$ представимо в виде суммы менее n различных делителей $n!$.

б) Докажите, что всякую дробь $m/n < 1$ можно разложить в сумму не более $C\frac{\log n}{\log\log n}$ различных египетских дробей.

Определение 2.5. Обратный жадный метод. *Пусть n/m — несократимая дробь, $m = qr$, $(q, r) = 1$, $q > 1$. Пусть x, y — наименьшие натуральные решения уравнения $nx - qy = r$. Положим $\frac{n}{qr} = \frac{1}{qx} + \frac{y}{rx}$. Для дроби $\frac{y}{rx}$ повторим выполнение алгоритма.*

2.14 Докажите, сходимость обратного жадного метода.

2.15 Докажите, что если в обратном жадном методе на каждом шаге брать $q = 1$, то получится такой же результат, как при выполнении жадного алгоритма.

Определение 2.6. Метод цепных дробей. *Разложим число $a/b < 1$ в цепную дробь и пусть $\frac{p_n}{q_n}$ — n-я подходящая дробь:*

$$\frac{a}{b} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}} \qquad \frac{p_n}{q_n} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Известно, что $\frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_6}{q_6} < \cdots \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \cdots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$, и разность любых двух соседних подходящих дробей — дробь с числителем ± 1. Пусть $\frac{p_{n,k}}{q_{n,k}} = \frac{p_{n-1}+kp_n}{q_{n-1}+kq_n}$ —

промежуточная дробь. *При $k = 0, 1, \ldots, a_{n+1}$ последовательность промежуточных дробей $\frac{p_{n,k}}{q_{n,k}}$ монотонно изменяется от $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ до $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, причем разности соседних членов этой последовательности — дроби с числителем $(-1)^n$. Таким образом,*

$$\frac{a}{b} = \sum_{k=1}^{a_2}\left(\frac{p_{1,k}}{q_{1,k}} - \frac{p_{1,k-1}}{q_{1,k-1}}\right) + \sum_{k=1}^{a_4}\left(\frac{p_{3,k}}{q_{3,k}} - \frac{p_{3,k-1}}{q_{3,k-1}}\right) + \sum_{k=1}^{a_6}\left(\frac{p_{5,k}}{q_{5,k}} - \frac{p_{5,k-1}}{q_{5,k-1}}\right) + \ldots$$

2.16 Докажите, что разность $\frac{p_{n,k}}{q_{n,k}} - \frac{p_{n,k-1}}{q_{n,k-1}}$ есть египетская дробь.

2.17 Докажите, что если в обратном жадном методе на каждом шаге полагать $r = 1$, то получится в точности метод цепных дробей.

2.18 Придумайте метод, дающий разложение $\frac{3}{25} = \frac{1}{10} + \frac{1}{50}$.

3. Не вошедшее

3.1 а) Докажите, что если p — простое число, большее 3, то числитель несократимой дроби, равной сумме

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1},$$

делится на p^2.

б) Докажите, что если p — простое число, большее 3, то числитель несократимой дроби, равной сумме

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^2},$$

делится на p.

в) Докажите, что если p — простое число, большее 3,

$$\frac{r}{s} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p},$$

то $s - r$ делится на p^3.

Отметим еще список «элементарных вопросов» из разных статей:

0. ([16]) Число a/b может лишь тогда быть разложено в египетскую сумму со знаменателями вида $\frac{1}{pm+q}$ (p, q — фиксированы, m меняется), если

$$\left(\frac{b}{(b,(p,q))}, \frac{p}{(p,q)}\right) = 1$$

1. Для дроби $0 < a/b < 1$ существует разложение с не более $O(\sqrt{\log b})$ (Vose). А в случае Эрдеша знаменатели могут не превосходить $4b\log^2 b \log\log b$ (Tenenbaum, Yokota). Есть числа, для которых требуется не менее $O(\log\log b)$ слагаемых.

2. Для каждой рациональной дроби a/b и $k \geqslant 2$ каждое достаточно большое натуральное число может быть k-м по максимальности знаменателем египетского разложения (Martin), т.е.

$$\forall a/b \forall k \geqslant 2 \exists N \forall n > N \exists t \geqslant k, x_1 > x_2 > \cdots > x_t, x_k = n, \frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_t}.$$

3. Каждое натуральное число, не превосходящее $\log x - \mathrm{const}$ равно египетской сумме со знаменателями не превосходящими x (Croot). Это потрясающий результат, ведь $\sum_{k=1}^{x} \frac{1}{k} = \log x + \gamma$.

