ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год восемнадцатый

№ 3 (71)

июль - сентябрь 2014 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 3 (71), 2014 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2014 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.09.2014 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (71), июль – сентябрь 2014 г.

Содержание

1965 – 1970 гг. Организационная подготовка реформы-70: МП, АПН, кадры, программы, учебники (статья пятая)

И. П. Костенко

Предыдущая статья [2] была посвящена десятилетию 1956-1965 гг. В этот период "реформаторы" нанесли первый мощный удар по школе (вывели из семилетки учебники Киселёва), в результате которого качество обучения упало в 3,5 раза, и закрепили свой "успех", перестроив программы и учебники, разрушив тем самым выверенную структуру обучения.

В данной статье описываются действия "реформаторов" на последнем этапе подготовки реформы-70. В этот период готовились органы и механизмы реализации реформы, заканчивалась выработка конкретного содержания реформы и его официальное утверждение. Невзирая на отчаянное сопротивление учителей, которые предвидели все разрушительные результаты.

"Не уразумев настоящим образом прошлого, нельзя уразуметь и настоящего."

Историк Н. И. Костомаров, XIX в.

1. 1966 – 1967 гг. Политическое, организационное и кадровое обеспечение реформы

Освящение реформы высшей властью. 10 ноября 1966 года было принято Постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР № 874 "О мерах дальнейшего улучшения работы средней общеобразовательной школы". В этом высшем государственном документе

> "были поставлены задачи: привести содержание обучения в соответствие с современным уровнем развития науки, техники и культуры .... Предусматривалось введение трёхлетнего начального обучения"[1] [1, с. 300].

Интересно сравнить эти задачи с целями, поставленными отцами-основателями. П. С. Александров в своём докладе на Всероссийском совещании преподавателей математики средней школы 1935 г. выразил

> "пожелание, чтобы ... преподавание математики в нашей советской школе достигло того уровня, который соответствует современному развитию науки" [там же, с. 13].

Через 30 лет это "пожелание" почти дословно вставляется в решение Правительства, причём в самом общем виде, охватывающем в с е учебные предметы.

Вспомним и тезис Фихтенгольца-36: курс арифметики "чрезвычайно растянут". Как мы видели в предыдущей статье [2, с. 13, 16], этот тезис стал направляющим для новых методистов

[1] Кроме этих задач "реформаторы" зафиксировали в тексте Постановления многие другие свои требования, придав им рациональную респектабельность: "ввести научно (?) обоснованные учебные планы и программы ... обеспечить преемственность (?) в изучении основ наук, более рациональное (?) распределение учебного материала по годам обучения ..." (Газета "Правда", 19.11.1966). Тем самым благопристойно оправдывалась и политически освящалась уже подготовленная ими хаотизация и перегрузка учебных планов и программ.

АПН (М. Н. Скаткин и К°). Они его обобщили на все предметы, затем конкретизировали, разработав новое трёхлетнее содержание начального образования, "научно" доказали доступность этого содержания и, тем самым "научно" обеспечили "переход начальной школы на трёхлетнее обучение". И разве могло Правительство усомниться в разумности и необходимости такого "перехода", усомниться в авторитете АПН?

Ложность и этой идеи доказала жизнь, — в начале 2000-х гг. школе предложили обратный "переход" с трёх- на четырёхлетнее начальное обучение. Но вместо того, чтобы одновременно восстановить прежнее содержание четырёхлетнего обучения арифметике, современные бездумные управленцы оставили искажённое реформаторское содержание. Учителя теперь простонапросто "растягивают" старое трёхлетнее содержание на четыре года.

Подчеркнём главный тезис Постановления — "повышение научности по в с е м предметам" [3, с. 19]. И напомним, что именно эту задачу применительно к математике [1, с. 20] ставил А. И. Маркушевич в своём установочном докладе 1949 г.: "О повышении идейно-теоретического уровня преподавания математики в средней школе".

Резонно спросить, — неужели члены Политбюро сами пришли к необходимости "повышения научности"? Ясно, что их убедили некие советники, а точнее подложили им эти решения. Кто они и как эти ВТУ-советники сумели проникнуть в обслугу высшей власти? Тайна истории.

Очевидно только то, что здесь сыграла роль такая авторитетная (для членов Политбюро) и высоконаучная организация, как АПН. И теперь мы видим третью (и важнейшую!) функцию АПН — влияние на Власть (первая — подготовка реформаторских кадров, вторая — "научное" обоснование реформы). Жизнь опять проявляет действительные цели. Добавим, есть и четвёртая (стратегическая!) цель — уничтожение традиционной методической мысли и замена её дипломированной псевдонаучной схоластикой, т. е. лженаукой (примеры были в предыдущей статье [2, с. 13-16]).

Создание социального инструмента для реализации реформы — МП СССР. Для управления реализацией реформы в декабре 1966 г. был специально создан могущественный параллельный орган — Министерство просвещения СССР (при существовавшем МП РСФСР), и во главе поставлен[2] учёный-химик, профессор МГУ М. А. Прокофьев. Он возглавлял Министерство ровно 18 лет (без 4 дней)! Он выдержал всю критику реформы, удержал её результаты и сделал их необратимыми. Самый долгий министр просвещения за всю историю России! Следующий за ним по длительности николаевский министр (1833–1849, 16 лет) — граф С. С. Уваров.

Оцените, как фундаментально и надёжно была подготовлена реформа! В 1930-х гг. "реформаторы" пытались воздействовать на Наркомпрос и на Правительство авторитетом Академии наук. Не удалось. Теперь они создали свой собственный "Наркомпрос" — МП СССР, параллельный существующему российскому, и освятили предстоящую реформу авторитетом самого Правительства. Как их эмиссары проникли туда и как смогли подчинить своим идеям номинальных руководителей страны? Тайна сия велика есть.

Естественно возникает вопрос, — зачем понадобилось создавать новое Министерство? Ведь можно было просто возглавить старое (тем же М. А. Прокофьевым, который некоторое время в нём стажировался) и управлять им далее в интересах реформы. Раз этого не сделано, значит, в старом обнаружились существенные неудобства для "реформаторов". Это и понятно, — там давно работали многие старые методисты, которые понимали пагубность реформы и на которых нельзя было опереться. Справедливость этого предположения подтверждается дальнейшим активным сопротивлением Министерства РФ действиям "реформаторов" [3, с. 25; 4, с. 206].

Смена руководящих кадров. Подготовка реформы вышла "на финишную прямую". Ка-

[2]Подобные назначения делались в советское время в ЦК, где отделом науки заведовал **С. П. Трапезников** (1912–1984) — историк КПСС по сельскому хозяйству, чл.-корр. АН с 1976 г. Интересная параллель: Трапезников управлял советской наукой (и школой) 18 лет — с 1965 г. по 1983 г. и ровно столько же в этот же период управлял "просвещением" Прокофьев, — с 1966 г. по 1984 г. Другая параллель: Трапезников вошёл в ЦК в 1956 г. (год начала хрущёвской "оттепели", изгнания Киселёва и начала падения качества обучения), а Маркушевич стал замминистра в 1958 г.

кие же цели остались? Официально утвердить новую программу, обеспечить её новыми учебниками, наметить план перевода всех школ страны на новые программы и учебники и реализовать этот план.

Решение этих задач зависело от двух органов — МП и АПН. Там, и там, в 1967 г. происходит замена первых лиц: в МП РСФСР вместо учителя Е. И. Афанасенко приходит специалист по истории средних веков А. И. Данилов, АПН РСФСР перевоплощается в АПН СССР, и её президентом вместо теоретика-педагога И. А. Каирова становится учёный-историк В. М. Хвостов (не забудем, его заместитель (советник?) А. И. Маркушевич). В этом же году А. Н. Колмогоров ставится в МП СССР на пост Председателя Комиссии по математике Учебно-методического совета (УМС), который по статусу утверждает программы. Всё подготовлено!

2. Новое содержание математического образования

Комиссия и подкомиссия. В 1965 г. А. И. Маркушевич возглавил Центральную Комиссию АН и АПН СССР по определению содержания образования в средней школе. Подкомиссию по определению содержания математического образования возглавил академик А. Н. Колмогоров, в неё вошли член-корреспондент АН И. М. Гельфанд, профессора математики А. Д. Мышкис и Д. К. Фаддеев, математик И. М. Яглом [4, с. 173]. Заметьте, — здесь нет ни одного профессионального педагога, ни одного методиста, ни одного учителя, а есть только одни высокоучёные математики.

Цель. Сложный вопрос “чему учить?”, требующий системного подхода — учёта целей общества, традиции, возможностей детей, их возрастной психологии, а также взвешенной осторожности, к которой призывали русские педагоги начала XX в., был “реформаторами” давно решён, —

> “самой категорической необходимостью является введение в школьные программы оснований анализа бесконечно малых” [7 (1939, № 6), с. 1].

Это решение Хинчина-39 Маркушевич конкретизировал в докладе 1949 г. В частности, по его тогдашним намёткам программу 10-го класса предстояло разбросать по предшествующим классам, “несколько тесня традиционный и включая новый материал”, а весь 10-й класс отводился на аналитическую геометрию, анализ и теорию вероятностей [1, с. 19-20]. Колмогоровская подкомиссия была социальным инструментом для легитимизации этого давнего решения.

Не забудем, почва для окончательного разбрасывания была подготовлена перестройкой программ, проведённой “реформаторами” в 1960 г., — ликвидирован предмет тригонометрии, в алгебру 10-го класса включена производная, исследование функций и пр.

Принципы. В сущности, маркушевичевская комиссия занималась не столько определением содержания (оно было им ясно), сколько его “организацией”. Разъясняет сам Маркушевич:

> “Комиссия... встала на путь *организации* подлежащего изучению материала посредством специфических для каждой области науки *обобщающих* идей, принципов, понятий и закономерностей, позволяющих с единой точки зрения охватить большой фактический материал, облегчить (?) его изучение и применение полученных знаний” [5, с. 29].

Вдумаемся, — что означает для математики принцип “организации содержания посредством обобщающих идей”? Он означает замену традиционной, педагогически выверенной организации изучения математического материала абстрактной научной систематикой.

На практике этот принцип вёл к отрицанию классического закона педагогики, сформулированного ещё в 1638 г. Я. А. Коменским: правильное, понятное обучение должно вести ученика “от конкретного к абстрактному”. “Реформаторы” перевернули этот закон с ног на голову и повели учеников “задом наперёд” — “от абстрактного к конкретному”. Это привёло к схоластической формализации изложения в учебниках и трёхкратному увеличению их объёма, к уничтожению классической методики преподавания. А учащихся привело не к “облегчению изучения”, как декларативно утверждал Маркушевич, а к формализму неосмысленных лоскутных знаний, к непониманию, и, в конечном счёте, к отвращению от математики. Сама жизнь доказала это.

И такой результат был запрограммирован в самом принципе. Начинать организацию материала с обобщающих идей может математик, который овладел этим материалом и этими идеями, и его цель — привести известное и понятное ему содержание в логический порядок, организовать его аксиоматически. Это сугубо профессиональная задача. Начинать же обучение с обобщающих идей и понятий значит поставить учащихся перед непреодолимой для них трудностью, — откуда взялись эти понятия, каков их смысл, зачем они им нужны? Чтобы понять эти обобщения, к ним нужно очень долго идти (принцип постепенности!) через овладение многими конкретными фактами и постепенное их обобщение (“от конкретного”). Это сделать в школе невозможно.

Собственно новое, что комиссия внесла в организацию содержания, — это международную идею теоретико-множественного оформления всего (?!) курса школьной математики. Эта предельно абстрактная идея делала любое содержание абсолютно бессмысленным и непосильным для детей.

Что и подтвердила жизнь, — в год окончания реформы Бюро Отделения математики АН СССР, наконец, признало “*неприемлемость принципов* (!), заложенных в основу программ” [4, с. 200].

Методология. Тогда же был вскрыт и методологический дефект работы комиссии, — “Отсутствует общая концепция среднего образования. Несмотря на соответствующий запрос, не было ответа от А. И. Маркушевича” (академик А. Н. Тихонов) [3, с. 30]. Т. е. вопрос о содержании математического образования школьников решался Комиссией без предварительного решения и даже без постановки базового вопроса об *общих* целях среднего образования.

Ещё один дефект, вскрытый А. Н. Тихоновым, — “не было достаточного обсуждения и экспериментирования” [там же, с. 31]. Здесь требуется уточнение. В конце 1950-х — начале 1960-х гг. в ходе первичной “перестройки” достаточно широкое обсуждение в учительской среде было. Но, как мы видели, для организаторов этого обсуждения целью было не выяснение истины, а создание видимости одобрения[3]. А вот серьёзного обсуждения в академической среде, действительно, не было. Это подтверждает Президиум АПН СССР:

> “проекты программ обсуждались общим собранием АПН РСФСР. Дискуссии принципиального характера не возникло .... Пассивность объяснима: в пору, предшествовавшую собранию, члены академии в своём большинстве не участвовали в разработке программ” [6, с. 125].

Заметим, вице-президентом АПН был в это время А. И. Маркушевич. Естественно предположить, что он блокировал и участие академиков, и обсуждение. В рамках АН СССР обсуждение блокировали академики-“реформаторы”. Экспериментирование тоже было, только оно проводилось самими “реформаторами”, и понятно, что результаты экспериментов были заданы заранее.

3. Знамя реформы — академик А.Н.Колмогоров

В 1964 г. на сцену выходит академик А. Н. Колмогоров, — в июне он делает основной доклад на Совещании по проблемам математического образования в средней школе. В этом докладе он повторяет основные реформаторские установки:

[3]С приближением реформы, к концу 1960-х гг. и в ходе реформы в 1970-х гг. обсуждения обострились, учителя “бурно” возмущались, устные обсуждения (“совещания”) стали выходить из-под контроля. Но “реформаторы” уже не зависели от учителей и попросту “плевали” на все их возмущения (см. ниже воспоминания учителя В. К. Совайленко).

> “программы нуждаются в серьёзном *совершенствовании* в направлении приближения их содержания к достижениям современной науки... работа должна вестись в I–IV классах в направлении *ускорения темпов обучения...* , в V–VIII классах — в направлении увеличения внимания вопросам *геометрических преобразований* и *функциональной зависимости...* преподавание в старших классах... должно вестись на более *строгой* теоретической основе... серьёзное внимание должно быть уделено элементам *математического анализа*” [7 (1964, №6), с. 90].

Все эти идеи были заявлены и запланированы к внедрению ещё в 1930-х гг., а редактор журнала подаёт их как идеи академика:

> “По мнению А. Н. Колмогорова,... Андрей Николаевич считает... , А. Н. Колмогоров полагает... . Выступавшие *единодушно* поддержали идеи, высказанные А. Н. Колмогоровым” [там же, с. 90—91].

В этих фразах проявляет себя истинная цель совещания и роль, отведённая А. Н. Колмогорову, — легитимизация идей предстоящей реформы и освящение их крупнейшим научным авторитетом. Декларируемая цель, как всегда, приукрашивает истинную:

> “Прошедшее совещание было первым широким совещанием, на котором подверглись обсуждению основные пути работы по дальнейшему изучению и совершенствованию школьного математического образования” [там же].

Какому же “обсуждению *подверглись*”, если все “единодушно поддержали”?

В 1965 г. А. Н. Колмогоров вместе с А. И. Маркушевичем и др. быстро определяет это новое ВТУ-содержание. В следующем 1966 г. вместе с А. И. Маркушевичем и др. работает над составлением школьных программ. В 1967 г. публикует предварительный проект новых программ [7 (1967, № 1), с. 4–23]. В этом же году становится председателем Комиссии по математике при Учёном методическом совете (УМС) МП СССР. В качестве такового принимает сам у себя работу по составлению программ и в 1968 г. утверждает их Министерством просвещения СССР.

Итак, с 1967 г. официальным лидером надвигающейся реформы, её знаменем становится академик А. Н. Колмогоров, один из лучших наших математиков, признанный во всём мире. Его высочайший научный авторитет и его личные качества эффективно использовались для “пробивания” реформы. В частности его авторитет в течение десяти лет нейтрализовывал сознательное и критическое отношение Академии наук к идеям реформы. Саму реформу назвали “колмогоровской”, сделав его, таким образом, ответственным за все запланированные результаты. Подлинные же вдохновители и организаторы остались для массового зрителя “за кадром”.

А. Н. Колмогорова, конечно, можно назвать главным официальным идеологом реформы на последнем этапе её подготовки. Он высоконаучно, высокопрофессионально углубил известные реформаторские идеи и, главное, детально конкретизировал их, используя материал школьного курса математики. Можно даже сказать, что он, действительно, построил новую и, действительно, замечательную систему “современного” обучения математике. Но у этой системы был один не очень заметный недостаток, — она была не осуществима на практике. Потому что абстрагировалась от Ученика. Проиллюстрируем последнее утверждение на примере нескольких математико-педагогических идей, развитых А. Н. Колмогоровым.

4. Методические идеи А. Н. Колмогорова

Общие понятия. Первая идея —

> “раннего (?) знакомства учащихся с законченными (?) общими положениями” [1, с. 90]. Более того, “некоторый минимальный запас” *самых* общих понятий (множество, пара, бинарное отношение, группа, и др.) должен “пронизывать” весь школьный курс.

Оставим за скобками важный вопрос "зачем?". Ограничимся более важным — "возможно ли?". Возможно ли эти "общие положения" сделать п о н я т н ы м и для школьников? Вопрос, который никогда не обсуждали ВТУ-реформаторы. Они всегда заменяли его своими мнениями типа — "формулировка... кажется (?) мне доступной" [там же, с. 52].

Но доступность определяется не мнениями учёных, а живой практикой преподавания и, в конечном счёте, самими детьми. Доступность или недоступность того или иного изложения иногда можно определить априори, если знать объективные законы познания и правильного обучения.

Человеческое познание идёт от фактов к их обобщениям. Правильное обучение должно учитывать этот закон и идти "от конкретного к абстрактному". Познание движется мотивацией и развитыми исследовательскими способностями. Правильное обучение должно создавать у учащихся мотивацию к познанию и давать им учебный познавательный материал, соответствующий их возможностям, возрастным особенностям мышления и психики.

Следовательно, чтобы воспринять смысл любого обобщения, надо, во-первых, иметь в своём опыте *достаточный* запас предварительных фактов (частных случаев), во-вторых, иметь органичную *мотивацию* и развитую способность к абстрагированию, которых у детей быть не может, и которые в школе сформировать невозможно. Потому что возрастные особенности детского мышления — конкретно-образного и конкретно-действенного — противоречат этой задаче. Даже в вузе методическое решение подобных задач требует длительного времени. "Реформаторы" же предлагали детям не просто некоторые обобщения, а "набор *самых* общих понятий", т. е. обобщения, к которым наука шла столетиями.

Совершенно верна "оговорка": "надо избегать абстракций, которые не получают полного оправдания в рамках курса этой же школы" [там же, с. 98]. Но именно п о л н о г о оправдания новейших абстракций достичь в школьном курсе невозможно в принципе. Подчеркнём, — не логического оправдания, а психологического, понятного детям и принимаемого ими. Похоже, что математики, чья жизнь проходит в высоких абстракциях, абсолютно утрачивают способность понимать психологию восприятия этих абстракций учащимися.

Любопытно обоснование:

> "не вызывает сомнений (?) ... изложение математики, начинающееся с весьма общих понятий... *упрощает* её. Открывая в разнообразных частных фактах общую их основу, мы делаем изложение более кратким и, в конечном счёте, более простым и доходчивым" [там же].

Эта будто бы новая реформаторская идея на самом деле является старым преподавательским заблуждением. Приведём разъяснение знаменитого философа XIX в. Г. Спенсера (1861 г.):

> "Люди полагают, что их общие формулы, которые придумали они для выражения целых групп подробностей, формулы, упростившие им понятия соединением многих фактов в один, должны упрощать также и понятия для ребёнка. Они забыли, что обобщение просто только сравнительно с общей массой частных истин, которую они обнимают, что оно гораздо сложнее каждой из этих истин, взятых отдельно, что обобщение тогда только облегчает запоминание и помогает рассуждению, когда приобретены уже многие из этих истин, а для ума, не обладающего этими отдельными истинами, такое обобщение останется непременно тайной. Таким образом, смешивая эти два упрощения, преподаватели постоянно впадали в заблуждение и начинали дело с "первых принципов": приём хотя и незаметно, но существенным образом расходящийся с первоначальным правилом, которое говорит, что принципы проводятся через посредство примеров и должны, следовательно, идти от частного к общему — от конкретного к абстрактному" [8, с. 77].

Строгость. Вторая идея состоит в стремлении

> “к более строгому с логической стороны построению школьного курса математики” [1, с. 98].

Но формально строгое изложение всегда затрудняет понимание, потому что оно отдаляет учащегося от смысла. Пример — пресловутая “$\varepsilon - \delta$” — формализация понятия предела, которая заковывает в статичные рамки динамику движения и, тем самым вступает в неодолимое для новичка противоречие с интуитивным смыслом этого понятия. Вот где причина огромных педагогических трудностей преподавания начал дифференциального исчисления студентам и тем более школьникам, — в *противоречии строгого изложения с интуицией.* Результат — непонимание и отвращение к математике. И такой результат будет всегда.

Строгость, безусловно, должна присутствовать в школьной математике. Но *степень строгости выверяется и ограничивается понятностью.* Цель А. Н. Колмогорова — “соединить понятность изложения с его... логической безупречностью” — следует признать недостижимой и опасной иллюзией. Строгость искажает смысл, который должен быть понят учащимся прежде всего, а соединить в уме ребёнка “безупречную” строгость и понятность невозможно.

Аксиоматизация. Коснёмся некоторых частных идей. А. Н. Колмогоров освящает своим авторитетом старую ВТУ-идею:

> “излагать геометрию на основе ясно сформулированных определений и аксиом”[4] [1, с. 77].

Эта идея нарушает генетический закон педагогики, согласно которому правильное обучение должно повторять в общих чертах исторический путь получения данного знания.

Аксиоматика любой теории всегда появляется в конце её исторического становления. Начинать обучение с аксиоматики значит ставить процесс обучения “с ног на голову” и делать его заведомо непонимаемым. В сущности, это издевательство над детьми, — знаете ли вы такого ребёнка, который мыслит аксиоматически? Может, учёные математики знают таких вундеркиндов-уродов?

Множества точек. А вот, может быть, оригинальная идея А. Н. Колмогорова:

> “в современном школьном курсе геометрические фигуры должны (?) восприниматься (детьми?! — *И.К.*), как множества точек” [там же, с. 92].

Т.е. треугольник это совсем не образ, который в и д и т ребёнок, это — “множество точек”. Умный ребёнок может здесь задать вопрос: “А что такое точка? Учитель! Определите, пожалуйста, строго!” А другой умный мальчик может спросить: “А человек, это что? — множество молекул?”

Классы. Ещё один “лёгкий” пример.

> “Направление” должно (?) восприниматься, “как класс сонаправленных лучей, вектор, как класс эквивалентных пар точек (класс пар из совпадающих элементов — нулевой вектор) и т. д.” [там же, с. 97].

