Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год третий

№ 2-3 (9-10)

Апрель - сентябрь 1999 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

N 2-3 (9-10), 1999 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

N 2-3 (9-10), апрель – сентябрь 1999 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 1999 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия №015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 13.01.00
Компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 11 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Числа и суммы

Пособие для факультативных занятий по математике в 7–8 классах средней школы

Учебное пособие для факультативных занятий по математике написано коллективом авторов, в который входят: И. В. Артамкин, А. Л. Городенцев, А. Г. Кулаков, М. А. Прохоров, С. М. Хорошкин, А. В. Хохлов. В настоящем номере публикуется журнальный вариант пособия. Редакция надеется, что он представляет интерес и по содержанию, и в связи с тем, что сейчас издается очень мало литературы по математике для внеклассной работы школьников. В следующем номере предполагается поместить решения задач из пособия.

« ... Достопочтеннейший Дионисий, зная, что ты ревностно хочешь научиться решению задач, касающихся чисел, я попытался изложить природу их и могущество, начиная с тех оснований, на которых покоится эта наука. Может быть, этот предмет покажется тебе затруднительным, поскольку ты еще с ним не знаком, а начинающие не склонны надеяться на успех. Но он станет тебе удобопонятным благодаря твоему усердию и моим пояснениям, ибо страстная любовь к науке помогает быстро воспринять учение.

Все числа, как ты знаешь, состоят из некоторого количества единиц; ясно, что они продолжаются, увеличиваясь до бесконечности. Так вот среди них находятся: квадраты, получающиеся от умножения некоторого числа самого на себя; это же число называется стороной квадрата; затем кубы, получающиеся от умножения квадратов на их сторону, ... ».

Диофант Александрийский. «Арифметика». Книга 1.

Введение

Это пособие о том, как складывать числа. Скорее всего, Вы уверены, что это очень просто. И это, конечно, так, если надо сложить два или три числа. Сложение десяти чисел представляется уже довольно скучным занятием. Отыскать же сумму первых ста натуральных чисел хватит терпения лишь у немногих. Но эта задача решается за несколько секунд, если только догадаться до «правильного» способа действий! А как найти сумму квадратов первых ста натуральных чисел? Прочитав это пособие, Вы сможете решать как эти, так и многие другие задачи. Вы научитесь вычислять разнообразные суммы, находить замечательные закономерности в рядах чисел и записывать их в виде красивых математических формул. Вы узнаете о представлении чисел геометрическими фигурами, о Пифагоровой таблице умножения, о многоугольных числах и других ярких образах, заложенных в фундамент математики еще древними греками.

Как читать это пособие. Занятие математикой — это деятельность активная. И подобно тому, как нельзя научиться водить автомобиль, ни разу не посидев за рулем, нельзя научиться математике, не решая задачи. Задачи составляют значительную часть этого пособия и, работая над ним, Вы должны стараться их решить. Не страшно, если при этом Вам будут помогать друзья или учитель (некоторые задачи довольно трудные). Однако очень важно, чтобы эта помощь не лишила Вас того удовольствия, которое получаешь самостоятельно докопавшись до решения!

Если в какой-то момент Вам покажется, что то, что Вы читаете, Вам уже хорошо известно, а предлагаемые задачи слишком просты, — загляните в конец § 5 или в §§ 9, 11. Решения имеющихся там задач (самые трудные из них отмечены звездочкой) могут занять много времени, а то и оказаться не по силам даже профессиональным математикам. Не отчаивайтесь, если они не решаются, — попробуйте еще раз!

И последнее. Пособие не обязательно читать подряд «от корки до корки». Начать работать с ним можно и с середины (например, с § 4 или с § 6), и с конца (§ 9 или § 10) и даже одновременно с нескольких мест. Довольно скоро Вы заметите, что в разных частях пособия с разных точек зрения обсуждаются одни и те же вещи. Если какой-то способ рассуждать пришелся Вам особенно по вкусу, то постарайтесь применять его почаще и овладеть им, но не забывайте, что настоящий мастер прекрасно владеет всеми доступными инструментами!

Содержание

§ 1 Формулы и площади

Конечно, всем хорошо знакома формула для площади S прямоугольника со сторонами a и b, утверждающая, что $S = a \cdot b$. Оказывается, эту формулу можно использовать не только для вычисления площадей, но и для иллюстрации и даже доказательства различных алгебраических или арифметических теорем. Так, например, простейшую формулу сокращенного умножения:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b) \tag{1-1}$$

можно понимать как утверждение о том, что если из квадрата размером $a \times a$ вырезать квадрат размером $b \times b$, то полученная фигура будет иметь ту же площадь, что и прямоугольник со сторонами $a + b$ и $a - b$.

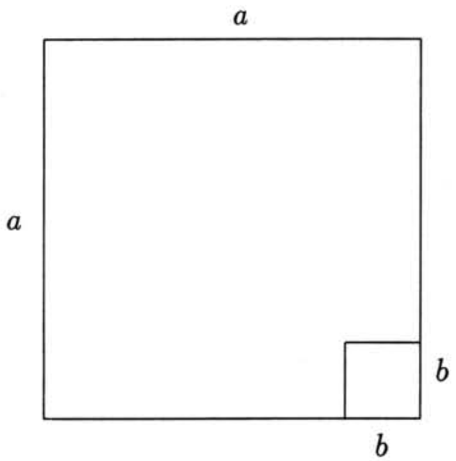


Рис. 1.1. $a^2 - b^2$.

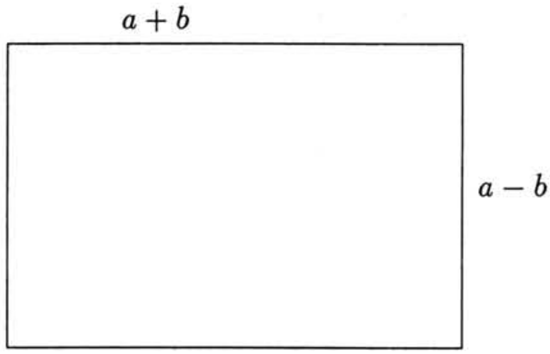


Рис. 1.2. $(a + b)(a - b)$.

Аналогично, формулу $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ можно воспринимать как утверждение о том, что квадрат со стороной $a+b$ можно разрезать на четыре части: два квадрата со сторонами a и b и два прямоугольника размером $a \times b$:

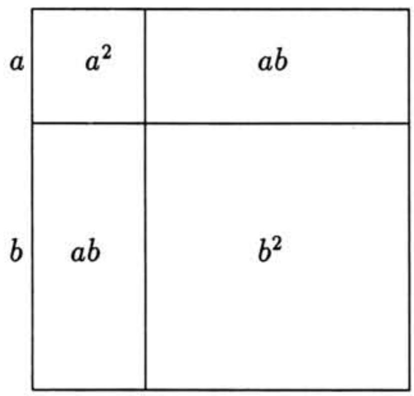


Рис. 1.3. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

и показанный на рис. 1.3 способ разрезания *доказывает* эту формулу. Точно так же и формулу (1-1) для разности квадратов можно доказать, разрезав фигуру на рис. 1.1 на куски и сложив затем из этих кусков фигуру на рис. 1.2.

Задача 1.1. Докажите формулу $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ разрезанием и складыванием. Можно ли при этом обойтись ровно одним разрезом?

Вообще, хорошая картинка часто бывает намного убедительнее длинных формальных алгебраических выкладок и гораздо лучше запоминается.

Задача 1.2. Придумайте геометрическое доказательство формулы

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\ .$$

Задача 1.3. Придумайте картинку, дающую формулу для $(a+b+c)^2$, и напишите эту формулу.

Задача 1.4. Найдите формулу для[1] $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$.

[1]Вместо употребления разных букв алфавита в математике принято (особенно, если букв не хватает) использовать «нумерованные буквы» (буквы с индексами): $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

§ 2 Числа и фигуры

В задачах о целых числах особенно приятно рисовать картинки на клетчатой бумаге. Если стороны многоугольника идут по линиям клетчатой бумаги, то его площадь будет равна числу клеток, из которых он состоит. Например, прямоугольник с целыми сторонами a и b, идущими по линиям клеток, состоит в точности из ab клеток. Интересно, что древние греки именно таким образом и представляли себе таблицу умножения, рисуя ее как показано на рис. 2.1. Где в этой таблице расположены квадраты целых чисел? Есть ли у нее ось симметрии? Встречаются ли в таблице различные прямоугольники, состоящие из одинакового числа клеточек?

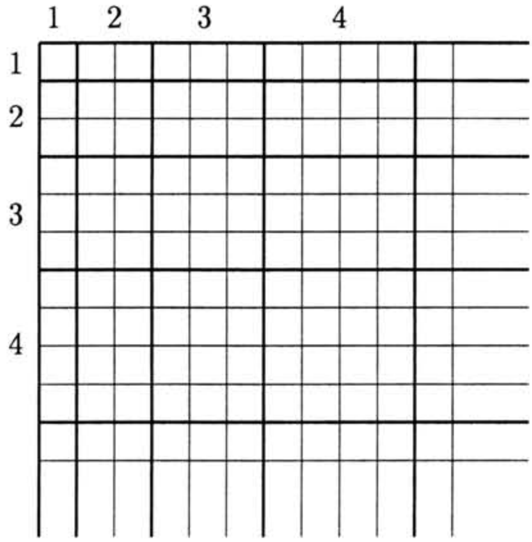


Рис. 2.1. Пифагорова таблица умножения (VI в. до Р.Х.).

Задача 2.1. Дайте геометрическое доказательство переместительному закону умножения: $ab = ba$, т. е. объясните, почему выполняется равенство

$$\underbrace{a + a + \cdots + a}_{b\ \text{раз}} = \underbrace{b + b + \cdots + b}_{a\ \text{раз}}$$

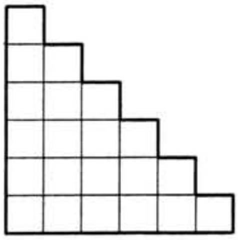
Задача 2.2. Сколько существует различных прямоугольников, состоящих ровно из 12 клеточек? Какие из них не попали в таблицу умножения на рис. 2.1?

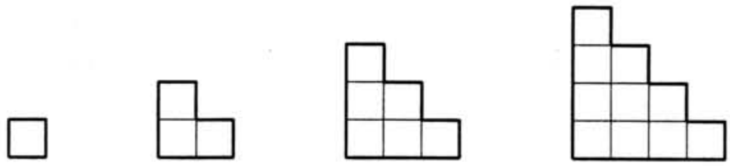
Задача 2.3. Найдите такое наименьшее число n, что существует ровно пять различных прямоугольников, состоящих ровно из n клеточек.

Изображение чисел фигурками на клетчатой бумаге связывает с многими числами яркие геометрические образы. Так, числа вида $a \cdot a$ с античных времен называются квадратами.

Задача 2.4. Выпишите первые 13 квадратов целых чисел и найдите среди них квадраты, являющиеся суммами двух других квадратов.

Помимо квадратов, пристальное внимание древнегреческих математиков привлекали треугольные числа T_n, равные количеству клеток в прямоугольных ступенчатых треугольниках типа показанного на рис. 2.2. Первые несколько треугольных чисел изображены на рис. 2.3





$T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$ $T_4 = 10$

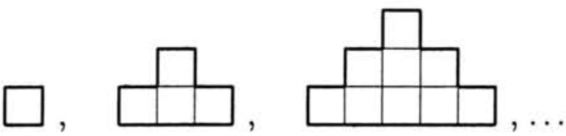
Рис. 2.2. Треугольное число. Рис. 2.3. Начало ряда треугольных чисел.

Задача 2.5. Продолжите этот ряд и найдите первые 10 треугольных чисел.

Задача 2.6. Что за числа будут получаться при сложении пар последовательных треугольных чисел: $T_1 + T_2$, $T_2 + T_3$, $T_3 + T_4$, ...? Сформулируйте соответствующую теорему и докажите ее геометрически.

Задача 2.7. Сложите прямоугольник из двух одинаковых ступенчатых треугольников T_n. Каковы его стороны? Получите отсюда явную формулу для T_n.

Задача 2.8. На рис. 2.4 изображен ряд «симметричных» ступенчатых треугольников. Сколько клеточек в каждой такой фигуре? Каким рядом чисел выражаются их площади? Как это объяснить геометрически?



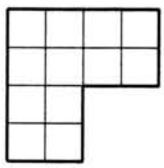


Рис. 2.4. Симметричные треугольники. Рис. 2.5. Уголок.

Задача 2.9. Как разрезать уголок на рис. 2.5 на четыре равные[1] части? ([2])

Задача 2.10. Как разрезать прямоугольник 9×16 на две части, из которых можно сложить квадрат?

Задача 2.11. Докажите теорему Диофанта: $8T_n + 1 = (2n+1)^2$

(например: $8 \cdot 1 + 1 = (2 \cdot 1 + 1)^2$, $8 \cdot 3 + 1 = (2 \cdot 2 + 1)^2$ и т. д.).

Интересно найти геометрическое решение зад. 2.11: как разрезать квадрат с произвольной нечетной стороной на 8 одинаковых ступенчатых треугольников и один лишний квадратик?

[1]Напомним, что две фигуры называются равными, если их можно совместить наложением.

[2]Облегченная версия задачи: разрежьте квадрат на пять равных частей.

Мы уже видели, что получается, если из квадрата со стороной $a+b$ вырезать два квадрата со сторонами a и b (см. рис. 1.3). А что получится, если от ступенчатого треугольника со стороной $m+n$ отрезать треугольник со стороной m и треугольник со стороной n?

Задача 2.12. Докажите теорему сложения треугольных чисел: $T_{m+n} = T_m + T_n + mn$.

§ 3 Разрезания и суммы

Подсчитаем, из скольких клеточек состоит ступенчатый треугольник высотой в n клеточек. Для этого разрежем его на горизонтальные полоски шириной в одну клеточку:

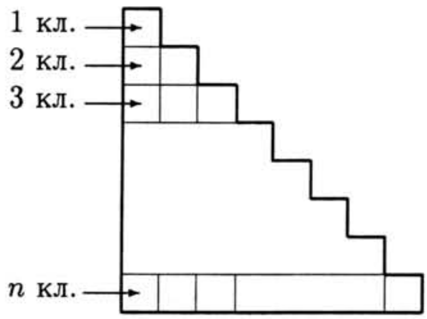
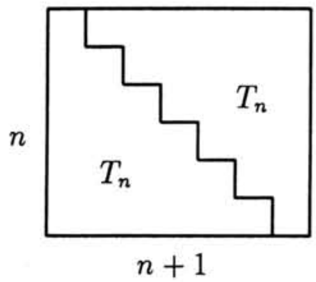


Рис. 3.1. Разрезание треугольного числа на полоски.

Самый верхний этаж состоит из одной клеточки, следующий — из двух, потом — из трех и т. д. На самом нижнем, n-ом этаже, лежит полоска из n клеток. Таким образом, $T_n = 1+2+3+4+\cdots+n$, то есть n-ое треугольное число представляет собой сумму последовательных чисел от 1 до n. Но в зад. 2.7 мы уже вычислили треугольное число T_n, разрезав прямоугольник $n \times (n+1)$ на два ступенчатых треугольника:



$$2T_n = n(n+1)$$

Рис. 3.2. Формула для n-того треугольного числа.

Мы получили знаменитую формулу: $T_n = 1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Посмотрим теперь, что получится, если аналогичным образом разрезать «симметричный» ступенчатый треугольник высоты n (см. зад. 2.8 и рис. 3.3).

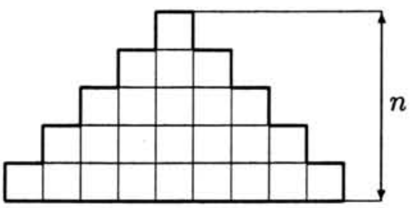


Рис. 3.3. Разрезание симметричного треугольника на полоски.

Задача 3.1. Сколько клеточек в k-ом, считая сверху, этаже? А в самом нижнем этаже? Напишите соответствующую сумму (т. е. представьте площадь фигуры на рис. 3.3 в виде суммы n слагаемых).

Задача 3.2. В зад. 2.8 и зад. 3.1 мы двумя способами посчитали площадь симметричного ступенчатого треугольника. Какую формулу для суммирования мы при этом получили? Выпишите ее явно.

Задача 3.3. Предложите «ступенчатую картинку» для вычисления суммы последовательных нечетных чисел $\underbrace{1+5+9+13+\cdots}_{n\ \text{слагаемых}}$ и напишите соответствующую формулу.

Разумеется, фигуры можно разрезать не только на прямолинейные полоски, но и, скажем, на «уголки» (греки называли Г-образные фигурки «гномонами»).

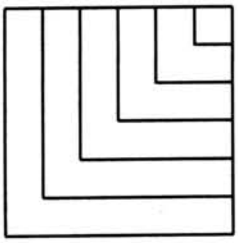


Рис. 3.4. Разрезание квадрата.

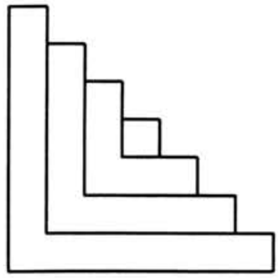
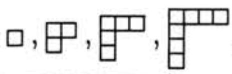


Рис. 3.5. Разрезание треугольника.

Задача 3.4. Рассмотрим ряд «равносторонних» гномонов: , … . Сколько клеточек в k-том из них? Пользуясь рис. 3.4, еще раз докажите формулу

$$1+3+5+7+\cdots+(2k-1)=k^2.$$

Задача 3.5. Какая сумма соответствует показанному на рис. 3.5 способу разрезания ступенчатого треугольника (гипотенуза которого состоит из нечетного числа $n=2\ell+1$ клеток)?

Есть и другие любопытные способы разрезания прямоугольников и квадратов.

Задача 3.6. Из скольких клеток состоит «рамка» размера $n\times n$ с рис. 3.6? Какая сумма получится при разрезании квадрата $n\times n$ на такие рамки? (Обратите внимание на то, что n бывает четным и нечетным!)

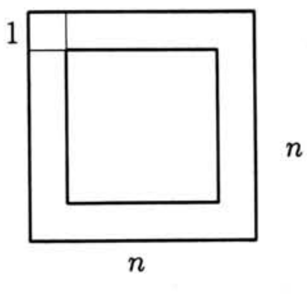


Рис. 3.6. «Рамка».

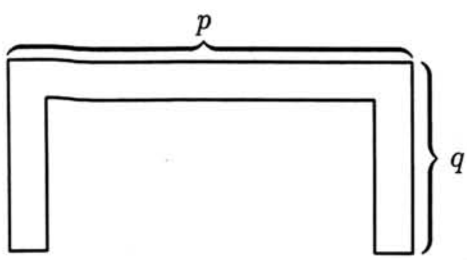


Рис. 3.7. «Ворота».

Задача 3.7. Придумайте различные варианты разрезания прямоугольников и квадратов на прямоугольные «рамки» (рис. 3.6) или «ворота» (рис. 3.7) и напишите формулы для соответствующих сумм.

Задача 3.8. Найдите площадь Пифагоровой таблицы умножения (см. рис. 2.1) чисел от 1 до n. Что за тождество получится, если разрезать эту таблицу по жирным линиям на конечные «толстые» уголки? (Советуем сначала подсчитать площадь k-того уголка.)

§ 4 Арифметическая прогрессия

Знаменитая математическая легенда гласит, что в 1787 году в одной из саксонских народных школ произошел такой случай. Учитель, желая занять учеников на целых урок, предложил им сложить все натуральные числа от одного до ста.

Задача 4.1. Чему равна сумма $1+2+3+\ldots+100$?

Не успел учитель написать условие задачи на доске, как один из учеников встал и положил на учительский стол свою грифельную доску с ответом. Следует заметить, что в народных школах каждый ученик имел свою именную грифельную доску. Когда ученик выполнял задание, он клал свою грифельную доску в стопку на стол учителя сверху. Проверяя решения, учитель знал, что ученик, чья доска легла сверху, сделал решение последним, а тот, чья доска лежит снизу — первым. Естественно, учитель поначалу очень рассердился, решив, что ученик поленился считать аккуратно и сдал свою доску для того, чтобы отделаться от задания. Однако, к удивлению учителя правильный ответ был написан только на грифельной доске, лежащей в самом низу. Ученика, быстро и правильно решившего задачу, звали Карл Фридрих Гаусс. Впоследствии он стал одним из самых известных математиков мира.

В этой истории немало вопросов. Как удалось юному Гауссу так быстро сосчитать сумму ста чисел? Почему правильный ответ был только у него? Ошибки остальных учеников легко понять и простить: ведь они сто раз складывали числа; ни разу не ошибиться здесь очень трудно. Гаусс же, по-видимому, вместо этого перемножил какие-то два числа, например, так:

Первое решение задачи 4.1 (способ Гаусса): Напишем сумму два раза, только второй раз в обратном порядке, и сложим числа в столбик:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
S &=& 1 &+& 2 &+& 3 &+\cdots+& 98 &+& 99 &+& 100 \\
S &=& 100 &+& 99 &+& 98 &+\cdots+& 3 &+& 2 &+& 1 \\
\hline
2S &=& 101 &+& 101 &+& 101 &+\cdots+& 101 &+& 101 &+& 101
\end{array}$$

Поскольку таких слагаемых 100 штук, $2S = 100 \cdot 101$. Следовательно,

$$S = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050 \; .$$

Очень похоже на правду, что Гаусс именно так вычислил эту сумму — ведь умножить 50 на 101 легко и в уме. Но можно предложить и другие способы решения задачи 4.1.

Второе решение задачи 4.1. Сгруппируем слагаемые не так, как они написаны в условии задачи, а по-другому:

$$100 + (99 + 1) + (98 + 2) + \cdots + (51 + 49) + 50 =$$
$$= 100 + 100 \cdot 49 + 50 = 100 \cdot 50 + 50 = 5050$$

Можно было бы группировать слагаемые и так:

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (50 + 51) = 50 \cdot 101 = 5050$$

Задача 4.2. Посчитайте вторым способом сумму $1 + 2 + 3 + \cdots + 49$ и проверьте ответ методом Гаусса.

Задача 4.3. Какими геометрическими картинками можно изобразить первый и второй способы решения задачи 4.1?

Задача 4.4. Вычислите суммы:

а) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 999 + 1000$

б) $101 + 102 + 103 + \cdots + 200$

в) $101 + 103 + 105 + \cdots + 197 + 199$

г) $400 + 401 + 402 + \cdots + 700$

Попробуем теперь выяснить, какое свойство слагаемых позволило юному Гауссу так быстро сосчитать сумму ста чисел. Для этого попытаемся методом Гаусса найти сумму чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
S & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + \cdots + & a_{k-1} & + & a_k \\
S & = & a_k & + & a_{k-1} & + & a_{k-2} & + \cdots + & a_2 & + & a_1 \\
\hline
2S & = & (a_1 + a_k) & + & (a_2 + a_{k-1}) & + & (a_3 + a_{k-2}) & + \cdots + & (a_{k-1} + a_2) & + & (a_k + a_1)
\end{array}$$

Чтобы метод Гаусса работал, нужно, чтобы все скобки были равны друг другу:

$$a_1 + a_k = a_2 + a_{k-1} = a_3 + a_{k-2} = \cdots$$

Это свойство выполняется, например, для таких последовательностей:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 1000,$$
$$101, 103, 105, \ldots, 197, 199,$$
$$3, 6, 9, 12, \ldots, 135;$$

и вообще для всех последовательностей, у которых разность между соседними членами постоянна.

Задача 4.5. Докажите, что если $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_k - a_{k-1}$, то и $a_1 + a_k = a_2 + a_{k-1} = a_3 + a_{k-2} = \cdots$.

Определение. *Последовательность, каждый следующий член которой получается из предыдущего добавлением одного и того же числа d, называется арифметической прогрессией, а это число d называется разностью арифметической прогрессии.*

Таким образом, в арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_k$ с разностью d мы имеем $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1}$.

Задача 4.6. Докажите, что сумма членов конечной арифметической прогрессии равна полусумме первого и последнего членов, умноженной на количество слагаемых, т. е. что $S_n = n\,(a_1 + a_n)/2$, где n – число членов прогрессии.

Название «арифметическая прогрессия» связано с тем, что каждый член арифметической прогрессии равен среднему арифметическому двух своих соседей.

Задача 4.7. Докажите это, т. е. проверьте выполнение равенства $a_i = (a_{i-1} + a_{i+1})/2$ для каждого $i = 2, 3, \ldots, (k-1)$.

Задача 4.8. Докажите и обратное: если в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k$ каждый член, кроме двух крайних, равен среднему арифметическому своих соседей, то такая последовательность является арифметической прогрессией.

Задача 4.9. Найдите суммы:

а) первых ста нечетных положительных чисел;

б) первых двухсот четных положительных чисел;

в) первых пятидесяти положительных чисел, дающих остаток 1 от деления на 3;

г) всех трехзначных чисел, делящихся на 13.

Задача 4.10. Выясните, чему равно:

а) 1990-ое четное положительное число;

б) 109-ое нечетное положительное число;

в) n-ое четное положительное число;

г) n-ое нечетное положительное число;

д) n-ое положительное число с остатком 1 от деления на 4;

е) n-ое положительное число с остатком 6 от деления на 8.

Задача 4.11. Чему равен n-ый член арифметической прогрессии, начинающейся с a_1 и имеющей разность d?

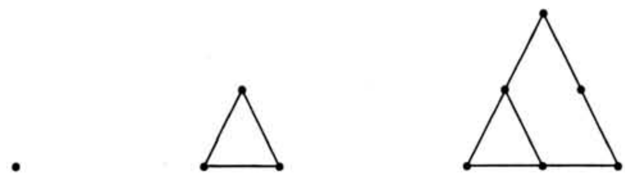
Задача 4.12. В чемпионате по футболу участвовало 16 команд. Чемпионат проводился по круговой системе в два круга — это означает, что каждая команда играла с каждой два матча. Сколько всего матчей было сыграно? Сколько всего очков было разыграно, если за победу давалось 2 очка, за ничью — 1, за поражение 0 очков?

Задача 4.13. На плоскости дано n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?

Задача 4.14. Сколько диагоналей в выпуклом n-угольнике?

Задача 4.15. На сколько частей делят плоскость n прямых, любые две из которых пересекаются, однако никакие три не пересекаются в одной точке?

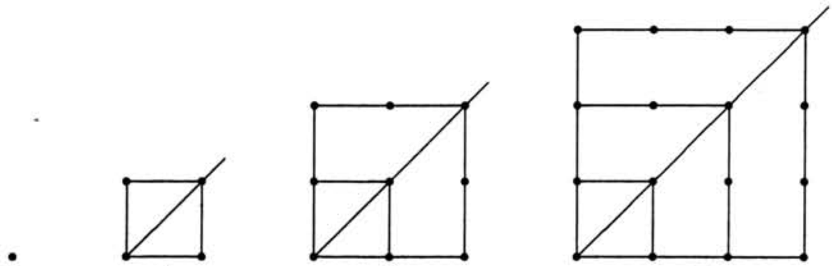
Многоугольные числа. Упоминавшиеся нами ранее треугольные числа $T_1 = 1$, $T_2 = 1 + 2 = 3$, $T_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, $T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, ... можно было бы рисовать так:



T_1 T_2 T_3

Рис. 4.1. Треугольные числа.

Подобным же образом можно рисовать и четырех-, и пяти-, и шести-, и вообще, n-угольные числа. Вот, например, картинки для четырехугольных чисел:



1 4 9 16 и т.д.

Рис. 4.2. Четырехугольные числа.

Таким образом, четырехугольные числа — это просто квадраты. Пятиугольные числа $P_1 = 1$, $P_2 = 5$, $P_3 = 12$, $P_4 = 22$, ... выглядят так:

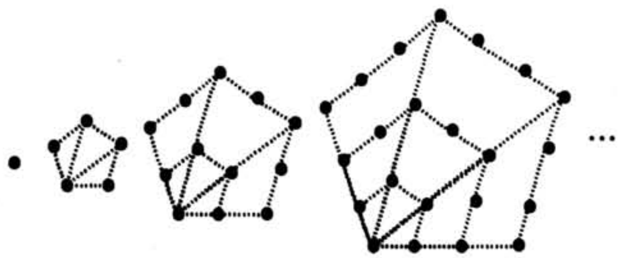


Рис. 4.3. Пятиугольные числа.

Задача 4.16. Нарисуйте и вычислите первые 4 шестиугольных числа.

Задача 4.17. Суммами каких арифметических прогрессией являются пяти- и шестиугольные числа? А k-угольные числа? Напишите формулу для n-ого пяти-, шести-, семи- и k-угольного чисел.

Задача 4.18.

а) Докажите, что n-ое шестиугольное число на n меньше, чем сумма n-ого треугольного и пятиугольного чисел. Попробуйте решить эту задачу двумя способами: алгебраически и геометрически.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для семи- и восьмиугольных чисел.

в) Верно ли, что сумма n-тых $(k+1)$-угольного и $(l+1)$-угольного чисел на n больше n-того $(k+l)$-угольного числа?

Задача 4.19. В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получает штрафные очки: за первый промах — одно штрафное очко, а за каждый последующий — на $1/2$ очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков?

§ 5 Угадай ответ

Вопреки расхожему мнению, математика — это во многом экспериментальная наука. Только эксперименты математики проводят не сливая, поджигая или взрывая что-нибудь, а в уме, на бумаге, или, в крайнем случае, на компьютере. В этом разделе мы предлагаем Вам поэкспериментировать для того, чтобы угадать ответ в задаче. Говорят, что ответ — это больше, чем половина решения задачи, ибо часто так случается, что обосновать «правильно» сформулированный ответ уже совсем не так сложно.

Задача 5.1. Вычислите сумму $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}++\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$.
Попытайтесь найти эту сумму экспериментальным путем, а именно: вычислите сначала суммы первых двух, затем — первых трех, затем — четырех и т. д. слагаемых[1]. Для наглядности результаты эксперимента разумно записывать в таблицу[2]:

Число слагаемых	1	2	3	4	5	6
Последнее слагаемое	1/2	1/6	1/12			
Сумма	1/2	2/3				

Если Вы внимательно посмотрите на результаты эксперимента, то легко догадаетесь, чему будут равны суммы и пятидесяти, и девяносто девяти, и ста слагаемых.

Задача 5.2. Чему равна сумма $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$?
Если Вы угадали ответ к этой задаче, подметив закономерность у сумм двух, трех, четырех, пяти слагаемых (возможно, кто-то выписал и больше экспериментальных данных), то этот ответ полезно проверить[3]. Такую проверку можно делать, опять-таки, подставляя в предлагаемую Вами формулу маленькие значения n. Например, проверка формулы $1+3+5+\ \ldots\ +(2n-1)=n^2$ для $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ выглядит так:

$$
\begin{array}{ll}
n=1 & 1=1^2\\
n=2 & 1+3=2^2\\
n=3 & 1+3+5=3^2\\
n=4 & 1+3+5+7=4^2
\end{array}
$$

[1] Обычно, когда математика просят сложить сто чисел, он говорит: «Сложить сто чисел — это очень долго и сложно, давайте-ка я лучше сложу два числа, посмотрю внимательно на ответ; сложу три числа — и еще внимательнее посмотрю на ответ... А там, глядишь, что-нибудь и придумаю!»

[2] В ней можно было бы обойтись и без второй строчки, но она помогает вычислить сумму и подметить закономерность

[3] Конечно, для этого проще всего заглянуть в конец книги, но что делать, если ответа там нет?!

Подобная проверка позволяет отвергать заведомо неправильные гипотезы.

Задача 5.3. Проверьте Ваш и наш[4] ответ в задаче 4.2 при $n = 1, 2, 3, 4$, а затем попытайтесь *строго доказать* его.

Указание: Для доказательства, можно, к примеру, посмотреть, на сколько увеличивается Ваш гипотетический ответ при прибавлении еще одного слагаемого и сравнить это с тем числом, на которое увеличивается сумма на самом деле — здесь-то и пригодится 2-ая строка из Ваших таблиц.

Задача 5.4. Чему равна сумма $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$? Не забудьте проверить ответ хотя бы при $n = 1, 2, 3$!

Задача 5.5. Вычислите сумму $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{2}{3^n}$.

Задача 5.6. Сосчитайте $1+2+4+\cdots+2^n$ и $1+3+9+27+\cdots+3^n$.

Напомним, что $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \cdots\ \cdot n$ (читается «эн факториал»); чтобы освоиться с факториалами, советуем посчитать $1!$, $2!$, $3!$, $4!$, $5!$ и $(n+2)!/n!$.

Задача 5.7. Найдите $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!$ и $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}$.

Задача 5.8. Подсчитайте сумму $1^3+2^3+\cdots+n^3$.

Треугольник Паскаля. Рассмотрим бесконечно продолжающийся вниз треугольный лабиринт, нарисованный на рис. 5.1. Условимся нумеровать его этажи сверху вниз, начиная с нулевого номера, а комнаты на каждом этаже — слева направо, также начиная с нулевого номера.

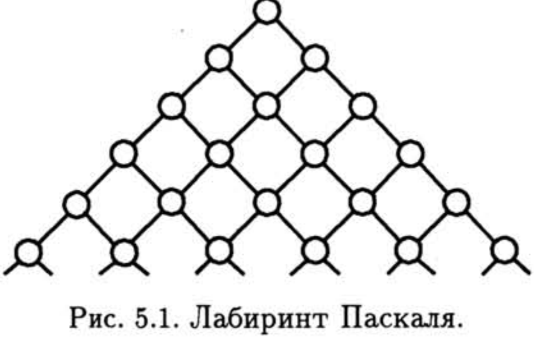


Рис. 5.1. Лабиринт Паскаля.

Задача 5.9. Пусть в лабиринт на рис. 5.1 падает шарик и под действием тяжести проваливается вниз, случайным образом поворачивая налево-направо. На на каждой из комнат верхних 11 этажей (с нулевого по десятый) напишите, сколькими различными путями шарик может до неё добраться.

[4] т. е. приведенный в следующем номере журнала

Задача 5.10. Сформулируйте и докажите правило, позволяющее в предыдущей задаче быстро заполнять числами очередной этаж, глядя на предыдущий (уже заполненный) этаж.

Числовой треугольник, дающий ответ к зад. 5.9 и зад. 5.10, называется *треугольником Паскаля*. Он удивительным образом появляется в самых разных (на первый взгляд) ситуациях.

Задача 5.11. Найдите на треугольнике Паскаля ряд единиц $1, 1, 1, \ldots$, натуральный ряд $1, 2, 3, \ldots$, а также ряд треугольных чисел $T_1, T_2, T_3, \ldots$.

Задача 5.12. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые у

$$(1+x)^2, \quad (1+x)^3, \quad (1+x)^4, \quad \ldots, \quad (1+x)^{10}$$

(например: $(1+x)^4 = (1+x)^3(1+x) = (1+3x+3x^2+x^3)(1+x) = 1+4x+6x^2+6x^3+x^4$.) Сравните Ваши результаты с результатами зад. 5.9. Сформулируйте и докажите соответствующую теорему.

Задача 5.13. Сформулируйте и докажите правило для раскрытия скобок у $(a+b)^n$ при помощи треугольника Паскаля.

Разбиения в суммы квадратов. Поэкспериментируем теперь с многоугольными числами. Уже две с половиной тысячи лет назад математиков стали занимать вопросы такого рода: какие числа можно представить в виде суммы двух треугольных чисел, а какие нельзя? А какие числа можно представить в виде суммы двух или трех квадратных чисел? Какие числа можно представить в виде суммы треугольного, квадратного и пятиугольного? Условимся при этом считать многоугольным числом и нуль, поставив его в ряды треугольных, четырехугольных, пятиугольных и т. п. чисел под нулевым номером.

Задача 5.14. Выясните, какие из первых ста чисел представляются, а какие не представляются в виде суммы а) двух б) трех треугольных чисел[1]. Четко сформулируйте возникшие у Вас гипотезы и проверьте их на второй сотне чисел.

Теперь нам опять потребуется клетчатая бумага. Будем считать, что сторона клетки равна 1. Тогда площадь клетки тоже будет равна 1. Назовем «прямым» квадрат, стороны которого идут по линиям клетчатой бумаги, а вершины расположены в узлах клеток. Квадрат с вершинами в узлах клеток, но сторонами *не параллельными* линиям бумаги мы будем называть «косым» (см. рис. 5.2).

[1] Подумайте над тем, какая таблица облегчила бы Вам работу в этой задаче, и как в экспериментах пункта (Б) можно использовать результаты экспериментов из пункта (А).

Задача 5.15. Нарисуйте косые квадраты с площадями 2, 5, 17 (и *докажите*, что нарисованные Вами четырехугольники действительно являются квадратами!).

Задача 5.16. Верно ли, что площадь любого косого квадрата — целое число?

Задача 5.17. Существуют ли косые квадраты площади 3 и 7?

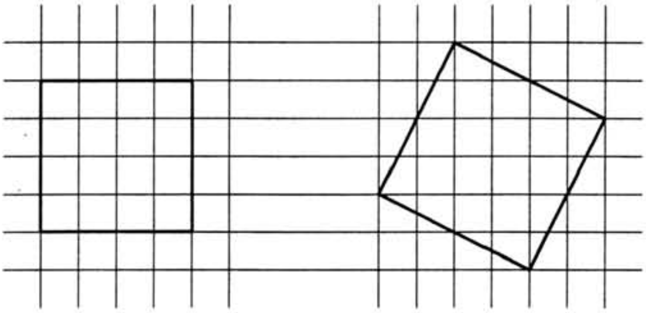


Рис. 5.2. Прямой и косой квадраты.

Задача 5.18*. Какие числа из первой сотни являются площадями косых или прямых квадратов?

Задача 5.19*. Какие числа из первой сотни представляются в виде суммы двух квадратов? Выпишите все эти числа и разложите их на простые множители. Глядя на свои экспериментальные данные, выясните:

а) какой остаток от деления на 4 имеют те простые множители, которые входят в полученные Вами разложения в нечетных степенях;

б) верно ли, что если два числа представляются в виде суммы двух квадратов, то их произведение тоже представляется в виде суммы двух квадратов.

Задача 5.20*. Какие числа из первой сотни можно представить в виде суммы трех квадратов, а какие нельзя? Какие простые множители и с какими показателями встречаются в разложении тех и других чисел?

Рассматривая представления целых чисел в виде суммы квадратов, Лагранж доказал следующую замечательную теорему[1].

Теорема Лагранжа: *каждое натуральное число является суммой четырех квадратов (среди которых могут быть и нулевые).*

Задача 5.21. Проверьте эту теорему для чисел из первой сотни.

Задача 5.22. Решая зад. 2.4 и зад. 2.5, Вы, наверное, заметили, что среди первых десяти треугольных чисел встречаются и квадраты, например, 1, но есть и еще. Какое?

---

[1]Впрочем, хоть эта теорема и носит имя Лагранжа, она, видимо, была известна еще Диофанту. Ее доказательство и дальнейшие подробности можно прочитать в замечательной книге: *К. Айерленд, М. Роузен. Классическое введение в современную теорию чисел.* М., «Мир», 1987.

Постарайтесь найти и еще одно (третье) одновременно треугольное и квадратное число.

Задача 5.23*. Как найти все одновременно треугольные и квадратные числа? Конечно ли их число?

§ 6 Бесконечные десятичные дроби

Вы, наверное, знаете, что существуют числа рациональные и иррациональные. Напомним, что число r называется *рациональным*, если его можно представить в виде обыкновенной дроби, т. е. в виде отношения двух целых чисел $r = p/q$. В противном случае, число r называется *иррациональным*. Например, числа $-196/17$, $1/2$, $1/3$, а также $1 = 1/1$, $0 = 0/1$ — рациональные, тогда как число $\sqrt{2}$ — иррациональное, его нельзя представить в виде обыкновенной дроби. Часто вместо обыкновенных дробей используются десятичные дроби. Чтобы представить, скажем, $1/3$ в виде десятичной дроби необходимо выполнить деление «уголком»:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;1{,}0 & 3 \\ \cline{2-2}
\underline{9} & 0{,}333\ldots \\
-\;10 & \\
\underline{9} & \\
-\;10 & \\
\underline{9} & \\
\ldots &
\end{array}
$$

Этот процесс можно продолжать до бесконечности, так что в ответе мы получаем бесконечную десятичную дробь. Такую дробь называют *периодической*, поскольку ее запись, начиная с некоторого места, состоит из бесконечно повторяющейся цифры 3. Иногда это обозначают так: $0,(3)$ и говорят «ноль целых и три в периоде», но мы будем чаще придерживаться обозначения $0,333\ldots$, где точки говорят о том, что тройка повторяется до бесконечности.

Рассмотрим еще один пример: $5\,\dfrac{17}{37} = 5 + \dfrac{17}{37}$; делим 17 на 37 уголком:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;17{,}0 & 37 \\ \cline{2-2}
\underline{148} & 0{,}4594\ldots \\
-\;220 & \\
\underline{185} & \\
-\;350 & \\
\underline{333} & \\
-\;170 & \\
\underline{148} & \\
\ldots &
\end{array}
$$

Дальше вычисления будут повторяться, так что $5\,\dfrac{17}{37} = 5,(459)$.

Задача 6.1. Запишите в виде бесконечных десятичных дробей числа: $1/7$, $3/14$, $5/11$, $1/17$, $3/13$, $3/250$, $7/625$, $1/15$.

Решая задачу, Вы, должно быть, заметили, что возникающая в результате деления десятичная дробь либо с некоторого места становится периодической, либо конечна. Скажем, $7/30 = 0,2333\ldots = 0,2(3)$, а $1/25 = 0,04$. Впрочем, конечную десятичную дробь также можно рассматривать как бесконечную периодическую: $0,04 = 0,04000\ldots = 0,04(0)$.

Задача 6.2. Докажите, что каждое рациональное число может быть записано в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

Задача 6.3. Какие обыкновенные дроби p/q дают в десятичной записи конечные дроби, а какие — бесконечные?

Поглядим теперь на связь между обыкновенными и десятичными дробями с противоположного конца. Пусть дана бесконечная периодическая десятичная дробь, скажем, $0,575757\ldots = 0,(57)$ или $0,12500\ldots = 0,125(0) = 0,125$. Можете ли Вы подобрать такую обыкновенную дробь, которая даст ее при переводе в десятичную?

Со вторым примером разобраться легко: $0,125 = 125/1000 = 1/8$. А вот в первом примере подобрать ответ не так-то и просто. В связи с этим возникает вопрос: а любую ли бесконечную периодическую дробь можно превратить в обыкновенную?