4. Самый маленький максимальный знаменатель заключен в диапазоне $[O(b \log b), O(b \log^2 b)]$ (нижняя оценка достигается для простых b).

5. Если раскрасить натуральные числа в два цвета, верно ли что существует разбиение единицы в египетскую сумму со знаменателями одного цвета?

4. Численные примеры

1) Пример выполнения алгоритма подразбиения. Для краткости мы заменяем на очередном шаге сразу несколько повторяющихся дробей (они подчеркнуты).

$$\begin{aligned}
\tfrac{5}{2} &= \tfrac{1}{2} + \underline{\tfrac{1}{2}} + \underline{\tfrac{1}{2}} + \underline{\tfrac{1}{2}} + \underline{\tfrac{1}{2}} = \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \underline{\tfrac{1}{3}} + \underline{\tfrac{1}{3}} + \underline{\tfrac{1}{3}} + \tfrac{1}{6} + \underline{\tfrac{1}{6}} + \underline{\tfrac{1}{6}} + \underline{\tfrac{1}{6}} = \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \underline{\tfrac{1}{4}} + \underline{\tfrac{1}{4}} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \underline{\tfrac{1}{7}} + \underline{\tfrac{1}{7}} + \tfrac{1}{12} + \underline{\tfrac{1}{12}} + \underline{\tfrac{1}{12}} + \tfrac{1}{42} + \underline{\tfrac{1}{42}} + \underline{\tfrac{1}{42}} = \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \underline{\tfrac{1}{5}} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \underline{\tfrac{1}{8}} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \underline{\tfrac{1}{13}} + \tfrac{1}{20} + \underline{\tfrac{1}{20}} + \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{43} + \underline{\tfrac{1}{43}} + \tfrac{1}{56} + \\
&+ \underline{\tfrac{1}{56}} + \tfrac{1}{156} + \underline{\tfrac{1}{156}} + \tfrac{1}{1806} + \underline{\tfrac{1}{1806}} = \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \underline{\tfrac{1}{6}} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{43} + \tfrac{1}{44} + \\
&+ \tfrac{1}{56} + \tfrac{1}{57} + \tfrac{1}{72} + \tfrac{1}{156} + \tfrac{1}{157} + \tfrac{1}{182} + \tfrac{1}{420} + \tfrac{1}{1806} + \tfrac{1}{1807} + \tfrac{1}{1892} + \tfrac{1}{3192} + \tfrac{1}{24492} + \tfrac{1}{3263442} = \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \underline{\tfrac{1}{7}} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{1}{42} + \underline{\tfrac{1}{42}} + \tfrac{1}{43} + \\
&+ \tfrac{1}{44} + \tfrac{1}{56} + \tfrac{1}{57} + \tfrac{1}{72} + \tfrac{1}{156} + \tfrac{1}{157} + \tfrac{1}{182} + \tfrac{1}{420} + \tfrac{1}{1806} + \tfrac{1}{1807} + \tfrac{1}{1892} + \tfrac{1}{3192} + \tfrac{1}{24492} + \\
&+ \tfrac{1}{3263442} = \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \underline{\tfrac{1}{8}} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{43} + \underline{\tfrac{1}{43}} + \\
&+ \tfrac{1}{44} + \tfrac{1}{56} + \underline{\tfrac{1}{56}} + \tfrac{1}{57} + \tfrac{1}{72} + \tfrac{1}{156} + \tfrac{1}{157} + \tfrac{1}{182} + \tfrac{1}{420} + \tfrac{1}{1806} + \underline{\tfrac{1}{1806}} + \tfrac{1}{1807} + \tfrac{1}{1892} + \tfrac{1}{3192} + \\
&+ \tfrac{1}{24492} + \tfrac{1}{3263442} = \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \underline{\tfrac{1}{9}} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{43} + \tfrac{1}{44} + \\
&+ \underline{\tfrac{1}{44}} + \tfrac{1}{56} + \tfrac{1}{57} + \underline{\tfrac{1}{57}} + \tfrac{1}{72} + \underline{\tfrac{1}{72}} + \tfrac{1}{156} + \tfrac{1}{157} + \tfrac{1}{182} + \tfrac{1}{420} + \tfrac{1}{1806} + \tfrac{1}{1807} + \underline{\tfrac{1}{1807}} + \tfrac{1}{1892} + \\
&+ \underline{\tfrac{1}{1892}} + \tfrac{1}{3192} + \underline{\tfrac{1}{3192}} + \tfrac{1}{24492} + \tfrac{1}{3263442} + \underline{\tfrac{1}{3263442}} = \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{21} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{43} + \tfrac{1}{44} + \\
&+ \tfrac{1}{45} + \tfrac{1}{56} + \tfrac{1}{57} + \tfrac{1}{58} + \tfrac{1}{72} + \tfrac{1}{73} + \tfrac{1}{90} + \tfrac{1}{156} + \tfrac{1}{157} + \tfrac{1}{182} + \tfrac{1}{420} + \tfrac{1}{1806} + \tfrac{1}{1807} + \tfrac{1}{1808} + \\
&+ \tfrac{1}{1892} + \tfrac{1}{1893} + \tfrac{1}{1980} + \tfrac{1}{3192} + \tfrac{1}{3193} + \tfrac{1}{3306} + \tfrac{1}{5256} + \tfrac{1}{24492} + \tfrac{1}{3263442} + \tfrac{1}{3263443} + \tfrac{1}{3267056} + \\
&+ \tfrac{1}{3581556} + \tfrac{1}{10192056} + \tfrac{1}{10650056950806}
\end{aligned}$$