Понятно? *“Нечто”, поставленное в единственном числе, отождествляется с другим “нечто” во множественном числе* (?!). Лингвистическое и смысловое уродство, к которому нередко приводит строгая формализация и которое не замечается профессионально ориентированным,

[4]Эту идею выдвигал перед учителями в 1935 г. Н. Ф. Четверухин. В 1959 г. её реанимировали и развили И. Н. Бронштейн и А. М. Лопшиц: “необходимо знакомить школьников с сущностью аксиоматического метода в современной науке... при преподавании не только геометрии, но и алгебры” [1, с. 26, 28].

"извращённым" (В. И. Арнольд) математическим мышлением. Но на которое резко реагирует нормальное, здоровое мышление ребёнка, категорически отказываясь его принимать.

И здесь не случайная оплошность, здесь проявила себя закономерность, давно понятая глубокими математиками:

> "Логика приводит часто к *уродствам*" (А.Пуанкаре) [9, с. 357].

Соответствие с "требованиями" или "завиральность"? И носитель всех этих идей совершенно искренне верил, что он приводит школьный курс математики "в соответствие с современными требованиями" [1, с. 72]. Верил, что "жизнь требовала", чтобы дети воспринимали треугольник как "множество точек", а вектор как "класс эквивалентных пар точек" (???).

Здесь уместно привести наблюдение крупного современного математика, финна Ральфа Неванлинны, который, оценивая в 1966 г. международных модернизаторов, отмечал "*узость* мысли", которую "проявляют иной раз те, кто сам внёс существенный вклад в современную математику" [там же, с. 234].

Этот парадокс объясняется спецификой профессионального математического мышления — абстрактно-формализованного, аксиоматически организованного, строго логичного. Когда это специфическое мышление прикасается к проблемам жизни, всю сложную противоречивость которых не может охватить (отчасти и потому, что не знает содержательно этих проблем), оно порождает обессмысленную схоластику. При этом за новые аксиомы и постулаты учёные-математики невольно принимают банальные штампы, "летающие в воздухе". И опять же невольно, бессознательно переносят в новую область стандарты своей науки. Эту опасность сознают и сами математики.

> Академик С. П. Новиков: "выдающиеся люди нередко имеют *завиральные* идеи" [10, с. 187]. Ученик А. Н. Колмогорова В. И. Арнольд оценивает его педагогические идеи аналогично: "он хотел бурбакизировать школьную математику. ... когда он мне стал рассказывать свою идею, это был такой *вздор*, про который мне было совершенно очевидно, что пропускать его к школьникам нельзя" [11, с. 3].

Приведённые выше суждения, равно как и многие приведённые на протяжении всего нашего исследования факты и оценки, могут шокировать специалистов-математиков, академиков, как задевающие "честь". И здесь надо со всей определённостью сказать, что эта **боязнь "посмотреть правде в глаза" и назвать вещи своими именами, боязнь ИСТИНЫ является залогом сохранения ЛЖИ и гарантом поддержания деградации нашего образования**[5].

5. Отношение учителей к новым программам

Ещё раз "обсуждаем". Проекты новых программ были опубликованы в 1–2-м номерах журнала "Математика в школе" за 1967 г. В следующих номерах под вывеской "Обсуждаем... " журнал стал публиковать отклики. Т.е. все вместе, дружно обсуждаем и поддерживаем, — такое впечатление стремились создать "реформаторы", руководившие обсуждением. Как и прежде, при обсуждении предыдущих новых программ, некоторые отклики начинались обобщённо-бессмысленными утверждениями, ничем не обоснованными.

> "Проект . . . представляет собой важный шаг (?) в направлении усовершенствования и модернизации среднего математического образования, ... имеет выгодную (?) внешнюю форму, ... отражает (?) тщательный отбор учебного материала" [7 (1967, № 4), с.

[5]Такая тенденция заметна в книге [12], в которой наши академики, среди которых есть ученики А. Н. Колмогорова и авторы ВТУ-учебников, очень осторожно касаются реформы-70 ("неудачным (?)... был сам замысел реформы", а также с. 53–56). Название книги ("Образование, которое мы *можем* потерять") показывает, что, закрывая глаза на подлинные результаты реформы-70 и их причины, они не могут признать очевидной всем ПРАВДЫ, — признать, что образование уже *потеряно*! А точнее *разрушено*.

> 25–26)].[6] Из других отзывов: “Проект... в основе (?) своей заслуживает (?) одобрения. ... Сделан крупный (?) шаг вперёд в направлении сближения школы с математической наукой” [там же, с. 27, 29].

И после таких введений приводятся примеры “досадных недочётов” и “весьма и весьма существенных недостатков”, которые, в сущности, зачёркивают предыдущие “одобрения” и сам проект. Как и при обсуждении предыдущего “нового” проекта 1960 г., отмечалась огромная перегрузка программ, “необоснованная последовательность прохождения тем”, разрывы органически связанных тем, “калейдоскопичность”, разрыв изучения тригонометрии в IX и X классах. Осуждалось упорно навязываемое “реформаторами” изучение десятичных дробей до обыкновенных, игнорирование возрастных особенностей детей, в частности перевод изучения отрицательных чисел и модуля из пятого класса в четвёртый, перенос темы “Показательная и логарифмическая функция” из девятого в восьмой класс, где она “является трудной”.

Сейчас хочется привести почти полностью один замечательный отзыв, который показывает всю легкомысленно преступную безответственность “реформаторов”.

> Учитель **П. Е. Непомнящий** (Ленинград): “В начале 50-х годов школа имела стабильные учебные планы, программы и вполне хорошие учебники и задачники. Учащиеся получали достаточное математическое развитие, хорошие знания, навыки и умения, которые необходимы для их подготовки к практической деятельности, для изучения смежных дисциплин и продолжения образования в высшей школе. ... Тогда на математику отводилось по 7 часов в неделю в I–VI классах и по 6 часов в неделю в VII–X классах.
>
> Но вот, *начиная с 1956 г.,* школы переходят на новый учебный план, по которому сокращается число часов на математику с I по VI класс до 6 часов в неделю, а в VIII классе до 5 часов. Это привело к тому, что на уроках арифметики учащиеся меньше решают задачи, да и *программа ориентирует на решение только простых задач*, так как более трудные задачи будут решаться средствами алгебры, но каждому учителю известно, что если учащиеся не научены мыслить, то они и простую задачу не смогут решить алгебраическим путём. В результате *знания учащихся начинают резко* (!) *снижаться.*
>
> Сейчас в девятые классы приходят учащиеся со слабой подготовкой по математике (они не имеют достаточных навыков в тождественных преобразованиях, не умеют логически мыслить, не умеют решать простые геометрические задачи). В силу этого слабые знания по математике имеют и учащиеся, оканчивающие десять классов средней школы.
>
> Составители новых программ нашли “выход” из этого положения. Они упразднили IV класс (учащиеся будут изучать в IV классе программу V), но известно, что V класс (при наличии IV) был всегда трудным для учащихся по математике. Как же такое можно делать? Ссылки на какой-то опыт не солидны. Чудес ведь не бывает. ...
>
> Разве не ясно, что всякое увеличение программного материала без увеличения времени на обучение может привести лишь к ухудшению знаний предмета и перегрузке учащихся? В программу IX и X классов вводятся элементы высшей математики и в таком обилии, что в лучшем случае учащиеся этих классов будут получать примитивное представление обо всём и ни о чём. *Программа насыщается большим материалом за счёт уменьшения времени на отработку навыков и умений. Какие же это будут знания?*

[6]Этот отзыв пришёл из Могилёва, от кафедры методики математики, которой заведовал известный нам “реформатор” А. А. Столяр [2].

> Весьма сомнительны и факультативные занятия, которые сами учащиеся будут выбирать. Наивно думать, что многие учащиеся сознательно пойдут на такие занятия. Разве можно на это рассчитывать? ... Школы, видимо, в вуз готовить не будут. Академик А. Н. Колмогоров пишет в связи с этим: "Тому, кто надумает (?) поступить в вуз с большим конкурсом, естественно, придётся дополнительно трудиться, совершенствуя свои навыки в решении задач" (с. 28) ... Это приведёт к чудовищной перегрузке учащихся.
>
> Кроме всего прочего, ... большая армия учителей вынуждена будет заново учиться и переучиваться. Нельзя опрометчиво вводить эти программы... возникнут... вопросы:
>
> 1) Осилят ли учащиеся школы значительно более сложный материал, если сравнительно более простой и лёгкий материал теперь в школе слабо усваивается?
>
> 2) Кто будет учить по новым программам математике учащихся IX–X классов? ... Планируемые в крупных городах курсы для учителей вряд ли справятся с этим. Что же говорить о школах небольших городов и сельской местности? А таких ведь школ большинство.
>
> 3) Зачем изучать в школах такой материал, который в вузах будет изучаться заново, а на производстве не нужен?
>
> 4) Кто же будет готовить учащихся в вузы? Программа настолько перегружена, что учащиеся не приобретут никаких необходимых *навыков* в решении задач и упражнений для сдачи вступительных экзаменов и успешного обучения в вузах" [там же, с. 29].

Естественно возникает вопрос: неужели профессора-реформаторы не понимали того, что понимал рядовой учитель?

6. 1968 г. Коренное изменение программ

Первым делом нового Министерства стало утверждение в 1968 г. новых школьных программ. 1968 г. — знаменательный год для всех наших ВТУ-реформаторов XX века. В новых программах воплотились в с е их излюбленные идеи. Познакомимся с этими программами и их обоснованием по первоисточнику, по статье А. Н. Колмогорова [13].

Арифметика IV класс. К теме "Натуральные числа" добавились *буквенная* запись законов арифметических действий, преобразования "не слишком сложных" алгебраических выражений, решение уравнений. Тема "Обыкновенные дроби" заменена темой "Десятичные дроби", т. е. разрушалась правильная методика обучения дробям. Вот где исток результата, который мы пожинаем сегодня, — многие студенты не могут складывать простые дроби, и их приходится учить этому в вузе. Разрушен фундамент математического образования — правильное обучение арифметике.

V класс. А что нового в курсе арифметики V класса? Раннее введение отрицательных чисел: Вопрос, — будут ли поняты столь рано введённые и странные для детей отрицательные числа, — даже не возникает. Главное — "откладывать нельзя". Результат мы видим сегодня, — многие студенты не умеют оперировать даже с целыми отрицательными числами.

Далее, к теме "Действия с обыкновенными дробями" добавляются их десятичные приближения. Обыкновенные дроби смешиваются с десятичными, а ведь для детей это *качественно* различные математические объекты, их смешение делает невозможным понимание ни того ни другого, делает невозможным выработку вычислительных навыков.

Добавим, —

> "бывший курс арифметики 5–6 классов предлагалось заменить курсом математики, в котором учебный материал начинался с изучения элементов теории множеств, а

> арифметический материал был существенно “пропитан” алгебраической и геометрической пропедевтикой” [13, с. 197].

Смесь. Итак, что же получилось? Цельный предмет “Арифметика” превратился в винегретный комплекс “Элементы арифметики, элементы алгебры, элементы геометрии, элементы теории множеств”. Смешались разнородные предметы, что сделало учебную пищу неудобоваримой для любого ученика, а тем более для младшеклассника. Смешались предметы, требующие разных качеств мышления: арифметика — конкретно-действенного, алгебра — символьно-действенного, геометрия — наглядно-образного, элементы теории множеств — схоластического.

Педагогический порок такого волюнтаристского конструирования учебного курса заключается в том, что нарушается *классический принцип системности обучения*. Ингредиенты мешают друг другу и даже отрицают друг друга. Выстроить их в органически взаимосвязанную во всех своих частях систему невозможно в принципе. Тем более невозможно сформировать систему знаний в уме ученика, там остаются обрывки знаний. Что мы, учителя и преподаватели вузов, с отчаянием наблюдаем сегодня. Многие студенты стали не обучаемы!

Алгебра VIII класс. Сюда перенесён весь материал, который прежде, “по Киселёву” изучался в старшем, IX классе, — “Прогрессии. Дробные показатели степени. Показательная и логарифмическая функции”. Введение дробных показателей, которые прежде связывались со степенной функцией, теперь привязывалось к более сложной, показательной. Т. е. опять была разрушена выверенная методика.

Как признаётся сам автор, учителя “бурно” выражали “сомнения”. Сомнения никогда не выражаются “бурно”, они выражаются осторожно, с пониманием сложности проблем жизни. Бурно выражается возмущение, протест. Учителя помнили, что перенос темы “Дробные показатели” уже был апробирован программой 1954 г. и вызвал большие затруднения в преподавании. Учителя и методисты понимали опасность, предупреждали, возмущались, сопротивлялись. Но их мнением, как всегда пренебрегли. Почему?

Потому что учителя противоречили “желаниям членов комиссии”. А главное, излюбленное желание всех ВТУ-реформаторов XX века — “ввести математический анализ в школу”. Для этого им нужно было освободить максимально много места в программе старших классов. Вот они и вытолкали в с ю алгебру из IX и X классов и перенесли в изуродованном, ужатом виде в младшие классы. Попутно “пронизав” её высоконаучными и крайне абстрактными идеями множества и соответствия.

В IX и X классах вместо курса “Алгебра и элементарные функции” появился новый конгломератный предмет **“Алгебра и начала анализа”**. Название неправильное, правильнее было бы назвать его “Начала анализа и тригонометрия”, ибо от алгебры осталась только одна коротенькая двадцатистраничная тема “Системы уравнений и неравенств”, а тригонометрия заняла четверть книги [14] (70 страниц из 300), в которой она “интегрировалась” с анализом. В сущности, в IX и X классы был перенесён из высшей школы упрощённый двухсеместровый курс анализа — пределы, производные с приложениями, неопределённые и определённые интегралы, дифференциальные уравнения. Из высшей школы этот курс, разумеется, не мог быть “изгнан”. Зачем же тогда нужно было дублировать его в средней школе? Абсурд.

И какой результат? Его обнаруживают преподаватели высшей школы — студенты-первокурсники не знают из этого предмета практически н и ч е г о. Лишь некоторые смутно припоминают несколько формул производных и интегралов, совершенно не понимая, что такое производная и что такое интеграл. А из тригонометрии, входящей в этот курс, не знают даже простейших формул.

Геометрия.

> “Настоящий (?) логически (аксиоматически. — *И.К.*) построенный курс планиметрии предполагается начать в VI классе” [13, с. 77].

Т.е. на год раньше (киселёвская “Планиметрия” была рассчитана на VII–IX классы).

Казалось бы, уж здесь-то не может быть нарушена цельность курса, традиционно изучавшего статичные геометрические фигуры и их свойства. Ан нет. Со статикой “проинтегрировалась” высоконаучная динамика — геометрические преобразования плоскости. Добавилась и абстрактная теория множеств, — геометрические фигуры перестали быть фигурами, а стали множествами точек. В VIII класс внедрились векторы, причём в новой концепции вектор перестал быть вектором (направленным отрезком, стрелочкой), а стал параллельным переносом. Представьте, какая сшибка произошла в умах детей, — статичный образ стрелочки им предлагалось связать с динамикой движения-“переноса”.

Курс планиметрии перестал быть планиметрией (землемерие), а стал курсом абстрактных преобразований точек плоскости (так бы и назвали!). И это сделано после того, как реальный опыт в массовой школе доказал недопустимость этой подмены (учебник Болтянского и Яглома, построенный на идее геометрических преобразований, был вышвырнут из школы в 1959 г.). Более того, пропедевтику этих самых “преобразований” теперь перевели в V класс, в арифметику.

Классическая киселёвская система изложения планиметрии вырабатывала у детей навык последовательных рассуждений, — рассуждений не абстрактных, а опиравшихся на наглядность и связанных с действиями (“геометрия — зримая мысль”, по выражению древних греков). Она учитывала возрастные особенности мышления детей, сенсомоторного, органически связанного с эмоциями и действиями.

Колмогоров запретил детям делать естественные для них действия с фигурами, запретил выводить фигуры из плоскости, в частности накладывать их друг на друга и переворачивать. Запретил называть равными фигуры, которые они *видят* равными, и заставил называть их “конгруэнтными” (?! — какое уродливое новообразование!). Запрет мотивировался неопровержимо-научно: эти фигуры состоят из разных точек (элементов множества), а значит, не являются равными с точки зрения теории множеств.

А с точки зрения детей? В сознании детей они неопровержимо равны! Дети верят своим чувствам, а не научным доводам академиков. Опять жуткая сшибка и извращение нормального, здорового восприятия и мышления детей.

Итак, новая, реформированная планиметрия стала строиться на абстрактных формально-логических рассуждениях, опирающихся не на видимые образы и действия, а на невесть откуда взявшиеся аксиомы. Добавилось научное требование “*полной* строгости доказательств там, где они даются” [там же, с. 78]. Но полная строгость означает полную формализацию, т. е. полное отчуждение учащихся от смыслов.

> Знаменитый французский математик Р.Том, резко критикуя ВТУ-идеи модернизаторов, выразил эту мысль так: “Абсолютная строгость возможна только и благодаря отсутствию смысла. Но если надо выбирать между строгостью и смыслом, я, не колеблясь, выберу смысл” [1, с. 270].

“Реформаторы” мотивировали необходимость повышения строгости заботой о логическом развитии детей. Ещё Г. М. Фихтенгольц в 1936 г. сетовал:

> “Преподаватели... не проявляют к строгости и логической полноте рассуждений должной требовательности, и поэтому (?) наши школьники не достигают надлежащего понимания изучаемого материала и не научаются рассуждать” [15, с. 61].

Т.е. утверждал, что строгость — путь к пониманию и к умению рассуждать. Ни то, ни другое не верно. Наоборот, строгость блокирует понимание, тормозит и, в конце концов, атрофирует способность осмысленного рассуждения, что следует из объективных законов познания, и что подтвердила жизнь. Все мы, преподаватели высшей школы, ужасаемся сегодня полной неспособности студентов вникать в смыслы и следить за логикой. Так что и здесь жизнь проявила истинную цель реформы.

Курс стереометрии IX–X классов тоже стал строго аксиоматическим и проинтегрировался с векторной алгеброй, причём в её самом современном представлении, — с аксиоматическим векторным пространством.

> "В VII–VIII классах на уроках математики и физики учащиеся привыкнут к обращению с векторами (переносами. — *И.К.*)... Это позволит в начале IX класса явно сформулировать *аксиомы* векторного пространства, пригодные в любом числе измерений"... Систематическому же построению стереометрии посвящается весь курс IX класса" [1, с. 71].

Опять абсолютное непонимание психологии ученика, — для детей переход от трёхмерного, видимого, "эвклидова" геометрического пространства к абстрактному, четырёхмерному непосилен и уродливо-странен. Четырёхмерное пространство не имеет в сознании детей никакого образа. Переход к нему не имеет никаких мотивов и оправданий. Использование слова "пространство" провоцирует сшибку привычных для ребёнка образов реального мира, в котором живут и взаимодействуют интересные геометрические фигуры (прямые, плоскости, треугольники, пирамиды, шары и пр.) с навязываемым ему каким-то потусторонним "энмерным пространством", которое поэтому вызывает инстинктивное отторжение. И не помогут никакие аксиомы. И не только не помогут, а своей безжизненной схоластичностью усилят отвращение.

Итак, через все предметы и все годы обучения "реформаторами" проведены во всех программах одни и те же ВТУ-идеи: логическая систематика, формализация понятий, формальная строгость рассуждений, интегрированность с самыми абстрактными понятиями и теориями современной математики, смешение разнородных тем, пренебрежение классической методикой и возрастными особенностями детей. И по всем предметам получены в итоге одни и те же результаты.

Все принципы и идеи, о которых говорилось выше, принадлежат отнюдь не А. Н. Колмогорову. Хотя, судя по его тексту, он, по-видимому, идентифицировал себя со всеми этими идеями. На самом же деле, ему лишь доверена была честь сообщить "широкой публике" об успешной их реализации.

7. ВТУ-учебники

После утверждения программы А. Н. Колмогоров сразу же взялся за изготовление новых ВТУ-учебников и создал "авторские коллективы" из себя, Б. Е. Вейца, И. Т. Демидова, В. М. Клопского, М. И. Ягодовского, А. Ф. Семеновича, Ф. Ф. Нагибина, Р. С. Черкасова, Н. Я. Виленкина, А. И. Маркушевича. В этом списке нет тех опытных методистов и учителей, учебники которых использовались школой в 1950-х гг. или были премированы в результате конкурса 1960—1965 г. В нём только "свои люди".

Спрашивается, какова же могла быть разумная цель конкурса 1965 г., если через три года "реформаторы" просто наплевали на его результаты? Этот факт наводит на мысль, что в начале 1960-х гг. они ещё не владели всей полнотой власти, которую получили в 1966 г. после создания МП СССР. С этого момента их действия быстры, решительны и предельно эффективны.

Вот вехи: 1967 г. — А. Н. Колмогоров становится Председателем УМС МП СССР и, в сущности, единоличным министерским идеологом реформы (математической); 1968 г. — утверждает новую программу, "коренным" образом изменив старую; 1969 г. — изготавливает новые учебники (за один (?!) год); 1970 г. — обязывает (разумеется, именем Министерства просвещения СССР) все школы страны учить детей математике по своей программе и по своим учебникам, утверждённым "в основном окончательно" [1, с. 69].

Почему такая спешка? А ведь в том же 1969 г. А. Н. Колмогоров заявлял, что "работа распланирована на ряд лет и ведётся без излишней спешки" [там же, с. 72]. И далее нечто противоположное:

> "Срочная подготовка учебников для девятых классов вызвана тем, что при последовательном переходе на новые программы он закончился бы через много лет" [там же, с. 75].

Оцените логику и её содержательность. Как говорится, куй железо, пока горячо.

Создать учебник за один год невозможно. Невозможно и за десять лет. Учебники создаются преемственным трудом нескольких поколений педагогов и венчаются Киселёвым. За год можно лишь "изложить" в книгах программный материал. Да и то коллективной работой многих специалистов. Вот и появились "коллективы авторов под редакцией" какого-нибудь обязательно титулованного профессора или академика. В книге "Алгебра и начала анализа" [14] аж шесть авторов: А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Б. Е. Вейц, О. С. Ивашов-Мусатов, Б. М. Ивлев, С. И. Шварцбурд.

Характерным для всех новых учебников стал резко возросший объём. К примеру, если взять учебник [14], составленный под редакцией А. Н. Колмогорова и сравнить постранично объёмы нового и старого материала, обнаружим, что нового в 2,5 раза больше, т. е. объём содержания возрос в 3,5 раза. Если же сравнить число страниц (334) в этом учебнике для 9–10 классов с числом страниц (224) в учебнике "Алгебра" Киселёва для 8–10 классов, изданном в 1957 г., получится, что в первом учебнике приходится около 167 страниц на год, во втором 72 страницы. Листовой объём возрос в 2,3 раза.

Аналогичная ситуация с другими реформаторскими учебниками. В учебнике Ю. Н. Макарычева "Алгебра-9", изданном в 1990 г., 223 страницы. В учебнике Н. Я. Виленкина "Математика-6", изданном в 2006 г., 286 страниц.