Метод Архимеда. Один из способов решения первой задачи восходит к Архимеду. Он состоит в том, что дробь $0,5757\ldots$ нужно обозначить через x и затем составить на x уравнение, из которого его можно было бы найти. Итак, пусть

$$x = 0,575757\ldots .$$

Умножив это равенство на $0,01$, получим:

$$0,01\,x = 0,005757\ldots .$$

Вычтем теперь второе равенство из первого:

$$x - 0,01\,x = 0,57 .$$

Таким образом, $x\cdot\left(1-\dfrac{1}{100}\right) = \dfrac{57}{100}$, откуда $x = \dfrac{57}{100} : \dfrac{99}{100} = \dfrac{19}{33}$. Проверим правильность ответа:

$$\begin{array}{rl}
-\,19{,}0 & \big|\,33 \\
\underline{165} & \big|\,\overline{0{,}575\ldots} \\
-\,250 & \\
\underline{231} & \\
-\,190 & \\
\underline{165} & \\
\ldots &
\end{array}$$

Задача 6.4. Каким рациональным числам соответствуют бесконечные периодические дроби:

а) $0,777\ldots$ б) $0,363636\ldots$ д) $0,3121212\ldots$
в) $0,135135\ldots$ г) $0,714685714685\ldots$ е) $0,9999\ldots$

Задача 6.5. Докажите, что любая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом.

В качестве следствия мы получаем, в частности, что бесконечная десятичная дробь

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016 89\ldots$$

не является периодической.

Задача 6.6. Приведите еще примеры десятичных дробей, не являющихся рациональными числами. Рационально ли число $0{,}1\,00\,1\,0000\,1\,000000\,1\,000\ldots$, у которого единицы стоят на 1-м, 4-м, 9-м, 16-м, 25-м, 36-м и т. д. местах, а в остальных местах — нули?

Задача 6.7. Какие числа x «зашифрованы» следующими записями:

а) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$ б) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$ в) $\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\cdots}}}$

Задача 6.8. Найдите:

а) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\cdots}}}$ б) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\cdots}}}}$ в) $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\cdots}}}}$

Задача 6.9. Докажите неравенство $\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}}_{2000\ \text{радикалов}} < 3$

Задача 6.10. Докажите следующее правило перевода бесконечной периодической дроби в обыкновенную: $0,a_1\ldots a_n(b_1\ldots b_m) = p/q$, где

$$p = \overline{a_1\ldots a_n\,b_1\ldots b_m} - \overline{a_1\ldots a_n}$$

$$q = \underbrace{99\ldots9}_{m}\ \underbrace{00\ldots0}_{n}$$

где запись $\overline{a_1\,a_2\ldots a_n}$, как обычно, обозначает n-значное число, составленное из цифр $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Например, $0{,}21516161616\ldots = \dfrac{21516-215}{99000}$.

§ 7 Геометрическая прогрессия

Парадокс Зенона. Зенон Элейский (V в. до Р.Х.), занимаясь весьма сложными вопросами о природе движения, предложил следующее рассуждение, называемое теперь парадоксом Зенона. Представим себе Ахиллеса, который собирается догнать черепаху, находящуюся от него на расстоянии одной стадии (примерно 200 *м*). Предположим, что Ахиллес идет вдвое быстрее черепахи. Пока Ахиллес дойдет до первоначального положения черепахи, она уползет от него на половину стадии. Пока Ахиллес будет идти эти полстадии, черепаха уползет еще на четверть стадии. Затем Ахиллесу останется до черепахи 1/8 стадии, на которые она уползет, пока он будет идти эту четверть, потом 1/16, 1/32 и так далее. В результате весь путь Ахиллеса до момента, когда он нагонит черепаху, оказывается разбитым на бесконечное число последовательных участков, каждый из которых вдвое короче предыдущего, и возникает знаменитый парадокс Зенона: с одной стороны, Ахиллес догонит черепаху, ибо идет быстрее, с другой — он без конца отстает от нее на длину очередного участка.

Рассмотрим внимательно парадокс Зенона. Как и большинство подобных рассуждений, он похож на фокус. Демонстрируя фокус, иллюзионист обычно отвлекает внимание публики от причин происходящего. Так и Зенон — в своем рассуждении он все время говорит о расстоянии, отвлекая наше внимание от такой величины, как время. Между тем, время, за которое Ахиллес догонит черепаху, посчитать совсем не сложно — в наши дни подобные задачи «проходят» в пятом классе и формулируют примерно так:

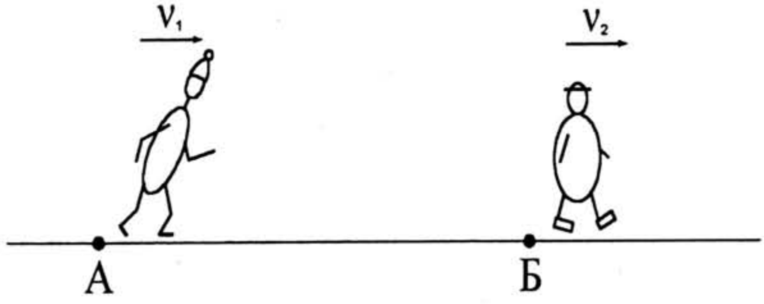


Рис. 7.1. Два пешехода.

Задача 7.1. Из пунктов A и $Б$, расположенных на расстоянии 1 *км* друг от друга, одновременно и в одном и том же направлении вышли два пешехода со скоростями v_1 *км/ч* и v_2 *км/ч*, причем $v_1 > v_2$ (см. рис. 7.1). Через какое время они встретятся и сколько пройдет каждый из них до момента встречи?

Задача 7.2. Пусть Ахиллес (первый пешеход) идет со скоростью v стадий в час, а черепаха вдвое медленнее. Выясните:

а) за какое время Ахиллес догонит черепаху;

б) за какое время Ахиллес и черепаха пройдут свои первые отрезки;

в) за какое время Ахиллес и черепаха пройдут свои n-ые отрезки;

г) какой суммой выражается время, за которое Ахиллес пройдет свои первые n отрезков;

д) как выглядит соответствующая бесконечная сумма;

е) равна ли эта сумма числу, полученному методом зад. 7.1?

Задача 7.3. Запишите общий путь, пройденный Ахиллесом, в виде бесконечной суммы и вычислите эту сумму[1], найдя путь обычным способом — как в зад. 7.1.

Задача 7.4. При помощи зад. 7.1 решите зад. 7.2 и зад. 7.3 в предположении, что

а) Ахиллес идет в 10 раз быстрее черепахи;

б) отношение скорости черепахи к скорости Ахиллеса равно q (где, разумеется, $0 < q < 1$).

Какие суммы Вы при этом вычислили?

Задача о делении пирога. На свои именины Алеша угощал своих шестерых гостей пирогом. Сначала пирог был разрезан на 7 равных частей и разложен по тарелкам. Гости свои куски съели, а Алеша разделил свою часть пирога на 7 равных частей и роздал их гостям. Те снова съели свои порции, а Алеша опять разделил свою долю на 7 равных частей и т. д. Понятно, что через некоторое время от пирога осталось лишь несколько крошек, прилипших к ножу и тарелкам.

Задача 7.5. Какая часть пирога осталась у Алеши, а какие досталась гостям после первого, второго, и n-ого разрезания? Запишите в виде бесконечной суммы ту часть пирога, что съели гости (а съели-то они весь пирог!). Чему равна написанная Вами сумма?

Задача 7.6. Запишите в виде суммы ту часть пирога, которая оказалась съеденной после n-го разрезания. Чему равна эта сумма?

В истории с делением пирога, как и в парадоксе Зенона, возникают последовательности чисел, в которых каждое очередное число в одно и то же фиксированное число раз меньше предыдущего. Такие последовательности называют *геометрическими прогрессиями*.

[1] не встречались ли Вы уже с этой задачей в § 5?

Определение. *Последовательность, каждый следующий член которой получается из предыдущего умножением на одно и то же число q, где $q \neq 0$ и $q \neq 1$, называется **геометрической прогрессией**, а это число q называется **знаменателем** геометрической прогрессии.*

Таким образом, в геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots, b_k$ со знаменателем q мы имеем $q = b_2/b_1 = b_3/b_2 = \cdots = b_k/b_{k-1}$, $q \neq 0$, $q \neq 1$.

Например, бесконечная последовательность: 1, 2, 4, 8, 16, ... — это (бесконечная) геометрическая прогрессия со знаменателем 2, а конечная последовательность: 27, 9, 3, 1, 1/3, 1/9, 1/27 — это (конечная) геометрическая прогрессия со знаменателем 1/3. Набор из двух чисел, скажем, $\{7, 11\}$ тоже можно рассматривать как (совсем коротенькую) геометрическую прогрессию со знаменателем 11/7. Еще один пример геометрической прогрессии доставляет последовательность $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$. Каков тут знаменатель?

Задача 7.7. Какие геометрические прогрессии Вы просуммировали в зад. 7.1 и зад. 7.5 ?

Задача 7.8. Вычислите суммы (ответ обоснуйте):

а) $\dfrac{k-1}{k} + \dfrac{k-1}{k^2} + \cdots + \dfrac{k-1}{k^n} + \cdots$.

б) $\dfrac{k-1}{k} + \dfrac{k-1}{k^2} + \cdots + \dfrac{k-1}{k^-n}$.

Еще раз о методе Архимеда. Вернемся теперь ненадолго к бесконечным десятичным дробям (см. § 6) и вспомним, как мы из бесконечной периодической десятичной дроби получали обыкновенную:

$$
\begin{array}{rl}
 & x = 0,575757\ldots \\
- & 0,01\,x = 0,005757\ldots \\
\hline
 & 0,99\,x = 0,57 \quad \Longrightarrow \quad x = 57/99
\end{array}
$$

Оказывается, и здесь спрятана геометрическая прогрессия!

Задача 7.9. Убедитесь, что последовательности $0,1,\ 0,01,\ 0,001,\ \ldots$ и $0,57,\ 0,0057,\ 0,000057,\ \ldots$ являются (бесконечными) геометрическими прогрессиями. Какие у них знаменатели? Чему равны их суммы? Выразите эти суммы десятичными и обыкновенными дробями.

Эта задача позволяет смотреть на метод Архимеда как на еще один способ вычисления суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$
\begin{array}{rl}
 & S = \dfrac{57}{100} + \dfrac{57}{100^2} + \dfrac{57}{100^3} + \cdots \\
- & \dfrac{1}{100}S = \dfrac{57}{100^2} + \dfrac{57}{100^3} + \cdots \qquad \Longrightarrow \qquad S = \dfrac{57}{99} \\
\hline
 & \dfrac{99}{100}S = \dfrac{57}{100}
\end{array}
$$

Задача 7.10. Вычислите методом Архимеда суммы

а) бесконечную: $\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\frac{5}{27}+\cdots$; б) конечную: $\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\cdots+\frac{5}{3^n}$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Теперь все готово к тому, чтобы написать общую формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Задача 7.11. Пусть a_0, a_1, a_2 ... — бесконечная убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем q. Докажите, что ее сумма равна

$$a_0+a_1+a_2+\cdots=\frac{a_0}{1-q}$$

Заметим, что мы обсудили уже целых три подхода к суммированию бесконечных геометрических прогрессий — это зад. 7.3 (движение), зад. 7.5 (деление пирога) и зад. 7.10 (а) (Архимедов метод составления уравнения). Попробуйте доказать предыдущую формулу каждым из этих трех методов.

Задача 7.12. Получите ответ в зад. 7.3, зад. 7.2, зад. 7.5, зад. 7.9, зад. 7.10 (а), пользуясь формулой для суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Задача 7.13. Воспользовавшись формулой для суммы бесконечной геометрической прогрессии, запишите обыкновенными дробями числа:

$0,575757\ldots$, $0,36363636\ldots$, $0,714714\ldots$, $0,3121212\ldots$.

В какую обыкновенную дробь превратит эта формула число $0,a_1\ldots a_n(b_1\ldots b_m)$?

Предостережение. В этом параграфе мы не раз вычисляли сумму бесконечного числа слагаемых, не задаваясь вопросом правомерности таких действий. Основанием для нас, конечно, служила геометрическая или физическая ясность происходящего, ведь суммы каждый раз имели вполне конкретный «материальный» смысл. Следует, однако, иметь в виду, что осмысленно говорить о сумме бесконечного числа слагаемых можно далеко не всегда. Например, не стоит и пытаться искать значение суммы

$$1+2+4+8+16+\cdots+2^n+\cdots$$

поскольку с увеличением числа слагаемых она неограниченно растет. Еще хуже дело обстоит с суммой $S=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$ (бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем -1). На первый взгляд, естественно считать, что

$$S=1-1+1-1+1-1+\cdots=(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots=0$$

Однако, ведь скобки можно было бы расставить и по-другому, скажем, так:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots =$$
$$= 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) = 1 - 0 - 0 - 0 - \cdots = 1$$

К еще более удручающему результату приводит метод составления уравнения:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S$$

откуда $S = 1 - S$, а значит, $2S = 1$ и $S = 1/2$. Единственный разумный вывод может состоять в том, что сумме $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ нельзя приписать какого-нибудь числового значения[1].

Не подвергает ли это сомнению и наши предшествующие результаты? К счастью, можно доказать (мы этого делать не будем), что вычисление суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем q корректно в случае $|q| < 1$, к которому как раз и относятся все предыдущие (и последующие в дальнейшем) примеры.

[1]Не следует, однако, воспринимать это замечание как окончательный приговор. Иногда, особенно в физике, специфика конкретной задачи позволяет указать естественный для этой задачи способ вычисления той или иной «бессмысленной суммы», приводящий к физически осмысленному ответу; так что в одной задаче разумно считать, что $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 0$, а в другой, что $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1/2$.

§ 8 Ещё о суммировании геометрических прогрессий

Задача 8.1. Суммами каких геометрических прогрессий являются числа

а) $\underbrace{77\ldots7}_{2000\text{ раз}}$ б) $0,\underbrace{1313\ldots13}_{2000\text{ раз}}$ в) $0,131313\ldots$?

Задача 8.2. Приведите пример бесконечной геометрической прогрессии, сумма которой

а) в два раза больше ее первого члена;

б) в три раза больше ее первого члена;

в) в три раза меньше ее первого члена;

г) в два раза меньше ее первого члена.

Задача 8.3. Пусть a_1, a_2, ... — геометрическая прогрессия со знаменателем q. Понятно, что $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$. Выразите a_n через a_1 и n (т. е. напишите «формулу общего члена»).

Задача 8.4. (Сумма конечной геометрической прогрессии) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — конечная геометрическая прогрессия из n элементов со знаменателем q, где q *любое* число не равное нулю или единице. Докажите, что ее сумма

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Интересно, кого Вы, решая эту задачу, выбрали себе в помощники — Архимеда, Ахиллеса или праздничный пирог? Между тем имеется еще одна точка зрения на формулу для суммы геометрической прогрессии. Для начала вспомним известные формулы для разности квадратов и разности кубов:

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \qquad x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) \qquad x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

и попробуем продолжить эти ряды дальше вниз (заполните пропуски):

$$x^4 - y^4 = (x-y)(\ldots+\ldots+\ldots+\ldots) \qquad x^4 - 1 = (x-1)(\ldots+\ldots+\ldots+\ldots)$$
$$x^5 - y^5 = (x-y)(\ldots+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots) \qquad x^5 - 1 = (x-1)(\ldots+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots)$$

Задача 8.5. Что по-Вашему нужно поставить вместо многоточий в формулах

$$x^n - y^n = (x-y)(\quad \ldots \quad) \quad \text{и} \quad x^n - 1 = (x-1)(\quad \ldots \quad)$$

Докажите высказанные Вами гипотезы (например, раскрыв скобки) и выведите из этих формул формулы для суммирования конечных геометрических прогрессий.

Итак, на формулу для суммы геометрической прогрессии можно смотреть как на обобщение формулы для разности кубов.

Задача 8.6. Что Вы можете сказать по поводу $x^n + y^n$ (хотя бы для некоторых n) ?

Средние геометрические. Название «геометрическая прогрессия» связано с таким ее замечательным свойством: каждый член геометрической прогрессии, за исключением крайних[1], является, с точностью до знака, средним геометрическим своих соседей. Напомним, что положительное число a называется *средним геометрическим* (или *средним пропорциональным*) двух положительных чисел b и c, если $a = \sqrt{bc}$ (см. рис. 8.1), что иначе можно записать как $a^2 = bc$, или как $c/a = a/b$.

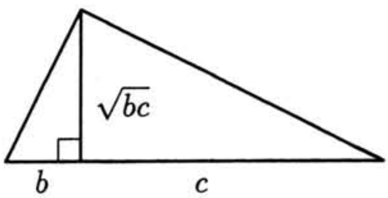


Рис. 8.1. Среднее геометрическое.

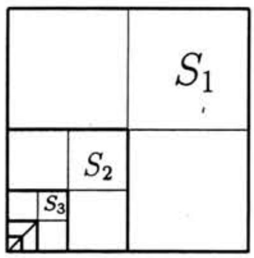


Рис. 8.2. Деление квадрата на 4 части.

Задача 8.7. Докажите, что в геометрической прогрессии, составленной из положительных чисел, каждый член, кроме крайних, равен среднему геометрическому своих соседей.

Задача 8.8. Докажите и обратное утверждение: последовательность, у которой каждый член равен среднему геометрическому своих соседей, является геометрической прогрессией.

Задача 8.9. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия (составленная, например, из целых чисел). Покажите, что для любого числа q, где $q \neq 0$ и $q \neq 1$, последовательность q^{a_1}, q^{a_2}, …, q^{a_n} является геометрической прогрессией.

Какое свойство последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обеспечивает для геометрической прогрессии q^{a_1}, q^{a_2}, …, q^{a_n} выполнение утверждения из зад. 8.7?

Задача 8.10. Вычислите сумму $1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots111}_{\text{2000 единиц}}$.

Задача 8.11. Рассмотрим квадрат с площадью S. Разобьем его на 4 одинаковых квадрата и рассмотрим уголок, составленный из трех таких квадратов. Четвертый квадрат снова разобьем на 4 одинаковых квадрата, из трех из них составим уголок, а с четвертым проделаем ту же операцию и так далее (см. рис. 8.2), пока весь квадрат не окажется разбит на уголки одинаковой формы, но разного размера.

[1] т. е. первого, а если прогрессия конечная, — то и последнего

а) Докажите, что площади этих уголков S_1, S_2, $S_3 \ldots$ составляют геометрическую прогрессию. Найдите S_n.

б) Выпишите явно и вычислите конечную сумму $S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ и бесконечную сумму $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots$.

Задача 8.12*. Решите предыдущую задачу для случая, когда каждый раз квадрат делится на m^2 равных квадратов, а уголок берется шириной в $m - 1$ квадрат (для $m = 3$ это нарисовано на рис. 8.3).

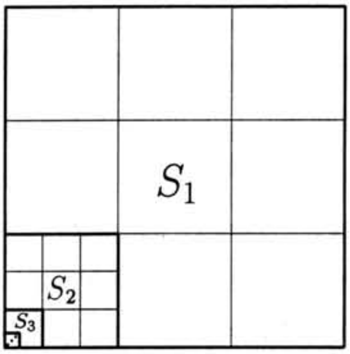


Рис. 8.3. Толстые уголки.

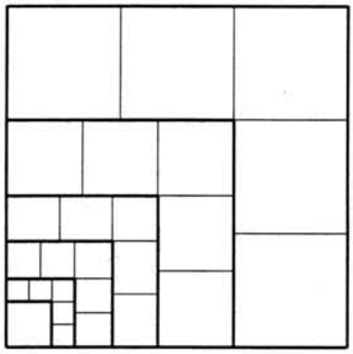


Рис. 8.4. Тонкие уголки.

Задача 8.13*. Решите предыдущую задачу для случая, когда уголок берется шириной в 1 квадрат (см. рис. 8.4 для $m = 3$)

Задача 8.14. В кубке по футболу участвует 256 команд. Кубок разыгрывается по олимпийской системе — проигрывающий выбывает. Сколько нужно провести матчей, чтобы определить обладателя кубка?

Задача 8.15. Торговец принес на рынок мешок орехов. Первый покупатель купил один орех, второй — два ореха, третий — четыре, четвертый — восемь и т. д.: каждый следующий покупатель покупал вдвое больше орехов, чем предыдущий. Последний купил 50 кг, после чего у продавца остался один орех. Сколько килограммов орехов было у продавца вначале?

Задача 8.16. На овощебазу завезли тонну картофеля. Директору базы разрешено за 1 раз направить в магазин не более десятой части от имеющегося на данный момент на овощебазе картофеля. Удастся ли ему реализовать хотя бы половину поступившего картофеля? А 900 кг? А 999 кг?

Задача 8.17. (Проблема раздела наследства)

а) Старший из двух братьев получил наследство и отдал младшему брату половину полученной им суммы. Тот, из уважения к старшинству, возвратил половину полученной суммы старшему брату, старший же снова вернул половину младшему брату, и так далее. В каком отношении в конце концов будет разделено наследство между братьями?

б) Как будет разделено наследство, если каждый брат возвращает другому не половину, а одну n-тую часть полученной перед этим доли?

в) Какую часть должен возвращать каждый, чтобы в результате один получил 51%, а другой — 49%?

г) Какую часть должен возвращать каждый, чтобы в результате они поделились поровну?

Задача 8.18*. Имеется n гирь. Можно ли из них набрать две равные по весу кучи, если веса гирь суть

а) $1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n$ граммов? б) $1, 3, 9, 27, 81, \ldots, 3^n$ граммов?

Задача 8.19. Сережа возвращается из леса домой по дороге, длина которой 10 км. Как только Сережа вышел на дорогу, его верный пес Бим пустился бежать к дому, а добежав до дома, немедленно повернул и побежал обратно к Сереже; добежав до Сережи, вновь побежал к дому и т.д. до тех пор, пока Сережа не пришел домой. Скорости Сережи и Бима были все время постоянны по величине и равны соответственно 5 км/ч и 15 км/ч. Найдите, сколько километров пробежал Бим:

а) всего; б) по направлению к дому; в) по направлению от дома.

§ 9 Другие приёмы суммирования

Как Вы могли заметить, все нити предыдущего изложения были привязаны к суммированию арифметической и геометрической прогрессий. Глядя на эти суммы с разных точек зрения, мы нашли несколько способов для их вычисления: в § 2 появились треугольные числа — частный случай арифметической прогрессии; в § 3 разнообразные разрезания позволили вычислять суммы и других арифметических прогрессий; в § 4 сумма арифметической прогрессии была (двумя способами) вычислена при помощи подходящего группирования слагаемых. Для вывода формулы суммирования геометрической прогрессии также было предложено четыре способа: два были связаны с Ахиллесом и Архимедом, третий — с разрезанием пирога, и еще один возник из формул типа разности кубов.

В этом параграфе мы познакомим Вас с еще несколькими приемами суммирования, не связанными напрямую с суммированием прогрессий. Мы начнем с того, что вспомним зад. 5.2, где надо было вычислить сумму

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\,.$$

Выполняя в свое время школьные упражнения по сложению и вычитанию правильных дробей, Вы могли заметить, что дроби типа $1/6$, $1/12$ или $1/20$ возникают из более простых:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\quad,\qquad \frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\quad,\qquad \frac{1}{20}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$$

Это относится ко всем членам суммы, поскольку

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

для любого k (обязательно проверьте это!). Таким образом,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Если теперь раскрыть скобки, то все слагаемые, кроме двух крайних, сократятся и мы получим

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\,.$$

Суммирование разностей. Показанный только что прием называется *суммированием разностей*. Он состоит в том, что каждое слагаемое суммы представляется в виде разности двух чисел так, чтобы после раскрытия скобок все «промежуточные» члены сократились и остались лишь два крайних слагаемых.

Задача 9.1. Вычислите $1+3+\cdots+(2n+1)$ суммированием разностей. Какая картинка на клетчатой бумаге соответствует Вашему вычислению?

Задача 9.2. Найдите $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!$ и $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$. Чему равна бесконечная сумма $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots$?

Задача 9.3. Вычислите суммы:

а) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 101}$

б) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100\cdot 101}$

в) $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$, где числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ составляют арифметическую прогрессию.

Решая эти задачи, Вы, видимо, догадались, как можно обобщить метод суммирования разностей — каждый член исходной суммы надо постараться представить в виде суммы или разности нескольких слагаемых так, чтобы после раскрытия скобок бо́льшая их часть сокращалась между собой или легко складывалась. При этом каждый член исходной суммы может расщепиться и на два, и на три, и на четыре слагаемых. Более того, количество промежуточных слагаемых может быть своим для каждого члена суммы. Поясним эту мысль решением следующей задачи.

Задача 9.4. Чему равна сумма $1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots+n\cdot 2^n$?

Запишем каждое слагаемое в виде $k\cdot 2^k=\underbrace{2^k+2^k+\cdots+2^k}_{k\text{ штук}}$. Тогда исходная сумма представится треугольной таблицей:

$$
\begin{array}{rcccccccc}
\multicolumn{9}{l}{1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n=}\\
=2+ & 2^2 & + & 2^3 & +\cdots+ & 2^{n-1} & + & 2^n & +\\
+ & 2^2 & + & 2^3 & +\cdots+ & 2^{n-1} & + & 2^n & +\\
 & & + & 2^3 & +\cdots+ & 2^{n-1} & + & 2^n & +\\
 & & & & \cdots & \cdots & & \cdots & \\
 & & & & + & 2^{n-1} & + & 2^n & +\\
 & & & & & & + & 2^n &
\end{array}
$$

Ее строки суть геометрические прогрессии со знаменателем 2. Поэтому сумма чисел в первой строке равна $2+2^2+\cdots+2^n=2\cdot\frac{2^n-1}{2-1}=2^{n+1}-2$, во второй строке — $2^2+2^3+\cdots+2^n=2^2\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=2^{n+1}-2^2$, в третьей — $2^{n+1}-2^3$, и т. д. В последней строке стоит 2^n, которое мы для единообразия тоже представим как $2^{n+1}-2^n$. Таким образом, вся сумма будет равна

$$(2^{n+1}-2)+(2^{n+1}-4)+\cdots+(2^{n+1}-2^n)=$$
$$=\Big(\underbrace{2^{n+1}+2^{n+1}+\cdots+2^{n+1}}_{n\text{ раз}}\Big)-\Big(2+4+\cdots+2^n\Big)=n\cdot 2^{n+1}-2\cdot\frac{2^n-1}{2-1}=$$
$$=n\cdot 2^{n+1}-(2^{n+1}-2)=2+2^{n+1}(n-1).$$

Теперь давайте разберемся в том, что мы сделали.

Метод двойного суммирования. Решая предыдущую задачу, мы представили исходную сумму в виде суммы *таблицы* чисел, которую можно складывать в двух направлениях — по строкам и по столбцам. Такие суммы называются *двойными суммами*. Коротко наше преобразование можно записать так:

$$\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^k=\sum_{k=1}^{n}\Big(\underbrace{2^k+2^k+\cdots+2^k}_{k\text{ раз}}\Big)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}2^k$$

Затем, вместо того, чтобы суммировать таблицу по столбцам (именно такое суммирование дает наши исходные слагаемые $k\cdot 2^k$), мы просуммировали ее по строкам, где стоят геометрические прогрессии:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}2^k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}2^k=\sum_{i=1}^{n}\left(2^{n+1}-2^i\right)=n\,2^{n+1}-\sum_{i=1}^{n}2^i=(n-1)\,2^{n+1}+2$$

Преобразование обычной суммы в двойную с последующим изменением порядка суммирования мы будем называть *методом двойного суммирования*. Как мы уже упоминали выше, этот метод работает, если каждый член суммы, в свою очередь, представляется как некоторая сумма.

Задача 9.5. Выведите общую формулу для $1\cdot q+2\cdot q^2+3\cdot q^3+4\cdot q^4+\cdots+n\cdot q^n$.

Задача 9.6. Вычислите (если Вы ее до сих пор этого не сделали) сумму

$$1+11+111+1111+\cdots+\underbrace{111\ldots1}_{n}\,.$$

Задача 9.7. Найдите суммы

а) $n\cdot x+(n-1)\cdot x^2+(n-2)\cdot x^3+\cdots+2\cdot x^{n-1}+1\cdot x^n$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot(k+1)\cdot x^k$;

в) $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\frac{17}{16}+\cdots$ (всего n слагаемых).

Суммирование степеней. Посмотрим теперь на суммирование разностей, отправляясь от заранее предписанного результата вычислений. Пусть, например, итоговая сумма представилась в виде:

$$\begin{aligned}(1^2-0^2)+(2^2-1^2)+(3^2-2^2)+(4^2-3^2)+\cdots+((n+1)^2-n^2)=\\ =(n+1)^2-0^2=(n+1)^2\,.\end{aligned}$$

Какую исходную сумму мы могли бы таким образом вычислять? Общий член этой суммы должен быть равен $a_k=(k+1)^2-k^2=2k+1$. Значит, суммируя разности квадратов последовательных чисел, мы вычисляем сумму первых n нечетных чисел:

$$1+3+5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2\,.$$

Это позволяет сосчитать и сумму $1+2+\cdots+n$ всех первых n чисел. Действительно, из

$$\begin{aligned}(n+1)^2&=1+3+5+\cdots+(2n+1)=\\ &=(2\cdot 0+1)+(2\cdot 1+1)+(2\cdot 2+1)+\cdots+(2\cdot n+1)=\\ &=2\cdot(0+1+2+\cdots+n)+\Big(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{(n+1)\text{ раз}}\Big)=\\ &=2\,(1+2+\cdots+n)+n+1\end{aligned}$$

вытекает, что $2\,(1+2+\cdots+n)+n+1=(n+1)^2$, откуда

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}\left((n+1)^2-(n+1)\right)=\frac{n\,(n+1)}{2}\,.$$

Более выразительно это вычисление можно представить в виде:

$$\begin{array}{lr@{\;=\;}c@{\;=\;}l}
 & (n+1)^2-n^2 & (2n+1)\cdot 1 & 2n+1\\
+ & & & \\
 & n^2-(n-1)^2 & (2n-1)\cdot 1 & 2n-1\\
+ & & & \\
 & (n-1)^2-(n-2)^2 & (2n-3)\cdot 1 & 2n-3\\
+ & & & \\
 & \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
+ & & & \\
 & 3^2-2^2 & (3+2)\cdot 1 & 2\cdot 2+1\\
+ & & & \\
 & 2^2-1^2 & (2+1)\cdot 1 & 2\cdot 1+1\\
+ & & & \\
 & 1^2-0^2 & (1+0)\cdot 1 & 2\cdot 0+1\\
\hline
 & \multicolumn{3}{l}{(n+1)^2=(2n+1)+(2n-1)+(2n-3)+\cdots+5+3+1}
\end{array}$$

Задача 9.8. Какая сумма вычисляется при суммировании разностей кубов пар последовательных натуральных чисел? Используя эту сумму, найдите $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Задача 9.9. Какая сумма вычисляется при суммировании разностей $(n+1)^4 - n^4$? Найдите с ее помощью сумму кубов первых n натуральных чисел.

Задача 9.10. Какая сумма вычисляется при суммировании разностей $q^{n+1} - q^n$, и какие суммы можно сосчитать с ее помощью?

Задача 9.11. Придумайте, как, рассуждая в духе предыдущих трех задач, получить формулу для суммирования геометрической прогрессии.

Мы видим, что вычитая последовательные кубы, можно получить формулу для суммы первых n квадратов, а вычитая четвертые степени, можно получить формулу для суммы кубов. Естественно возникает желание продолжить эту процедуру и получить формулы для сумм пятых, шестых и т. д. степеней. Эта завораживающая задача околдовывала многих великих математиков. Так, Якоб Бернулли (1654–1705) в своей книге *Ars Conjectandi* с гордостью писал о том, что он смог «сложить десятые степени первой тысячи натуральных чисел меньше, чем за половину четверти часа»[1], а в первом номере журнала «Квант» за 1989 г. академик И. М. Гельфанд вспоминал, что в юношеские годы решение этой задачи значительно повлияло на его становление как математика. Итак, обозначим через $S_k(n)$ сумму k-ых степеней первых n натуральных чисел:

$$S_0(n) = 1^0 + 2^0 + \cdots + n^0 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = n$$

$$S_1(n) = 1^1 + 2^1 + \cdots + n^1 = 1 + 2 + \cdots + n = n\,(n+1)/2$$

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \qquad \text{и т. д.}$$

Задача 9.12. Выразите $S_2(n)$ через $S_1(n)$ и $S_0(n)$, затем выразите $S_3(n)$ через $S_0(n)$, $S_1(n)$ и $S_2(n)$. Далее, найдите явные формулы для $S_4(n) = 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$ и $S_5(n) = 1^5 + 2^5 + \cdots + n^5$.

Задача 9.13**. Выразите сумму k-ых степеней натуральных чисел через суммы меньших степеней.

Ответ к последней задаче далеко не прост. Тем не менее, об $S_k(n)$ можно сказать кое-что.

[1]См. уже цитированную нами книгу: *К.Айерленд, М.Роузен. Классическое введение в современную теорию чисел.* М., «Мир», 1987.

Задача 9.14. Докажите, что $S_k(n)$ является многочленом $(k+1)$-ой степени от n и выясните, чему у этого многочлена равны

а) коэффициент при старшей степени n;

б) сумма всех коэффициентов.

Задача 9.15**. Подумайте, что бы Вы могли еще сказать о коэффициентах многочленов $S_k(n)$

Аналитические приемы суммирования. Кроме рассмотренных нами способов, существует множество красивых приемов суммирования, использующих дифференциальное и интегральное исчисление, а также другие методы из математического анализа. Например, суммы вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}$ можно рассматривать как функции от q. Те, кто умеет дифференцировать и интегрировать, легко сообразят, что функция $S(q) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} nq^{n-1}$ есть не что иное как производная от функции $f(q) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Поэтому, $S(q) = f'(q) = \left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Для подсчета же, скажем, суммы $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} q^{n+1}$ нужно, наоборот, проинтегрировать функцию $f(q) = \frac{1}{1-q}$.

§ 10 Суммирование треугольных и квадратных чисел

В этом параграфе мы попытаемся показать, как работают разные приемы суммирования, описанные в этой книге, на примере вычисления сумм треугольных и квадратных чисел. Прочитав этот заключительный параграф, Вы проверите, хорошо ли Вы освоили предыдущие разделы (а если Вы только начали читать книгу с этого места, то получите хорошее представление о всем ее содержании).

Начнем с того, что сумма первых n треугольных чисел легко выражается через сумму первых n квадратов и наоборот:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = 2\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - \frac{n\,(n+1)}{2}$$
$$T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \frac{1}{2}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + \frac{n\,(n+1)}{4}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 + \cdots + T_n &= \frac{1\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 3}{2} + \cdots + \frac{n\cdot(n+1)}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\left(1^2 + 1 + 2^2 + 2 + \cdots + n^2 + n\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + \frac{1}{2}(1 + 2 + \cdots + n) = \\ &= \frac{1}{2}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + \frac{n\,(n+1)}{4}\,. \end{aligned}$$

Поэтому, вычисляя одну сумму, мы одновременно вычисляем и другую.

Геометрическое суммирование. Чтобы подсчитать сумму первых n треугольных чисел геометрически (т. е. разрезая и складывая) нам придется вместо квадратиков использовать кубики, и, тем самым, рисовать объемные картинки. Первое треугольное число теперь изображается одним кубиком, второе — тремя, и т. д., как на рис. 10.1:

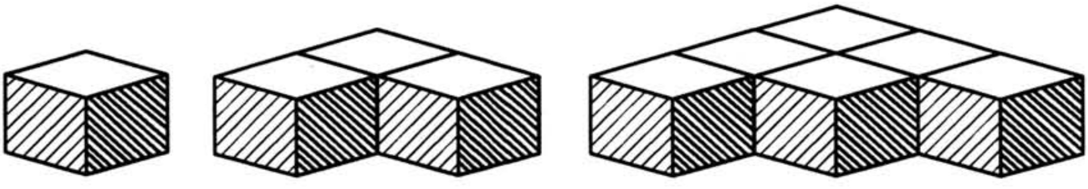


Рис. 10.1. Трехмерное треугольное число.

Поставив друг на друга такие фигурки из кубиков, мы получим пространственное изображение суммы первых n треугольных чисел в виде ступенчатой треугольной пирамиды[1], как на рис. 10.2 (впрочем, желающие могут обойтись без кубиков и глядеть на рис. 10.3). Поэтому сумма $\Pi_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ называется также n-тым *пирамидальным* числом.

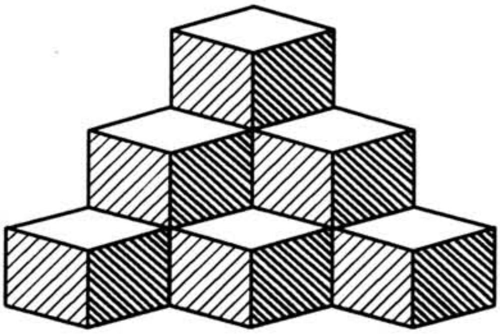


Рис. 10.2.

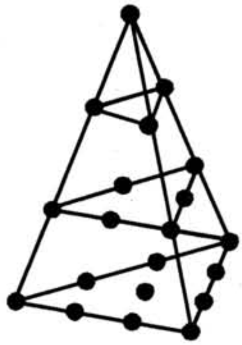


Рис. 10.3.

В § 3 для вычисления n-того треугольного числа мы складывали из двух ступенчатых треугольников прямоугольник, как было показано на рис. 3.2, который на языке кубиков превращается в трехмерную картинку, изображенную на рис. 10.4:

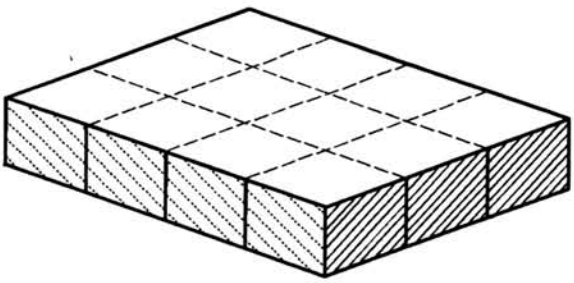


Рис. 10.4.

Подобным же образом, для вычисления n-го пирамидального числа мы дополним пирамиду, показанную на рис. 10.3, до прямой треугольной призмы или же до прямоугольного параллелепипеда — объемы обоих этих тел легко подсчитать.

Дополнение ступенчатой пирамиды высоты n до ступенчатой призмы высоты $n+1$ показано на рис. 10.5:

[1] *треугольная пирамида* или *тетраэдр* — это многогранник, имеющий 4 вершины и 4 треугольных грани

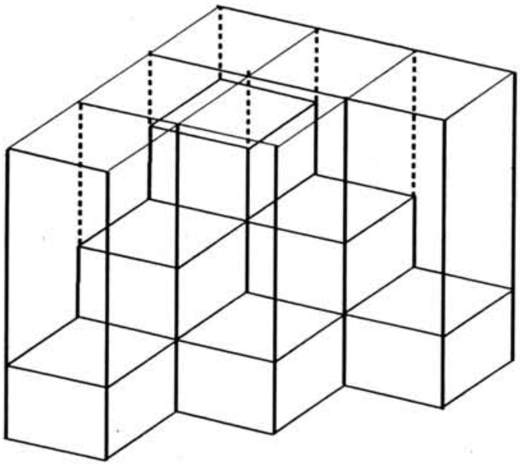


Рис. 10.5.

Задача 10.1. Найдите объем призмы на рис. 10.5 (т. е. выясните, сколько кубиков уходит на ее постройку).

Поглядим теперь на рис. 10.5 повнимательнее. Ступенчатый треугольник, заполняющий k-тый, считая сверху, этаж исходной пирамиды, выступает из-под предыдущего $(k-1)$-ого этажа ровно k крайними кубиками, идущими по его гипотенузе. Чтобы добраться до верха призмы, на каждый из этих k выступающих кубиков нужно поставить столбик высотой в k кубиков. Таким образом, над выступающей частью k-го сверху этажа пирамиды в призме лежит ровно k^2 кубиков. Складывая по всем этажам, получаем, что объем призмы равен

$$T_1+T_2+\cdots+T_n+1^2+2^2+\cdots+n^2=$$
$$=T_1+T_2+\cdots+T_n+2\,(T_1+T_2+\cdots+T_n)-\frac{n\,(n+1)}{2}$$

Теперь остается только воспользоваться результатом из зад. 10.1.

Задача 10.2. Пользуясь зад. 10.1, рис. 10.5 и предыдущими рассуждениями, вычислите суммы $1^2+2^2+\cdots+n^2$ и $T_1+T_2+\cdots+T_n$.

Как мы уже говорили, вместо треугольной призмы можно использовать прямоугольный параллелепипед или куб.

Задача 10.3. Нарисуйте фигуру, остающуюся после вырезания из куба размера $n\times n\times n$ углового кубика размера $(n-1)\times(n-1)\times(n-1)$. Какой у нее объем?

Ответ на первый вопрос задачи нарисован на рис. 10.7. Сообразите, как из таких фигурок сложить куб размера $n\times n\times n$.

Задача 10.4. Вычислите суммы треугольных и квадратных чисел, пользуясь рис. 10.6.

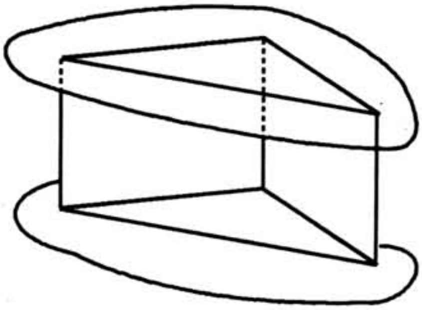


Рис. 10.6.

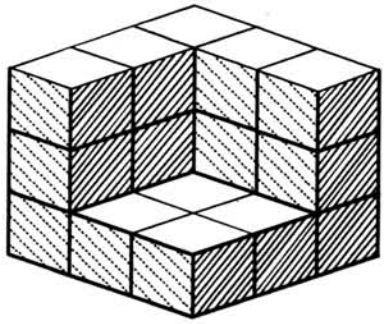


Рис. 10.7.