2) Пример выполнения обратного жадного алгоритма.

$$\frac{31}{311} = \frac{1}{93611} + \frac{30}{301} = \frac{1}{93611} + \frac{1}{688} + \frac{11}{112} = \frac{1}{93611} + \frac{1}{688} + \frac{1}{28} + \frac{1}{16}$$

Здесь на первом шаге $n = 31$, $q = 311$, $r = 1$ и мы решаем уравнение $31x - 311y = 1$. Наименьшее решение — $x = 301$, $y = 30$, что можно проверить либо перебором, либо при помощи стандартного способа решения с алгоритмом Евклида; $93611 = 301 \cdot 311$.

3) Вот пример разложения числа $4/n$ на 3 слагаемых, обобщение которого требует рассмотрений по модулю 29:

$$\frac{4}{3361} = \frac{1}{841} + \frac{1}{974690} + \frac{1}{282660104}.$$

Литература

[1] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. Изд. 4-е, М., 1965.

[2] Леман А. А. Сборник задач московских математических олимпиад. М., 1965.

[3] Зарубежные математические олимпиады. Под ред. Сергеева И. Н. М. 1987.

[4] Eppstein D. Ten algorithms for Egyptian fractions. Mathematica in Education and Research V.4 N.2 5–15 (1995)

[5] Beeckmans L. The splitting algorithm for Egyptian fractions. Journal of Number Theory, **43**, 173–185 (1993).

[6] Stewart B. M. Sums of distinct divisors. American Journal of Mathematics, V. 76, No. 4, 779–785 (1954).

[7] Amer. Math. Monthly V. 61 No. 3 (1954)

[8] Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н. Избранные задачи по вещественному анализу. 2-е изд. СПб. 2000.

[9] Brown K. S. Unit fraction partitions. www.seanet.com/˜ ksbrown/kmath332

[10] Brown K. S. Unit fractions and Fibonacci. www.seanet.com/˜ ksbrown/kmath315

[11] Brown K. S. Reverse greed for unit fractions.
www.seanet.com/˜ ksbrown/kmath150

[12] Brown K. S. Minimizing the denominators of unit fraction expansions. www.seanet.com/˜ ksbrown/kmath348.html

[13] Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. М. 1968

[14] Mordell L. J. Diophantine Equations. Academic Press. 1969. 287–290.

[15] Хинчин А.Я. Цепные дроби.

[16] Ижболдин О. Т., Курляндчик Л. Д. Разбиение единицы. Труды Санкт-Петербургского математического общества. т. 3, 235–243 (1995). Упрощенный вариант: Квант. 1987. №7. 48–52.

[17] Croot III E. S., Dobbs D. E., Friedlander J. B., Hetzel A. J., Pappalardi F. Binary Egyptian fractions.

[18] Квант №10 (1986), задача M989, 35–36.

[19] Erdös P., Graham R. L. Old and new problems and results in combinatorial number theory. 1980.