Отношение учителей к новым учебникам. Педагогическую безграмотность новых научных учебников понимали все учителя, но остановить внедрение были не в силах. Вспоминает новочеркасский учитель В. К. Совайленко:

> "25.08.77 г. проходило заседание УМС МП СССР, на котором академик А. Н. Колмогоров анализировал учебники математики с 4-го по 10-й класс, и рассмотрение каждого учебника он заканчивал фразой: "После некоторой корректировки это будет прекрасный учебник. И если вы правильно понимаете этот вопрос, то вы одобрите этот учебник". Случайно присутствовавший на заседании учитель из Казани с сожалением сказал рядом сидящим: "Это же надо! Гений в математике — профан в педагогике. Он не понимает, что это не учебники, а *уроды*, и он их хвалит". В прениях выступил московский учитель Вейцман. Он сказал: "Здесь так много известных учёных, методистов, авторов учебников, что мне, школьному учителю, неудобно вас поучать, поэтому я прочитаю из действующего учебника геометрии определение многогранника". А. Н. Колмогоров, выслушав определение, сказал: "Верно, всё верно!" Учитель Вейцман ему ответил: "В научном отношении всё верно, а в педагогическом отношении — вопиющая безграмотность. Это определение... занимает полстраницы... , в то время как в учебнике А. П. Киселёва это определение дано для выпуклого многогранника и занимает менее одной строки. Это и научно, и педагогически грамотно. В школьном учебнике знания должны быть научно и педагогически правильно представлены, и непременно в органическом единстве"... О том же говорили другие учителя и выступающие. Подводя итоги выступлений, А. Н. Колмогоров сказал: "К сожалению, как и прежде, продолжалось ненужное критиканство, вместо делового разговора. Вы меня не поддержали, но это не имеет значения, т. к. я договорился с министром Прокофьевым, и он меня полностью поддерживает""[7].

[7]Это выдержка из письма учителя председателю ФЭС РФ по математике Г. В. Дорофееву от 25.09.94 г.

В своей книге В. К. Совайленко уточняет и дополняет картину:

> “В заключение заседания УМС А. Н. Колмогоров заявил: “Хотя вы меня не поддержали, но это не имеет значения. Будет так, как я сказал, и министр Прокофьев обещал меня поддержать”. Посыпались вопросы возмущения: “Если уже всё решено, тогда зачем нас собирали?” На это А. Н. Колмогоров ответил: “Я надеялся, что, может быть, наступит у членов УМСа осознание правильности моих действий, но, к сожалению, этого не произошло”. Здесь же, в кулуарах члены УМСа с возмущением говорили: «Два высокопоставленных педагогически непрофессиональных руководителя губят систему образования страны, и мы ничего изменить не можем»” [15, с. 97].

8. Стабилизация качества знаний перед реформой

После изменения программы в 1960 г. “реформаторы” занялись идеологической и организационной подготовкой “коренной” реформы и не трогали школу. Десятилетие 1960-х гг. проходит для школы относительно стабильно, что позволяет учителям как-то приспособиться к новым программам и учебникам и, не порывая с классической методикой, удерживать допустимый уровень математических знаний учащихся. **Качество-2 продолжает снижаться и к концу 1960-х гг. опускается до 50%**:

> В 1969 г. в МГПИ “на письменной работе по математике было отсеяно около половины поступающих” [7 (1971, № 2), с. 61]. Такие же результаты в МГУ и в других, в том числе нестоличных вузах.

Качественный анализ недостатков знаний абитуриентов сделан в 1968 г. преподавателями МГПИ М. Д. Кошкиной и М. М. Чернецовым. Отмечаются плохие знания геометрии (и особенно, как ни странно, планиметрии), тригонометрии (незнание формул, неумение преобразовывать тригонометрические выражения), основ анализа (незнание общих свойств функций, неумение исследовать функцию по её производной, найти максимум и минимум), незнание свойств показательной и логарифмической функций. Общий вывод — “формальное усвоение теоретических положений”, непонимание сути определений (в частности общего определения функции), низкая логическая культура (“грубые логические ошибки”) [7 (1969, № 2), с. 30].

> В 1971 г. преподаватели МГПИ В. И. Крупич и Е. А. Щегольков подводят итоги знаний абитуриентов-1970, выявленные на устном экзамене: “Не все абитуриенты давали чёткие определения *тригонометрических* функций, длины окружности, площади круга,... Недостаточно усвоили понятия иррационального числа... Особенно заметно у *подавляющей* части абитуриентов недостаточно глубокое понимание *смысла* понятия *функции*. Многие с трудом приводили примеры функциональных зависимостей, испытывали затруднения при установлении свойств функций... И, наконец, о понятии *предела*. Оно усвоено *в большинстве* случаев поверхностно, а то и вовсе не усвоено; то же относится и к приложениям предела” [131 (1971, № 2), с. 67]. Забавно, что после этого, завершая свой обзор, авторы утверждают: “Уровень знаний абитуриентов, окончивших школу в 1970 г., был достаточно (?) высоким” [там же].

Итак, видим, что содержательные оценки вузовских преподавателей разных вузов идентичны на протяжении всех 1960-х годов. Снижение качества знаний отмечается в тех разделах, куда в 1960 г. вторглись “реформаторы” (геометрия, тригонометрия, функции). Новые разделы, которые они добавили в программу (пределы, производная, исследование функций) совершенно не усваиваются учащимися. Ухудшение знаний планиметрии объясняется заменой учебника Киселёва (его “Стереометрия” продолжала учить детей).

Вывод. В 1960-х гг. продолжался процесс падения качества знаний, только он *замедлился.* **Качество-1 оставалось на уровне 20 %, а качество-2 к середине 1960-х гг. понизилось с 60 % до примерно 50 % и далее стабилизировалось.**

Следует отметить новый симптом деградации, отмеченный преподавателями МГПИ:

> "Самым неприятным фактом является получение неудовлетворительной оценки на первом же экзамене по математике абитуриентами, которые окончили школу с медалью. Из 81 медалиста это случилось с 12 (15%. — *И.К.*). Среди них 5 выпускников московских школ. И только 15 медалистов (19%. — *И.К.*) получили на письменном и устном экзаменах по математике "5"" [там же].

Т.е. *81% медалистов были "липовыми", а 15% медалистов были на самом деле "двоечниками".* Это ещё одно интересное отдалённое следствие "перестройки" 1956 – 1960 гг. Эти же проценты (с небольшими колебаниями) останутся неизменными и через 20 лет.

Вот мы и подошли к 1970 г., к конечной точке многодесятилетних усилий наших "реформаторов". Запланированные результаты этих усилий, закрепление результатов рассмотрим в следующей статье.

Литература

[1] На путях обновления школьного курса математики: Сборник статей и материалов / сост.: Маркушевич А.И., Маслова Г.Г, Черкасов Р.С.. — М.: Просвещение, 1978.

[2] Костенко И.П. 1956-1965 гг. Подготовка второй "коренной" реформы советской школы: "перестройка" программ и "научное" обоснование ложных идей (статья четвёртая) // Математическое образование. - 2014. - № 2(70). - С. 2-17.

[3] Абрамов А.М. О положении с математическим образованием в средней школе (1978–2003). - М.: Фазис, 2003.

[4] Колягин Ю.М. Русская школа и математическое образование. Наша гордость и наша боль. - М.: Просвещение, 2001.

[5] История математического образования в СССР. - Киев: Наукова Думка, 1971. Коммунист. - 1982. - № 2.

[6] Коммунист. - 1982. - № 2.

[7] Математика в школе. - 1964. - № 6; 1967. - №№ 1, 4; 1969. - № 2; 1971. - № 2.

[8] Спенсер Г. Воспитание : умственное, нравственное и физическое. - СПб., 1910.

[9] Пуанкаре А. Математические определения и преподавание / Пуанкаре А. О науке. - М.: Наука, 1983.

[10] Новиков С.П. Математическое образование в России: есть ли перспективы? // Математика в образовании и воспитании. - М.: Фазис, 2000.

[11] Арнольд В.И. Нужна ли школе математика? Доклад на Всероссийской конференции "Математика и общество // Математическое образование на рубеже веков". - Дубна, 21 сентября 2000 г. - М.: МЦНМО, 2001.

[12] Образование, которое мы можем потерять: Сборник под общ. ред. акад. Садовничего В.А. - М.: МГУ, ИКИ, 2002.

[13] Колмогоров А.Н. Новое в школьной математике // На путях обновления школьного курса математики. - М.: Просвещение, 1978.

[14] Алгебра и начала анализа: учеб. пособие для 9 и 10 классов средней школы / под ред. А. Н. Колмогорова. - М.: Просвещение, 1985.

[15] Фихтенгольц Г.М. Математическая подготовка в средней школе // Высшая школа. - 1937. - № 2.

[16] Совайленко В.К. Образование, которое мы теряем. - Новочеркасск, 2004.

От редакции. В предыдущей (четвёртой) статье, опубликованной в нашем журнале, 2014 г., № 2(70), стр. 2-17, допущены следующие неточности:

1) Стр. 3, 16-я строка снизу. Напечатано: “[2, с. 8-9]”. Надо: “[12, с. 8-9]”;

2) Стр. 7, 19-я строка снизу. Напечатано: “[там же]”. Надо: “[3 (1980, № 3), с. 38]”;

3) Стр. 9, 8-я строка снизу. Напечатано: “[9, с. 7-8]”. Надо: “[12, с. 7-8]”;

4) Стр. 5, сноска 3, 3-я строка сверху. Напечатано “[131 (1996, №1), с. 2-3]”. Надо: “[3 (1996, №1), с. 2-3]”;

5) Стр. 5, сноска 3, 2-я строка снизу. Напечатано: “[157, с. 31]”. В списке литературы нет номера 157. Имеется в виду книга “Образование, которое мы можем потерять. - М.: МГУ, 2002.”

Приносим извинения читателям.

Костенко Игорь Петрович,
Ростовский государственный университет
путей сообщения (филиал в г. Краснодаре),
доцент, кандидат физ.-мат. наук.
E-mail:kost@kubannet.ru

Учащимся и учителям средней школы

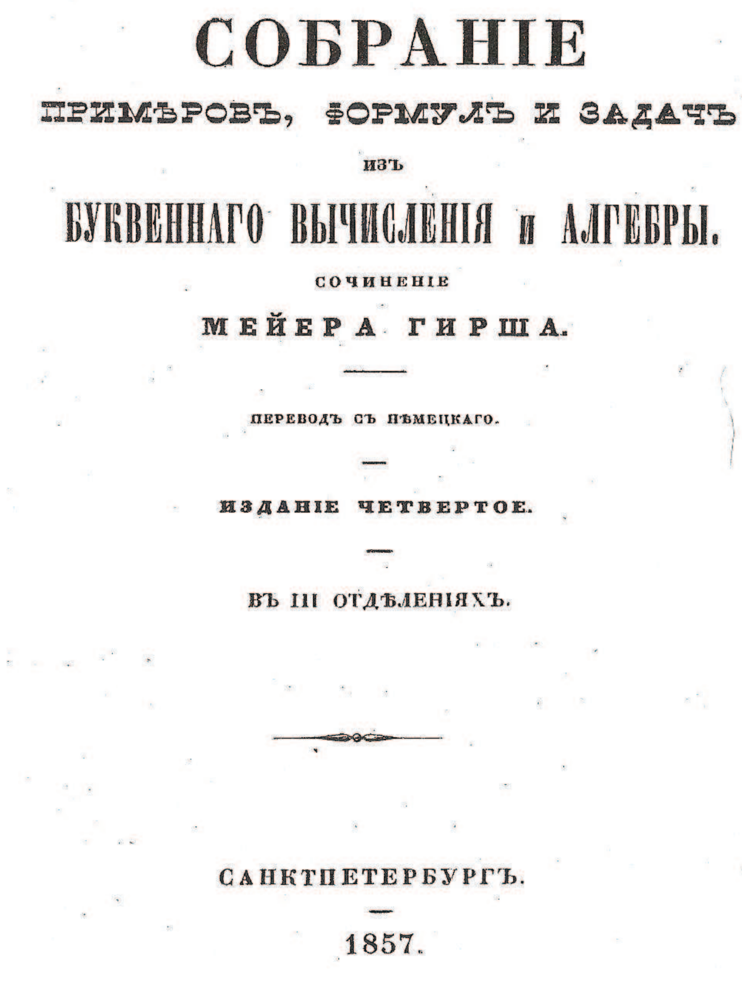
В старину решали деды...

В. Б. Дроздов

Подборка задач с ответами из старинных учебных пособий, изданных в России начиная с середины XIX века. Демонстрирует высокий уровень российского математического образования.

I. Буквенное вычисление и алгебра

У нас в руках сочинение Мейера Гирша — «Собрание примеров, формул и задач из буквенного вычисления и алгебры». Перевод с немецкого. Раритету полтора века — книга издана в 1857 году в Санкт-Петербурге.



СОБРАНІЕ

ПРИМѢРОВЪ, ФОРМУЛЪ И ЗАДАЧЪ

ИЗЪ

БУКВЕННАГО ВЫЧИСЛЕНІЯ И АЛГЕБРЫ.

СОЧИНЕНІЕ

МЕЙЕРА ГИРША.

ПЕРЕВОДЪ СЪ НѢМЕЦКАГО.

ИЗДАНІЕ ЧЕТВЕРТОЕ.

ВЪ III ОТДѢЛЕНІЯХЪ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

1857.

“Печатать позволил ценсоръ И. Лажечниковъ”.

Переводчик посвятил задачник «в знак искренней дружбы и признательности его превосходительству Виктору Яковлевичу Буняковскому, императорской академии наук господину ординарному академику и доктору в науках».

ЕГО ПРЕВОСХОДИТЕЛЬСТВУ

ВИКТОРУ ЯКОВЛЕВИЧУ

БУНЯКОВСКОМУ,

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ Г. ОРДИНАРНОМУ АКАДЕМИКУ

И ДОКТОРУ ВЪ НАУКАХЪ,

ВЪ ЗНАКЪ ИСКРЕННЕЙ ДРУЖБЫ И ПРИЗНАТЕЛЬНОСТИ

посвящаетъ ПЕРЕВОДЧИКЪ.

Книга имеет 303 страницы обычного формата, содержащих множество задач. Познакомимся с некоторыми из них, привлекшими внимание автора.

1. Решить уравнение $\dfrac{1+x}{1-x} = 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{2x}{1-x}$.

2. Доказать, что $\sqrt{\dfrac{9}{4} + 6x - 17x^2 - 28x^3 + 49x^4} = \frac{3}{2} + 2x - 7x^2$.

3. Доказать, что $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$.

4. Доказать, что $\sqrt{ac^2 + bd^2 + 2cd\sqrt{ab}} = c\sqrt{a} + d\sqrt{b}$.

5. Доказать, что $\sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$.

6. Доказать, что $(aa_1 + bb_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2 = (a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2)$.

7. Доказать, что

$$(aa_1 + bb_1 + cc_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2 + (ac_1 - ca_1)^2 + (bc_1 - cb_1)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2).$$

8. Доказать, что

$$(aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1)^2 + (ab_1 - ba_1 + cd_1 - dc_1)^2 + (ac_1 - bd_1 - ca_1 + db_1)^2 + (ad_1 + bc_1 - cb_1 - da_1)^2$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a_1^2 + b_1^2 + +c_1^2 + d_1^2).$$

9. Решить уравнение $x^4 - \dfrac{19}{4}x^3 + \dfrac{49}{8}x^2 - \dfrac{11}{4}x + \dfrac{3}{8} = 0$.

Ответ. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, 1, 3$.

10. Как выразится время, в течение которого бассейн наполнится посредством четырех отверстий, предполагая, что чрез первое он наполняется во время a, чрез второе в b, чрез третье в c, чрез четвертое в d?

Ответ. $\dfrac{abcd}{abc+abd+acd+bcd}$.

11. Найти два числа такие, чтобы сумма их равнялась a, а сумма пятых степеней их была равна b.

Ответ. Произведение p искомых чисел равно $\dfrac{1}{2}\left(a^2 \pm \sqrt{\dfrac{a^5+4b}{5a}}\right)$;

искомые же числа суть: $\dfrac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2-4p}\right)$,

12. Какие числа, будучи разделены на 8, дают в остатке 5, а будучи разделены на 11, дают в остатке 4.

Ответ. Числа вида $88n+37$.

13. Найти два числа такие, чтобы сумма квадратов их была также квадратное число.

Ответ. Если чрез p и q означим два произвольных числа, то одно из искомых чисел будет $p : 2 - q : 2$, а другое $2pq$.

14. Пусть a, b, c означают три рациональные числа; спрашивается какие рациональные величины для x и y обратят выражение $a^2x^2+bxy+cy^2$ в полный квадрат?

Ответ. $x = m^2 - cn^2, y = bn^2 - 2amn$.

15. Найти четыре квадрата такие, чтобы сумму их можно было разделить на двух множителей, из которых один равнялся бы сумме трех квадратов, а другой сумме двух квадратов?

Ответ. $(mm_1+mn_1)^2+(mn_1-nm_1)^2+(pm_1)^2+(pn_1)^2=(m^2+n^2+p^2)(m_1^2+n_1^2)$.

16. Найти такую геометрическую прогрессию, в которой сумма квадратов членов равнялась b, а сумма четвертых степеней оных равна c, а сумма членов равна a

Ответ. Знаменатель прогрессии $e = \dfrac{a^4b-b^3 \pm 2a\sqrt{(c-a^2b)(b^3-a^2c)}}{b^3a^4b-2a^2c}$.

Первый член $\dfrac{b(1+e)+a^2(1-e)}{2a}$. Посредством этих известных можно определить число членов и саму прогрессию.

17. Во сколько лет число жителей некоторого города увеличится в десять раз, если ежегодное увеличение составляет 3 души на 100.

Ответ. Почти в 78 лет.

18. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y=a, \\ x^3+y^3=b. \end{cases}$

Ответ. $x = \dfrac{a}{2} \pm \sqrt{\dfrac{4b-a^3}{12a}}, y = \dfrac{a}{2} \mp \sqrt{\dfrac{4b-a^3}{12a}}$.

19. Решить систему уравнений $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=a, \\ (x+y)(x^2+y^2)=b. \end{cases}$

Ответ. $x = \dfrac{\sqrt{2b-a} \pm \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{2b-a}}; x = \dfrac{\sqrt{2b-a} \mp \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{2b-a}}$.

20. Сколькими образами 19 различных шаров можно разделить на 4 кучки в 2, 4, 5 и 8 шаров?

Ответ. 523783260 образами.

II. Задача из мемуаров

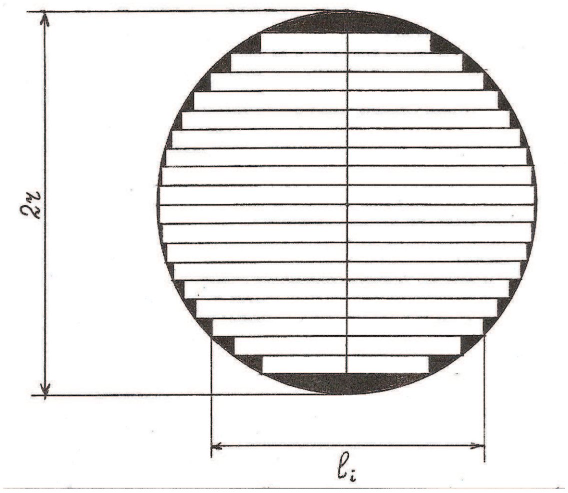
В мемуарной литературе, написанной людьми, профессионально не связанными с математикой, очень редко можно встретить запомнившуюся со школьных лет математическую задачу. И уж тем более ответ к ней.

Поэтому представляет интерес задача, упомянутая в конце жизни Антоном Ивановичем Деникиным в книге «Путь русского офицера», М., «Современник», 1991 на с. 28: *«Определить среднее арифметическое всех хорд круга»*. В сноске дан ответ: $\frac{\pi r}{2}$.

Эту задачу из выходившего тогда «Математического Журнала» будущий генерал, а в то время ученик пятого класса реального училища, решил один из класса и с тех пор стал в классе первым по математике. Таков был результат самостоятельных упорных занятий в предшествующие летние каникулы.

Как же решить предложенную задачу? Сразу заметим, что речь идет о вычислении среднего арифметического бесконечного числа величин. Значит придется переходить к пределу.

Разделим диаметр круга на n равных частей и через точки деления проведем параллельные хорды. См. рисунок. Из геометрических соображений ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2r}{n}\sum\limits_{i=1}^{n-1} li\right) = \pi r^2$, или $2r\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} li}{n} = \pi r^2$, откуда искомая величина $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1} li}{n} = \frac{\pi r}{2}$.



Понятно, что можно отождествить величины $n-1$ и n при $n \to \infty$.

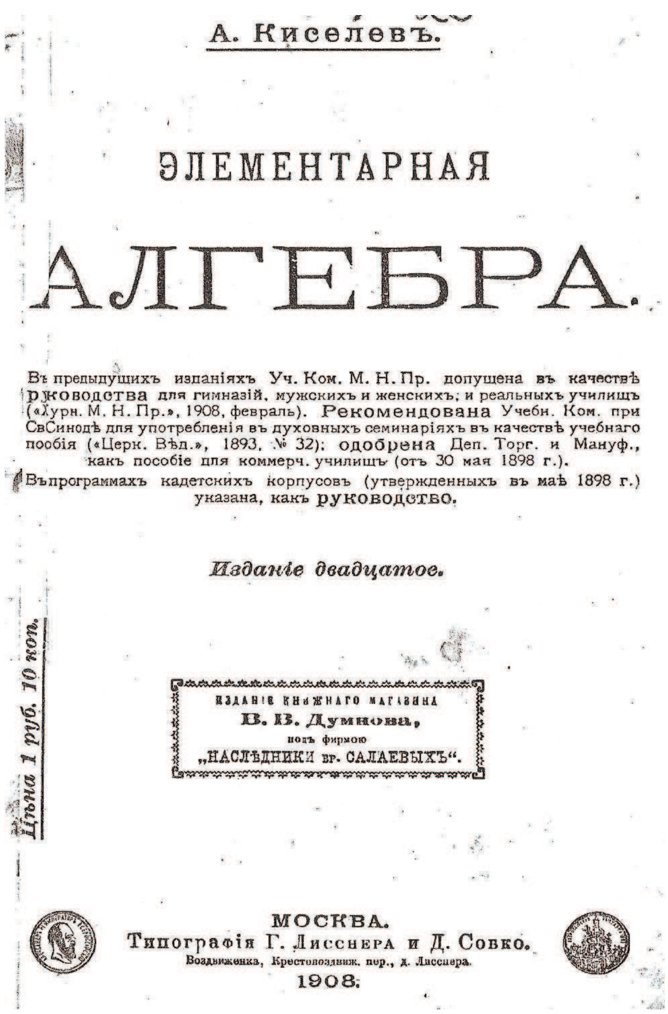
III. «Элементарная алгебра»

.

Учебники математики Андрея Петровича Киселева (1852–1940) составили целую эпоху в математическом образовании нескольких поколений граждан нашей страны. Превосходно написанные, они представляют интерес и в начале XXI века. Но если «Элементарная геометрия» в качестве книги для учителя была переиздана в 1980 году тиражом в 150 тысяч экземпляров, то другие учебники как бы остались в тени. А ведь они тоже обладают большими методическими достоинствами: строгость и одновременно доходчивость изложения материала; большая информационная насыщенность; хорошо подобранные примеры, иллюстрирующие теорию; ясный и лаконичный языковый стиль. Поэтому перелистаем вместе «Элементарную алгебру», двадцатое издание которой вышло в 1908 году. Учебник предназначен для гимназий, реальных училищ, духовных семинарий, коммерческих училищ и кадетских корпусов. Книга невелика — 347 страниц обычного формата, но содержит весьма много сведений по алгебре.