Двойное суммирование. Найдем теперь сумму первых n треугольных чисел методом двойного суммирования. Поскольку $T_k = 1+2+3+\cdots+k$, мы можем написать

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & T_1 & + & T_2 & + & T_3 & + & \cdots & + & T_{n-1} & + & T_n & = \\
= & 1 & + & 1 & + & 1 & + & \cdots & + & 1 & + & 1 & + \\
 & & + & 2 & + & 2 & + & \cdots & + & 2 & + & 2 & + \\
 & & & & + & 3 & + & \cdots & + & 3 & + & 3 & + \\
 & & & & & & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
 & & & & & & & & + & (n-1) & + & (n-1) & + \\
 & & & & & & & & & & + & n &
\end{array}$$

Дополним эту треугольную таблицу до квадратной

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & + & 1 & + & 1 & +\cdots+ & 1 & + & 1 & + \\
+ & 2 & + & 2 & + & 2 & +\cdots+ & 2 & + & 2 & + \\
+ & 3 & & 3 & + & 3 & +\cdots+ & 3 & + & 3 & + \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \\
+ & (n-1) & + & (n-1) & + & (n-1) & +\cdots+ & (n-1) & + & (n-1) & + \\
+ & n & + & n & + & n & +\,n\,+ & n & + & n &
\end{array}}$$

Сумма чисел в каждом столбце квадратной таблицы равна $T_n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$, и значит, сумма всех чисел в квадратной таблице равна $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$. Подсчитаем теперь, на сколько отличаются суммы чисел в квадратной и треугольной таблицах. Во второй строке мы добавили одну двойку, в третьей — две тройки, т. е. $2\cdot 3$, в четвертой — три четверки, т. е. $3\cdot 4$, и т. д. Наконец, к n-той строке прибавилось $n\,(n-1)$. Таким образом, сумма в квадратной таблице больше в точности на сумму *удвоенных* треугольных чисел, т. е. на

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(n-1)n = 2\,(T_1+\cdots+T_{n-1})\ .$$

Мы получаем соотношение:

$$T_1 + T_2 + \cdots + T_n + 2\left(T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-1}\right) = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

откуда $3\left(T_1 + \cdots + T_n\right) - 2T_n = \dfrac{n^2(n+1)}{2}$, т. е.

$$3\left(T_1 + T_2 + \cdots + T_n\right) = \frac{n^2(n+1)}{2} + n\,(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}\,,$$

и значит, $T_1 + T_2 + \cdots + T_n = \dfrac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(n+2)$. Не правда ли, предложенный только что способ двойного суммирования в чем то похож на предыдущее геометрическое решение?

Задача 10.5. Перепишите Ваше геометрическое решение зад. 10.2 на языке двойного суммирования (при этом Вам придется дополнять треугольную таблицу до прямоугольной!).

Задача 10.6. При помощи двойного или тройного суммирования найдите:

а) сумму квадратов $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$;

б) сумму кубов $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$;

в) сумму первых n пирамидальных чисел $\Pi_1 + \Pi_2 + \cdots + \Pi_n$, где

$$\Pi_k = T_1 + T_2 + \cdots + T_k = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}\,.$$

Применение теоремы сложения. Еще два способа суммирования треугольных чисел основываются на *теореме сложения* из зад. 2.12, согласно которой

$$T_{n+k} = T_n + T_k + n \cdot k\,.$$

С одной стороны, мы можем написать

$$\begin{aligned}
&T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \cdots + T_{2n-1} + T_{2n} = \\
&\quad = (T_1 + T_2) + (T_3 + T_4) + \cdots + (T_{2n-1} + T_{2n}) = 2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 = \\
&\qquad = 4\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) = 8\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - 2\,n\,(n+1)\,.
\end{aligned}$$

С другой стороны, по теореме сложения

$$\begin{aligned}
&T_{n+1} + T_{n+2} + \cdots + T_{n+n} = \\
&\quad = (T_n + T_1 + n \cdot 1) + (T_n + T_2 + n \cdot 2) + \cdots + (T_n + T_n + n \cdot n) = \\
&\qquad = n\,T_n + T_1 + T_2 + \cdots + T_n + n\,(1 + 2 + \cdots + n) = \\
&\qquad\qquad = 2\,n\,T_n + (T_1 + T_2 + \cdots + T_n)\,.
\end{aligned}$$

и мы можем написать

$$T_1+T_2+\cdots+T_n+T_{n+1}+\cdots+T_{2n}=$$
$$=(T_1+T_2+\cdots+T_n)+2n\,T_n+(T_1+T_2+\cdots+T_n)=$$
$$=2\,(T_1+T_2+\cdots+T_n)+2\,n\,T_n\ .$$

Сравнивая два полученных выражения для суммы $T_1+\cdots+T_{2n}$, мы заключаем, что

$$8\,(T_1+T_2+\cdots+T_n)-2\,n\,(n+1)=2\,(T_1+T_2+\cdots+T_n)+2\,n\,T_n\ ,$$

откуда $6\,(T_1+T_2+\cdots+T_n)=2\,n\,T_n+2\,n\,(n+1)=n\,(n+1)\,(n+2)$.

Второй способ вычисления пирамидального числа Π_n комбинирует теорему сложения с двойным суммированием:

$$T_1+T_2+\cdots+T_n=$$
$$=(1)+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)=$$
$$=n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 3+\cdots+3\cdot(n-2)+2\cdot(n-1)+1\cdot n=$$
$$=(T_{n+1}-T_1-T_n)+(T_{n+1}-T_2-T_{n-1})+(T_{n+1}-T_3-T_{n-2})+\cdots$$
$$\cdots+(T_{n+1}-T_{n-2}-T_3)+(T_{n+1}-T_{n-1}-T_2)+(T_{n+1}-T_n-T_1)=$$
$$=n\,T_{n+1}-(T_n+T_{n-1}+\cdots+T_1)-(T_1+T_2+\cdots+T_n)\ ,$$

откуда $3\,(T_1+T_2+\cdots+T_n)=n\,T_{n+1}=\dfrac{1}{2}\,n\,(n+1)\,(n+2)$.

Задача 10.7*. Придумайте аналог теоремы сложения для пирамидальных чисел Π_{m+n}.

Многомерные пирамидальные числа. Числа, с которыми мы имеем дело в этом параграфе — натуральные, треугольные, пирамидальные — строятся по очень похожим правилам:

n-ое натуральное число n представляет собой одномерную пирамиду (отрезок) со стороной длины n и равно $1+1+1+\cdots+1=\dfrac{n}{1}$;

n-ое треугольное число T_n представляет собой двумерную пирамиду (треугольник) со стороной длины n и равно $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n\,(n+1)}{1\cdot 2}$;

n-ое пирамидальное число Π_n представляет собой трехмерную пирамиду (тетраэдр) со стороной длины n и равно $T_1+T_2+T_3+\cdots+T_n=\dfrac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$;

n-ое ...-льное число ... представляет собой четырехмерную пирамиду (четырехмерный симплекс) со стороной длины n и равно $\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\cdots+\Pi_n=\dots$.

. . . .

Задача 10.8*. Заполните пропуски в последнем абзаце предыдущего перечня и докажите предложенную Вами при этом формулу для n-того четырехмерно-пирамидального числа $\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \cdots + \Pi_n$. Попытайтесь продолжить перечень дальше.

Задача 10.9*. Попытайтесь придумать теоремы сложения для четырехмерных, пятимерных и прочих многомерных пирамидальных чисел.

В настоящий момент мы уже начинаем выходить за естественные рамки этой книги о числах и суммах. Дело в том, что многомерными пирамидальными числами удобнее всего заниматься в рамках другой математической дисциплины — *комбинаторики*, которую, конечно же, стоит изучить обстоятельно, посвятив этому отдельное время (авторы рассчитывают в скором будущем написать по комбинаторике книжку вроде этой). Здесь же мы ограничимся тем, что лишь немного приоткроем дверь в ее удивительный мир и обсудим только одну (из очень многих) комбинаторных интерпретаций пирамидальных чисел.

Суммирование по треугольнику Паскаля. В §5 мы видели, что ряд единиц, натуральный ряд и ряд треугольных чисел присутствуют на треугольнике Паскаля (см.зад. 5.11 и зад. 5.10):

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&&1&&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&&1&&1&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&1&&2&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&&&\\
&&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&&&\\
&&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&&&\\
&&1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1&&\\
&1&&9&&36&&84&&126&&126&&84&&36&&9&&1&\\
1&&10&&45&&120&&210&&252&&210&&120&&45&&10&&1\\
\ldots&&\ldots&&\ldots&&\ldots&&\ldots&&\ldots&&\ldots&&\ldots&&\ldots&&\ldots&&\ldots
\end{array}
$$

Рис. 10.8. Треугольник Паскаля.

Задача 10.10. Найдите в треугольнике Паскаля ряды пирамидальных и четырехмерных пирамидальных чисел.

Напомним, что строки треугольника Паскаля нумеруются сверху вниз, начиная с нулевого номера, а числа каждой строки — слева направо, также начиная с нулевого номера. Число, стоящее под k-тым номером на n-том этаже, обозначается C_n^k

(читается «цэ из эн по ка») и называется *числом сочетаний из n по k*. Как мы видели в зад. 5.10, числа заполняют треугольник по такому правилу: вдоль боковых сторон стоят единицы, и каждое число внутри треугольника равно сумме двух стоящих над ним чисел из предыдущей строки, т. е.

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \tag{10-1}$$

Это правило позволяет сравнительно быстро заполнить любое наперед заданное число строк.

Задача 10.11. Дайте определение n-того k-мерного пирамидального числа. Какому числу сочетаний оно равно?

Задача 10.12. Какому числу сочетаний равны суммы:

а) $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \cdots + C_{n+m}^m$;

б) $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \cdots$ (кстати, сколько тут слагаемых?).

Чтобы получить общую формулу для числа сочетаний, явно выражающую C_n^k через n и k, можно воспользоваться зад. 5.9, где это число интерпретируется как количество всевозможных маршрутов, которыми шарик может упасть в k-тую комнату n-того этажа лабиринта на рис. 5.1. Каждый такой маршрут, в свою очередь, можно описать, сказав куда — направо или налево — повернул шарик сначала на нулевом этаже, потом на первом этаже, потом на втором и т. д. вплоть до $(n-1)$-го этажа. Если обозначать поворот направо буквой **п**, а поворот налево — буквой **л**, то последовательность поворотов запишется словом, составленным из букв **л** и **п**. Всего это слово будет состоять из n букв, а так как шарик оказывается в результате в комнате № k, т. е. должен будет сделать ровно k правых поворотов[1].

Таким образом, искомое число маршрутов равно количеству всевозможных n-буквенных слов, составленных из k букв **п** и $(n-k)$ букв **л**, или иначе, количеству слов, которые можно получить переставляя буквы в слове

$$\underbrace{\text{пп}\ldots\text{п}}_{k}\underbrace{\text{лл}\ldots\text{л}}_{n-k}$$

Чтобы подсчитать это количество, мы сначала выясним, сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове, не содержащем повторяющихся букв.

Задача 10.13. Сколько слов (не обязательно осмысленных!) можно получить переставляя буквы в словах:

[1]мы понимаем «лево» и «право» с позиции внешнего наблюдателя, так что, например, слову, состоящему из одних букв **л** отвечает движение вдоль левой границы лабиринта

А) **ок, рок, урок, турок**;

Б) в произвольном k-буквенном слове без повторяющихся букв?

Если в слове есть повторяющиеся буквы, как, скажем, в слове **топор**, то мы сначала сделаем их разными, снабдив две буквы **о** индексами, т. е. занумеровав их. Переставляя буквы в слове $\mathtt{то_1по_2р}$, мы можем получить $5! = 120$ разных слов. Если мы теперь сотрем индексы, делающие две буквы **о** различными, то некоторые разные слова будут превращаться в одинаковые. Например, $\mathtt{ро_1по_2т}$ и $\mathtt{ро_2по_1т}$ превратятся в одно и то же слово **ропот**. Точно так же и в любое другое слово с ненумерованными буквами превратятся при стирании номеров ровно два слова с нумерованными буквами, ибо занумеровать две буквы **оо** в каждом слове можно ровно двумя способами. Поэтому, переставляя буквы в слове **топор**, мы получаем $5!/2 = 60$ разных слов.

Задача 10.14. Сколько слов (не обязательно осмысленных!) можно получить переставляя буквы в словах:

А) **кок, курок, молоко, колобок**;

Б) $\underbrace{\mathtt{a_1a_1\ldots a_1}}_{m_1}\underbrace{\mathtt{a_2a_2\ldots a_2}}_{m_2}\ldots\underbrace{\mathtt{a_ka_k\ldots a_k}}_{m_k}$;

В) $\underbrace{\mathtt{аа\ldots а}}_{k}\underbrace{\mathtt{бб\ldots б}}_{m}$?

Итак, если вы решили предыдущую задачу, то поняли, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\cdots\,(n-k+1)}{k\,(k-1)\,(k-2)\,\cdots\,1},$$

в частности, для одно-, дву-, трех- и четырехмерных пирамидальных чисел мы получаем формулы:

$$\Pi_n^{(1)} = \overbrace{1+1+\cdots+1}^{n} = n = C_n^1$$

$$\Pi_n^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i^{(1)} = T_n = \frac{n\,(n+1)}{2} = C_{n+1}^2$$

$$\Pi_n^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i^{(2)} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6} = C_{n+2}^3$$

$$\Pi_n^{(4)} = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i^{(3)} = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{24} = C_{n+3}^4$$

В заключение приведем еще несколько задач, связывающих сочетания со степенями и суммами степеней. При их решении Вам понадобится формула из зад. 5.12 и зад. 5.13 для раскрытии скобок в выражениях $(1+x)^m$ и $(a+b)^m$.

Задача 10.15. Вычислите $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$; и $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n$.

Задача 10.16*. Вычислите суммы:

а) $C_n^0+C_{n+1}^2+C_{n+2}^4+\cdots$

б) $C_n^1+2\,C_n^2+\cdots+n\,C_n^n$

в) $C_n^0+2\,C_n^1+\cdots+(n+1)\,C_n^n$

г) $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\cdots+\left(C_n^n\right)^2$

Задача 10.17. Выразите n-тое пирамидальное число через сумму квадратов и кубов первых n натуральных чисел[1] и при помощи этого выражения вычислите сумму $1^3+2^3+\cdots+n^3$.

Задача 10.18. Выразив C_n^4 через суммы степеней, вычислите $1^4+2^4+\cdots+n^4$.

[1]Большой интерес, как легко понять, вызывает обратная задача: выразить сумму k-тых степеней через биномиальные коэффициенты. Ее впервые исследовал Якоб Бернулли. Коэффициенты, участвующие в выражениях сумм степеней через C_n^k называются в его честь *числами Бернулли*.

§ 11 Несколько задач.

В заключение мы предлагаем решить еще несколько задач. Некоторые из этих задач будут для Вас совсем легкими, а над некоторыми придется поломать голову. Некоторые задачи целиком повторяют те, что Вы уже решали, а в некоторых нужно привлекать новые идеи. Последние задачи — более трудные, и их решения — это небольшие (а иногда и довольно большие) исследования. Решая их, Вы можете отбросить все школьные условности: можно (нужно) обсуждать их с друзьями, родителями, учителями и просто знакомыми, подглядывать во всевозможных книжках, размышлять над ними в любое время дня и ночи — в общем, работать на ними так, как это делают все «взрослые» ученые. Радуйтесь всякому продвижению вперед! Не огорчайтесь, если ничего вовсе не получается — в работе математика это бывает довольно часто. Может случиться так, что Вас заинтересует не тот вопрос, который сформулирован в задаче, а совершенно другой, который Вы сформулируете сами. Мы будем рады этому. Ведь в этом, отчасти, и состоит творчество математиков.

Задача 11.1. а) Докажите, что удвоенное произведение последовательных треугольных чисел тоже треугольное число.

б)* Постройте разбиение, соответствующее этому равенству.

Задача 11.2. а) Третий член арифметической прогрессии равен 0. Найдите сумму первых пяти членов этой арифметической прогрессии.

б) Пятый член геометрической прогрессии равен 4. Найдите произведение первых десяти членов этой геометрической прогрессии.

Задача 11.3. В арифметической прогрессии 50 членов. Сумма 3-го, 17-го, 21-го, 30-го, 34-го и 48-го членов равна 90. Найдите сумму всех членов арифметической прогрессии.

Задача 11.4. Можно ли в каждый промежуток между соседними членами арифметической прогрессии вписать еще по k чисел так, чтобы последовательность осталась арифметической прогрессией?

Задача 11.5. Сумма всех трехзначных чисел, дающих один и тот же остаток при делении на 19, равна 25803. Чему равен остаток?

Задача 11.6. В прямоугольной таблице размера $m \times n$ по строкам и по столбцам стоят арифметические прогрессии. Сумма четырех угловых чисел равна S. Чему равна, сумма всех чисел в таблице?

Задача 11.7. В арифметической прогрессии $a_k = -a_m$. Является ли 0 членом этой прогрессии и если да, то каков его номер?

Задача 11.8*. а) Могут ли числа 1, $\sqrt{3}$, 3 быть членами одной арифметической прогрессии?

б) Могут ли числа $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{8}$ быть членами одной арифметической прогрессии?

Задача 11.9*. При каком условии числа a, b, c являются членами одной арифметической прогрессии?

Задача 11.10. В 1990-ом году в чемпионате СССР по футболу участвовало 13 команд. Чемпионат проводился в 2 круга. Сколько всего матчей было сыграно?

Задача 11.11. Турист, поднимаясь в гору, в первый день достиг высоты 800 м, а каждый следующий день поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько дней он достигнет высоты 5700 м?

Задача 11.12. Сумма номеров домов, расположенных на одной стороне улицы от одного перекрестка до другого, равна 35. Какие номера у этих домов и сколько их?

Задача 11.13. В студенческом шахматном турнире приняли участие два школьника. Они вместе набрали 6,5 очков, а все студенты — поровну. Сколько студентов участвовало в турнире? (В турнире каждый участник играет с каждым но одному разу, за выигрыш дается одно очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0 очков).

Задача 11.14. а) Есть 1990 гирь массой 1 г, 2 г, ... , 1990 г. Можно ли их разложить на две равные кучи?

б) Есть 1992 гири массой 1 г, 2 г, ... , 1992 г. Можно ли их разложить на две равные по весу кучи? А на 4 равные по весу кучи?

Задача 11.15. Представьте 1990 в виде суммы а) нескольких последовательных натуральных чисел (начинающихся не обязательно с единицы);

б) нескольких последовательных целых чисел. Сколько таких представлений существует?

Задача 11.16. Найти сумму всех положительных трехзначных чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3.

Задача 11.17. Мистер X приезжает в город с потрясающей новостью и через 5 минут сообщает ее двум горожанам. Каждый из узнавших новость через 5 минут сообщает ее еще двоим, не знавшим ее.

а) Через сколько времени эту новость узнает весь 10-миллионный город?

б) Через сколько времени эту новость узнает весь 10-миллионный город, если за 5 минут ее рассказывают троим, не знавшим ее?

Задача 11.18. Могут ли квадраты трех последовательных членов арифметической прогрессии являться тремя последовательными членами геометрической прогрессии?

Задача 11.19*. Могут ли числа 2, 3, 5 быть членами одной геометрической прогрессии?

Задача 11.20. Можно ли между каждыми двумя соседними членами геометрической прогрессии вписать еще по k чисел так, чтобы получившаяся последовательность осталась геометрической прогрессией?

Музыкальное примечание к задаче 11.20

Интересно, что Вы давно знакомы с геометрической прогрессией, хотя, возможно, даже не подозреваете об этом. Речь идет о принятой европейской традицией музыкальной гамме: содержащей двенадцать звуков разной высоты. Чтобы понять это, посмотрим на устройство гитары:

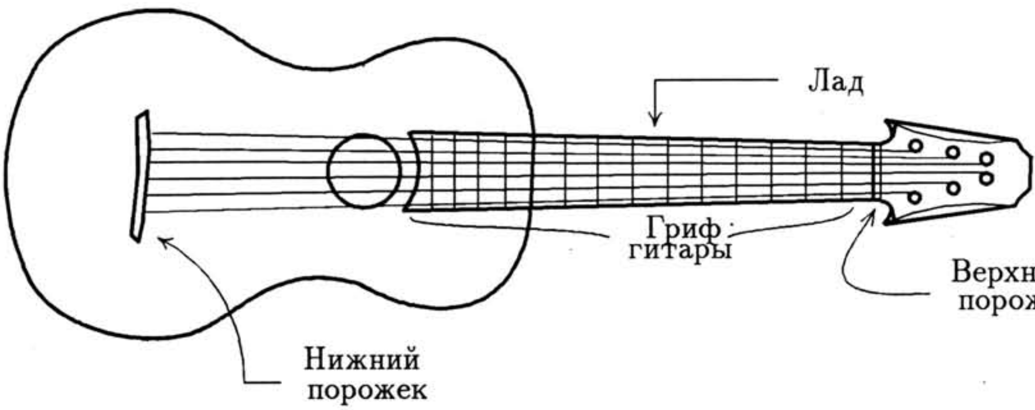


Рис. 11.1.

Гриф гитары состоит из ладов — полосок разной ширины, отделенных друг от друга выступающими порожками. Прижимая струну к порожку лада, мы укорачиваем ее, заставляя тем самым звучать с большей частотой (напомним, что основной тон (звук) создается стоячей волной,

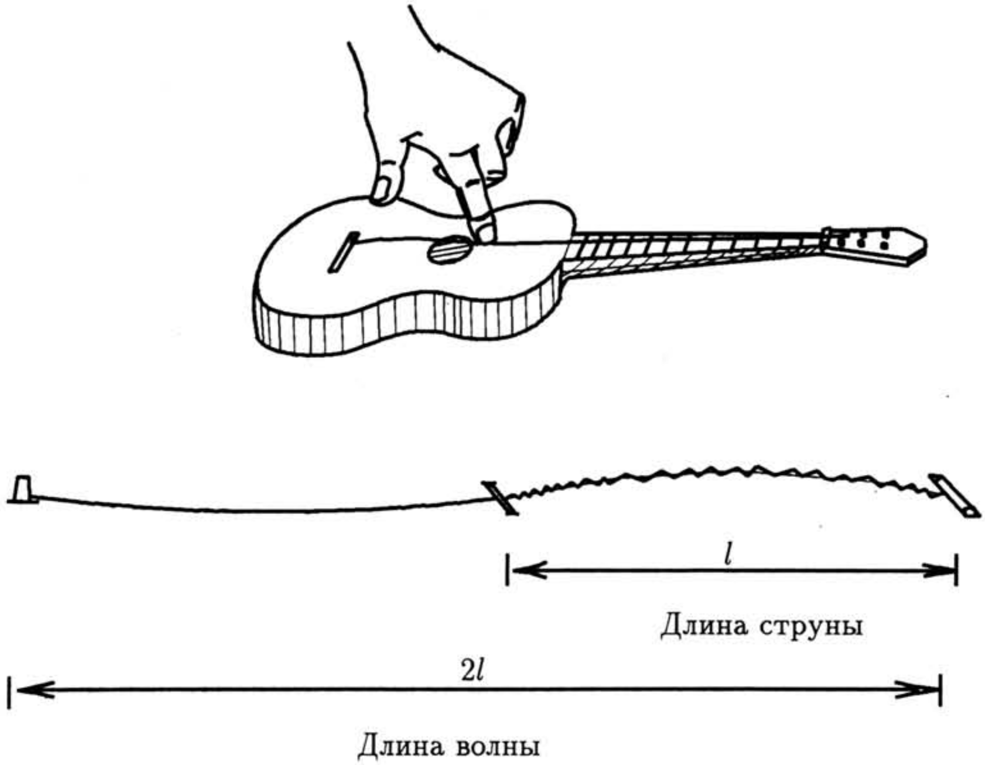


Рис. 11.2.

длина которой вдвое больше длины струны, а частота звука обратно пропорциональна длине волны).

Наши ощущения музыкальных интервалов (октавы, квинты, терции) связаны, оказывается, не разностью частот, а с их отношением: при подъеме звука на октаву его частота удваивается, при подъеме на квинту — умножается на $3/2$, на терцию — на $5/4$. Звуки, различающиеся, на октаву, извлекаются на гитаре, например, на 1-м и 13-м ладу, или на открытой струне и 12-м ладу и т.д. Таким образом, на гитарном грифе решается специальный случай задачи 11.20: между порожками, отвечающими, скажем, звукам "до" различных октав (частоты которых составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 2) вставить еще по 11 порожков, соответствующих остальным звукам, так чтобы их частоты по-прежнему составляли геометрическую прогрессию. Последнее требование связано с тем, что одну и ту же мелодию можно сыграть в различных тональностях лишь при условии, что отношение частот звуков, извлекаемых на любых соседних двух ладах, будет одинаковым.

Вопрос 1. Чему равно это отношение?

Вопрос 2. Чему равно отношение частоты ноты "си" к частоте ноты "ре" той же октавы?

Вопрос 3.(для музыкантов непосильный). Можно ли на ладах гитары получить терцию? квинту?

Ответы: $\sqrt[12]{2}$; $\left(\sqrt[12]{2}\right)^5$; нет.

Задача 11.21. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 24 км, вышел мальчик Петя со скоростью 6 км/час, а навстречу ему вышел мальчик Вася со скоростью 2 км/час. В первый момент с плеча Пети слетела муха и полетела навстречу Васе с постоянной скоростью 10 км/час. Долетев до Васи, муха тут же полетела обратно. Встретив Петю, она опять повернула и так летала между мальчиками, пока они не встретились. Сколько километров пролетела муха? Какое расстояние муха пролетела по направлению к Пете, а какое — по направлению к Васе?

Задача 11.22. Для каких правильных дробей в их десятичной записи период начинается сразу после занятой?

Вычислите суммы:

Задача 11.23. $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\cdots+(2n-1)\cdot 2n.$

Задача 11.24. $(1\cdot 2)\cdot n+(2\cdot 3)\cdot(n-1)+(3\cdot 4)\cdot(n-2)+\cdots+(n-1)\cdot(n)\cdot 2.$

Задача 11.25. $(1\cdot 2)\cdot(n(n-1))+(2\cdot 3)((n-1)(n-2))+\cdots+(n-1)(n)\cdot 2\cdot 1.$

Задача 11.26. $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\cdots-\dfrac{1}{\sqrt{101}-\sqrt{99}}.$

Задача 11.27. $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\cdots+(-1)^{m-1}m^2$.

Задача 11.28. Выведите формулу, представляющую n^3 в виде суммы нескольких последовательных нечетных чисел:

$1^3=1$

$2^3=3+5$

$3^3=7+9+11$

$4^3=13+15+17+19.$

Задача 11.29. При помощи формулы из задачи 31 вычислите сумму

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3.$$

Задача 11.30. Докажите, что в любой бесконечной арифметической прогрессии, составленной из натуральных чисел, содержится бесконечная геометрическая прогрессия.

Задача 11.31. ** Множество натуральных чисел разбито в объединение попарно непересекающихся арифметических прогрессий с разностями d_1, d_2, d_3, ... Может ли при этом случиться, что $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}+\cdots<0,9$? Рассмотрите два случая:

а) прогрессий конечное число;

б) прогрессий бесконечное число.

Задача 11.32*. Разбейте множество натуральных чисел в объединение попарно непересекающихся бесконечных геометрических прогрессий. Можно ли при этом обойтись конечным числом прогрессий?

Задача 11.33. На сфере проведено n окружностей большого круга (сечения сферы плоскостями, проходящими через центр сферы) так, что в каждой точке пересечения пересекаются не более двух окружностей. На сколько частей они делят сферу (см. задачу 4.16)?

Задача 11.34. В пространстве проведено n плоскостей в общем положении: нет двух параллельных плоскостей, но одной прямой пересекаются не более двух плоскостей и в точках пересечения пересекаются не более трех плоскостей. На сколько частей они делят пространство? Сколько среди них ограниченных частей?

Задача 11.35*. Пусть сумма имеет вид $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ (т.е. каждое слагаемое имеет вид произведения $a_k \cdot b_k$). Обозначим $B_k = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_k$. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n} a_kb_k = a_nB_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k$. (Это тождество называется преобразованием Абеля).

Вычислите суммы:

Задача 11.36. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^m q^k$.

Задача 11.37. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)} q^k$.

Пусть T_n — n-ое треугольное число и P_n — n-ое пятиугольное число. Упростите следующие произведения:

Задача 11.38. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot \cdots \cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Задача 11.39. $\left(1-\frac{1}{T_2}\right)\left(1-\frac{1}{T_3}\right)\left(1-\frac{1}{T_4}\right)\cdot \cdots \cdot\left(1-\frac{1}{T_n}\right)$.

Задача 11.40. $\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\left(1-\frac{1}{P_3}\right)\left(1-\frac{1}{P_4}\right)\cdot \cdots \cdot\left(1-\frac{1}{P_n}\right)$.

Задача 11.41. Чему равны соответствующие бесконечные произведения?

Задача 11.42. Обобщите задачи 38–40 на другие k-угольные числа.

Задача 11.43. Можно ли нарисовать правильный треугольник с вершинами в узлах клетчатой бумаги?

Задача 11.44**. При каких k можно изобразить замкнутую k-звенную ломанную с вершинами в узлах клетчатой бумаги так, чтобы все звенья имели равную длину?

Задача 11.45. Имеются гири весом 1, 2, 4, 8, … 2^n грамм, каждого веса в одном экземпляре. Докажите, что с их помощью на чашечных весах можно взвесить с точностью до грамма любой предмет.

Задача 11.46. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, для набора гирь 1, 3, 9, 27, ... 3^n грамм.

Задача 11.47. а) Имеется 9 монет, среди них одна фальшивая (более легкая). За два взвешивания на чашечных весах без гирь определить фальшивую монету. б) Сколько взвешиваний потребуется для нахождения одной фальшивой монеты среди 10 монет. в) Тот же вопрос для 100 монет. г) Сформулируйте утверждение в общем случае.

Задача 11.48. Вычислите суммы:

а) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos n\alpha$;

б) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin n\alpha$.

Задача 11.49. Проверьте, что 1729 можно двумя различными способами представить в виде суммы двух кубов. Найдите эти представления. Если у Вас под рукой есть компьютер, то напишите программу, которая находит еще такие числа. Какое из них наименьшее?

Задача 11.50. Встречаются ли среди пятиугольных чисел квадраты? Если да, то бесконечно ли множество пятиугольно-квадратных чисел? Если ответ на этот вопрос «да», то как их все найти (т.е. существует ли способ, перечисляющий все пятиугольно-квадратные числа)?

Задача 11.51. Попытайтесь ответить на похожие вопросы для других k-угольных чисел.

Как выучить на творца

М. Беденко

Автор статьи предлагает интересную, хотя, возможно, и не бесспорную, методику развития творческих способностей детей на материале математических игр. Приведены описания нескольких игр, которые можно использовать для занятий по этой методике.

В заголовке этой статьи заложено некоторое противоречие. Выучить можно тому, что знаешь и умеешь сам, а творчество — производство того, чего никто в мире не делал. Так что «выучить на творца» нельзя, но помочь вырасти творцу, создав ему необходимые условия, можно.

Эта задача стояла перед педагогами всегда, но в последние 40 лет потребность в ее решении резко возросла.

В настоящее время информация стала одним из наиболее важных товаров на рынке. И по мере того, как разрастаются информационные связи между странами и людьми, эта тенденция все усиливается. Особенно ценится новая, оригинальная информация. А создать ее могут только творческие люди.

Основной способ развития творческих способностей известен издавна. Мастер-творец (художник, музыкант, поэт) работает с подающими надежды молодыми дарованиями, и в творческом диалоге с мастером, в чем-то идя за ним, в чем-то отрицая его находки, пробуют свои силы ученики. Постепенно некоторые из них начинают творить самостоятельно. В большинстве сфер творчества, это пожалуй, единственный путь воспитания творца, и те, у кого это получается, в наших рекомендациях не нуждаются. Проблема в том, что слишком редко это выходит.

Возможен другой путь, суть которого выражает поговорка: «Чтобы научиться плавать, нужно плавать». Можно создать среду, которая стимулировала бы развитие творческих задатков, пусть даже только в каких-то ограниченных областях человеческой деятельности. Даже небольшой успех в таком важном деле — все равно успех. Остановимся на творчестве так называемых «технарей».

В основном они производят научные факты и новые технологии, понимаемые широко: новые технологии общения в бизнесе — тоже технологии.

Попробуем понять, какие качества нужны для творчества в науке и технологии. Почти любой творческий акт в этой области можно разбить на два этапа:
— генерация нетривиального, не следующего впрямую из накопленных знаний, умозаключения (так называемой эвристики);
— проверка умозаключения на истинность, нахождение области применимости, согласование с другими элементами культуры.

Как готовить человека ко второму этапу, известно. На это нацелено все современное естественнонаучное образование.

Однако это образование абсолютно не гарантирует развитие творческих способностей. Это происходит потому, что при традиционном обучении эвристический процесс — далеко не основной, и по школьному курсу проходит эдаким пунктиром. Особенно плохо с эвристикой в младшей школе — так называемые задания на смекалку там большая редкость. А без регулярной эвристической тренировки творческие способности развиваются плохо.

Этот недостаток традиционного образования педагоги давно хотели устранить. Появились педагогические системы, позволяющие вводить в обучение творческие процессы. Самые известные системы:

— педагогика Монтессори;

— развивающее обучение;

— теория решения изобретательских задач (ТРИЗ).

Эти очень разные педагогические системы имеют схожие недостатки, вернее особенности:

— они требуют педагогов очень высокой квалификации, намного превышающей квалификацию среднего учителя:

— плохо стыкуются с традиционным образованием;

— при работе по этим системам крайне сложно войти в процесс «с середины» (например, перейдя из другой школы).

Именно эти особенности ограничивают распространение этих систем. Попробуем предложить нечто, свободное от этих недостатков, но тоже стимулирующее творческие способности. Методику, опирающуюся на логические игры.

Предшественники

Стимулирование логического мышления через игру практиковалось в педагогике неоднократно. Чаще всего для этого использовались шахматы. Например, в 60 годы многие школы г.Тбилиси ввели урок шахмат в программу первого класса.

Иногда для этой же цели применялась карточная игра бридж.

Применение как шахмат, так и бриджа давало сходные результаты: вначале мощный толчок в развитии ребенка, затем эффективность применения игры слабеет. Причины этого мы разберем ниже.

И наконец, самая известная методика Б. и Л. Никитиных. Используя около 10 игр, они получили существенное ускорение развития детей.

Методика Никитиных уже около 30 лет применяется многими семьями в домашних занятиях, а в учебных учреждениях применяется редко. Слишком она ориентирована на индивидуальную работу ребенка, и поэтому в эти игры трудно играть в коллективе.

Суть предлагаемой методики

В процессе изучения игры ребенок проходит три этапа. При первоначальном знакомстве с новой игрой ребенок какое-то время привыкает к ее правилам и при этом играет совсем плохо. Затем он вживается в игру, учится понимать ее стратегию и тактику. Его класс при этом стремительно растет. А через какое-то время игра более или менее познана, в каждой игровой ситуации есть модели, на которые ориентируется игрок. При этом рост его мастерства стабилизируется или замедляется.

На каком из трех этапов самое большое эвристическое напряжение? Не на первом — там еще нет базы для смекалки. И не на третьем, когда игра во многом шаблонизируется. Самым продуктивным оказывается второй этап.

Первый период длится от нескольких минут (крестики–нолики) до нескольких недель (шахматы, бридж). Продолжительность второго периода в зависимости от игры тоже разная — от нескольких часов до нескольких месяцев. Дальше игра перестает работать как развивающая.

Мне возразят, что в шахматах, шашках, бридже люди совершенствуются десятилетиями. Чтобы стать гроссмейстером, нескольких месяцев не хватит. Но прикиньте, сколько в этом восхождении самостоятельных умозаключений, а сколько книжного изучения опыта других игроков. Когда тренер учит ребенка дебютным построениям или объясняет стратегические соображения, открытые корифеями этой игры, это совсем не то же, что, пусть в гораздо более незрелой форме, генерирует ребенок, осмысливая игровую ситуацию. Рост игровой силы при этом происходит, но эвристическое напряжение совсем другое.

В этом причина недостаточной эффективности методик, построенных на одной игре. Игр должно быть много.

Какими они должны быть?

Представьте себе две игры, которые отличаются одним-единственным правилом (например, шашки и поддавки). Дети играют в шашки до тех пор, пока у некоторых из них не начинается шаблонизация игры. Мы знаем, что процесс генерации эвристик при этом замедляется.

Заменим игру. Поскольку правила практически те же, привыкание к правилам займет буквально секунды. Но весь предыдущий эвристический багаж бесполезен — внутренне игра совершенно другая! Поэтому интенсивная генерация эвристик продолжается. А в момент, когда она начнет ослабевать, можно переключиться на новую игру, например, итальянские шашки.

Таким образом, чтобы поддерживать эвристическое напряжение длительное время, необходимо иметь семейство игр со сходными правилами, но таких, чтобы стратегические и тактические соображения каждой из них не годились в играх-родственниках.

Но этого мало. Ни одна игра не тренирует все механизмы мышления. Да и скучно все время играть в вариации одной и той же игры. Поэтому необходимо иметь разнообразные семейства игр и тасовать их, поддерживая интерес к курсу.

А имея 10 – 20 семейств игр по 5 – 20 игр в семействе, можно стимулировать мышление детей несколько лет.

Итак, перечислим достоинства предлагаемой методики:

1. Наличие внутреннего мотива. Желание выиграть — достаточно серьезный мотив, чтобы стимулировать интенсивную работу каждого ребенка по изучению игры.

2. Модульное построение позволяет формировать из отдельных игр как из кирпичиков и многолетние школьные курсы, и «умную» программу на месяц пребывания в летнем лагере или на каникулярную неделю.

3. Легкость ввода «с середины»курса детей со стороны. Конечно, меньшая игровая эрудиция будет мешать новичкам, но, сменив одну-две игры, новички будут включаться в генерацию эвристик так же легко, как их более опытные коллеги. Ни одна из перечисленных выше методик не обладает этим свойством.

4. Одни и те же игры можно применять в различных по возрасту классах. Эвристики будут, конечно, разные, но интенсивность их формирования будет максимально возможной как для маленьких, так и для больших.

5. У каждого ребенка тренируются те эвристические механизмы, которые свойственны именно его мышлению. В обычных же методиках присутствует логический каркас, который подчиняет себе мышление детей, независимо от того, удобно это конкретным детям или нет.

6. Методика не требует педагогов слишком высокой квалификации. Возможен вообще вариант, когда дети будут учить играх других детей. А это — голубая мечта педагогики.

7. Постоянная возможность смены лидера. В обычной учебе троечник отличника догнать не может — запас знаний разный. В итоге отличник частенько «почивает на лаврах», а троечник смиряется со своим незавидным положением. В предполагаемом курсе успех в какой-то игре не гарантирует его повторения в следующей. Конечно, более смекалистые дети будут выигрывать чаще, но никто не застрахован от поражений в этом своеобразном многоборье, особенно, если разнообразие игр велико.

8. Спортивная этика. В младшем и среднем школьном возрасте внутренние мотивы для морали слабы. Что можно, а что нельзя, ребенок выясняет в диалоге со взрослым. И часто может выпросить, выплакать себе изменение правил поведения. А в спортивном турнире он сталкивается с правилами, на которые воздействовать бесполезно. Тут надо играть по правилам или не играть вовсе. Это очень полезный жизненный опыт для большинства детей.

Недостатки методики

Как и в любом другом явлении, недостатки являются продолжением достоинств.

1. Игра — конфликтная вещь. Игровые конфликты могут осложнить отношения между детьми, создать деструктивную обстановку в коллективе. На этот случай в классе и нужен педагог, являющийся арбитром не столько в игровых, сколько в жизненных ситуациях.

2. Частые проигрыши могут сформировать у ребенка комплекс неудачника. Чтобы этого не произошло, подбирайте игры и соперников так, чтобы в них побеждали разные дети.

3. Свобода выбора путей к победе может привести к тому, что будут выбираться более привычные, а какие-то важные эвристические механизмы не будут формироваться. Поэтому эффективно дополнять игры задачами на смекалку, где структура задачи требует применять какой-то конкретный эвристический прием. Но это можно делать и на обычных уроках.

Какими качествами должна обладать хорошая учебная игра

Ниже мы приведем описание некоторого числа игр, но многим читателям их не хватит. И дело даже не в том, что предлагаемых игр мало для такого курса. Гораздо важнее, что у каждого учителя свои представления о развивающем потенциале каждой игры, свои предпочтения и симпатии. Фигурально говоря, набор игр — это инструмент в руках учителя. А кто откажется от того, чтобы подогнать инструмент по руке? Наш опыт показывает, что хорошая игра содержит :

1. Простые правила;
2. Эвристическое богатство;
3. Короткий цикл;
4. Неразработанную теорию игры;
5. Простоту и технологичность изготовления.

Почему важны первые два свойства, сказано выше. Поговорим о трех последних.

Если игра имеет короткий цикл (до пяти минут), то ребенку легко проверить на практике результативность любого умозаключения. Получилось удачно — включил в свой репертуар, неудача — отказался. Короткий цикл игры дает возможность менять противников каждого ребенка, ставя между игроками новые задачи — ведь манера игры у каждого индивидуальна. Кроме того, меняя партнеров, можно подобрать игроков по силе и получить ситуацию успеха у всех игроков. А турнирные преимущества игры с коротким циклом оценит каждый, кто проводил школьные соревнования по шахматам (игре, как известно, неторопливой), и вспомнит сопутствующие этому процессу муки.

Если игре можно научиться, не доходя своим умом, а почитав книжку, или расспросив родителей, то это серьезный минус для обучающей игры. Чужое, книжное знание, безусловно полезно в общекультурном плане, но эвристически не работает. Кроме того оно мешает и другим детям, ставя их в неравные условия.

Это не значит, что ребенок обязательно до всего должен дойти сам. Наоборот. Эвристический анализ игры, проведенный совместно со взрослым, чрезвычайно полезен для ребенка. Но нужен именно совместный поиск, в котором нет наперед известной истины, а есть процесс ее получения. Поэтому идеально, когда игра вначале не известна никому из родителей и детей.

Простота и технологичность игры — непременное условие ее широкого применения. Уникуб Никитиных — великолепное игровое пособие, но попробуйте снабдить уникубами 40 учеников! Шашками снабдить проще, но даже шашки нужно купить и где-то хранить в то время, когда ими не пользуются. С этой точки зрения предпочтительнее рэндзю, для которой всего-то нужно, что лист бумаги в клеточку и две ручки. Хотя, если вспомнить, что в старой русской армии солдаты, денег не имеющие, играли в шашки семечками (черные — семена подсолнечника, белые — тыквенные), то и шашки, при необходимости, можно изготовить безо всяких затрат.

Конечно, современный учитель богаче по возможностям, чем солдат при Екатерине Второй, и шашки, все-таки, лучше покупные. Да еще желательны шахматы, игральные кубики (кости), монетки, листы бумаги (обычно в клетку), ручки или карандаши. Имея такой набор, можно организовать сотни интересных игр. Естественно, чем богаче материальные возможности, тем лучше — но мы, как правило, предлагаем игры, которые можно сделать без особых хлопот.

Как организовать игры, если Вы преподаватель

Введение любого нового курса в учебный процесс — болезненная процедура. Предлагаемый курс может стать счастливым исключением. Его можно внедрять где угодно: в летних лагерях школьников, санаториях, задействовать школьные каникулы и выходные, создавать кружки и факультативы и т.п.

Приведем возможный сценарий работы с игрой на выходных или коротких каникулах.