Игра Ричмана

В. Гуровиц, Е. Осьмова

Правила игры

Количество игроков: двое — Синий и Красный.

Игровое поле: ориентированный граф с такими двумя отмеченными вершинами — синей (b) и красной (r), что из каждой вершины v есть ориентированный путь хотя бы в одну из вершин b или r. Будем рассматривать только конечные графы (за исключением задач серии 2).

В некоторой вершине графа находится фишка.

Начальный капитал: Синий имеет B долларов, Красный — R долларов, где B и R — вещественные неотрицательные числа.

Ход: каждый игрок записывает на листе бумаги (в тайне от соперника) вещественное неотрицательное число, не превосходящее его текущий капитал. После этого игроки сравнивают написанные числа. Игрок, предложивший за ход бо́льшую сумму, получает право передвинуть фишку по ребру графа на любую соседнюю вершину (соблюдая ориентацию!). При этом сумма, которую предложил этот игрок, передается сопернику (т.е. вычитается из капитала одного игрока и прибавляется к капиталу другого игрока). Если окажется, что оба игрока написали одинаковые числа, то право хода определяет жребий (подбрасывается монета). В этом случае также производится передача денег.

Цель игры: игрок выигрывает, если ему удастся поставить фишку в вершину своего цвета.

Замечание. Вообще говоря, игра может продолжаться бесконечно. В этом случае считается, что игра закончилась вничью.

Задачи

Пусть ориентированный граф $D = (V, E)$ конечен (V — множество вершин, E — множество ребер) и числа B и R известны обоим игрокам (поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $B + R = 1$).

1. Рассмотрите игру на графе, изображенным на рис. 1 (указана начальная вершина и капитал Синего). Имеет ли Синий игрок

а) непроигрышную, б) выигрышную стратегию?

2. Те же вопросы для графа на рисунке 2.

3. Те же вопросы для графа на рисунке 3.

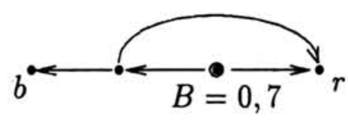


Рис. 1

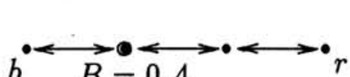


Рис. 2

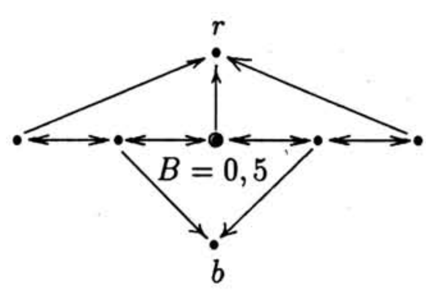


Рис. 3

4. Для каждой черной (отличной от b и r) вершины v графа, изображенного на рис. 4, найдите такое число $R(v) \in [0;1]$, что если сначала фишка находится в вершине v, то при $B > R(v)$ непроигрышную стратегию имеет Синий, а при $B < R(v)$ — Красный.

5. Тот же вопрос для графа на рисунке 5 (граф имеет n ребер).

6. Тот же вопрос для графа на рисунке 6.

7. Тот же вопрос для графа на рисунке 7.

Рис. 4

Рис. 5

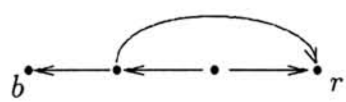


Рис. 6

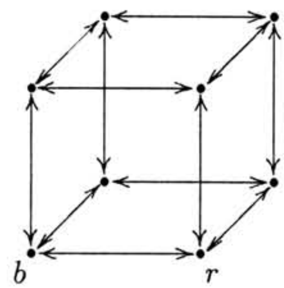


Рис. 7

8. Рассмотрите игру на графе, изображенном на рис. 8 (указана начальная вершина и капитал Синего). Какого числа ходов достаточно Синему для выигрыша?

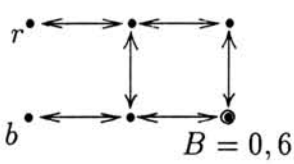


Рис. 8

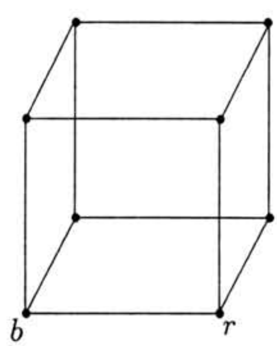


Рис. 9

9. Докажите, что если игрок имеет непроигрышную стратегию, то он имеет и выигрышную стратегию.