Остановимся, прежде всего, на наиболее трудных вопросах, а также на тех, которые остались за страницами современных учебников алгебры для массовой школы. Приводимый материал интересен для учителя сам по себе, а также может быть использован в преподавании.

Первый отдел «Предварительные понятия» играет роль «Введения».



А. Киселевъ.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ

АЛГЕБРА.

Въ предыдущихъ изданіяхъ Уч. Ком. М. Н. Пр. допущена въ качествѣ руководства для гимназій, мужскихъ и женскихъ; и реальныхъ училищъ («Журн. М. Н. Пр.», 1908, февраль). Рекомендована Учебн. Ком. при Св.Синодѣ для употребленія въ духовныхъ семинаріяхъ въ качествѣ учебнаго пособія («Церк. Вѣд.», 1893, № 32); одобрена Деп. Торг. и Мануф., какъ пособіе для коммерч. училищъ (отъ 30 мая 1898 г.).

Въ программахъ кадетскихъ корпусовъ (утвержденныхъ въ маѣ 1898 г.) указана, какъ руководство.

Изданіе двадцатое.

Цѣна 1 руб. 10 коп.

ИЗДАНІЕ КНИЖНАГО МАГАЗИНА
В. В. Думнова,
подъ фирмою
„НАСЛѢДНИКИ бр. САЛАЕВЫХЪ“.

МОСКВА.
Типографія Г. Лисснера и Д. Совко.
Воздвиженка, Крестовоздвиж. пер., д. Лисснера.
1908.

Во втором отделе «Первые четыре алгебраические действия» представляет интерес деление многочленов «углом». Изучается теорема Безу. Выводятся формулы:

$$x^m - a^m = (x-a)(x^{m-1} - +ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \cdots + a^{m-1});$$
$$x^m - a^m = (x+a)(x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \cdots + a^{m-1}) \text{ (при } m \text{ четном)};$$
$$x^m + a^m = (x+a)(x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \cdots + a^{m-1}) \text{ (при } m \text{ нечетном)}.$$

В третьем отделе «Уравнения первой степени» подробно рассмотрены линейные уравнения с одним неизвестным, а также системы линейных уравнений: двух с двумя неизвестными и трех с тремя. Хотя понятие определителя явно не вводится, автор подходит к нему вплотную при решении в общем виде указанных систем.

В четвертом отделе «Степени и корни» отметим теорему о квадрате многочлена и хорошо подобранные примеры на освобождение от иррациональности в знаменателе.

Наиболее интересен пятый отдел «Уравнения степени выше первой». Он содержит главу «Комплексные числа», которые более двадцати лет в школе не изучаются. А ведь без знакомства с комплексными числами даже среднее математическое образование трудно считать завершенным.

Показано применение комплексных чисел в действительной области, а именно с их помощью доказываются тождества:

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2,$$
$$(a^2 + b^2)(a_1^2 + b_1^2) = (aa_1 + bb_1)^2 + (a_1b - ab_1)^2.$$

Выводится формула «сложного» радикала:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Изучаются не только биквадратные ($ax^4 + bx^2 + c = 0$), трехчленные ($ax^{2n} + bx^n + c = 0$),двучленные ($ax^m + b = 0$) уравнения, но и возвратные ($ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$) уравнения четвертой степени, и даже более общие уравнения вида ($ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$), коэффициенты которых удовлетворяют пропорции $a : e = b^2 : d^2$.

Как решить последнее уравнение? Предоставим слово автору учебника: «В самом деле, из этой пропорции находим $e = \dfrac{ad^2}{b^2}$, и, следовательно, уравнение принимает вид: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \dfrac{ad^2}{b^2} = 0$.

Разделив все члены на x^2, можем уравнение представить так:

$$a\left(x^2 + \frac{d^2}{b^2x^2}\right) + b\left(x + \frac{d}{bx}\right) + c = 0.$$

Если положим, что $x + \dfrac{d}{bx} = y$, то $x^2 + \dfrac{d^2}{b^2x^2} = y^2 - \dfrac{2d}{b}$, и уравнение превращается в квадратное:

$$a\left(y^2 - \frac{2d}{b}\right) + by + c = 0.$$

Найдя y легко определим потом и x».

Дается общий метод решения системы двух уравнений, из которых каждое второй степени:

$$\left\{ \begin{array}{l} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + cy + f = 0, \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0. \end{array} \right.$$

«Умножим первое уравнение на c', а второе на c, и вычтем почленно одно из другого; тогда исключится y^2, и уравнение примет вид:

$$mx^2 + nxy + px + qy + r = 0,$$

или

$$mx^2 + (nx + q)y + px + r = 0.$$

Откуда $y = -\dfrac{mx^2 + px + r}{nx + q}$.

Вставив это значение в одно из данных уравнений и освободив полученные уравнения от знаменателей, будем иметь в окончательном результате полное уравнение 4-й степени, которое в общем виде элементарными способами не решается.»

Шестой отдел называется «Неравенства и неопределенные уравнения». Неравенства рассматриваются линейные и квадратные, а неопределенные уравнения имеют вид

$$ax + bx = c,$$

где a, b, c, x, y — целые числа. Изложение начинается с естественно поставленной задачи: «Сколько нужно взять монет в 2 коп и в 3 коп, чтобы составилась сумма 25 коп? В конце отдела показывается, что система диофантовых уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{array} \right.$$

сводится к двукратному решению одного уравнения с двумя неизвестными.

Маленький седьмой отдел «Обобщение понятия о показателе» посвящен введению дробного и иррационального показателя степени.

Содержание восьмого отдела «Прогрессии и логарифмы» отражено в его заглавии. Весьма подробно рассмотрены сложные проценты в силу их важности в банковских расчетах.

Завершается книга девятым отделом «Дополнения».

Названия его глав:

I. Соединения.

II. Бином Ньютона.

III. Одно из применений бинома Ньютона.

IV. Непрерывные дроби.

V.Некоторые приложения непрерывных дробей.

VI. Наибольшее и наименьшее значение трехчлена второй степени.

В третьей главе показано применение бинома Ньютона к нахождению суммы одинаковых степеней членов арифметической прогрессии, в частности выведены формулы:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},\\
S_2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\\
S_3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = S_1^2.
\end{aligned}
$$

В пятой главе с помощью непрерывных дробей находятся приближения числа π Архимеда $\left(\dfrac{22}{7}\right)$ и Меция $\left(\dfrac{355}{113}\right)$, находятся решения неопределенных уравнений из шестого отдела, и даже вычисляются логарифмы.

Наконец, познакомимся с задачами, рассыпанными по страницам учебника.

Разделить многочлены:

1. $(6x^4 - 19x^3 + 5x^2 + 17x - 4) : (3x^2 - 5x + 1)$. Ответ: $2x^2 - 3x - 4$.

2. $\left(x^3 - 3x^2 + \dfrac{47}{12}x - \dfrac{5}{2}\right) : \left(3x^2 - 5x + 1\right)$. Ответ: $2x^2 - 3x - 4$.

3. $\left(-23a^3b^2 + 12a + 20a^4b^3 + 12a^2b^2 - 10a^2b - 9ab\right) : (4ab - 3)$.

Ответ: $5b^2a^3 - 2\text{Ь}a^2 + \text{З}ab - 4a$.

Освободить знаменатель дроби от радикалов:

1. $\dfrac{m}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$. Ответ: $-\dfrac{m(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a + b - c - 2\sqrt{ab}}{(a + b - c)^2 - 4ab}$.

2. $\dfrac{m}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$. Ответ: $\dfrac{m(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a - b}$.

3. $\dfrac{1 - a}{\sqrt{1 - \sqrt{a}}}$. Ответ: $\sqrt{(1 - a)(1 + \sqrt{a})}$.

4. $\dfrac{5}{\sqrt[4]{3} - 2\sqrt{3}}$. Ответ: $-\dfrac{5(\sqrt[4]{3} + 2\sqrt{3})(\sqrt{3} + 12)}{141}$.

5. $\dfrac{4\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}$. Ответ: $2 + \sqrt{2} - \sqrt{6}$.

Упростить выражения, применив формулу «сложного» радикала.

1. $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$. Ответ: $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

2. $\sqrt{\dfrac{9}{11} + \dfrac{4}{11}\sqrt{2}}$. Ответ: $\dfrac{\sqrt{88} + \sqrt{11}}{11}$.

3. $\sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$. Ответ: $\sqrt{r(r + \frac{a_n}{2})} - \sqrt{r(r - \frac{a_n}{2})}$.

(известная геометрическая формула удвоения числа сторон правильного вписанного многоугольника).

Решить уравнения:

1. $2x^4 - 15x^3 + 40x^2 - 45x + 18 = 0$. Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 2, x_4 = \frac{3}{2}$.
2. $x^3 - 15x^2 + 56x - 60 = 0$. Ответ: $x_1 = 10, x_2 = 2, x_3 = 3$.
3. $(x^2 - 5x + 11)^2 - 12(x^2 - 5x + 11) + 35 = 0$. Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$.
4. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = 1, x_{3,4} = -1 \pm i\sqrt{3}, x_{5,6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. $x^4 + 1 = 0$.
6. $x^4 - 1 = 0$.
7. $x^5 + 1 = 0$.
8 $x^5 - 1 = 0$.
9. $x^6 + 1 = 0$.
10. $x^6 - 1 = 0$.
11. $x^8 + 1 = 0$.
12. $x^8 - 1 = 0$.
13. $x^9 + 1 = 0$.
14. $x^9 - 1 = 0$.

Указание. Уравнения 5–14 решаются с помощью разложения их левых частей на множители.

15. $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$.

Указание. Ввести новое неизвестное $y = x - \frac{a+b}{2}$

Задачи на наибольшее и наименьшее значение трехчлена второй степени.

1. Норманское окно имеет фигуру прямоугольника, завершенного полукругом. Найти высоту и ширину такого окна, при условии, чтобы периметр этой фигуры равнялся данной величине p, а количество света, пропускаемого окном, было наибольшее.

Ответ. Высота прямоугольника равна радиусу полукруга и равна $\frac{p}{4+\pi}$.

2. В данный треугольник вписать прямоугольник с наибольшей площадью так, чтобы основание прямоугольника лежало на основании треугольника, а вершины двух углов лежали на боковых сторонах треугольника.

Ответ. Высота прямоугольника равна половине высоты треугольника.

3. Из всех треугольников с данным периметром $2p$ и данным основанием а какой имеет наибольшую площадь?

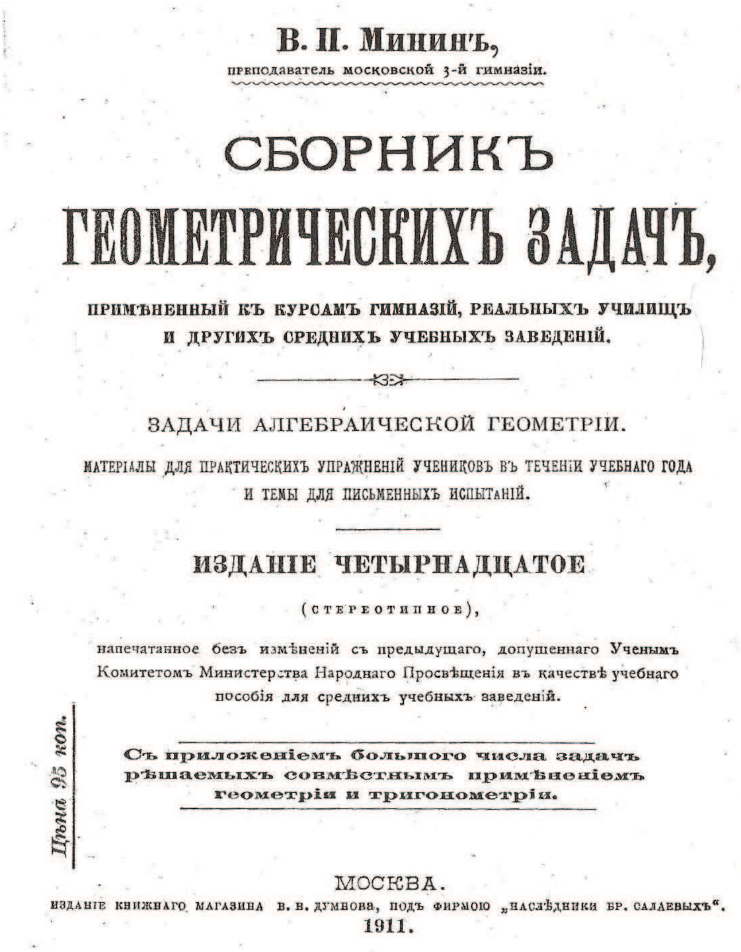
Ответ. Равнобедренный.

4. Дана длина h вертикального столба. На какой высоте в данном расстоянии а от столба он будет казаться наиболее длинным?

Ответ. $\frac{1}{2}h$

IV. Что решали наши предки по геометрии

Новое — это хорошо забытое старое, о чем невольно вспоминается при просматривании «Сборника геометрических задач» преподавателя третьей московской гимназии В. П. Минина. Четырнадцатое стереотипное издание задачника вышло в 1911 году. Книга допущена Ученым Комитетом Министерства Народного Просвещения (в подлиннике большие буквы) в качестве учебного пособия для гимназий, реальных училищ и других средних учебных заведений.


В. П. Мининъ,
преподаватель московской 3-й гимназіи.

СБОРНИКЪ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ,

ПРИМѢНЕННЫЙ КЪ КУРСАМЪ ГИМНАЗІЙ, РЕАЛЬНЫХЪ УЧИЛИЩЪ
И ДРУГИХЪ СРЕДНИХЪ УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ.

ЗАДАЧИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ.

МАТЕРІАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХЪ УПРАЖНЕНІЙ УЧЕНИКОВЪ ВЪ ТЕЧЕНІИ УЧЕБНАГО ГОДА
И ТЕМЫ ДЛЯ ПИСЬМЕННЫХЪ ИСПЫТАНІЙ.

ИЗДАНІЕ ЧЕТЫРНАДЦАТОЕ
(стереотипное),

напечатанное безъ измѣненій съ предыдущаго, допущеннаго Ученымъ
Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія въ качествѣ учебнаго
пособія для среднихъ учебныхъ заведеній.

Цѣна 95 коп.

Съ приложеніемъ большого числа задачъ
рѣшаемыхъ совмѣстнымъ примѣненіемъ
геометріи и тригонометріи.

МОСКВА.
ИЗДАНІЕ КНИЖНАГО МАГАЗИНА В. В. ДУМНОВА, ПОДЪ ФИРМОЮ „НАСЛѢДНИКИ БР. САЛАЕВЫХЪ".
1911.

Из более чем тысячи задач ниже приводятся сорок различной трудности, представляющих интерес для учащегося и учителя в начале XXI века. Тексты задач даются дословно, но в современной орфографии. Номера задач сохранены. Старая русская единица длины — фут, встречающаяся в двух задачах, равна 30,48 см. Трудные задачи отмечены звездочкой (*).

52. Сколько различных диагоналей можно провести из всех вершин n-угольника?

Ответ. $\dfrac{(n-3)n}{2}$.

101. Стороны прямоугольного треугольника выражаются последовательными целыми числами. Найти эти числа.

Ответ. 3; 4; 5.

112. В треугольнике ABC сторона $AB = 18, BC = 12, AC = 14$ (в метрах). Определить длину линии BM, соединяющей вершину B со срединою противолежащей стороны AC.

Ответ. $BM = \sqrt{185} \approx 13{,}601$.

138. Радиус круга, описанного около правильного десятиугольника, равен R. Определить радиус круга, вписанного в этот многоугольник.

Ответ. $\dfrac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

140. Радиус круга равен R. Определить сторону правильного вписанного двенадцатиугольника.

Ответ. $R\sqrt{2-\sqrt{3}} = \dfrac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

143. Радиус круга равен r. Определить сторону правильного описанного двенадцатиугольника.

Ответ. $2r(2-\sqrt{3})$.

150. Сторона правильного десятиугольника равна a. Определить радиус описанного около него круга.

Ответ. $\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$.

161*. Определить длину секущей, проведенной через центр круга из вершины одного из углов правильного описанного около этого круга двенадцатиугольника, сторона которого равна a.

Ответ. $\frac{a}{2}(2+\sqrt{3}+2\sqrt{2+\sqrt{3}})$.

191. Гипотенуза прямоугольного треугольника, длиною в a футов разделена в крайнем и среднем отношении перпендикуляром, опущенным на неё из вершины прямого угла. Определить площадь треугольника.

Ответ. $\frac{a^2}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

200*. Большая из параллельных сторон трапеции $ABCD$ есть $AB=a$, меньшая — $DC=b$, из непараллельных сторон одна есть $AD=c$, другая $CB=d$. Выразить площадь трапеции через a, b, c и d.

Ответ. $\frac{a+b}{4(a-b)}\sqrt{(a-b+d+c)(a-b+d-c)(c+a-b-d)(c-a+b+d)}$.

214*. Длины трёх высот треугольника суть m, n и g. Определить его площадь.

Ответ. $\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{g}\right)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{g}\right)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{g}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{g}-\frac{1}{m}\right)}}$.

319*. Площади боковых граней прямой треугольной призмы суть m, n, e, боковое ребро её равно 1. Определить объем призмы.

Ответ. $\frac{1}{41}\sqrt{(m+n+e)(m+n-e)(m+e-n)(n+e-m)}$.

333. По ребру a правильного тетраэдра определить объем и поверхность тетраэдра.

Ответ. $\frac{a^3}{12}\sqrt{2}; a^2\sqrt{3}$.

382. Высота усеченного конуса равна h, радиусы его оснований суть R и ρ. Определить боковую поверхность.

Ответ. $\pi(R+\rho)\sqrt{h^2+(R-\rho)^2}$.

406. Имеется металлический полый шар, толщина оболочки которого равна m, объем оболочки равен V. Определить радиус R внешней и радиус r внутренней поверхности оболочки.

Ответ. $R=\frac{1}{2}\left(m+\sqrt{3V-\pi m^3}3\pi n\right); r=\frac{1}{2}\left(-m+\sqrt{3V-\pi m^3}3\pi n\right)$.

440*. Каково должно быть отношение высоты равнобедренного треугольника к его основанию для того, чтобы поверхность тела, производимого вращением этого треугольника около его основания, была равновелика поверхности сферы, имеющей диаметром основание того же треугольника.

Ответ. $\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{8}}$.

443. Стороны треугольника суть a, b и c (наибольшая из них a). Определить объем тела, производимого вращением треугольника около наибольшей из этих сторон.

Ответ. $\frac{4\pi}{3a}p(p-a)(p-b)(p-c)$, где $a+b+c=2p$.

481. Ребро правильного тетраэдра равно a. Определить радиусы R и r шаров, описанного около тетраэдра и вписанного в него.

Ответ. $R=\frac{a}{2}\sqrt{6}; r=\frac{a}{12}\sqrt{6}$.

482. По данному ребру a куба определить радиус R шара, описанного около куба.

Ответ. $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

483. По данному ребру a правильного октаэдра определить: 1) радиус R шара, описанного около октаэдра, 2) объем V октаэдра.

Ответ. $R=\frac{a}{2}\sqrt{2}; V=\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$.

532. Сколько квадратных футов земной поверхности может обозреть воздухоплаватель, поднимаясь над нею на высоту ℓ футов? (Земля рассматривается здесь, как шар с радиусом в R футов).

Ответ. $\dfrac{2\pi R^2\ell}{R+\ell}$ кв. фут.

569. Какой из всех треугольников, у которых одно и то же основание a и один и тот же периметр $2p$, имеет наибольшую площадь?

Ответ. Равнобедренный.

570. Из всех треугольников одинакового периметра какой имеет наибольшую площадь?

Ответ. Равносторонний.

575. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих одинаковую сумму всех ребер, какой имеет наибольший объем?

Ответ. Куб.

577*. В прямой конус, у которого высота равна h, а радиус равен R, вписан такой прямой конус, который, имея вершину в центре основания первого конуса, имеет максимальный объем. Определить радиус основания, высоту и объем этого второго конуса.

Ответ. $\dfrac{2}{3}R$; $\dfrac{h}{3}$; $\dfrac{4}{81}\pi R^2 h$.

580. Определить, какой из всех прямоугольников одинакового периметра имеет наименьшую диагональ?

Ответ. Квадрат.

582. Радиус шара равен R. Определить высоту конуса, описанного около этого шара и имеющего наименьший объем.

Ответ. $4R$.

583. Из всех прямоугольных треугольников, имеющих одну и ту же гипотенузу, какой имеет наибольшую площадь?

Ответ. Равнобедренный.

586. Из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых полная поверхность одна и та же, какой имеет наибольший объем?

Ответ. Куб.

588. Радиус шара равен R. Определить радиус основания конуса, вписанного в этот шар и имеющего максимальный объем.

Ответ. $\dfrac{2}{3}R\sqrt{2}$.

589. Высота конуса равна h, радиус его основания равен R. Определить радиус основания и высоту цилиндра, вписанного в данный конус и имеющего максимальный объем.

Ответ. $\dfrac{2}{3}R$; $\dfrac{1}{3}h$.

594. Определить объем наибольшего из всех тех прямых конусов, у которых образующая равна a.

Ответ. $\dfrac{2}{27}\pi a^3\sqrt{3}$.

647*. Окружности двух кругов, радиусы которых суть R и r, пересекаются в точках M и N. Длина хорды MN, соединяющей точки пересечения, равна a. Определить площадь общей части этих кругов.

Ответ. $\dfrac{1}{2}\left[R^2\left(\dfrac{\pi\alpha}{180^\circ}-\sin\alpha\right)+r^2\left(\dfrac{\pi\beta}{180^\circ}-\sin\beta\right)\right]$, причем $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{a}{2R}, \sin\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{a}{2r}$.

664. Определить синус угла, образуемого пересечением двух диагоналей куба.

Ответ. $\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$.

700. Определить угол наклонения α ребра правильного тетраэдра к основанию тетраэдра и угол β между двумя сторонами тетраэдра.

Ответ, $\sin\alpha=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $\cos\beta=\dfrac{1}{3}$.

701*. Определить угол между двумя сторонами правильного октаэдра.

Ответ. $109°28'26''$

735. Треугольник, углы которого суть A, B и C, вращается поочередно около каждой из своих сторон. Найти отношение объемов V_A, V_B и V_C тел, произведенных этим вращением.

Ответ. $V_A : V_B : V_C = \operatorname{cosec} A : \operatorname{cosec} B : \operatorname{cosecC} C$.

760. Ромб и равновеликий ему квадрат вращаются каждый около одной из своих сторон. Найти отношение поверхностей тел вращения.

Ответ. 1.