Однажды на последнем уроке детей знакомят с правилами новой игры. Домашнее задание: поиграть в нее с родственниками и друзьями. Детей предупреждают о дате проведения турнира.

Бывают игры простые, изучаемые детьми за несколько дней. Для них проведенная подготовка достаточна. Игры посложнее требуют промежуточной поддержки со стороны учителя. Ему нужно 2–3 раза в неделю на последнем уроке или после него провести одну игру между детьми. Это занимает обычно 5–10 минут.

И вот, наконец, турнир. Лучшая формула для турнира на 20–40 человек следующая:

Сначала всех участников разбивают на 4 или 8 групп численностью 4–5 человек в группе. Внутри групп проводят турнир по круговой системе (каждый с каждым).

Победители групп играют между собой по олимпийской системе (проигравший вылетает). При такой системе после каждого тура половина участников выбывает, пока не останется один — победитель.

Плюсы такой системы:

— Быстрота проведения (турнир с 40 участниками проходит в 7 туров, т.е. около часа);

— Обилие игровой практики (самый неудачливый из 40 участников сыграет четыре игры);

— Возможность положительной мотивации большого количества участников. Если стать победителем турнира обосновано рассчитывает всего несколько человек, то стать победителем в группе (и получить поощрительный приз) может почти каждый. А если перекомплектовывать группы после каждого турнира, объединяя "удачников" в одни группы, а "неудачников" в другие, то ротация победителей групп, а значит, и участников четверть- и полуфиналов будет высокой. Прикинем затраты времени на организацию игры:

— знакомство с игрой — 15 мин;

— промежуточная поддержка 1–2 раза — 15 мин;

— турнир — 1 час.

Итого 1,5 часа за несколько дней, на последнем, самом непродуктивном уроке.

А в результате каждый ребенок находится в эвристическом напряжении, кто — несколько часов, а отдельные любители игр (их не так мало, поверьте) 10–20 часов. Между прочим, годовой курс математики — самого насыщенного урока в младшей школе — чуть более 100 часов, с домашними заданиями часов 150–200.

Проведите игры хотя бы четыре раза в год, и значительная часть детей получит эвристическую нагрузку, сравнимую с нагрузкой по другим школьным дисциплинам.

А если Вы сумеете задействовать с этой целью лето — можете получить курс еще более эффективный.

Многие учителя младшей школы задают задание на лето, рассчитывая сохранить хотя бы частично базовые навыки. Работа на навык, и так не очень любимая детьми, летом делается с неохотой и потому малоэффективна. С играми ситуация иная. Вполне можно ожидать, что если детям задать на лето подготовиться к интеллектуальному пятиборью, то они не только изучат правила этих игр, но и вдоволь поупражняются в них. А устроить интеллектуальный бой между классами можно буквально за час.

И последняя рекомендация. Работа учителя всегда успешнее, если находит поддержку в семье. Для игр это особенно верно. К счастью, здесь эту поддержку получить проще всего. Если Вы донесете до родителей понимание, что именно игры сделают их детей смекалистыми и смышлеными, они постараются организовать досуг детей так, что в нем найдется место этим играм. Тем более, что это совсем нетрудно.

Работа с играми в семье

Повышенная забота об образовании детей пока еще остается характерной чертой нашего менталитета. Только в нашей стране или других постсоветских странах возможен такой парадокс: нищие по меркам развитых стран люди в стране с бесплатным средним образованием тратят на образование своих детей больше средств, чем государство. Если такие люди сочтут, что логические игры действительно разовьют творческие способности их детей, то с удовольствием поддержат усилия школы в этом направлении, а если школа таких усилий не сделает — обойдутся и без нее.

Проблема в том, что родители — не профессионалы в педагогике. Поэтому хочется дать им несколько советов.

Во первых, учтите, что игра — процесс коллективный. Хотите, чтобы дети играли — организуйте подходящую компанию. И наоборот, если где-то на отдыхе сложилась подходящая детская компания, задействуйте ее под игры. Пусть эта компания всего на несколько дней, даже на день — польза от такого дня может быть очень заметной.

И вообще, совместная поездка в поезде, пребывание в дождливый день на даче, пустой зимний вечер — любое время подойдет для обучающей игры.

Во вторых, помните, что любое обучение — это тяжелый труд, игры не исключение. Если Вы не будете направлять процесс, дети будут вести себя так, чтобы эвристическое напряжение было поменьше, а удовольствие от игры побольше. Для этого выберут себе 1-2 самые привычные игры и будут дуться в них до посинения. Собственно, взрослые ведут себя так же, иначе не объяснить, почему так популярны в наших дворах карточный дурак и доминошный козел.

Но все-таки игры не уроки, поэтому стимулы могут быть легкими, шуточными, типа — кто победил, тому первый вареник. Но внимание к результатам игр со стороны взрослых обязательно.

В случае игры взрослого и ребенка очень нежелательны ситуации, и когда все время выигрывает взрослый, и когда он поддается. Лучше уравнять шансы форой, например приравняв пять взрослых выигрышей одному детскому. Еще лучше, когда эта фора меняется по мере роста мастерства ребенка. Пересмотр форы или ее полная отмена лучше всяких призов стимулирует рвение ребенка к игре, ибо означает для него повышение своего статуса в сравнении со взрослым.

Очень удачна ситуация, когда ребенок, поработав над игрой, обыгрывает взрослого или старшего ребенка, имеющего меньший игровой стаж. В этом случае ребенок зримо видит результаты своих эвристический усилий. Создать (не притвориться!) такую ситуацию довольно просто.

Логическая игра — прекрасный полигон для совместных поисков в области тактики и стратегии. Показать ребенку процесс изучения такого сложного и такого важного для ребенка объекта как бы по шагам — все равно, что дать урок мышления в чистом виде. Необходимо только всячески превращать монолог в диалог, актуализируя поток детских мыслей.

Игра — одна из немногих областей деятельности ребенка, где он может выступить не только в роли ученика, но и в роли учителя. Опыт для ребенка бесценный, и можно было бы всячески приветствовать такую практику, если бы не одно существенное «но».

Учитель должен умереть в ученике — гласит древняя поговорка. К этому «умиранию» ребенок обычно не способен, он бессознательно выпячивает себя, что плохо для его учеников. Поэтому лучше уготовить ему не роль ментора, а роль играющего тренера, когда заинтересованность в общей победе вынудит подчинить свое «я» интересам команды. Если Вы имеете разновозрастную компанию детей, организуйте такие соревнования. Получите очень разнохарактерный, но одинаково полезный опыт как для маленьких детей, так и для больших.

Рекомендации по проведению уроков игр

Если турниры по новым играм, описанные выше, Вами освоены, и учебное время это позволяет, можно ввести курс игр в учебную сетку или организовать факультатив с более-менее постоянным составом участников. Такой курс позволит гораздо эффективнее развивать мышление детей, чем просто игры. При обычных играх ребенок поневоле «варится в собственном соку», не зная, какие именно свежие мысли пришли к его коллегам по игре, как маленьким, так и взрослым. Он сталкивается лишь с результатом. Кроме того, мало догадаться о какой-либо закономерности в игре и построить на ней какой-нибудь игровой прием, надо еще научиться ее формулировать. А этого за игровой доской не освоишь.

Кроме того, эвристический потенциал имеют не только те игры, по которым удобнее проводить турниры, но и игры, для турниров неудобные, а также логические задачи. Не использовать их было бы не по-хозяйски: чем разнообразнее задания, с которыми сталкивается ребенок, тем больше шансов, что столкнувшись не с учебной, а реальной ситуацией, он найдет в ней путь к успеху.

Объекты, используемые в предлагаемом курсе, можно разделить на три группы:

— логические задачи;

— игры, в которых возможно нахождение оптимальной стратегии (назовем их конечными играми);

— игры, в которых оптимальная стратегия неизвестна никому, и дело каждого игрока более или менее успешно к ней приблизиться (бесконечные игры).

Разницу между последними двумя группами игр легко понять на примере обычных крестиков-ноликов, игре просчитываемой до конца, и шахматами, которые люди изучают уже тысячу лет и все изучить до конца не могут.

Граница между конечными и бесконечными играми относительна: с точки зрения современного компьютерного анализа русские шашки — конечная игра, но с точки зрения ученика в классе не только шашки, но и многие игры попроще бесконечны. Однако практически эта граница всегда чувствуется: если в 6 лет найти выигрышную стратегию в крестиках-ноликах почти невозможно, то в 16 она находится легко. Соответственно, и используются крестики-нолики по-разному: в 6 лет по ним можно провести турнир, а в 16 игра превращается в логическую задачу поиска оптимальной стратегии и доказательства, что найденная стратегия действительно наилучшая.

Действия педагога при работе с логической задачей аналогичны его действиям при объяснении нового типа математической задачи, только необходимо дать детям побольше времени на поиск самостоятельного решения. Работа с конечной игрой отличается от работы с задачей только более или менее длительным периодом, когда дети играют в нее, эмпирически пытаясь нащупать выигрышную стратегию.

Гораздо сложнее и интереснее работа с бесконечной игрой. Периоды самостоятельной игры детей чередуются с периодами обсуждения тактических и стратегических находок, определения выигрышных и проигрышных конфигураций игровых фигур на доске, оценка сравнительной важности фигур и свободных полей на доске, анализ различных начал в партии и типовых окончаний. Постепенно дети вместе с учителем нащупывают более или менее твердые островки знания в океане бесконечной игры. Некоторые из этих островков оказываются настоящими, другие размываются при практических попытках, меняют свою структуру. Процесс аналогичен тому, что происходит в науке, технике, да вообще в любой сложной производственной ситуации. Это та самая исследовательская среда, которую всегда хотели создать учителя на уроке математики, физики, программирования. Но в любой исследовательской задаче по математике или физике сидят в неявном виде знания, полученные школьником раньше, и требуемый массив этих знаний настолько велик, что более-менее успешно исследовательские задачи даются только в старших классах специальных школ. А какой запас знаний необходим для исследовательской работы в игре? Только ее правила!

Уровень постижения игры разными учениками да и учителями тоже будет существенно разниться, но это не беда. Важнее то, что все они, смекалистые и не очень, быстро схватывающие и любители неторопливых размышлений, взрослые и совсем малыши получают оселок для оттачивания своего интеллекта. А то, что результаты будут отрывочные, приближенные, неточные, — не страшно. Бесконечная игра потому и бесконечна, что сколько не изучай, до конца все равно не изучишь.

Варианты заданий для таких уроков лучше всего взять из опыта шахматных тренеров. Самые типовые:

— Анализ сыгранных партий или их фрагментов с разбором типичных ошибок;

— Изучение комбинаций ходов, резко меняющих ситуацию на доске в лучшую сторону;

— Изучение наиболее перспективных начал и часто встречающихся окончаний.

Вопросы заданий:

— Найдите выигрыш в этой позиции.

— Найдите лучший ход (последовательность ходов).

— Чем этот ход хорош? А чем плох?

— Чем хороша, а чем плоха эта позиция? Какие здесь возможны пути к победе? Какие угрозы со стороны противника здесь возможны?

Шахматным тренерам легче — у них есть книги с такими заданиями. Вам придется строить такие задания самостоятельно, поэтому что-то у Вас получится, а что-то не очень. Делайте, что сможете. Трудно придумывать — ограничьтесь разбором партий. Когда почувствуете, что интересные задания у Вас уже не получаются — смените игру.

Игры, придуманные детьми

Высший творческий пилотаж в работе с играми — придумывание игр самими детьми.

Начинать такие конкурсы нужно после того, как дети изучат 10-20 игр нескольких семейств.

Оценивать детские игры нужно по правилам, описанным выше. Довольно скоро дети убедятся, что придумать игру (или вариацию игры) просто. Сложно придумать хорошую игру. Для этого еще на стадии придумывания ребенок должен представлять хотя бы в общих чертах все перипетии игры, что приходит не сразу.

Но если практиковаться достаточно часто, то вполне возможны продукты детского творчества, превосходящие по занимательности и эвристическим возможностям большинство игр, продающихся в магазинах. А новая оригинальная игра — это изобретение.

Мало кто знает, но игр в мире патентуется так много, что в патентном рубрикаторе есть даже специальные рубрики:

— игры на досках;

— игры типа шахмат;

— игры типа шашек.

Ежегодно в мире патентуется несколько сотен изобретений, попадающих в эти рубрики. Дети, которые сумеют придумать оригинальные игры, ничуть не хуже взрослых, признанных изобретателей.

Не думаю, что существует еще какая-то область творчества, где ребенок может столь же успешно конкурировать со взрослыми.

Критерий эффективности работы

Игры — довольно необычный курс для современной школы. Обычный для остальных дисциплин способ оценки его успешности не подходит. В самом деле хорошо или плохо, что дети изучили 100 различных игр? Не с точки зрения преподавания собственно игр, а с точки зрения образования в целом?

Поскольку игры нам нужны не сами по себе, а как способ развития эвристического мышления, то и будем оценивать качество этого мышления на эвристических заданиях.

Это так называемые задачи на смекалку и логические задачи. Если дети самостоятельно решают такие задачи (не те, которые разбирались на уроке) лучше, чем их сверстники, игры не изучающие, значит методика работает.

Вторым показателем эффективности курса являются игры, придуманные детьми. Подготовка игр — творческая работа, и чем лучше дети с ней справляются, тем лучше развились их способности в этой области. И не надо думать, что эта область так уж локальна и периферийна для культуры в целом. Те же способности нужны, скажем, программистам.

Можно весь этот курс рассматривать как предпрограммирование, прединформатику, и сделать главной оценкой его эффективности те способности, которые проявят ученики при решении и особенно при постановке программистских задач.

Курс информатики — естественный преемник курса игр, и как всякий преемник, более эффективный. Эвристическое напряжение в нем не меньше, а разнообразие материала значительно больше. Поэтому, как только дети начинают писать достаточно сложные компьютерные программы, курс игр нужно прекращать.

Игры в курсах информатики и программирования

С хорошими заданиями для начинающих программистов как с деньгами — их или нет, или не хватает. Преподаватели, обучающие старших школьников и студентов всегда испытывают недостаток в задачах, одновременно содержательных и простых, решаемых за несколько часов работы силами начинающих программистов. Часть предлагаемых игр для этого вполне пригодна. Это обусловлено простотой правил, аскетизмом в выборе внешнего представления игры в сочетании с большим, а в некоторых случаях неограниченно большим набором эвристических соображений, которые может учесть программист при разработке игры.

У него возникает задача выбора из большого количества эвристических альтернатив, самых простых, легко программируемых и одновременно действенных, обеспечивающих эффективную стратегию алгоритмов. Остальные альтернативы вынужденно отбрасываются. В итоге ученики практикуются в той части программистского искусства, которая наиболее важна для профессионалов – умению ставить задачу. Да и алгоритмы, требующиеся в игре, достаточно разнообразны и нетипичны.

На программе в 100-300 операторов можно «пощупать» даже такие редко встречающиеся в учебной практике вещи, как алгоритмы, реализующие случайный процесс, и даже самообучающиеся алгоритмы.

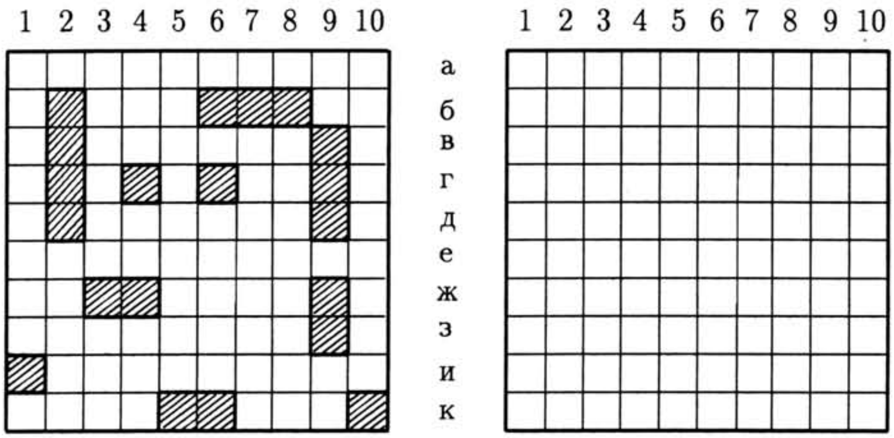
Существенно и то, что для работы с играми вполне пригодны любые языки программирования и практически любая, даже с 20-летним стажем, техника. Конечно, более мощные, современные программные и технические средства позволяют получить более привлекательные результаты, но главная, постановочная работа делается в голове программиста и не сильно зависит от техники.

Правила обучающих игр

1. Морской бой

Игра достаточно старая и известная, но приведем ее, т.к. она является родоначальницей класса игр.

Играют двое. Каждый игрок на листе бумаги в клетку рисует два квадрата 10×10 и пишет на полях координаты. В одном из квадратов каждый игрок размещает свой флот, а в другом — отслеживает корабли противника.



Флот каждого игрока состоит из одного линкора (столбик из 4 клеток), двух крейсеров (столбики из 3 клеток), трех эсминцев (столбики из 2 клеток) и четырех одноклеточных миноносцев. Корабли могут соприкасаться по диагонали концами, но соприкасаться сторонами, даже одноклеточными, не должны.

Ходят по очереди, называя букву и число — координаты клетки, в которую произведен выстрел, например, «г2». Возможные ответы — «ранен» (как в нашем случае), «потоплен», «мимо». Если выстрел пришелся мимо, ход переходит к другому игроку.

Выигрывает тот, кто первым уничтожит все корабли противника.

2. Холодно, тепло, горячо

На поле для морского боя размером 7×7 клеток размещаются 4 одноклеточных корабля. В отличие от предыдущей игры они не могут касаться по диагонали. Выстрел производится, как в обычном морском бое, но варианты ответов:

— «попал»;

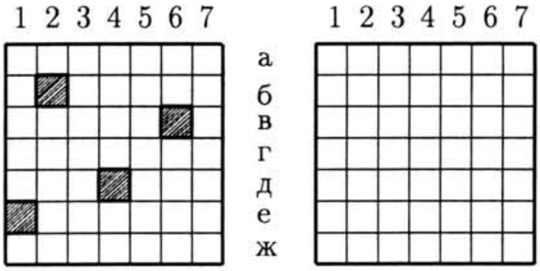
— «горячо» (попадание в соседнюю с кораблем клетку по горизонтали, вертикали или диагонали от него);

— «тепло» (попадание в соседнюю с «горячей» клетку);

— «холодно» (попадание далее чем на две клетки от корабля).

Если для одного корабля клетка «горячая», а для другого только «теплая», то отвечать надо «горячо». Такой же ответ, если клетка «горячая» сразу для нескольких кораблей.

Если в корабль попали, он исчезает с поверхности квадрата, перестает влиять на соседние с собой поля, и они «остывают».



Выигрывает тот, кто первым потопил все корабли противника.

3. Краевой морской бой

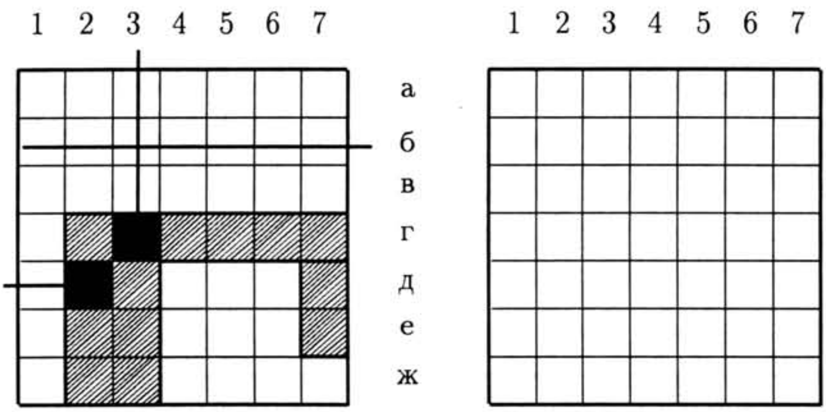
На поле 7×7 клеток размещаются три корабля:

линкор — столбик 4×2 клетки:

крейсер — столбик 4×1 клетки;

эсминец — столбик 2×1 клетки.

Корабли могут касаться друг друга как угодно.



Представьте себе, что чужие корабли находятся в закрытой коробке, стенки которой имеют дырочки по боковым краям. Заглянуть в дырочки Вы не можете, но имеете щуп, который можно вдвигать в коробку, пока он не упрется в корабль.

Аналогичным образом делается ход в этой игре. Буквой или цифрой называется ряд, по которому двигается щуп, и называется направление движения: справа, слева, сверху, снизу.

В ответ называется ряд, где щуп уперся в корабль. На рисунке показаны три хода.

— «3 сверху», ответ «Г»;

— «Д слева», ответ «2»;

— «Б справа», ответ «мимо».

После каждой попытки, независимо от того уткнулся щуп в корабль или прошел насквозь, ход переходит к другому игроку.

Игра продолжается, пока один из игроков не установит все клетки, на которых расположены корабли противника. Когда это случается, он останавливает игру и диктует расположение неприятельского флота. Если он назвал все правильно, то выиграл, если где-то ошибся, то проиграл.

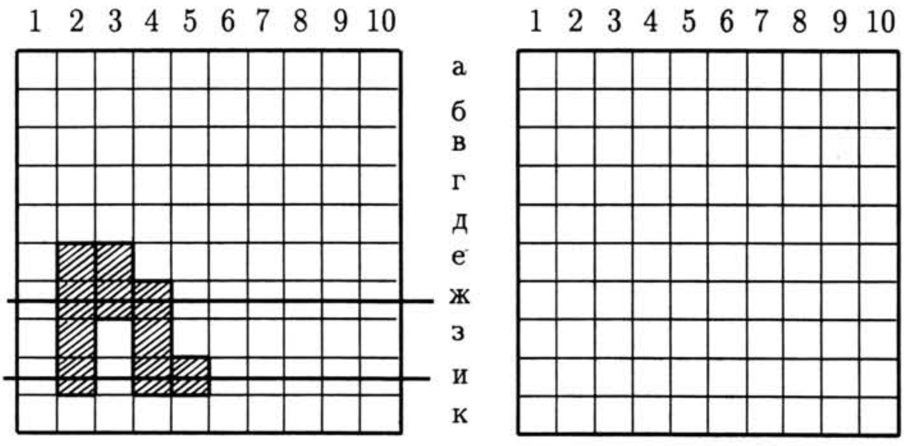
4. Змея

На поле для морского боя 10×10 размещается «змея» из 10 клеток. Каждая следующая клетка в ней состыкована с предыдущей по одной стороне. Змея может касаться сама себя. Игрок может делать ходы двух типов:

— Как в обычном морском бое («а3» — «мимо»);

— Горизонтальными (сверху) и вертикальными (слева) рентгеновскими лучами В этом случае в ответ на ход называется количество клеток, пронзенных лучом.

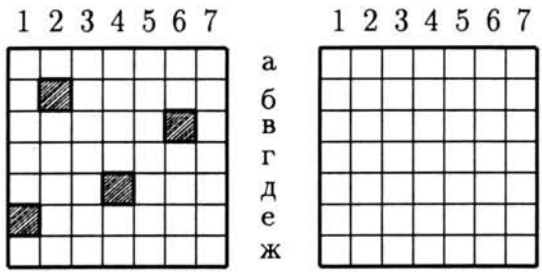
Если клетки «змеи», попавшие под луч, стоят без зазора, называется их количество. Если просвечиваемые клетки имеют зазоры в одну или несколько клеток, называется количество клеток в каждой группе, слева неправо для горизонтального луча и сверху вниз для вертикального. Например, луч «Ж», ответ «3 клетки», а луч «И» ответ «1,2». Независимо от того, как ходил игрок и куда он попал, после каждой попытки ход переходит к противнику.



Когда один из игроков выяснит расположение клеток, образующих «змею» противника, он останавливает игру и диктует координаты всех ее звеньев. Если все клетки названы правильно — он выиграл, ошибся — проиграл.

5. Подводные лодки

На поле 7×7 размещаются четыре подводные лодки, каждая размером в одну клеточку так же, как и в обычном морском бое. Ход делается как обычно, но в ответ сообщается, на каком расстоянии от места падения бомбы находятся лодки. Например, на ход «А1» ответ «1,4,5,5», а на ход «Е1» ответ «0,3,4,5». Порядок, в котором называются лодки, произвольный, расстояние «О» означает, что бомба попала в лодку. В случае попадания в лодку противника игрок делает еще один ход. Победит тот, кто потопит все лодки противника.



6. Серия

Правила игры отличаются от обычного морского боя тем, что вместо единичного выстрела по противнику производится серия из трех выстрелов в клетки, соседствующие по горизонтали или вертикали. При этом выстрелы делаются подряд: если второй выстрел в серии пришелся над первым, то третий должен делаться над вторым. Слова для ответов на выстрелы: «мимо», «ранен», «потоплен», «повторное попадание» (в случае повторного выстрела в клетку, где в начале игры находился корабль). Очередность ответа не соблюдается — ответ «два выстрела мимо, один ранен» не означает, что удачным был именно третий выстрел.

В обычном морском бое попадание дает право на повторный ход, в данной игре повторный ход делается, если в серии было хотя бы два попадания, причем повторные попадания в те клетки, куда уже стреляли, не засчитываются.

Для выигрыша нужно не только потопить все корабли противника, но и точно узнать, где они находились вначале. Сумел распознать и нанести на поле — останавливай игру. Но если ошибся в расстановке — проиграл, хоть и потопил весь флот противника.

7. Фарватер

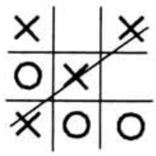
В морском деле фарватер — это путь, которым могут идти корабли, не опасаясь сесть на мель или нарваться на мину. Такой фарватер требуется отследить в нашей игре.

Он проходит на поле 10×10 клеток, начинаясь на поле Д1, а заканчиваясь на поле Д10, и имеет длину 20 клеток. Сам себя фарватер пересекать и касаться не может, все изгибы делает под прямым углом.

Ходы игроки делают по правилам морского боя: попал на фарватер, значит, продолжаешь ходить. Кто первый пройдет весь фарватер, тот выиграл.

8. Крестики-нолики

Играют двое на поле 3×3 клеточки. Первый играющий ставит крестики, второй — нолики. Кто первым построит три своих значка по горизонтали или вертикали, или диагонали, тот выиграл.



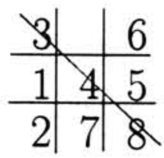
9. Сумасшедшие крестики-нолики

Поле — как в обычных крестиках-ноликах. Каждый играющий в любой момент может поставить либо крестик, либо нолик. Выигрывает тот, кто достроит ряд до трех либо крестиков, либо ноликов по горизонтали, вертикали или диагонали.

Когда дети найдут оптимальную стратегию в этой конечной игре, сделайте поле 3×4, затем вообще $m \times n$. В любом случае игра идет до трех одинаковых знаков в ряд.

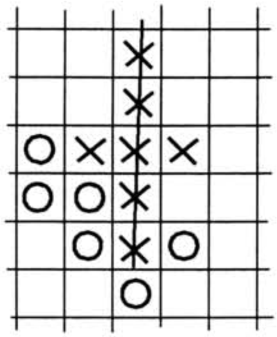
10. Числовые крестики-нолики

Поле для обычных крестиков-ноликов два игрока заполняют числами от 1 до 9. Каждое число используется один раз. Выигрывает тот, кто выстроит в ряд по горизонтали, вертикали или диагонали три числа, дающие в сумме 15.



Найти оптимальную стратегию в этой конечной игре по силам детям 3-6 класса.

11. Бесконечные крестики-нолики (рэндзю)



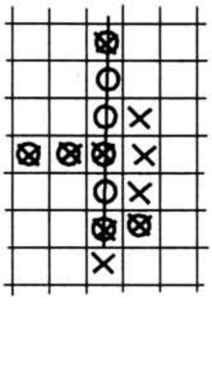
Это одна из лучших древних логических игр. Короткий цикл, простота правил, невероятное разнообразие возможных комбинаций и одновременно самый простой антураж делают эту игру незаменимой в курсе.

Мы рекомендуем проводить турниры не по международным, а по упрощенным правилам. На листе бумаги в клеточку два игрока по очереди ставят один крестики, а другой нолики. Выигрывает тот, кто поставит пять своих значков подряд по горизонтали, вертикали или диагонали. Ряд не должен содержать пустые клетки и значки противника. На рисунке приведен вариант игры, в которой победили крестики.

12. Разноцветное рэндзю

Это обычное рэндзю, но каждый игрок свои значки ставит по очереди то синей, то красной пастой (или то шариковой ручкой, то карандашом). Таким образом, половина крестиков и ноликов на игровом поле одного цвета, а половина — другого. Выигрывает тот, кто либо поставит пять своих значков в ряд, как в обычном рэндзю, или достроит ряд из четырех значков одного цвета, как в сумасшедших крестиках-ноликах.

13. Крестик, нолик, солнышко



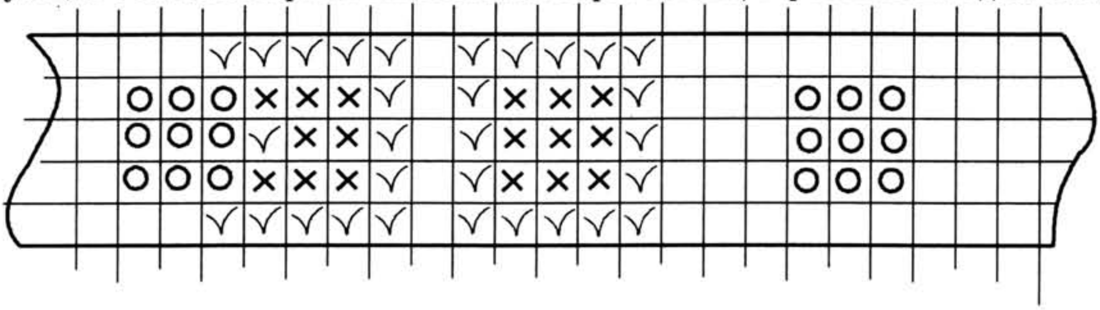
Игра идет по правилам рэндзю, но каждый игрок свой четный ход делает не своим значком (крестиком или ноликом), а солнышком — это крестик и нолик одновременно. Если игра идет до пяти в ряд — это любопытная конечная игра с необычным выигрывающим алгоритмом, а если играть до шести в ряд, то можно и турнир устроить. Пример игрового поля приведен на рисунке.

14. Четыреста клеток

Поле для игры — полоска 5×40 клеток. Каждый из играющих хочет поставить на него как можно больше своих значков (крестиков или ноликов). В игре можно делать ходы двух типов:

— поставить свой значок в любую незанятую клетку поля:

— размножить все свои значки на поле, заняв ими все свободные клетки, соседствующие с занятыми ранее клетками по горизонтали, вертикали или диагонали.



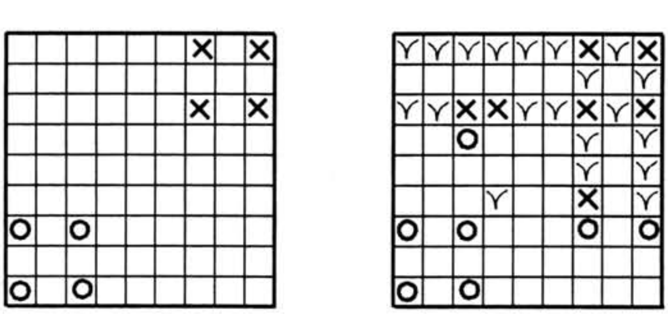
На рисунке крестики могут размножиться на клетки, помеченные птичкой.

Игра состоит из двух партий. Тот, кто играл в первой партии крестиком, во второй играет ноликом, и, соответственно, ходит вторым. Победитель определяется по сумме двух партий.

15. Пара своих

Поле для этой игры и начальная расстановка крестиков и ноликов приведена на рисунке. Ход можно сделать в любую из клеток, имеющих в горизонтальном и вертикальном рядах не менее двух занятых ранее клеток. При этом занятые «своими» значками клетки друг другу не мешают, зато клетки, занятые противником, отсекают клетки от расположенных за ними. На рисунке те клетки, на которые можно поставить крестик, помечены птичками. Обратите внимание на одинокую птичку в центре. Ход сюда возможен, потому что имеется один крестик в горизонтальном ряду, а один по вертикали.

Играются две партии со сменой очередности хода. Выигрывает тот, кто поставит больше своих значков.



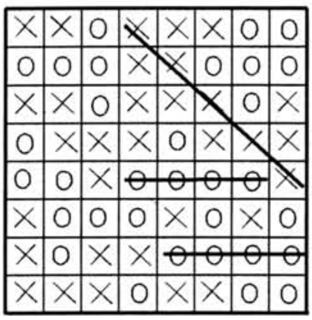
16. Свой-чужой

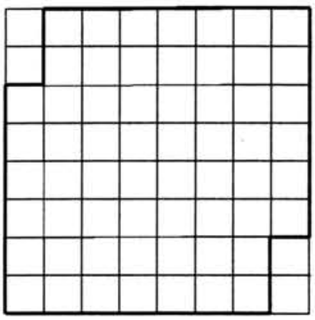
На поле 8 × 8 каждый игрок ставит за ход два значка, свой и чужой. Первый ставит крестик и нолик, потом второй, потом снова первый и т.д. Свои значки стараются ставить, чтобы получить столбик значков идущих подряд по горизонтали, вертикали или диагонали как можно большей длины. У кого в конце игры самый длинный столбик — тот победил. На примере у крестиков есть столбик длиной пять крестиков, а у ноликов только два столбика по 4, поэтому крестики выиграли.

Если бы у ноликов тоже были столбики из пяти элементов, выиграл бы тот, у кого таких столбиков больше. Если количество длинных столбиков одинаковое, сравнивают количество столбиков по четыре элемента и т.д.

Учтите, что один элемент не может входить в несколько зачетных столбиков. На примере диагональный столбик в нижнем правом углу не засчитывается. (Можно, конечно, засчитать его вместо двух горизонтальных, но это невыгодно.)

В игре на поле 8×8 есть хитрость — стратегия, позволяющая второму игроку (ноликам) не проиграть. Хорошо бы с детьми ее найти. Если это удастся, в дальнейшем «откусите» у поля 4 клетки, так, как показано на рисунке.

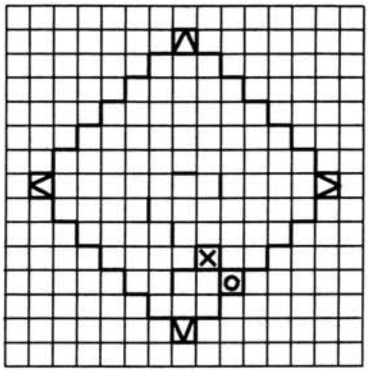




17. Крекер

Эта известная игра не имеет общепринятого названия, поэтому мы назовем ее по-своему, за сходство игрового поля с печеньем.

Игровое поле представлено на рисунке, уголки поля в игре не участвуют. Игроки ходят по очереди, проводя линию по стороне одного из квадратиков, составляющих поле. Кто закончил обведение квадратика, тот ставит в него свой значок. При этом игрок, захвативший квадратик, ходит еще раз. Цель игры — захватить как можно больше квадратиков на поле.



18. Треугольники

Существует любопытная вариация крекера на листе бумаги без клеток. На него наносят 15–20 точек так, чтобы никакие три не находились на одной прямой. Игроки по очереди соединяют точки отрезками прямой, стараясь, аналогично крекеру, достроить линии до треугольников. При этом треугольник захвачен в том случае, если внутри у него точек и линий нет. Захватив треугольник (достроив его последнюю сторону), игрок помечает его своим значком и продолжает ходить. При проведении линий нельзя пересекать линии, проведенные раньше. Выигрывает тот, кто захватит больше треугольников.

19. Набери сотню

Конечная игра с простой стратегией.

Два игрока по очереди называют числа от 1 до 10. Названные числа складываются. Кто достигнет 100, тот выиграл.

20. Для друга — вдвое больше

Игровое поле состоит из двух цепочек из нечетного числа клеток (25–35 штук). Каждый играет в своей цепочке.

Чтобы сделать первый ход, надо просто записать число от 1 до 10 в начало своей цепочки, а в начале цепочки противника — удвоенное число. Каждый следующий ход тоже делается числом от 1 до 10, которое прибавляется к последнему в своей цепочке, у противника при этом прибавляется удвоенное число. Кто в конце цепочки будет иметь большее число, тот выиграл.

Предложите игру в таком виде детям, и они сразу найдут оптимальную стратегию. Когда это произойдет, добавьте правило сотни: если число у игрока станет трехзначным, от него отнимается сотня.

Игра остается конечной, но найти оптимальную стратегию в ней детям крайне сложно, да и взрослым есть над чем попотеть. Поэтому смело можете проводить по ней турнир.

21. Два-семь-девять

Играют двое. Каждый из игроков выбирает себе пару чисел меньше десятка, не совпадающих ни с двойкой, ни с семеркой, ни с девяткой.

Вначале первый играющий пишет одно из своих чисел. Чтобы сделать любой следующий ход, игрок должен прибавить одно из своих чисел к последнему числу.

Если у игрока получается число, которое делится на 2, он получает 2 очка. Если число делится на 7 или 9, то 7 или 9 очков соответственно. Если число делится на несколько чисел, то выбирается большее из них. Игра идет, пока сумма чисел не станет трехзначной. У кого получится больше очков, тот и выиграл.

22. Фибоначчи

Пятьсот лет назад жил в Италии математик Фибоначчи. Он придумал ряды чисел, в которых каждое следующее число получалось сложением двух предыдущих. Мы сделаем из похожего ряда игру.

Два человека задумывают по числу. У кого число меньше, тот ходит первым. Он складывает два числа и получившуюся сумму записывает третьим числом. Второй игрок складывает последнее число с любым из двух предыдущих и записывает сумму в качестве следующего числа. Каждое следующее число получается аналогично: сложением последнего числа с любым из трех предшественников. Кто зашкалит за число 200, проигрывает.

23. Пленные числа

Играют двое. Каждый из играющих тайно от другого загадывает несколько чисел от 1 до 5, в сумме дающих 20. Порядок чисел в записи не имеет значения.

Затем числа открываются и играющие по очереди начинают «захватывать в плен» числа противника. Первым ходит тот, у кого цепочка чисел короче.

Если количество чисел одинаково, то первым ходит тот, у кого меньше пятерок, затем четверок и т.д. Если все числа совпадают, партия переигрывается.

Более крупные числа «захватывают в плен» менее крупные, одинаковые числа размениваются. Как это происходит, видно на примере.

Игрок А задумал числа 5 5 5 2 2 1.

Игрок Б задумал 5 5 4 1 1 1 1 1 1.

1. Ход А. Он «берет в плен» пятеркой четверку.

   А: 5 5 2 2 1 (5,4)

   Б: 5 5 1 1 1 1 1 1

2. Ход Б. Он «берет в плен» двойку.

   А: 5 5 2 1 (5,4)

   Б: 5 1 1 1 1 1 1 (5,2)

3. Ход А. Он разменивает пятерку.

   А: 5 2 1 (5,4)

   Б: 1 1 1 1 1 1 (5,2)

4. Ход Б. Он разменивает единицу.

   А: 5 2 (5,4)

   Б: 1 1 1 1 1 (5,2)

5. Ход А. Он «берет в плен» единицу.

   А: 5 (5,4) (2,1)

   Б: 1 1 1 1 (5,2)

6. Поскольку у Б хода нет, ходит опять А. Он «захватывает в плен» единицу.

   А: (5,4) (2,1) (5,1)

   Б: 1 1 1 (5,2)

Игра окончена. У игрока А три пары чисел, $3 \times 2 = 6$ очков. У игрока Б одна пара, да три не сыгравшие числа, $1 \times 2 + 3 = 5$ очков. Победил игрок А со счетом 6:5.

Игра состоит из 5 или 10 партий. Кто в сумме набрал больше очков, тот победил.

Обычно детям свойственно искать выигрышную комбинацию чисел. А здесь, как в популярной детской игре «камень, ножницы, бумага» любая комбинация может оказаться и выигрышной, и проигрышной. Правда, одни комбинации выигрывают чаще других, да и победных очков приносят больше, чем другие, поэтому должны и чаще выбираться. Но замена одной комбинации на другую должна быть случайной.

Найти оптимальную стратегию в этой игре не под силу не только ребенку, но и взрослому, если он не специалист по математической теории игр или теории вероятностей. Поэтому остается одно: попытаться угадать манеру игры противника и перехитрить его, вовремя меняя комбинации.

При этом в выигрыше часто оказываются не те, кто хорошо разгадывают логические хитросплетения, а юные психологи, по выражению лица противника или манере записывать числа лучше контролирующие ход игры. Поэтому, скорее всего в этой игре будут не те победители, что во многих предыдущих играх.

Но и для «логиков» эта игра полезна. Пробуя разные комбинации чисел, они могут эмпирически нащупать, какие комбинации нужно предъявлять чаще, а какие реже. Какими бы приближенными и грубыми ни были их оценки, все равно они позволяют почувствовать «на пальцах» некий случайный процесс. А это очень важно для будущего — ведь мир вокруг нас вероятностный, хотя при обучении в школе мы это забываем.

Интересные задачи эта игра ставит перед старшеклассниками и студентами. На ее базе можно создать самообучающуюся программу, которая будет менять частоту выбора разных комбинаций в зависимости от того, насколько удачными были предыдущие попытки.

24. Фехтование двадцаткой

Эта игра имеет те же достоинства, что и предыдущая, и используется для тех же целей.

В начале игры каждый из двух игроков записывает комбинацию из чисел от 1 до 5, дающих в сумме 20. Затем на листе бумаги игроки записывают свои комбинации в две строки так, чтобы первое число игрока Б было под первым числом игрока А, второе под вторым и т.д. Например, так:

Числа игрока А: 5 3 2 1 2 5 2

Числа игрока Б: 4 2 1 1 1 1 3 2 1 3 1

Затем начинается «бой». Числа сравниваются попарно, начиная с левого края. «Слабые» погибают (зачеркиваются), «сильные» перемещаются в конец своей последовательности. Поединок между одинаковыми числами заканчивается гибелью обоих.

«Сила» чисел:

единица побеждает только пятерку;

двойка побеждает только единицу;

тройка побеждает двойку и единицу;

четверка — всех, кроме пятерки;

пятерка - всех, кроме единицы.

В нашем примере в первых трех парах победят числа игрока А, в четвертой паре погибнут обе единицы, в пятой паре снова А, а в двух следующих парах победят числа игрока Б. Ряды чисел приобретут следующий вид:

А: 5 3 2 2

Б: 2 1 3 1 1 3

Здесь трижды победит А и один раз Б:

А: 5 3 2

Б: 1 3 3

В последней схватке дважды побеждает Б и в одном поединке гибнут две тройки:

А:

Б: 1 3

В этой партии выиграл Б, и набрал $1 + 3 = 4$ очка. Кто наберет больше очков за 5 или 10 партий, тот и победитель.