10. Пусть начальный капитал Красного в 30 раз больше начального капитала Синего. Можно ли так ориентировать ребра куба на рис. 9 (каждое ребро нужно ориентировать либо в одну, либо в обе стороны), чтобы выполнялись следующие два условия:

а) из любой вершины есть ориентированный путь в красную вершину;

б) при некотором начальном положении фишки у Красного нет выигрышной стратегии?

11. Придумайте достаточно быстрый способ определения $R(v)$ для всех вершин произвольного неориентированного графа (т.е. графа, по каждому ребру которого можно передвигать фишку в любую сторону).

Серия 1. Классическая игра Ричмана

В этой серии ориентированный граф $D = (V, E)$ конечен (V — множество вершин, E — множество ребер) и числа B и R известны обоим игрокам (поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $B + R = 1$).

Для любой вершины $v \in V$ будем обозначать через $S(v)$ множество ее «последователей»:
$$S(v) = \{w \in V\colon\ (v, w) \in E\}.$$
Пусть каждой вершине v поставлено в соответствие произвольное число $f(v)$. Тогда обозначим
$$f^+(v) = \max_{w \in S(v)} f(w) \qquad \text{и} \qquad f^-(v) = \min_{w \in S(v)} f(w).$$

Функцией Ричмана графа D называется функция $R(v)$, которая каждой вершине v ставит в соответствие число $R(v) \in [0; 1]$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $R(b) = 0$;
2) $R(r) = 1$;
3) $R(v) = \frac{R^+(v) + R^-(v)}{2}$ для всех v, отличных от b и r.

Функция Ричмана определяет наличие у игрока выигрышной стратегии. Введем также функцию, которая определяет возможность игрока выиграть за фиксированное число ходов. Определим индуктивно функцию $R(v, t)$ ($v \in V$, t — целое неотрицательное число):

1) $R(b, t) = 0$, $R(r, t) = 1$ для всех t;
2) $R(v, 0) = 1$ для всех v, отличных от b;
3) $R(v, t) = \frac{R^+(v, t-1) + R^-(v, t-1)}{2}$ для всех v, отличных от b, r и всех $t > 0$.

Задачи

1. Докажите, что для всякого конечного графа D существует функция Ричмана.

2. Докажите, что для всякого конечного графа D функция Ричмана единственна.

3. Пусть Синий и Красный играют в игру Ричмана на графе D, причем изначально фишка находится в некоторой вершине v.

   а) Докажите, что если $B > R(v)$, то Синий имеет выигрышную стратегию.

   б) Докажите, что если $B > R(v, t)$, для некоторого t, то при правильной игре Синий может выиграть не более, чем за t ходов.

   в) Опишите выигрышную стратегию Синего.

4. Докажите, что если $B < R(v)$, то Красный имеет выигрышную стратегию. Опишите эту стратегию.

5. Что можно сказать у наличии у того или иного игрока выигрышной стратегии, если $B = R(v)$?

6. Докажите, что функция Ричмана принимает только рациональные значения.

7. Опишите все такие графы, на которых выигрывает тот игрок, чей начальный капитал больше, чем капитал соперника (при любой черной начальной вершине).

Расстоянием $\operatorname{dist}(u, v)$ между вершинами u и v графа G назовем длину кратчайшего (ориентированного) пути от u до v по ребрам графа, т.е. количество ребер в этом (возможно не единственном) пути.

8. Пусть из начальной вершины v Синий может передвинуть фишку либо в вершину u, либо в вершину w, причем $\operatorname{dist}(u, b) > \operatorname{dist}(u, b)$ и $\operatorname{dist}(u, r) < \operatorname{dist}(w, r)$. Всегда ли, согласно описанной Вами выигрышной стратегии, Синий должен сделать ход в w?

Серия 2. Игра Ричмана на бесконечных графах

1. Постройте граф, функция Ричмана которого принимает в некоторой вершине значение $\{\pi\}$ (через $\{x\}$ мы обозначаем дробную часть числа x.)

Рис. 10

2. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 10 (красная вершина у него отсутствует). Найдите функцию Ричмана для этого графа. Единственна ли она? Каким капиталом должен обладать Синий, чтобы у него была выигрышная стратегия (чтобы Красный не мог добиться бесконечного продолжения игры)? Опишите эту стратегию.