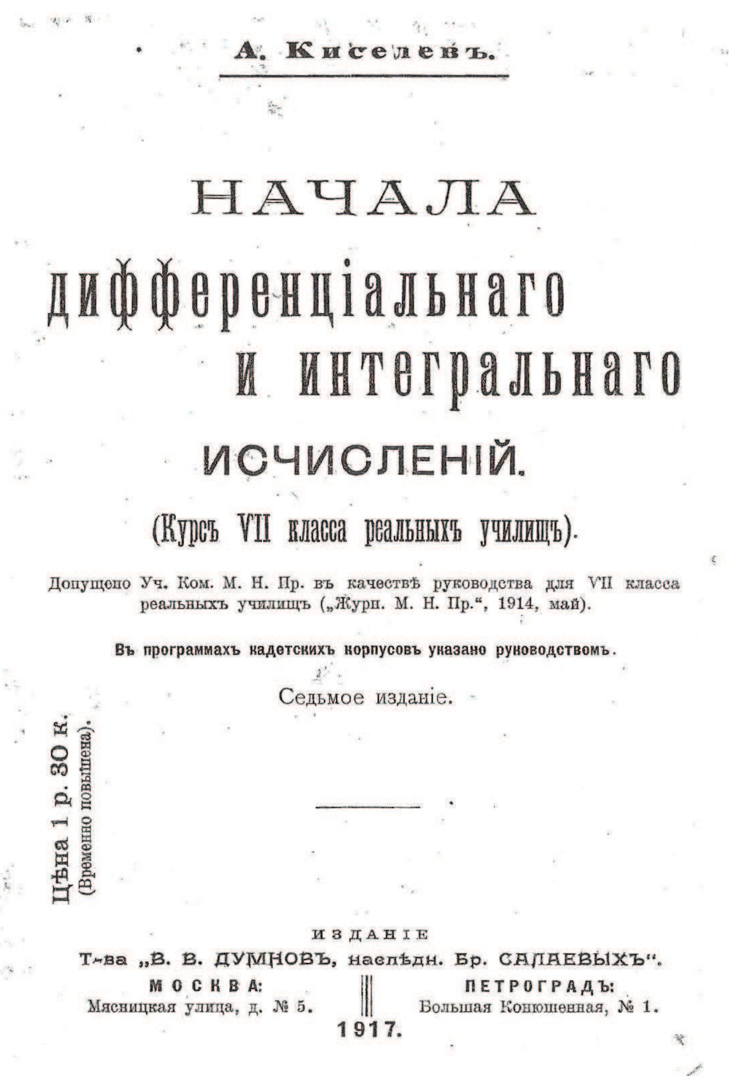
836*. Плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен α. Определить величину двугранного угла S между смежными боковыми гранями пирамиды.

Ответ. $\sin\dfrac{S}{2} = \dfrac{\cos\frac{180°}{n}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

853*. Площадь нижнего основания правильной усеченной n-угольной пирамиды равна a, площадь верхнего её основания равна b (причем $a > b$); полная поверхность пирамиды равна S. Определить угол x, под которым каждая из боковых сторон пирамиды наклонена к плоскости нижнего основания.

Ответ. $\cos x = \dfrac{a-b}{S-(a+b)}$.

V. «Начала дифференциального и интегрального исчисления» А. П. Киселева



А. Киселевъ.

НАЧАЛА

дифференціальнаго

и интегральнаго

исчисленій.

(Курсъ VII класса реальныхъ училищъ).

Допущено Уч. Ком. М. Н. Пр. въ качествѣ руководства для VII класса реальныхъ училищъ („Журн. М. Н. Пр.“, 1914, май).

Въ программахъ кадетскихъ корпусовъ указано руководствомъ.

Седьмое изданіе.

Цѣна 1 р. 30 к. (Временно повышена).

ИЗДАНІЕ

Т-ва „В. В. ДУМНОВЪ, наслѣдн. Бр. САЛАЕВЫХЪ“.

МОСКВА: Мясницкая улица, д. № 5. ПЕТРОГРАДЪ: Большая Конюшенная, № 1.

1917.

В 1917 году вышло седьмое издание указанной книги. Она предназначена для VII класса реальных училищ. В наше время, когда элементы высшей математики прочно заняли место в школьном образовании, представляет несомненный интерес этот учебник начала минувшего века. На 186 страницах книги обычного формата сконцентрирован большой, мастерски изложенный материал. Уровень трудности теоретических вопросов и задач весьма высок. Их можно использовать в современной школе при различных формах углубленного изучения математики, а также в сильном классе. Начнем же листать пожелтевшие от времени страницы с несуществующими сейчас буквами старой орфографии.

Во «введении» излагаются теоремы о пределах и вводится число $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Отмечается без доказательства иррациональность и трансцендентность этого числа.

В главе «Начала учения о производных (дифференциальное исчисление)» кроме материала, соответствующего действующему школьному учебнику, выводится формула логарифмического дифференцирования:

$$(u^v)' = u^v\left(v'\ln u + \frac{vu'}{u}\right).$$

Решен конкретный пример $(x^x)' = x^x \cdot (\ln x + 1)$.

Вычислены производные обратных тригонометрических функций.

В главе «Некоторые применения производных» изучаются теоремы Ролля и Лагранжа. Даны признаки постоянства, возрастания и убывания функций. Рассмотрен вопрос о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции, в частности, исследована в общем виде функция $y = ax^2 + bx + c$. Выводятся уравнения не только касательной, но и нормали к кривой. Для кривых второго порядка получены уравнения касательных, что отражено в таблице.

Кривая	Уравнение кривой	Уравнение касательной к кривой в точке $(x_1; y_1)$
Эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$
Гипербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$
Парабола	$y^2 = 2px$	$y_1y = p(x + x_1)$

Самая трудная и интересная последняя глава — «Начала интегрального исчисления». Она построена так, что изучение определенного интеграла предшествует неопределенному. Техника интегрирования достаточно развита. Так, дается формула интегрирования по частям $\int u\,dv = u\cdot v - \int u\,dv$ и применяется к вычислению интегралов: $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$, $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$; $\int xe^x\,dx = e^x\cdot(x-1) + C$.

Для вычисления площади эллипса $S = \pi ab$ (a — большая, а b — малая его полуоси) доказывается формула

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C.$$

Чтобы найти площадь, ограниченную дугой гиперболы, берется интеграл

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2\ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C.$$

Эллипсоид определяется как тело, порождаемое вращением эллипса вокруг его большой оси и получается его объем $V = \dfrac{4}{3}\pi ab$.

Затем при $b = a = r$ имеем объем шара $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Выводится формула длины дуги кривой $y = f(x), x_0 \le x \le x_1$.

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Вычислена длина дуги параболы $y = \dfrac{x^2}{2p}$ при $0 \le x \le x_1$:

$$L = \frac{x_1\sqrt{p^2 + x_1^2}}{2p} + \frac{p}{2}\ln\frac{x_1 + \sqrt{p^2 + x_1^2}}{p}.$$

Книга завершается упражнениями, содержащими 214 задач. Наиболее интересные из них (по мнению автора) приведены ниже. Нумерация задач сохранена.

5. Доказать, что если целый многочлен $f(x)$ делится на $(x-a)^\alpha$, то его производная делится на $(x-a)^{\alpha-1}$.

6. Доказать, что если $f(x) = \kappa(x-a)^\alpha(x-b)^\beta \cdots (x-l)^\lambda$, где k — постоянное число и $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ — постоянные целые положительные числа, то

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} + \cdots + \frac{\lambda}{x-l}.$$

Найти производные от функций:

21. $y = (x + \sqrt{1-x^2})^n$. Ответ. $y' = n(x + \sqrt{1-x^2})^{n-1}\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

45. $y = \ln(x + \sqrt{1-x^2})$. Ответ. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

61. $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Ответ, $y' = 3\cos x(1 - 4\sin^2 x)$.

80. $y = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)$. Ответ, $y' = -\dfrac{1}{2}$.

82. $y = \sin(\sin x)$. Ответ, $y' = \cos(\sin x)\cdot\cos x$.

84. $y = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$. Ответ. $y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\dfrac{(1-2x^2)}{|1-2x^2|}$.

87. y = $\sqrt[x]{x}$. Ответ. $y' = \dfrac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1 - \ln x)$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функций:

94. $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. Ответ. Наибольшее значение $\dfrac{1}{2}$, наименьшее значение $-\dfrac{1}{2}$.

106. $y = \sin x \cdot \sin(a+x)$. Ответ. Наибольшее значение $\cos^2\dfrac{a}{2}$, наименьшее значение $-\sin^2\dfrac{a}{2}$.

107. $y = x^x$ (при $x > 0$). Ответ. Наибольшего значения нет, наименьшее значение $\dfrac{1}{\sqrt[e]{e}}$.

111. $y = x\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ $(a > 0)$. Ответ. Наибольшего значения нет, наименьшее значение — $\dfrac{a}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22}$.

115. В шар радиуса r вписан цилиндр. Определить радиус x основания этого цилиндра, при котором его объем есть наибольший.

Ответ. $x = r\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

116. Определить радиус основания r конуса, который при постоянном объеме V имел бы наименьшую боковую поверхность.

Ответ. $r = \sqrt[6]{\dfrac{9V^2}{2\pi^2}}$.

123. Изо всех треугольников с данным периметром $2p$ и данным основанием a какой имеет наибольшую площадь? Ответ. Равнобедренный.

Найти интегралы.

173. $\int \dfrac{dx}{a+bx^2}$ Ответ. $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{bx}{a}}+C.$

175. $\int \dfrac{x\,dx}{a^4+x^4}.$ Ответ. $\dfrac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+C.$

181. $\int \operatorname{arctg} x\,dx.$ Ответ. $x\operatorname{arctg} x-\ln\sqrt{1-x^2}+C.$

186а. $\int e^x \sin x\,dx.$ Ответ. $\dfrac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$

186б. $\int e^x \cos x\,dx.$ Ответ. $\dfrac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C.$

187. $\int x^2e^x\,dx.$ Ответ. $e^x(x^2-2x+2)+C.$

188. $\int x^3e^x\,dx.$ Ответ. $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C.$

191. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx.$ Ответ. $\dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\dfrac{1}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C.$

191. $\int \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\,dx.$ Ответ. $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C.$

Дроздов Виктор Борисович,
г. Рязань.

О полезности кооперации в играх двух лиц

М. С. Никольский, Мусса Абубакар

В теории игр (см., например, [1]) большое внимание уделяется кооперативной теории игр N лиц. В этой статье в первой части мы будем рассматривать игры двух лиц с точки зрения полезности объединения игроков в союз, в котором выбор стратегий производится согласованно с целью максимального увеличения суммы выигрышей обоих лиц. Во второй части рассматриваются игры двух игроков при наличии возмущающих факторов, которые можно трактовать как действия непредсказуемой Природы. Здесь изучается вопрос о целесообразности объединения (кооперации) обоих игроков в союз с целью противодействия возможным неприятностям от Природы.

1. Пусть в евклидовых арифметических пространствах $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 1)$ и $\mathbb{R}^l$ $(l \geqslant 1)$ (k, l — размерности пространств) фиксированы непустые компакты X, Y соответственно и на $X \times Y$ определены непрерывные скалярные функции $f(x,\, y)$, $g(x,\, y)$. В рассматриваемой игре первый игрок выбирает вектор $x \in X$ и стремится к максимизации своего выигрыша $f(x,\, y)$, а второй игрок выбирает вектор $y \in Y$ и также стремится к максимизации своего выигрыша $g(x,\, y)$. Игроки производят выбор векторов x, y независимо друг от друга. Как известно из теории игр (см., например, [1]) первый игрок может гарантировать выигрыш

$$\gamma_1 = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,\, y), \tag{1}$$

если он выбирает вектор $x_0 \in X$ согласно требованию

$$\gamma_1 = \min_{y\in Y} f(x_0,\, y). \tag{2}$$

Аналогично, второй игрок может гарантировать выигрыш

$$\gamma_2 = \max_{y\in Y}\min_{x\in X} g(x,\, y), \tag{3}$$

если он выбирает вектор $y_0 \in Y$ из условия

$$\gamma_2 = \min_{x\in X} g(x,\, y_0). \tag{4}$$

Хотя, вообще говоря, с физической точки зрения выигрыши $f(x,\, y)$, $g(x,\, y)$ могут измеряться в разных физических единицах, будем считать, что выигрыши $f(x,\, y)$, $g(x,\, y)$ измеряются в одинаковых единицах (в экономических приложениях, например, выигрыши $f(x,\, y)$, $g(x,\, y)$ обычно измеряются в денежных единицах). При таком предположении величина $f(x,\, y)+g(x,\, y)$ тоже имеет физический смысл. Если оба игрока объединяются в союз (коалицию), то, действуя согласованно (т.е. совместно выбирая пару $(x,\, y)$ из $X \times Y$), они могут использовать величину

$$\gamma_3 = \max_{x\in X,\, y\in Y} \left(f(x,\, y) + g(x,\, y)\right). \tag{5}$$

Нетрудно обосновать, что (см. (1), (3))

$$\gamma_3 \geqslant \gamma_1 + \gamma_2. \tag{6}$$

Если
$$\gamma_3 > \gamma_1 + \gamma_2, \tag{7}$$
то объединение игроков в союз (коалицию) выгодно обоим игрокам, так как положительную величину
$$\Delta = \gamma_3 - (\gamma_1 + \gamma_2) \tag{8}$$
можно распределить в виде положительных добавок к гарантированным выигрышам γ_1, γ_2. Как это распределение разумно делать фактически, см., например, в [2], с. 181-186.

Возникает интересный для теорий игр и ее приложений вопрос о нахождении конструктивных условий на элементы рассматриваемой нами игры, при которых выполняется строгое неравенство (7). Рассмотрим два случая, в которых удается указать такие условия.

Случай А: непрерывные функции f, g имеют на $X \times Y$ разделенный вид:
$$f(x, y) = f_1(x) + f_2(y), \tag{9}$$
$$g(x, y) = g_1(x) + g_2(y), \tag{10}$$
где функции $f_1(x)$, $g_1(x)$ непрерывны на X, а функции $f_2(y)$, $g_2(y)$ непрерывны на Y.

Условимся в дальнейшем писать вместо операций $\max\limits_{x \in X}$ и $\max\limits_{y \in Y}$ операции $\max\limits_{x}$, $\max\limits_{y}$ соответственно. Аналогично, вместо операций $\min\limits_{x \in X}$ и $\min\limits_{y \in Y}$ будем писать $\min\limits_{x}$, $\min\limits_{y}$ соответственно. В рассматриваемом случае исследуемое неравенство (7) переписывается в виде
$$\begin{aligned}\max_x \left[f_1(x) + g_1(x)\right] + \max_y \left[f_2(y) + g_2(y)\right] > \max_x f_1(x) +\\ + \min_y f_2(y) + \max_y g_2(y) + \min_x g_1(x).\end{aligned} \tag{11}$$
Отдельно рассмотрим неравенства
$$\max_x \left(f_1(x) + g_1(x)\right) \geqslant \max_x f_1(x) + \min_x g_1(x), \tag{12}$$
$$\max_y \left(g_2(y) + f_2(y)\right) \geqslant \max_y g_2(y) + \min_y f_2(y). \tag{13}$$

Лемма 1. *При сделанных предположениях неравенство (12) имеет место.*

Доказательство. Очевидно $\forall x \in X$
$$f_1(x) + g_1(x) \geqslant f_1(x) + \min_x g_1(x). \tag{14}$$
Применяя к обеим частям этого неравенства операцию $\max\limits_x$, получим неравенство (12).

Аналогичным образом обосновывается

Лемма 2. *При сделанных предположениях неравенство (13) имеет место.*

Отметим что, в общем случае каждое из неравенств (12), (13) не обязательно выполняется в строгом смысле. Справедлива следующая

Лемма 3. *Пусть существует такой $x_0 \in \operatorname{Arg}\max\limits_x f_1(x)$, что $x_0 \notin \operatorname{Arg}\min\limits_x g_1(x)$, тогда имеет место неравенство (ср. с (12))*
$$\max_x \left(f_1(x) + g_1(x)\right) > \max_x f_1(x) + \min_x g_1(x). \tag{15}$$

Доказательство. Очевидно, левая часть неравенства (15) больше или равна величины $f_1(x_0) + g_1(x_0) = \max\limits_x f_1(x) + g_1(x_0)$. Так как $g_1(x_0) > \min\limits_x g_1(x)$, то из сказанного вытекает неравенство (15).

Замечание. Символы $\operatorname{Arg}\max\limits_x h(x)$, $\operatorname{Arg}\min\limits_x h(x)$ означают соответственно множества точек максимума, минимума функции $h(x)$ на X.

Также справедлива следующая

Лемма 4. *Пусть существует такой* $y_0 \in \operatorname{Arg}\max\limits_{y} g_2(y)$, *что* $y_0 \notin \operatorname{Arg}\min\limits_{y} f_2(y)$, *тогда имеет место неравенство (ср. с (13))*

$$\max_y \left(g_2(y) + f_2(y)\right) > \max_y g_2(y) + \min_y f_2(y). \tag{16}$$

Эта лемма доказывается аналогично лемме 3 с очевидными видоизменениями.

Из вышесказанного вытекает

Теорема 1. *Если выполняются условия одной из лемм 3, 4, то имеет место строгое неравенство (11) и, следовательно, строгое неравенство (7).*

Случай В (подслучай случая А): пусть множества X и Y — выпуклые компакты, а непрерывные функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ имеют на $X \times Y$ линейный вид:

$$f(x, y) = \langle a, x\rangle + \langle b, y\rangle, \tag{17}$$

$$g(x, y) = \langle c, x\rangle + \langle d, y\rangle, \tag{18}$$

где a, c — фиксированные векторы из $\mathbb{R}^k$; b, d — фиксированные векторы из $\mathbb{R}^l$; символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначены стандартные скалярные произведения в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^l$ соответственно. Так как функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ имеют разделенный вид (ср. с (9), (10)), то можно использовать результаты, полученные нами в случае А. В рассматриваемом линейном случае В строгое неравенство (15) можно переписать в виде

$$\max_x \left(\langle a + c, x\rangle\right) > \max_x \langle a, x\rangle + \min_x \langle c, x\rangle, \tag{19}$$

а строгое неравенство (16) — в виде

$$\max_y \left(\langle b + d, y\rangle\right) > \max_y \langle b, y\rangle + \min_y \langle d, y\rangle. \tag{20}$$

Нам в дальнейшем понадобятся вспомогательные сведения.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 1)$ обозначим $\sigma_m = \{z \in \mathbb{R}^m : |z| = 1\}$, где $|z|$ означает стандартную длину вектора z. Нам будет полезно следующее

Определение. *Непустой выпуклый компакт* $K \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 2)$ *с непустой внутренностью называется* S*-множеством, если:*

1. при любом $\psi \in \sigma_m$ *в* K *существует лишь один вектор* $z(\psi)$, *максимизирующий по* $z \in K$ *скалярное произведение* $\langle z, \psi\rangle$;

2. для каждой граничной точки z_0 *компакта* K *существует лишь одна опорная гиперплоскость, проходящая через точку* z_0.

Замечание. Здесь и далее мы используем некоторые понятия выпуклого анализа (см., например, [3], [4]). Отметим, что точка $z(\psi)$ при каждом $\psi \in \sigma_m$ принадлежит границе множества K. Используя терминологию выпуклого анализа, можно сказать, что S-множество является строго выпуклым множеством, а также гладким выпуклым телом.

В дальнейшем будет полезна следующая

Лемма 5. *Пусть множество* $K \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 2)$ *является* S*-множеством и пусть* $\varphi \in \sigma_m$. *Тогда для произвольного вектора* $\psi \in \sigma_m$ *такого, что* $\psi \neq \varphi$, *имеет место неравенство*

$$\left(\langle z(\psi), \varphi\rangle\right) < \left(\langle z(\varphi), \varphi\rangle\right). \tag{21}$$

Доказательство. Из определения S-множества следует, что $z(\psi) \neq z(\varphi)$. Используя свойства S-множества, получаем теперь неравенство (21).

При анализе неравенства (19) интерес представляет

Лемма 6. *Пусть множество $K \subset \mathbf{R}^m$ $(m \geqslant 2)$ является S-множеством, а векторы p, q — некоторые ненулевые векторы из $\mathbf{R}^m$, причем*

$$\frac{1}{|p|}p \neq \frac{1}{|q|}\ (-q). \tag{22}$$

Тогда выполняется неравенство

$$(\langle z(p), -q\rangle) < (\langle z(-q), -q\rangle)\,. \tag{23}$$

Доказательство. Положим $\psi = \dfrac{1}{|p|}p$, $\varphi = \dfrac{1}{|q|}\ (-q)$. Из (22) вытекает, что $\psi \neq \varphi$. Отметим, что $z(p) = z(\psi)$, $z(-q) = z(\varphi)$. Используя свойства скалярного произведение и неравенство (21), получаем (23).

Лемма 7. *Пусть в (17), (18) множество $X \subset \mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ является S -множеством, а векторы a, c является ненулевыми и*

$$\frac{1}{|a|}a \neq \frac{1}{|c|}\ (-c). \tag{24}$$

Тогда имеет место строгое неравенство (19).

Доказательство. При сделанных предположениях однозначно определен вектор $x(a)$, максимизирующий функцию $\langle x{,}a\rangle$ по $x \in X$. Таким образом,

$$\operatorname*{Arg\,max}_x\langle x,\, a\rangle = \{x(a)\}. \tag{25}$$

Обозначая $p = a$, $q = c$, на основании леммы 6, приходим к неравенству

$$(\langle x(a),\ -c\rangle) < (\langle x(-c),\ -c\rangle)\,, \tag{26}$$

где $x(-c)$ означает максимизатор функции $\langle x,\ -c\rangle$ при $x \in X$. Можно показать, что

$$\min_x\langle x,\, c\rangle = -\langle x(-c),\ -c\rangle. \tag{27}$$

Из соотношений (26), (27) мы приходим к неравенству

$$(\langle x(a),\, c\rangle) > \min_x\langle x,\, c\rangle. \tag{28}$$

Отсюда вытекает, что вектор

$$x(a) \notin \operatorname*{Arg\,min}_x\langle x,\, c\rangle. \tag{29}$$

Из соотношений (25), (29) и леммы 3 следует, что имеет место строгое неравенство (19).

Лемма 8. *Пусть в (17), (18) множество $Y \subset \mathbb{R}^l$ $(l \geqslant 2)$ является S-множеством, а векторы b, d являются ненулевыми и*

$$\frac{1}{|b|}b \neq \frac{1}{|d|}\ (-d). \tag{30}$$

Тогда имеет место строгое неравенство (20).

Доказательство этой леммы проводится по схеме доказательства леммы 7 с очевидными изменениями.