25. Шестерка

Перед началом игры каждый пишет 6 чисел от 0 до 9 и передает записку противнику. Цель игры — так изменить полученные числа, чтобы из них получилась выигрывающая комбинация.

Чтобы сделать ход, игрок называет число от 1 до 9. Он сам и его противник либо прибавляет это число к одному или к нескольким своим числам, либо отнимает его от них. К одним числам прибавлять, а от других отнимать нельзя. Затем так же делает свой ход противник.

Игра идет до тех пор пока кто-то не составит одну из двух комбинаций:

— 6 подряд идущих числовых значений, например 132546;

— 6 одинаковых чисел, например 777777.

Если у обоих игроков получилось комбинация одновременно, выигрывает тот, у кого комбинация дает наибольшую сумму из 6 чисел.

26. Числовой покер

Ход делается, как в предыдущей игре, но комбинаций гораздо больше:

1) Три и более единицы.

2) Три и более двойки.

3) Три и более тройки.

4) Три и больше четверки.

5) Три и больше пятерки.

6) Три и больше шестерки.

7) Стрит (1-2-3-4-5-6).

8) Малый фулл (три пары одинаковых чисел).

9) Большой фулл (две тройки одинаковых чисел).

10) Каре (четыре одинаковых числа).

11) Покер (пять одинаковых чисел).

12) Флеш (шесть одинаковых чисел).

Во всех комбинациях числа принимают значения от 1 до 6.

После того, как комбинация составлена, игрок считает сумму чисел, ее составляющих, и записывает ее в протокол. После этого противник снова придумывает для игрока начальное число.

Игра идет до тех пор, пока один из игроков не заполнит весь протокол. Но он не обязательно победитель — выигрывает тот, у кого максимальная сумма очков в комбинациях.

27. Недолет-перелет

Каждый из двух играющих тайно записывает два однозначных числа от 0 до 9. Ходят по очереди, для чего называют пару однозначных чисел, которые соответственно сравниваются с задуманными противником. Если число меньше, говорят «недолет», если больше — «перелет», а если точно — попадание.

Например, игрок А задумал числа 2 и 9. Если игрок Б назовет 4 и 5, А отвечает «недолет — перелет» или «перелет — недолет»(2 меньше 4, 9 больше 5, порядок ответов на вопрос не соблюдается). На вопрос Б «8-9», ответ «перелет — попадание» или, что то же самое «попал — перелет» (2 меньше 8, 9=9). Выигрывает тот, кто первым угадает оба числа у противника. Когда игроки научатся угадывать пару чисел, пусть перейдут на тройки, четверки и т.д. Сложность игры при добавлении каждого нового числа резко возрастает.

29. Быки и коровы

Эту классическую игру придумали английские студенты, чтобы было чем заниматься на лекциях. Предыдущая игра является вариацией «быков и коров», но приводится раньше, так как в нее играть проще. Однако и «быки и коровы» имеют своих преданных ценителей, не только среди больших детей, любящих трудные игры, но и детей поменьше (8 - 9 лет).

Играют двое. Каждый из игроков тайно записывает четырехзначное число с неповторяющимися цифрами. Ходят по очереди, называя четырехзначные числа. Если в названном числе с угадываемым совпала цифра — это называется «бык». Если цифра совпала по значению, но стоит не на месте — это «корова».

Например, игрок А задумал число 5602. Игрок Б назвал 3652. Игрок А должен ответить: «два быка, одна корова».

Игра прекращается, когда кто-то угадает все четыре цифры числа противника. Когда игроки освоят эту игру, можно поиграть с повторяющимися цифрами. Изменение правил небольшое, а сложность игры существенно возрастает: числа- двойники сбивают с толку. Например, если игрок А задумал число 5532, а игрок Б назвал 9865, то А отвечает «одна корова», а на число 6541 ответ «один бык». При этом информации о второй пятерке в ответе не содержится.

Самый интересный вариант «быков и коров» — словесный. Игроки задумывают по слову оговоренной длины и пытаются его угадать, называя слова той же длины. Остальные правила — как в числовых «быках и коровах».

30. Числовые жмурки

Все Вы знаете игру «жмурки», где игрок с завязанными глазами пытается срезать ножницами висящие на ниточках игрушки. В нашей игре тоже нужно найти призы, не видя, где они расположены.

Каждый из двух играющих задумывает два разных числа от 1 до 10. Затем по очереди игроки называют числа, получая в ответ сумму расстояний от названного числа до задуманных. Например, игрок А задумал числа 1 и 5. Игрок Б назвал число 5. Сумма расстояний $4 + 0 = 4$, игрок А отвечает «Четыре». Если в следующий раз игрок Б назовет число 7, то сумма расстояний, а значит, и ответ игрока А, равна $6 + 2 = 8$.

Кто первый разгадал, где расположены числа противника, тот выиграл. Эта игра конечная, оптимальный алгоритм легко находится, но если последовательно увеличивать количество чисел до 5, интерес к игре будет сохраняться. Для старшеклассников возможно аналитическое исследование игры.

Заметки об окружности Аполлония

Александр Руинский

Александр Руинский — преподаватель математики колледжа Тель Хай (Верхняя Галилея, Израиль). В заметке рассматриваются свойства окружностей Аполлония, связанных с треугольником, и их точек пересечения. Наиболее интересное свойство точек пересечения окружностей Аполлония заключается в том, что для них педальный треугольник правильный. В заметке рассматриваются также точки, для которых педальный треугольник — равнобедренный прямоугольный.

1) Введение.

Окружность Аполлония — геометрическое место точек, для которых постоянно отношение расстояний (k) до двух данных точек плоскости. Многие замечательные свойства этой окружности хорошо изучены. В настоящей статье рассматриваются окружности Аполлония треугольника и некоторые интересные свойства, связанные с ними.

2) Окружности Аполлония и педальный треугольник.

(а) Определение.

Пусть дан $\triangle ABC$. Окружность Аполлония точек B и C с отношением $\frac{AB}{AC} = k_a$ будем называть окружностью Аполлония вершины A треугольника ABC и обозначать $O_A(\triangle ABC)$ или O_A.

Очевидно, что $A \in O_A(\triangle ABC)$.

Если $AB = AC$, то окружность вырождается в прямую.

Очевидно, что у разностороннего треугольника есть три окружности Аполлония: O_A, O_B и O_C.

Если $\triangle ABC$ — равнобедренный, то одна из окружностей вырождается в прямую.

Если $\triangle ABC$ — равносторонний, то все три окружности вырождаются в прямые.

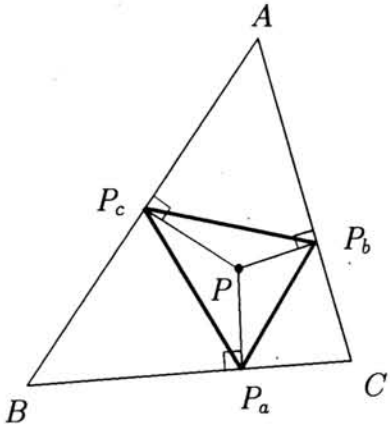
(б) Изодинамические центры треугольника.

Известно, что все три окружности Аполлония, неравностороннего $\triangle ABC$ пересекаются в двух точках, т.е. имеют общую хорду. Эти точки называются *изодинамическими центрами* $\triangle ABC$.

Действительно, пусть M — общая точка O_A и O_B. Тогда: $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$ и $\frac{MA}{MC} = \frac{BA}{BC}$. Отсюда: $\frac{MB}{MA} = \frac{CB}{CA}$, т.е. $M \in O_C$.

(в) Педальный треугольник.

Пусть дан $\triangle ABC$ и P — некоторая точка плоскости. Из точки P опустим перпендикуляры PP_a на BC, PP_b на AC и PP_c на AB. $\triangle P_aP_bP_c$ называется педальным треугольником точки P.



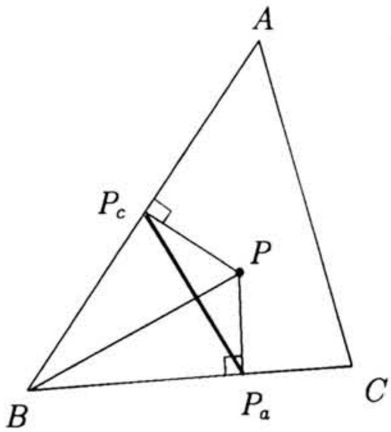
Следующая интересная теорема устанавливает связь между окружностью Аполлония и формой педального треугольника.

Теорема 1 (о равнобедренном педальном треугольнике).

Для сторон педального треугольника верно $P_aP_b = P_aP_c$ тогда и только тогда, когда $P \in O_A$.

Доказательство.

(1) Покажем, что длины сторон педального треугольника некоторой точки, зависят от расстояния от этой точки до вершин базового треугольника и от сторон базового треугольника.



Пусть P — произвольная точка, $PP_c \perp AB$, $PP_a \perp BC$. Тогда P_aP_c — сторона педального треугольника. Так как четырехугольник BP_aPP_c — вписанный и $\angle PP_aB = 90°$, то $BP = 2r$ — диаметр описанной окружности $\triangle BP_aP_c$.

По теореме синусов: $\frac{P_aP_c}{\sin B} = 2r = BP$ и $\frac{AC}{\sin B} = 2R(\triangle ABC)$.

Ясно, что $P_aP_c = \frac{BP \cdot AC}{2R}$.

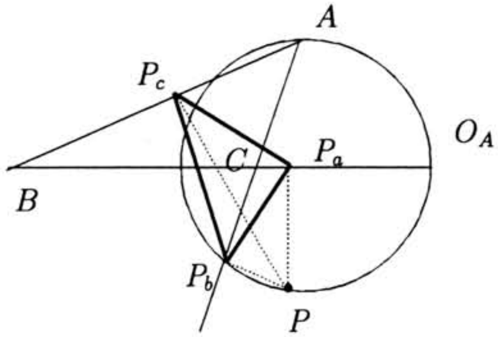
Очевидно, что $P_aP_b = \frac{CP \cdot AB}{2R}$ и $P_bP_c = \frac{AP \cdot BC}{2R}$.

Эти формулы для сторон педального треугольника известны (см. Коксетер, Грейтцер: Новые встречи с геометрией).

(2) Очевидно , что $P_aP_b = P_aP_c$ тогда и только тогда, когда $P \in O_A$. Действительно,

$$P_aP_b = P_aP_c \iff \frac{CP \cdot AB}{2R} = \frac{BP \cdot AC}{2R} \iff \frac{BP}{CP} = \frac{AB}{AC} \iff P \in O_A.$$

Теорема доказана.



Следующая красивая теорема является прямым следствием предыдущей.

Теорема 2 (о равностороннем педальном треугольнике).

Изодинамические центры треугольника и только они — суть точки, педальный треугольник которых — равносторонний.

Действительно, пусть M и N — изодинамические центры треугольника ABC. Очевидно, что $P_aP_b = P_aP_c = P_bP_c \Leftrightarrow P \in O_A$; $P \in O_C$. Т.е. $P = M$ или $P = N$.

Примечание 1.

Точка P, педальный треугольник которой — равносторонний, изогонально сопряжена с точкой Торричелли $\triangle ABC$. Это замечательное свойство доказал В. В. Прасолов (см. Математическое образование, 1(4), 1998, с.44).

Примечание 2.

Известно, что если точка P лежит на описанной окружности $\triangle ABC$, то педальный треугольник вырождается в отрезок *прямой Симсона.* Очевидно, что описанная окружность пересекает окружность Аполлония в двух точках, одна из которых — вершина $\triangle ABC$. Если опустить перпендикуляры из *другой* точки пересечения описанной окружности и окружности Аполлония на стороны треугольника, то одно из оснований перпендикуляров — середина отрезка прямой Симсона.

Примечание 3.

Известно, что прямая MN проходит через центр описанной окружности $\triangle ABC$ (см. Прасолов : Задачи по планиметрии, задача 7.49). Заметим, что выполняется более сильное утверждение.

Поскольку $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$ и $\frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AC}$, то $\frac{MB}{NB} = \frac{MC}{NC}$.

Аналогично $\frac{MB}{MA} = \frac{CB}{CA}$ и $\frac{NB}{NA} = \frac{CB}{CA}$. Отсюда $\frac{MA}{NA} = \frac{MB}{NB} = \frac{MC}{NC} = m$. Таким образом вершины треугольника ABC принадлежат окружности Аполлония точек M и N, т.е. описанная окружность треугольника ABC является окружностью Аполлония его изодинамических центров. Этим доказывается, что изодинамические центры треугольника симметричны (инверсны) относительно его описанной окружности .

(г) Подобные педальные треугольники.

Воспользуемся без доказательства широко известным свойством: Точки S и T инверсны относительно окружности $O(R)$, тогда и только тогда, когда $O(R)$ суть окружность Аполлония S и T.

Теорема 3 (о подобных педальных треугольниках)

Пусть точки S и T инверсны относительно окружности $O(R)$ и ABC — произвольный треугольник, вписанный в $O(R)$. Тогда педальные треугольники точек S и T подобны.

Доказательство.

Очевидно, что $S_aS_b = \dfrac{CS \cdot AB}{2R}$ и $T_aT_b = \dfrac{CT \cdot AB}{2R}$. Поэтому $\frac{S_aS_b}{T_aT_b} = \frac{CS}{CT}$.

Аналогично $\frac{S_aS_c}{T_aT_c} = \frac{BS}{BT}$ и $\frac{S_cS_b}{T_cT_b} = \frac{AS}{AT}$.

Поскольку вершины A, B и C лежат на окружности Аполлония S и T, то все три отношения равны, что доказывает подобие треугольников $S_aS_bS_c$ и $T_aT_bT_c$.

Теорема 4

Прямая, проходящая через центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, пересекает окружность Аполлония (не важно какую) в точках S и T. Тогда $S_aS_bS_c$ и $T_aT_bT_c$ — подобные равнобедренные треугольники.

Доказательство.

Пусть Z — центр описанной окружности $\triangle ABC$ и O_A — окружность Аполлония вершины A. Т.к. вершины B и C при инверсии относительно O_A переходят друг в друга, а вершина A — в себя, то описанная окружность переходит в себя при инверсии относительно O_A. Тогда O_A и описанная окружность — ортогональны и, следовательно, O_A переходит в себя при инверсии относительно описанной окружности. Очевидно, что точки S и T инверсны относительно описанной окружности треугольника ABC и, согласно теоремам 1 и 3, $S_aS_bS_c$ и $T_aT_bT_c$ суть подобные равнобедренные треугольники.

(д) Прямоугольный и равнобедренный педальный треугольник.

(1) Симедианы треугольника.

Пусть из вершины A треугольника ABC проведены медиана m_a и биссектриса l_a. Прямая s_a, симметричная прямой m_a относительно биссектрисы l_a, называется симедианой $\triangle ABC$.

Известно, что симедианы треугольника пересекаются в одной точке, называемой точкой Лемуана. Эта точка изогонально-сопряжена с центром тяжести $\triangle ABC$.

Известно, что симедиана s_a пересекает окружность Аполлония O_A в точке, лежащей на описанной окружности $\triangle ABC$ (см. Прасолов : Задачи по планиметрии, задача 5.129).

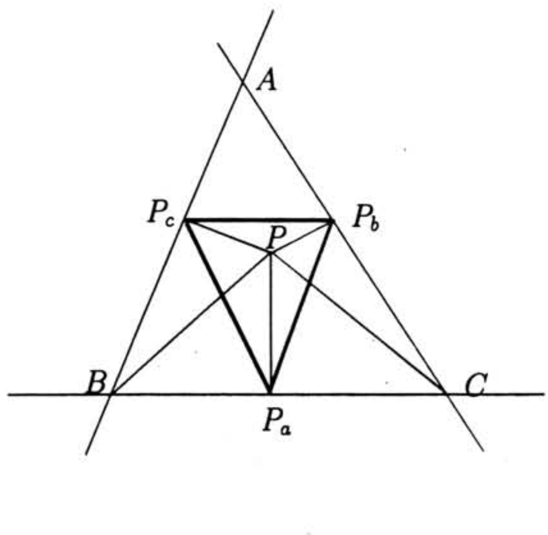
(2) Углы педального треугольника.

Докажем следующее элементарное свойство:

Пусть P — внутренняя точка $\triangle ABC$ и $P_aP_bP_c$ ее педальный треугольник. Тогда $\angle P_bP_aP_c = \angle PBA + \angle PCA$.

Доказательство.

Действительно, так как четырехугольник PP_aBP_b вписанный, то $\angle PP_aP_c = \angle PBA$. И аналогично $\angle PP_aP_b = \angle PCA$.



Примечание.

Простым перебором вариантов можно показать, что это свойство выполняется для всех точек угла, вертикального внутреннему углу BAC, а также для точек внутреннего угла BAC, лежащих за пределами $\triangle ABC$, но внутри описанного круга. Если точка P лежит за пределами описанного круга, оставаясь внутри угла BAC, то

$$360° - \angle P_b P_a P_c = \angle PBA + \angle PCA.$$

Для всех точек, лежащих за пределами $\angle BAC$ верно:

$$\angle P_b P_a P_c = |\angle PBA - \angle PCA|.$$

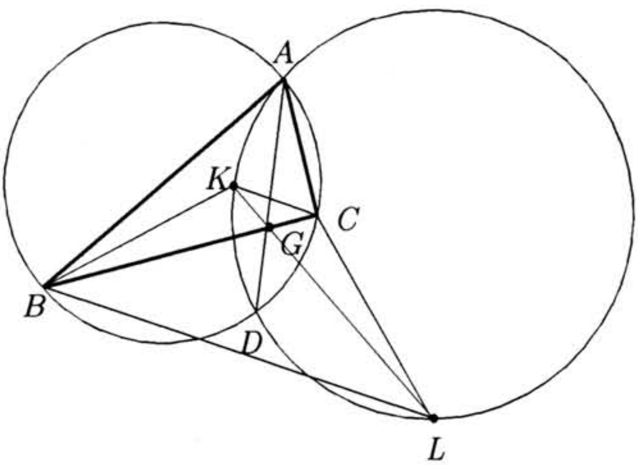
Теорема 5 (о педальных равнобедренных треугольниках).

Пусть s_a — симедиана $\triangle ABC$ и $G \in BC$ — основание s_a. Прямая, проходящая через G, пересекает окружность Аполлония O_A в точках K и L. Тогда сумма углов при вершинах равнобедренных педальных треугольников точек K и L равна 180°.

Доказательство.

Пусть симедиана AG пересекает O_A в точке D. Эта точка лежит на описанной окружности (см.(1)). Тогда $BG \cdot GC = AG \cdot GD$. Точки A, D, K и L лежат на O_A. Тогда $KG \cdot GL = AG \cdot GD$.

Понятно, что $BG \cdot GC = KG \cdot GL$. Тогда четырехугольник $BKCL$ — вписанный.



Очевидно, что $\angle KBC + \angle KCB = 180° - \angle BKC = \angle BLC$. Тогда $\angle KBA + \angle KCA = 180° - (\angle ABC + \angle BLC)$.

Из четырехугольника $\angle ABC + \angle BLC = \angle LCA - \angle LBA$.

Таким образом, $\angle KBA + \angle KCA = 180° - (\angle LCA + \angle LBA)$.

Заметим, что углы $K_b K_a K_c$ и $L_b L_a L_c$ суть углы при вершинах равнобедренных педальных треугольников $K_b K_a K_c$ и $L_b L_a L_c$.

Поскольку точка K лежит внутри $\triangle ABC$, а точка L снаружи, то

$$\angle K_b K_a K_c = \angle KBA + \angle KCA, \quad \text{а} \quad \angle L_b L_a L_c = \angle LCA - \angle LBA.$$

Очевидно, что $\angle K_b K_a K_c = 180° - \angle L_b L_a L_c$.

Объединяя результаты теорем 4 и 5, получаем следующую интересную теорему.

Теорема 6.

Пусть ABC — произвольный треугольник, Z — центр его описанной окружности, а G_a — основание симедианы s_a. Прямая ZG_a пересекает окружность Аполлония O_A в точках K и L. Тогда педальные треугольники точек K и L — прямоугольны и равнобедренны.

Доказательство.

По теореме 4, педальные треугольники точек K и L — равнобедренны и подобны, а по теореме 5 сумма углов при вершинах этих треугольников равна 180°. Понятно, что выполнение двух указанных свойств одновременно возможно только для равнобедренных прямоугольных треугольников.

Примечание 1.

Из теоремы 6 следует, что на плоскости есть шесть и только шесть точек, педальные треугольники которых прямоугольны и равнобедренны. Это вытекает из существования трех окружностей Аполлония.

Примечание 2.

Ясно, что для любого равнобедренного треугольника с заданными углами есть шесть и только шесть точек, педальные треугольники которых подобны данному.

В случае равностороннего треугольника можно считать, что по три таких треугольника — совпадают.

Комментарий В. В. Прасолова

В моей статье «Изогонально сопряжённые точки» (Математическое образование, 1(4), 1998, с. 40–46) доказывается, что для треугольника ABC, все углы которого меньше 120°, точка Торричелли T изогонально сопряжена с точкой, проекции которой на стороны треугольника ABC образуют правильный треугольник. Точка Торричелли хороша тем, что она расположена внутри треугольника и для неё достигается минимум суммы расстояний $AX + BX + CX$, где X — точка внутри треугольника. (Если $\angle C \geq 120°$, то минимум такой суммы достигается при $X = C$.) Но для любого треугольника ABC можно построить на его сторонах внешним образом правильные треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1. Точно так же, как и для точки

Торричелли, доказывается, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке с трилинейными координатами

$$\left(\frac{1}{\sin(60^\circ+\alpha)}, \frac{1}{\sin(60^\circ+\beta)}, \frac{1}{\sin(60^\circ+\gamma)}\right).$$

Правильные треугольники можно также построить на сторонах треугольника ABC не внешним, а внутренним образом. Тогда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекутся в точке с трилинейными координатами

$$\left(\frac{1}{\sin(60^\circ-\alpha)}, \frac{1}{\sin(60^\circ-\beta)}, \frac{1}{\sin(60^\circ-\gamma)}\right).$$

В геометрии треугольника эти две точки называют *изогональными центрами* треугольника. Они обладают тем свойством, что стороны треугольника ABC видны из них под углом 60° или 120°.

Две точки, в которых пересекаются окружности Аполлония, изогонально сопряжены изогональным центрам треугольника. Они имеют трилинейные координаты

$$(\sin(60^\circ+\alpha), \sin(60^\circ+\beta), \sin(60^\circ+\gamma))$$

и

$$(\sin(60^\circ-\alpha), \sin(60^\circ-\beta), \sin(60^\circ-\gamma)).$$

Эти точки называют *изодинамическими центрами* треугольника. По-другому изодинамический центр X характеризуется следующими эквивалентными свойствами:

- для точки X педальный треугольник правильный;
- для точки X выполняются соотношения $AX \cdot BC = BX \cdot CA = CX \cdot AB$.

Теорема Жордана

В. В. Прасолов

Французский математик Камиль Жордан (1838–1922) счёл необходимым включить в курс математического анализа теорему о том, что замкнутая несамопересекающаяся кривая разбивает плоскость на две части. Эта теорема часто используется в книгах по математике, но, как правило, без доказательства. В статье В. В. Прасолова изложено одно из доказательств теоремы Жордана, основанное на теории графов.

Жордановой кривой называют образ C окружности S^1 при непрерывном инъективном отображении $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$. Инъективность означает, что $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$. В «Курсе анализа» [J] Жордан доказал, что множество $\mathbb{R}^2 \setminus C$ несвязно и состоит в точности из двух линейно связных компонент *(теорема Жордана)*. Доказательство Жордана было не вполне строгим. Первое полное доказательство теоремы Жордана предложил Веблен [V].

Сейчас известно много разных доказательств теоремы Жордана. Все они достаточно сложные. Но в том частном случае, когда рассматривается не непрерывная кривая, а конечнозвенная ломаная, теорема Жордана доказывается сравнительно просто. Мы сначала докажем теорему Жордана в этом частном случае, а затем на основе этого докажем её и в общем случае.

Теорема 0.1 (кусочно-линейная теорема Жордана). *Пусть C — замкнутая несамопересекающаяся конечнозвенная ломаная на плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда $\mathbb{R}^2 \setminus C$ состоит ровно из двух связных областей, причем границей каждой из них служит C.*

Доказательство. Выберем некоторый фиксированный круг D, пересекающий ломаную C по отрезку. Из каждой точки множества $\mathbb{R}^2 \setminus C$ можно сколь угодно близко подойти к ломаной C, не пересекая ее. Затем, идя вдоль ломаной C, можно войти в круг D. Ломаная C делит круг D на две части, поэтому количество областей не больше двух.

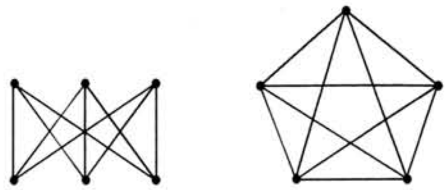


Рис. 1. Графы $K_{3,3}$ и K_5

Остается доказать, что множество $\mathbb{R}^2 \setminus C$ не связно. Пусть $x \in \mathbb{R}^2 \setminus C$ и l — произвольный луч с началом x. Пересечение луча l с ломаной C состоит их нескольких точек и отрезков. Каждой такой точке (или отрезку) сопоставим 0 или 1 в зависимости от того, как расположены входящее и выходящее звенья ломаной C по отношению к лучу l: если они расположены по одну сторону от l (луч l касается C), то сопоставим 0, а если по разные стороны — сопоставим 1. Четность (остаток от деления на 2) суммы всех сопоставленных чисел при повороте луча изменяется непрерывно, поэтому четность постоянна. Ясно также, что во всех точках связной области множества $\mathbb{R}^2 \setminus C$ четность должна быть одной и той же. С другой стороны, если некоторый отрезок пересекает ломаную C ровно в одной точке, то в его концах четность принимает разные значения.

Следствие. *Пусть a, b, c, d — точки замкнутой несамопересекающейся ломаной C, расположенные в указанном порядке. Предположим, что точки a и c соединены ломаной L_1, а точки b и d соединены ломаной L_2, причем обе эти ломаные лежат в одной и той же из двух областей, образованных ломаной C. Тогда ломаные L_1 и L_2 пересекаются в некоторой точке.*

Доказательство. Точки a и c разбивают ломаную C на две части. Ломаные C и L_1 разбивают плоскость на три области: границей одной из этих областей служит C, а границами двух других областей служит L_1 и дуги ломаной C (для доказательства этого утверждения можно рассмотреть концы отрезка, пересекающего ломаную L_1 в одной точке и не пересекающего ломаную C). По условию ломаная L_2 лежит в той же области множества $\mathbb{R}^2 \setminus C$, что и ломаная L_1. Поэтому точки ломаной L_2, близкие к точкам c и d, лежат в разных областях, образованных ломаными C и L_1.

В качестве приложения кусочно-линейной теоремы Жордана докажем непланарность двух графов. Напомним, что граф — это набор точек и соединяющих их рёбер. Граф называют планарным, если его можно расположить на плоскости так, чтобы рёбра не пересекались (во внутренних точках). Простейшими примерами непланарных графов служат графы $K_{3,3}$ и K_5, изображенные на рис. 1.

Теорема 0.2. *Графы $K_{3,3}$ и K_5 непланарные.*

Доказательство. Вершины графа $K_{3,3}$ можно занумеровать так, что его рёбра образуют замкнутую ломаную $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$, а кроме того, у графа есть рёбра x_1x_4, x_2x_5 и x_3x_6. Если бы граф $K_{3,3}$ был планарным, то указанная замкнутая ломаная разбивала бы плоскость на две области и два из указанных трех рёбер лежали бы в одной из этих областей. Но в таком случае эти рёбра обязаны пересекаться.

Непланарность графа K_5 доказывается аналогично. Замкнутая ломаная $x_1x_2x_3x_4x_5$ разбивает плоскость на две области. Три из пяти остальных рёбер графа лежат в одной из этих областей. Из этих трех рёбер можно выбрать два ребра, не имеющие общих вершин.

Ясно, что если граф содержит подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ или K_5, то он непланарен. В 1930 г. Куратовский [K] доказал, что верно и обратное: граф непланарен тогда и только тогда, когда он содержит подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ или K_5. (Теорему Куратовского здесь мы обсуждать не будем.)

Перейдём теперь к доказательству теоремы Жордана в общем случае.

Область плоскости мы называем *линейно связной*, если любые две ее точки можно соединить путем, т.е. образом отрезка при некотором непрерывном отображении.

Мы уже доказали теорему Жордана в том случае, когда кривая C представляет собой конечнозвенную ломаную (см. с. 95). Из кусочно–линейной теоремы Жордана можно вывести общую теорему Жордана, аппроксимируя кривую C конечнозвенными ломаными. Такое доказательство приведено в [Tv]. Мы, следуя [Th], приведем доказательство теоремы Жордана, основанное на том, что граф $K_{3,3}$ непланарен (теорема 0.2 на с. 97). Сначала мы докажем, что жорданова кривая разбивает плоскость.

Теорема 0.3. *Если C — жорданова кривая, то множество $\mathbb{R}^2 \setminus C$ несвязно.*

Доказательство. Проведем к кривой C опорные прямые и выберем на них точки A_1 и A_2, лежащие на кривой C. На двух дугах кривой C, заданных точками A_1 и A_2, можно выбрать точки B_1 и B_2 так, что отрезок B_1B_2 не будет пересекать кривую C (рис. 2). Если бы точки A_3 и B_3 можно было бы соединить путем, не пересекающим кривую C, то мы получили бы вложение графа $K_{3,3}$ в плоскость, чего не может быть.

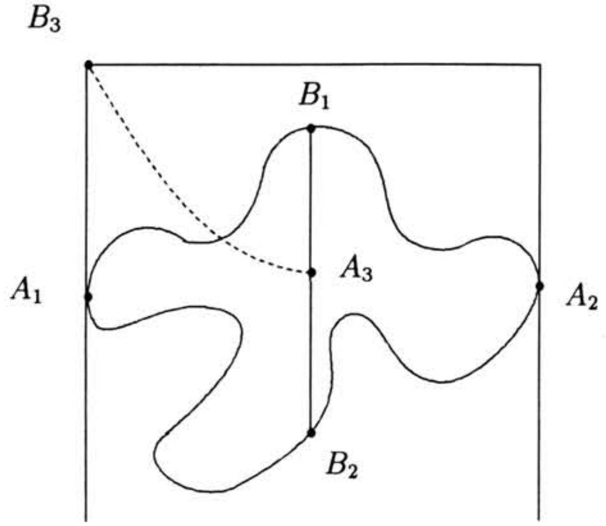


Рис. 2. Жорданова кривая и граф $K_{3,3}$

Докажем теперь следующее вспомогательное утверждение: незамкнутая дуга кривой не разбивает плоскость.

Теорема 0.4. *Пусть A — простая дуга на плоскости, т.е. образ отрезка I при непрерывном отображении $f : I \to \mathbb{R}^2$. Тогда множество $\mathbb{R}^2 \setminus A$ связно.*

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. Множество A компактно, поэтому можно выбрать положительное число d так, что расстояния от x и y до A больше $3d$. Отображение f равномерно непрерывно, поэтому A можно разбить на дуги $A_1, \ldots, A_k$ (дуга A_i соединяет точки a_i и a_{i+1}) так, что расстояние от точки a_i до любой точки дуги A_i не превосходит d (здесь $i = 1, \ldots, k$). Пусть минимальное расстояние между точками дуг A_i и A_j, где $1 \leq i \leq j - 2 \leq k - 2$, равно d'. Ясно, что $d' \leq d$. Каждую дугу A_i разобьем на дуги $A_{i1}, \ldots, A_{ik_i}$ (дуга A_{ij} соединяет точки a_{ij} и $a_{i,j+1}$) так, что расстояние от точки a_{ij} до любой точки дуги A_{ij} меньше $d'/4$. Пусть G_i — граф, образованный сторонами квадрата с центрами в точках a_{ij}; стороны всех этих квадратов параллельны двум фиксированным прямым и длины сторон квадратов равны $d'/2$. Графы G_i и G_j пересекаются тогда и только тогда, когда $|i - j| \leq 1$.

Граф $G = G_1 \bigcup \cdots \bigcup G_k$ разбивает плоскость на связные области, среди которых есть ровно одна неограниченная область F. Каждая точка дуги A принадлежит какой-то ограниченной области, поэтому A не пересекает F. Следовательно, достаточно доказать, что $x, y \in F$.

Предположим, что точка x принадлежит ограниченной области графа G. Тогда в графе G найдётся цикл C, внутри которого лежит точка x. Выберем цикл C так, что он принадлежит графу $G_i \bigcup G_{i+1} \bigcup \cdots \bigcup G_j$, причем разность $j-i$ минимальна. Покажем, что в таком случае $j-i \leq 1$. Предположим, что $j-i \geq 2$. Можно считать, что число ребер цикла C, не принадлежащих G_{j-1}, минимально. Цикл C содержит по крайней мере по одному ребру из непересекающихся графов G_{j-2} и G_j (имеются в виду ребра, не принадлежащие G_{j-1}). Кроме того, после выбрасывания всех ребер графа G_{j-1} нарушается связность цикла C. Это означает, что цикл C содержит по крайней мере два непересекающихся участка, проходящих по графу G_{j-1}. Эти два участка можно соединить путем γ, проходящим по ребрам графа G_{j-1}. Путь γ разбивает цикл C на два цикла. Точка x лежит внутри одного из этих циклов. Но у каждого из этих циклов число ребер, не принадлежащих G_{j-1}, строго меньше, чем у цикла C. Получено противоречие.

Итак, точка x принадлежит внутренней области графа $G_i \bigcup G_{i+1}$. Но этого не может быть, так как точка x лежит вне круга радиуса $3d$ с центром a_i, а граф $G_i \bigcup G_{j+1}$ лежит внутри этого круга. Полученное противоречие означает, что точка x принадлежит неограниченной области графа G. Точка y принадлежит той же самой области, поэтому x и y можно соединить путем, лежащим в $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

Мы уже доказали, что жорданова кривая разбивает плоскость. Теперь можно доказать оставшуюся часть теоремы Жордана.

Теорема 0.5. *Жорданова кривая C разбивает плоскость в точности на две линейно связные области, причем границей обеих этих областей служит кривая C.*

Доказательство. Пусть Ω — одна из линейно связных областей, на которые кривая C разбивает плоскость, c — произвольная точка кривой C. Если из кривой C выбросить сколь угодно малую дугу δ, содержащую точку c, то оставшаяся дуга $A = C \setminus \delta$ не разбивает плоскость. Поэтому точку $x \in \Omega$ можно соединить с точкой y, лежащей в другой компоненте связности, путем γ, не пересекающим A. Путь γ должен пересекать кривую C, поэтому он пересекает дугу δ. У пути γ есть участок, который соединяет точку x с точкой дуги δ и целиком принадлежит области Ω (за исключением точки дуги δ). Таким образом, граница области Ω содержит всюду плотное подмножество кривой C, а значит, она содержит и всю кривую C, поскольку граница — замкнутое множество.

Остается доказать, что количество связных областей множества $\mathbb{R}^2 \setminus C$ не может быть больше 2. Предположим, что точки x_1, x_2, x_3 принадлежат трем различным областям $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ множества $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Пусть $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — попарно непересекающиеся

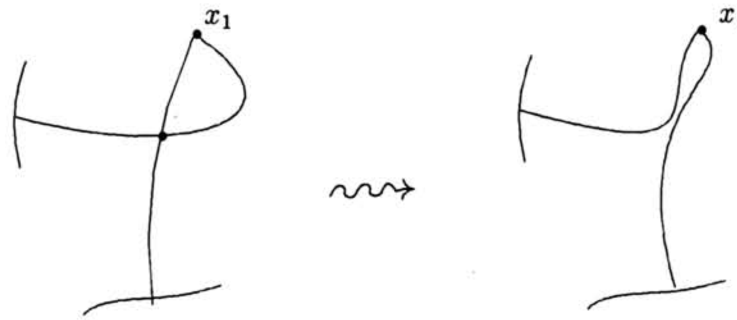


Рис. 3. Перестройка пути

дуги кривой C. В области Ω_1 точку x_1 можно соединить путем γ_{1j} с некоторой точкой дуги δ_j. При этом можно добиться, чтобы пути γ_{11}, γ_{12} и γ_{13} пересекались только в точке x_1. Для этого в окрестности точки пересечения эти пути нужно перестроить так, как показано на рис. 3.

Для точек x_2 и x_3 пути γ_{2i} и γ_{3i} определим аналогично. Добавив к путям γ_{ij}, где $i, j = 1, 2, 3$, части дуг δ_i, получим вложение графа $K_{3,3}$ в плоскость, чего не может быть.

Другое доказательство теоремы Жордана вместе с кратким обзором различных её доказательств приведено в [Ч].

Литература

[Ч] Чернавский А. В., *Теорема Жордана*, Математическое просвещение. Третья серия, вып. 3 (1999), 142–156.

[J] Jordan C., *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Gauthier–Villars, Paris, 1887. Vol. 3, 587–594.

[K] Kuratowski K., *Sur le problème des courbes gauches en topologie*, Fund. Math. **15** (1930), 271–283.

[Th] Thomassen C., *The Jordan–Schönflies theorem and the classification of surfaces*, Amer. Math. Monthly **99** (1992), 116–130.

[Tv] Tverberg H., *A proof of the Jordan curve theorem*, Bull. London Math. Soc. **12** (1980), 34–38.

[V] Veblen O., *Theory of plane curves in nonmetrical analysis situs*, Trans. Amer. Math. Soc. **6** (1905), 83–98.

Международная олимпиада «Туймаада»

Мы продолжаем знакомить читателей с образовательными инициативами на местах. В этом номере рассказывается о Международной математической олимпиаде, проводящейся в Республике Саха (Якутии). Материал подготовил С. В. Попов, e-mail: spopov@sakha.ru

Олимпиадное движение школьников в Республике Саха (Якутия) берет свои истоки с 60-х годов, когда первыми зачинателями стали известные педагоги Алексеев М.А., Дырахов С.Г., Сергучев И.Е., Софронеев В.Н. и др. Как продолжение этой тридцатилетней работы и как доказательство открытости образовательного пространства с 1994 года ежегодно Министерством образования Республики Саха каждый год проводится в городе Якутске Международная олимпиада "Туймаада" по математике, физике, химии и информатике. Название "Туймаада" имеет свои корни. Во-первых, это название долины, в которой стоит г. Якутск, прародины народа саха. Во-вторых, оно созвучно со словами "Олимпиада", "Балканиада".

Проект международной олимпиады школьников в г. Якутске — это одно из направлений в работе по воспитанию и развитию интеллектуального потенциала нашего общества. Математическая олимпиада "Туймаада" проводится в рамках Президентской программы "Одаренные дети" и призвана способствовать укреплению взаимопонимания между школьниками различных республик и стран, сыграть роль своего рода научных конференций для школьников, помочь ребятам расширить свои знания по истории и культуре Республики Саха, дать возможность пообщаться друг с другом школьникам разных стран, которых объединяет общий интерес и любовь к математике. География участников олимпиады "Туймаада" с каждым годом расширяется. В ней принимали и принимают участие команды школьников Румынии, Китая, Турции, Монголии, Южной Кореи, Таиланда, Германии, США (штат Аляска), Бельгии, Франции, Республик Бурятия, Тыва, Агино-Бурятского автономного округа, различных городов Российской Федерации. Мы не сомневаемся в том, что олимпиада "Туймаада" существенно обогатила и открыла новые горизонты для развития олимпиадного движения в нашей республике.

Математические олимпиады школьников в Республике Саха в последнее время пользуются огромной популярностью. Они способствуют развитию устойчивого интереса учащихся к изучению математики и совершенствованию всего школьного математического образования.

VI международная олимпиада "Туймаада–99" прошла с 7 июля по 14 июля 1999 года в г. Якутске. Участники и гости олимпиады проживали в пригороде г. Якутска в коттеджах Высшей школы музыки — в канадской деревне. Согласно положению, олимпиада по математике проходила для одной возрастной категории (до 16 лет) и она включала в себя два тура. Следует отметить, что организаторы олимпиады уделяли внимание не только соревнованиям. Программа олимпиады включала в себя множество интересных научных и культурно-спортивных мероприятий. Так, все участники олимпиады с 12 по 14 июля провели экскурсию на комфортабельном теплоходе по реке Лена — на Ленские столбы.

Сразу после окончания олимпиады для школьников, студентов, а также аспирантов и молодых ученых нашей республики прошла первая летняя школа физико-математического форума "Ленский край". Главные цели форума:

– повышениеуровня знаний учащихся по физике и математике;

– общение молодых ученых и учащихся республики с видными учеными из научных центров России, создание научных связей;

– популяризация достижений науки среди школьников и студентов;

– подготовка к олимпиадам по математике и физике, а также поддержка физико-математического движения в республике.

Следующая Международная олимпиада "Туймаада–2000", а также форум "Ленский край" планируются в июле 2000 года.

Ниже приводятся условия и решения задач последних трех лет олимпиады "Туймаада". В скобках после условий указаны авторы задач.

Условия задач олимпиады «Туймаада-97»

1. Произведение любых трех из данных четырех натуральных чисел — точный квадрат. Докажите, что сами эти числа — точные квадраты.

А.Голованов (С-Петербург)

2. Решите систему уравнений в натуральных числах

$$\begin{cases} 3x^2+6y^2+5z^2 &= 1997, \\ 3x+6y+5z &= 161. \end{cases}$$

И.Дмитриев (Якутск)

3. Можно ли раскрасить в 6 цветов все натуральные числа так, чтобы каждый цвет был использован и сумма любых пяти чисел разного цвета была окрашена в шестой цвет?

А.Голованов (С-Петербург)

4. Пользуясь только угольником с величиной угла $\frac{\pi}{7}$ и линейкой, постройте угол $\frac{\pi}{14}$.

В.Егоров (Якутск)

5. Докажите неравенство

$$\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{1}{q^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{q^n}\right)<\frac{q-1}{q-2},$$

где $n \in \mathbf{N},\ q>2$.

Е.Софронов (Якутск)

6. Существуют ли 14 последовательных натуральных чисел, каждое из которых имеет нетривиальный делитель, не превосходящий 11?

Д.Фон-Дер-Флаасс (Новосибирск)

7. Известно, что каждый ученик класса в течение воскресенья 1 раз побывал на катке, причем каждый мальчик встречался там с кажой девочкой. Докажите, что был момент времени, когда либо все мальчики, либо все девочки класса одновременно находились на катке.

В.Дольников (Ярославль)

8. Найдите прямоугольный треугольник, который можно разрезать на 365 одинаковых треугольников.