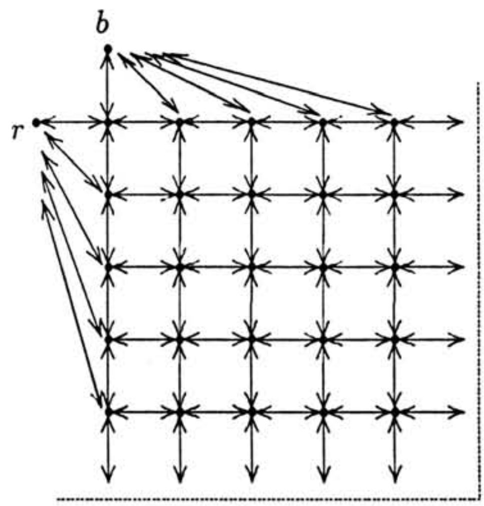


Рис. 11

3. Найдите функцию Ричмана для графа, изображенного на рис. 11. Докажите ее единственность.

Серия 3. Игра Ричмана с неполной информацией

Будем теперь считать, что игрок не знает, каким капиталом располагает изначально его противник (а граф снова предполагается конечным).

Для фиксированной начальной вершины v определим коэффициент:

$$k_b(v) = \frac{\left(\frac{B}{B+R}\right)}{R(v)}.$$

Задачи

1. Пусть D — граф без циклов (не существует замкнутого пути по ребрам с соблюдением ориентации). Докажите, что если $k_b(v) > 1$, то у Синего существует выигрышная стратегия.

2. Докажите, что если $k_b(v) > 1$, то у Синего существует стратегия, действуя согласно которой, он «почти всегда» будет выигрывать. В каком смысле следует понимать здесь «почти всегда», определите сами.

Комментарий к задаче 8 первой серии Утверждение задачи требуется доказать только для невырожденных графов (т.е. для таких графов, из каждой вершины которых существует путь как в b, так и в r).

Задача 1.8′. Решите задачу 8 Серии 1 для неориентированных графов.

Задача 2.1′. Постройте граф, удовлетворяющий условию задачи 1 Серии 2, такой что каждая его черная вершина имеет конечное число последователей.

Комментарий к Серии 3 Если $R(v) = 0$ и $B > 0$, то будем считать, что $k_b(v) = +\infty > 1$. Если $R(v) = 0$ и $B = 0$, то будем считать, что $k_b(v) = 1$.

Игра Ричмана для трех игроков

Рассмотрим «игру Ричмана» для трех игроков — Синего, Красного и Зеленого (соответственно, на графе D отмечены вершины b, r и g). Примем соглашение, что игрок, сделавший наибольшую ставку, или выигравший бросание монеты (кстати, в этой игре нам могут понадобиться две монеты — одна двусторонняя, другая — трехсторонняя), делит свою ставку *поровну* между проигравшими.

Распределение денег между игроками удобно изображать точкой в равностороннем треугольнике: назовем вершины треугольника B, R и G, при этом капитал, например, Синего — это расстояние от нашей точки до стороны, противоположной вершине B (см. рис. 12).

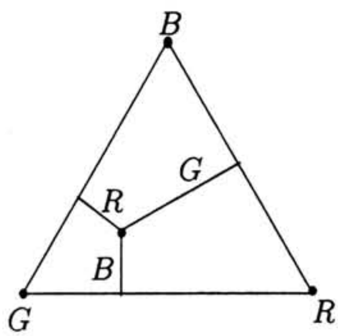


Рис. 12

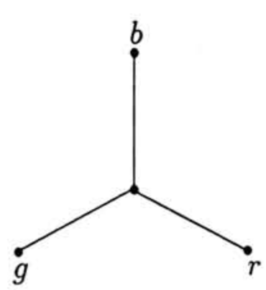


Рис. 13

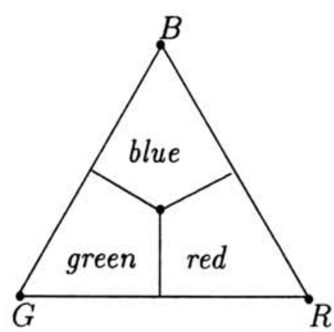


Рис. 14

Пусть изначально фишка находится в вершине v. Покрасим в синий (красный, зеленый) цвет такие точки треугольника BRG, что при соответствующем распределении капитала Синий (Красный, Зеленый) имеет выигрышную стратегию. Треугольник $BRG(v)$ — это аналог функции Ричмана в случае трех игроков.