Теорема 2. *Если выполнены условия одной из лемм 7, 8, то имеет место искомое неравенство*

$$\begin{gathered}\max_x\left(\langle a+c,\, x\rangle\right) + \max_y\left(\langle b+d,\, y\rangle\right) > \max_x\langle a,\, x\rangle + \\ + \min_x\langle c,\, x\rangle + \max_y\langle b,\, y\rangle + \min_y\langle d,\, y\rangle.\end{gathered} \tag{31}$$

Теперь мы рассмотрим линейный случай (см. (17), (18)) при $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1$, когда X, Y являются отрезками $[p,\, q]$, $[r,\, s]$, соответственно. Предполагаем, что $p < q$, $r < s$. Перепишем формулы (17), (18) для рассматриваемого случая в виде

$$f(x,\, y) = ax + by, \tag{32}$$

$$g(x,\, y) = cx + dy, \tag{33}$$

где a, b, c, d — фиксированные числа, не равные нулю.
Положим

$$f_1(x) = ax, \quad f_2(y) = by, \quad g_1(x) = cx, \quad g_2(y) = dy \tag{34}$$

и изучим неравенства (12), (13) для рассматриваемого случая, которые здесь перепишутся в виде

$$\max_{x \in [p,\, q]} (a + c)\, x \geqslant \max_{x \in [p,\, q]} ax + \min_{x \in [p,\, q]} cx, \tag{35}$$

$$\max_{y \in [r,\, s]} (b + d)\, y \geqslant \max_{y \in [r,\, s]} by + \min_{y \in [r,\, s]} dy. \tag{36}$$

Отметим, что все члены неравенства (35) можно вычислить непосредственно, используя следующие формулы:

$$\max_{x \in [p,\, q]} \alpha x = \begin{cases} \alpha q, \text{ если } & \alpha \geqslant 0 \\ \alpha p, \text{ если } & \alpha < 0, \end{cases} \tag{37}$$

$$\min_{x \in [p,\, q]} \alpha x = \begin{cases} \alpha p, \text{ если } & \alpha \geqslant 0 \\ \alpha q, \text{ если } & \alpha < 0. \end{cases} \tag{38}$$

Рассматривая различные варианты расположения ненулевых чисел a, c на прямой $\mathbb{R}^1$, мы приходим к выводу: равенство в (35) будет лишь при выполнении условий $a > 0$, $c < 0$, $a + c \geqslant 0$, а также при выполнении условий $a < 0$, $c > 0$, $a + c \leqslant 0$. Во всех остальных случаях в (35) имеет место строгое неравенство (36). Далее, аналогичным образом мы приходим к следующему выводу при ненулевых числах b, d: равенство в (36) будет лишь при выполнении условий $b > 0$, $d < 0$, $b + d \geqslant 0$, а также при выполнении условий: $b < 0$, $d > 0$, $b + d \leqslant 0$. Во всех остальных случаях в (36) имеет место строгое неравенство. Итак, неравенство (35) при ненулевых a, c выполняется в строгом смысле при выполнении одного из условий:

1) $a > 0$, $c > 0$;
2) $a < 0$, $c < 0$;
3) $a > 0$, $c < 0$, $a + c < 0$;
4) $a < 0$, $c > 0$, $a + c > 0$.

Аналогично, неравенство (36) выполняется в строгом смысле при выполнении одного из условий:

1) $b > 0$, $d > 0$;
2) $b < 0$, $d < 0$;
3) $b > 0$, $d < 0$, $b + d < 0$;
4) $b < 0$, $d > 0$, $b + d > 0$.

Полученные факты позволяют легко получить в рассматриваемом примере (32), (33) достаточные условия для выполнения строгого неравенства (11).

Замечание. Функции выигрыша, имеющие разделенный вид (см.(9),(10)), нередко рассматриваются в теории игр (см., например, [2]).

2. В этой части мы кратко изучим некоторую более общую игровую модель, нежели в первой части, учитывающую наличие третьего игрока — Природы. Постановка рассматриваемой здесь задачи возникла под влияниям одного доклада А. В. Кряжимского.

Рассматривается игра двух лиц в почти классической форме.
Функция выигрыша первого игрока — непрерывная функция $f(x,\, y,\, z)$. Функция выигрыша второго игрока — непрерывная функция $g(x,\, y,\, z)$. Здесь $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, где X, Y, Z

— непустые компакты в соотвествующих конечномерных евклидовых пространствах. Первый игрок выбирает $x \in X$ с целью максимизации $f(x, y, z)$. Второй игрок выбирает $y \in Y$ с целью максимизации $g(x, y, z)$. Вектор $z \in Z$ выбирается Природой, цели которой не ясны игрокам. Поэтому Природа может навредить игрокам и это надо как-то учесть. Мы хотим показать, что иногда игрокам выгодно объединяться в коалицию и вместе бороться с возможными действиями Природы.

Будем изучать игры, для которых

$$\max_{x,\, y} \min_{z} \left(f(x, y, z) + g(x, y, z)\right) > \max_{x} \min_{y,\, z} f(x, y, z) + \\ + \max_{y} \min_{x,\, z} g(x, y, z). \tag{39}$$

Здесь и далее в подобных неравенствах $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$.

Отметим, что при выполнении неравенства (39) игрокам выгодно объединиться в коалицию, чтобы после торга получить больший выигрыш, нежели при антагонистическом подходе к игре. В сущности, в неравенстве (39) мы используем идеи понятия характеристической функции из кооперативной теории игр. Наше исследование сильно упрощается, если

$$f(x, y, z) = f_1(x, y) + f_2(z), \quad g(x, y, z) = g_1(x, y) + g_2(z), \tag{40}$$

где функции f_1, g_1 непрерывны на $X \times Y$, а функции f_2, g_2 непрерывны на Z.

С помощью (40) соотношение (39) тогда переписывается в виде

$$\max_{x,\, y} \left[f_1(x, y) + g_1(x, y)\right] + \min_{z} \left[f_2(z) + g_2(z)\right] > \max_{x} \min_{y} f_1(x, y) + \\ + \max_{y} \min_{x} g_1(x, y) + \min_{z} f_2(z) + \min_{z} g_2(z). \tag{41}$$

Отметим, что можно обосновать неравенство

$$\max_{x,\, y} \left(f_1(x, y) + g_1(x, y)\right) \geqslant \max_{x} \min_{y} f_1(x, y) + \max_{y} \min_{x} g_1(x, y). \tag{42}$$

Из (41), (42) вытекает, что для выполнения неравенства (39) достаточно обеспечить неравенство

$$\min_{z} \left(f_2(z) + g_2(z)\right) > \min_{z} f_2(z) + \min_{z} g_2(z). \tag{43}$$

Отметим, что в общем случае

$$\min_{z} \left(f_2(z) + g_2(z)\right) \geqslant \min_{z} f_2(z) + \min_{z} g_2(z). \tag{44}$$

Т.е для реализации неравенства (43) нужно, чтобы неравенство (44) стало строгим.

От противного доказывается, что строгое неравенство (43) выполняется, если

$$\operatorname{Arg}\min_{z \in Z} f_2(z) \bigcap \operatorname{Arg}\min_{z \in Z} g_2(z) = \varnothing. \tag{45}$$

Отметим, что выполнение условия (43) не зависит от выбора функций $f_1(x, y)$, $g_1(x, y)$. Итак, из сказанного вытекает, что для выполнения строгого неравенства (41) достаточно, чтобы было выполнено соотношение (45).

Благодарности. Авторы благодарят проф. В. И. Жуковского за внимание к их работе и полезные замечания по рукописи статьи.

Работа написана при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00175-а, 12-01-00506, 13-01-00685, 13-01-12446 офи-м2, 14-00-90408 Укр_а и НАН Украины 03-01-14).

Литература

1. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. - М.: Наука, 1985.
2. Жуковский В.И. Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. - М.: URSS, 2010 (Изд.2).
3. Боннезен Т., Фенхель В. Теория выпуклых тел. - М.: Фазис, 2002.
4. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. - М.: Высшая школа, 2001.

Никольский Михаил Сергеевич
ведущий научный сотрудник МИАН РАН,
доктор физ.-мат. наук.

E-mail: mni@mi.ras.ru

Мусса Абубакар,
Maitre-Assistant, канд. физ.-мат. наук,
Кафедра математики и информатики,
Ниамейский Университет им. Абду Мумуни,
Ниамей, Нигер.

E-mail : moussa@mail.ru

Из материалов конференции “Поиск-93”[1]

Представил А. Я. Белов

В предыдущем номере журнала была опубликована программа адаптированного курса математики для участников химического кружка Дома научно-технического творчества молодежи (ДНТТМ), г. Москва, ул. Донская, 37. Участники кружка выступали с докладами на научных конференциях учащихся, в частности на конференции “Поиск-93”. Воспроизводим несколько математических докладов с этой конференции (ранее они опубликованы в сборнике “Дом научно-технического творчества Молодежи. Поиск-93”, материалы конференции, Москва 1993, 112 с.). Также приводим один доклад по физике, в память о руководителе работы замечательном учителе физики А. Р. Зильбермане. Зильберман Александр Рафаилович (1946-2010) — физик, педагог, один из лучших учителей физики. Преподавал в Лицее “Вторая Школа”. Член редколлегии журнала “Квант”, был ведущим задачника “Кванта” по физике.

Физика. Основным направлением деятельности лаборатории Физики ДНТТМ является отбор и подготовка наиболее талантливых учащихся для участия в конкурсах и олимпиадах по физике. Эта подготовка включает в себя курсы по решению и разбору наиболее сложных задач, занятия на учебно-практических установках, демонстрирующих основные физические эффекты и законы, учебные сборы и лекции ведущих педагогов, участие и, как правило, победы в Московской городской, Российской и международных олимпиадах по физике. В рамках секции конференции “Поиск-93” в ДНТТМ проходили занятия сборной команды России по подготовке к предстоящей олимпиаде. Из опытных разработок особого внимания заслуживает предложенный Сергеем Крупениным (рук. Зильберман) датчик для измерения скорости потока газов и жидкостей, который может быть применен как в особо малых пространствах, так и наоборот, на полноразмерных объектах, везде, где задачей исследования является скорость потока и поле его скоростей.

1. Измеритель скорости ветра на основе нагреваемого датчика

Крупенин Сергей, руководитель А. Р. Зильберман

Для измерения скорости ветра (в более общем случае — скорости потока жидкости или газа), как правило, используют механические датчики — ”вертушки”, вводимые в поток зонды и т.п. При всей простоте таких устройств они имеют ряд недостатков — большую инерционность, низкую надежность, они недостаточно компактны и непригодны для измерений в ”узких” местах.

В работе описан простой измеритель скорости потока, использующий нагреваемый датчик, включенный в электрическую схему со следящей обратной связью. Уносимая потоком тепловая мощность определяется разностью температур датчика и потока и скоростью потока, что и используется для измерения. Для упрощения обработки получаемых результатов разность температур должна быть практически неизменной, что и обеспечивается в выбранной схеме.

В качестве датчика использован терморезистор, имеющий при рабочей температуре сопротивление несколько десятков Ом, что позволяет нагревать его до необходимой температуры током, протекающим по измерительной цепи — это дает возможность сильно упростить электрическую схему прибора.

[1]Исследование поддержано грантом РФФИ № 14-01-00548

В простейшем случае прибор может представлять собой обычный измерительный мостик (рис.1), одним из резисторов которого и является датчик. В этом случае баланс моста достигается при вполне определенной температуре датчика (остальные сопротивления моста не зависят от температуры), контроль баланса моста производится при помощи микроамперметра, включенного в его диагональ. Добиться баланса моста можно, изменяя напряжение его питания при помощи включенного последовательно с мостом переменного резистора, а это напряжение однозначно связано со скоростью потока; таким образом, можно отградуировать вольтметр (или даже сам переменный резистор) непосредственно в единицах скорости потока.

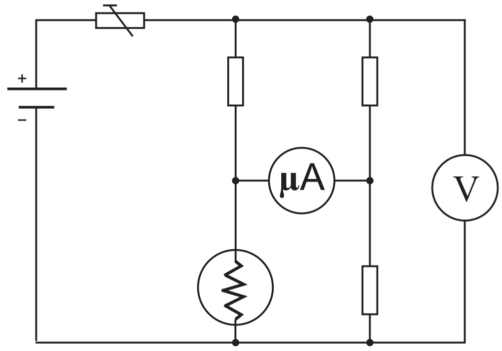


Рис. 1

При всей простоте, этот способ для практических измерений применять все же неудобно — пришлось бы все время крутить ручку переменного резистора, кроме того, это не годится для исследования достаточно быстрых изменений скорости. Эти недостатки можно преодолеть, если включить измерительный мостик в следящую систему.

В этом случае вместо микроамперметра для слежения за балансом моста используется электронный дифференциальный усилитель, входы которого подключены к диагонали моста (рис.2), а входное напряжение усилителя питает измерительный мост. Вольтметр для измерения скорости потока подключается параллельно мосту. В такой схеме баланс моста поддерживается постоянно за счет очень высокого коэффициента усиления дифференциального усилителя (такие усилители называют "операционными", они широко распространены, доступны и дешевы).

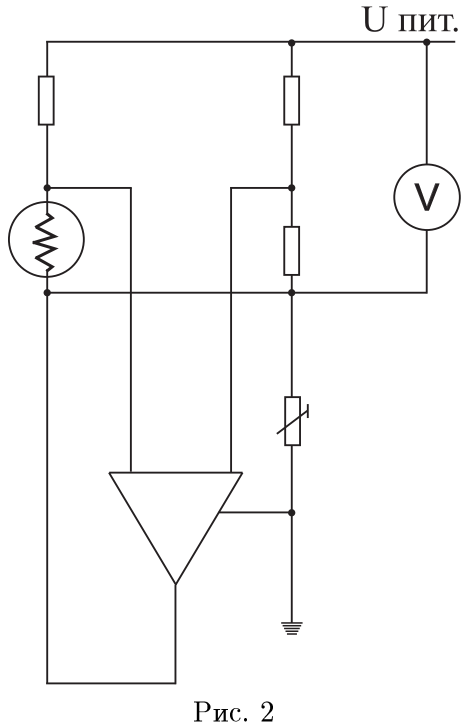


Рис. 2

Серьезной проблемой в таком случае является обеспечение устойчивости измерительной схемы — системы с большим коэффициентом усиления и глубокой обратной связью склонны к самовозбуждению (из усилителя она превращается в автогенератор, при этом измерения становятся невозможными). Такое поведение системы с отрицательной обратной связью связано с неидеальностью дифференциального усилителя — ему свойственно некоторое запаздывание выходных сигналов по отношению к входным, что и переводит отрицательную обратную связь на достаточно высоких частотах в положительную. На практике частота такого автогенератора составляет несколько мегагерц.

В практической схеме вместо операционного усилителя удобно использовать специализированный ”компаратор”, выходное напряжение которого после ”сглаживания” (усреднения) при помощи цепи RC питает мост — на выходе компаратора напряжение дискретное, оно соответствует либо логическому ”нулю”, либо логической ”единице”. Это позволяет улучшить точность слежения за балансом моста и обойтись однополярным напряжением питания 5 вольт (компараторы хорошо работают с таким напряжением питания). Для исключения самовозбуждения на высоких частотах используется фиксация выходного напряжения компаратора при помощи триггера — на тактовый вход подаются импульсы с частотой несколько килогерц (это достаточно высокая частота, чтобы успевать отследить изменения скорости потока), при этом самовозбуждение на высоких частотах становится невозможным.

Практическая схема устройства приведена на рис. 3. В схеме использован интегральный компаратор К554САЗ, обладающий достаточно высокими параметрами. В качестве датчика температуры удобно использовать ”обнаженную” спираль миниатюрной лампочки накаливания 6 вольт, 20 миллиампер — она обладает малой массой, что позволяет измерять быстрые изменения скорости потока. Размеры датчика малы — это дает возможность измерять параметры потоков воздуха в узких трубах и труднодоступных местах.

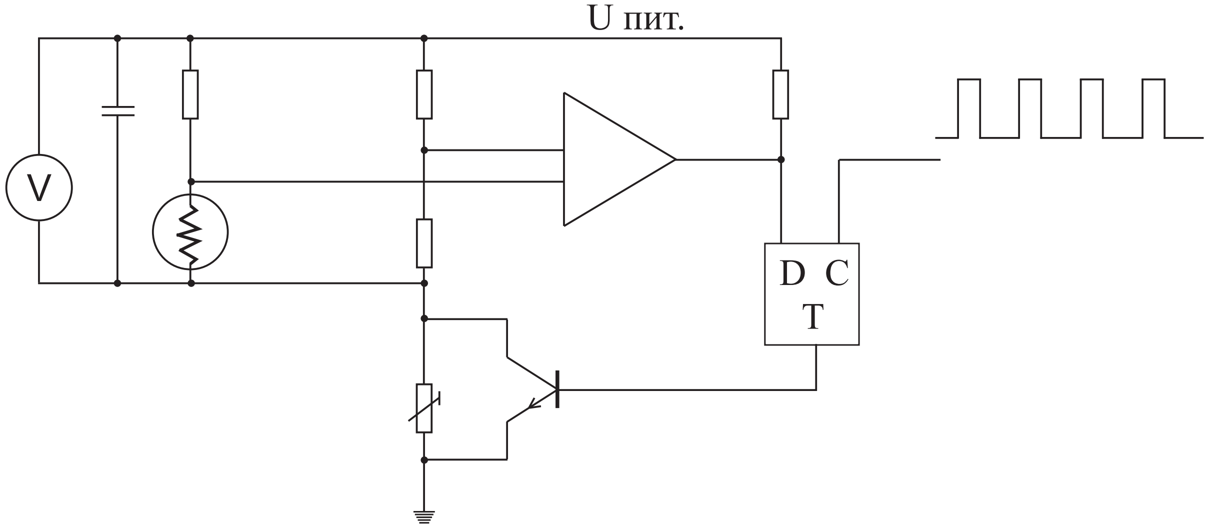


Рис. 3

Практически неизменную разность температур датчика и потока удается обеспечить за счет нагрева датчика до высокой температуры (датчик-спираль это позволяет). Возможна, однако, компенсация при помощи второго, необдуваемого датчика.

Математика. Работа секции “Математика” проходила с 4 по 8 апреля в МГДТДиЮ. В первый день, 4 апреля, состоялся заключительный открытый тур Московской городской олимпиады по математике, в которой приняли участие более 200 московских и иногородних школьников. Этот заключительный тур явился одновременно олимпиадой ДНТТМ для участников конференции (ДНТТМ являлся одной из организаций, проводивших Московскую городскую олимпиаду).

5 и 6 апреля прошли собственно заседания конференции. В ее работе приняли участие 35 иногородних и иностранных учащихся в составе делегаций Омска, Челябинска, Ижевска (Россия), Киева (Украина), Тарту (Эстония), Каунаса (Литва). Перед учащимися выступили с лекциями зав. отделом мехмата МГУ Профессор В. Н. Латышев, профессор Независимого Московского Университета С. К. Ландо, д.ф.м.н. Института проблем управления Н. А. Бобылев, которые затем вошли в состав жюри конференции. По итогам работы были награждены I премией Вольвовский Юрий "Об одной комбинаторной задаче" и II премией — Челноков Григорий "Равномерные последовательности" и Терентьев Игорь "О раскраске графов" (г. Омск).

7 апреля состоялся конкурс "исследовательских" задач, предлагаемых для решения непосредственно на конкурсе. В конференции также принял участие президент Американской региональной математической лиги Марк Саул, выступивший перед руководителями команд и участниками конференции с рассказом об американских математических олимпиадах.

Большинство московских участников занимаются в ДНТТМ более 5 лет и прошли путь от кружковцев до студентов I курса Независимого Московского Университета; на конференции были представлены доклады по компьютерному моделированию, обучающим системам, теории графов, комбинаторике, теории динамических систем. Работы выполнены на высоком научном уровне, достаточном для публикации в "Успехах мат. наук" и других специальных журналах.

На конференции также определилось сотрудничество разных городов в области образовательных компьютерных программ по математике, физике и программированию. Успехом пользовались методические пособия сектора мат. методов ДНТТМ, сборники задач.

2. Распределение Максвелла

Кулыгин Алексей, руководитель Белов А.Я.

Целью настоящей работы является установление связи изотропности пространства с распределением молекул по скоростям в идеальном газе (распределением Максвелла).

Идеальным газом называется множество частиц, имеющих 3 степени свободы и взаимодействующих при соударениях.

Сначала докажем тождество:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Для этого рассмотрим декартовую систему координат с поверхностью, полученной вращением графика функции $z = e^{-x}$ вокруг оси oz (так называемый "Гауссов гриб"). Найдем двумя способами объем V, заключенный между этой поверхностью и плоскостью XOY:

1) $$V = \int_0^1 s(z)dz = \int_0^1 \pi r^2(z)dz = \pi \int_0^1 r^2(z)dz = -\pi \int_0^1 \ln z dz =$$

$$= -\pi(x \ln x - x) \Big|_0^1 = \pi x(1 - \ln x) \Big|_0^1 = \pi(1 - \ln 1) = \pi(1 - 0) = \pi.$$

2) $$V = \int_{-\infty}^{+\infty}\int \left(e^{-x^2}\right)\left(e^{-y^2}\right) dxdy.$$

Но $V = \pi = \int_{-\infty}^{+\infty}\int \left(e^{-x^2}\right)\left(e^{-y^2}\right) dxdy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy\right) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$

Из изотропности пространства естественно следует, что если молекула идеального газа имеет вектор скорости $\vec{v}$ (в декартовой системе координат), то:

1) $|\vec{v}|$ не зависит от направления этого вектора $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

2) Компоненты вектора $\vec{v}$ v_x, v_y, v_z не зависят друг от друга (эти утверждения также называются гипотезами Максвелла).

Пусть

$$S_1 \equiv (v_1 \le v_x \le v_1 + dv_x), \;\; S_2 \equiv (v_2 \le v_y \le v_2 + dv_y), \;\; S_3 \equiv (v_3 \le v_z \le v_3 + dv_z).$$

Из утверждения 1) следует, что $\{S_1; S_2; S_3\}$ — множество взаимно независимых событий, поэтому

$$P(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = P(S_1)P(S_2)P(S_3), \;\; \frac{P(S_1 \cup S_2 \cup S_3)}{dv_x dv_y dv_z} = \frac{P(S_1)}{dv_x}\frac{P(S_2)}{dv_y}\frac{P(S_3)}{dv_z}.$$

В левой части последнего равенства стоит плотность вероятности $S_1 \cup S_2 \cup S_3$, которая очевидно является функцией v^2, а в правой — произведение аналогичных плотностей по координатам, т.е.

$$\rho(v^2) = \rho(v_x^2)\rho(v_y^2)\rho(v_z^2).$$

(Хотя интуитивно это равенство кажется очевидным с самого начала.) Прологарифмировав его, получим:

$$\ln \rho(v^2) = \ln \rho(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \ln \rho(v_x^2) + \ln \rho(v_y^2) + \ln \rho(v_z^2)$$

Введем обозначения:

$$G(a+b+c) := \ln \rho(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

$$H(a) := \ln \rho(v_x^2)\,, \;\; H(b) := \ln \rho(v_y^2)\,, \;\; H(c) := \ln \rho(v_z^2)\,\cdot$$

Докажем, что из функционального уравнения

$$G(a+b+c) = H(a) + H(b) + H(c)$$

следует линейность функции G.

Пусть

$$G_1(x) \stackrel{def}{=} G(x) - G(0), \;\; H_1(x) \stackrel{def}{=} H(x) - \frac{1}{3}G(0)$$

$$G_1(a+b+c) = H(a) + H(b) + H(c) - G(0) = H(a) - \frac{1}{3}G(0) +$$

$$+H(b) - \frac{1}{3}G(0) + H(c) - \frac{1}{3}G(0) = H_1(a) + H_1(b) + H_1(b)$$

$$G_1(x) \stackrel{def}{=} G(x) - G(0) \Rightarrow G_1(0) = G(0) - G(0) = 0$$

$$G_1(0) = G_1(0+0+0) = 0 = H_1(0) + H_1(0) + H_1(0) = 3H_1(0) = 0 \Rightarrow H_1(0) = 0$$

$$G_1(a) = G_1(a+0+0) = H_1(a) + 2H_1(0) = H_1(a) \Rightarrow G_1 \equiv H_1$$

$$G_1(a+b) = G_1(a+b+0) = G_1(a) + G_1(b)$$

$$G_1\left(\frac{1}{2}\right)+G_1\left(\frac{1}{2}\right)=G_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=G_1(1)$$

$$2G_1\left(\frac{1}{2}\right)=G_1\left(1\right),\ \ G_1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}G_1\left(1\right)$$

Аналогично

$$\forall n\in N\quad G_1\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}G_1\left(x\right),\ \ \forall q\in Q\quad G_1\left(qx\right)=qG_1\left(x\right)$$

Так как $G_1\left(x\right)$ непрерывна, то

$$\forall r\in \mathbb{R}\quad G_1\left(rx\right)=rG_1\left(x\right),\text{т.е. }\ G_1\left(x\right)=ax+\gamma$$

$$G\left(x\right)-G(0)=ax+\gamma,\ \ G\left(x\right)=ax+\gamma+G(0)=ax+b,\text{т.е. }\ G\left(x\right)\quad\text{— линейна}$$

$$G\left(\upsilon^2\right)\overset{def}{=}\ln\rho(\upsilon^2)=ax+b$$

$$e^{G\left(\upsilon^2\right)}=e^{\ln\rho(\upsilon^2)}=e^{ax+b},\ \ \rho(\upsilon^2)=e^{ax+b}=e^{ax}\cdot e^{b}=c\cdot e^{ax}$$

$$P(\upsilon^2)=P(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)=\rho(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z.$$

Очевидно, что в данный момент времени рассматриваемая молекула имеет какое-то значение $\upsilon^2=\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2$ (достоверное событие), поэтому

$$1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z=c\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int e^{a(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)}d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z=$$

$$(a<0,\ \text{ т.к. вероятность }\quad\leq 1)$$

$$=c\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-|a|\upsilon_x^2}d\upsilon_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-|a|\upsilon_y^2}d\upsilon_y\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-|a|\upsilon_z^2}d\upsilon_z=$$

$$(x\overset{def}{=}\sqrt{|a|}\upsilon_x^2\Rightarrow\upsilon_x=\frac{x}{\sqrt{|a|}})$$

$$=c\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-|a|\upsilon_x^2}d\upsilon_x\right)^3=c\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-|a|\frac{x^2}{|a|}}\frac{dx}{\sqrt{|a|}}\right)^3=\frac{c}{|a|^{3/2}}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{x^2}dx\right)^3=$$

$$=\frac{c}{|a|^{3/2}}\pi^{3/2}=1\Rightarrow c=\left(\frac{|a|}{\pi}\right)^{3/2}$$

Подставим это значение c в первоначальный нормированный интеграл, получим:

$$1=\left(\frac{|\alpha|}{\pi}\right)^{3/2}\int\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int e^{-|\alpha|\upsilon^2}d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z,$$

где m — масса молекулы $\dfrac{mv^2}{2}$ — ее кинетическая энергия. Очевидно, что средняя кинетическая энергия $\langle E\rangle$ равна интегралу произведения кинетической энергии $\dfrac{mv^2}{2}$ при данной скорости на плотность вероятности иметь такую скорость, т.е.

$$(E)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}E(v)\rho(v)dv=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{|\alpha|}{\pi}\right)^{3/2}\frac{mv^2}{2}e^{-|\alpha|v^2}dv_xdv_ydv_z=$$

$$=\frac{m}{2}\left(\frac{|\alpha|}{\pi}\right)^{3/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)e^{-|\alpha|\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}dv_xdv_ydv_z=$$

$$=\frac{m}{2}\left(\frac{|\alpha|}{\pi}\right)^{3/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(v_x^2e^{-|\alpha|v_x^2}dx_x\right)^3=\frac{m}{2}\left(\frac{|\alpha|}{\pi}\right)^{3/2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{|\alpha|}e^{-|\alpha|\frac{x^2}{|\alpha|}}\frac{dx}{\sqrt{|\alpha|}}\right)^3=$$

$$=\frac{m}{2|\alpha|^{3/2}}\left(\frac{|\alpha|}{\pi}\right)^{3/2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx\right)^3=\frac{m}{2\sqrt[2]{\pi^3}\sqrt[3]{|\alpha|}}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}xdx\right)^3=$$

$$=\frac{m}{2\pi^{3/2}|\alpha|^{1/3}}\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xde^{-x^2}\right)^3=\frac{m}{2\pi^{3/2}|\alpha|^{1/3}}\left(-\frac{x}{2}e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)\right)^3=$$

$$=\frac{m}{2\pi^{3/2}|\alpha|^{1/3}}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^3=\frac{m}{2\pi^{3/2}|\alpha|^{1/3}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^3=$$

$$=\frac{\pi^{3/2}}{16\pi^{3/2}|\alpha|^{1/3}}=\frac{1}{16|\alpha|^{1/3}}=\langle E\rangle=\frac{3m}{4|\alpha|}$$

Но $\langle E\rangle=\frac{i}{2}RT=\frac{n_{пост}+n_{вращ}+2n_{колеб}}{2}RT=\frac{3}{2}RT$, где R — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Тогда

$$\frac{3}{4}\frac{m}{|\alpha|}=\frac{3RT}{2}\Rightarrow|\alpha|=\frac{m}{2RT}$$

$$\rho(v^2)=\frac{dP(v^2)}{dv_xdv_ydv_z}=ce^{-|\alpha|v^2}=\left(\frac{|\alpha|}{\pi}\right)^{3/2}e^{-|\alpha|v^2}=\left(\frac{1}{\pi}\frac{m}{2RT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m}{2RT}v^2\right)$$

Очевидно, что

$$\frac{dP(v^2)}{dv}=4\pi v^2\frac{dP(v^2)}{dv_xdv_ydv_z}=4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi RT}\right)^{3/2}e^{\frac{m}{2RT}v^2}.$$

3. О внешнем биллиарде вокруг многоугольника

Белов А.Я., Леенсон М.Л.

Рассматривалась следующая задача: К многоугольнику M из внешней точки проводится касательная. Точка отражается относительно точки касания. Через нее проводится другая касательная и процедура повторяется. Исследовать периодические точки, возможны ли непериодические траектории. Может ли точка убежать на бесконечность?

Для случаев, когда многоугольник M есть квадрат, правильный треугольник или шестиугольник, а также когда координаты всех вершин рациональны, задача допускает полное исследование. Для этих ситуаций показано, что если в процессе движения точка не попадет на продолжение стороны многоугольника, то ее траектория периодична.

В общем случае можно доказать, что множество точек периода $2k$ открыто, а точек периода $2k+1$ — конечно. Окрестность точки периода $2k+1$ состоит из точек периода $2[2k+1]$, множество точек четного периода ограничено многоугольником со сторонами, параллельными сторонам исходного. Если это окрестность точки нечетного периода, то этот многоугольник центрально симметричен. Для случаев, когда M — правильный пятиугольник или семиугольник проведены компьютерные эксперименты. Показано наличие непериодических точек.

4. Об обходе пространства тремя флажками

Бунькова С., Кондаков Г.В. (Москва)

Известно, что существует обход n-мерной решетки конечным автоматом с тремя флажками, основанный на организации Машины Минского: Расстояния между флажками играют роль выносной памяти и позволяют имитировать компьютер с неограниченными ресурсами (Машину Минского). Однако, время прихода к данной точке решетки при таком обходе экспоненциально зависит от координат. Поэтому возникает задача осуществления обхода за полиномиальное время.

Теорема (С. Бунькова). Существует обход трехмерной решетки за полиномиальное время, т.е. время прихода к данной точке полиномиально (кубически!) зависит от координаты.

Поскольку число точек решетки растет как куб в зависимости от координаты, то данный обход в некотором смысле оптимален.

Идея доказательства состоит в обходе поверхности расширяющегося куба. Такой обход осуществляется по ее граням. Идея обхода каждой грани — квадратика состоит в следующем: пусть два флажка с автоматом находятся в одной клетке, а третий — на расстоянии n от них. Автомат, расталкивая их, поднимается к третьему флажку. Второй флажок идет вертикально, первый — под 45°. В момент встречи второго и третьего флажков пройдено пол-квадрата.

Возможность осуществить оптимальный обход связана с тем, что система автомат-три флажка имеющая диаметр n может принимать порядка n^3 внутренних состояний, а это число точек решетки в области такого диаметра. Поэтому ожидать осуществления оптимального обхода в случае решеток высшей размерности не приходится.

5. Недезарговы проективные плоскости

Павловский Игорь, Омская ФМШ, 11 класс. Руководитель: Штерн А.С.

Прежде всего дадим определение проективной плоскости.

Проективной плоскостью называют множество, элементы которого именуются *точками* и набор его подмножеств, именуемых *прямыми*, если при этом выполняются следующие условия-аксиомы.

Π_1. Две различные точки P и Q принадлежат ровно одной прямой.

Π_2. Пересечением двух прямых является по меньшей мере одна точка.

Π_3. Существуют три не принадлежащие одной прямой точки.

Π_4. Прямая содержит по меньшей мере три точки.

Приведем пример проективной плоскости. Пусть $\mathbb{R}^3$ — обыкновенное трехмерное евклидово пространство, и пусть O — некоторая точка из $\mathbb{R}^3$. Обозначим через L множество прямых из $\mathbb{R}^3$, проходящих через O, а “прямой” назовем плоскость, проходящую через O.

Нетрудно убедиться, что множество L удовлетворяет аксиомам Π_1–Π_4 и, следовательно, является проективной плоскостью. Ее обычно называют *действительной проективной плоскостью.* В ней бесконечное число элементов. Но существуют плоскости с конечным числом элементов, и в дальнейшем (кроме специальных оговорок) мы будем говорить только о них, иногда опуская слово "конечная". Приведем пример одной из них. Это самая маленькая (с наименьшим числом точек) конечная проективная плоскость (см. рис. 1, где PQR — одна прямая).

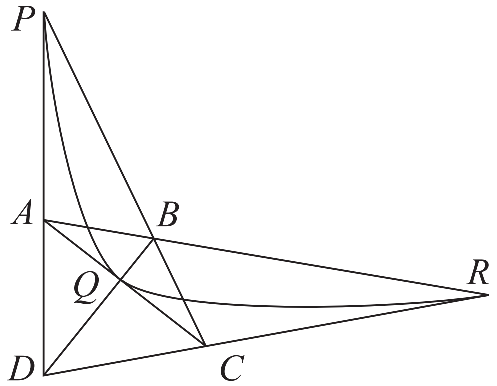


Рис. 1

Можно показать, что все конечные проективные плоскости в своем роде "симметричны", то есть через любую точку проходит одно и то же число прямых, и наоборот, все прямые содержат одинаковое число точек, причем эти два числа равны, и обозначаются через $n+1$. Тогда всего точек на плоскости (столько же и прямых) будет n^2+n+1 Число n называется *порядком* конечной проективной плоскости. Та плоскость, которую мы построили выше, была порядка 2, и легко убедиться, что для нее выполняются все эти соотношения. Если из проективной плоскости выбросить любую прямую со всеми точками, через которые она проходит, то получится "аффинная плоскость".

Аффинной плоскостью называют множество элементов, именуемых точками, и систему его подмножеств, именуемых прямыми, причем должны выполняться три формулируемые ниже аксиомы.

A_1. Для любых двух различных точек P и Q существует единственная прямая, которой принадлежат обе точки.

A_2. Для любой прямой L и точки P вне нее существует единственная прямая, содержащая P и параллельная L. (Две прямые называются параллельными, если они не имеют общих точек).

A_3. Существуют три не принадлежащие одной прямой точки.

И наоборот, если к каждой прямой каждого семейства параллельных прямых аффинной плоскости добавить по точке, провести через все новые ("идеальные", "бесконечно удаленные") точки ("идеальную", "бесконечно удаленную") прямую, то получится проективная плоскость того же порядка. Таким образом, на конечной аффинной плоскости n^2 точек, на каждой прямой — по n точек. Через каждую точку проходит $n+1$ прямая, всего n^2+n прямых.

Примером аффинной плоскости может служить обычная евклидова плоскость.

Таблицей инцидентности проективной плоскости называется квадратная матрица, каждой строке которой соответствует ровно одна прямая и каждому столбцу которой — ровно одна точка. На пересечении i-го столбца и j-ой строки в клетке ij ставится знак инцидентности "$\Diamond$" тогда и только тогда, когда i-ая точка принадлежит j-ой прямой.

Например, плоскости, изображенной на рис. 1, соответствует таблица инцидентности на рис. 2.

	A	B	C	D	P	Q	R
ABR	♦	♦					♦
ACQ	♦		♦			♦	
ADP	♦			♦	♦		
BCP		♦	♦		♦		
BDQ		♦		♦		♦	
CDR			♦	♦			♦
PQR					♦	♦	♦

Рис. 2

Часто бывает, что для доказательства на первый взгляд очевидных утверждений не хватает аксиом. Поэтому иногда вводят дополнительные аксиомы. Наиболее известные — это теорема Дезарга (Π_5), аксиома Паппа (Π_6,) и аксиома Фано (Π_7). Нам понадобится только Π_5.

Пусть заданы два треугольника ABC и $A'B'C'$, такие, что прямые AA', BB' и CC', соединяющие соответственные вершины треугольников, пересекаются в точке O. Тогда пары соответствующих сторон пересекаются в трех точках $P = AB \cap A'B'$; $R{=}BC{\cap}B'C'$; $Q = AC \cap A'C'$, принадлежащих одной прямой (см. рис. 3).

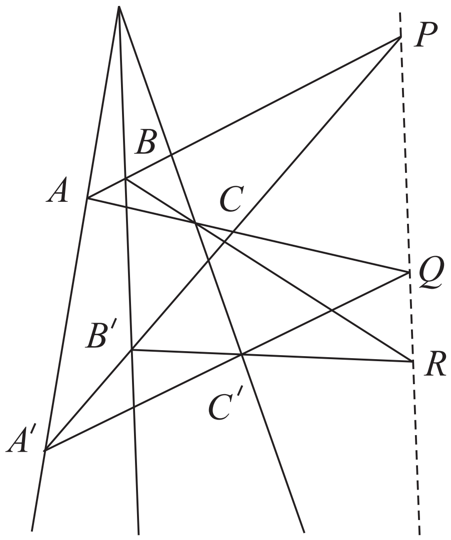


Рис. 3
Π_5. (Аксиома Дезарга).

Определим теперь понятие *недезарговой* и *дезарговой* плоскости.

Недезарговой проективной плоскостью называют проективную плоскость, в которой существует конфигурация из 10 точек и из 10 прямых, для которой выполняется условие теоремы Дезарга, но не выполняется само утверждение теоремы Дезарга.

Дезарговой проективной плоскостью называют проективную плоскость, если она не является недезарговой, или, иначе говоря, если в ней для любой конфигурации из 10 точек и 10 прямых, для которой выполняется условие теоремы Дезарга, выполняется и утверждение теоремы Дезарга.

Однородные координаты на плоскости определяются так: с каждой точкой связывается ненулевая упорядоченная тройка чисел (x_1,x_2,x_3) из некоторого алгебраического объекта А с введенными на нем операциями сложения и умножения, причем две тройки чисел (x_1,x_2,x_3) и (x_1',x_2',x_3')

задают одну и ту же точку тогда и только тогда, когда существует $\alpha \neq 0$ из A, такое, что $x_i' = x_i\alpha$ ($i = 1, 2, 3$) — "пропорциональные", тройки. Прямым соответствуют тройки чисел, удовлетворяющие тем же условиям. Точка (x_1,x_2,x_3) принадлежит прямой (a_1,a_2,a_3) тогда и только тогда, когда $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$.

Вспомним пример действительной проективной плоскости. Там "точки" — это прямые трехмерного евклидова пространства, на которых лежат точки с координатами $(x_1\alpha,x_2\alpha,x_3\alpha)$, а "прямые" — это плоскости трехмерного пространства с уравнениями $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ (если 0 — начало координат), где a_ix_i и α принадлежат полю действительных чисел $\mathbb{R}$. Теперь понятно, почему эту плоскость называют действительной проективной плоскостью.

Оказывается, на любой дезарговой плоскости можно ввести однородные координаты над полем, и обратно, по любому полю можно построить дезаргову проективную плоскость координатным способом.

Покажем, как можно строить конечные дезарговы плоскости по конечным полям на примере .плоскости порядка 2 по Z_2. Выписываем все возможные "непропорциональные" ненулевые тройки чисел из Z_2: (0,0,1), (0,1,0); (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1). Их, как и должно быть, 22+2+1=7. Пусть они соответствуют точкам A, B, C, D, P, Q, R и прямым L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7. По уравнению $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = 0$ будем смотреть, каким прямым принадлежит каждая точка и заносить эту информацию в таблицу инцидентности (рис. 4). Точно таким же образом можно построить любую дезаргову плоскость. С помощью компьютера мне удалось построить дезаргову плоскость порядка 9.

	A	B	C	D	P	Q	R
L_1		♦		♦		♦	
L_2	♦			♦	♦		
L_3			♦	♦			♦
L_4	♦	♦	♦				
L_5		♦			♦		♦
L_6	♦					♦	♦
L_7			♦		♦	♦	

Рис. 4

Построим недезаргову плоскость порядка 9 вышеизложенным координатным методом по почти-полю. Для этого сначала определим это почти-поле A по полю F. Пусть F — поле из девяти элементов вида $a + bj$, где a, b — вычеты по модулю 3, $j^2 = 2$. Сложение и умножение в F вводится так, как будто элементы F — это многочлены. Теперь определим почти-поле Φ: элементы A — это элементы F, сложение в A — это сложение в F. Но умножение зададим так: для любых x, y, принадлежащих A, произведение

$$(x)(y) = \begin{cases} x^3y, & \textit{если} \quad y \text{ — } \quad \textit{не} \quad \textit{квадрат в} \quad F \\ xy, & \textit{если} \quad y \text{ — } \quad \textit{квадрат} \quad \textit{в} \quad F \end{cases}$$

где xy и x^3y — обычное умножение в F. Можно доказать, что A — коммутативная группа по сложению, ненулевые элементы из A образуют группу по умножению, для любого x из A верно равенство $(0)(x) = (x)(0) = 0$, и для всяких x, y, z из A выполняется односторонняя дистрибутивность.

$$(x + y)(z) = (x)(z) + (y)(z)$$

Строя матрицу инцидентности 91x91 координатным способом по A, мы получим матрицу недезарговой проективной плоскости. Конечно, считать это все вручную — не самое приятное занятие, но можно заставить работать компьютер, что я и сделал.

Квадрат-матрица $n \times n$ называется *латинским квадратом*, если в любом его столбце и в любой его строке каждое число от 1 до n встречается ровно один раз, например, первые два квадрата на рис. 5 являются латинскими, а последний таковым не является.

Два латинских квадрата называются *ортогональными*, если при наложении одного из них на другой n^2 полученных при этом ячеек (ячейка состоит из упорядоченной пары (ij), где i берется из первого квадрата, а j — из второго) все различны, то есть получается квадрат, состоящий из всех пар (U,V), $U,V=1, \ldots, n$, где каждая пара встречается ровно один раз. Например, первые два квадрата на рис. 5 — ортогональны.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 2&3&1\\\hline 3&1&2\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 3&1&2\\\hline 2&3&1\\\hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 2&3&1\\\hline 1&2&2\\\hline\end{array}$$

Рис. 5

N латинских квадратов называются *попарно ортогональными*, если любые два из них ортогональны. И если построить латинский квадрат $n \times n$ не составляет труда, то построить $(n-1)$ попарно ортогональных латинских квадратов $n \times n$ (больше, очевидно, быть не может) — задача не из легких. Но, оказывается, по любой проективной плоскости порядка n можно построить $(n-1)$ попарно ортогональных латинских квадратов $n \times n$, и обратно, по $(n-1)$-му попарно ортогональному латинскому квадрату $n \times n$ можно восстановить проективную плоскость, т.е. они содержат полную информацию. Покажем, как строить квадраты по плоскости.

В первую очередь выкинем одну из прямых и получим аффинную плоскость того же порядка n. Ее прямые разделяются на $(n+1)$ семейство параллельных прямых. Обозначим какие-либо два из этих семейств через F_r и F_c и назовем их семейством строк и семейством столбцов, а остальные семейства обозначим через $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$. Перенумеруем, произвольным образом прямые каждого семейства от 1 до n. Нумерацию в F_r будем считать нумерацией строк квадрата, нумерацию в F_c — нумерацией столбцов. Любая точка P лежит на одной прямой из F_r и на одной прямой из F_c, и поэтому ее можно сопоставить с определенной ячейкой квадрата.

Таким образом, точку P из i-ой строки и j-го столбца, мы можем обозначить через $P=(i,j)$. Для каждого из семейств $F_1, \ldots, F_{n-1}$ построим латинский квадрат $n \times n$ следующим образом. Пусть F_u — одно из этих семейств, состоящее из прямых $L_1^u, L_2^u, \ldots, L_n^u$ где нумерация нижних индексов произвольна. Возьмем $n \times n$ квадрат и поместим число V в ячейку (i,j), если $P=(i,j)$ лежит на V-ой прямой L_v^u семейства F_u. Можно показать, что квадрат будет заполнен целиком и что он будет латинским. Таким образом, мы получили $n-1$ латинских квадратов. Так вот они-то все как раз и попарно ортогональны.

Мне удалось построить по 8 попарно ортогональных квадратов 9×9 по той недезарговой плоскости, построение которой описано выше, по недезарговой плоскости, построение которой будет описано ниже, и по дезарговой плоскости порядка 9 над полем F из 9 элементов с помощью компьютера.

Две проективные плоскости S и S' — называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение $T : S \to S'$ которое переводит коллинеарные точки в коллинеарные.

Автоморфизмом проективной плоскости называют ее изоморфизм на себя (отображение $T : S \to S$).

Так как мы ввели понятие изоморфизма, то возникает естественный вопрос: существуют ли две неизоморфные проективные плоскости одного порядка? (Плоскости разных порядков, конечно же, неизоморфны). При порядках $n < 9$ ответ на этот вопрос отрицательный, так как доказано, что все проективные плоскости порядка $n < 9$ — дезарговы, а любые две дезарговы плоскости одного порядка изоморфны; так как все дезарговы плоскости являются плоскостями над полями соответствующих порядков, а, как известно, все поля одного порядка изоморфны.

Итак, все дезарговы плоскости одного порядка изоморфны. Дёзаргова плоскость, очевидно не может быть изоморфна недезаргозой. А могут ли быть две недезарговы плоскости одного порядка неизоморфны? Одну недезаргову плоскость порядка 9 мы построили. Есть ли еще одна этого же порядка? Из энциклопедии известно, что есть. Оказывается, есть еще один, совершенно другой метод построения, но из-за отсутствия времени я не могу его изложить.

С помощью компьютера мне удалось построить этим методом вторую матрицу инцедентиости.