Д.Фон-Дер-Флаасс (Новосибирск)

Решения задач

1. Если abc и bcd — точные квадраты, то квадратом будет и $abc \cdot bcd = ad(bc)^2$, а, следовательно, и ad. Таким образом мы можем доказать, что произведение любых двух из данных 4 чисел — квадрат; а из того, что, например, abc и bc — квадраты, следует, что и a — квадрат.

2. Ответ: (7, 15, 10) или (16, 8, 13). Введем параметр t и преобразуем исходную систему уравнений к виду

$$\begin{cases} (3x^2 - 6xt) + (6y^2 - 12yt) + (5z^2 - 10zt) = 1997 - 322t, \\ 3(x-t) + 6(y-t) + 5(z-t) = 161 - 14t. \end{cases}$$

В первом уравнении системы выделим полные квадраты. Тогда получим

$$\begin{cases} 3(x-t)^2 + 6(y-t)^2 + 5(z-t)^2 = 14t^2 - 322t + 1997, \\ 3(x-t) + 6(y-t) + 5(z-t) = 161 - 14t. \end{cases}$$

Будем подбирать значение параметра t так, чтобы в правой части нашей системы стояли небольшие целые числа. Полагая $t = 11$, имеем

$$\begin{cases} 3(x-11)^2 + 6(y-11)^2 + 5(z-11)^2 = 149, \\ 3(x-11) + 6(y-11) + 5(z-11) = 7. \end{cases}$$

Далее, для удобства, введем замену переменных $u = x - 11$, $v = y - 11$, $w = z - 11$, и получим систему уравнений, эквивалентную исходной

$$\begin{cases} 3u^2 + 6v^2 + 5w^2 = 149, \\ 3u + 6v + 5w = 7. \end{cases}$$

Из условия задачи и из первого уравнения полученной системы, получаем ограничения на целые u, v, и w: $|u| \le 7$, $|v| \le 4$, $|w| \le 5$. Для того чтобы уменьшить количество рассматриваемых случаев, систему преобразуем к виду

$$\begin{cases} u^2 + 2v^2 + 2w^2 = 50 + \frac{w^2-1}{3}, \\ u + 2v + 2w = 2 + \frac{w+1}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, для w возможны только 4 случая: $w = -4$, -1, 2 и 5.

В первом случае, для $w = -4$ имеем

$$\begin{cases} u^2 + 2v^2 = 23, \\ u + 2v = 9, \end{cases}$$

откуда $u = 9 - 2v$, $3v^2 - 18v + 29 = 0$ и система не имеет решений.

Во втором случае, для $w = -1$ имеем

$$\begin{cases} u^2 + 2v^2 &= 48, \\ u + 2v &= 4, \end{cases}$$

откуда $u = 4 - 2v$, $3v^2 - 8v - 16 = 0$ и система имеет единственное целое решение $u = -4$, $v = 4$, т.е. $x = 7$, $y = 15$, $z = 10$.

В третьем случае, для $w = 2$ имеем

$$\begin{cases} u^2 + 2v^2 &= 43, \\ u + 2v &= -1, \end{cases}$$

откуда $u = -2v - 1$, $3v^2 + 2v - 21 = 0$ и система имеет единственное целое решение $u = 5$, $v = -3$, т.е. $x = 16$, $y = 8$, $z = 13$.

И наконец, в четвертом случае, для $w = 5$ имеем

$$\begin{cases} u^2 + 2v^2 &= 8, \\ u + 2v &= -6, \end{cases}$$

откуда $u = -2v - 6$, $3v^2 + 12v - 14 = 0$ и, очевидно, система не имеет решений.

3. Ответ: невозможно. Пусть A_i, $i = 1, \ldots, 6$ — множество чисел i-го цвета. Заметим, что для любых двух цветов i и j существует такое число, прибавление которого к любому числу i-го цвета дает число j-го цвета. Действительно, в качестве такого числа можно взять сумму любых четырех чисел оставшихся цветов.

Отсюда следует, что, во-первых, каждый цвет встречается бесконечно много раз, и, во-вторых, наименьшая разность между двумя числами одного цвета одинакова для всех цветов. Действительно, пусть имеются два числа i-го цвета с разностью d; пусть, далее, d_{ij} — такое число, прибавление которого к числу i-го цвета дает число j-го цвета. Тогда, прибавив d_{ij} к числам i-го цвета с разностью d, мы получим два числа j-го цвета с той же разностью.

Докажем теперь, что, начиная с некоторого места, каждое из множеств A_i совпадает с некоторой арифметической прогрессией с разностью d.

Действительно, пусть $a_3 \in A_3, a_3 + d \in A_3, a_4 \in A_4, a_5 \in A_5, a_6 \in A_6$. Тогда для любого $a \in A_1$ имеем

$$a + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \in A_2,$$

$$a + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 + 2a_6 =$$

$$= (a + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \in A_1,$$

$$a + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 + 2a_6 + d =$$

$$= (a + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) + (a_3 + d) + a_4 + a_5 + a_6 \in A_1.$$

Итак, числа $T = 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 + 2a_6$ и $T + d$ являются периодами A_1 в следующем смысле: если $a \in A_1$, то $a + T \in A_1$ и $a + (T + d) \in A_1$. Отсюда следует, что любая линейная комбинация T и $T+d$ — тоже период A_1: если $a \in A_1$, то $a+kT+l(T+d) \in A_1$ для любых натуральных k и l.

Теперь понятно, что T делится на d (иначе среди периодов A_1, а, следовательно, и среди элементов A_1, нашлись бы два числа, отдичающиеся менее, чем на d). А тогда наибольший общий делитель T и $T + d$ равен d, и, следовательно, среди линейных комбинаций T и $T + d$ с натуральными коэффициентами найдутся все кратные d, начиная с некоторого. Поэтому A_1 содержит все члены арифметической прогрессии с разностью d, начиная с некоторого, и, значит, начиная с этого места, совпадает с ней (так как членов с разностью, меньшей d, в A_1 нет). То же самое, конечно, верно и для остальных A_i.

Итак, мы доказали, что, начиная с некоторого места, все A_i совпадают с арифметической прогрессией с разностью d. Поэтому $d = 6$ (так как на отрезке натурального ряда длины d должно быть по одному члену каждого A_i) и можно считать, что, начиная с некоторого места, A_i состоит из чисел, сравнимых с i по модулю 6. Это однако, противоречит условию задачи:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 6).$$

Поэтому требуемое разбиение натуральных чисел построить невозможно.

4. Одно из решений такое: построим равнобедренный треугольник с углами при основании $2\pi/7$ и при вершине — $3\pi/7$. Если линейкой построим высоту к боковой стороне треугольника, то вновь образованный угол будет равен

$$\frac{\pi}{2} - 3 \cdot \frac{\pi}{7} = \frac{\pi}{14}.$$

5. Прежде всего заметим, что если $0 < x < 1$, то

$$(1 + x)(1 - x) < 1, \quad \text{т.е.} \ \ 1 + x < \frac{1}{1 - x}.$$

Отсюда, обозначив $p = 1/q, \quad 0 < p < 1/2$, приходим к неравенству

$$(1 + p)(1 + p^2)\dots(1 + p^n) < \frac{1}{(1 - p)(1 - p^2)\dots(1 - p^n)}.$$

Заметим также, что если $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$, то $(1 - x)(1 - y) > 1 - x - y$. Отсюда получим неравенства

$$(1 - p)(1 - p^2)\dots(1 - p^n) >$$

$$> 1 - p - p^2 - \ldots - p^n = 1 - p \cdot \frac{1 - p^n}{1 - p} > \frac{1 - 2p}{1 - p},$$

и так как $0 < p < 1/2$, имеем

$$\frac{1}{(1-p)(1-p^2)\ldots(1-p^n)} < \frac{1-p}{1-2p}.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим требуемое неравенство:

$$\left(1 + \frac{1}{q}\right)\left(1 + \frac{1}{q^2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{q^n}\right) < \frac{q-1}{q-2}.$$

6. Ответ: не существует. Достаточно рассмотреть простые делители 2, 3, 5, 7, 11 и семь нечётных последовательных натуральных чисел. Дальнейшие рассуждения будут основаны на следующей лемме.

Л е м м а. *Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — натуральные числа, образующие арифметическую прогрессию с разностью d и m — произвольное натуральное число, большее 1, такое что $(m, d) = 1$. Тогда, если a_i делится на m, то a_{i+m} делится на m, причем между ними нет ни одного члена прогрессии, делящегося на m.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу свойств арифметической прогрессии имеем

$$a_{i+m} = a_1 + d(i + m - 1) = a_1 + d(i - 1) + dm = a_i + dm.$$

Отсюда следует делимость a_{i+m} на m.

Второе утверждение леммы докажем методом от противного. Предположим, что a_{i+k} делится на m, где $a_i < a_{i+k} < a_{i+m}$, $1 < k < m$. Тогда $a_{i+k} - a_i = dk$ и dk делится наm, но $(d, m) = 1$ и $1 < k < m$. Противоречие. Лемма доказана.

Оставшиеся семь последовательных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_7$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 2$. В силу леммы, из них на 3 могут делиться не более трёх чисел, причем три числа делятся на 3 только в одном случае, когда делятся на 3 числа a_1, a_2 и a_7. На 5 могут делиться не более двух, причем два числа делятся на 5 в двух случаях, когда либо a_1 и a_6 делятся на 5, либо a_2 и a_7 делятся на 5. Следовательно, на 3 и 5 могут делиться не более четырех чисел из семи данных. Далее, из оставшихся трех чисел на 7 или на 11 могут делиться не более двух из них.

Таким образом, хотя бы одно из семи данных чисел не делится ни на 3, ни на 5, ни на 7 и ни на 11.

7. Пусть D_1 — девочка, ушедшая из катка раньше всех девочек и t_1 — время её ухода. Кроме того, пусть D_2 — девочка, пришедшая на каток позже всех девочек и t_2 — время её прихода. Будем рассматривать два случая: $t_1 \geq t_2$ и $t_1 < t_2$.

В первом случае в момент времени $t = (t_1 + t_2)/2$ все девочки уже пришли на каток и никто ещё не ушёл из катка, поскольку

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2} \geq \frac{t_2 + t_2}{2} = t_2, \quad t = \frac{t_1 + t_2}{2} \leq \frac{t_1 + t_1}{2} = t_1.$$

Следовательно, в момент времени $t = (t_1 + t_2)/2$ все девочки были на катке.

Во втором случае девочки D_1 и D_2 не встречались. Рассмотрим мальчиков. Отметим вначале, что все мальчики пришли на каток до момента времени t_1. Действительно, в противном случае, какой-то мальчик не встретился бы с девочкой D_1, что противоречит условию задачи. С другой стороны, все мальчики ушли из катка в момент времени $\geq t_2$. В самом деле, в противном случае, какой-то мальчик не встретился бы с девочкой D_2, что также противоречит условию задачи.

Таким образом, так как $t_1 < (t_1 + t_2)/2 < t_2$, то в момент времени $(t_1 + t_2)/2$ все мальчики были на катке.

8. Известно, что если все стороны прямоугольного треугольника разбить на n равных частей и провести прямые параллельные трём сторонам через точки разбиения, то получим n^2 маленьких и равных друг другу треугольников, подобных исходному, с коэффициентом подобия n. Так как $365 = 13^2 + 14^2$, возьмём прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 13$ и $CB = 14$ и проведем высоту CD. Отметим, что треугольники ACD и CBD подобны. Стороны треугольника ACD разобъем на 13 частей, а второго — на 14 частей. Очевидно, получим требуемые 365 равных друг другу треугольников.

Условия задач олимпиады «Туймаада-88»

1. Представьте число $\frac{1997}{1998}$ в виде суммы различных чисел, обратных к натуральным.

А.Я.Белов (С-Петербург), И.Г.Дмитриев (Якутск)

2. Решите уравнение

$$\left(x^3-1000\right)^{1/2}=\left(x^2+100\right)^{1/3}.$$

И.Ф.Шарыгин (Москва)

3. Отрезок длины l с концами на границе треугольника делит площадь этого треугольника пополам. Докажите, что $l > r\sqrt{2}$, где r - радиус вписанной окружности треугольника.

А.С.Голованов (С.-Петербург)

4. Дан тетраэдр $ABCD$ у которого противоположные ребра равны, т.е. $AB = CD$, $AC = BD$ и $BC = AD$. Докажите, что существуют ровно 6 плоскостей, пересекающие трехгранные углы тетраэдра и делящие полную поверхность и объем данного тетраэдра пополам.

И.Г.Дмитриев (Якутск)

5. Прямоугольный треугольник вписан в параболу $y = x^2$. Докажите, что его гипотенуза не меньше 2.

А.С.Голованов (С.-Петербург)

6. Докажите, что последовательность первых цифр чисел вида $2^n + 3^n$ непериодична.

А.С.Голованов (С.-Петербург)

7. Рассматриваются всевозможные последовательности из чисел -1 и +1 длины 100. Для каждой из них вычисляется квадрат суммы членов. Найдите среднее арифметическое значение получившихся величин.

А.Я.Белов (Москва)

8. Дана пирамида $ABCD$. Пусть O – середина ребра AC. Известно, что DO – высота пирамиды, $AB = BC = 2DO$ и угол ABC – прямой. Разрежьте эту пирамиду на 8 равных и подобных ей пирамид.

И.Ф.Шарыгин (Москва)

Решения задач

1. Одно из решений данной задачи имеет вид:

$$\frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots$$

$$+\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(k-1)\cdot k} + \frac{1}{k\cdot(k+1)}.$$

Отсюда при $k = 1997$ получаем одно из решений данной задачи. Отметим, что задача имеет бесконечно много решений в силу равенства

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{2m} + \frac{1}{3m} + \frac{1}{6m}.$$

2. Ответ: 5. Докажем справедливость следующего утверждения: *все действительные корни исходного уравнения будут корнями уравнения* $x^3 - 100 = x^2$. В самом деле, если $x^3 - 100 < x^2$, то $x^3 < x^2 + 100$, т.е.

$$\left(x^3 - 100\right)^{1/2} < x < \left(x^2 + 100\right)^{1/3}.$$

Совершенно аналогично рассматривается случай $x^3 - 100 > x^2$. Итак, $x^3 - x^2 - 100 = 0$, т.е. $(x-5)(x^2+4x+20) = 0$. Откуда получим один действительный корень $x = 5$.

3. Обозначим, как обычно, стороны AB и AC за c и b, а угол A за α.

Рассмотрим всевозможные отрезки KL с концами на сторонах AB и AC треугольника ABC, которые делят площадь этого треугольника пополам (такие существуют — например, медианы, проведенные из вершин B и C). Пусть $AK = x$, $AL = y$. Тогда произведение $xy = \frac{S_{ABC}}{\sin\alpha} = \frac{bc}{2}$ — постоянно. Наоборот, отложив на сторонах AB и AC отрезки с произведением $\frac{ab}{2}$ с началом в вершине A и соединив их концы, мы получим отрезок, удовлетворяющий условию задачи. Поэтому такой отрезок можно предъявить для любых x и y, удовлетворяющих условиям $xy = \frac{bc}{2}$, $x \le c$, $y \le b$.

Длина отрезка KL равна $\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\sin\alpha} = \sqrt{x^2 + y^2 - C}$ с постоянным C. Сумма квадратов двух чисел с фиксированным произведением тем меньше, чем ближе эти числа друг к другу. Возможны, таким образом, два случая.

а) $b, c \ge \sqrt{\frac{bc}{2}}$. Тогда наименьший отрезок с концами на AB и AC, удовлетворяющий условию задачи, получается при $x = y = \sqrt{\frac{bc}{2}}$. Длина этого отрезка равна

$$l = \sqrt{bc - bc\cos\alpha} = \sqrt{2}\sqrt{bc}\sin\alpha/2.$$

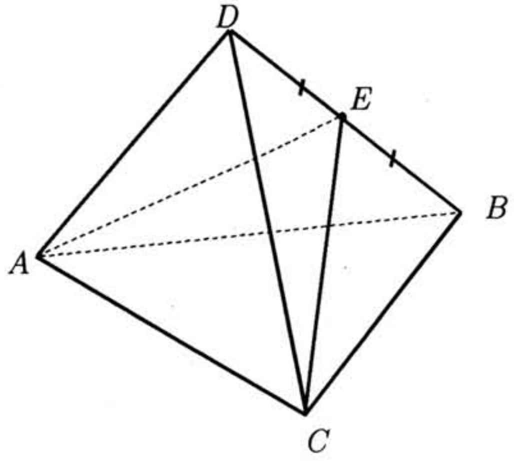


Рис. 1.

Теперь уже совсем легко убедиться, что $l/\sqrt{2} > r = \frac{bc\sin\alpha}{a+b+c}$. В самом деле, это означает, что $a+b+c > 2\sqrt{bc}\cos\frac{\alpha}{2}$, что, конечно, верно, так как $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ и $cos\frac{\alpha}{2} \leq 1$.

б) Один из отрезков b, c, скажем b, меньше $\sqrt{\frac{bc}{2}}$. Тогда, как мы видели, наименьший отрезок, делящий площадь треугольника пополам, с концами на AB и AC — это медиана, проведенная из C. Но тогда существует еще меньший отрезок, удовлетворяющий условию задачи, с концами на AB и BC — вида, рассмотренного в п.1 (иначе было бы $b < c/2$ и $a < c/2$, что противоречит неравенству треугольника).

4. Показать существование 6 плоскостей, удовлетворяющих условию задачи достаточно просто. Например, плоскость ACE, где E — середина ребра BD (рис. 1) удовлетворяет всем требованиям задачи. Ясно, что таких плоскостей, проходящих через все ребра пирамиды, будет 6. Покажем, что нет других плоскостей, удовлетворяющих условию задачи, кроме приведенных 6 плоскостей.

Пусть $AD = BC = a$, $AC = BD = b$ и $AB = DC = c$ и обозначим через S площади всех граней данной пирамиды. Кроме того, пусть плоскость, пересекающая трехгранный угол с вершиной D, пересекает ребра трехгранного угла в таких точках A_1, B_1, C_1 (рис. 2), что $DA_1 = a/x$, $DB_1 = b/y$, $DC_1 = c/z$, где $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$, $1 \leq z \leq 2$.

Тогда по условию задачи выполняются следующие равенства:

$$\frac{S}{xy} + \frac{S}{yz} + \frac{S}{zx} = \frac{1}{2}\cdot(4S), \quad V_{A_1B_1C_1D} = \frac{1}{xyz}\cdot V_{ABCD}.$$

Таким образом, для определения x, y, z получим следующую систему

$$\begin{cases} x+y+z = 4, \\ xyz = 2, \\ 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2,\ 1 \leq z \leq 2. \end{cases}$$

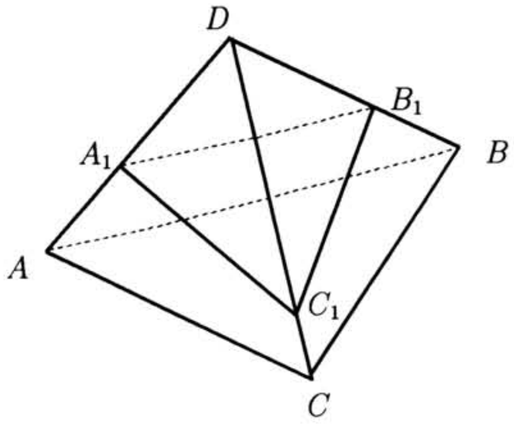


Рис. 2.

Откуда, решая систему

$$\begin{cases} x+y = 4-z, \\ xy = 2/z, \\ 1 \le z \le 2, \end{cases}$$

найдем меньший из ее корней, который должен удовлетворять неравенству

$$\frac{4-z-\sqrt{(4-z)^2-8/z}}{2} \ge 1,$$

т.е. неравенству $z^2-3z+2 \ge 0$, значит $z \le 1$, $z \ge 2$. Итак, $z=1$ или $z=2$ и в данном случае получим три решения (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), которые соответсвуют трем плоскостям, проходящим через стороны основания ABC исходной пирамиды. В случае трех оставшихся трехгранных углов будем также иметь по три плоскости, проходящие через ребра пирамиды. Так как ребро является границей для двух граней пирамиды, то существование ровно 6 плоскостей, удовлетворяющих условию задачи, доказано.

5. Пусть вершины треугольника — $K(k,k^2)$, $L(l,l^2)$, $M(m,m^2)$, L — вершина прямого угла. Записывая условие перпендикулярности векторов KL и LM в координатной форме, получаем

$$(l-k)(m-l)+(l^2-k^2)(m^2-l^2)=0.$$

Так как абсциссы всех точек параболы $y=x^2$ различны, можно сократить это равенство на $(l-k)(m-l)$, что дает $(l+k)(m+l)=-1$, или $(-l-k)(m+l)=1$. Модуль суммы взаимно обратных чисел $(-l-k)$ и $(m+l)$ не меньше 2:

$$\mid m-k \mid = \mid (-l-k)+(m+l) \mid \ge 2.$$

Так как длина $\mid m-k \mid$ проекции гипотенузы треугольника на ось абсцисс не меньше 2, длина самой гипотенузы также не меньше 2.

6. Предположим, что, начиная с некоторого места, первая цифра числа 2^n+3^n повторяется с периодом T. Это значит, что при достаточно больших n неравенство

$$k\cdot 10^{a_n} < 2^n+3^n < (k+1)\cdot 10^{a_n}$$

влечет неравенство

$$k\cdot 10^{a_{n+T}} < 2^{n+T}+3^{n+T} < (k+1)\cdot 10^{a_{n+T}}.$$

Убедимся, что при больших n разность $a_{n+T}-a_n$ постоянна. Действительно, $\frac{2^{n+T}+3^{n+T}}{2^n+3^n}\to 3^T$ при $n\to\infty$, и, значит, при больших n

$$\frac{k}{k+1}10^{a_{n+T}-a_n}\le 3^T\le \frac{k+1}{k}10^{a_{n+T}-a_n}.$$

Так как отрезки $\left(\frac{k}{k+1}10^s, \frac{k+1}{k}10^s\right)$ при разных s не пересекаются друг с другом ($\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 < 10$ при $k\ge 1$), 3^T может принадлежать только одному из них, и это однозначно определяет $a_{n+T}-a_n$.

Итак, для больших n $a_{n+T}=a_n+t$ с фиксированным t.

Поэтому для достаточно больших n при всех натуральных s имеем

$$k\cdot 10^{a_n+st}\le 2^{n+sT}+3^{n+sT}\le (k+1)\cdot 10^{a_n+st}.$$

Возводя в степень $1/s$ и переходя к пределу при $s\to\infty$, получаем $10^t=3^T$, что, конечно, невозможно.

7. Ответ: 100. Заметим, что количество последовательностей из чисел -1 и $+1$ длины n, в котором k отрицательных единиц, будет равно C_n^k. Тогда нам требуется определить число равное

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k(n-2k)^2}{2^n}=$$

$$=\frac{n^2\cdot 2^n-4n\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k+4\sum\limits_{k=1}^{n} k^2C_n^k}{2^n}.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k=n2^{n-1},\quad \sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k=n(n+1)2^{n-2},$$

то

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k(n-2k)^2}{2^n}=n.$$

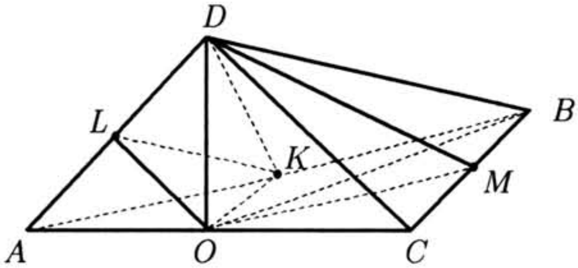


Рис. 3.

При $n = 100$ получим ответ нашей задачи.

8. Пусть точка K — середина AB, точка M — середина BC (см. рис.). Тогда, очевидно, пирамиды $KOAD$, $KOBD$, $MOBD$, $MOCD$ равны. Далее, если L — середина AD, то пирамида $KOAD$ делится на 2 пирамиды, которые равны и подобны исходной пирамиде $ABCD$ (докажите!). Остальные пирамиды делятся аналогично.

Олимпиада «Туймаада-99»

1. В пространстве заданы 1999 различных плоскостей. Докажите, что найдется сфера, пересекающая ровно 100 из них.

В.А.Егоров (Якутск)

2. Найдите все многочлены $P(x)$ такие, что

$$P(x^3+1) = P(x^3) + P(x^2).$$

А.С.Голованов (С.-Петербург)

3. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из чисел $1, 2, 3, \ldots, 100$ так, чтобы сумма никаких трех различных выбранных чисел не была равна выбранному числу?

А.С.Голованов (С.-Петербург)

4. Докажите неравенство

$$\frac{x}{y^2-z} + \frac{y}{z^2-x} + \frac{z}{x^2-y} > 1,$$

где $2 < x, y, z < 4$.

А.С.Голованов (С.-Петербург)

5. В треугольнике ABC $\angle ABC = 100°$, $\angle ACB = 65°$, $M \in AB$, $N \in AC$, причем $\angle MCB = 55°$, $\angle NBC = 80°$. Найти $\angle NMC$.

(С.-Петербургский фольклор)

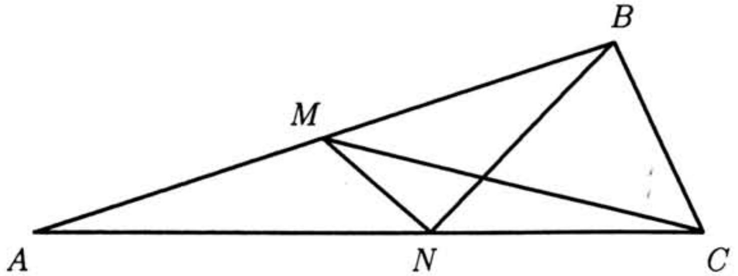


Рис. 4.

6. Могут ли графики многочлена 20-й степени и функции $y = \dfrac{1}{x^{40}}$ пересекаться ровно в 30 точках?

К.Кохась (С.-Петербург)

7. Последовательность целых чисел $a_0,\ a_1, \dots a_n \dots$ задана следующими правилами: $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+1} > a_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, причем a_{n+1} является наименьшим числом, при котором никакие три из чисел $a_0,\ a_1, \dots a_{n+1}$ не образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что $a_{2^n} = 3^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Передрий Я. (Ярославль)

8. В пространстве расположен прямой параллелепипед (т.е. параллелепипед, одно из ребер которого перпендикулярно грани), вершины которого имеют целые координаты, а других точек с целыми координатами на его гранях и ребрах нет. Докажите, что объем этого параллелепипеда — сумма трех точных квадратов.

А.С.Голованов (С.-Петербург)

Решения задач

1. Для каждых двух из наших 1999 плоскостей рассмотрим множество точек, которые от них равноудалены. Это объединение двух плоскостей. Поскольку количество пар, которые можно образовать из 1999 плоскостей, конечно, множество точек, которые равноудалены от некоторых из данных плоскостей, является объединением конечного числа плоскостей и, следовательно, не покрывает все пространство.

Рассмотрим произвольную точку, не принадлежащую этому множеству. Расстояния от этой точки до всех 1999 плоскостей различны. Упорядочим их по возрастанию: $r_1 < r_2 < \ldots < r_{100} < r_{101} < \ldots < r_{1999}$ и возьмем произвольное число r, удовлетворяющее неравенствам $r_{100} < r < r_{101}$.

Сфера радиуса r с центром в выбранной нами точке удовлетворяет условию задачи. Действительно, 100 плоскостей находятся от ее центра на расстояниях, меньших r, и, следовательно, пересекают ее, а остальные — не пересекают.

2. Многочлен $P(x) \equiv 0$, разумеется, удовлетворяет условию задачи. Докажем, что никакие другие многочлены ему не удовлетворяют.

Действительно, пусть

$$P(x) = a_n x^n + \ldots$$

— ненулевой многочлен со старшим коэффициентом $a_n \neq 0$ (здесь и в дальнейшем многоточием обозначены члены меньших степеней).

$$P(t+1) - P(t) = a_n((t+1)^n - t^n) + \ldots = n a_n t^{n-1} + \ldots;$$

полагая $t = x^3$, получаем

$$P(x^3+1) - P(x^3) = n a_n x^{3n-3} + \ldots$$

С другой стороны,

$$P(x^2) = a_n x^{2n} + \dots$$

Так как $P(x^3+1) - P(x^3) = P(x^2)$, у многочленов $P(x^3+1) - P(x^3)$ и $P(x^2)$ должны совпадать степени: $3n-3 = 2n$, т.е. $n = 3$, и старшие коэффициенты: $a_n = na_n = 3a_n$, что при $a_n \neq 0$ невозможно.

3. Ответ. 68.

Пример 68 чисел, удовлетворяющих условию задачи, доставляют числа 33, 34, …, 100. Действительно, сумма любых трех из этих чисел не меньше 33+34+35=102.

Докажем, что больше 68 чисел, удовлетворяющих условию задачи, выбрать нельзя. Пусть мы выбрали больше 68 таких чисел. Рассмотрим разность k между наибольшим из этих чисел M и наименьшим m; $k \geq 68$. Так как не выбранными осталось не более 31 числа, среди чисел, меньших k, по крайней мере $k - 32$ выбранных. Если для какого-нибудь из этих чисел, кроме m, число, дополняющее его до k, является выбранным и отлично от него самого и от m, то условие задачи не выполнено (так как тогда k представляется в виде суммы двух выбранных чисел, а наибольшее из выбранных — в виде суммы m и этих двух). Значит, среди чисел, меньших k, есть еще по крайней мере $k - 35$ не выбранных чисел: это числа, дополняющие до k все меньшие k выбранные числа, кроме, быть может, $k/2$, m и $k - m$. Сравнивая количества выбранных и не выбранных чисел, меньших k, с количеством всех чисел, меньших k, получаем $2k - 67 \leq k - 1$, т.е. $k \leq 66$ — противоречие.

4. Так как при $2 < x, y, z < 4$ имеют место неравенства $0 < y^2 - z < 4y - z$, $0 < z^2 - x < 4z - x$, $0 < x^2 - y < 4x - y$, нам достаточно доказать, что при таких x, y, z

$$\frac{x}{4y-z} + \frac{y}{4z-x} + \frac{z}{4x-y} \geq 1.$$

Для доказательства этого неравенства введем новые переменные $a = 4y - z$, $b = 4z - x$, $c = 4x - y$. Заметим, что

$$16c + 4a + b = 64x - 16y + 16y - 4z + 4z - x = 63x.$$

Поэтому $x = \frac{16c+4a+b}{63}$ и аналогично $y = \frac{16a+4b+c}{63}$, $z = \frac{16b+4c+a}{63}$. В таких обозначениях доказываемое неравенство принимает вид

$$\frac{16c+4a+b}{a} + \frac{16a+4b+c}{b} + \frac{16b+4c+a}{c} \geq 63,$$

или

$$16\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) + 12 \geq 63,$$

что верно, так как по неравенству о средних $\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\geq 3$ и $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 3$.

5. Ответ. 25°.

Пусть M_1 — точка, симметричная M относительно прямой BC. Тогда угол $\angle BMM_1 = 10^\circ$ и угол $\angle MBM_1 = 160^\circ$; точки N, B и M_1 лежат на одной прямой так как $\angle NBC = 80^\circ$; $\angle CNM_1 = \angle CMM_1 = 35^\circ$. Следовательно, около четырехугольника M_1MNC можно описать окружность, причем центр O описанной окружности лежит на прямой BC. Так как центральный угол описанной окружности $\angle NOC = 50^\circ$, то искомый угол $\angle NMC = 25^\circ$.

6. Ответ. Не могут.

Предположим, это возможно. Тогда по крайней мере при 30 значениях x

$$a_{20}x^{20}+a_{19}x^{19}+\ldots+a_1x+a_0=\frac{1}{x^{40}}.$$

Умножая на x^{40}, получаем, что многочлен 60-й степени $(a_{20}\neq 0)$

$$a_{20}x^{60}+a_{19}x^{59}+\ldots+a_1x^{41}+a_0x^{40}-1$$

имеет не менее 30 различных корней.

Тогда производная этого многочлена должна иметь не менее 29 различных корней. Но эта производная

$$60a_{20}x^{59}+59a_{19}x^{58}+\ldots+41a_1x^{40}+40a_0x^{39}=$$

$$x^{39}(60a_{20}x^{20}+59a_{19}x^{19}+\ldots+41a_1x+40a_0)$$

имеет, как видно из последнего равенства, не более 21 различного корня — противоречие.

7. Мы докажем более сильное утверждение:

Если $n=2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_m}$, где $k_1>k_2>\ldots>k_m$ — различные натуральные числа, то $a_n=3^{k_1}+3^{k_2}+\ldots+3^{k_m}$.

Иными словами, чтобы получить a_n, нужно представить n в двоичной системе счисления и полученный результат прочитать как троичное число.

Очевидно, утверждение задачи немедленно следует из этого: $\underbrace{100\ldots00}_{n+1}$ — двоичная запись числа 2^n и троичная запись числа 3^n.

Докажем теперь наше утверждение. Во-первых, убедимся, что никакие три различных числа, в троичной записи которых отсутствуют двойки, не образуют арифметическую прогрессию. В самом деле, в такой прогрессии сумма двух крайних членов равна удвоенному среднему. С другой стороны, при удвоении троичного числа, записываемого только нулями и единицами, получится число, в записи которого встречаются только нули и двойки; а при сложении двух таких различных чисел запись суммы должна содержать единицу (в том разряде, в котором отличаются слагаемые).

Следовательно, если в нашей последовательности впервые встретилось число, троичная запись которого содержит цифру 2, то все меньшие числа, записываемые в троичной системе нулями и единицами, к этому моменту уже встретились в нашей последовательности. В частности, в ней есть два числа, получаемые из нашего числа заменой любой цифры 2 на 0 и 1. Но эти два числа вместе с нашим образуют арифметическую прогрессию — противоречие.

8. Будем называть основанием параллелепипеда ту его грань, которая перпендикулярна ребру. Пусть векторы, идущие по сторонам основания — $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\overrightarrow{b}(b_1, b_2, b_3)$. Мы докажем, что вектор, идущий по ребру, перпендикулярному основанию, равен (или противоположен) вектору

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Тогда, как легко видеть, объем параллелепипеда равен

$$V = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2.$$

Заметим, что все векторы с целыми координатами, перпендикулярные основанию, кратны некоторому наименьшему вектору $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Предположим, что его длина меньше длины $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$. Тогда, если существуют два вектора с целыми координатами $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ такие, что $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{c}$, в плоскости основания (на векторах $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$) можно построить параллелограмм площади меньшей, чем площадь основания. Это значит, что, откладывая векторы $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ от вершин основания, мы найдем на основании целые точки, отличные от вершин, — противоречие.

Итак, осталось доказать, что вектор $\overrightarrow{c}$ можно представить в виде $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, то есть для любых целых c_1, c_2, c_3 разрешима в целых числах система

$$c_1 = u_2v_3 - u_3v_2, \quad c_2 = u_3v_1 - u_1v_3, \quad c_3 = u_1v_2 - u_2v_1.$$

Для этого достаточно взять вектор (u_1, u_2, u_3), перпендикулярный (c_1, c_2, c_3), со взаимно простыми координатами, и подобрать v_1, v_2, v_3 так, чтобы выполнялись первые два соотношения.

Это возможно по следующим причинам: взяв такие v_2, v_3, чтобы было $c_1 = u_2v_3 - u_3v_2$, мы получим $v_3u_2 \equiv c_1 \pmod{u_3}$, а потому и $v_3u_1 \equiv -c_2 \pmod{u_3}$ (это следует из ортогональности: $c_1u_1 + c_2u_2 \equiv 0 \pmod{u_3}$, т.е. $u_1u_2v_3 + c_2u_2 \equiv 0 \pmod{u_3}$, и на u_2, взаимно простое с u_3, можно сократить). Но это и значит, что существует такое v_1, для которого $c_2 = u_3v_1 - u_1v_3$. Теперь выполнение третьего соотношения автоматически следует из ортогональности $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{c}$.

Задачи 11-й летней Конференции Турнира Городов

11-я летняя Конференция Турнира Городов проходила 1 – 8 августа 1999 года под г. Малоярославец Калужской области. В настоящем номере журнала приведены условия задач, предложенных участникам Конференции. По итогам Конференции готовится к публикации подробный отчет. За дополнительной информацией можно обращаться по адресу: 121002 Москва, пер. Б.Власьевский, 11, к. 202.

e-mail:*kuligin@mccme.ru* **internet:***www.mccme.ru/olympiads/turgor*

"Иррациональная" прямая на квадратной решётке

Григорий Гальперин, Сергей Дориченко, Владимир Гуровиц

Пусть прямая $l: y = ax + b, a > 0$ составляет острый угол $\alpha = \operatorname{arctg} a$ с осью Ox. Рассмотрим квадратную решетку $\mathbf{Z}^2$ на плоскости Oxy, составленную из единичных квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Прямая l пересекает бесконечно много квадратов решётки, а эти квадраты, в свою очередь, разрезают l на бесконечно много отрезков. Обозначим длину отрезка в "первом квадрате" $\{(x, y)|0 \leq x, y \leq 1\}$ через d_0, а длины "предшествующих" и "последующих" отрезков - через $..., d_{-2}, d_{-1}$ и $d_1, d_2, ...$ соответственно.

1) Предположим, что прямая l - "рациональная", т. е. $a = p/q$ - рациональное число. Сколько различных чисел встретится в последовательности ..., d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_1, d_2, ... ? (Выразите ответ в терминах p, q и b и выпишите явно последовательность d_0, d_1, d_2, ...)

2) Предположим теперь, что прямая l - "иррациональная", т. е. a - иррациональное число. Верно ли, что все числа $..., d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_1, d_2, ...$ различны?

3) Если ответ на вопрос предыдущего пункта отрицательный, то некоторое число d встречается в последовательности длин $\{d_i|i \in \mathbf{Z}\}$ более одного раза. Может ли в этой последовательности содержаться бесконечно много одинаковых чисел? Бесконечно много *различных* чисел?

4) Пусть $n(k)$ означает, сколько раз число d_k встречается в последовательности $\{d_i|i \in \mathbf{Z}\}$. Предположим, что при некотором k число $n = n(k)$ конечно. Найдите все возможные значения n. Например, может ли n быть равно 5? Зависит ли ответ от коэффициентов a и b ?

5) Опишите все положения прямой l, для которых $n(k) > 1$ для всех k.

6) Найдите $..., d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_1, d_2, ...$ в терминах α и b или a и b .

7) Спроектируем все вершины решётки на прямую l. Получим бесконечное множество точек на прямой. Будет ли это множество всюду плотным? (Множество на прямой называется всюду плотным, если любой отрезок этой прямой, как бы мал он ни был, содержит хотя бы одну точку множества.) Под проекцией понимается ортогональная проекция, но вы также можете рассматривать проекции в других направлениях.

8) Рассмотрим прямую l в 3-мерном пространстве и её пересечения с кубами 3-мерной решётки $\mathbf{Z}^3$. Прямая l вновь разбивается на отрезки

$$..., d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_1, d_2, \dots .$$

Ответьте в этом случае на вопросы 1-7.

9) Решите ту же задачу для n-мерной решётки $\mathbf{Z}^n, n \geq 4$.

Леммы Дирихле, Вейля и Кронекера

Обозначение. Пусть x — действительное число. Дробную часть числа x будем обозначать через $\{x\}$.

10. (Лемма Дирихле) Пусть λ — иррациональное число. Докажите, что последовательность $\{\lambda n\}, n \in \mathbf{N}$ всюду плотна на отрезке [0, 1].

Определение. Рассмотрим последовательность a_n, где $a_n \in$[0, 1] при всех $n \in \mathbf{N}$. Назовём её *равномерно распределённой* на отрезке [0,1], если для любого отрезка $I \in [0,1]$

$$\lim_{N\to\infty}(N(I)/N) = |I|$$

где $N(I)$ - число точек $a_k \in I$ с номерами $k \leq N, |I|$ - длина отрезка I.

11. (Лемма Вейля) Пусть λ - иррациональное число. Докажите, что последовательность дробных частей $\{\lambda n\}, n \in \mathbf{N}$, равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$.

Будем теперь рассматривать последовательность векторов

$$a_n = (\{\lambda_1 n\}, \dots , \{\lambda_s n\})$$

в единичном кубе s-мерного пространства ($\lambda_i \in \mathbf{R}$).

12. Покажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n \in \mathbf{N}$, что для каждого $i = 1, ..., s$ выполняется $0 \leq \{k\lambda_i\} < \varepsilon$ или $1 - \varepsilon < \{k\lambda_i\} < 1$.

Определение. Числа $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ называются *линейно независимыми над* $\mathbf{Q}$, если из равенства

$$\sum_{i=0}^{s} k_i\lambda_i = 0, k_i \in \mathbf{Q}$$

следует, что все k_i равны 0.

13.(Лемма Кронекера) Пусть числа $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ линейно независимы над $\mathbf{Q}$, причём $\lambda_0 = 1$. Докажите, что последовательность векторов $a_n =(\{\lambda_1 n\}, \{\lambda_2 n\}, \dots, \{\lambda_s n\})$ всюду плотна в единичном кубе s-мерного пространства.

Разбиения прямой

14. Пусть прямая разбита k системами равноотстоящих точек (система с номером i задаётся двумя параметрами: шагом h_i и сдвигом b_i относительно начала координат). Предположим, что расстояния между соседними точками в системах линейно независимы над $\mathbf{Q}$. Скажем, что отрезок разбиения имеет тип (i, j), если его левый конец принадлежит i-ой системе, а правый конец принадлежит j-ой системе (считаем, что на прямой введено направление).

Найдите вероятность того, что отрезок типа (i, j) имеет длину $> l$, то есть найдите

$$\lim_{t\to\infty}(U_t/M_t)$$

где M_t — число всех отрезков типа (i, j), лежащих целиком в $[-t, t]$, а U_t — число отрезков типа (i, j) длины больше l, целиком лежащих в $[-t, t]$.

(Выразите ответ через параметры h_i и b_i.)

15. Дана иррациональная прямая на квадратной решётке. Найдите вероятность того, что отрезок разбиения соединяет две противоположные стороны квадрата решётки.

Мозаики

Пусть P — некоторая плоскость в трёхмерном пространстве. Плоскости вида $x = n, n \in \mathbf{Z}; y = m, m \in \mathbf{Z}; z = k, k \in \mathbf{Z}$, пересекаясь с плоскостью P, разбивают её на многоугольники (будем называть это разбиение мозаикой).

Определение. *Средней площадью* многоугольника мозаики назовём величину

$$S = \lim_{t\to\infty}(S_t/N_t)$$

где S_t — общая площадь всех многоугольников, целиком содержащихся в круге радиуса t с центром в начале координат, а N_t — количество этих многоугольников.