Например, рассмотрим граф на рис. 13. В его единственной черной вершине треугольник BRG выглядит так, как на рис. 14.

Контрольный вопрос. Как смещается точка внутри треугольника BRG, когда один из игроков выплачивает двум другим одинаковое количество денег?

Вопросы для размышления (открытые проблемы)

1. Рассмотрим игру на графе, изображенном на рис. 15. Как выглядит треугольник $BRG(v)$ для каждой из черных вершин v? Есть ли на этих треугольниках незакрашенные области (в которых ни у одного из игроков нет выигрышной стратегии)? Какова выигрышная стратегия (в тех случаях, когда она существует)?

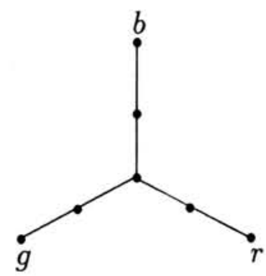


Рис. 15

2. Исследуйте эти вопросы для других выбранных вами графов и/или для произвольного конечного ориентированного графа.

3. Допустим, Красный проигрывает Синему (т.е. выполняет его указания). Как в этом случае изменится синяя область в треугольнике $BRG(v)$? (Выясните это для нескольких конкретных графов и/или для произвольного конечного ориентированного графа).

4. Пусть игрок, выигравший ход, выплачивает проигравшим свою ставку не поровну, а пропорционально их ставкам. Обдумайте все предыдущие вопросы для этого случая.

5. Пусть игрок, выигравший ход, выплачивает свою ставку тому игроку, ставка которого оказалась второй по величине (или, если ставки двух игроков, проигравших ход, совпали, выигравшему бросание монеты). Обдумайте все предыдущие вопросы для этого случая.

Вернемся к игре двух игроков.

Рассмотрим следующий алгоритм вычисления функции Ричмана произвольного конечного ориентированного графа.

1) Пусть $t = 0$.

2) Положим $R(v, 0) = 1$ для всех $v \neq v_b$, и $R(v_b, 0) = 0$.

3) Для каждой черной вершины v обозначим через v_t^+ (v_t^- соответственно) соседнюю с v вершину, в которой достигается $R^+(v,t)$ $(R^-(v,t))$.

4) Решаем систему линейных уравнений с неизвестными $R(v)$ в предположении $v^+ = v_t^=$, $v^- = v_t^-$.

5) Если решение существует, то функция Ричмана найдена.

6) В противном случае заменяем t на $t+1$.

7) Вычисляем
$$R(v,t) = \frac{R^+(v,t-1) + R^-(v,t-1)}{2}$$
для всех черных вершин v.

8) Переходим к шагу 3).

Вопросы для размышления

1. Докажите, что алгоритм когда-нибудь остановится.

2. Оцените количество итераций, которого будет достаточно для вычисления функции Ричмана, в зависимости от числа вершин. (Иными словами, оцените, сколько раз должен выполняться цикл в алгоритме, приведенном выше.)

3. Постройте примеры графов, на которых алгоритм будет работать долго.

4. **Правила игры Ним.** Имеется несколько кучек камней. Играют двое. За один ход игрок берет любое число камней из одной (любой) кучки. Тот, кто взял последний камень, выигрывает.

а) Исследуйте Ним с ричмановским правилом очередности хода (ходит игрок, поставивший больше денег или выигравший бросание монетки в случае равных ставок; при этом его ставка передается сопернику).

б) Исследуйте «мизерный» Ним (тот, кто взял последний камень, проигрывает) с ричмановским правилом очередности хода.

5. Пусть ребра графа раскрашены в синий и красный цвета и каждому игроку разрешается ходить только по ребрам своего цвета. Опишите выигрышные стратегии для обоих игроков в тех случаях, когда они существуют.

6. Пусть в обычной игре Ричмана оба игрока платят свои ставки в «банк» (т.е. капитал каждого игрока после каждого хода уменьшается на размер его ставки). Что можно сказать о выигрышных стратегиях в этом случае?

Информация

Редакция представляет содержание двух первых выпусков приложения "Обозрение Z', а также информацию о вышедших в Нвосибиске книгах по математике и естественно-научным дисциплинам.

1. Содержание приложения "Обозрение Z"

Номер 1

Обращение к читателям.

1) И. Р. Шафаревич. Из истории естественно-научного мировоззрения.

2) А. А. Венкстерн, А. И. Захаров. Датировка Альмагеста Птолемея по планетным конфигурациям.

3) Новая рубрика — КДХ (от редакции)

4) О так называемой "Новой хронологии": В. В. Кожинов, М. М. Постников.

5) Л. А. Грибов, В. А. Дементьев. Физика присматривается к основам химии глазами молекулярной спектроскопии.

6) Г. А. Заварзин. Недарвиновская область эволюции.

7) А. А. Воронин. Устойчивое развитие — миф или реальность?

8) Новая рубрика — ССР (от редакции).

9) Информация для подписчиков.

Номер 2

1) Новая рубрика — АБК (от редакции).

2) Справка об авторах "Обозрения Z", №№1, 2.

3) Терминологический словарик.

4) М. Вялый, А. Китаев, А. Шень. Введение к книге "Классические и квантовые вычисления".

5) Избранные задачи московского Турнира им. Ломносова.

6) П.Картье. Математика и искусство.

7) И. Р. Шафаревич. Из истории естественно-научного мировоззрения, окончание.

8) Ответ авторов "Новой хронологии" на статью А. А. Венкстерн, А. И. Захаров "Датировка Альмагеста Птолемея по планетным конфигурациям" из "Обозрения Z", №1.

2. Книги артели «Напрасный труд»

КНИГА	*ОБЪЕМ*	*ЦЕНА*
Книги по истории математики		
Непрерывность функций и числовых областей. *Б. Больцано, Л. О. Коши, Р. Дедекинд, Г. Кантор.* В сборник включены основополагающие работы, в которых в период с 1817 по 1874 г. была произведена реформа математического анализа на основе понятия действительного числа.	68 стр. 1/16	25
Щетников А. И. Пифагорейское учение о числе и величине. При изложении основных идей и методов пифагорейского учения о числе и величине широко используются графические средства, соответствующие духу ранней античной математики.	52 стр. 1/16	22
Щетников А. И., Щетникова А. В. Роль контрпримеров в развитии основных понятий математического анализа. В книге рассматривается процесс формирования базовых понятий классического математического анализа и соответствующих этим понятиям критериев строгости.	44 стр. 1/16	20
Учебные пособия		
Зайков И. А., Щетников А. И. Механика. *Зайков И. А., Щетников А. И. Гидростатика и аэростатика.* *Рабочие тетради для 7 класса.* Основные понятия и принципы механики обсуждаются в рабочих тетрадях в живой диалогической форме, с рассмотрением большого числа мысленных экспериментов и реальных опытов — что позволяет раскрыть логику их происхождения и физический смысл. Этой же цели служит подбор задач и исследовательских заданий.	64 стр. 1/8 52 стр. 1/8	35 30
Щетников А. И. Геометрия. Учебник для 7-11 класса. Учебник сочетает традиции российского гимназического образования с современными идеями развивающего обучения. Наличие пропедевтической главы, последовательность изложения материала, подбор заданий, а также общая краткость и обозримость текста позволяют учителю сделать основой учебной работы доказывание теорем и решение задач на построение. С этой целью значительная часть теорем приводится в учебнике без доказательств.	176 стр. 1/16	45

Цены указаны без учёта расходов на пересылку.

О заказах можно договориться по адресу: *andrei@gallery.nsc.ru*

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, ул. Солдатская, д. 8, корп. 2, к. 69.

Контактные телефоны: (095) 362-82-56, (095) 261-53-12.

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

Страница Фонда в сети Internet: www.fmop.dnttm.ru

e-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2000 год (включая стоимость пересылки) – 35 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2000 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810600000000342, БИК 044525342

С сентября 2000 выходит "Обозрение Z" — научно-популярное приложение к журналу "Математическое образование". Условия подписки (адрес, реквизиты, стоимость одного номера) — те же, что и для журнала.

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 30 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 40 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

All-Russia Conference on Math Education, Dubna, September 2000 2

R. Khazankin. Math Education and the High School 12

A. Evnin. Two Notes on Combinatorics 27

A. Shetnikov. A Project of a School Course in Geometry 35

Questions of the 12-th Summer Conference of Tournament of the Towns 43

Information 69