Установить изоморфизм этих двух плоскостей так же трудно, как и доказать, что его не существует. К слову, всего известны 4 неизоморфные недезарговы плоскости порядка 9, но неизвестно, есть ли еще, а ведь 9 — наименьший порядок, при котором существуют недезарговы плоскости. Я пытался привести обе таблицы инцедентности к Г-виду (нетрудно заметить, что последовательной перестановкой строк и столбцов матрицы плоскость не меняется, а таблица — даже очень сильно), но ничего обнадеживающего или дающего хоть какие-то шансы на продвижение в ту или иную сторону не получилось. (Г-вид — это особый вид матриц инцедентности, к нему можно привести любую из них. Все они делятся на три крюка: внешний, средний и внутренний. Если во внешнем крюке знаки инцедентности расположены в виде буквы “Г”, в среднем — ступенчато, а во внутреннем — в произвольно заданном вначале диагональном расположении, то говорят, что матрица приведена к Г-виду). Строил тернары[2] (все при помощи компьютера), но оказалось, что по ним практически ничего сказать нельзя — например, у тернара, построенного по первой плоскости, сложение было некоммутативным, в то время как у исходного (почти-поля), по которому строилась плоскость, коммутативность сложения выполнялась, то есть тернар не однозначен.

Литература

1. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. - М.: Мир, 1970.

[2]Термин “тернар” обозначает *терневрную операцию*, когда по трем элементам некоторого множества строится четвертый. — *Прим. ред.*

Библиографические материалы к юбилейным датам 2014 года. II полугодие

Р. З. Гушель

Календарь юбилейных дат второй половины 2014 г., связанных с именами известных деятелей в области математики и математического образования, а также с важнейшими событиями в этой сфере. После краткой информации о человеке или событии приводится небольшой список литературы.

14 июля — 150 лет со дня рождения известного отечественного математика-педагога, организатора учительского института в Киеве **Константина Моисеевича Щербины** (умер 29 августа 1946).

1) Бетина Н. П. Константин Моисеевич Щербина // Киевские математики-педагоги. — Киев. — 1979. — С. 117–124.

2) Гончаров Д.С. Профессор К.М. Щербина // МШ. — 1947. — № 2.

3) Щербина К.М. Математика в русской средней школе. — Киев. — 1908. — 152 с.

4) Бернштейн С. Рецензия на книгу К. М. Щербины «Математика в русской средней школе», Киев, 1908 // ПС. — 1909. — № XII. — С. 512–515.

5) Щербина К.М. Математические кружки в средней школе // МШ. — 1940. — № 3. — С. 38-47.

6) Щербина К.М. О преподавании систематического курса обыкновенных дробей. — Киев. — 1911.

7) Щербина К.М. Примерные программы и объяснительные записки, напечатанные в «Материалах по реформе средней школы. Пг., 1915» //ВОФЭМ. — 1916. — № 658-660.

19 июля — 120 лет со дня рождения отечественного математика, чл.-корр. АН СССР и академика АПН РСФСР **Александра Яковлевича Хинчина** (умер 18 ноября 1959). Основные труды его относятся к теории вероятностей, математической логике, теории функций, теории чисел, математическому анализу, истории математики.

1) Гнеденко Б.В. Александр Яковлевич Хинчин. К 60-летию со дня рождения // УМН. — 1955. — Т. 10. — Вып. 3. — С. 197–212.

2) Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Александр Яковлевич Хинчин. Некролог // УМН. — 1960. — Т. 15. — Вып. 4. — С. 97–110.

3) Хинчин А.Я. Восемь лекций по математическому анализу. — М. — 1948. — Изд. 3. — 260 с.

4) Хинчин А.Я. Педагогические статьи. — М. — 1963.

5) Хинчин А.Я. Понятие предела в средней школе (исторический очерк) // МШ. — 1939. — № 4. — С. 15–22.

6) Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. — М. — 1963. — 235 с.

7) Хинчин А.Я. Три жемчужины теории чисел. — М. — 1979. — 72 с.

8) Хинчин А.Я. Понятие энтропии в теории вероятностей //УМН. — 1953. — Т. 8. — Вып. 3. — С. 3–20.

3 августа — 160 лет со дня рождения отечественного математика-педагога **Михаила Григорьевича Попруженко** (умер в 1917г.).

1) Метельский Н.В. Очерки истории методики математики. — Минск. — 1968.

2) Михаил Григорьевич Попруженко (некролог) // Математический вестник. — 1917. — № 2.

3) Памяти М.Г. Попруженко // ПС. — 1917. — Май-июнь. — С. 466–471.

4) Попруженко М.Г. Второй Всероссийский съезд преподавателей математики // ПС. — 1914. — № VII, X.

5) Попруженко М.Г. Значение учебника при обучении математике //ВОФЭМ. — 1896. — № 229–230.

6) Попруженко М.Г. Материалы по методике анализа бесконечно малых в средней школе. СПб. — 1912. — 91 с.

7) Попруженко М.Г. Начала анализа. — СПб. — 1913. — Изд. 3.

8) Попруженко М.Г. О бесконечности // ВОФЭМ. — 1893. — №№ 162, 165–168.

21 августа — 225 лет со дня рождения выдающегося французского математика, члена Парижской АН (1816), Петербургской АН (1831) **Огюстена Луи Коши** (умер 23 мая 1857). Им написано более 700 работ по математике. В них заложены основы математического анализа, теории функций, математической физики. Он создал теорию функций комплексного переменного, определил понятие непрерывности функции.

1) Головинский И.А. О методе интерполяции О.Л. Коши // ИМИ. — 1984. — Вып. 28. — С. 26–78.

2) Демидов С.С. К истории теории дифференциальных уравнений // ИМИ. — 1979. — Вып. 24. — С. 191–217.

3) Добровольский В.А. Юность и зрелость Коши // МШ. — 1989. — № 6.

4) Молодший В.Н. О. Коши и революция в математическом анализе первой четверти XIX века // ИМИ. — 1978. — Вып. 23. — С. 32–55.

5) Юшкевич А.П. О возникновении понятия об определённом интеграле Коши // Труды ИИЕ. — 1947. — Т. 1. — С. 373–411.

6) Юшкевич А.П. Развитие понятия предела до К. Вейерштрасса // ИМИ. — 1986. — Вып. 30. — С. 11–81.

7) Коши О.Л. Алгебраический анализ. — Лейпциг. — 1864.

5) Коши О.Л. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении. — СПб. — 1831.

4 сентября — 125 лет со дня рождения отечественного математика, чл.-корр. АН СССР (1946) **Вячеслава Васильевича Степанова** (умер 22 июля 1950). Он — один из основоположников советской школы качественной теории дифференциальных уравнений, вице-президент Московского математического общества (с 1943).

1) Александров П.С., Немыцкий В.В. Вячеслав Васильевич Степанов. — М. — 1956. — 60 с.

2) Вячеслав Васильевич Степанов // ПММ. — 1950. — Т. 14. — Вып. 6. — С. 565–572.

3) Мышкис А.Д., Олейник О.А. Степанов Вячеслав Васильевич (к 100-летию со дня рождения) // УМН. — 1990. — Т. 45. — Вып. 6. — С. 161–163.

4) Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. — М. — 1953. — Изд. 6.

5) Степанов В.В. Московская школа теории функций // Уч. зап. МГУ. — 1947. — Т. 91. — С. 47–52.

6) Степанов В.В. Почти периодические функции // Труды Всеросс. матем. съезда. Харьков. — 1927. — С. 214–220.

7) Степанов В.В., Немыцкий В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л. — 1949. — Изд. 2. — 550 с.

12 октября — 80 лет со дня рождения академика РАН (с 2011), заведующего кафедрой теории вероятностей МГУ, заведующего Лабораторией статистики случайных процессов МИРАН, лауреата премии А. Н. Колмогорова РАН (1994), составителя и редактора шеститомника «Избранные труды А.Н. Колмогорова», выходящего с 2005г., **Альберта Николаевича Ширяева**.

1) Боровков А.А., Ибрагимов И.А., Маслов В.П., Прохоров Ю.В., Севастьянов Б.А., Синай Я.Г. К юбилею Ширяева А.Н. // Теория вероятностей и ее применения. – Т.49. – 2004. – Вып. 4. – С. 775–778.

2) Ширяев А.Н. Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений. — М. — 2011.

3) Ширяев А.Н. Вероятность. — М. — 1989. — Изд. 2.

4) Ширяев А.Н. Дополнительные главы теории вероятностей. — М. — 1965.

5) Ширяев А.Н. Неземное притяжение // Колмогоров в воспоминаниях учеников /Ред.-сост. А.Н. Ширяев. — М. — 2006. — С. 10–27.

6) Ширяев А.Н. Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения // Теория вероятн. и её применения. — 1963. — Т. 8. — Вып. 1. — С. 26-51.

7) Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. — 1998. — Т. 1, 2.

8) Ширяев А.Н. Случайные процессы. — М. — 1972.

9) Ширяев А.Н., Булинский А.В. Теория случайных процессов. — М. — 2003.

9 ноября — 280 лет со дня рождения русского астронома и математика, члена Петербургской АН и её вице-президента (1800–1803), попечителя Казанского учебного округа (1803–1812) **Степана Яковлевича Румовского** (умер 18 июля 1812).

1) Павлова Г.Е. Степан Яковлевич Румовский. — М. — 1979.

2) Полякова Т.С. История отечественного школьного математического образования. Два века. — Ростов-на-Дону. — 1997. — Кн. 1.

3) Прудников В.Е. Русские педагоги-математики 18–19 веков. — М. — 1956.

4) Сорокажердьев В. Румовский в Коле // Север. — 1970. — № 7. — С. 101–108.

5) Румовский С.Я. Речь, говоренная при первом собрании, бывшем в гимназии чужестранных одноверцев 1777 года марта 15 дня // Нов. ежемесячн. соч. — 1787. — Ч. XVI. — Октябрь.

6) Румовский С.Я. Сокращения математики. — СПб. — 1760. — Ч. I.

15 ноября — 120 лет со дня рождения отечественного математика, ученика Н. Н. Лузина, одного из создателей дескриптивной теории множеств **Михаила Яковлевича Суслина** (умер в 1919).

1) Игошин В.И. Михаил Яковлевич Суслин. — М. — 1996. — 176 с.

2) Игошин В.И. Страницы биографии Михаила Яковлевича Суслина // УМН. — 1996. — Т. 51. — № 3. — С. 3–16.

3) Кановей В.Г. Вторые математические чтения памяти М.Я. Суслина // УМН. — 1992. — Т. 47. — Вып. 3. — С. 197-198.

4) Левин М. Теорема Суслина (очерк о нём) // Молодой коммунист. — 1982. — № 10. — С. 82–88.

5) Хаусдорф Ф. Основы теории множеств. — М. — 1927. — Изд. 2.

22 ноября — 80 лет со дня рождения отечественного математика, заслуженного профессора Московского университета (2000), главного редактора сборника «Математическое просвещение» (1997–2005), ученика академика А.Н. Колмогорова **Владимира Михайловича Тихомирова**.

1) Магарил-Ильяев Г.Г. Пять сюжетов о творчестве Владимира Михайловича Тихомирова //МПр. — 2006. — Вып. 10.

2) Тихомиров В.М. Андрей Николаевич Колмогоров, 1903–1987: жизнь, преисполненная счастья. — М. — 2006. — 199 с.

3) Тихомиров В.М. Выпуклый анализ. Теория аппроксимации. — М. — 1987.

4) Тихомиров В.М. Жизнь и творчество Андрея Николаевича Колмогорова // УМН. — 1988. — Т. 43. — Вып. 6. — С. 3–33.

5) Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. — М. — 1976.

6) Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // УМН. — 1960. — Т. 15. — Вып. 3. — С. 81–120.

7) Тихомиров В.М. Размышления о первых московских математических олимпиадах //МПр. — 1998. — Вып. 2.

8) Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М. ε-энтропия и ε-ёмкость множеств в функциональном пространстве // УМН. — 1959. — Т. 14. — Вып. 2. — С. 3-86.

26 ноября — 120 лет со дня рождения американского математика, основоположника кибернетики **Норберта Винера** (умер 19 марта 1964).

1) Тихомиров В. О кибернетике, Винере и винеровском процессе // Квант. — 1995. — № 2.

2) Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. — М. — 1963.

3) Винер Н. Кибернетика и общество. — М. — 1958.

4) Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов. — М. — 1961.

5) Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. — М. — 1964.

6) Винер Н. Я — математик. — М. — 1967. — Изд. 2.

3 декабря — 130 лет со дня рождения отечественного математика и механика, чл.-корр. АН СССР, специалиста в теории аналитических функций, аналитической теории дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного и аэромеханике **Владимира Васильевича Голубева** (умер 4 декабря 1954).

1) Белоцерковский О.М. и др. Голубев Владимир Васильевич (к 100-летию со дня рождения) //УМН. — 1985. — Т. 40. — Вып. 1. — С. 225–229.

2) Протасова Л.А., Тюлина И.А. Владимир Васильевич Голубев. — М: МГУ. — 1986.

3) Тюлина И.А. Первый декан механико-математического факультета МГУ — профессор Владимир Васильевич Голубев // ВИЕТ. — 2003. — № 2. — С. 135–142.

4) Голубев В.В. Об одном обобщении теоремы Пикара // МСк. — 1924. — Т. 31. — С. 557–567.

5) Голубев В.В. Работы П.Л. Чебышева по интегрированию алгебраических функций // Научное наследие П.Л. Чебышева. — М.-Л. — 1945. — Т. 1. — С. 88–121.

6) *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.-Л. — 1950. — Изд. 2 — 436 с.

7) Голубев В.В. Механика в Московском университете перед Великой Октябрьской социалистической революцией и в советский период // ИМИ. — 1955. — Вып. VIII. — С. 77-126.

16 декабря — 210 лет со дня рождения замечательного отечественного математика, академика Петербургской АН, специалиста в области теории вероятностей и теории чисел **Виктора Яковлевича Буняковского** (умер 12 декабря 1889).В 1864–1889гг. он был вице-президентом Петербургской АН.

1) Башмакова И.Г. Виктор Яковлевич Буняковский // Люди русской науки. — М. — 1961. — С. 116–120.

2) Ермолаева Н.С. О докторской диссертации В. Я. Буняковского // ИМИ. — 1985. — Вып. 29. — С. 241–255.

3) Мельников И.Г. В. Я. Буняковский и его работы по теории чисел // Труды ИИЕТ. — 1957. — Т. 17. — С. 270–286.

4) Прудников В.Е. В. Я. Буняковский — учёный и педагог. — М. — 1961.

5) Юшкевич А.П. Жизнь и творчество В. Я. Буняковского // МШ. — 1948. — № 3. — С. 1–10.

6) Буняковский В.Я. Арифметика. — СПб. — 1884.

7) Буняковский В.Я. Лексикон чистой и прикладной математики. — СПб. — 1839.

8) Буняковский В.Я. Основания математической теории вероятностей. — СПб. — 1846.

27 декабря — 360 лет со дня рождения швейцарского математика, профессора Базельского университета, ученика Г. В. Лейбница **Якоба Бернулли** (умер 16 августа 1705).

1) Бобынин В.В. Яков I Бернулли и теория вероятностей // МОб. — 1914. — № 4.

2) Виппер Ю.Ф. Семейство математиков Бернулли. — М. — 1875.

3) Никифоровский В.А. Великие математики Бернулли. — М. — 1984.

4) Фрейман Л.С. Творцы высшей математики. — М. — 1968.

5) Цейтен Г.Г. История математики в XVI и XVII веках. — М.-Л. — 1933.

6) Юшкевич А.П. О первом издании «Искусства предположений» Я. Бернулли. К 300-летию закона больших чисел // ВИЕТ. — 1987. — № 4. — С. 99-105.

7) Бернулли Я. О законе больших чисел. — М. — 1986.

250 лет со дня рождения отечественного педагога-математика и механика, члена Петербургской АН **Семёна Емельяновича Гурьева** (умер 23 декабря 1813). Исследования его относятся к аналитической и дифференциальной геометрии. Занимался вопросами методики и методологии математики.

1) Бобынин В.В. Элементарная геометрия и её деятели во второй половине XVIII века // ЖМНП. — 1907. — № 11; 1908. — № 1.

2) Прудников В.Е. К биографии академика С.Е. Гурьева // Труды ИИЕТ. — 1956. — Т. 10. — С. 384–392.

3) Юшкевич А.П. Академик С.Е. Гурьев и его роль в развитии русской науки // Труды ИИЕ. — 1947. — Т. 1. — С. 219–269.

4) Юшкевич А.П. Русская математика на рубеже XVIII-XIX столетий. Жизнь и деятельность С. Е. Гурьева // МШ. — 1947. — № 6. — С. 26–37.

5) Гурьев С.Е. Краткое изложение различных способов изъяснять дифференциальное исчисление. — СПб. — 1813.

6) Гурьев С.Е. Морского учебного курса часть вторая, содержащая основания науки исчисления. — СПб. — 1805.

7) Гурьев С.Е. Основания геометрии. — СПб. — 1811. — Изд. 2.

8) Гурьев С.Е. Основания дифференциального и интегрального исчисления и с приложением оного к аналитике. — СПб. — 1811.

27 сентября — 150 лет со времени основания **Московского математического общества (ММО)**. Инициатором его создания выступили Н. Д. Брашман (1796–1866) и А. Ю. Давидов (1823–1886). Н. Д. Брашман был избран первым президентом ММО. Среди членов-учредителей общества были Н. В. Бугаев, П. Л. Чебышев, В. Я. Цингер и другие.

1) Александров П.С., Головин О.Н. Московское математическое общество (к 90-летию научной деятельности) // УМН. — 1957. — Т. 12. — Вып. 6. — С. 9–46.

2) Гнеденко Б.В. К столетию Московского математического общества // МШ. — 1965. — № 2. — С. 95–96.

3) Майстров Л.Е. Возникновение Московского математического общества // УМН. — 1959. — Т. 14. — Вып 3. — С. 227–234.

4) Материалы для истории Московского математического общества // МСк. — 1889. — Т. 14. — Вып. 3. — С. 471–486.

5) Половинкин С.М. О студенческом математическом кружке при Московском математическом обществе в 1902–1903 гг. // ИМИ. — 1986. — Вып. 30. — С. 148–158.

6) Устав Московского математического общества // МСк. — 1867. — Т. 2. — Вып. 1.

7) Шевелев Ф.Я. К истории Московского математического общества // ИМЕН. — 1966. — Вып. 5. — С. 62–74.

1 октября — 150 лет со времени выхода в свет первого номера **журнала «Педагогический сборник»**, издававшегося Главным управлением военно-учебных заведений до 1917г. включительно. Вопросам преподавания математики в журнале отведено значительное место.

1) Депман И.Я. Русские математические журналы для учителя // МШ. — 1951. — № 6. — С. 9–22.

2) Симонов И.С. «Педагогический сборник» за 50 лет. — Пг. — 1914.

3) Систематический указатель статей, напечатанных в неофициальной части «Педагогического сборника» за 50лет (1864–1914) / Сост. С.А. Переселенков. — СПб. — 1915. — 288 с.

4) Балдин С. О преподавании аналитической геометрии в кадетских корпусах // ПС. — 1909. — № 1. — С. 50–64.

5) Долбня И.П. О наибольших и наименьших величинах // ПС. — 1898. — № IV. — С. 360–365.
6) Ермаков В.П. О преподавании алгебры // ПС. — 1892. — № V. — С. 442–472.
7) История методики геометрии // ПС. — 1879. — № XI, XII.
8) Шохор-Троцкий С.И. О связи теории пределов с теориею иррациональных чисел // ПС. — 1901. — № I. — С. 50–70.

19 ноября — 150 лет со дня утверждения **«Устава гимназий и прогимназий Министерства народного просвещения»**, в котором впервые в России предусматривались мужские гимназии двух типов — классические и реальные. Устав готовился в течение 1856-1864гг., было составлено и опубликовано последовательно несколько проектов, и только осенью 1864г. очередной проект был утверждён.

1) Головнин А.В. Записки для немногих. — СПб. — 2004.
2) Гушель Р.З. О подготовке гимназического устава 1864 года // Отечественная и зарубежная педагогика. — 2013. — № 6. — С. 149–166.
3) Проект устава низших и средних училищ, состоящих в ведомстве Министерства народного просвещения // ЖМНП. — 1860. — Ч. CV. — С. 85–163.
4) Рождественский С.В. Исторический обзор деятельности Министерства народного просвещения. 1802-1902. — СПб. — 1902. — 785 с.
5) Соображения о распределении предметов преподавания в гимназиях. — СПб. — 1864.
6) Устав гимназий и прогимназий ведомства Министерства народного просвещения. — СПб. — 1864; также ЖМНП. — 1864. — № 11. — С. 45–83.

Список сокращений

ВИЕТ	—	Вопросы истории естествознания и техники. Журнал.
ВОФЭМ	—	Вестник опытной физики и элементарной математики. Журнал, издавался в Одессе в 1886-1917гг.
ЖМНП	—	Журнал Министерства народного просвещения, выходивший в 1834-1917гг.
ИИЕ (ИИЕТ)	—	Институт истории естествознания (с 1954 г. — Институт истории естествознания и техники).
ИМИ	—	Историко-математические исследования. Сб. статей.
ИМЕН	—	История и методология естественных наук. Сб. статей.
МОб.	—	Математическое образование. Журнал, выходивший в 1912–1917 и 1928–1930 гг. В 1997 г. его издание возобновлено.
МПр.	—	Математическое просвещение. Сб. статей.
МСк.	—	Математический сборник. Журнал, выходит с 1866 г.
МШ	—	Математика в школе. Журнал.
ПММ	—	Прикладная математика и механика. Журнал.
ПС	—	Педагогический сборник. Журнал, выходивший в 1864–1917 гг.
УМН	—	Успехи математических наук. Журнал.

Гушель Ревекка Залмановна,
г. Ярославль, научный сотрудник отдела
Истории математики и математического образования
Научно-практического центра
“Математическое просвещение”.

E-mail: gushelr@yandex.ru

Информация

Скончался В. В. Цукерман

Редакция с глубоким прискорбием сообщает о кончине Профессора кафедры Математики и физики МГГУ им. М. А. Шолохова постоянного автора нашего журнала Виталия Владимировича Цукермана. Материалы, посвященные его памяти, будут опубликованы в следующем номере.

Замеченные опечатки в номере 2(70), 2014 г.

В статье М. Г. Морозкиной и В. В. Цукермана "Измерение отрезков. Координатная прямая и свойства абсолютных величин" по техническим причинам допущен ряд опечаток. Номер журнала с исправленным вариантом статьи доступен на сайте "matob.ru". По заявке редакция вышлет исправленный оттиск статьи в электронном или бумажном виде. Приносим извинения читателям.

Участвуем в проекте "Научно-просветительский клуб «Ломоносов»"

Наш журнал стал участником образовательного проекта "Научно-просветительский клуб «Ломоносов»" в плане информационной поддержки и предоставления подходящих материалов. Математическая часть проекта представлена на портале lomonosovclub.com

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.npcmapro.ru   Раздел: Партнеры, журнал "Математическое образование". www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанным адресам.

Отдельные материалы имеются на www.lomonosovclub.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2014 год (включая стоимость пересылки) – 80 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2014 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 70 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ) и Российском индексе научного цитирования (РИНЦ).

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138
9 771992 613776