16. Пусть n систем равноотстоящих прямых разбивают плоскость на части, причём никакие 3 прямые не пересекаются в одной точке, и никакие две системы не параллельны. Пусть s_{ij} — площадь параллелограмма, порождённого семействами с номерами i и j. Докажите, что

$$S^{-1} = \sum_{i<j} (s_{ij})^{-1}$$

17. Рассмотрим плоскость $Ax + By + Cz = 0, A, B, C$ — взаимно простые положительные натуральные числа. Докажите, что число различных многоугольников, образующихся в пересечении плоскостью кубической решётки, не превосходит $A + B + C - 1$. Попробуйте сформулировать условия, при которых достигается равенство. (Два многоугольника считаются одинаковыми, если они получаются друг из друга параллельным переносом.)

18. Пусть три системы прямых

$$\begin{aligned} x &= n,\ n \in \mathbf{Z} \\ y &= m,\ n \in \mathbf{Z} \\ x + \lambda y &= \alpha n,\ n \in \mathbf{Z},\ \lambda \text{ не принадлежит } \mathbf{Q} \end{aligned}$$

разбивают плоскость на части. Вычислите вероятность того, что данная фигура является

а) треугольником;

б) четырёхугольником;

в) пятиугольником;

г) шестиугольником;

д) семиугольником.

Узкие деревья на плоскости

Павел Кожевников и Аркадий Скопенков

Предлагаемый цикл задач возник в теории континуумов — разделе геометрической топологии, тесно связанном с теорией динамических систем. Понятие плоского континума — обобщение понятия плоского графа (плоский континуум — замкнутое ограниченное связное подмножество плоскости). Один из простейших нетривиальных примеров плоского континума — график функции $y = sin(1/x)$ на промежутке (0,1] вместе с предельным отрезком. В теории континуумов естественно возникают и изучаются различные характеристики *узости* континуумов. Эти характеристики имеют простые и наглядные "графские" аналоги. Для доказательства результата о континуумах, как правило, достаточно доказать соответствующий "графский" аналог. В настоящем цикле задач рассматриваются "графские" аналоги как известных результатов, так и нерешенных проблем из теории континуумов.

В этом цикле задач мы предлагаем читателю выяснить связи между различными свойствами "узости" деревьев на плоскости. Наиболее интересные и нетривиальные из этих связей:

Теорема 1. Предположим, что K — подмножество плоскости и $\mathbf{a}$ — вектор, такие что $K \cap (K+\mathbf{a}) = \emptyset$ (через $K+\mathbf{a}$ обозначим образ множества K при сдвиге на вектор $\mathbf{a}$). Тогда два воза (т. е. круга диаметра $|\mathbf{a}|$) не могут поменяться местами при непрерывном движении их центров по K, так что возы не сталкиваются.

Теорема 2. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют ограниченное подмножество плоскости K и вектор $\mathbf{a}$, такие что $K \cap (K+\mathbf{a}) = \emptyset$, $|\mathbf{a}| < e$, но ни для какого n множество K нельзя покрыть n плоскими многоугольниками $C_1, C_2, \dots, C_n$ диаметров меньше 1, такими что C_i пересекается только с C_{i-1} и C_{i+1} при каждом $i = 2, 3, \dots, n-1$.

Введем необходимые определения и соглашения. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то его требуется доказать.

Дугой называется ломаная линия без самопересечений на плоскости (концы ломаной принадлежат ломаной).

Объединение дуг называется *связным*, если из любой его точки можно пройти в любую другую, двигаясь по этим дугам.

Деревом называется связное объединение дуг, не содержащее замкнутых ломаных.

Для подмножества K точек плоскости и вектора $\mathbf{a}$ через $K+\mathbf{a}$ будем обозначать

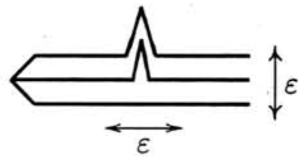


Рис. 1.

образ множества K при параллельном переносе на вектор $\mathbf{a}$.

Будем обозначать через $|X, Y|$ расстояние между точками X, Y.

Для ломаной z и точки X минимум расстояний от точки X до точек ломаной называется *расстоянием* от точки X до ломаной z и обозначается $|X, z|$.

Знаменитая теорема Р. Л. Мура утверждает невозможность расположения на плоскости несчетного семейства попарно непересекающихся (гомеоморфных) копий буквы T (триода). Для случая, когда эти копии равны стандартной букве T (т. е. переводятся в нее некоторым движением), это — известная олимпиадная задача. После появления теоремы Мура стали активно изучаться *атриодичные* континуумы. "Графским" аналогом свойства атриодичности является свойство графа не содержать ε-триода.

Определение 1.0. *ε-триодом* называется объединение трех дуг AO, BO, CO, попарно не имеющих общих точек (кроме их общей вершины O), такое что
$|A, BO \cup CO| > \varepsilon$, $|B, CO \cup AO| > \varepsilon$, $|C, AO \cup BO| > \varepsilon$.

Задача 1.0. Дерево на рис. 1 не содержит ε-триода (расстояние между "пиками" равно 1 и много больше ε).

Ясно, что возможность разместить в плоскости несчетное семейство попарно непересекающихся копий данного континуума характеризует его "узость". "Графским" аналогом (упрощенным) этого свойства "узости" является следующее свойство (которое кажется совсем не связанным с несчетными семействами!):

Определение 1.1. Дерево называется *ε-разводимым*, если найдется такой вектор $\mathbf{a}$ длины меньше ε, что $K \cap (K + \mathbf{a}) = \emptyset$.

Это и все следующие вводимые свойства характеризуют "узость" графа, поскольку для них справедливы следующие утверждения.

Задача 1.1. Для каждого из понятий узости (определения 1.1-1.3)

a) Любая дуга ε-узка для любого ε (исключение состаляет ε-разводимость: для любого $\varepsilon > 0$ нетрудно построить пример дуги, не являющейся ε-разводимой. Попробуйте устранить этот недостаток, подправив определение ε-разводимости).

b) ε-триод не ε-узок (начните со случая, когда AO, BO, CO — прямолинейные дуги).

c) Любое дерево, содержащееся в ε-узком, само ε-узко.

d) Никакое ε-узкое дерево не содержит (в качестве подмножества) ε-триода.

Предупреждение: доказать напрямую, что ε-триод не ε-разводим — трудно (лучше вывести это из теоремы 1).

Определение 1.2. Дерево K на плоскости называется *симметрично ε-стянутым*, если никакие два воза (круга) диаметра ε не могут поменяться местами при непрерывном движении их центров по K (возам запрещено сталкиваться).

Задача 1.2. Дерево на рис. 1 не является симметрично 1-стянутым.

Змеевидные континуумы стали активно изучаться после примера Р. Х. Бинга, основателя "техасской" топологической школы, — однородного (змеевидного) континуума, отличного от окружности. Графским аналогом свойства змеевидности является следующее свойство:

Определение 1.3. Дерево K на плоскости называется *ε-змеевидным*, если для некоторого n его можно покрыть n плоскими многоугольниками $C_1, C_2, \dots, C_n$ такими, что их диаметры меньше ε и C_i пересекается только с C_{i-1} и C_{i+1} при $i = 2, 3, \dots, n-1$.

Задача 1.3. Всякое ε-змеевидное дерево симметрично ε-стянуто (значит, дерево на рис. 1 не является ε-змеевидным).

Задача 1.4. Докажите теорему 1 для случая, когда K — дерево на плоскости. (В наших определениях эту теорему можно переформулировать следующим образом: из ε-разводимости следует симметричная ε-стянутость).

Задача 1.5. Докажите теорему 2 (из ε-разводимости не следует ε-змеевидность).

Задача 1.6 формально не связана с остальными, но идеи ее решений могут оказаться полезными при размышлении над другими задачами этого цикла.

Задача 1.6. a) (Теорема о возах) Предположим, что два велосипедиста, связанные веревкой длины ε, могут проехать по двум дорогам из A в B и из A' в B', соответственно. Тогда два воза (круга) диаметра ε не смогут проехать из A в B и из B' в A', соответственно (ни в какой момент времени возы не могут пересекаться).

b) (Теорема об альпинистах) Два альпиниста стоят на уровне моря на противоположных сторонах горного хребта (плоской ломаной с конечным числом звеньев), расположенного целиком над уровнем моря. Тогда они могут встретиться, оставаясь в процессе движения все время на одной высоте над уровнем моря.

c) В единичном квадрате $ABCD$ существуют 1000 ломаных $L_1, \dots, L_{1000}$, соединяющих точки $X_1, \dots, X_{1000}$ на стороне AB с точками $Y_1, \dots, Y_{1000}$ на стороне CD

со следующим свойством: для любых двух ломаных L_i и L_j (i не равно j) два воза диаметра 1/10 смогут проехать из X_i в Y_i и из Y_j в X_j, соответственно (ни в какой момент времени возы не могут сталкиваться).

Новые и нерешенные задачи

Среди предлагаемых задач есть нерешенные. Они помечены звёздочкой. Введём 3 новых понятия, связанных с узостью дерева. Диаграмму зависимости между всеми 6 понятиями смотрите после условий задач.

Задача 2.1. *Решите задачу 1.1 для трх новых свойств (определения 2.1-2.3).*

Определение 2.1. Дерево K на плоскости называется ε-стянутым, если никакие два ε-воза не могут непрерывно двигаться по K так, чтобы их центры замели один и тот же след (как обычно, возам запрещено пересекаться).

Задача 2.2.

a) Всякое ε-стянутое дерево симметрично ε-стянуто.

b) Всякое ли симметрично ε-стянутое дерево ε-стянуто?*

Для любых $X, Y \in K$, расстояние между которыми больше ε, определим отношение $'<'$ (не обязательно транзитивное, т. е. из $A' <' B$ и $B' < C'$ может не следовать $A' <' C$). Для этого расположим двух человек (люди, в отличие от возов — точки, а не круги) в точках X и $Y + \mathbf{a}$, соответственно. Будем двигать первого из них по K из X в Y вдоль кратчайшей дуги l, а второго — по $K + \mathbf{a}$ из $Y + \mathbf{a}$ в $X + \mathbf{a}$ вдоль дуги $l + \mathbf{a}$. Если вектор, направленный от первого человека ко второму, повернулся по часовой стрелке, то положим $X' <' Y$, а если против — положим $Y' <' X$. Проверьте, что это отношение действительно определено для любых точек $X, Y \in K$, расстояние между которыми больше ε (т. е. вектор обязательно повернётся, а не останется на месте). Покажите также, что это отношение непрерывно зависит от точек X, Y. Отсюда можно вывести решение задачи 1.4. Эту же идею можно использовать для получения следующего более сильного результата.

Задача 2.3.

a) Всякое дерево L, содержащееся в ε-разводимом дереве K, имеет $'<'$-минимальную точку (Т. е. точку $U \in L$, такую что $U' <' X$, если точка $X \in L$ и $|X, U| > \varepsilon$).

b) Любое ε-разводимое дерево ε-стянуто.

Дадим теперь подправленное определение ε-разводимости (см. замечание в задаче 1.1.a).

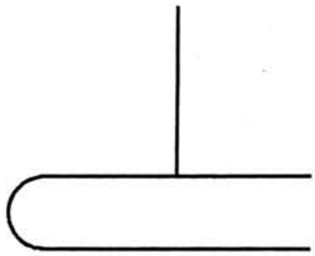


Рис. 2.

Определение 2.2. Предположим, что дерево K разбито точками $A_1, A_2, \dots, A_n$ на отрезки. Перенесём каждую из этих точек на свой вектор длины меньше ε, при этом получим новые точки $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$. Соединим отрезком точки A'_i, A'_j в том и только в том случае, если в дереве K были соединены A_i, A_j. Если вновь проведённые отрезки образовали дерево (т. е. не возникло циклов), будем называть его *ε-деформацией* дерева K. Дерево K на плоскости называется *ε-деформируемым*, если оно не имеет общих точек с некоторой своей ε-деформацией.

Можно показать, что всякое ε-змеевидное дерево ε-деформируемо. Проверьте, что приведённое указание к задаче 1.4. позволяет решить эту задачу и в предположении ε-деформируемости дерева.

Задача 2.4. *Всякое ли ε-деформируемое дерево*

a) ε-стянуто ?*

b) диаметра 1 является ε-змеевидным ?*

Определение 2.3. Дерево K на плоскости называется *ε-зажатым*, если для любого дерева $L \in K$ найдётся такая дуга $l \in L$, что $|X, l| < \varepsilon$ для всех $X \in L$.

В определении 2.3 условие $L \in K$ нельзя заменить на условие $L = K$: для любого $\varepsilon > 0$ существует дерево K (рис. 2), не являющееся ε-зажатым, но в котором найдётся такая дуга l, что $|X, l| < \varepsilon$ для любой точки $X \in K$.

Задача 2.5. *Дерево на рис. 1 является ε-зажатым (значит, по задаче 1.3, из ε-зажатости не следует симметричная 1-стянутость).*

Задача 2.6. *Является ли ε-зажатым*

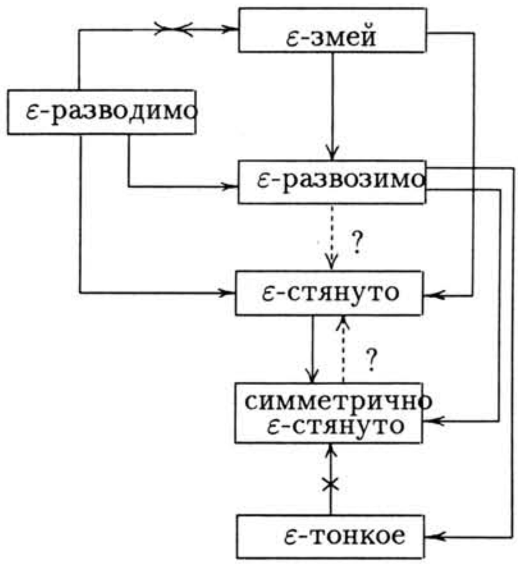
a) всякое ε-змеевидное дерево?

b) всякое ε-разводимое дерево?

c) всякое дерево, не содержащее ε-триодов?*

d) всякое ε-стянутое (симметрично ε-стянутое) дерево?*

Попытайтесь выяснить, верны ли утверждения задач 2.6.cd и других нерешённых задач, если в их заключениях мы поменяем ε на 100ε или на $M\varepsilon$, где M - некоторая



константа (при этом мы получим формально более слабые утверждения). Верно ли, например, что всякое дерево, не содержащее ε-триодов, является 100ε-зажатым?

Окружности, вписанные в сегменты, и касательные

М. Г. Сонкин, П. А. Кожевников

0. Вводные задачи

Задача 0.1 В окружности ω проведена хорда AB, точка M — середина одной из дуг AB. В сегмент s окружности ω , стягиваемый хордой AB и не содержащий точку M, вписана окружность ω_1, касающаяся хорды AB и окружности ω в точках P и Q соответственно (рис.1). Докажите, что прямая PQ проходит через M.

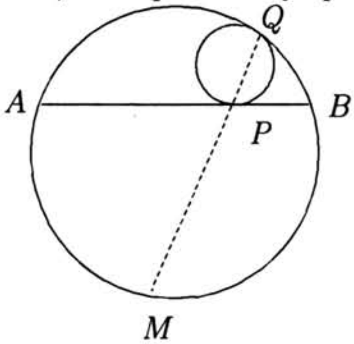


Рис. 1

Задача 0.2 Докажите, что в условиях задачи 0.1 точка M имеет одну и ту же степень относительно всевозможных окружностей ω_1, вписанных в сегмент s. Эта степень равна MA^2.

Напомним, что *степень точки относительно окружности* — это произведение отрезков секущей от данной точки до двух точек пересечения с окружностью, взятое со знаком "+", если точка лежит вне окружности, и со знаком "-", если внутри. Как известно, указанное произведение не зависит от выбора секущей. Далее, множество точек плоскости, имеющих одинаковые степени относительно двух различных окружностей есть прямая, перпендикулярная линии центров этих окружностей (докажите). Эта прямая называется *радикальной осью* двух данных окружностей. Если окружности пересекаются, то радикальная ось проходит через точки пересечения окружностей. Предыдущая задача утверждает, таким образом, что радикальная ось любой пары окружностей, вписанных в сегмент s, проходит через M.

1. Параллельные касательные

Задача 1.1 Треугольник ABC вписан в окружность ω. A_0, B_0 — середины сторон BC и CA соответственно; A', B' — середины дуг BC и CA, не содержащих A и

B соответственно. Построим на отрезках A_0A' и B_0B' как на диаметрах окружности ω_A и ω_B. Докажите, что общая касательная к окружностям ω_A, ω_B, "ближайшая" к AB, параллельна AB.

Задача 1.2 Задачу 1.1 можно обобщить следующим образом. Пусть треугольник ABC вписан в окружность ω . A_0, B_0 — точки на сторонах BC и CA соответственно, такие что прямая A_0B_0 параллельна AB. В сегменты, стягиваемые хордами BC и CA окружности ω, не содержащие A и B соответственно, вписаны окружности ω_A, ω_B, касающиеся хорд BC и CA в точках A_0, B_0. Докажите, что общая касательная к окружностям ω_A, ω_B, "ближайшая" к AB, параллельна AB (рис.2).

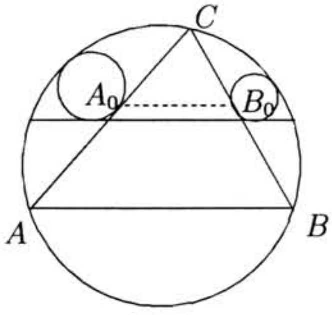


Рис. 2

Задача 1.3 Пусть в обозначениях задачи 1.2 A', B' — точки касания окружностей ω_1, ω_2, с окружностью ω, C' — середина дуги AB, не содержащей C. Обозначим K_A, K_B точки пересечения отрезков AC и $B'C'$, CB и $C'A'$ соответственно. Докажите, что прямая K_AK_B параллельна AB. Если точки A_0, B_0 — середины сторон BC и CA, то прямая K_AK_B проходит через центр вписанной окружности $\triangle ABC$.

2. Равные касательные

Задача 2.1 Пусть треугольник ABC вписан в окружность ω, точки A_0, B_0, C_0 — середины его сторон, точки A', B', C' — середины дуг BC, CA, AB окружности ω, не содержащих соответственно A, B, C. Построим на отрезках A_0A', B_0B' и C_0C' как на диаметрах окружности ω_A, ω_B и ω_C. Для каждой пары из этих трех окружностей проведем общую внешнюю касательную, "ближайшую" к соответствующей стороне $\triangle ABC$. Обозначим эти касательные l_A, l_B, l_C. Пусть прямая l_A касается окружности ω_B в точке T_{AB}. Аналогичным образом определим точки касания T_{BA}, T_{BC}, T_{CB}, T_{CA}, T_{AC}. Докажите, что отрезки касательных $T_{AB}T_{AC}$, $T_{BC}T_{BA}$ и $T_{CA}T_{CB}$ равны (рис.3).

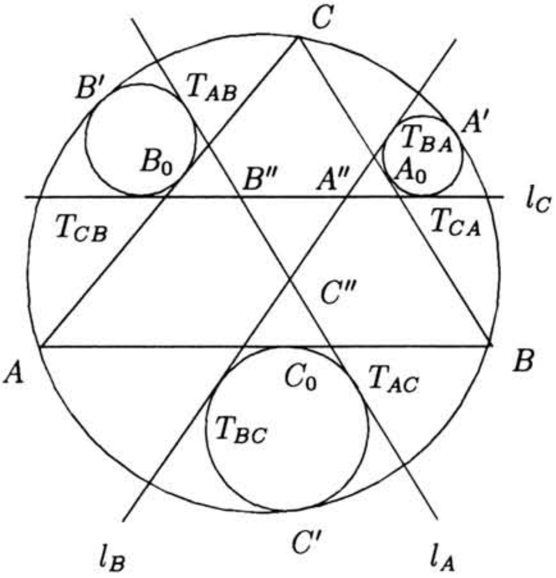


Рис. 3

Задача 2.2 В обозначениях задачи 2.1 докажите, что точки T_{AB}, T_{BA}, T_{BC}, T_{CB}, T_{CA}, T_{AC} лежат на одной окружности. Какая точка является центром этой окружности?

Задача 2.3 В обозначениях задачи 2.1 пусть $A''B''C''$ — треугольник, получающийся в пересечении прямых lA, lB, lC (A'' — точка пересечения lB и lC, и т. д.). Докажите, что $T_{AC}C'' = T_{BC}C'' = A''B'' = AB/4$.

Таким образом, отрезки касательных $T_{AB}T_{AC}$, $T_{BC}T_{CB}$ и $T_{CA}T_{AC}$ равны "покусочно", а $\triangle A''B''C''$ всегда гомотетичен $\triangle ABC$ с коэффициентом -1/4. Длина каждого из отрезков $T_{AB}T_{AC}$, $T_{BC}T_{BA}$, $T_{CA}T_{CB}$ равна четверти периметра $\triangle ABC$.

Задача 2.4 В обозначениях задачи 2.1 пусть p_A — прямая, проходящая через A' перпендикулярно линии центров окружностей ω_B, ω_C. Аналогично определим прямые p_B, p_C. Докажите, что прямые p_A, p_B, p_C проходят соответственно через точки A'', B'', C'' и пересекаются в одной точке.

Задача 2.5 В окружность ω вписан четырехугольник $ABCD$. В сегменты, стягиваемые хордами AB, BC, CD, DA вписываются окружности, касающиеся соответствующей хорды в ее середине. К парам окружностей, касающихся последовательных сторон четырехугольника, проведены внешние касательные, "ближайшие" к диагоналям (рис 4). Докажите, что в пересечении этих касательных получается ромб тогда и только тогда, когда $ABCD$ - равнобокая трапеция.

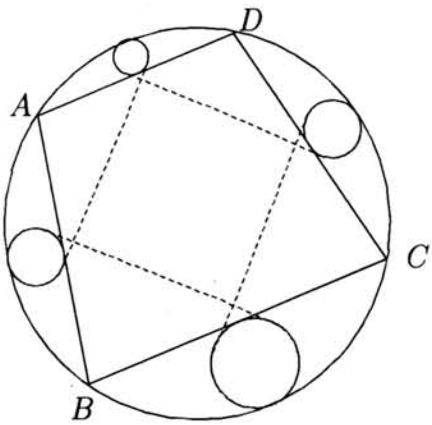


Рис. 4

Задача о разбойниках

И. Иванов, А. Малистов, А. Белов, С. Кублановский

Общая постановка. n жадных (завистливых) разбойников делят добычу. Мы считаем, что каждое подмножество сокровищ каждый разбойник оценивает по своему разумению в долларах. Оценка всегда неотрицательна, и если часть сокровищ разбита на две непересекающиеся части $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то оценка части A равна сумме оценок частей A_1 и A_2. Добыча считается безгранично делимой, т. е. каждый набор сокровищ может быть разделен на любое число частей, равных с точки зрения данного разбойника. Как разделить добычу?

Например, если разбойников два, то один делит на две равные, по его мнению, части, а другой выбирает.

Зависть означает, что каждый разбойник хочет получить не только не менее $1/n$ всех сокровищ, но и не меньше любого другого (по своему мнению).

A1. Пускай разбойники не завистливы, но каждый должен получить не менее $1/n$ части по своему мнению. Как им разделить добычу?

A2. Пусть теперь каждый разбойник хочет получить более $1/n$ (по своему мнению). Всегда ли они смогут разделить добычу?

A3. Зависть отсутствует, но есть договоренность о долях — μ_i. Разбойник с номером i должен получить не менее чем μ_i часть (по его мнению), $\mu_1 + \ldots + \mu_n = 1$. Как осуществить раздел?

B. Наличие зависти. Каждый разбойник должен получить не меньше, по своему мнению, чем любой другой.

B1. Осуществить процесс дележа для $n = 3$.

B2. Существует ли алгоритм дележа для $n = 4$?

B3. Решить задачу в общем случае.

C. Теперь пусть существуют такие пары разбойников (A, B), что A не возражает, что B получит больше сокровищ, а B считает, что должен получить строго больше A. (A — подчиненный B, B — начальник A). Будем называть это *отношением подчинения.* Для остальных пар сохраняется условие зависти.

C1. Верно ли, что если существует алгоритм раздела сокровищ, то отношение подчинения транзитивно, то есть если A есть начальник B и B есть начальник C, то A - начальник C ?

В пунктах C2 и C3 считаем, что отношение подчинения транзитивно и нет циклов.

C2. Исследовать, при каких n задача может быть неразрешимой.

C3. Пусть у всех разбойников, кроме одного, есть начальник. Существует ли алгоритм раздела?

C4. Общий случай: относительно отношения подчинения множество разбойников образует произвольный *ориентированный граф*. Исследовать, когда существует алгоритм раздела.

D. Пусть теперь существуют такие пары разбойников A и B, что A не возражает, чтобы B получил больше сокровищ (A уважает B). Будем называть это *отношением терпимости*. Для остальных пар сохраняется условие зависти.

D1. Предположим, что отношение терпимости транзитивно. Исследовать, когда существует алгоритм раздела.

D2. Пусть разбойники образуют цикл относительно отношения терпимости. Исследовать, когда существует алгоритм раздела.

D3. Верно ли, что если существует алгоритм раздела сокровищ, то отношение терпимости транзитивно?

D4. Общий случай: относительно отношения терпимости разбойники образуют произвольный ориентированный граф. Исследовать, когда существует алгоритм раздела.

Для остальных задач нужно более строгое определение понятия *меры*.

Мерой на множестве E называется функция μ на некотором семействе P подмножеств E, удовлетворяющая следующему свойству: если $A \cap B = \emptyset$, то $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Семейство P должно удовлетворять условиям: если $A, B \in P$, то множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ тоже принадлежат P.

Элементы P называются *измеримыми множествами*.

Мера μ называется *неотрицательной*, если $\mu(A) \geq 0$ для любого $A \in P$.

Мера называется *безгранично делимой*, если любое подмножество из P можно разбить на любое конечное число множеств равной меры и *вероятностной*, если $\mu(E) = 1$ (происхождение термина: вероятность того, что хоть что-то случиться, равна единице).

Безгранично делимые меры μ и ν называются *взаимно-непрерывными*, если для любого семейства измеримых множеств $\{B_k\}$ условия $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(B_k) = 0$ равносильны.

Все рассматриваемые меры считаются неотрицательными, безгранично делимыми, вероятностными (поскольку общая ценность сокровищ конечна, а мерки каждого разбойника важны с точностью до пропорциональности). Считаем также, что разбойники могут делить добычу на части, принадлежащие некоторому семейству P измеримых множеств (одному для всех разбойников).

E1. Пусть меры μ_i, $i = 1, \dots, n$, связанные с разбойниками, взаимно-непрерывны.

a) Докажите, что существует разбиение множества сокровищ на равные с точки зрения каждого разбойника части.

b) Докажите, что для любого набора чисел $\{c_j\}$ $(0 < c_j < 1; c_1 + \ldots + c_n = 1)$ существует разбиение E на такие множества M_j, что для любых i, j выполнено равенство $\mu_i(M_j) = c_j$.

E2. a)-b) Справедливы ли аналогичные утверждения, если условие взаимной непрерывности мер убрать?

E3. Докажите, что для взаимно-непрерывных мер существует семейство множеств $\{M_\alpha\}$, $\alpha \in [0, 1]$, удовлетворяющее следующим условиям:

a) $M_\alpha \subset M_\beta$ при $\alpha < \beta$.

b) $\mu_i(M_\alpha) = \alpha$ при всех i.

E4. Справедливо ли утверждение задачи E3, если условие взаимной непрерывности мер убрать?

Ладейные многочлены

К. П. Кохась

Для произвольной доски C, то есть произвольного набора клеток в клетчатой плоскости, вычислим при каждом n количество способов r_n поставить на эту доску n не бьющих друг друга ладей. (Мы считаем, что ладья бьет все клетки плоскости, находящиеся с ней на одной горизонтали или одной вертикали.) Положим $r_0 = 1$. Выражение

$$R(x, C) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n x^n$$

называется *ладейным многочленом* доски C, а сами коэффициенты r_k — *ладейными числами.* Доски, у которых ладейные многочлены совпадают, будем называть *эквивалентными.* Мы будем рассматривать доски специального вида — *диаграммы Юнга.* Диаграмма Юнга со строками $b_1, b_2, \ldots, b_m$ $0 < b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_m$ — это доска, горизонтали которой выровнены по левому краю и содержат соответственно (снизу вверх) $b_1, b_2, \ldots, b_m$ клеток. Иногда мы будем считать, что диграмма Юнга может иметь нулевые строки.

0.1. Докажите, что количество способов поставить на доску 100×100 максимально возможное число не бьющих друг друга слонов - точный квадрат.

0.2. Докажите, что эквивалентные доски имеют одинаковые площади.

0.3. Придумайте квадратный трехчлен с натуральными коэффициентами, не являющийся ладейным.

0.4. Сколькими способами можно расставить на доске 8×8 трех небьющих друг друга ладей?

0.5. Сколькими способами можно расставить на доске 8×8 четырех небьющих друг друга ладей, ни одна из которых не стоит на главной диагонали?

1.1. Если доска C представляет собой объединение двух не связанных ходом ладьи частей C_1 и C_2, то $R(x, C) = R(x, C_1)R(x, C_2)$.

1.2. Пусть c - произвольная клетка доски C, $C_1 = C \setminus \{c\}$, C_2 - доска, полученная удалением из C всех клеток, находящихся в одной строке или одном столбце с клеткой c (включая клетку c). Докажите, что $R(x, C) = R(x, C_1) + x \cdot R(x, C_2)$.

1.3. Найдите какую-нибудь связную относительно хода ладьи доску B, у которой $r_5(B) = 1998$.

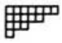
1.4. Есть n замков и n ключей от этих замков. Чтобы узнать, подходит ли ключ к замку, достаточно вставить его в замочную скважину и повращать. Какое наименьшее число таких попыток нужно сделать, чтобы узнать, какой ключ от какого замка?

1.5. Теорема Кёнига (D. König). Линией будем называть вертикальный или горизонтальный ряд клеток. Докажите, что наибольшее число не бьющих друг друга ладей, которые можно поставить на доску, равно n тогда и только тогда, когда наименьшее число линий, в объединении которых содержится эта доска, равно n.

2.1. Придумайте пару эквивалентных десятиклеточных досок, не сводящихся друг к другу перестановкой строк или столбцов и поворотами.

2.2. Пусть T_n - диаграмма Юнга со строками $1, 2, 3, \ldots, n-1$. Докажите, что T_n не эквивалентна никакой другой диаграмме Юнга.

2.3. Докажите, что квадратная доска $n * n$ эквивалентна доске Y_n в форме диаграммы Юнга с длинами строк $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$.



2.4. Если две доски эквивалентны, то эквивалентны и их дополнения на любой прямоугольной доске, в которой они обе помещаются.

3.1. Докажите, что $r_{km} \leq r_k^m$.

3.2. Докажите, что $C_{k+n}^k r_{k+n} \leq r_k r_n$.

3.3. Докажите, что $r_4 + r_3 \leq (1/6) r_2 (r_2 - 1)$.

3.4. Докажите, что $18480 \cdot r_{12} \leq (r_9)^2$.

3.5. Докажите, что $k^{k-2} r_k \leq C_{r_2}^{k-1}$.

3.6. Пусть степень многочлена $R(x, B)$ равна n. Докажите, что при всех $k \leq n/2 \quad r_k \leq r_{n-k}$.

4.1. Пусть $R_{m,n}(x)$ - ладейный многочлен прямоугольника $m \times n$. Докажите, что

$$R_{m,n}(x) = R_{m-1,n}(x) + nxR_{m-1,n-1}(x).$$

4.2. Пусть d_n - произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим D_n - диаграмму Юнга со строками $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Пусть $q_n(x) = x^{(d_{n+1})} e^x R(1/x, D_n)$. Докажите, что $q_n(x) = x^{(d_{n+1}-d_n)} q'_{n-1}(x)$.

4.3. Задача о слонах. Слон — это, при правильном взгляде на вещи, тоже ладья. Пусть $B_n(x)$ — ладейный многочлен расстановок чернопольных слонов, $W_n(x)$ — ладейный многочлен расстановок белопольных слонов на доске $n \times n$ (как всегда, клетка a1 черная). Докажите, что $B_{2n-1}(x) = W_{2n-1}(x) + xB_{2n}(x)$.

5.1. Пусть T_n — доска из задачи 2.2, $T_n = \{(i,j) : 1 \le i \le n, 1 \le j < i\}$. Докажите, что $r_k(T_n)$ равно количеству способов разбить множество из n элементов на $n-k$ подмножеств. (Эта величина обозначается $S(n, n-k)$ и называется *числом Стирлинга второго рода.*)

Для произвольного графа Γ с n пронумерованными вершинами обозначим $q_k(\Gamma)$ — количество способов раскрасить вершины этого графа в k цветов так, чтобы любые две вершины, соединенные ребром, были разного цвета. Раскраски, отличающиеся "перестановкой" цветов, считаются одинаковыми, иными словами, раскраска в k цветов — это такое разбиение множества вершин на k подмножеств, в котором концы каждого ребра лежат в разных подмножествах. Величины $q_k(\Gamma)$ называются *хроматическими числами* графа Γ, а весь набор $(q_n, q_{n-1}, \dots)$ — *хроматическим вектором* (будем располагать его компоненты по убыванию числа цветов). В предыдущей задаче фактически требуется доказать, что ладейные числа графа T_n совпадают с хроматическими числами "пустого" графа Γ_n с n вершинами и без ребер: $r_k(T_n) = q_{n-k}(\Gamma_n)$.

5.2. Найдите граф с n вершинами, хроматические числа которого совпадают с ладейными числами доски $\widetilde{T}_n = \{(i,j) : 1 \le i \le n, 1 \le j < i-1\}$.

6.1. Пусть B — диаграмма Юнга со строками $b_1, b_2, \dots, b_m$ $(0 \le b_1 \le b_2 \le \dots \le b_m)$. Для всякого целого $p \ge m$ докажите, что

$$\sum_{k=0}^{m} r_k(B)p!/((p-m+k)!) = (p+b_1)(p+b_2-1)(p+b_3-2)\dots(p+b_m-m+1)$$

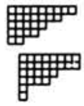
7.1. Для каждого n среди всех связных относительно хода ладьи досок, состоящих из n клеток, найдите такую, на которую можно поставить несколько (не фиксированное количество) не бьющих друг друга ладей наибольшим числом способов. Чему равно это число способов?

8.1. Докажите, что ВСЕ корни ладейного многочлена любой диаграммы Юнга — действительные отрицательные.

Промежуточный финиш

2.5. Теорема Капланского (I. Kaplansky). Рассмотрим прямоугольник $m \times (n+p)$, который для удобства будем считать состоящим из двух частей: части C — прямоугольника $m \times n$ и оставшейся части D — прямоугольника $m * p$. Пусть A и B — эквивалентные доски, расположенные внутри части D. Тогда доски $A \cup C$ и $B \cup C$ тоже эквивалентны.

2.6. Докажите эквивалентность досок:



3.7. Многочлен f степени n называется *возвратным*, если $f(x) = x^n f(1/x)$. Докажите, что при всех $n \leq 9$ существует связная относительно хода ладьи доска из n клеток с возвратным ладейным многочленом.

5.3. Пусть B - произвольная доска. Докажите, что существует граф Γ_B, хроматические числа которого совпадают с ладейными числами доски B.

5.4. Верно ли, что всякий хроматический вектор является ладейным?

Ответ.

5.5. Найдите два графа, у которых совпадают хроматические вектора.

6.2. С каждой диаграммой Юнга B с m строками $b_1, b_2, \ldots, b_m$ $(0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_m$; разрешаются нулевые строки) свяжем (неупорядоченный) набор чисел

$$S(B) = (b_1, b_2 - 1, b_3 - 2, \ldots, b_m - m + 1)$$

Докажите, что две доски B_1 и B_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда их наборы $S(B_1)$ и $S(B_2)$ совпадают.

6.3. Сколько существует диаграмм Юнга, эквивалентных квадрату $n * n$?

Ответ.

6.4. Теорема Фоата-Шютценберже (D. Foata - M. P. Schützenberger) Докажите, что для каждой диаграммы Юнга найдется ровно одна эквивалентная диаграмма Юнга с различными ненулевыми строками.

7.2. Проверьте, что при всех n выражение $\sin((n+1)\phi)/(\sin\phi)$ является многочленом степени n относительно $\cos\phi$. Этот многочлен обозначается $U_n(x)$ и называется *многочленом Чебышева второго рода*.

7.3. Пусть L_n - ладейный многочлен доски из задачи 7.1. Докажите, что

$$L_{2k-1}(x) = (-1)^k x^k U_{2k}(-1/(4x))^{1/2}.$$

Будем говорить, что многочлен g *разделяет корни* многочлена f, если

1)$\deg g = \deg f$ или $\deg g = deg f - 1$;

2)Все корни многочленов f и g - вещественные отрицательные, $f(0) > 0, g(0) > 0$.

3)Если $0 > x_1 > x_2 > \ldots$ - корни многочлена f, $0 > y_1 > y_2 \ldots$ - корни многочлена g, то $0 > x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \ldots$.

8.2. Докажите, что если многочлены $g_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ разделяют корни многочлена $f(x)$, то $f(x)$ разделяет корни

$$f(x) + x\sum_{i=1}^{k} g_i(x)$$

8.3. Докажите, что все корни ладейного многочлена любой доски B - вещественные отрицательные.

8.4. Докажите, что для любой доски B $\quad r_{k-1}r_{k+1} < (r_k)^2$.

8.5. Верно ли, что $(r_{k-1} + r_{k+1})/2 \le r_k$?

8.6. Докажите, что для любой монотонной диаграммы Юнга с n строками

$$r_{n-1}/C_n^{n-1} > (r_{n-2}/C_n^{n-2})^{1/2} > (r_{n-3}/C_n^{n-3})^{1/3} > \ldots > (r_0/C_n^0)^{1/n}$$

Сиракузская последовательность

М. Л. Гервер

По любому натуральному n строится последовательность $s(n) = \{s_1, \dots, s_k, \dots\}$: $s_1 = n$, $\quad s_{k+1} = s_k/2$, если s_k четно, $\quad s_{k+1} = (3s_k + 1)/2$, если s_k нечетно.

В математическом фольклоре $s(n)$ известна много лет под названием *сиракузская последовательность*. Значения $s(n)$, вычисленные на компьютере для всех $n < 2^{40}$, после хаотического блуждания с завораживающим постоянством приходят к 1.

Пример $s(31)$ приходит к 1 за 68 шагов: 31, 47, 71, 107, 161, 242, 121, 182, 91, 137, 206, 103, 155, 233, 350, 175, 263, 395, 593, 890, 445, 668, 334, 167, 251, 377, 566, 283, 425, 638, 319, 479, 719, 1079, 1619, 2429, 3644, 1822, 911, 1367, 2051, 3077, 4616, 2308, 1154, 577, 866, 433, 650, 325, 488, 244, 122, 61, 92, 46, 23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

Верно ли, что $s(n)$ *при всех n приходит к* 1, *а точнее — к циклу* $1 \leftrightarrow 2$?

Эта *нерешенная* $(3n+1)$*-проблема* известна с 1930 года.

Аналогично формулируется $(3n-1)$-проблема:

По любому натуральному n строится последовательность $s(n) = \{s_1, \dots, s_k, \dots\}$: $s_1 = n$, $\qquad s_{k+1} = s_k/2$, если s_k четно, $\qquad s_{k+1} = (3s_k - 1)/2$, если s_k нечетно.

Верно ли, что $s(n)$ *при всех n приходит либо к* 1, либо к одному из двух циклов? Вскоре вы узнаете, что это за циклы.

Ниже предлагается новый подход к $(3n+1)$-проблеме и к $(3n-1)$-проблеме.

Возможно, его развитие поможет в дальнейшем решить эти проблемы.

Упражнения (цепочки и $\{c, d\}$-пары)

1. Проверьте, что $1 \leftrightarrow 2$ — цикл в $(3n+1)$-проблеме. Проверьте, что 1 - неподвижная точка в $(3n-1)$-проблеме. Найдите 2 цикла в $(3n-1)$-проблеме.

Предположим на минуту, что верна следующая теорема: *ни в* $(3n+1)$ *-проблеме, ни в* $(3n-1)$-проблеме нет других циклов. Следует ли из нее положительное решение $(3n+1)$-проблемы и $(3n-1)$-проблемы?

2. Сравните первые серии нечетных чисел в сиракузской последовательности $s(15)$ в $(3n+1)$-проблеме и в последовательности $s(17)$ в $(3n-1)$-проблеме:

15, 23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

17, 25, 37, 55, 82, 41, ...

С точностью до 1 числа в обеих сериях — это подчиняющиеся красивому закону (какому?) числа 16, 24, 36, 54, 81. Чтобы отметить, что 1 вычитается из *всех* этих чисел (или прибавляется ко *всем* этим числам), заключим их в скобки:

$$15, 23, 35, 53, 80 = -1 + [16, 24, 36, 54, 81],$$

$$17, 25, 37, 55, 82 = 1 + [16, 24, 36, 54, 81].$$

Рассмотрите другие примеры, например, следующие 3 серии в $(3n+1)$-проблеме:

31, 47, 71, 107, 161, 242; 7, 11, 17, 26; 87, 131, 197, 296.

Попробуйте найти общее правило и описать каждую серию нечетных чисел (с четным числом в конце серии) с помощью всего двух чисел: "коэффициента c и степени d".

3. Вот $s(27)$ в $(3n+1)$-проблеме: 27, 41, 62, 31, 47, 71, 107, 161, 242, 121, 182, 91, 137, 206, 103, 155, 233, 350, 175, 263, 395, 593, 890, 445, 668, 334, 167, 251, 377, 566, 283, 425, 638, 319, 479, 719, 1079, 1619, 2429, 3644, 1822, 911, 1367, 2051, 3077, 4616, 2308, 1154, 577, 866, 433, 650, 325, 488, 244, 122, 61, 92, 46, 23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

Рассмотрим серии нечетных чисел (с четным числом в конце каждой серии):

$$\begin{aligned}
27,41,62 &= -1+[28,42,63]\\
31,47,71,107,161,242 &= -1+[32,48,72,108,162,243]\\
121,182 &= -1+[122,183]\\
91,137,206 &= -1+[92,138,207]\\
103,155,233,350 &= -1+[104,156,234,351]\\
175,263,395,593,890 &= -1+[176,264,396,594,891]\\
445,668,334 &= -1+[446,669],334
\end{aligned}$$

Стоп! Мы встретили 2 четных числа подряд (668, 334), это (по ОПРЕДЕЛЕНИЮ) КОНЕЦ ЦЕПОЧКИ.

Представим эту ЦЕПОЧКУ в виде последовательности $\{c,d\}$-пар (с четным числом 334 в конце): {7,2} {1,5} {61,1} {23,2} {13,3} {11,4} {223,1}, 334.

Пояснение. $[28,42,63] = 7\cdot[2^2, 2\cdot 3, 3^2] \leftrightarrow \{7,2\}$. Сравните с предыдущей задачей 2, где $[16=2^4, 24=2^3\cdot 3, 36=2^2\cdot 3^2, 54=2\cdot 3^3, 81=3^4] \leftrightarrow \{1,4\}$.

Итак, я предлагаю

1) выписывать $\{c,d\}$-ПАРЫ вместо ЧИСЕЛ,

2) рассматривать ЦЕПОЧКИ $\{c, d\}$-пар (с четным числом в конце каждой цепочки).

3) ассоциировать $s(n)$ с множеством цепочек.

4. Будьте внимательны со следующими сериями нечетных чисел:

$$\begin{aligned} 167, 251, 377, 566 &= -1 + [\quad] \\ 283, 425, 638 &= -1 + [\quad] \\ 319, 479, 719, 1079, 1619, 2429, 3644, 1822 &= -1 + [\quad], 1822, \end{aligned}$$

первая строчка 167, 251, 377, 566 начинается РАНЬШЕ (я предлагаю всегда начинать цепочки с нечетных чисел, кратных трем):

$$\begin{aligned} &111, 167, 251, 377, 566 = -1 + [112, 168, 252, 378, 567] = \\ &= -1 + 7 \cdot [16, 24, 36, 54, 81] \leftrightarrow \{7, 4\}, \end{aligned}$$

так что первая $\{c, d\}$-пара в этой цепочке — $\{7,4\}$. Каковы остальные $\{c, d\}$-пары в этой цепочке? Постарайтесь дать точное определение ЦЕПОЧЕК в $(3n + 1)$-проблеме.

5. Продолжите (рассмотрите соответствующие $\{c, d\}$-пары и цепочки): 911, 1367, 2051, 3077, 4616, 2308, 1154, 577, 866, 433, 650, 325, 488, 244, 122, 61, 92, 46, 23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

Перспективы

Чтобы можно было представить себе направление дальнейших исследований, ниже сформулировано несколько сложных задач (в том числе, пока нерешенных).

Некоторые из них мы обсудим подробнее в разделе "Основные задачи".

Верны ли в $(3n + 1)$-проблеме следующие утверждения I и II?

I. Для любого $n > 2$, где n не равно 0 (mod 6), существует ровно одна пара (a, b), такая что $s(6a + 3)$ содержит n, $s(n)$ содержит $6b + 4$ и отрезок $[s(6a + 3), s(6b + 4)]$ не содержит других чисел, сравнимых с 4 (mod 6).

II. В любой цепочке $\{c_1, d_1\}, \ldots, \{c_n, d_n\}$ все c_k различны.

III. Сколь длинными бывают цепочки? (Сколько $\{c, d\}$-пар могут они содержать?)

Подготовительные задачи

6. В $(3n - 1)$-проблеме аналогом утверждения I является утверждение

I'. Для любого $n > 2$, где n не равно 0 (mod 6), существует ровно одна пара (a, b), такая что $s(6a + 3)$ содержит n, $s(n)$ содержит $6b + 2$ и отрезок $[s(6a + 3), s(6b + 2)]$ не содержит других чисел, сравнимых с 2 (mod 6).

Формально в $(3n-1)$-проблеме утверждения I' и II неверны, но вероятно, имеется лишь 4 контрпримера к ним: 3 числа, не удовлетворяющих I' и 1 цепочка, не удовлетворяющая II. Найдите их.

7. a. Если гипотеза о сиракузской последовательности верна, то все натуральные $n > 2$, где n не равно 0 (mod 6), являются вершинами дерева T. В $(3n+1)$-проблеме некоторые нечетные числа в $s(n)$ равны 1 (mod 3), некоторые равны 2 (mod 3), а некоторые равны 0 (mod 3). Как это связано со степенями вершин T? Сформулируйте правило.

b. Сформулируйте аналогичное правило для $(3n-1)$-проблемы.

Длина и структура цепочки В соответствии с утверждением I и с 7a, возьмем любую цепочку (a, b), т.е. отрезок $[6a+3, 6b+4]$ последовательности $s(6a+3)$ *до первой пары* $12b+8$, $6b+4$ *четных чисел подряд.* Пока это лишь экспериментальный результат, что для *любого* числа $n > 2$, где n не равно 0 (mod 6), последовательность $s(n)$ содержит такую пару. Этот факт не доказан ни для всех $n > 2$, ни для $n = 6a+3$. Но имеется миллион примеров цепочек. Так что пусть (a, b) — одна из них. Разобьем отрезок $[6a+3, 12b+8]$ цепочки (a, b) на куски, каждый из которых содержит одно или несколько нечетных чисел и ровно одно четное число (в конце каждого куска).

По определению число L этих кусков есть ДЛИНА цепочки, а конечная последовательность $d_1, \dots, d_L$ (где d_k - число нечетных чисел в k-ом куске) — СТРУКТУРА цепочки. Последнее число последнего (L-го) куска — это первое в цепочке число, кратное четырем, т. е. число вида $12b+8$, выпишем вслед за ним и число $6b+4$. Пример:

$$\begin{array}{lll}
d_1 = 2 & & 274162 \\
d_2 = 5 & & 314771107161242 \\
d_3 = 1 & & 121182 \\
d_4 = 2 & & 91137206 \\
d_5 = 3 & & 103155233350 \\
d_6 = 4 & & 175263395593890 \\
d_7 = 1 & & 445668334
\end{array}$$

8. Попробуйте найти другую цепочку той же длины $L = 7$ с той же структурой.

Основные задачи

9. a) Возьмем любую конечную последовательность из нулей и единиц, например:

$$1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0.$$

Докажите, что найдется такое n, что в начальном отрезке $s(n)$ на местах *единиц* будут стоять *нечетные* числа, а на местах *нулей* — *четные* числа.

b) Обратно, каждой $s(n)$ можно сопоставить бесконечную последовательность из нулей и единиц (*единицы* соответствуют *нечетным* числам, а *нули* — *четным* числам). Покажите, что эти последоватедьности различны, если они сопоставлены различным $s(n)$ и $s(m)$.

10. Докажите, что для любого натурального L и любых натуральных $d_1, \dots, d_L$ существует цепочка со структурой $d_1, \dots, d_L$.

11. Докажите следующую теорему:

Теорема 1. Пусть (a, b) — цепочка длины L со структурой $d_1, \dots, d_L$.

Положим $j = d_1 + \ldots + d_L$, $i = j + L$, $A = 2^i$, $B = 3^j$, $a' = a + A$, $b' = b + B$. Тогда
1) (a', b') — цепочка,
2) ее длина равна L, как и у цепочки (a, b),
3) ее структура: $d_1, \dots, d_L$, как и у цепочки (a, b).

Итак, вместо миллиона примеров цепочек, теперь у нас есть бесконечное множество цепочек: вместе с любой цепочкой (a_0, b_0) у нас имеется бесконечная последовательность цепочек $(a_k, b_k) = (a_0, b_0) + k \cdot (A, B)$, $k = 1, 2, 3, \dots$

12. Докажите следующую теорему:

Теорема 2. Пусть (a, b) и (a', b') — 2 цепочки с одной и той же структурой $d_1, \dots, d_L$, $a' > a$. Положим $j = d_1 + \ldots + d_L$, $i = j + L$, $A = 2^i$, $B = 3^j$. Тогда существует такое k, что $a' = a + kA$, $b' = b + kB$.

13. Докажите, что в $(3n+1)$-проблеме имеются цепочки со структурами

$$<1>, <1,1>, <1,1,1>, <1,1,1,1>, <1,1,1,1,1>, \dots$$

с коэффициентами c_1 и с числами a_0, b_0 следующего вида:

$$\begin{aligned}
<1>\colon c_1 &= 11 = 5 \cdot 2 + 1, \quad a_0 = 3, \quad b_0 = 2,\\
<1,1>\colon c_1 &= 41 = 5 \cdot 2^3 + 1, \quad a_0 = 13, \quad b_0 = 7,\\
<1,1,1>\colon c_1 &= 161 = 5 \cdot 2^5 + 1, \quad a_0 = 53, \quad b_0 = 22,\\
<1,1,1,1>\colon c_1 &= 641 = 5 \cdot 2^7 + 1, \quad a_0 = 213, \quad b_0 = 67,\\
<1,1,1,1,1>\colon c_1 &= 2561 = 5 \cdot 2^9 + 1, \quad a_0 = 853, \quad b_0 = 202,
\end{aligned}$$

....

a) Найдите остальные c_j для этих цепочек,

b) Найдите рекуррентные формулы для a_0 и b_0,

c) Найдите c_j, $1 \le j \le 6$, и a_0 и b_0 для цепочки со структурой $<1,1,1,1,1,1>$;.

14. Сформулируйте и решите задачу, аналогичную 13, для $(3n-1)$-проблемы.

15. a) Докажите для любого $n = 6a+3$, что сиракузская последоватедьность $s(n)$ не может зациклиться прежде, чем цепочка с началом $n = 6a+3$ закончится, т. е. прежде, чем появятся числа $12b+8$ и $6b+4$.

b) Можете ли вы получить тот же результат для любого n ($n > 2$, n не равно $6a+3$)?

По материалам всероссийских съездов преподавателей математики 1911 и 1913 годов

Р. З. Гушель

Ревекка Залмановна Гушель — старший преподаватель кафедры геометрии Ярославского педагогического университета. В последние годы активно занимается сбором материалов по истории математики и математического образования. Настоящая подборка посвящена предреволюционному периоду, который в отношении математического образования был насыщен реформаторскими идеями и планами, многие из которых и сегодня звучат актуально. Редакция присоединяется к мнению составителя подборки, что материалы того периода должны быть известны современным педагогам.

Журнал "Математическое образование", издававшийся перед революцией, был органом Московского математического кружка, руководимого профессором Московского Университета Б. К. Млодзеевским. Этот кружок активно участвовал в широко развернувшемся в то время движении по реформированию среднего образования, в том числе и математического. Журнал подробно информировал читателей о работе в этом направлении как в России, так и в других странах.

Но журнал начал выходить в январе 1912 года, а реформаторское движение началось еще в 90-х годах XIX столетия, причем во многих крупных странах Европы и Америки практически одновременно.

Отечественные попытки реформирования школы, относящиеся к этому же периоду, имеют самобытный и вполне самостоятельный характер.

В июле 1899 года министр народного просвещения Н. П. Боголепов разослал по учебным округам циркуляр, в котором признавались многие недостатки существовавшей системы среднего образования. Он пригласил ведущих педагогов принять участие в Высочайше учрежденной Комиссии по вопросу об улучшениях в средней общеобразовательной школе. Эта Комиссия работала в 1900 году, и в ней участвовали многие видные педагоги как средней, так и высшей школы.

Среди решений Комиссии было введение в реальных училищах дополнительного восьмого класса с тем, чтобы дать их выпускникам право поступления на некоторые факультеты вузов. Было разработано шесть разных моделей среднего образования (мужского), в том числе и такие, которые предполагали фуркацию (профильную дифференциацию) в старших классах.

Планировалось также значительное обновление содержания образования. В программы по математике было решено ввести элементы аналитической геометрии, анализа, а для некоторых типов школ и теории вероятностей.

Гибель Н. П. Боголепова от руки террориста в 1901 году приостановила реализацию решений Комиссии, но над некоторыми отдельными вопросами работа продолжалась.

В 1906 году были приняты, а в 1907 году введены в действие программы для восьмого класса реальных училищ. В программу по математике, составленную специальней комиссией во главе с профессорем К. А. Поссе, были введены комплексные числа, конические сечения (и в прямоугольных, и в полярных координатах), большой раздел, посвященный дифференциальному исчислению, и ряд других вопросов. С 1911 года программы, близкие к этим, были введены и в кадетских корпусах. К этим программам было написано много хороших учебников и других руководств, материалы которых можно было бы использовать и в современной школе. Знаменитый автор школьных учебников А. П. Киселев написал учебник "Начала дифференциального и интегрального исчисления для средних учебных заведений", который в 1917 году вышел уже седьмым изданием.

В эти же годы были проведены серьезные реформы во Франции, Германии и некоторых других странах. В частности, в Германии в 1905 году были приняты так называемые Меранские программы, ставившие во главу угла "развитие пространственного восприятия и воспитание привычки к функциональному мышлению".

Проходивший в Риме в 1908 году IV международный математический конгресс принял решение о создании Международной комиссии по преподаванию математики для обмена опытом в постановке преподавания математики в разных странах. Президентом комиссии Конгресс назначил главу германских реформаторов, крупнейшего немецкого геометра Феликса Клейна. По персональному приглашению Ф. Клейна русскую национальную подкомиссию возглавил академик Н. Я. Сонин, который привлек к сотрудничеству в ней Б. М. Кояловича и К. В. Фохта. Позже в эту комиссию вошли также Д. М. Синцов и К. А. Поссе.

Международная комиссия проводила ежегодные съезды, которые активизировали деятельность стран-участниц по проведению реформ у себя дома.

Большая внутригосударственная и международная реформаторская деятельность отечественных педагогов-математиков привела их к мысли о необходимости проведения всероссийских съездов преподавателей математики. Первый такой съезд собрался 27 декабря 1911 года в С.-Петербурге. Его организовал Отдел математики Педагогического музея военно-учебных заведений. Через два года, в декабре 1913 — январе 1914 годов в Москве прошел II Всероссийский съезд преподавателей математики. Организатором этого съезда стал Московский математический кружок. Проведению третьего съезда помешала война.

На каждом из съездов присутствовало более чем по тысяче делегатов из всех учебных округов страны. Среди участников съездов были известные ученые-математики А. В. Васильев, П. А. Некрасов, Б. К. Млодзеевский, А. К. Власов, С. Н. Бернштейн, В. В. Бобынин, а также крупнейшие отечественные педагоги К. Ф. Лебединцев, С. И. Шохор-Троцкий, Н. А. Извольский и многие другие.

При беглом обзоре невозможно охватить все вопросы, обсуждавшиеся на съездах. Центральное место занимал вопрос о цели математического образования и его значении. Отсюда непосредственно вытекал и вопрос о содержании образования. Было признано необходимым значительно его обновить. За счет отказа от второстепенных и устаревших разделов было решено ввести в среднюю школу элементы так называемой высшей математики. Значительное внимание было уделено повышению роли психологии в преподавании, межпредметным связям, наглядности и ряду других вопросов. Большой доклад "О приготовлении преподавателей математики для средних учебных заведений" сделал на 1 съезде В. Ф. Каган. На втором съезде по этому вопросу выступил Н. Н. Салтыков.

На первом съезде особое внимание было обращено на вопрос о согласовании преподавания математики в средней и высшей школе. Этой проблеме было посвящено три доклада — К. А. Поссе, В. Б. Струве и Д. М. Синцова.

Докладчики выразили единодушное убеждение в том, что наилучшим способом осуществления преемственности между средней и высшей школой является фуркация старших классов средней школы. И съезд горячо поддержал эту идею.

О том, насколько широк был спектр обсуждавшихся на съездах вопросов, и насколько многие их решения актуальны в современной школе, можно судить по резолюциям этих съездов (см. ниже).

Журнал “Математическое образование” подробно знакомил своих читателей и с деятельностью Международной Комиссии по преподаванию математики, и с работой Всероссийских съездов. На его страницах помещены многие доклады, сделанные на съездах, их резолюции и другие материалы, посвященные обсуждавшимся там вопросам. (Много внимания публикациям этой тематики уделял также журнал "Вестник опытной физики и элементарной математики", издававшийся в Одессе.)

В третьем номере возобновленного журнала "Математическое образование" (1997 год) перепечатана работа А. К. Власова "Какие стороны элементарной математики представляют ценность для общего образования", которая является докладом на II Всероссийском съезде преподавателей математики, первоначально опубликованным в первом номере за 1914 год.

Ниже предлагается небольшая подборка материалов съездов, опубликованных в свое время на страницах журнала. Это резолюции съездов и доклад К. А. Поссе, сделанный на I съезде преподавателей математики.

Лица, интересующиеся материалами съездов, смогут найти их в подшивках журнала "Математическое образование" за 1912-1915 годы, а также в журнале "Вестник опытной физики и элементарной математики" за те же годы.

Укажем и некоторые другие источники, по которым можно познакомиться с деятельностью всероссийских съездов преподавателей математики. К сожалению, их немного, так как рассматриваемый период истории отечественной школы был долгое время вне поля зрения наших педагогов.

1) Труды 1-го Всероссийского съезда преподавателей математики. СПб., 1913. Тт.1-5.

2) Доклады, читанные на II Всероссийском съезде преподавателей математики в Москве. М., 1915.

3) Попруженко М. Второй Всероссийский съезд преподавателей математики // Педагогический сборник. 1914. №7,8.

4) Никитин Н. Я. Съезды преподавателей математики в России // Изв. АПН РСФСР. 1946. Вып.6.

5) Метельский Н. В. Очерки истории методики математики. Минск, 1968. 340с.

6) Метельский Н. В. К проблеме фуркации на I Всероссийском съезде преподавателей математики (1911-1912гг.) // Сов. педагогика. 1962. №10.

7) Метельский Н. В. Идеи движения за реформу современны (к 80-летию I Всероссийского съезда преподавателей математики) // МШ. 1992. №1. С.8-10.

8) Колягин Ю. М. Русская школа и математическое образование. Орел, 1996.

9) Черкасов Р. С. Лстория отечественного школьного математического образования // МШ. 1997. №2. С.83-91.

10) Гушель Р.З. О движении за реформу математического образования в начале XX века // Историко-математические исследования. 1999. Вып.3(38). С.168-177.

Резолюции первого всероссийского съезда преподавателей математики

Журнал “Математическое образование”, 1912, №2, С.86-88

Первый Всероссийский съезд преподавателей математики, заслушав и обсудив доклады по всем вопросам, относящимся к программе съезда, пришел к следующим заключениям:

1) Съезд признает необходимым поднять самодеятельность и активность учащихся, а также усилить наглядность преподавания на всех его ступенях и в то же время повысить логический элемент в старших классах, считаясь, однако, с психологическими особенностями возраста учащихся и с доступностью для них преподаваемого материала.

2) Съезд признает своевременным опустить из курса математики средней школы некоторые вопросы второстепенного значения, провести через весь курс и ярко осветить идею функциональной эависимости, а также — в целях сближения преподавания в средней школе с требованиями современной науки и жизни — ознакомить учащихся с простейшими и наиболее доступными им идеями аналитической геометрии и анализа.

3) Съезд признает крайне желательным, чтбы авторы настоящих и будущих учебников приняли во внимание точки зрения, изложенные во 2-м пункте настоящих резолюций. В частности, признается желательной выработка задачников, соответствующих кругу интересов учащихея на каждой ступени их обучения и включающих в себя данные из физики, космографии, механики и пр., а также составление математической хрестоматии, дополняющей и углубляющей сведения, выносимые учащимися из обязательной программы.

4) Съезд признает желательной подробную разработку вопроса о такой организации преподавания в средней школе, которая, сохраняя общеобразовательный ее характер, допускала бы специализацию в старших классах, приноровленную к индивидуальным способностям учащихся и удовлетворяющую требованиям высшей школы.

5) Съезд признает желательным, чтобы наиболее одаренные в математическом отношении учащиеся могли найти в учебном заведении удовлетворение своим запросам, а также организованное руководительство со стороны учебного персонала.

6) Съезд признает желательным, чтобы университет без ущерба для главного своего назначения — служить науке и научному образованию — усилил свое преподавание элементами, необходимьми для будущего преподавателя средней школы.

7) Съезд признает необходимым, чтобы кандидаты в преподаватели по окончании высшего учебного заведения получали специальную педагогическую подготовку на курсах, возможно лучше обеспеченных преподавательскими силами и материальными средствами.

8) Съезд считает необходимым, помимо постоянных курсов, устраивать для освежения как научной, так и педагогической подготовки учителей средних учебных заведений, также краткосрочные курсы и съезды.

9) В целях повышения специального и педагогического самообразования преподавателей желательно, чтобы библиотеки учебных заведений были в полной мере снабжены необходимыми учебными, методическими сочинениями, справочными изданиями и журналами.

10) Съезд признает желательным, чтобы педагогическим советам учебных заведений было предоставлено больше самостоятельности в деле распределения учебного материала по классам и в выборе учебных руководств.

11) Съезд признает желательным повысить в женских средних учебных заведениях уровень преподавания математики, как в виду высокого образовательного значения этого предмета, так и в виду широкого стремления оканчивающих женскую школу к высшему образованию.

12) Сознавая всю сложность высказанных здесь пожеланий, съезд признает необходимым проявить соответствующую осторожность при всех начинаниях, касающихся проведения их в жизнь. В виду этого съезд выразил настоящие резолюции в весьма общей форме и поручает организационному комитету 2-го съезда составить комиссии, которые занялись бы тщательной и детальной обработкой высказанных здесь общих пожеланий.

    Доклады этих комиссий необходимо отпечатать, и не позже, чем за 3 месяца до начала 2-го съезда разослать состоящим при всех ведомствах ученым комитетам, советам и конференциям высших учебных заведений, математическим обществам и кружкам, преподавателям математики средних учебных заведений, а также органам педагогической печати.

    Обсуждение этих докладов и постаневление по ним окончательных решений должно составить главную задачу 2-го съезда преподавателей математики.

13) Съезд признает желательным, чтобы отдельные члены его представили в организуемые комиссии свои соображения по указанным в предыдущих пунктах вопросам. Соображения эти, если не будут включены в доклады, должны быть к ним приложены.

14) В виду того, что крайне серьезный вопрос об экзаменах и письменных работах обсуждался только в одной из секций и не прошел через общее собрание, съезд, признавая неудовлетворительность современней постановки этого дела в средней школе и необходимость коренных в ней изменений, поручает организационному комитету 2-го съезда организовать по этому вопросу отдельную комиссию, в которую передать и поступившие по этому вопросу из 2-ой секции заявления.

15) Съезд выражает желание, чтобы на 2-ом съезде преподавателей математики были образованы особые секции преподавателей женских, технических и коммерческих учебных заведений и чтобы туда были представлены доклады о переработке программ математики этих учебных заведений.

16) В виду того, что в настоящее время в различных местах России работает довольно много математических кружков, желательно создание особой организации, которая, оставляя эти кружки вполне самостоятельными, объединила бы их на почве общих интересов и стремлений.

17) Съезд выражает свою признательность тем органам печати, которые служили и служат делу преподавания математических наук и приветствует начинание Московского Математического Кружка, выразившееся в издании журнала "Математическое образование", который включил в свои задачи содействие взаимному осведомлению обществ и кружков, посвящающих себя делу математического образования.

18) Съезд признает необходимым созвать Второй Всероссийский Съезд преподавателей математики в Москве в декабре 1913 года и просит Московский математический кружок, в виду выраженной председателем и присутствующими членами его готовности организовать Второй Съезд, взять на себя выполнение этой задачи.

19) Съезд поручает своему организационному комитету сообщить настоящие свои постановления министрам и Главноуправляющим, в ведении которых находятся средние учебные заведения.

Резолюции второго всероссийского съезда преподавателей математики

Журнал "Математическое образование", 1914, №1, С.50-52

Второй Всероссийский съезд преподавателей математики, выслушав и обсудив доклады и прения по вопросам, относящимся к программе съезда, вынес следующие постановления:

1) Признавая необходимым условием успешного преподавания математики правильную постановку подготовки преподавателей, а также создание таких условий, при которых лицам, уже состоящим преподавателями, была бы предоставлена возможность освежать и пополнять свои познания, Съезд находит крайне желательным осуществление следующих мер:

   а) чтобы лица, приступающие к преподаванию, обладали подготовкой как научной, так и общепедагогической;

   б) чтобы на физико-математических факультетах высших учебных заведений читались курсы, освещающие с научной точки зрения основные вопросы элементарной математики;

в) чтобы устраивались районные съезды преподавателей математики;

г) чтобы организацию таких курсов, кроме учреждений, устраивающих их в настоящее время, приняли на себя высшие учебные заведения, а также математические кружки и общества, объединяющие преподавателей.

2) Признавая, что успешное преподавание математики может быть осуществлено лишь при дружной работе всех заинтересованных в нем кругов, и что для правильной постановки его имеют большое значение не только общие мероприятия органов управления, но и личный почин отдельных преподавателей (как это подтверждается примерами Германии), Съезд признает крайне желательным осуществление следующих мер:

а) чтобы педагогическим советам было предоставлено право разрешать преподавателям отступать от существующих программ под условием представления проектов изменений на утверждение совета;

б) чтобы осуществление пересмотра программ и плана преподавания математики в средней школе было произведено в целом, а не путем частичных изменений, при выработке такого плана необходимо не только внесение новых отделов, но и освобождение курса от отделов, утративших свое значение;

в) чтобы преподавание математики в женских гимназиях было организовано на одинаковых началах с мужскими;

г) чтобы к совместной работе по выработке плана и программы преподавания привлекались представители науки и преподаватели средней школы.

3) Съезд признает начала аналитической геометрии и анализа необходимыми в курсе средней школы всех типов. Для повышения успешности результатов, достигаемых в деле преподавания аналитической геометрии и анализа, желательны следующие меры:

а) пересмотр программ аналитической геометрии и анализа;

б) назначение на эти предметы достаточного количества времени;

в) установление связи анализа с предыдущими частями курса;

г) более правильная методическая постановка преподавания аналитической геометрии и анализа.

4) Для скорейшего проведения в жизнь изложенных постановлений Съезд признает необходимым учредить комиссию по вопросу о постановке преподавания математики и просит Михаила Григорьевича Попруженко, Захария Андреевича Макшеева, Болеслава Корнелиевича Млодзеевского, Алексея Константиновича Власова, Дмитрия Матвеевича Синцова и Николая Николаевича Салтыкова принять на себя организацию означенной комиссии с тем, чтобы последняя, выделив из себя соответствующие подкомиссии, представила к третьему съезду доклады по следующим вопросам:

   а) постановка подготовки преподавателей математики;

   б) общие основания постановки и планы преподавания математики в общеобразовательной средней школе; при этом необходимо обратить особое внимание на разработку вопросов о пропедевтических курсах, курсах аналитический геометрии и анализа, и вопросов о продолжительности курса средней школы, о способах оценки, о переводных, выпускных и конкурсных экзаменах.

5) Съезд признает весьма важным для успешности работы дальнейших съездов установление преемственности — тесной связи между работой их организационных комитетов. Для осуществления такой преемственности он находит необходимым учреждение “Постоянного Бюро Съездов Преподавателей Математики” и постановляет, чтобы из состава членов Организационных Комитетов Второго и предстоящего Третьего Съездов была образована комиссия. На эту комиссию возлагается поручение представить Третьему съезду доклад об организации ”Постояннего Бюро Съездов Преподавателей Математики”.

6) Съезд признает желательным созвать Третий Всероссийский Съезд Преподавателей Математики в Харькове в декабре 1915 года и просит Харьковское Математическое Общество взять на себя выполнение этой задачи.

7) Съезд поручает своему Организационному Комитету сообщить настоящие свои постановления Министрам и Главноуправляющим, в ведении которых находятся средние учебные заведения.

О согласовании программ в средней и высшей школе

К. А. Поссе

Труды 1-го Всерос. съезда преп. матем., СПБ, 1913, Т.1, С.452-458;
также "Математическое образование", 1912, №3;
также Вестник опытн. физ. и элем. матем., 1912, №555

Под согласованием программ в средней и высшей школах я понимаю такую постановку преподавания, которая обеспечивала бы учащимся по возможности плавный переход от учения в одной к учению в другой.

Подробная разработка этой темы не укладывается в рамки краткого доклада и превосходит силу и компетенцию одного лица, поэтому я ограничусь лишь установлением некоторых положений, на которых, по моему мнению, должна основываться такая разработка, и кратким изложением тех соображений, которые привели меня к постановке этих положений.

Вопрос о согласовании программ математики в средней и высшей школах нельзя рассматривать независимо от вопроса об изменении этих программ. Действующие в настоящее время программы (я говорю пока только о мужских школах) уже согласованы между собою, по крайней мере в том отношении, что от поступающих в высшую школу официально не требуется сведений, выходящих за пределы программы средней.

Вопрос о согласовании программ возник лишь потому, что традиционные программы считаются уже не соответствующими требованиям времени и подлежащими изменениям. Вследствие этого нам и придется остановиться, главным образом, на вопросе об этих изменениях и тесно связанном с ними вопросе о постановке самого преподавания.

В общей системе образования юношества средняя школа играет двоякую роль. С одной стороны это общеобразовательная школа, которая должна дать ученикам законченное до известной степени образование, не предрешая вопроса о характере их дальнейшей деятельности, и в этом состоит, конечно, главная ее задача. Но наряду с этим она есть школа, подготовительная к высшей, дающая последней главный контингент учащихся.

Поступающий в высшую школу по необходимости должен выбрать тот или иной специальный цикл наук. Явно или неявно высшая школа предъявляет к нему определенные требования, зависящие от сделанного им выбора. Различный характер этих требований играет существенную роль в занимающем нас вопросе, и на него я прошу обратить ваше внимание. Все, что мне пришлось слышать на нашем съезде по вопросу об изменении программ математики в средней школе, почти исключительно относилось к ее общеобразовательным задачам. О способах удовлетворить специальным требованиям высшей школы было сказано очень мало. Я объясняю это тем, что, повидимому, господствует мнение, будто средняя школа, правильно выполняющая свои общеобразовательные задачи, тем самым удовлетворит и требованиям высшей. С этим мнением я согласиться не могу и постараюсь доказать, что оно не вполне справедливо.

Остановимся прежде всего на следующем вопросе, от решения которого зависят все дальнейшие заключения. Имеет ли высшая школа право предъявить к желающим в нее попасть какие-нибудь специальные требования, определяемые выбором известного цикла наук, или она должна применяться к той подготовке, которую дает средняя школа, имеющая в виду одни общеобразовательные цели? Я думаю, что в этом праве высшей школе отказать нельзя, и что фактически она всегда им пользовалась и не может не пользоваться. Это не противоречит сказанному мною вначале о внешнем согласовании программ средней и высшей школы. Из того, что специальные требования высшей школы не выражены явно, не следует, что они не существуют. Они существуют несомненно, но иногда в скрытой форме и благодаря этому вводят многих в заблуждение.

Ежегодно многие молодые люди, поступив на физико-математический факультет университета, весьма скоро убеждаются в том, что они недостаточно подготовлены, чтобы следить за университетским преподаванием, и переходят на другие факультеты; и счастливы те из них, кто приходит к этому убеждению, потеряв лишь один или два семестра. Менее счастливые или менее проницательные продолжают с грехом пополам удовлетворять снисходительным требованиям университетских экзаменов и кончают курс, приобретая лишь поверхностные и непрочные познания, которыми в жизни воспользоваться не могут. Лишь немногие, наиболее одаренные, сами пополняют недочеты своей подготовки, однако не без значительной потери в экономии своих сил.

Поступающие в высшие технические школы оказываются в еще худшем положении. Пройдя через горнило конкурсных испытаний, к которым их готовит не средняя школа, а нарочито для этого устроенные заведения, или заполучив золотую медаль и поступая по конкурсу аттестатов, они попадают в школу, предъявляющую им требование в 4, а иногда и 3 семестра изучить высшую математику в объеме, необходимом каждому ученому инженеру. Требование невыполнимое и ненормальное, но тем не менее существующее.

Переходя ко второй части нашего вопроса, т.е. спрашивая, не может ли высшая школа сама организовать свое преподавание так, чтобы оно было доступно всякому, успешно окончившему общеобразовательную школу, замечу следующее: учебные планы университетов действительно дают студенту, как уже я сказал раньше, возможность использовать свободное от текущих занятий время на пополнение недочетов его подготовки, но само университетское преподавание несомненно страдает от того, что по необходимости считается с невысоким уровнем познаний учеников средней школы.

Почти целиком первые два года на физико-математических факультетах посвящаются преподаванию таких предметов по математике, которые, и иногда в большом объеме, преподаются ученикам старших классов французских лицеев. Это обстоятельство, конечно, препятствует поднять уровень университетского преподавания на ту высоту, на которой оно могло бы стоять при других условиях.

Переходя к высшим техническим школам, мы встречаемся с полною невозможностью без помощи средней школы организовать преподавание математики и механики так, как этого требуют задачи современной, действительно высшей, технической школы ...

Придя, таким образом, к заключению, что лишить высшую школу права предъявлять специальные требования нельзя, и в то же время нельзя ее обязать приноровить организацию преподавания в своих стенах к несовершенной подготовке учеников средней школы, я ставлю вопрос:

Можно ли составить такую программу математики в средней школе, которая удовлетворяла бы и общеобразовательным задачам ее, и специальным требованиям высшей школы?

Я утверждаю, что **общей**, обязательной для всех учеников, программы такого рода составить невозможно. Я не оспариваю возможности ввести в курс средней школы некоторые сведения из Аналитической Геометрии и, так называемого, высшего анализа, не оспариваю и общеобразовательного значения такого обновления и оживления преподавания математики. Вышеупомянутые сведения нужны в настоящее время не только будущим математикам, инженерам и физикам, они нужны и натуралистам, и медикам, и полезны всякому образованному человеку.

Но я глубоко убежден, что введение этих предметов в том объеме, который доступен всем ученикам и сообразован с общеобразовательным характером школы, не будет достаточным для удовлетворения требованиям высших школ, в основе которых лежит математика. Для будущих математиков и инженеров средняя школа должна дать **систематические** курсы Аналитической Геометрии и Анализа, посвятить им значительное время и избрать строго научное их изложение. Само собою разумеется, что сделать такие курсы общеобразовательными немыслимо.

Все вышеизложенные соображения привели меня к установлению нижеследующих положений:

1) Наиболее рациональным способом удовлетворить требованиям высшей школы, не вступая в конфликт с общеобразовательными целями средней школы, является разделение курса математики на **общий**, обязательный для всех, и **специальный**, обязательный для тех, кто желает поступить на математическое отделение физико-математического факультета или в высшую техническую школу.

   Такая постановка преподавания математики уже осуществлена в средней школе Франции, а в главных чертах и в Скандинавии.

2) Специальный курс математики должен изучаться в специальных математических классах вместе с новыми языками, знание которых для математики необходимо.

3) При составлении программ как общего, так и специального курса математики можно положить в основу учебные планы и программы французских школ, разработанные в течение многих лет при участии представителей высшей и средней школы.

4) Действительного, а не формального согласования программ в средней и высшей школах лучше всего можно достигнуть при такой организации школы, которая допускает специализацию преподавания в старших классах средней школы, приуроченную к индивидуальным способностям учащихся.

Все вышесказанное относится к мужским школам.

Позвольте мне теперь сказать несколько слов о преаодавании математики в женских школах.

Русская женщина, более чем какая-нибудь другая, показала, что мнение о недоступности усвоения высшей математики женскому уму не более, как предрассудок. Существование и постоянное развитие высших женских курсов в нескольких городах

1) Козлов В. В. Общая теория вихрей. **238 стр., 25 руб.**

2) Борисов А. В., Мамаев И. С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. **464 стр., 45 руб.**

3) Арнольд В. И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. **45 руб.**

4) Оден М. Вращающиеся волчки: курс интегрируемых систем. **215 стр., 30 руб.**

5) Голубев В. В. Талант без почвы (книга о жизни и работах С. В. Ковалевской. **120 стр., 20 руб.**

6) Биркгоф Дж. Динамические системы. **408 стр., 50 руб.**

7) Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела.

8) Алексеев В. М. Лекции по небесной механике. **160 стр., 20 руб.**

9) Мозер Ю. I. Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория. **296 стр., 45 руб.**

10) Мозер Ю. II. КАМ-теория и проблемы устойчивости.

11) Уиттекер Э. Аналитическая динамика.

12) Марсден Дж., Ратью Т. Введение в механику и симметрии.

13) Пуанкаре А. Фигуры равновесия вращающихся масс жидкости.

Серия “Математика”

1) Блашке В. Дифференциальная геометрия.

2) Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. **2 тома по 180 руб.**

3) Громов М. Знак и геометрический смысл кривизны. **120 стр., 20 руб.**

4) Тьюринг А. М. Может ли машина мыслить? **104 стр., 20 руб.**

5) Рохлин В. А. Избранные труды.

6) Мур Дж. Лекции об инвариантах Зейберга-Виттена.

7) Пу Т. Нелинейная экономическая динамика.

8) Пуанкаре А. Шесть лекций по чистой математике и теоретической физике. **64 стр., 15 руб.**

Серия "Физика"

1) Поляков А. М. Калибровочные поля и струны. **312 стр., 40 руб.**

2) Ферми Э. Термодинамика. **164 стр., 20 руб.**

3) Журавлев В. А. Термодинамика необратимых процессов в задачах и решениях. **151 стр., 15 руб.**

4) Шапиро И. С., Ольшанецкий М. А. Лекции по топологии для физиков. **132 стр., 25 руб.**

5) Коллектив авторов. I. Квантовые вычисления: за и против. **212 стр., 40 руб.**

6) Коллектив авторов. II. Квантовый компьютер и квантовые вычисления.

7) Дирак П. А. М. Лекции по квантовой механике. **148 стр., 25 руб.**

8) Джимбо М., Мива Т. Алгебраический анализ точно решаемых решеточных моделей.

9) Журавлев В. А. Квантовая теория металлов.

10) Зоммерфельд А. Механика.

11) Ван-дер-Варден Б. Л. Метод теории групп в квантовой механике. **232 стр., 40 руб.**

12) Ферми Э. Квантовая механика.

13) Борн М. Основы теории относительности.

14) Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн.

15) Шредингер Э. Статистическая термодинамика. **96 стр., 15 руб.**

16) Эйнштейн А. Теория относительности.

России служит непосредственным тому доказательством. Но между программами математики средней и высшей женских школ нет и того внешнего согласования, которое мы видели в мужской школе. В то время, как программы высших курсов все более приближаются к университетским, программы женских гимназий остаются, вообще говоря, много ниже мужских. Я не решился бы в настоящее время защищать полное уравнение программ математики в мужских и женских гимназиях, но самым решительным образом приветствую путь, на который в последнее время стали некоторые женские 8-классные гимназии, путь специализации преподавания в старшем классе, причем в изучаемые там специальности вошла и математика. Эти классы и дают главный контингент учащихся на математическом отделении высших женских курсов. Стать на этот путь я и приглашаю все средние школы, мужские и женские.

Заканчивая мой короткий доклад, считаю долгом заявить следующее.

Из статьи В. Б. Струве, напечатанной еще в 1894 году в Техническом Образовании, я узнал, что выставленные мною положения были им уже высказаны 20 лет тому назад в собрании преподавателей математики в том самом помещении, где мы сегодня собрались. С разрешения Организационного Комитета съезда, я обратился к В. Б. Струве с просьбой прочесть доклад по тому же вопросу, на что В. Б. любезно согласился.

То обстоятельство, что В. Б. Струве в течение истекших 20 лет не отказался от своих положений и собирается подкрепить их аргументами, почерпнутыми из его долгого педагогического опыта, дает мне основание думать, что наши положения основаны на правильном педагогическом принципе и, рано или поздно, перейдут из области мечтаний в область действительности, как это уже имеет место в стране математики par excellence.

Издательский план журнала "Регулярная и хаотическая динамика"

Подготовил А. В. Борисов

Международный научный журнал "Регулярная и хаотическая динамика" издается в г. Ижевске. Редакция журнала совместно с издательским домом "Удмуртский университет" и Независимым Московским Университетом выпускает новые книги по физике и математике. Издаваемые книги рассчитаны на самый широкий спектр читателей.

Редакция международного научного журнала "Регулярная и хаотическая динамика", учрежденного Российской Академией Наук (РАН) и Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова, выпускает следующие серии книг по естественно-научным направлениям (для уже изданных книг указаны количество страниц и цена, остальные книги готовятся к выпуску в ближайшее время):

Серия "Регулярная и хаотическая динамика"

в данной серии публикуются как класические работы, так и оригинальные монографии и обзоры по следующим направлениям:

- детерменированный хаос,
- гамильтонова механика,
- качественный анализ динамических систем,
- фрактальная геометрия и динамика,
- симметрии, топология и резонансы,
- теория самоорганизации и синергетика.

Основным принципом подбора книг для серии является высокий научный уровень публикаций, основным принципом издания - сжатые сроки и качественное исполнение, и мы надеемся, что Вы не будете разочарованы, обратившись к этой серии.

Учебники и учебные пособия

1) Белавин А. А., Кулаков А. Г. Лекции по теоретической физике. **180 стр., 30 руб.**

2) Аносов Д. В. Лекции по линейной алгебре. **112 стр., 20 руб.**

3) Арнольд В. И. Геометрические методы в теории дифференциальных уравнений.

4) Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

5) Маркеев А. П. Теоретическая механика.

6) Фоменко А. Т. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы.

Методические и философские вопросы естественных наук

1) Лейбниц И. Г. Избранные труды по механике.

2) Мах Э. Механика. Историко-критический очерк ее развития.

3) Гротендик А. Урожаи и посевы.

4) Пригожин И. Р. Конец определенности.

5) Шредингер Э. Что такое жизнь? Физический аспект живой клетки. **96 стр., 15 руб.**

6) Харди Г. Апология математика.

Литература для школ

1) Медников Л. Э., Мерзляков А. С. Математические олимпиады. **137 стр., 20 руб.**

2) Гамов Г., Стерн М. Занимательная математика. **88 стр., 15 руб.**

3) Гамов Г. Приключения мистера Томпкинса. **200 стр., 25 руб.**

4) Гамов Г., Ичас М. Мистер Томпкинс внутри самого себя. **328 стр., 45 руб.**

5) Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика.

6) Адамар Ж. Элементарная геометрия (т. 1, 2).

7) Радамахер Г., Теплиц А. Числа и фигуры.

8) Уфнаровский В. А. Математический аквариум.

Россия, 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, УдГУ,
Лаборатория динамического хаоса и нелинейности
тел. (3412) 76-82-95 факс: (3412) 25-85-22
Для вопросов и заказов удобно использовать электронный адрес.
e-mail: subscribe@uni.udm.ru http://www.uni.udm.ru/rcd

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд готов сотрудничать с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд собирается поддерживать образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание постарается оказать образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. В планы Фонда входит издание научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, ул. Солдатская, д. 8, корп. 2, к. 69.

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 1999 год (включая стоимость пересылки) – 35 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 1999 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810600000000342 БИК 044525342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) – 25 руб., сдвоенного номера 3-4(6-7) за 1998 г. – 35 руб.

Контактные телефоны: (095) 362-82-56 (тел./факс), (095) 261-53-12.

Адрес страницы фонда в сети Internet: www.fmop.dnttm.ru

E-mail: ivm@dnttm.ru

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. Авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents