ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год семнадцатый

№ 4 (68)

октябрь -декабрь 2013 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 4 (68), 2013 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2013 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 31.12.2013 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 5,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (68), октябрь – декабрь 2013 г.

Содержание

Международная математическая олимпиада: взгляд изнутри

Б. В. Рублев

Международная математическая олимпиада (ММО) — международное математическое соревнование школьников самого высокого уровня, как по сложности предлагаемых задач, так и по уровню подготовки участников. Организовать и провести ММО очень непросто, кроме государственной поддержки требуется согласованная и напряженная работа многих членов международной команды. О механизме подготовки и проведения олимпиады, о внутренней олимпийской "кухне", о различных поучительных случаях из истории олимпиад интересно и со знанием дела рассказывает автор статьи. Поскольку автор является представителем Украины, ряд вопросов изложен с точки зрения украинской делегации.

Введение

Сначала у меня было желание рассказать об истории возникновения Международных математических олимпиад (International Mathematical Olympiad, IMO), участии украинских учащихся в IMO сначала в составе команды СССР, а далее как представителей независимой страны. Но сразу стало понятным, что вся эта информация или хорошо известна из литературы, или легко доступна в сети Интернет. Повторять весь этот пересказ особого желания не возникло. Поэтому я решил рассказать о "кухне" IMO, с которой я впервые познакомился лично в 2009 году на 50-й IMO, и далее в течение следующих лет она стала мне достаточно хорошо понятной, особенно после тесного общения с представителями других стран. Таким образом, здесь вашему вниманию предлагается особый взгляд на IMO изнутри, с учетом уточнений, пожеланий, замечаний других украинских участников IMO, то есть то, о чем мало где можно прочитать и что мало кто знает.

Основные действующие лица IMO

В IMO принимают участие **организаторы**, **координаторы**, **задачная комиссия**, **гиды**, **лидеры**, заместители лидеров, наблюдатели трех категорий "A", "B" и "C", ну и главные действующие лица олимпиады — **участники**. Попробую пояснить в общих чертах роль каждого.

Участники — это представители страны, которые принимают участие в IMO. Правила их отбора в каждой стране свои. Например, в Украине — это победители соревнования, которое так и называется "Отбор команды Украины на IMO". В нем в последние годы принимают участие 12 (иногда больше) победителей последней Всеукраинской олимпиады, которые соревновались в параллели 11-го класса. Участников от страны должно быть не более 6, все они не должны быть студентами вузов, на день проведения второго тура им не должно исполниться полных 20 лет.

Исторический экскурс. Эти ограничения позволяют становиться мультичемпионами представителям стран, в которых среднее образование можно получать до 20 лет и даже дольше. Для ученика из Украины, где среднее образование получают примерно в 17 лет, очень сложно даже принять участие в нескольких IMO. Чтобы принять участие по крайней мере в трех IMO, ученик уже в 9 классе должен быть не слабее, чем ученики 10-11 классов со всей страны. Таких примеров в нашей истории было два: Юлий Санников (г. Севастополь) и Павел Пилявский (г. Винница).

Юлий Санников принимал участие в 3-х IMO 1994-1996 годов и до сих пор он — единственный представитель Украины, который завоевал 3 золотые медали, и первый участник нашей страны, кто занял абсолютное первое место на IMO. Второй украинский мультичемпион — Павел Пилявский. Он вообще 4 раза принимал участие в IMO 1996-1999. Т.е. впервые он доказал свое право на участие в IMO еще в 8 классе. Возможно, этому способствовало то, что на это время в Украине не было строгого правила отбора на IMO. И жюри имело возможность приглашать на отбор на IMO учеников из любой параллели по своему усмотрению. Теперь эта ситуация регламентирована “Положением о проведении ученических олимпиад”. Поэтому самые сильные наши участники чаще всего принимают участие в IMO дважды. Приведем список тех, кто дважды завоевывал золотые медали: это Максим Федорчук (г. Киев) в 1999 и 2000 годах, Павел Мищенко (г. Донецк) в 2007 и 2008 годах и Богдан Веклич (г. Киев) в 2009 и 2010 годах. Кроме того, абсолютными победителями IMO (это те участники, которые набрали больше всех баллов, при этом не обязательно, чтобы это был абсолютный результат, если задания IMO оказались очень сложными) от Украины были: в 1994 году Юлий Санников (набрал 42 балла из 42, таких участников было 22), в 1999 году Максим Федорчук (набрал 39 баллов из 42, таких участников было 3) и в 2005 году Сергей Слободянюк (г. Киев) (набрал 42 балла из 42, таких участников было 16).

Примерно такая же картина с мультичемпионами в бывшем СССР и нынешней России. Больше 3-х золотых наград не завоевал ни один участник, и даже по 3 золотые медали выиграли только выдающиеся личности. Намного больше таких мультичемпионов от стран, где среднее образование можно получать гораздо дольше, не спеша поступать в вузы. Очень интересный пример двукратного золотого победителя IMO от России Олега Гольдберга, который по окончании 11 классов решил переехать в США на учебу, но не в университет, а в колледж. Это дало ему возможность еще один раз завоевать золото IMO, но уже от США. Обычно IMO происходит в июле, или в первой его половине, или во второй. Так, обидная неудача постигла на 50-й IMO команду Латвии, когда у самого сильного их участника двадцатилетие пришлось как раз на 8 июля, а IMO началось 10-го. Если бы она началась, как следующая IMO, 2 июля, то он имел бы право принять в ней участие.

В отличие от некоторых других международных олимпиад, где за участие страны платятся определенные взносы, участие в IMO для стран бесплатное. Платить следует лишь за организацию участия своей команды в IMO, т.е. за дорогу и суточные. Но большинство лидеров стран стремятся достойно презентовать свою страну на мировом математическом форуме, а потому занимаются подбором формы для участников, печатью книг и брошюр о национальных олимпиадах, изготовлением и приобретением сувениров (ручки, значки, магнитики и т.п.) с символикой страны и IMO и т.д. Замечу, что далеко не во всех странах команду формируют и сопровождают государственные органы, часто это делают негосударственные организации — союзы математиков, университеты или другие структуры, отвечающие за эту область в стране. При отсутствии достаточного финансирования или при недостаточном количестве достойных учеников от страны может принять участие в IMO и меньшее число участников. Естественно, что это влияет на общий рейтинг страны, где результат состоит из суммы результатов всех участников, но этот рейтинг не является официальным.

Список участников от страны должен быть сформирован до 1 июня и прислан организаторам. После этого его уже изменять нельзя. Участники получают свои шифры, с которыми далее они фигурируют во всех официальных протоколах в течении олимпиады. Фамилии участников с их заграничных паспортов сортируются по латинскому алфавиту, после чего участники, например, от Украины получают такие ники: **UKR1**, **UKR2**, **UKR3**, **UKR4**, **UKR5** и **UKR6**. При общении с организаторами, координаторами именно эти аббревиатуры используют для ссылок на участников.

Организаторы — это **оргкомитет олимпиады**, а также его **помощники**.

Для страны-организатора олимпиада начинается со дня окончания последней олимпиады, когда они принимают из рук предшественников флаг IMO. И это не просто начало подготовки, это уже завершающая ее стадия. Потому как страна-организатор определяется за 3-4 года до ее проведения, и первые этапы подготовки проходят уже тогда. Определяются места для приема участников и жюри, отели, рестораны, возможные экскурсии и т.д. Поскольку это достаточно дорогое удовольствие для страны-организатора, то руководство IMO окончательно доверяет проведение IMO только при наличии гарантий от правительства страны. Вот почему далеко не все страны в состоянии принять IMO, которая является существенной дополнительной нагрузкой на бюджет страны.

Оргкомитет олимпиады — это обычно научные работники, представители страны-организатора, роль которых очень существенна. Это и договоренности с правительственными чиновниками наивысшего ранга, с бизнес-структурами, спонсорами и т.п. по огромному числу вопросов: отели, питание, призы, оргтехника, канцтовары... Часто оргкомитет и возглавляет представитель правительства, а отдельные чиновники, бизнесмены могут также входить в состав оргкомитета для упрощения процедуры решения очень многих вопросов, которые обычно возникают при проведении такого массового мирового форума.

Помощники — это молодые люди, студенты, аспиранты, практиканты университетов или другой академической структуры, которые выполняют гору важной рутинной работы. Тиражирование материалов, сопровождение почетных гостей, подсчет итогов голосований, компьютерный набор, помощь на экскурсиях и т.д.

Гиды — это молодые люди, роль которых является достаточно стандартной при проведении таких массовых международных мероприятий. Они встречают участников вместе с заместителем лидера и наблюдателями “B” и “C” в месте прибытия (чаще всего — аэропорт), а далее уже находятся с командой все время. Они помогают обустроиться в отеле или студгородке, сопровождают участников во время экскурсий, одиночных путешествий по незнакомой стране. Обычно это студенты, в идеале, если это в прошлом выходцы из соответствующей страны. Вообще выходить в город участники имеют право только в сопровождении гида или руководителей своей команды. Работа гидов заканчивается, когда команда соответствующей страны прибывает в аэропорт и отправляется домой.

> ***Исторический экскурс.*** Роль гидов тяжело переоценить для приятного пребывания в незнакомой стране. Так, в Германии и Аргентине гиды команды Украины очень хорошо и активно помогали участникам и руководителям: водили детей по городу, по магазинам, на экскурсии, вообще, практически не расставались с нашими участниками. В Казахстане, Голландии и Колумбии, наоборот, их никогда нельзя было найти, участники от Украины несвоевременно получали информацию и иные материалы, из-за чего не попадали на некоторые интересные экскурсии, или возникали существенные проблемы при участии во многих мероприятиях. Я лично нашего гида в Колумбии видел ровно один раз (мне его показали наши участники), когда он шел купаться на море.

Координаторы — это группа специалистов, которые работают вместе с задачной комиссией и отвечают за проверку заданий участников со стороны организаторов, а также проводят **координацию**. Обычно по окончании выбора 6 задач, которые попадут в окончательный текст олимпиады, координаторы разбиваются на 6 групп. Каждая группа имеет **старшего координатора**, который руководит ее работой. Каждая группа обычно разбивается на несколько столов: A, B, C, D... Поскольку всего сейчас в IMO принимает участие около 100 стран, то на каждый стол приходится более 20 команд. Обычно они делятся по языкам и рейтингам стран. Объединение по языкам является достаточно естественным, поскольку проверить в кратчайший срок 100-120 работ на совершенно разных языках очень тяжело, но иногда приходится. Потому для облегчения работы координаторы группируются по схожим языкам, хотя тут бывают интересные нюансы. Объединение почти всех республик бывшего СССР за одним столом, где участники пишут на грузинском, армянском, литовском и многих других языках, навряд ли можно назвать полностью разумным. Соединение по рейтингам стран также является понятным. За столы, где работают наиболее сильные страны, подбираются наиболее квалифицированные координаторы. Если посмотреть на результаты некоторых азиатских, африканских, латиноамериканских стран (без намерения кого-то обидеть, а просто как констатация фактов), которые на 6 участников набирают в сумме 10-20 баллов, то координация для таких стран является очень простым процессом, а потому и уровень координаторов может быть посредственным. Проводить координацию стран из первой тридцатки мирового рейтинга — это намного более сложный и тонкий процесс. Команда Украины часто работает за тем же столом, что и Россия, Беларусь, а потому нас всегда "обслуживают" наиболее квалифицированные координаторы. Поскольку среди координаторов часто есть россияне, квалификация которых сомнений не вызывает, то бывают случаи, что нас координируют по некоторым задачах даже более "сильные" координаторы, чем саму Россию.

Кроме того, в течении первых дней лидеры, наблюдатели "A" и сами координаторы предлагают альтернативные решения размещенных в шорт-листе задач. После определения текста олимпиады более активно предлагаются альтернативные решения уже основных 6 задач. По окончании этого процесса группа координаторов по каждой задаче начинает обрабатывать все решения. Результатом такой работы становятся **схемы решения задач.**

Старший координатор — это человек, который возглавляет группу координаторов по определенной задаче. Всю группу координаторов, которая составляет около 10-12 человек, он распределяет по разным "столам". Лично старший координатор может также принимать участие в работе определенного стола, как это делал Наири Седракян в Казахстане. Там он работал за столом, где были кавказские и близкие им по языкам страны. А может и не сидеть ни за одним столом, как это делали старшие координаторы в Голландии. Они присоединялись к работе за столами только в случае отсутствия консенсуса между координаторами и представителями страны.

Схема решения задачи — это правила оценивания решения задачи. Все известные на время обсуждения альтернативные решения задачи оформляются в виде схемы — сколько баллов можно ставить за то или иное продвижение при решении задачи. Понятно, что полное и правильное решение оценивается в 7 баллов. А далее каждый принципиальный шаг решения оценивается определенным числом баллов. Это могут быть суммирующие схемы, когда результат определяется суммой баллов. Например, решение разбивается на 7 пунктов, каждый из которых оценивается в 1 балл. Результат — сумма набранных баллов. При этом могут быть оценены даже не последовательные пункты. Например, в работе есть 1-й, 2-й и 5-й пункты схемы. Все равно результат составляет 3 балла. Могут быть поглощающие схемы, когда аналогично расписываются последовательные продвижения, но наличие 5-го пункта без правильно полученного 3-го не оценивается.

Обработанные координаторами схемы решения задач доводит до сведения жюри старший координатор, а также проводит обсуждение этой схемы. Или он убеждает собрание принять предложенный вариант схемы и распределения баллов, или корректирует приведенную схему соответственно проголосованным предложениям из жюри. После этого каждый пункт схемы голосуется отдельно, или вся схема принимается в целом. По окончании обсуждения принимается решение утвердить схему, и проголосованный вариант становится основой для работы во время координации.

Координация — это процесс согласования проверки работ координаторами с одной стороны, лидерами и наблюдателями "A" и "B" от страны, с другой. Координация проводится для каждой страны и по каждой задаче отдельно за соответствующим столом. На первую координацию по каждой задаче стране дают 30 минут. Координаторы проверяют работы каждого участника от страны и выставляют им определенные баллы от 0 до 7 за соответствующую задачу. Аналогичную работу проводят и представители страны. Для этого все работы участников, которые сложены в соответственные папки, копируются.

> ***Исторический экскурс.*** Впервые процедура копирования работ была проведена в 1991 году в Швеции. До этого лидеры стран получали первоисточники работ и проверяли эти работы, после чего работы попадали к координаторам. Некоторые не очень честные лидеры стран могли манипулировать работами в течении этой проверки. Именно такая ситуация случилась с представителями страны “X”. Никто не знал, что у координаторов есть точные копии работ участников. Поэтому на координации было “огромным удивлением” для координаторов, что в работах участников появились новые фрагменты, которых нет на копиях. Не меньшим удивлением для лидеров страны “X” было наличие копий у координаторов. Очевидно, что такие вещи могли случиться только по предварительному сговору, т.е. сговором между участниками и лидерами этой страны. Это, безусловно, является грубым нарушением принципов IMO, если не более серьезным преступлением. Все участники этой “акции” были сурово наказаны в своей стране, а возможно некоторые из них и чересчур сурово... Отметим, что это, к несчастью, является не единственным моментом нарушения правил честного соревнования или принципов IMO.

Тут участникам нужно быть внимательным, поскольку копируются только те страницы решения задач, которые были положены в соответствующие папки. На каждую задачу выдается отдельная папка. Остальные странички не копируются, а потому не могут далее выступать аргументом при координации.

> ***Исторический экскурс.*** На 50-й IMO в Германии Назар Сердюк при решении 3-й задачи в папку для третьей задачи положил только один листок. Остальные положил просто в большую общую папку. Но их не копировали, и хорошо, что там практически не было ничего содержательного. Но в момент, когда участник вкладывает листочки, он точно еще не знает схемы решения. И те факты, которые он получил в процессе решения, и которые не привели к окончательному правильному решению, могут вписаться в другую схему, по которой можно было бы получить больше баллов.
>
> На 54-й IMO в Колумбии Катя Матвиив почти весь первый день решала задачу № 1, она написала 28 страниц, естественно все эти листы она положила в первую папку. Оказалось, что там были заметки, которые могли дать возможность набрать 1 балл по задаче № 2. Координаторы, к счастью, приняли к рассмотрению эти странички. Увы, попытка оказалась неудачной, поскольку не хватило хоть каких-то содержательных пояснений, поскольку там были лишь рисунки...

В назначенное время представители страны (лидер, заместитель лидера, наблюдатели “A” и “B”) садятся за указанный стол. Иногда количество представителей страны ограничивают тремя или даже двумя членами, а остальные вынуждены ожидать в предбаннике, иногда организаторы позволяют сидеть за столом координации всем, но право общения с координаторами имеют только двое из всех представителей страны. Но эти правила являются не очень строгими, и, когда к оживленной дискуссии подключается третий или даже четвертый представитель страны, то больших нарушений тут не происходит. Дискуссия может продолжиться, или просто сделают замечание о нарушении договоренностей о числе выступающих в дискуссии. Напротив представителей страны сидят два или три координатора. Традиционная процедура координации выглядит таким образом. Представитель страны, обычно это делает лидер, говорит оценки своих участников. Например, **UKR1–7**, **UKR2–1**, **UKR3–1**, **UKR4–2**, **UKR5–2** и **UKR6–1**. Это, кстати, реальный результат участников Украины на 52-й IMO за задачу № 2. Ответ координаторов может быть таким — со всеми оценками согласны. Именно так было по этой задаче. Вся координация заняла 2 минуты. Мы пожали руки и разошлись. Но такое происходит очень редко, за последние годы такое случилось считанные разы — 3-4 раза. В чем причины несогласованности? Их несколько.

1. Непонимание координаторами решения участника вследствие языкового барьера или других субъективных соображений.

2. Участник написал несколько разных подходов к решению задачи, и представители страны и координаторы применили разные схемы при оценивании.

3. Решение вообще не вписывается ни в одну из заранее предложенных схем, а потому ее нужно интерпретировать своим адекватным образом.

4. Желание лидеров искусственно завысить результат из соображений, что “уменьшить всегда успеем”.

Наиболее распространенная несогласованность следует из пункта 4. А сама эта причина порождена такими прецедентами к оцениванию координаторами участников. Поскольку они в течение суток или двух, сколько у них есть времени на проверку, очень тяжело работают, то ошибки и неточности весьма вероятны. Это также может быть связано со сложностью перевода. Так вот, если координаторы выставили за задачу, например, оценку 4, а лидер говорит оценку 2, то координаторы в 99 случаях из 100 согласятся с лидерами и выставят оценку 2. При этом лидер даже не догадается, что их участник “потерял” 2 балла. Обратные ситуации случаются очень редко. Так на олимпиаде в Амстердаме, по окончании проверки, координаторы по одной задаче решили несколько изменить некоторые пункты схемы оценивания в сторону ослабления. Потому при оглашении лидером оценки, например, 3, если координаторы видели, что это как раз тот случай, когда лидеры не имеют полной информации, они выставляли больший балл, например, 4. Тут уже также дискуссия не нужна, потому что лидеры даже не понимают, что это просто был в общем изменен подход, а не добытый лишний 1 балл. Но такая ситуация крайне редкая. Мы впервые с таким столкнулись на 52-й IMO по задаче № 5.

Остальные несогласованности живо обсуждаются и тут возможны такие варианты. В процессе общения или координаторы убедились, что они не правы, или представители страны действительно необоснованно завысили баллы своего участника. Если для этого хватило отведенных 30 минут, то выставляются согласованные баллы и ставятся подписи лидера страны и координаторов. Такая ситуация была во время координации задачи № 2 в Казахстане. Удалось убедить, что у Лавинской и Жениленко есть причины поставить по 1 баллу, а у Хрущева вообще координаторы выставили 0 баллов за правильное решение. Просто оно оказалось на 7 листах и чисто тригонометрическое, они или не захотели, или не смогли в нем разобраться. Пришлось нашим наблюдателям все им объяснять, показывать корректность и обоснованность всех переходов. После 25 минут была выставлена законная оценка 7 баллов.

> ***Исторический экскурс.*** Очень интересным оказалась ситуация с одним баллом для Лавинской в Казахстане. По предложенной схеме 2 балла выставлялись за интересный достаточно содержательный результат. У нее в работе было написано около 10 геометрическо-тригонометрических равенств, следующим из которых как раз была запись того соотношения, что оценивалось в 2 балла. Оказалось, что в предложенной по этой задаче схеме не было предусмотрено 1 балла за эти промежуточные результаты. Но всем было понятно, что осталось лишь его написать. На предложение координаторов, что тут 0 баллов, мы предложили поставить 2 балла. Компромиссом стал тот 1 балл, хотя в самой схеме его и не было. Но к этому окончательному решению про 1 балл уже подключился старший координатор по этой задаче и позволил выставить этот 1 балл не по схеме.

Если представители страны и координаторы не могут прийти к консенсусу в отведенные 30 минут, то назначается повторная координация на следующий день или в этот же день, через некоторое время. Обычно представители страны просто высказывают свои аргументы, которые координаторы НЕ увидели при первом рассмотрении работы. Координаторы обещают пересмотреть еще раз работу с учетом ЭТИХ аргументов. Когда совсем сложная ситуация с оформлением работы, чем обычно отличаются некоторые наши участники, например, Щедрина (2009, задача № 4), Сердюк (2009, задача № 6), Мулярчик (2011, задача № 3), то мы помогали координаторам тем, что выписывали на отдельных листах содержательную часть решения. Потому что выделить ее из работы автора, не владея в совершенстве языком ученика, не так уж и просто. Каждый из записанных моментов был в работе нашего участника, просто они были разбросаны по нескольким страницам и перемешаны с ненужными фрагментами. Следующая координация вновь продолжается не более 30 минут. Если после этого стороны не приходят к консенсусу, то назначается последняя координация, которая почти не имеет временного ограничения, и в ней принимают участие со стороны координаторов также и старший координатор по этой задаче. На 52-й ИМО команда Украины по задачам № 2 и № 6 согласовала координацию в течение первой встречи. По задачам № 1 и № 4 компромисс был найден на первой дополнительной координации. По задаче № 1 мы согласились с окончательным решением координаторов оценить работу Кивва в 2 балла, а не 3, а вот по задаче № 4, напротив, координаторы выставили 5 баллов Кивва и 7 баллов Родионову, хотя изначально были настроены на 3 и 5 баллов соответственно. По задаче № 3 мы дошли до встречи со старшим координатором. Мы настаивали, что работа Мулярчика заслуживает оценку 5 баллов, а координаторы изначально ставили 2, после ознакомления с расписанным решением соглашались на 3 балла. На встрече со старшим координатором по этой задаче было принято компромиссное решение на 4 балла. По задаче № 5 даже после встречи со старшим координатором были привлечены дополнительные эксперты из задачного комитета, после чего консенсус уже был найден.

Исторический экскурс. Если представители страны не согласны с решением координаторов, то решение выносится на общее заседание жюри. Там свое мнение подают сначала представители страны, а затем — представители координаторов. Эти два мнения голосуются общим заседанием жюри, которое является высшей властью в ММО. Как показывает опыт, в 99% случаев принимается решение координаторов, поскольку ни у кого нет желания решать в пользу страны из простого соображения прецедента. Это заседание проходит в предпоследний день Олимпиады, как раз накануне печати дипломов. После такого заседания подводится окончательный итог. Если предположить, что решение будет принято в пользу страны, то это образует прецедент, что в следующий раз множество стран будет до последнего не соглашаться с решением координаторов и последнее заседание превратится в долгое голосование по каждому такому поводу. Зная квалификацию координаторов, задачного комитета, ни у кого из лидеров стран нет желания этим заниматься. Но однажды точно было принято решение в пользу страны. В очень сложной задаче (кажется № 5) ученик из Китая при доказательстве утверждения сделал ссылку на теорему из теории чисел, из которой следовало решение задачи. Наверное, автор задачи также ее использовал при решении, или она родилась в процессе доказательства этой теоремы, не суть важно, но факт имел место. Если знать эту теорему, то задача становилась достаточно простой. Координаторы не соглашались оценить полное решение этой задачи, а представители страны указали, что в работе ученик не просто правильно сформулировал теорему, но и точно сослался на источник. Поскольку нельзя знать абсолютно все, лидеры согласились, что такие знания надо в детях поощрять. Общим голосованием лидеров был выставлен полный балл и это стало прецедентом, как можно при решении задач использовать внешние источники.

Задачная комиссия — это группа специалистов, которые формируют шорт-лист. Лидеры всех стран получают почтовый адрес от организаторов следующей олимпиады. На этот адрес лидеры могут прислать задачи от страны, которые предлагают на следующую олимпиаду. Этих задач должно быть не более 6 от страны, отправлять надо было (до последнего времени) для сохранения секретности только обычной почтой. Последний год на официальном сайте ММО http://www.imo-official.org/ стало возможным передавать задачи через Интернет. Станет ли эта практика традиционной — скоро увидим. Таким образом, организаторам олимпиады приходят около 130-200 задач разного качества. Поскольку ММО является образцом, вершиной математических школьных соревнований во всем мире, то желательно, чтобы задачи, которые будут отобраны в шорт-лист, были отличного качества и показывали направления развития олимпиадной мысли в мире. Отсюда становится понятным, какой тяжелый и ответственный труд ложится на эту комиссию. Ее состав определяет оргкомитет олимпиады. В некоторых странах делом чести является работа в этой комиссии исключительно специалистов из своей страны, как это сделала Германия на 50-й ИМО. Чаще страна приглашает признанных в мире специалистов. Во время олимпиады вся эта комиссия в полном составе вливается в ряды координаторов. Поскольку им задачи давно знакомы, в отличие от большинства координаторов, прибывающих на ММО фактически вместе с лидерами или даже участниками, то они становятся определенным образом экспертами в рядах координаторов.

> ***Исторический экскурс.*** На 50-й олимпиаде в Германии в текст олимпиады попала интересная и очень сложная задача про кузнечика. За поиск ее красивого решения взялись наблюдатели от России Илья Богданов и от Украины Антон Меллит. Они смогли найти такое хорошее решение методом математической индукции, что даже сложилось впечатление, что это “не очень сложная задача”. Но самое главное было сделано — этих наблюдателей достойно оценили. Если Богданов и ранее часто привлекался для работы в такой комиссии и в настоящее время достаточно часто в ней работает, то Антон Меллит решил покинуть олимпиады школьников, и заниматься наукой в институте Макса Планка в Германии.

Для этой работы комиссия собирается и работает примерно в течение 1-2 месяцев перед ММО. Некоторые из членов этой комиссии решают самостоятельно почти все задачи, некоторые сосредотачиваются на 1-2 темах, в которых они считают себя специалистами. Как рассказывают сами члены комиссии, часто задачи бывают совсем низкого уровня, бывают не оригинальными или имеют неверные условия или решения. Все это должно быть отбраковано на уровне этой комиссии. Для остальных задач надо корректно сформулировать условия, привести корректные решения, желательно несколько. Дальше уже среди всего, что осталось и соответствует необходимому уровню, по каждой из четырех тематик — алгебра, геометрия, теория чисел и комбинаторика — надо отобрать до 9 лучших задач. Они и будут образовывать шорт-лист, с которым в дальнейшем будут работать лидеры и наблюдатели, оргкомитет и координаторы.

Также очень важным является мнение задачного комитета при обсуждении текста задач олимпиады. Часто перед решающим голосованием, когда надо выбрать одну из двух-трех задач, спрашивают мнение комитета по поводу красоты, качества, сложности и т.п. задачи.

Шорт-лист — это документ, подготовленный задачной комиссией. В нем собраны лучшие из присланных задач со всего мира за год. По каждой теме — алгебра, комбинаторика, геометрия и теория чисел — в шорт-лист предлагается не более 9 задач. Их может быть ровно 9 или меньше, самое главное, чтобы окончательный текст шорт-листа содержал ровно 30 лучших, по их мнению, задач. Они в тексте расположены в порядке возрастания сложности (по мнению задачной комиссии) и имеют такую нумерацию, например: A1 – A7, C1 – C7, G1 – G9, N1 – N7. Все задачи из шорт-листа являются секретными и высокого качества. Поэтому их очень удобно использовать при отборе команд национальных стран на следующую ММО. Но он должен оставаться секретным до начала следующей ММО, за это отвечает лидер страны, о чем он подписывается в документах организаторов ММО. Это нужно потому, что в разных странах отбор происходит в разные сроки. Использовать его можно свободно, но нигде, ни в Интернете, ни в других открытых источниках, не должно быть пометки, что соответствующая задача взята из шорт-листа.

Исторический экскурс. На 51-й олимпиаде в Казахстане было сделано замечание лидеру Сербии за то, что при использовании шорт-листа при отборе команды на некотором внутреннем сайте была размещена задача, где было указано, что она из шорт-листа. Лидер Сербии принес извинения и дал слово, что такого больше не повторится.

Лидер — это член жюри олимпиады от страны. Он должен принимать участие во всех заседаниях жюри, имеет право голоса от страны при всех голосованиях, право окончательной подписи под протоколом координации, получает шорт-лист для всех представителей страны. Лидер несет полную личную ответственность за сохранение секретности шорт-листа до начала следующей олимпиады.

Наблюдатель "А" — это представитель страны, который имеет почти одинаковые права с лидером. На олимпиаду он прибывает одновременно с лидером. Может участвовать во всех заседаниях, принимать участие в обсуждениях, может принимать участие в координации, даже при отсутствии лидера. Он только не имеет права голосовать от страны и подписывать официальные документы. Кроме того, при некоторых обсуждениях, наблюдатель "А" имеет право выступать только с разрешения спикера, о чем должен попросить лидер команды.

Заместитель лидера — это представитель страны, который непосредственно отвечает за жизнь и безопасность участников от страны, в том числе и на обратном пути. На ММО заместитель лидера прибывает вместе с командой. По завершении двух туров олимпиады группа руководителей команды уже работает вместе — лидер, заместитель лидера и наблюдатели "А" и "В". Также принимает участие в координации и всех последующих заседаниях жюри.

Наблюдатель "В" — это представитель страны, который прибывает на Олимпиаду вместе с командой и заместителем лидера. Сначала помогает заместителю лидера, а по завершении двух туров приобщается к работе в команде.

Исторический экскурс. Наблюдатели от Украины стали появляться на ММО только в последние несколько лет, имеются в виду именно те, кто активно участвует в координации, а не просто приглашен в качестве "туриста" и помогает присматривать за школьниками. На 50-й олимпиаде в Германии наблюдателями "А" от Украины были Антон Меллит и Сергей Торба, на 51-й, 52-й и 54-й олимпиадах наблюдателями "А" были Лишунов Виталий и Клурман Алексей, а наблюдателем "В" был Аникушин Андрей. Трудно переоценить роль наблюдателей при проведении качественной высокопрофессиональной координации, поскольку одному лидеру обычно очень трудно пересмотреть все 36 задач, записанных участниками от страны. Если там нет полного правильного решения, то нужно пересмотреть все записи с попытками решить задачу и найти продвижения к решению, которое по схеме решения задачи оценивается в максимальное количество баллов. Потому, если участник не уверен, что решение правильное, он пишет 3-4 различных подхода, каждый из которых достоин внимания. Вспоминается комментарий координатора в Германии на 50-й олимпиаде Натальи Гринберг (в свое время закончила Киевскую 145-ю школу) на работу Щедриной по первой задаче: "Все 10 координаторов пересматривали эти 8 плотно исписанных листочков, с попыткой найти в них хоть какое-то продвижение! И не смогли!". К чести руководителей команды, мы нашли в работе продвижение, которое оценивалось в 1 балл. Казалось бы мелочь, но именно этого бала хватило нашей участнице для бронзовой медали.

Наблюдатель "С" — это представитель страны, который постоянно находится вместе с командой, или одним из руководителей команды. Это может быть родственник одного из руководителей команды (малолетний ребенок или племянник), родитель или опекун участника или врач, психолог и т.д.. Никакого участия в заседаниях не принимает.

Жюри олимпиады — это собрание лидеров всех стран-участниц. Фактически все первые и последние дни олимпиады жюри собирается постоянно и обсуждает все текущие вопросы. Более подробно о содержании этих заседаний будет рассказано ниже. Кроме такой работы, жюри также обсуждает перспективу развития олимпиадного движения, возможность привнести новый более современный смысл в это движение, чтобы он соответствовал веяниям времени и т.п. Раз в 2 года происходит обновление руководящих органов олимпиад. И вообще, любой спорный вопрос, если его не удается решить путем консенсуса, решается голосованием.

Программа работы ММО

После первой части рассказа уже можно начать раскрывать поденный график работы на ММО. Теперь большинство употребляемых терминов наполнены понятным содержанием, а потому можем перейти к детальному описанию.

Сначала приведем стандартную программу работы всех главных действующих лиц на ММО.

День олимпиады	**Лидеры и наблюдатели “А”**	**Заместители лидеров и наблюдатели “В”**	**Участники и наблюдатели “С”**
0-й день	Прибытие к месту нахождения жюри, знакомство с шорт-листом.		
1-й день	Прибытие, знакомство с шорт-листом. Первые организационные заседания.		
2-й день	Обсуждение шорт-листа		
3-й день	Голосование за текст олимпиады	Прибытие на олимпиаду. Ознакомление с местом проведения туров	
4-й день	Открытие олимпиады		
	Обработка схем решения задач	Подготовка к турам	
5-й день	Ответы на вопросы	Свободное время	1 тур (только участники)
6-й день	Ответы на вопросы. Переезд в город олимпиады	Свободное время	2 тур (только участники)
7-й день	Координация		Экскурсии
8-й день	Координация		Экскурсии
9-й день	Подведение итогов		Свободное время
	Общая экскурсия или свободное время		
10-й день	Общая экскурсия		
11-й день	Закрытие олимпиады		
12-й день	Разъезд по домам		

0-1-е дни (основное событие — прибытие лидеров)

Начинается олимпиада для каждой страны-участницы (но не для страны-организатора) с приезда лидеров страны и наблюдателей “А”. Это происходит за 3-4 дня до официального открытия олимпиады. Обычно некоторым лидерам приходится преодолеть половину земного шара, чтобы добраться до места проведения олимпиады. Представьте себе путешествие из Европы в

Корею или Колумбию, или из Уругвая в Германию или Казахстан. Поэтому для прибытия лидеров и наблюдателей "A" выделяется 2 дня. Они заселяются в хорошие гостиницы, иногда наблюдатели "A" живут в гостинице рядом, вместе с координаторами, если не хватает места для всех в одном (основном) отеле. Заседания проводятся в конференц-зале основного отеля. В эти дни все заседания скорее ознакомительного плана, первое официальное заседание проходит после обеда в первый день. До этого первого заседания лидеры и наблюдатели получают шорт-лист без решения задач, чтобы попробовать на первые заседания уже прийти с определенной мыслью о предложенных задачах. Поэтому времени, свободного от заседаний, довольно много, особенно у тех, кто прибывает в 0-й день.

Лидеры и наблюдатели "A" прибывают в город, который находится на определенном расстоянии от официального города проведения олимпиады. Они могут быть расположены недалеко, примерно 1-2 часа на автобусе друг от друга (Бремен и Бременхаген, Амстердам и Эйндховен, Баранквилья и Санта-Марта), или вообще в другом конце страны (Астана и Алматы). Это влияет только на порядок работы лидеров в день открытия — или они возвращаются к своему первоначальному месту пребывания, или остаются уже до конца олимпиады работать на новом месте.

После обеда 1-го дня проходит долгожданное первое "полноценное" заседание, на котором происходит знакомство с оргкомитетом, задачной комиссией, старшими координаторами т.д., уточняется программа работы, если возникли определенные дополнения и уточнения. По завершении всем участникам раздают уже шорт-лист с решениями задач. В нем могут быть несколько различных решений, если задачная комиссия считает их альтернативными.

2-й день (основное событие — обсуждение шорт-листа)

Все участники заседаний (лидеры, наблюдатели "A", координаторы) передают в оргкомитет альтернативные решения задач. Этот процесс продолжается в течение всего времени до окончательного определения текста. На первом заседании каждый предпочитает высказать свои мысли о задачах шорт-листа. Особенно важным моментом является обнародование (по мнению докладчика) неоригинальных задач. Есть такие задачи, которые уже были приведены в печатных источниках в разных странах, или очень близкие "по сути" задачи есть в открытом доступе. Докладчик должен привести обоснование своей позиции, то есть дать ссылку непосредственно на этот источник, или через Интернет. Если жюри признает эти замечания справедливыми, то задача снимается с дальнейшего обсуждения и не может попасть в текст олимпиады.

> ***Исторический экскурс.*** В 2007 году хорошую задачу Ясинского В.А., без ведома автора, напечатали в журнале "В мире математики". Параллельно она оказалась присланной на ММО. Аналогичная ситуация была в следующем году с задачей Александра Рыбака. Но здесь уже полная вина автора, который не мог удержаться и другую версию той же задачи использовал в другом соревновании. Украине дважды указали на недопустимость таких действий, пришлось извиняться от имени страны и быть в дальнейшем более внимательными и осторожными при выборе авторов для задач ММО.

Также важным для дальнейшего обсуждения является мнение о красоте задач, об их сложности, о соответствии тематике. Например, задача находится в разделе "Алгебра", а на самом деле больше относится к "Теории чисел".

По завершении обсуждения, или даже в процессе обсуждения каждой стране выдают для заполнения таблицу, в которой нужно отметить по своему усмотрению сложность задачи и ее красоту. К каждой характеристике применяется шкала из условных 3 баллов: — "легкая", "средняя" и "сложная" (оценки для сложности), "ужасная", "нормальная" и "изящная"(оценки для красоты).

3-й день (основное событие — выбор задач олимпиады).

Заполненные вечером анкеты в течение ночи обрабатываются и на утро следующего дня выдается список с общей характеристикой каждой задачи. Оргкомитет по представлению задачной комиссии начинает отбор задач текста ММО. Сначала каждый из лидеров может вслух привести перечень задач, которые он считает легкими и могут рассматриваться как кандидаты в текст олимпиады. Все эти задачи помещаются в список, который окончательно приобретает примерно такой вид:

A1 , A2 , C1 , C2 , C3 , G1 , G2 , N1 , N3.

В него практически всегда попадают по 2-3 задачи из каждой темы. Могут не попасть сюда, то есть быть не предложенными задачи с первыми номерами, если они или не являются легкими, или очень некрасивыми и не нравятся никому. Иногда предлагаются сюда очень сложные задачи, тогда оргкомитет консенсусом (или в случае настаивания - голосованием) снимает такое неразумное предложение. Даже если она добавляется к тексту, то у нее нет никаких шансов попасть в окончательный текст, как легкой задаче.

Далее лидеры начинают формировать и выдвигать из предложенного списка (и только из него!) пары задач, которые следует включить в текст олимпиады. Все эти пары приводятся на доске. Как показывает опыт, почти все возможные пары задач различных тематик появляются на доске, а иногда и пары одной тематики. Например:

(A1, C1), (N1, C2), (N1, C1), (A1, N3), (A1, G1), (A1, G2),
(A1, N1), (G1, N3), (C1, G1), (A2, G2), (A1, G2).

Когда количество предложений становится уже достаточным, председательствующий предлагает завершить выдвижение пар. Далее начинается рейтинговое голосование. Каждый лидер может поддержать любое количество выдвинутых пар. Он даже может проголосовать "ЗА" сразу за все предложенные пары, или наоборот, не поднять свою табличку "ЗА" для голосования ни разу. Так, кстати, поступают лидеры некоторых стран, которым все эта процедура кажется несущественной вследствие уровня своих участников.

Далее предлагается процедура голосования. Например, для приведенного количества из 11 пар стандартной была бы, например, такая: после первого голосования отклоняются 4 худшие пары (останется 7 пар), в следующем туре отклоняются 3 худшие пары (остается 4 пары), а далее в каждом туре отклоняется ровно по одной паре. Возможные результаты могли быть, например, такие:

1 тур: **(A1, C1) - 77, (N1, C2) - 11, (N1, C1) - 65, (A1, N3) - 32,**
(A1, G1) - 55, (A1, G2) - 43, (A1, N1) - 66, (G1, N3) - 22,
(C1, G1) - 59, (A2, G2) - 20, (A1, G2) - 40.

Остались пары:

(A1, C1), (N1, C1), (A1, G1), (A1, G2), (A1, N1), (C1, G1), (A1, G2).

2 тур: **(A1, C1) - 70, (N1, C1) - 66, (A1, G1) - 75, (A1, G2) - 30,**
(A1, N1) - 80, (C1, G1) - 60, (A1, G2) - 10.

Остались пары:

(A1, C1), (N1, C1), (A1, G1), (A1, N1).

3 тур: **(A1, C1) - 77, (N1, C1) - 46, (A1, G1) - 80, (A1, N1) - 71.**

Остались пары:

(A1, C1), (A1, G1), (A1, N1).

4 тур: **(A1, C1) - 67, (A1, G1) - 79, (A1, N1) - 81.**

Остались пары:

(A1, G1), (A1, N1).

5 тур: **(A1, G1) - 57, (A1, N1) - 53.**

Осталась, точнее уже победила, пара: **(A1, G1).**

Перед каждым голосованием каждый член жюри имеет право и возможность высказаться, чтобы склонить чашу весов в пользу своего мнения, но это происходит не так часто, потому что накануне все мысли были высказаны. Обычно перед решающим голосованием приглашают высказаться представителей задачной комиссии или кого-то из старших координаторов, которую из двух пар они считают лучшей для первых позиций. Здесь, фактически, желательно мнение о задачах G1 и N1, потому что задача A1 уже в тексте.

> ***Исторический экскурс.*** Поскольку именно эти задачи для очень многих стран являются единственными, по которым участники их страны могут набрать хоть какие-то очки, то очевидным является тот факт, что побеждает всегда пара задач с номерами 1. Буквы могут быть различными, но в первых турах голосования сразу отсеиваются задачи с большими номерами. Поэтому шансов попасть в текст задач с номерами 2 почти нет. Для легких они не имеют шансов в результате тенденций, а для средних они обычно довольно просты.

Обычно вся эта процедура занимает часа полтора-два. После этого делается перерыв и проводится аналогичная процедура по выбору сложных задач. Понятно, что здесь номера задач уже редко бывают меньше 4. Чаще всего это задачи с номерами 5-9.

Нет нужды описывать всю эту процедуру, поскольку она полностью аналогична выбору легких задач. Пусть, например, победила пара (N6, G9). Очень хорошо, если этот процесс удалось завершить до обеда. Тогда после обеда остается провести только выбор пары средних задач.

Эта процедура также по содержанию очень похожа на первые две, но бывают нюансы, которые существенно влияют на результат первых двух голосований.

> ***Исторический экскурс.*** Например, на ММО в Голландии были выбраны следующие пары задач: **(A1, N1)** и **(A6, G9)**. Поскольку тем всего 4, а задач — 6, то естественным распределением есть выбор двух задач из двух тем и по одной задаче из других двух тем. Иначе математическое сообщество не воспримет текст ММО, если в нем, например, не будет никакой геометрической задачи, или, если их будет целых 3. Таким образом, после первых двух туров в текст уже попали две задачи по алгебре, по одной - по геометрии и теории чисел. Поэтому вариантов для выбора средней пары только, как ни странно — 3: (G, C), (N, C), (C, C). В самом деле, даже две комбинаторные задачи могут предлагаться в текст, поскольку это не противоречит стандартному распределению задач. Здесь председательствующий делает такие объявления: во-первых, он просит не выдвигать задачи по алгебре, во-вторых, предлагает выбрать сначала одну задачу тематики C, которая точно будет в тексте, а уже позже к ней подберут пары из трех тем, которые могут составлять эту пару. Каждый этот момент также выбирается рейтинговым голосованием. Теперь эта процедура уже напоминает вышеописанные, а потому подробно останавливаться на ней не будем.

Пусть, например, победила пара **(C3, A4)**. Тогда начинается процедура формирования текста олимпиады, то есть распределение задач по дням. Для полученных пар **(A1, G1)**, **(C3, A4)** и **(N6, G9)** очевидными (или естественными) будут такие условия: задачи **A1** и **A4** предлагаются в разные дни, так же и задачи **G1** и **G9**. Кроме того, поскольку на основании всего обсуждения ясно, что задача **G9** самая сложная, то желательно, чтобы она имела шестой номер. Поэтому вероятнее всего, что распределение было следующим:

1 день: (G1, A4, N6);

2 день: (A1, C3, G9).

По завершении этого процесса, начинается новая стадия работы для всех действующих лиц. Задачная комиссия и координаторы окончательно распределяются по задачам и начинают обрабатывать все альтернативные решения задач, попавших в текст ММО. Представители стран начинают процесс перевода текста на все языки.

Исторический экскурс. Здесь хочется привести два экскурса, которые непосредственно связаны с перипетиями 54-й ИМО в Колумбии. Впервые была изменена (пока что как эксперимент на 1 год) процедура выбора задач ММО. Было предложено сначала выбрать легкие 4 задачи, т.е. задачи с номерами 1, 2, 4 и 5. Но с обязательным условием, что среди этих 4-х задач будут представлены по одной все 4 основные тематики — A, C, G и N. Этот шаг выглядит вполне понятным и оправданным. Действительно, при старой процедуре бывали случаи, когда по определенной тематике в тексте была только 1 задача, при этом она оказывалась 6-й. Так, например, на 50-й ММО была 6-й единственная задача по комбинаторике, а на 52-й — единственная по геометрии. Что это означало для участников? Обычно 6-я задача — это самая сложная из всех, ее решают единицы из участников. Так задачу № 6 на ММО-2009 на 5-7 баллов решили 6 участников, а на ММО-2011 — 9 участников. То есть, более чем для 500 участников эти олимпиады прошли, соответственно, без комбинаторики и без геометрии. Предложенный подход безусловно преодолевает этот недостаток, при этом далее две сложные задачи могут выбираться из любой тематики. Но здесь возник новый недостаток. Он был присущ и раньше, но не в таком объеме. При таком выборе задач лидеры большинства стран пытались протащить в текст в качестве легких — легкие задачи, а вот в качестве средних задач — снова те же легкие задачи, не попавшие в текст при выборе первых легких задач.

Второй момент касается замечаний к тексту задач, подготовленных задачной комиссией. Они не могут знать все задачи, которые были задействованы в течение последних лет на олимпиадах разных стран. Поэтому в течение обсуждения снимаются неоригинальные задачи, а также те задачи, похожие на которые уже где-то в мире были использованы. Сходство бывает достаточно условным, иногда абсурдным, но выносится на суд жюри. Чаще всего такие задачи снимаются с рассмотрения, но бывает, что задачная комиссия выступает и говорит, что здесь только кажущаяся схожесть, а на самом деле задача совсем новая. Но случаются и более неожиданные вещи. Так на 54-й ММО в текст олимпиады была проголосована задача от Украины Назара Сердюка. За ночь лидеры некоторых стран нашли, что отчасти схожие формулировки уже были в США в прошлом году и в Польше в 2004 году. Доводы признали существенными и заменили задачу по геометрии на другую геометрическую задачу из России. Время поджимало, а потому эта задача и попала в текст. За следующую ночь, когда уже поздно было что-то менять, выяснилось: некоторые лидеры нашли, что значительная часть авторского решения этой задачи опирается на статью из журнала “Квант”. Таким образом, она оказалась по предпосылкам ничем не лучше украинской задачи. Кстати, наш золотой победитель олимпиады Вадим Калашников, как раз и вспомнил эту статью, что ему, безусловно, помогло.

Официальными языками олимпиады являются английский, испанский, немецкий, французский и русский. Но все официальное общение происходит на английском, все обсуждения, предложения, замечания и т.п. Только когда дело подходит к голосованию по любому вопросу, его содержание переводится и провозглашается вслух на русском, французском и испанском языках. Традиционно уже сложилось так, что страны, в которых государственным языком является немецкий, свободно владеют английским и не требуют перевода. Но все участники олимпиады имеют право писать олимпиаду на родном языке. Поэтому, по правилам ММО, каждый участник выбирает 2 любые языка, на которые ему будут переведены условия задач. Например, английский и украинский, или украинский и русский и т.д. Украинские участники обычно выбирают последний вариант пары языков.

Сначала текст готовится на английском языке. В таком обсуждении могут принимать участие все участники, кто считает себя специалистом в этом языке в смысле правописания и других особенностей английского языка.

> ***Исторический экскурс.*** Был очень интересный эпизод такого обсуждения. В текст 50-й олимпиады попала российская задача о "кузнечике", и по всему тексту задачи речь о нем на английском шла как "he", пока кто-то из представителей неанглоязычных стран намекнул, что для кузнечика нужно использовать слово "it".

По завершении этой работы каждая страна выбирает свою схему перевода на родной язык. Или это группировка по родственным языкам, или самостоятельная индивидуальная работа.

Традиционно образуются большие группы для перевода на основные языки — русский, французский и испанский. Все эти переводы, разумеется, должны быть согласованы с окончательной английской версией. Хотя здесь следует сказать, что все равно дословного согласования достичь трудно.

> ***Исторический экскурс.*** Часто это связано с такой языково-математической конструкцией. Например, задано n различных натуральных чисел. В английский версии очень редко употребляется выражение "pairwise different", но при переводе на русский, украинский и т.д. для более точного отражения ситуации мы употребляем именно выражение "попарно различные". Потому что для нас более привычно интерпретировать понятие "разные числа" — это "не все равные". А "все разные" как раз и отражает выражение "попарно различные".
>
> Кроме того часто русский текст является неоптимальным в результате такой конструкции — "целые положительные числа", вместо "натуральные числа", поскольку в Молдове, где многие участники просят второй перевод на русский язык (или даже первый!), натуральные числа, как и во Франции, начинаются с 0.

После перевода на русский, в котором при желании могут принять участие также все желающие, начинается перевод каждой делегацией на свой — украинский, белорусский, армянский, молдавский и т.д. — языки. Приблизительно так же работают при переводе на другие языки. Или сразу с английской официальной версии начинают перевод для своих участников на необходимые языки, или же берут за основу одну из утвержденных версий других официальных языков.

> ***Исторический экскурс.*** Интересный пример произошел на Международной химической олимпиаде, которая подчеркивает важность внимательности при переводе каждого шага. Один из российских переводчиков в достаточно длинной по условию задаче (почти на страницу) случайно пропустил маленький абзац, который был в английском варианте, то есть в правильной и утвержденной версии условия задачи. Так же поступили дальше и украинские переводчики с русского на украинский язык. Но почему-то один из участников от Украины попросил себе английский вариант текста (или вообще там английская версия была выдана каждому участнику) и сравнил оба перевода. Он нашел необходимое дополнительное условие, и решил правильно эту задачу. Другие участники от Украины (наверное, и от России тоже) эту задачу полностью правильно не решили.

Окончательный текст должен быть готов вечером, чтобы на утро следующего дня оргкомитет вариации на всех языках выставил для просмотра всеми заинтересованными лицами — лидерами, наблюдателями, координаторами, оргкомитетом. Каждый из них имеет право высказать свое мнение по поводу перевода или задать вопрос относительно любого перевода, дать свои замечания, возражения или пожелания, которые должны быть учтены, если они не являются безосновательными.

> ***Исторический экскурс.*** Для непосвященных хочу напомнить такой прецедент, который был, правда, не в математической истории, а на олимпиадах по информатике. Есть несколько стандартных и распространенных подходов при решении задач

по информатике: заметание плоскости, деление пополам, перебор, сортировка и т.д. Так вот, перевод задачи лидер по предварительной договоренности с участниками, начинал с определенной буквы, соответствующей методу, которым нужно решать задачу.

Очень легко понять, что и математики могут придумать схему подсказки. Например, в задаче, где вопрос ставится вроде "существует ли ... ", "возможно ли ...". Начало перевода, начинающееся с гласной буквы означает, что ответ в задаче — "существует" или "возможно", и нужно строить соответствующий пример. Перевод, который начинается с согласной буквы означает, что ответ "не существует" или "невозможно" и надо доказывать соответствующее утверждение. Как прецедент, могу привести пример пятой задачи в Астане на ММО-2010. Все 6 наших участники доказывали невозможность определенной конструкции, а при наличии подсказки, по крайней мере, половина из них точно смогла бы привести соответствующий пример, который, исходя из условия, в этой задаче выглядел маловероятным.

Если по какой-то из задач текста ММО было мало альтернативных вариантов решения, или просто группа координаторов быстро справилась с обработкой всех материалов и разработала окончательный вариант схемы решения своей задачи, то ее обсуждение может начаться уже в этот же вечер. Но чаще всего основная работа по этому поводу приходится на следующий день.

В этот день обычно прибывают делегации участников из всех стран. Гиды встречают их в аэропорту, сопровождают в автобус и отправляют в гостиницы или лагеря, где будет проживать команда. В этот день у команды есть возможность ознакомиться с памятными местами вокруг места пребывания или даже отправиться на экскурсию по городу. Это зависит от желания участников, их усталости после дороги и энергичности, а также активности гидов.

Исторический экскурс. На олимпиаду в Германии в составе одной африканской арабской страны прибыла делегация из 6 девушек, которые были одеты в очень привлекательные национальные костюмы. Оказалось, что это прибыла семья лидера команды. В качестве заместителя лидера была его жена, а вся команда — его дочери. Все свободное время они посещали магазины, музеи, выставки и т.д. Математический результат команды оказался нулевым, но это никоим образом не смутило команду, потому что они чрезвычайно полезно и интересно провели все время на олимпиаде.

Участники, под опекой заместителя лидера и наблюдателей "B" и "C", прибывают за день до официального открытия олимпиады, или даже в самый день открытия, что связано с маршрутом прибытия из соответствующей страны. В эти дни в начале открытия участникам показывают место, где они будут писать олимпиаду, а также участники выясняют смежные вопросы — как оформлять каждую задачу, как задавать вопросы, где расположены туалеты, что можно брать с собой на тур и т.д.

Исторический экскурс. На олимпиаду в Германии заместитель лидера команды Узбекистана прибыл отдельно от команды, и его не встретили организаторы. Он взял такси и попросил привезти его на ММО. Его привезли в отель к лидерам и наблюдателям "A" (где он не должен был находиться). Поскольку он впервые участвовал в ММО, он не сразу понял, что попал не совсем по месту назначения. Посидел на заседании, увидел обсуждение задач, после чего лидер Узбекистана рассказал оргкомитету об этом казусе. Пришлось ему остальное время произвести не с командой, а с другими лидерами.

4-й день (основное событие — открытие)

Утром продолжается проработка схем решения задач. После обеда лидеры отправляются на открытие. Если основной город олимпиады расположен далеко, то полдня тратится на перелет к месту открытия.

На самом открытии лидеры и наблюдатели “A” могут впервые увидеть вторую часть делегации от своей страны. Но общение практически невозможно, поскольку секретность задач необходимо соблюсти. На самом открытии обе части делегации расположены в разных местах (например, на балконе сидят жюри и наблюдатели “A”, а в партере — участники, заместители лидера и наблюдатели “B” и “C”). Можно сфотографировать друг друга, можно поприветствовать друг друга жестами, иногда можно даже докричаться до другой части делегации, но из-за сплошного шума все равно мало что можно разобрать.

На самом открытии часто выступают первые лица государства — напрямую или в записи, мэры городов, где проходит ММО, а также руководители ММО и представители оргкомитета олимпиады. В перерывах между выступлениями проходят концертные номера. Апогеем является момент, когда на сцену приглашаются по очереди в некотором порядке все команды.

> ***Исторический экскурс.*** Порядок зависит от фантазии организаторов. Так в Германии. в год 50-летия ММО, команды приглашались в порядке, который учитывал, кто раньше начал свое участие в ММО. Первыми вышли страны, которые принимали участие в самой первой ММО в далеком 1959 году. Среди основателей ММО были Румыния, Венгрия, Польша, Болгария, а также СССР, ГДР и ЧССР. Последние три страны уже не существуют. В Казахстане команды выходили в алфавитном порядке, а в Нидерландах — по алфавиту по континентам. При этом Россия была отнесена к странам азиатского региона.

По завершении открытия, участники, заместители лидера и наблюдатели “B” и “C” возвращаются к месту жительства, чтобы успеть отдохнуть и подготовиться к соревнованиям, а лидеры и наблюдатели “A” возвращаются к работе и завершают обсуждение схем решения задач.

Эти схемы надо завершить до начала первого тура олимпиады. Поэтому часто эти заседания продолжаются почти всю вторую половину дня и заканчиваются далеко за полночь, если быстро не удается достичь согласия. Половина лидеров этого не выдерживают и покидают заседание. Это их право, поскольку, во-первых, наутро всем будут розданы схемы решения каждой задачи, которые были утверждены накануне, во-вторых, задачный комитет и координаторы — высококвалифицированные специалисты, а потому большинство их предложений являются подходящими и изменяются непринципиально в результате обсуждения, в-третьих, никогда не угадаешь, какая именно схема будет важна для твоей команды.

5-й день (основное событие — первый тур ММО)

Заместители лидеров и наблюдатели “B” до обеда отдыхают, участники прибывают на первый тур олимпиады. Каждый тур длится 4,5 часа, в течение которых нужно постараться решить 3 задачи. При этом вопрос по условиям можно задавать только в течение первого часа. Поэтому все это время лидеры сидят в зале заседаний и им через Интернет передают вопросы. При получении вопроса лидер соответствующей страны показывает сообщение на экране и переводит его на английский язык. После этого он предлагает вариант ответа. Зал, точнее все жюри, или принимает предложенный вариант ответа, или, если там есть минимальный намек на подсказку, его отклоняют. Популярный ответ — “NO COMMENT”. Но бывают случаи, когда участник переспрашивает, правильно ли я понял такой-то момент условия, или какое-то понятие из условия. Если жюри считает, что их надо разъяснить, то участник может получить более содержательный ответ.

> ***Исторический экскурс.*** Вообще говоря, от участников из ведущих, по результатам на ММО, стран вопросы поступают очень редко, потому что и перевод достаточно качественный, и участники квалифицированные. За 5 последних лет от России и Украины было примерно 1-2 вопроса. Но очень интересный случай был с российским участником, когда он задал совершенно глупый вопрос. Он получил стандартный ответ “NO COMMENT”, а после тура у него спросили, зачем он это спрашивал? Он

объяснил, что плохо знает английский, а тем более местный язык, и ему показалось, что оргкомитет настаивал, что они "обязаны" задавать по крайней мере один вопрос. Вот он и спросил какую-то чушь.

По завершении ответов на вопросы лидеры имеют свободное время. Участники завершают первый тур и должны хорошо отдохнуть перед вторым туром, который состоится на следующий день. Лидеры и наблюдатели "А" ближе к ужину ожидают оригиналы работ своих участников, чтобы начать готовиться к координации.

6-й день (основное событие — второй тур ММО)

Для участников этот день до обеда очень похож на предыдущий. Они пишут тур в течение 4,5 часов, при необходимости в течение часа могут задать вопросы. По завершении второго тура фактически ММО для участников завершилась. Далее у них только путешествия и экскурсии, развлечения и игры. Поэтому о них дальше не рассказываем.

Лидеры вновь на протяжении часа отвечают на вопросы, а далее отправляются к основному городу проведения олимпиады (если они после открытия не остались здесь). После обеда команда руководителей от страны соединяется и уже до конца олимпиады работает вместе. Заместитель лидера и наблюдатели "В" могут ознакомиться с работами своих участников за первый день и сравнить их с информацией, полученной от участников ранее. Они знают, как дети оценивают сами свои работы. Вечером привозят работы второго тура и раздают график координации. Например, для Украины в первый день координации за столом "В" будет проведена координация задачи № 2 в 10-30, задачи № 5 в 16-00, задачи № 6 в 17-00, во второй день координация задачи № 4 в 9-30, задачи № 1 в 11-00, задачи № 3 в 15-00. Поэтому особенно важно успеть вычитать и тщательно рассмотреть те задачи, которые надо координировать в первый день. Здесь уже можно общаться с участниками и уточнять их мнение относительно правильности и корректности решения их задачи, показать им схемы решения задач. Об этом подробно расписано выше, где мы рассказывали о процессе координации. Главный вывод такой — руководителей делегации ожидают 2-3 очень напряженных дня, а возможно и ночи. Если в составе делегации один лидер и заместитель лидера — чиновник министерства (как это обычно бывает в Молдове, Казахстане и других странах), то на лидера ложится просто неподъемный груз. В таких условиях качество просмотра работ участников не может быть очень хорошим, а потому и координация пройдет достаточно некачественно. Если в команде работает несколько руководителей, то они просто помогают один другому посмотреть все работы. Каждый вносит свою лепту в окончательный результат. Легко понять, что каждый балл может быть на вес золота (или серебра, или бронзы).

Исторический экскурс. Если посмотреть на результаты участников от Украины в течение последних 7 лет, то видим, что почти каждый год мы балансировали на самой границе.

В Ханое (2007) Медведь и Мищенко набрали по 29 баллов — это минимальные баллы для золотой награды.

В Мадриде (2008) Шишацкий завоевал золото при 33 баллах (минимум 32), Соболев — серебро 23 балла (22), Семикина - бронзу при 16 (15).

В Бремене (2009) Сенин завоевал золото при 33 баллах (32), Лысакевич — серебро при 24 баллах (24), Щедрина — бронзу при 14 (14).

В Астане (2010) Черный и Хрущев завоевали серебро, набрав 21 балл (21), Теплова набрала 16, Жениленко и Лавинская по 15, чего хватило на бронзу (минимальная бронза при 15).

В Амстердаме (2011) Мулярчик завоевал золото при 28 баллах (28), Баган и Кислинский — серебро при 23 баллах (22).

Таким образом, понятно, что минимальная неточность или недоработка от лидеров и наблюдателей, и мы могли лищиться многих медалей. Конечно, были и противоположные случаи, когда для получения медали не хватало ровно 1 балла.

7-й день (основное событие — первый день координации)

Участники на экскурсии, а лидеры на координации. Если нет согласия, то назначается новое время для координации, в этот же или на следующий день, когда у соответствующей бригады кординаторов есть свободное время. Такое может случиться при очень долгом обсуждении некоторой работы, или при нахождении моментов в работе, которые были координаторами пропущены при первом рассмотрении. Это дает время и возможность более точно разобраться в тонкостях работы. Если координация по определенной задаче завершена, то на соответствующем табло появляются результаты команды, но специальным "хитрым" образом. Оценка одного участника по каждой задаче скрывается, настоящую оценку знают только представители страны. И суммарный результат страны освещается без учета скрытых шести оценок. Иногда там нет никакого секрета. если, например, в команде Китая по 1-й задачи светятся такие отметки 7 7 * 7 7 7, или в Никарагуа по 3-й задачи 0 0 0 0 0 *. Но в целом интрига есть.

8-й день (основное событие — второй день координации)

Участники снова на экскурсии, а руководители снова на координации. В любом случае в этот день проводится окончательное подведение итогов. Даже если все это затягивается, все работают до ночи, пока не подведут окончательные итоги. Здесь уже помогают решить все спорные ситуации и старшие координаторы, и задачная комиссия, и, при необходимости, оргкомитет. Как бы то ни было, подводятся итоги координации, и оргкомитет начинает обрабатывать окончательные данные в течение всей ночи. На 54-й ММО организаторам удалось сэкономить день подведения итогов. Их удалось провести благодаря хорошей координации вечером именно в этот день.

9-й день (основное событие — подведение итогов)

Сначала объявляются определенные моменты — количество участников, сложность задач и т.д. Но все ожидают окончательного подведения итогов. Оргкомитет олимпиады выходит к участникам со своими предложениями. Они могут быть строго формальными, а могут содержать определенные нюансы. Сначала о формальном аспекте. Например, участников — 562. Тогда призерами могут стать не более 281 участника (50%). Смотрим на результат 281-го участника, если результат 282-го хотя бы на 1 балл меньше, то будем иметь ровно 281 призера олимпиады. Так, кстати, произошло на последней олимпиаде. Если у участников по рейтингу от 270 до 290 были одинаковые результаты, то все они не стали бы призерами. А призеров было бы 269. Такой же формальный подход и к золотым наградам — не более 1/6 от всех участников, и серебряных — их вместе с золотыми не должно быть более 1/3 от общего количества участников. Все "обрезания" в сторону уменьшения. Так бывает очень часто. Но бывают и исключения, когда обрезание производится в сторону увеличения. Так в Казахстане на 51-й ММО, при формальном подходе при 502 участниках должно быть не более 251 призера. Тогда всего было бы 227 призеров, а если опустить планку на 1 балл, то их стало бы 267. Есть недобор — 24, а перебор — 16. Еще более вопиющие ситуации возникали при определении золотых и серебряных медалей. Поэтому на предложение (формальное) оргкомитета дать золото за 28 баллов, серебро за 22 и бронзу за 16 баллов, поступило предложение опустить все планки на 1 балл — золото за 27, серебро за 21 и бронзу за 15 баллов. Как показывает опыт, если оргкомитет не настаивает на строгом соблюдении формальных границ (как бывает очень часто!), то лидеры большинства стран поддерживают более лояльное предложение. Нетрудно посмотреть по итоговым результатам, что для Украины это было в тот год очень дельное предложение!

Исторический экскурс. Как рассказывали, на 38-й ММО в 1997 году очень сложная ситуация вышла с распределением золотых медалей. Всего участников было 446, поэтому золотых медалей должны были вручить не более 37-38. По результатам ММО 36 и более баллов набрал 31 участник, а 35 баллов набрали еще 9 человек. Таким образом, по формальным правилам все они должны были получить серебро. Но среди них было целых три (!) участника из Украины. После обсуждений и консультаций с

> оргкомитетом, украинская делегация согласилась уменьшить одному участнику результат на 1 балл, после чего оргкомитет вручил остальным 39 участникам золотые награды. Таким образом, Украина вместо 3 серебряных наград получила 2 золотые и 1 серебряную. К сожалению, ценой уменьшения награды Павлу Пилявскому. Если бы не это, он стал бы вторым представителем Украины, который имеет 3 золотые награды. А так он еще рекордсмен по общему количеству наград с ММО, о чем мы более подробно рассказывали выше.

Кроме того, в это время впервые освещается окончательный результат команд, хотя он и не является официальным, но имеет важное и принципиальное значение для лидеров всех стран. Каждого лидера команды интересуют свои определенные моменты в этом командном зачете. Так последние 10 лет всех интересовало, кто победит в командном зачете — Китай или Россия, а вот последние 2-3 года уже интересует, устоит ли Россия на втором месте. Команду Украины всегда интересует, попали ли мы в первую десятку, что является неоспоримым успехом, и какие европейские сборные оказались выше Украины. Если попали во второй десяток, то это является средним выступлением, а в третьем десятке — это уже можно считать очень неудачным результатом.

> ***Исторический экскурс.*** Уже несколько лет многих представителей беспокоят “неожиданные результаты” некоторых стран. Это часто бывает следствием неспортивной борьбы, о чем пойдет более детальный рассказ ниже. Такое случалось с командами Болгарии, Казахстана, КНДР и др. В последние годы вызывает удивление результат КНДР и Сингапура. Все это очень возмущает математическое сообщество, но пока нет эффективных методов для борьбы с этим позорным явлением.

По завершении процедуры подведения итогов, жюри и оргкомитет проводят небольшие совещания, о содержании которых будет рассказано ниже. После обеда — для всех участников олимпиады проводится небольшая экскурсия, или просто все имеют свободное время, кто на отдых, кто на спортивные игры, кто на путешествие по городу или даже за город.

10-й день (основное событие — общая экскурсия)

Чтобы дать возможность организаторам подготовиться к закрытию, напечатать дипломы, рассчитать порядок выхода на сцену, процесс вручения наград и т.д., все незадействованые в подготовке закрытия, отправляются на экскурсию. Она обычно происходит в течение всего дня в каком-то прекрасном месте. В целях экономии этот день организаторы могут исключить из программы ММО.

11-й день (основное событие — закрытие)

В этот день награды находят своих героев. Все участники олимпиады, кто не завоевал медали, получают дипломы участников или поощрительные грамоты от своих лидеров. На сцену в определенном порядке приглашаются сначала бронзовые медалисты, иногда группами, соответственно алфавиту стран или количеству набранных баллов, а иногда даже сразу все, как это было в Казахстане. Далее — серебряные призеры, последними на сцене появляются золотые медалисты. Чаще всего отдельно, последними на сцену приглашаются абсолютные победители — участники (или участник), которые набрали наибольшее количество баллов.

Кроме процедуры награждения на закрытии проходят выступления руководителей оргкомитета, ММО, почетных гостей, артистов с интересными (и не очень) концертными номерами.

В конце процедуры закрытия происходит трогательная процедура передачи флага ММО от страны, которая проводила эту олымпиаду в страну следующей ММО. Часто страна-преемник демонстрирует короткий и очень насыщенный фильм с видами страны и города следующей ММО, а также с памятными местами следующей ММО.

По завершении закрытия, команды могут сфотографироваться с флагами своей страны и ММО, с почетными гостями. Наконец, заключительный банкет, дискотека, которая может продолжаться всю ночь... Кто устал, может в любое время двинуться в отель и готовиться к отъезду.

12-й день (основное событие — отъезд с олимпиады)

Здесь самое главное не проспать после дискотеки накануне. Организаторы обеспечивают автобусы, которые своевременно доставляют делегации в аэропорт (или на железнодорожные и автобусные вокзалы) и после отъезда последней делегации могут с облегчением вздохнуть, убрать в тех местах, где происходили различные мероприятия ММО, и наконец-то отдохнуть.

Другие моменты при проведении ММО

Здесь хотелось бы коснуться тех моментов, которые часто происходят на каждой ММО. Они обсуждаются в кулуарах, о них "шушукаются" неравнодушные руководители команд, а на заседаниях эти вопросы поднимают руководящие органы ММО. Сначала о самих этих органах более подробно.

К ним относятся: председатель (на данный момент лидер команды России Назар Агаханов), секретарь (Грегор Долинар, Словения), 3 избранных члена (Джефф Смит, Великобритания, Рафаэль Санчес, Венесуэла, Муинг-Хван Ким, Корея), а также 3 кооптированных члена, которые представляют страну последней ММО и двух следующих. На сегодня это лидеры Колумбии, ЮАР и Таиланда. Последние находятся в руководящих органах в течение 3-х лет. По завершении трех лет пребывания в руководящих органах ИМО они автоматически выбывают из них.

Остальные члены избираются ровно на 4 года. Все выборы проводятся в "четные годы", а выдвижение — по "нечетным". Председатель и один из избранных членов избираются в один год, а секретарь и другие два члена — через 2 года, чтобы происходила преемственность в работе руководящих органов. Количество раз быть избранным — не ограничено. Так Агаханов был избран в 2010 году, а до этого 3 срока подряд (12 лет) руководителем был Джозеф Пеликан (Венгрия). Руководящие органы ММО решают много разных вопросов и пытаются определить тенденции развития ММО. Почему именно пытаются, а не определяют? Потому что окончательное решение все равно за голосованием лидеров стран. И это собрание отнюдь не всегда легко подчиняется "воле" руководителей ММО, особенно, если это неким образом посягает на их "свободы". О конкретном случае расскажу позже. Так вот, чтобы попасть в список голосования следующего года, каждый желающий быть избранным должен собрать в свою поддержку не менее 5 голосов других лидеров. Например, если избираются в следующем году председатель и один из избранных членов, то каждый лидер получает 2 бланка — по одному на каждую должность. Лидер может пренебречь и не предлагать никого, но если он предлагает кого-то, то не просто вписывает его фамилию, но и должен получить его согласие на это выдвижение. Для этого лидер, которого предлагают, должен в соответствующей анкете поставить свою подпись, что его выдвигают "с его согласия". После этого все анкеты обрабатывают и на одном из заключительных заседаний жюри сообщают, что на ту или иную должность на следующий год будут выбирать из таких лидеров.

Исторический экскурс. Когда в 2010 году избирали главу, то претендентов было трое: Джозеф Пеликан, который уже 12 лет был председателем, Назар Агаханов и Джефф Смит. Пеликан традиционно опирался на испаноязычный регион и маленькие страны, которые мало понимали, для чего нужны хоть минимальные изменения. За других двух кандидатов были большие евразийские страны и Северная Америка. На первом голосовании (тайно, бюллетенями) Пеликан набрал примерно 40 голосов, Агаханов — около 30, Смит — около 20. Но перед решающим голосованием Смит предложил своим сторонникам поддержать Агаханова, и тот победил. С его приходом все надеются на определенные конструктивные изменения в регламенте и традициях ММО.

Этим вопросам уделяется внимание на некоторых заседаниях лидеров стран в перерывах между обсуждением основных традиционных вопросов ММО.

Другой важный вопрос, которому уделяется внимание почти на каждой ММО — принципы честной борьбы. ММО — это соревнование, где лидеры стран еще до начала самой олимпиады имеют полный доступ ко всей секретной информации: шорт-лист с решениями, текст олимпиады, схемы решения и тому подобное. Сейчас призеры и победители ММО имеют незаурядные привилегии при поступлении в престижные университеты по всему миру. Кроме того, часто лидеров и их заместителей в своих странах засыпают наградами за удачное выступление на ММО. А гораздо чаще подвергают уничтожающей критике с санкциями за неудачное выступление. Это заставляет (стимулирует, подталкивает...) лидеров некоторых стран нарушать Fair Play — правила честной борьбы. Тенденция честной борьбы сейчас активно пропагандируется в спорте, но так сложилось, что и на ММО она стала очень актуальной.

Ранее были отдельные лидеры стран, подозреваемые (и небезосновательно) в "сливании" текстов своим участникам. С ними старались проводить "общественную работу", намекали на нечестность, непорядочность и недопустимость таких действий, вежливо предлагали не приезжать на следующую ММО, в случае "непонимания" таких намеков с соответствующим лидером просто переставали общаться все порядочные люди-участники ММО.

Исторический экскурс. На самом деле, кроме случая с КНДР, когда все было очевидно, сейчас очень трудно поймать кого-то на горячем. Даже невозможно. Но умным людям все понятно, потому что на пустом месте ничего не может появиться. Все общество видит, в какой стране какое внимание уделяется развитию олимпиадного движения, проведению соревнований, изданию олимпиадной литературы, уровню и количеству олимпиад, участие в других региональных или мировых соревнованиях. Все знают, что команды Китая, России и США очень мощные. Когда на 50-й ИМО в Германии третью задачу сделали не более чем по 2 участника из этих команд, а в команде КНДР 4 полных решения, и еще одно — почти полное, да еще и с доказательством вспомогательной леммы, которая была в авторском решении, но после уточнения условия оказалась не нужна, решением жюри команда КНДР была дисквалифицирована, работы ее участников — аннулированы.

Бороться против этого чрезвычайно трудно, особенно ввиду нынешнего развития средств связи. При этом, если раньше этим страдали преимущественно команды, стремясь добыть своим участникам золотые награды, то теперь все приобрело намного более массовый характер. Слабые страны стараются "помочь" своим участникам решить 1-ю и 4-ю задачи. Страны со средними достижениями в командном рейтинге — 1, 2, 4 и 5 задачи.

Исторический экскурс. Команда Сингапура всегда была достаточно средней по своим достижениям, на 52-й ММО показала по 2-й задаче самый лучший результат. Просто в этот раз ошиблась и задачная комиссия, и жюри относительно уровня сложности задачи. Она везде проходила как задача среднего уровня и попала в текст с номером 2. Но оказалась почти такой же сложной, как и задача № 6. Ее не решил ни один участник от России, и всего 2 из Китая, зато целых 4 участника из Сингапура. Это фактически единственная команда, в которой участники по второй задаче набрали больше баллов, чем по третьей. Доказательств нечестной игры нет, но разве здесь есть большие сомнения? Просто лидер команды Сингапура не мог предположить, что вторая задача получится намного (!) сложнее, чем третья.

Именно выбор на должность председателя лидера России Агаханова планировался всеми, кто был ярым противником нечестной борьбы. Он сразу предложил разумное решение этой проблемы. Достаточно, чтобы задачи ММО сразу составляла задачная комиссия, а лидеры прибывали вместе с участниками. Тогда лидеры утром в первый день просто переводили бы условия задач и отвечали на вопросы. Так же на утро второго дня. Это, кстати, сделало бы олимпиаду намного дешевле, поскольку на прием лидеров в течение первых 3-4 дней ММО расходуется до 30% всех средств. Но, увы, первые попытки оказались неудачными. За такой подход высказались только около 35-40 лидеров, а против — 50-55. Даже лидеры абсолютно честных стран, таких как Франция, Германия, Литва сказали, что против этого решения, потому что им всем очень нравится эта лидерская “тусовка” в течение первых 3 -х дней олимпиады.

Но начало положено, надеюсь, если не такой радикальный, то хоть какой-то выход будет найден... Тем более, что на последней 54-й ММО лидеры стран просто показали свою неспособность к конструктивной работе. Большинство из них просто 2-3 дня свободно проводили время, а на всех заседаниях вместо обсуждения задач просто переспрашивали: “А какое мнение задачной комиссии?” Это показывает, что пребывание лидеров на ММО лишних 3 дня нецелесообразно. Понятно, что лидеры выбирают окончательный текст ММО, но разве возникает сомнение в том, что не хуже текст выбрала бы сама задачная комиссия без лишнего вмешательства лидеров.

Таким образом, идеальной является такая программа пребывания лидеров на ММО. Приезд вместе с участниками, участие в открытии. На утро первого тура лидеры получают текст первого тура, уже переведенный на 5 основных языков ММО. Думаю, что всем лидерам хватит квалификации, чтобы успеть это сделать за отведенные 2-3 часа, а организаторам — технических средств. Аналогичная процедура происходит и во второй день олимпиады. Надеюсь, что вскоре здравый смысл победит и именно такой формат олимпиады станет окончательным. Тем более, что такой подход существенно удешевит ММО (достаточно будет ровно 1 города и отеля для ее проведения) и исключит лишние подозрения о нечестной борьбе в среде лидеров разных стран.

Рублев Богдан Владиславович,
профессор факультета кибернетики
Киевского национального университета
имени Тараса Шевченко, доктор физ.-мат. наук.

E-mail: rublyovbv@gmail.com

Царский путь в геометрию (в диалоге с учителем)

Т. Ю. Веселяева

В статье популяризируется применение педагогической психологии к преподаванию геометрии, описываются эвристические беседы со школьниками. Для осознания классического пути построения геометрии предлагается сравнить его с альтернативным подходом — через симметрию.

А. Здравствуйте, я к Вам.

В. Ого, кого я вижу. Что Вас ко мне привело? Где работаете?

А. В том то и дело, что в школе, учителем математики. Ничего, что я с детьми? Оставить было не с кем. Они не будут мешать, если разрешить побегать по коридору. Очень любят бегать... Меня чрезвычайно волнуют уроки геометрии. Ученики такие странные пошли — ничего не могут запомнить. Все путают. Геометрия для них очень трудный предмет. Сказал же Евклид, что в геометрию нет царского пути.

В. Это он две тысячи лет назад сказал. И не детям, а своему фараону.

А. Да я помню, фараона того звали Птолемей. Возжелав выучить геометрию, он спросил Евклида, нельзя ли освоить ее попроще.

В. И тот сильно рисковал, отвечая так своему спонсору, к тому же еще и монарху. Голова с плеч могла слететь запросто.

А. Значит, во времена Евклида простого пути не было? А сейчас такой путь появился, поскольку геометрия развилась?

В. Дело не только в развитии геометрии. Совершенно изменилось представление о том, что такое учение. А современная геометрия позволяет взглянуть на евклидову геометрию системно. Не школьникам, конечно, а нам с Вами. Сверху пути виднее.

А. Я чувствую, что после университетского курса геометрии школьная для меня стала очень простой. Но это почему-то не помогает преподаванию. Иногда даже мешает взять в толк, что же ученикам непонятно. Представления изменились о том, что такое учение? Вообще об этом ничего не могу вспомнить. Видимо, педагогика недоученной осталась.

В. Педагогику в вузе никто не осваивает. Чисто теоретически — не получается. У меня тоже относительно недавно появилась потребность ее использовать. А причина та же: слишком часто было неясно, что же студентам непонятно. Только оказалось, что от педагогики дорога еще дальше ведет.

А. Куда, в психологию?

В. Именно. А от психологии еще — в философию.

А. И оттуда пути обучения математике виднее?

В. Более того, видно, как лучше проложить новые. Но чисто теоретически это опять же не выйдет.

А. Нужно экспериментировать? Значит, не только Вы мне можете помочь, но и я Вам?

В. Можете. Тогда будем вместе искать для школьников путь в геометрию. Не могу обещать, что он будет простой для нас. Но для детей его можно назвать царским, поскольку именно их успех — доминанта в нашем поиске.

А. Можно прямо сейчас какой-нибудь путь проложить? Как сделать так, чтобы ученики формулировки определений не забывали и ничего в них не путали? Вот определение биссектрисы угла они помнят. Потому что говорилка: «биссектриса — это такая крыса, которая бегает по углам и делит их пополам» помогает. Но это же не значит, что нужно на каждое геометрическое понятие сочинять забавные стишки?

В. Стишки, конечно, внимание детей привлекают. Но давайте подумаем, к чему привлекается их внимание?

А. Видимо, к смешному сравнению биссектрисы с крысой.

В. Юмор — хорошее лекарство от страха. В данном случае от страха перед геометрией. Но привлекать внимание нужно внутренней сущностью учебного предмета.

А. Как же?

В. Надо научить детей формулировать определения самим. Тогда у них не будет проблем с запоминанием, и путать они ничего не будут.

А. Не смогут они сами.

В. Смогут, смогут, если им помочь. На какую тему у Вас следующий урок геометрии?

А. Равнобедренный треугольник.

В. Очень подходящая тема. Нина Федоровна Талызина в своем учебнике [3] описывает ситуацию, когда ученица из верно сформулированных ею определений равнобедренного и равностороннего треугольников делает вывод: равносторонний треугольник не является равнобедренным.

А. Меня очень интересует, почему дети делают такой вывод.

В. Если говорить в терминах деятельностной теории учения, они добавляют в свою ориентировочную основу действия условие на третью сторону: не равна первым двум.

А. Но в определении же этого условия нет!

В. Готовое определение для них является «схемой ориентировочной основы действия». И она далеко не всегда совпадает с самой ориентировочной основой действия — той системой условий, на которую реально опирается человек, выполняя это действие. Чаще всего он опускает какое-то условие, но бывает, что и добавляет.

А. Откуда дети все поголовно берут это условие на третью сторону?

В. Думаю, что из рисунка, который обычно бывает в учебниках рядом с определением. Но рисунок — это всегда частность. А обобщенная ориентировка — в словесном определении, которое и должно быть ориентировочной основой действия подведения под понятие. И его необходимо сформулировать так, чтобы не допустить разночтений.

А. В учебнике плохая формулировка определения?

В. Что ж, давайте попробуем разобраться. Вы сами, почему считаете, что равносторонний треугольник является равнобедренным?

А. У равностороннего треугольника есть два равных угла, и он по признаку равнобедренный.

В. Вот, Вы уже используете другую ориентировочную основу действия — признак, а не определение. Но дети-то его еще не знают. Значит, чем-то Вас определение не устраивает?

А. Да, непонятно, что имеется в виду под требованием: две стороны равны. «ТОЛЬКО две стороны равны» или «ПО КРАЙНЕЙ МЕРЕ, две стороны равны»?

В. Кто мешает добавить в определение необходимые слова?

А. Но это же опять будет не по учебнику!

В. Вы же сами убедились, что определение неудачно.

А. Но дети же должны учебник знать!

В. Знать учебник они будут лучше, если его будет с чем сравнить. Как Вы думаете, можно ли назвать определение совершенным, если его не могут усвоить поколения школьников? Кстати, они у Вас «в плен порочного круга» определений не попадают?

А. Это как?

В. Например, говорят: «Равнобедренный треугольник — это треугольник, боковые стороны которого равны», а когда спрашиваешь, что такое боковые стороны треугольника, отвечают: «Это те, которые равны у равнобедренного».

А. Ой, что только не говорят. И «порочный круг» бывает. А недавно я услышала, что «треугольник называется остроугольным, если у него есть острый угол». По аналогии с определением тупоугольного треугольника формулируют, даже не задумываясь. И определение с рисунком вообще не связывают.

В. Вы не задумывались, почему эти определения не единообразны? Может быть потому, что они не совершенны? В математике понятия очень часто возникают из классификаций по определенному основанию. Тогда и определения этих понятий получаются единообразными, аналогичными. По какому признаку треугольники делятся на остроугольные, прямоугольные и тупоугольные?

А. По величине угла.

В. Какого угла? Их у треугольника три.

А. Видимо, по величине наибольшего. Действительно, тогда определения и будут аналогичными: треугольник называется остроугольным (прямоугольным, тупоугольным), если его наибольший угол острый (прямой, тупой). Почему же в учебнике так не сформулировано?

В. Дань традиции. Но самое главное — не результат в виде однообразной серии определений, а процесс — возникновение понятий из классификации. Именно его и нужно осваивать при изучении геометрии.

А. Из какой же классификации следует определение равнобедренного треугольника? И где гарантия, что оно тогда будет совершенным?

В. О совершенном определении хорошо сказано у Спинозы [2]: «Чтобы можно было назвать определение совершенным, оно должно будет выразить внутреннюю сущность вещи и не допускать того, чтобы мы взяли вместо нее какие-нибудь другие свойства вещи... чтобы из него (определения) можно было вывести все свойства вещи»

А. Ну вот и философия. И как обычно, ничего не понятно. Что подразумевает Спиноза под внутренней сущностью вещи?

В. Читаем дальше у Спинозы: «сущность и активность вещи тождественны». Какие есть «активности» в геометрии?

А. Преобразования? Но это же уже восьмой класс!

В. С осевой симметрией дети знакомы с начальной школы. И сама идея построения геометрии на основе понятия симметрии в математике известна. В аксиоматике Бахмана [1] понятие симметрии выбрано одним из неопределяемых.

А. Но мы же не будем строить геометрию по Бахману?

В. Нет, конечно. Мы будем опираться на интуитивное представление детей о симметрии. И поставим задачу классификации треугольников по числу симметрий.

А. Имеются в виду, классификация по числу осевых симметрий?

В. Конечно, дети других и не знают.

А. Тогда, равнобедренный треугольник — это треугольник, имеющий, по крайней мере, одну ось симметрии, равносторонний — имеющий три? А треугольника с двумя осями симметрии не бывает. Какая-то «дырка» получается.

В. Это от того получилась «дырка», что Вы не “единообразили” определения. В первом определении есть слова «по крайней мере», а во втором — нет.

А. Равносторонний треугольник — это треугольник, имеющий, по крайней мере, две оси симметрии? А как же быть с третьей осью? Она же все равно есть?

В. Это же будет следствие (теорема).

А. Значит, и равенство трех сторон — это тоже следствие, теорема о равностороннем треугольнике? Если этого требования нет в определении, но почему же треугольник называется равносторонним?

В. И названия можно ввести другие, соответственно основанию классификации. А потом уже сопоставить с традиционными.

А. У нас основанием классификации выбрано число симметрий. Значит, треугольник, имеющий, по крайней мере, одну ось симметрии следует назвать просто симметричным. А если две, то дважды симметричным? Или бисимметричным? И опять же, где гарантия, что определения через симметрию действительно будут удачными? Уж очень абстрактны рассуждения Спинозы.

В. Давайте наполним эти абстрактные рассуждения конкретным смыслом. Что значит, в нашем случае вывести из определения «все свойства вещи»?

А. Видимо, свойства равнобедренного треугольника.

В. Легко ли они следуют из его симметричности? Сравните с традиционными доказательствами.

А. Можно сказать, что свойства следуют непосредственно из симметричности. И равенство углов при основании, и совпадение медианы биссектрисы и высоты, проведенных к основанию.

В. Это и значит, что нам удалось найти «внутреннюю сущность вещи». Еще один важный момент — виден путь к обобщению. С этих же позиций естественно классифицировать четырехугольники, например.

А. Значит, перед нами стоят две задачи: понять, как преподавать геометрию и понять, как ее строить? Обязательно строить через симметрию? И все ли можно через симметрию построить?

В. Нет, задача как раз едина: преподавать геометрию нужно, строя ее вместе с детьми. И стараться не вести, а сопровождать их в этом построении так, чтобы они не заметили «поводьев». А как строить: через симметрию или как-то иначе — это уже другой вопрос. Мы уже убедились, что построение через симметрию упрощает доказательства. Но это не означает, что всю геометрию можно так построить. И не означает, что уже нельзя ходить другими путями. Даже хорошо, что путей несколько. Многое видится только в сравнении. Но самое главное — дать почувствовать детям радость открытия. А это значит — вывести их на новый уровень мироощущения. И тогда появляется надежда, что ученик сам будет ставить перед собой учебные задачи.

А. Как же классифицировать четырехугольники через симметрию? Есть только один четырехугольник с одной осью симметрии — равнобокая трапеция. И два четырехугольника с двумя — прямоугольник и ромб. У квадрата уже четыре оси симметрии.

В. Просто перечислять известные симметричные четырехугольники — это не тот ход, который нам нужен. Для классификации по заданному признаку от этого признака нужно и идти: «Пусть четырехугольник симметричен относительно хотя бы одной прямой...»

А. Хорошо, что же следует из того, что у него есть ось хотя бы одна симметрии?

В. Начнем с простейших его элементов — с вершин. Как они могут располагаться относительно оси?

А. Попарно симметрично, конечно. Если только они не принадлежат этой прямой.

В. Значит, у нас есть только два случая: ни одна из вершин не принадлежит оси симметрии и...

А. По крайней мере, одна принадлежит.

В. Идеально построенное формальное отрицание.

А. Если вершины попарно симметричны, то и две стороны четырехугольника, соединяющие симметричные вершины, будут перпендикулярны оси, а значит, параллельны. Если две другие стороны при этом не параллельны, то четырехугольник является равнобокой трапецией, и других осевых симметрий у него нет. Если же две другие стороны параллельны, то четырехугольник является прямоугольником, и у него есть еще одна ось симметрии, перпендикулярная первой.

В. А если хотя бы одна вершина четырехугольника принадлежит его оси симметрии?

А. Тогда две соседние ее вершины не принадлежат оси, иначе четырехугольник вырождается. Следовательно, у него есть пара симметричных друг другу вершин. Четвертой вершине ничего не остается, как при осевой симметрии перейти самой в себя и она принадлежит оси симметрии. Это что, ромб получается?

В. Всегда ромб?

А. Так, если мы пустим «гулять» по оси симметрии четвертую вершину, то не ромб. Я даже не знаю, как назвать этот четырехугольник.

В. Этот четырехугольник называется *дельтоидом*. В отличие от других симметричных четырехугольников, он может быть выпуклым и невыпуклым. Дельтоид мне кажется самым красивым из симметричных четырехугольников. Выпуклый дельтоид похож на воздушного змея, а невыпуклый — на птицу (рис. 1).

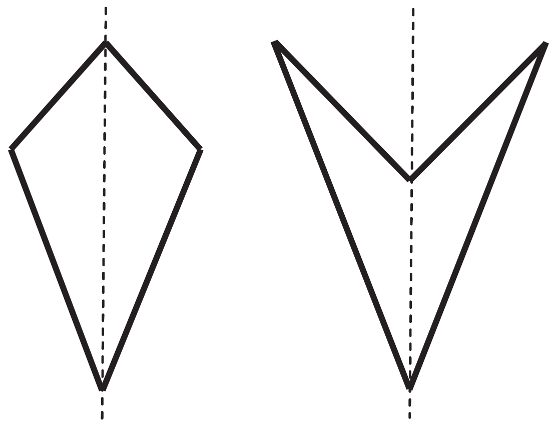


Рис. 1.

А. А частный случай дельтоида — ромб? Это что же, классификация четырехугольников по числу их осевых симметрий ведет к открытию дельтоида?

В. Точнее, к переоткрытию. Только ради этого момента стоило браться за классификацию. А еще получилось, что мы перечислили ВСЕ четырехугольники, имеющие хотя бы одну ось симметрии.

А. Все, кто проводит эту классификацию, переоткрывают дельтоид?

В. Если преподаватель грамотно ведет беседу: от общего — к частному. Помните, это лозунг Василия Васильевича Давыдова?

А. Помнить-то помню. Но для меня это всего лишь лозунг. Я вообще не понимаю, что плохого в ходе: от частного — к общему?

В. Вообще говоря, ничего плохого. Но таким путем все возможные случаи не перечислить. Мешают образы. Вам тоже мешал в переоткрытии дельтоида образ ромба. Здесь нужен обратный ход, дедуктивный. Что мы хотели найти? Все четырехугольники, симметричные относительно хотя бы одной прямой. И нашли, что таких четырехугольников всего лишь два.

А. Далее нужно перечислить четырехугольники, имеющие, по крайней мере, две оси симметрии? Как частные случаи первых двух классов? Один из них — частный случай дельтоида: ромб, у него вторая ось симметрии опять проходит через вершины. Другой, по аналогии — частный случай равнобокой трапеции: прямоугольник, у него вторая ось симметрии проходит через середины противоположных сторон? Что-то здесь с прямоугольником не то. Прямоугольник не должен являться частным случаем трапеции!

В. Замечательно, продуктивный процесс пошел. Вы уже сами начинаете сравнивать полученные определения с традиционными. Но навязчивые образы известных Вам четырехугольников мешают последовательно строить дедуктивное рассуждение. Давайте попробуем провести рассуждение с двумя осями сначала. Не забывайте, что мы идем от общего — к частному. Гоните возникающие попутно в сознании частные случаи. При ходе от общего к частному они только сбивают.

А. Хорошо, мы уже выяснили, что ось симметрии четырехугольника может проходить либо через противоположные вершины, либо через середины противоположных сторон. Значит, и с двумя осями четырехугольников только два: прямоугольник и ромб.

В. Вас опять сбивают образы. Давайте оттолкнемся от двух уже найденных четырехугольников имеющих, по крайней мере, одну ось симметрии: от дельтоида и равнобокой трапеции. Одна ось симметрии у них уже есть. Как может располагаться вторая?

А. Начнем с дельтоида. Вторая ось может проходить через две другие вершины. И это будет ромб. Но, есть и второй случай! Она может проходить через середины противоположных сторон. Действительно, почему оси симметрии четырехугольника обязаны быть «однотипными»? Что это будет за четырехугольник? Опять что-нибудь переоткрываем?

В. Сколько вопросов и эмоций! Не будем спешить. У меня тоже есть вопрос. На основании чего сделан вывод, что четырехугольник, имеющий две оси симметрии, проходящие через вершины, является ромбом?

А. Но я знаю, что у ромба именно такие оси симметрии! А..., нам нужно обратное рассуждение: если четырехугольник имеет две оси симметрии, проходящие через его вершины, то это ромб. Как же его сделать?

В. Давайте вернемся к первому случаю — к трапеции. Почему Вы решили, что симметричная трапеция будет равнобокой?

А. В силу симметрии, конечно. Симметричные стороны равны. И по определению равнобочной трапеции, это будет именно она. Значит, и для вывода о ромбе надо идти к равенству сторон от симметрии. Конечно, у нас же есть две оси. И все стороны в силу этих симметрий будут равны между собой. Но по школьному определению, ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны! Придется еще доказывать, что четырехугольник с равными сторонами — параллелограмм? Но даже если у четырехугольника только противоположные стороны попарно равны, то это уже параллелограмм, по признаку. Что-то мне уже школьное определение ромба не нравится. А раньше оно меня устраивало.

В. Видимо, раньше Вы им не пользовались. Это определение, конечно, избыточно.

А. Значит нужно определять ромб просто как четырехугольник, все стороны которого равны? Но ближайшее родовое понятие к нему — параллелограмм! Тогда ромбом надо называть параллелограмм, у которого есть пара равных смежных сторон? Это определение сейчас для нас хуже.

В. Замечательно, Вы начинаете минимизировать школьные определения. Вернемся к нашей классификации. Остался только случай четырехугольника с двумя разнотипными осями.

А. Тоже надо равенство сторон из симметрии искать? Так... Опять все четыре стороны равны? Ромб? Не может быть!

В. А углы?

А. И углы тоже все равны! Значит, квадрат!

В. Теперь можно пройтись от равнобокой трапеции, частный случай которой Вам не нравится.

А. Тоже получаются два случая. При двух однотипных осях — прямоугольник, а при разнотипных выходим на тот же случай — квадрат. Это правильный четырехугольник, значит число его симметрий максимально. И на этом классификация заканчивается? Но меня волнует вопрос: почему прямоугольник оказался частным случаем трапеции? Это противоречит школьным определениям!

В. Хорошо, что Вы сами вышли на этот вопрос, и он не дает Вам покоя. А детям приходится этот вопрос задавать. Даже если они сами формулируют определение, использовать его как ориентировочную основу действия для подведения под понятие их надо еще учить.

А. Каким образом?

В. Давайте послушаем, у меня есть диктофонная запись беседы с двумя мальчиками-восьмиклассниками Женей и Костей:

В. *А прямоугольник является частным случаем равнобокой трапеции?*

Женя. *Нет.*

В. *Почему? Посмотрите на ваше определение! Какое вы дали определение равнобокой трапеции?*

Женя. *(читает) Четырехугольник, у которого есть, по крайней мере, одна ось симметрии, и она проходит через середины противоположных сторон, называется равнобокой трапецией.*

В. *Хорошо. У прямоугольника есть, по крайней мере, одна ось симметрии, которая проходит через середины противоположных сторон?*

Женя. *Да, значит неправильное определение.*

В. *Неправильное ДАННОЕ ВАМИ определение? Почему?*

Женя. *У трапеции только две стороны должны быть параллельны. Значит, прямоугольник — это не трапеция! А у нас неправильное определение.*

В. *Или в учебнике неправильное.*

Женя. *Авторы учебника не могут ошибаться!*

Костя. *Не могут!*

В. *Давайте решим этот вопрос так: изобразим схему классификации четырехугольников и посмотрим, при каком определении равнобедренной трапеции схема будет красивее.*

А. И при каком же определении схема была красивее?

В. При определении с использованием понятия симметрии и схема была симметричной (рис. 2).

А. Мне нравится эта схема. Ее можно использовать, чтобы осознанно формулировать родовидовые определения. Сразу видно, что прямоугольник и ромб — частные случаи параллелограмма. А у квадрата, оказывается два равнозначных ближайших родовых понятия — прямоугольник и ромб. Но, родовидовая связь между равнобокой трапецией и прямоугольником, конечно, противоестественна. Понятно, что множество равнобоких трапеций не должно включать в себя множество прямоугольников.

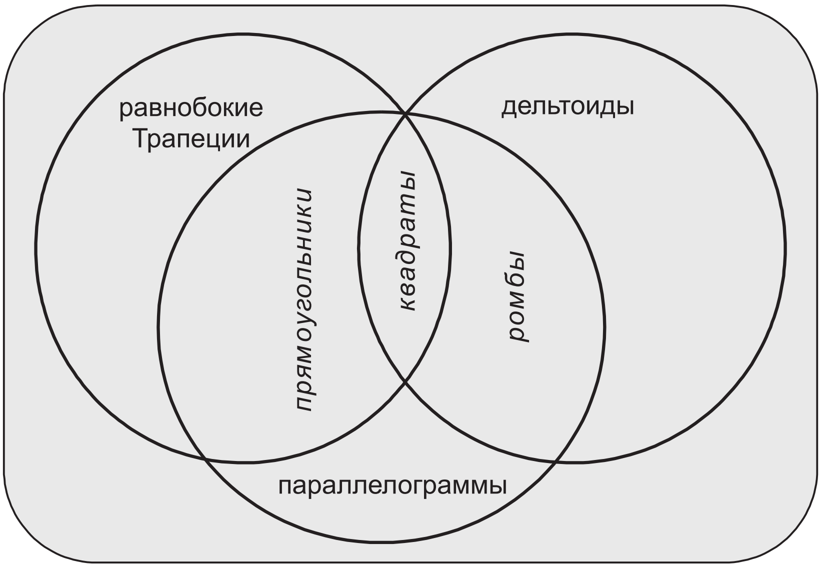


Рис. 2.

В. На альтернативной схеме симметрия нарушалась, и она получается некрасивой. Но мальчиков это не убедило. Они категорически не согласились отказываться от традиционного определения трапеции. Однако, чтобы сохранить симметричность схемы, решили, что множество равнобочных трапеций будет изображать не круг, а левый серп. Тогда, правый серп — это дельтоиды, отличные от ромбов. И это привело их к новому открытию, которое я не планировала. Похоже, что даже к объективно новому. Послушаем диктофонную запись дальше?

А. Да, конечно, очень интересно.

В. *Как Вы решили: надо ли включать множество прямоугольников во множество равнобоких трапеций или нет?*

Костя. *Не хочется автора учебника обижать.*

В. *Но не авторами школьных учебников введен этот термин. Трапеции были известны еще в Древней Греции. В переводе с греческого, трапеция — трапезный столик. А у нас стол больше похож на прямоугольник. Вот этот, например, стол для трапезы годится?*

Костя. *Годится.*

В. *В чем тогда дело? Не хотите менять устоявшуюся терминологию? Но как же мы тогда будем называть четырехугольники, имеющие, по крайней мере, одну ось симметрии — множество четырехугольников, изображенных на схеме левым кругом?*

Костя. *(хохочет) ТРАПЕЗОИДЫ!*

В. *Трапезоиды? Еще предложения есть? Трапезоиды — хорошо?*

Женя. *А зачем вводить слова?*

В. *Потому, что новое понятие у нас получается, которое должно включать в себя и равнобокие трапеции, и прямоугольники.*

Женя. *Ну..., ладно.*

В. *Теперь нам надо зафиксировать определение трапезоида.*

Женя. *(записывает). Трапезоидом называется четырехугольник, имеющий, по крайней мере, одну ось симметрии, проходящую через середины противоположных сторон.*

В. *А еще лучше написать: НАЗОВЕМ. Мы же ВВОДИМ этот термин. По-хорошему, надо еще посмотреть, не использовал ли кто-нибудь этот термин в геометрии в другом смысле. Например, в Интернете набрать в поисковой строке: «трапезоид».*

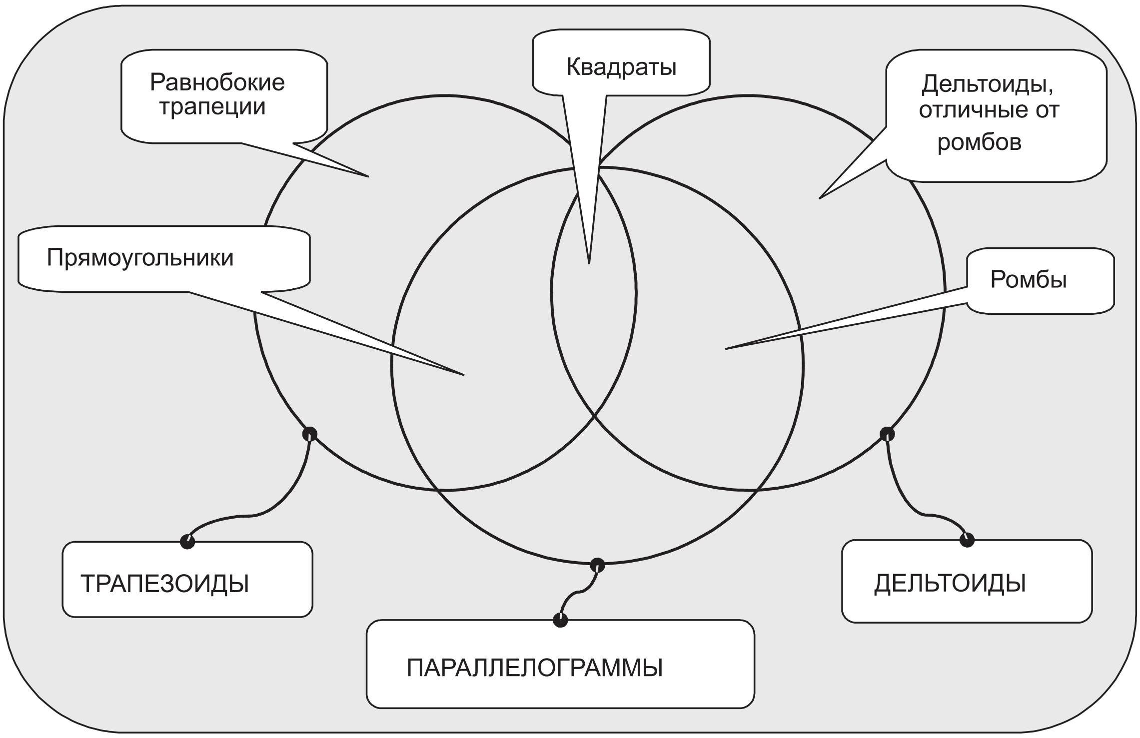


Рис. 3.

А. И что, выяснили, занят ли этот термин?

В. В геометрии не занят, но он используется в технике, при описании функции проекторов, позволяющих выравнивать трапециевидные границы проекций до прямоугольных. Так что название оказалось очень удачным. И схема получилась красивой (рис. 3).

А. Здорово! Это схема мне еще больше нравится. Теперь можно выводить школьников на переоткрытие трапезоида?

В. Можно пробовать, но не всегда получается. Следующих моих испытуемых, таких же мальчиков-восьмиклассников нисколько не смутило, что полученное ими определение равнобочной трапеции было не эквивалентно классическому. Они заявили, что это определение лучше, чем в учебнике. И все мои попытки вывести их на переоткрытие трапезоида были тщетны. Но зато ими было получено другое объективно новое знание. Они усилили обобщение, проведя начальные рассуждения для произвольного многоугольника. И придумали названия для оси симметрий двух разных типов: серединная и биссекторная.

А. Зачем было вводить названия осей?

В. Названия осей были введены для облегчения формулировок. Чтобы было понятно, надо посмотреть наиболее существенные моменты их работы:

«Рассмотрим всевозможные случаи расположения вершин многоугольника относительно его оси симметрии.

Пусть ни одна из вершин этого многоугольника не лежит на оси. Тогда все его вершины попарно симметричны и ось симметрии проходит через середины его двух сторон.

Определение. *Серединной осью симметрии многоугольника назовём ось симметрии, проходящую через середины двух его сторон.*

Пусть хотя бы одна из вершин многоугольника лежит на оси симметрии. Тогда стороны многоугольника, исходящие из этой вершины, симметричны, и ось симметрии содержит биссектрису угла многоугольника.

Определение. *Биссекторной осью симметрии многоугольника назовём его ось симметрии, содержащую биссектрису, по крайней мере, одного из его углов.*

Если только одна вершина многоугольника лежит на биссекторной оси симметрии, то остальные — попарно симметричны. Тогда биссекторная ось симметрии проходит через середину одной из сторон многоугольника.

Если две вершины многоугольника лежат на биссекторной оси симметрии, то остальные — попарно симметричны.

Если число вершин многоугольника четно, то он может иметь как биссекторную, так и серединную оси симметрии; а если число вершин многоугольника нечетно, то он может иметь только биссекторную ось симметрии (рис.4).

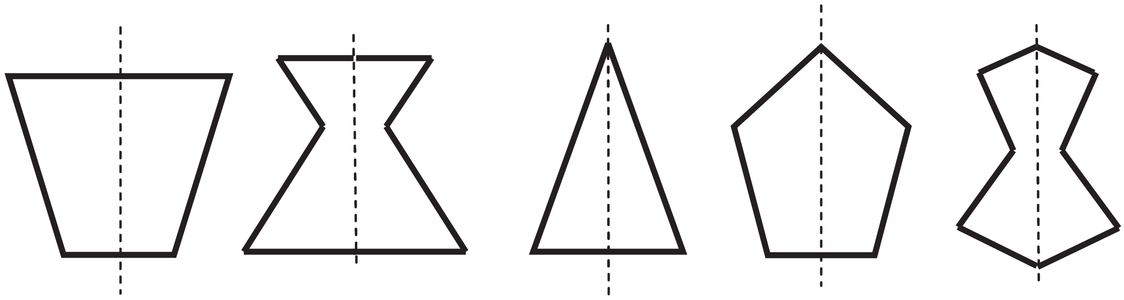


Рис. 4.

Определение. *Сторону, содержащую симметричные вершины многоугольника, назовем его основанием.*

Из определения следует, что если многоугольник имеет два основания, то они параллельны, поскольку перпендикулярны одной прямой — оси симметрии.

Определение. *Симметричные относительно оси стороны многоугольника назовем боковыми сторонами, а симметричные относительно оси углы — боковыми углами.*

Из определения следует, что пары боковых стороны и пары боковых углов многоугольника равны».

И дальнейшие рассуждения о симметричных четырехугольниках, и формулировки полученных из их классификации определений с использованием введенной терминологии упростились:

«Пусть четырехугольник имеет, по крайней мере, одну ось симметрии. Тогда она может быть либо серединной, либо биссекторной.

Определение. *Равнобедренной трапецией назовём четырёхугольник, у которого есть хотя бы одна серединная ось симметрии.*

Определение. *Дельтоидом назовём четырёхугольник, у которого есть хотя бы одна биссекторная ось симметрии.*

Пусть четырехугольник имеет, по крайней мере, две оси симметрии. Тогда возможны три случая: обе оси серединные, обе оси биссекторные, одна ось серединная, а вторая — биссекторная.

Определение. *Прямоугольником назовем четырехугольник, у которого есть хотя бы две серединные оси симметрии.*

Определение. *Ромбом назовём четырёхугольник, у которого есть хотя бы две биссекторные оси симметрии.*

Определение. *Квадратом назовём четырехугольник, у которого есть, по крайней мере, две оси симметрии: одна серединная и одна биссекторная».*

А. Формулировки определений стали, конечно, лучше. И мне понравилось, как обобщенно введены понятия основания и боковых сторон многоугольника. Походит и для равнобедренного треугольника, и для трапеции. Но у Вас была беседа только с двумя мальчиками. Такая работа со всем классом и каждый раз не получится.

В. Конечно, фронтальная форма работы со всем классом для такой беседы не подходит. Будет работать только группа прорыва. Надо использовать другие формы организации учебного процесса, они известны. Но это очень большая тема для отдельного разговора. И каждый раз вывести детей на переоткрытие не получится. Главное, чтобы у них был такой опыт. Тогда, применяя готовое определение или теорему, они будут знать, что это продукт такой же деятельности, только чужой... Я вижу, что Вы меня уже не слушаете?

А. Я тут подумала, что используя определение квадрата, которое мальчики сформулировали, одна задача очень хорошо решается. Есть такая задача — о куске материи: проверить двумя сгибаниями, что он квадратный. Теперь понятно, как перегибать. Надо теорему с такой формулировкой попробовать доказать — признак квадрата. И как только придумывают такие задачи!

В. Подобные задачи обычно придумывает профессиональный математик. Но не всякий, а тот, кто может смотреть на элементарную математику с точки зрения высшей и затем перевести условие задачи на детский язык. Я думаю, что автор этой шел от *образующих группы диэдра.*

А. Какой группы?

В. Так называется группа симметрий правильного многоугольника. Две осевые симметрии относительно прямых, пересекающихся под углом в сорок пять градусов как раз порождают полную группу симметрий квадрата. Поэтому, если четырехугольник обладает такими двумя симметриями относительно разнотипных осей, то это квадрат. Школьникам задачу о куске материи полезно дать именно до классификации симметричных многоугольников. Тогда они быстрее догадаются, что четырехугольник может иметь разнотипные оси симметрии. Хотя и вряд ли вспомнят при этом задачу.

А. Обычно дети ее сами не решают. Только если материальными действиями попробовать.

В. Ну вот, очень хорошо, что первый этап процесса усвоения по Гальперину Вы не забыли.

А. Помню только, что это действие руками.

В. Чаще всего руками. Но не обязательно. Это могут быть действия любой частью тела. И даже действия всем телом.

А. И еще я помню, что на этапе материального действия нельзя задерживаться, надо переходить к этапу внешней речи. Только не помню почему.

В. Очень просто — чтобы действия в такой форме не автоматизировались. Мы же ведем детей к умственному действию. Вообще речевая форма должна возникнуть еще на этапе материального или материализованного действия. И очень хорошо, когда такое действие удается найти. Особенно это важно при обучении маленьких детей.

А. Это что же, нужно будет куском материи запастись квадратным?

В. Не обязательно материи. Можно и квадратным листом бумагой обойтись.

А. Как тогда формулировать задачу?

В. Можно, например, так: не пользуясь измерительными инструментами минимальным числом действий, доказать, что лист бумаги — квадратный.

А. Я так понимаю, что решением должно быть два правильных сгибания?

В. Не просто два сгибания. А сгибания с целью доказать равенство сторон и углов. Они должны прийти к выводу, что все четыре стороны равны между собой. И что равны между собой все углы. У меня тут сочинялась еще одна задача. Вот Вам два одинаковых листа бумаги. Докажите одним действием, что они оба — квадратные.

А. Одним? И оба — квадратные?! Это как же надо перегнуть? Хотя, стоп... Одним сгибанием равенство всех сторон и всех углов не доказать. Вся фишка в том, что их два? И одинаковые? Это нужно подумать... Я тут еще подумала: не рано ли такие серьезные вещи рассматривать в восьмом классе?

В. Рано? Как Вы думаете, смогут ли Ваши собственные дети провести такую классификацию?

А. Нет, конечно, они же только во втором классе.

В. Но с понятием осевой симметрии они уже знакомы?

А. Да, недавно в школе строили фигуры, симметричные относительно прямой. И такие четырехугольники, как ромб, прямоугольник и квадрат знают. Не знают только что такое ось симметрии фигуры.

В. А снежинки на Новый год они вырезали?

А. Вырезали... Выходит, что они и с этим понятием знакомы.

В. И поскольку дети еще маленькие, начнем именно с материального действия. Давайте предложим им вырезать четырехугольник из листа бумаги, свернутого пополам. Зовите наших испытуемых...

А. Сверните лист бумаги пополам. А теперь подумайте, как можно сделать разрезы так, чтобы после разворачивания получился четырехугольник. Сережа, зачем ты сразу режешь, подумай сначала. Ну вот, разверни, посмотри, сколько у этого многоугольника углов?

Сережа. Восемь.

А. Значит это скольки-угольник? А нам четырехугольник нужен!

Гоша. У нас и так четырехугольник. И не надо ничего резать!

А. Действительно. А как называется этот четырехугольник, помнишь?

Гоша. Прямоугольник.

А. Попробуйте вырезать какой-нибудь другой четырехугольник. Вот смотри, Сережа только два разреза сделал, и у него получилось.

Гоша. А я сейчас сделаю еще меньше — один. Уголочек только отрежу... Можно теперь самолетик сделать?

А. Можно и самолетик, только теперь с этим самолетиком в коридор идите бегать.

А. Ну вот, все закончилось сворачиванием самолетиков. Маленькие они еще!

В. Ну почему же, для первого раза очень удачно. И дельтоид получился — у Сережи, и равнобокая трапеция — у Гоши. Его ход с готовым уже прямоугольником вообще замечательный. И стремление к минимизации — хорошо.

А. Но как побудить их идти при классификации от вершин? Надо тогда как-то точки материализовать?

В. Посмотрите на доску объявлений. Кнопки на ней такие красивые... Вот Вам и точки. Снимайте объявления!

А. Еще и ось симметрии нужна.

В. Сейчас найдем канцелярские резинки. Были где-то, такие же красивые, цветные. Вонзайте в доску две кнопки. На них резиночку натянем. Чем не прямая? Двумя точками определяется, как ей и положено.

А. И стороны четырехугольников — тоже резинки?

В. Естественно. Главное, что начинать просто придется с кнопок — с вершин. Подумать, какие есть всевозможные случаи их симметричного расположения относительно прямой. При этом надо еще материализовать ограничения условия задачи, которое они не приняли — выдать детям только по четыре кнопки. Все, план намечен. Пора звать обратно испытуемых. Не поранились бы только. Кнопки очень острые.

А. Видите, некоторые фигуры можно свернуть по прямой, а потом опять развернуть. Вы такие и вырезали.

Сережа. Как бабочка?

А. Правильно, как бабочка. Только у нас геометрические фигуры, и сворачивать мы их будем мысленно. Так вот, прямая, по которой мы сворачиваем, называется осью симметрии фигуры. Вот вам по четыре кнопки. Вонзите их в доску так, чтобы они были вершинами четырехугольника, а осью симметрии — вот эта прямая. Гоша, почему так?

Гоша. Это квадрат будет.

В. Почему обязательно квадрат?

Сережа. А у меня — прямоугольник!

Гоша. Сейчас стороны померяю... Равны. У Вас есть угольник? И углы прямые Квадрат! (фото 1).

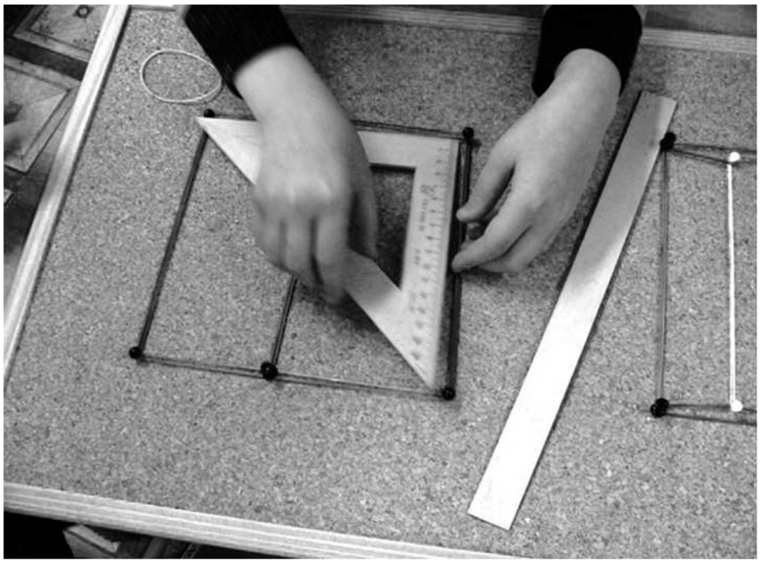


Фото 1.

Сережа. А у меня — прямоугольник!

В. Вершина его может быть ближе к оси?

Сережа. Может быть и ближе. Но только вместе со своей парой. Резинки одной хватит (фото 2). Как он называется?

А. Это трапеция, Сережа. Равнобокая.

В. А вершина четырехугольника может быть на оси?

Сережа. Может. Там уже есть точки. Тогда у меня одна кнопка лишняя. Нет, две лишние. Вот такой четырехугольник будет (фото 3).

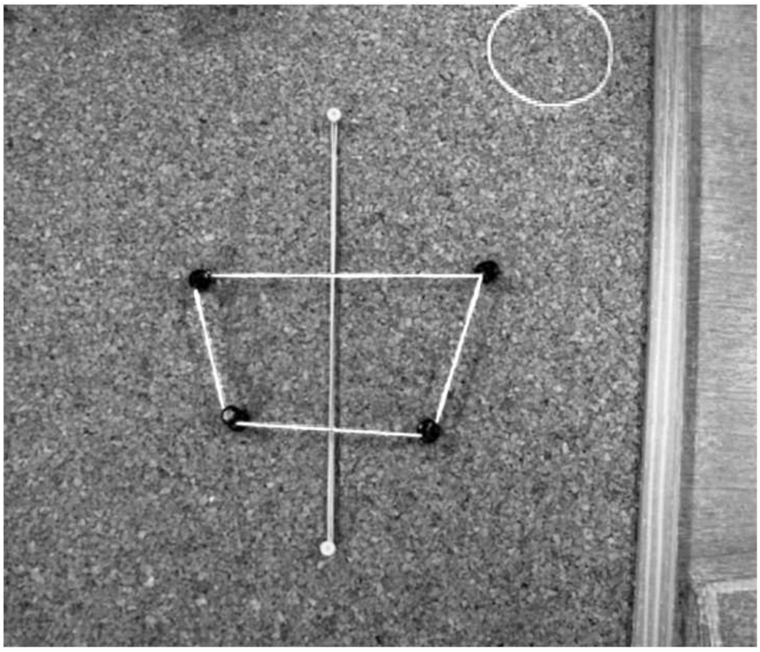


Фото 2.

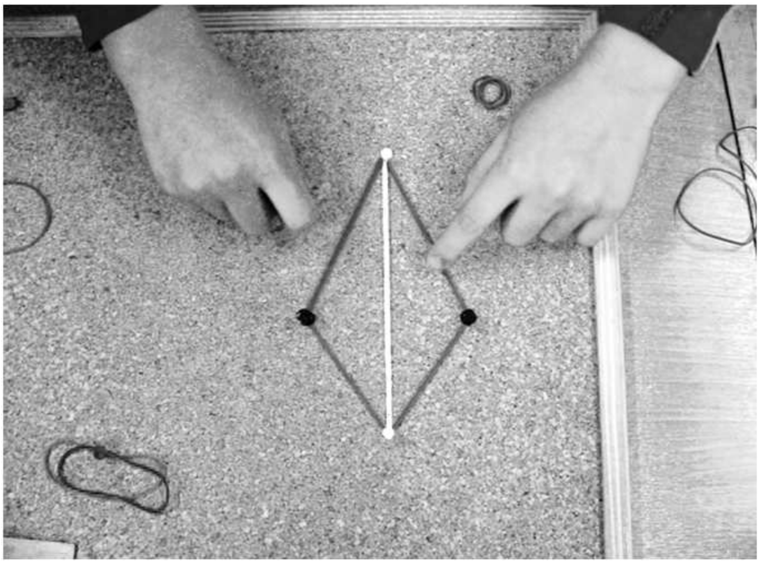


Фото 3.

Гоша. Это стрела.

А. Этот четырехугольник называется дельтоидом.

Гоша. И все равно он — стрела.

В. Неважно, как называть. Можно и так. Главное — красотища неописуемая!

А. Ну, все, идите бегать.

Сережа. Нет, мы еще поиграем с резиночками. Я хочу сделать звезду.

В. Только очень осторожно. Кнопки, вонзайте недалеко друг от друга, чтобы резинку не сильно натягивать. А то они у вас срываются вместе с кнопками.

А. Почему Гоша начал с квадрата, а Сережа — с прямоугольника?

В. Им, как и Вам, мешали образы.

А. А может быть это просто неготовность к дедуктивному рассуждению?

В. У них, действительно, нет такого опыта. Меня волнует другой вопрос: поняли ли дети, что принципиально различных случая может быть только два?

А. Значит, эксперимент не удался?

В. Во-первых, он еще не окончен. Сегодня я больше о технике безопасности думала. Дедуктивное рассуждение надо попробовать озвучить. Мальчики молча кнопки вонзали, и мы не знаем, что они при этом думали. Во-вторых, очень удачно, что резинки стали использовать. И одной резинкой для изображения всего четырехугольника Сережи тоже очень удачно стал пользоваться. Меня это навело на мысль, что мы классифицируем только *простые* многоугольники.

А. Простые это какие? Я не припомню

В. Без самопересечений (в школе других и не проходят). Простой многоугольник *гомеоморфен* окружности (это уже топология). Когда популяризируют топологическое понятие гомеоморфизма, как раз и говорят, что если фигуры представлять резиновыми, то гомеоморфные — это те, которые можно преобразовать друг в друга только растяжением или сжатием (без разрывов и склеек).

А. Ох, топология... Помню, какой это сложный раздел. А здесь она как поможет?

В. Перемещая пару симметричных кнопок, мы можем превратить дельтоид в его частный случай — в ромб, а ромб, в свою очередь — в квадрат; трапецию выровнять до прямоугольника, а прямоугольник — до квадрата. Если говорить на языке топологии, мы совершаем гомеоморфизм.

А.Это совсем другой ход.

В. Другой, но зато позволяет осознать, что такое частный случай.

А. Но так они никогда не придут выводу, что четырехугольник, имеющий как минимум две разнотипные оси — квадрат.

В. Нужен ли им сейчас этот вывод?

А. Он для задачи о куске материи очень полезен.

В. Специально готовить к решению такой конкретной задачи? Задача, конечно, очень хорошая, но не для восьмилетних детей. Понять, что такое частный случай и что такое более общий случай геометрической фигуры им гораздо важнее.

А. Ну вот, теперь их не оторвать от резинок с кнопками. А Вам уже, наверное, пора.

В. Я знаю, как их оторвать. Пойдем чай пить. С конфетами.

Сережа. У Вас даже коробка конфет — квадратная. А обычно прямоугольной бывает.

В. Точно — квадратная?

Гоша. Я сейчас за линейкой схожу.

В. С линейкой не интересно. Вы так докажите, что квадратная.

Гоша. Если по-другому закроется, то квадратная.

А. У меня гениальные дети! Это же решение задачи о двух листах бумаги! Если при повороте одного из них они опять совпадут, то оба — квадратные. Одним таким поворотом мы доказываем, что все стороны и все углы равны. А как Вы сочинили эту задачу?

В. Знала, что у группы поворотов квадрата один образующий элемент поворот на девяносто градусов. Это так называемая циклическая группа. И знала, что другого четырехугольника с такой группой поворотов нет.

А. И нарочно нашли квадратную коробку конфет?

В. Нет, это случайно. Просто у Вас замечательные дети. Во всем начинают видеть геометрию.

А. Говорят, что не бывает ничего случайного.

В. Это очень похоже на правду. Хотя и не доказуемо...

Литература

[1] Бахман Ф. Построение геометрии на основе понятия симметрии. - М. - 1969. - 380 с.

[2] Спиноза Б. Об усовершенствовании разума: Сочинения. - М. - 1998. - 864 с.

[3] Талызина Н.Ф. Педагогическая психология. - М.: Академия. - 2006. - 288 с.

Веселяева Татьяна Юрьевна,
до 2013/14 учебного года
профессор кафедры алгебры и геометрии
Северо-Восточного государственного университета,
в настоящее время учитель математики
МБОУ "Гимназия № 30" г. Магадана
кандидат физико-математических наук, доцент.

E-mail: veselyaeva.tatyana@inbox.ru

О некоторых «треугольных» кониках

Алексей Мякишев

В статье изучаются коники, проходящие через точки, выбранные специальным образом относительно данного треугольника. В последнее время эта тематика стала очень популярной. Новый импульс ее развитию придали гипотезы Штейнгарца об эллипсах, опубликованные в [1], [2]. Некоторые из них опровергнуты, а некоторые доказаны, в частности, в статье [3], опубликованной в предыдущем номере нашего журнала. Изложение специального "механического" метода доказательства, при помощи которого можно доказать одну из гипотез, а также получить ряд других планиметрических результатов, содержится в [4].

Теоремы 4.1 и 4.2 настоящей статьи получены совместно с Д. С. Григорьевым, учащимся 11 класса Московского Химического Лицея № 1303.

Конец доказательства в тексте помечается значком □ Для котангенса используется международное обозначение cot, в отличие от принятого в России ctg.

Статья печатается с продолжением.

§ 1. Вводная часть

Как хорошо известно, *три* различные точки *общего* положения[1] однозначно определяют проходящую через них окружность. Через четыре же произвольные точки окружность, вообще говоря, провести нельзя. Поэтому ситуации, когда существует окружность, проходящая через те или иные *четыре* точки некой геометрической конфигурации, следует отнести к *специальным* (нетипическим).

Подобные замечания, с некоторыми поправками, можно отнести и к *коникам*[2].

А именно, известно, что через любые *пять* различных точек общего положения[3] можно провести конику, и притом только одну (см. [5], [10]). К *специальным* здесь, следовательно, можно отнести ситуации, когда коника проходит через какие-либо *шесть* точек геометрической конфигурации.

В нашей работе мы предъявим несколько такого рода коник — большинство из них, насколько нам известно, ранее в работах по элементарной геометрии не появлялось.

Все они, так или иначе, связаны с треугольником[4].

Помимо доказательств существования, будут найдены *центры* рассматриваемых коник, некоторые из которых ныне пополнили фундаментальную *Энциклопедию Треугольных Центров* профессора Кларка Кимберлинга, (см. [9]).

В последующих вычислениях мы будем активно применять барицентрические координаты (все необходимые сведения о которых содержатся, например, в [6], [10]).

В качестве главного орудия будет неоднократно использована так называемая

---

[1] Т.е., в данном случае, не лежащие на одной прямой или, как еще говорят, *неколлинеарные*.

[2] Под этим термином будем подразумевать *эллипс, параболу* или *гиперболу* — т.н. *невырожденные коники*.

А, скажем, пару параллельных (а то и совпадающих) прямых — можно считать «вырожденной» параболой. Эти прямые симметричны относительно любой точки, лежащей на прямой, им параллельной и содержащей середины всех отрезков с концами на этих прямых.

Пару же пересекающихся прямых можно рассматривать как «вырожденную» гиперболу.

[3] Т.е. никакие *три* из которых не лежат на одной прямой.

[4] Отсюда, понятно, и название *треугольные коники*. См. также некоторые классические вещи о них в [12].

Теорема 1.1 (Карно). Пусть $A_1, A_2 \in (BC); B_1, B_2 \in (CA); C_1, C_2 \in (AB)$. Тогда эти шесть точек лежат на одной конике, если и только если выполнено *условие Карно*:

$$\left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}}\right) = 1 \quad \text{(см. [5], [10]).}$$

Из этой теоремы, в свой черед, сразу вытекают два полезных следствия, которыми также воспользуемся в дальнейшем.

Следствие 1.1. Пусть шесть точек попарно расположены на прямых, содержащих стороны некоторого треугольника ABC: $A_1, A_2 \in (BC); B_1, B_2 \in (CA); C_1, C_2 \in (AB)$, причем пары векторов $(\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{CA_2}), (\overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{AB_2})$ и $(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{BC_2})$ равны по величине и противоположны по направлению (т.е. либо одновременно смотрят «внутрь» треугольника, либо — «вовне»).

Тогда эти шесть точек лежат на одной конике (рис. 1).

Доказательство. Рассмотрим, например, «внутренний» случай («внешний» совершенно аналогичен). Пусть $BC = a, CA = b, AB = c$ и $BA_1 = CA_2 = x, CB_1 = AB_2 = y, AC_1 = BC_2 = z$. Тогда

$$\left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}}\right) =$$

$$= (-\frac{x}{a-x} \cdot -\frac{a-x}{x}) \cdot \left(-\frac{y}{b-y} \cdot -\frac{b-y}{y}\right) \cdot \left(-\frac{z}{c-z} \cdot -\frac{c-z}{z}\right) = 1,$$

и, в силу теоремы 1.1, рассматриваемые точки принадлежат одной конике. □

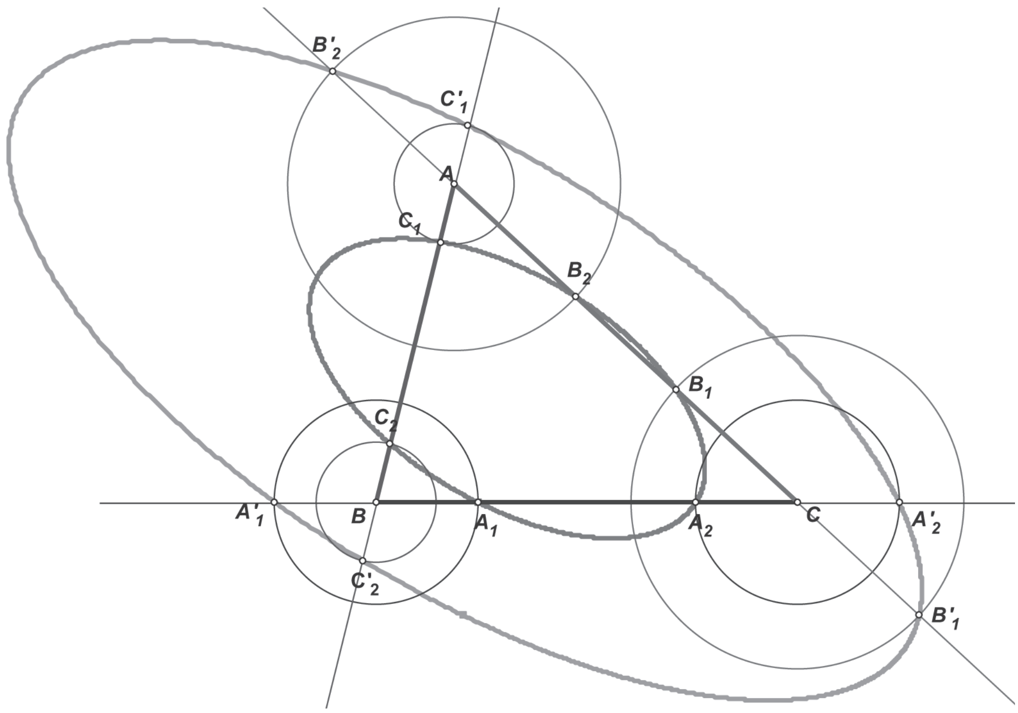


Рис. 1.

Следствие 1.2. Если шесть точек, расположенных на сторонах (или их продолжениях) некоторого треугольника можно разбить на две тройки, каждая из которых является основаниями *конкурентных*[5] *чевиан*[6], то существует коника, содержащая эти шесть точек (рис. 2).

[5] Т.е. пересекающихся в одной точке.

[6] Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками на прямых, содержащих противолежащие стороны.

Доказательство. Следует дважды применить *обратную теорему Чевы* (см. [5]–[8], [10]), а затем воспользоваться теоремой Карно:

$$\left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}}\right)\cdot\left(\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}}\right)\cdot\left(\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}}\right)=$$

$$=\left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}}\right)\cdot\left(\frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}}\right)=1\cdot 1=1. \;\square$$

Наконец, нам понадобятся следующие три «барицентрических» факта.

Теорема 1.2 (Уравнение коники в барицентрических координатах). В барицентрических координатах уравнение коники имеет вид[7] (см. [10]):

$$ux^2+vy^2+\omega z^2+2fyz+2gzx+2hxy=0.$$

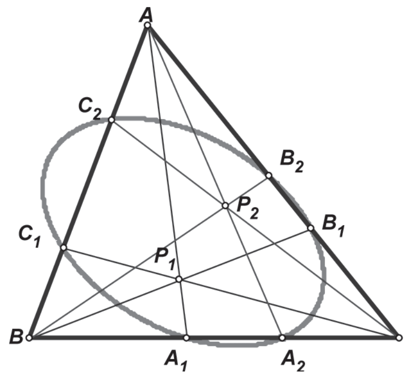


Рис. 2.

Теорема 1.3 (Определение вида коники и координат центра по ее уравнению). Пусть уравнение коники задано: $ux^2+vy^2+\omega z^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$. Введем следующие обозначения: $U=vw-f^2$, $V=wu-g^2$, $W=uv-h^2$, $F=gh-uf$, $G=hf-vg$, $H=fg-wh$. Тогда *вид коники* зависит от знака выражения $\Phi=U+V+W+2(F+G+H)$: Если $\Phi>0$, то коника является эллипсом, если $\Phi=0$ — параболой, а если $\Phi<0$ — гиперболой.

Центр коники имеет координаты $(U+G+H:V+F+H:W+F+G)$ (см. [10]).

§ 2. Изотерический[8] эллипс

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и поделим каждую из его сторон на три равные части. Тогда, оказывается, будет справедлива следующая

Теорема 2.1. Точки «*растроения*» $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на конике с центром в G — точке пересечения медиан[9] треугольника ABC, причем диагонали вписанного в конику шестиугольника, а также отрезки соединяющие середины его противоположных[10] сторон — будут делиться этой точкой пополам (см. рис. 3).

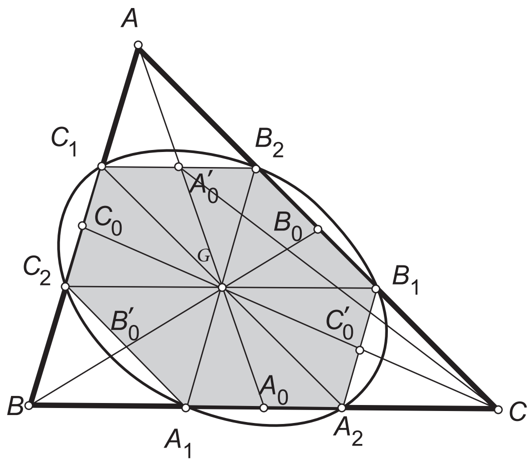


Рис. 3.

Доказательство. То, что указанные шесть точек лежат на одной конике, немедленно получим, воспользовавшись следствием 1.1, поскольку $BA_1=CA_2=\frac{a}{3}, CB_1=AB_2=\frac{b}{3}, AC_1=BC_2=\frac{c}{3}$.

А если еще заметить, что противоположные стороны рассматриваемого шестиугольника *параллельны* (как это следует из теоремы *Фалеса*), то существование коники можно доказать и по-другому, посредством *обратной теоремы Паскаля* ([5], [10]), которая гласит:

---

[7] И является однородным как относительно коэффициентов, так и относительно переменных, т.е. не меняется (переходит в равносильное), если все коэффициенты (или все переменные) умножить одновременно на любой постоянный ненулевой множитель.

[8] От греческого «*isor*» — *равный* и латинского «*ter*» — *три*.

[9] Ее еще часто называют попросту *центроидом*.

[10] Т.е. идущих через две.

Если точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны некоторого шестивершинника, лежат на одной прямой, то его вершины лежат на одной конике.

А в нашем шестиугольнике противоположные стороны *параллельны* — т.е., с проективной точки зрения, точки их пересечения лежат на *бесконечно удаленной прямой* ([5], [6], [10]).

Для доказательства же того, что центром коники является центроид G, мы применим теорему о том, что *середины пучка параллельных хорд коники лежат на прямой, проходящей через ее центр*[11] (см. [5], [10]).

Действительно, очевидно[12], что диагональ C_1A_2 параллельна AC, середина AC, точка B_0, является также и серединой B_1B_2 и т.д.

Наконец, то, что все фигурирующие в условии диагонали и отрезки делятся центроидом пополам, также следует из теоремы Фалеса — ну, и из того еще, что медианы делятся цетроидом в отношении $2:1$ (см. [7], [8]) — именно поэтому прямая, например, B_1C_2 проходит через G.

Из всего вышесказанного, кстати, еще и то следует, что наш шестиугольник является *центрально симметричным, с центром симметрии в* G. $\square$

Теперь заметим, что наша коника всегда будет представлять собою *эллипс.* (вообще говоря, то обстоятельство, что коника проходит через шесть точек, расположенных *на сторонах треугольника*, вовсе не гарантирует ее «эллипсовости» — см. рис. 4).

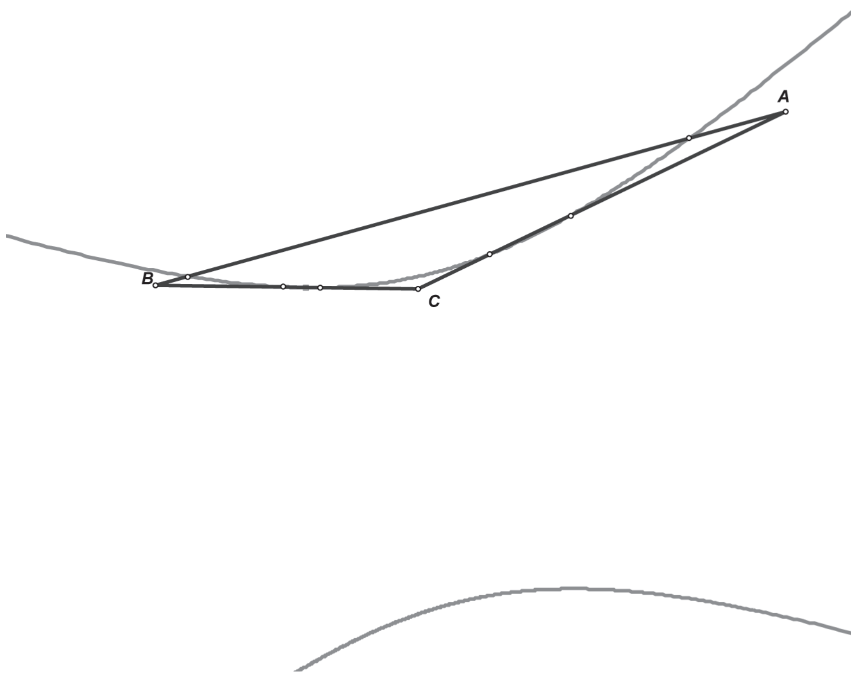


Рис. 4.

Теорема 2.2. Рассматриваемая коника является эллипсом.

Доказательство[13]. Сначала, пользуясь теоремой 1.2, составим уравнение нашей коники. Очевидно, координаты шести точек «деления на три» имеют вид:

[11] И прямая эта (или отрезок) называется *сопряженным диаметром* коники

В случае параболы ее центром следует считать бесконечно удаленную точку ее оси. Тогда хордой параболы, проходящей через ее центр, будет являться луч, параллельный оси.

[12] По теореме, конечно, Фалеса.

[13] Другое, более общее рассуждение на эту тему приведено далее, см. теорему 9.2.

$$A_1 = 0 : CA_1 : BA_1 = 0 : 2a : a = 0 : 2 : 1;\;\; A_2 = 0 : CA_2 : BA_2 = 0 : a : 2a = 0 : 1 : 2;$$
$$B_1 = CB_1 : 0 : AB_1 = b : 0 : 2b = 1 : 0 : 2;\;\; B_2 = CB_2 : 0 : AB_2 = 2b : 0 : b = 2 : 0 : 1;$$
$$C_1 = BC_1 : AC_1 : 0 = 2c : c : 0 = 2 : 1 : 0;\;\; C_2 = BC_2 : AC_2 : 0 = c : 2c : 0 = 1 : 2 : 0.$$

Подставив теперь координаты точек в уравнение коники, придем к системе из 6-ти линейных уравнений[14], которую, однако, легко решить благодаря большому количеству нулевых коэффициентов. В итоге получим, что $u = v = w = 4$; $f = g = h = -5$, т.е. уравнение коники имеет вид:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5yz - 5zx - 5xy = 0.$$

И, поскольку $U = V = W = -9$ и $F = G = H = 45$, то $\Phi = -9 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 45 = 243 > 0$ и, по теореме 1.3, наша коника является эллипсом. □

§ 3. Ортоэллипс

Проведем из вершины A произвольного треугольника ABC два луча, перпендикулярных AB и AC и таких, что они не пересекают прямую BC. Затем рассмотрим отрезок $B_2''C_1''$, вписанный в угол, образованный этими лучами, причем параллельный и равный отрезку BC. Отрезки $B_1''A_2''$ и $A_1''C_2''$ определяется аналогично. Тогда, оказывается, справедлива

Теорема 3.1. Точки $B_2'', C_1'', B_1'', A_2'', A_1'', C_2''$ лежат на эллипсе с центром в точке H — ортоцентре[15] треугольника ABC (рис. 5).

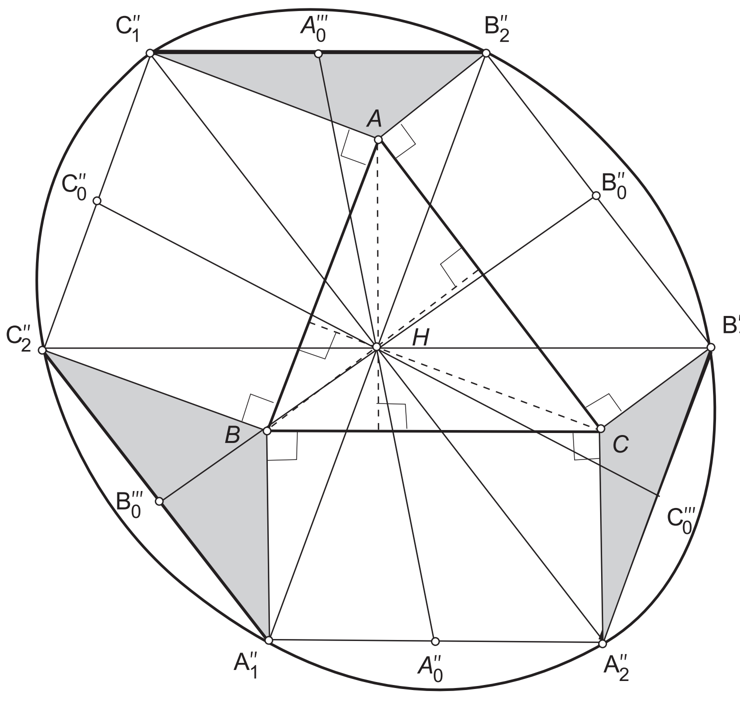


Рис. 5.

Противоположные стороны шестиугольника параллельны; диагонали его и отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, проходят через точку H, которой и делятся пополам.

Доказательство. Данное утверждение получается из двух предыдущих (теорема 2.1, теорема 2.2), если рассмотреть гомотетию с центром в точке O — центре описанной окружности треугольника ABC — и с коэффициентом 2 (рис. 6).

[14]Одно из которых, конечно, является следствием остальных.

[15]Так часто называют точку пересечения высот треугольника.

Действительно, пусть B'', C'' — образы точек B и C при этой гомотетии.

Тогда $B''C''||BC$, поскольку при гомотетии прямые, не проходящие через ее центр, переходят в параллельные. Поэтому, опустив перпендикуляры из точек B и C на прямую $B''C''$, получим *прямоугольник* с вершинами в этих точках и основаниях перпендикуляров, которые обозначим A_1'' и B_1''. Поэтому $BA_1'' = CA_2''$ и $A_1''B_1'' = BC = \frac{1}{3}A''B''$. Кроме того, поскольку $OB = OC$ (как радиусы описанной окружности), то и $OB'' = OC''$, как образы этих отрезков при гомотетии.

Следовательно, $BB'' = CC''$ и прямоугольные треугольники $BB''A_1''$ и $CC''A_2''$ будут равны (по катету и гипотенузе). Значит, $B''A_1'' = CA_2''$. И, так как $A_1''B_1'' = \frac{1}{3}A''B''$, то $B''A_1'' = A_1''B_1'' = CA_2'' = \frac{1}{3}B''C''$, т.е. точки A_1'' и B_1'' являются образами точек A_1 и A_2 при рассматриваемой гомотетии.

Точно так же доказывается, что точки B_1, B_2, C_1, C_2 переходят в точки $B_1'', B_2'', C_1'', C_2''$ соответственно.

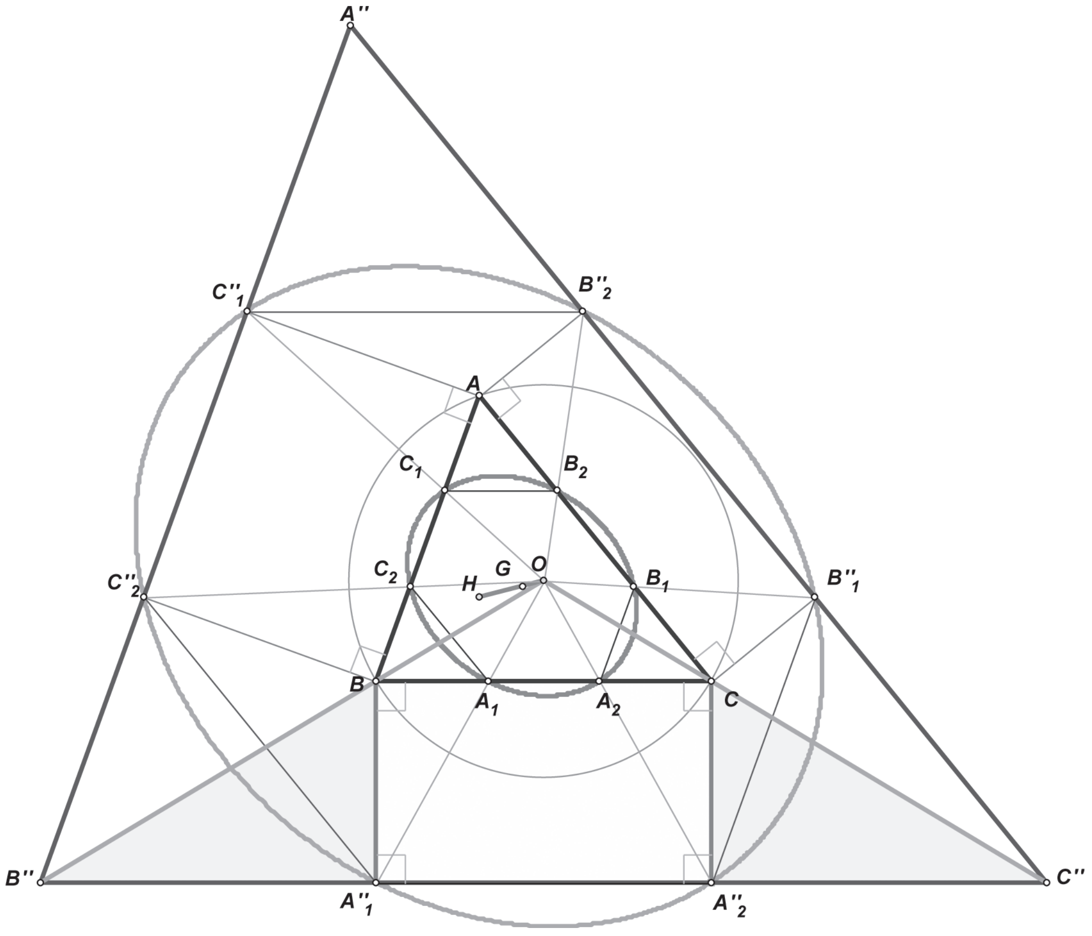


Рис. 6.

Наконец, по самому способу построения, очевидно, что отрезки $B_2''C_1''$, $B_1''A_2''$ и $A_1''C_2''$ таковы именно, какими мы представили их в начале данного параграфа.

То же, что центроид треугольника G указанной гомотетией переводится в ортоцентр H, следует из факта существования классического объекта — так называемой *прямой Эйлера.* На ней, как известно, лежат точки H, G, O — причем G делит отрезок HO внутренним образом в отношении 2:1, см. [5]–[8], [10]. □

§ 4. Пара коник, задаваемых точками касания вписанной и вневписанных окружностей

Теорема 4.1. Пусть $B_a, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c$ — точки касания вневписанных окружностей с продолжениями сторон BC, CA, AB треугольника ABC.

Тогда эти точки принадлежат одной конике, центр которой P имеет следующие барицентрические координаты (рис. 7):

$$P = \frac{a^2\left(a^4 - 2abc(b+c-a) - \left(b^2-c^2\right)^2\right)}{b+c-a} : \\ : \frac{b^2\left(b^4 - 2abc(c+a-b) - \left(c^2-a^2\right)^2\right)}{c+a-b} : \\ : \frac{c^2\left(c^4 - 2abc(a+b-c) - \left(a^2-b^2\right)^2\right)}{a+b-c}.$$

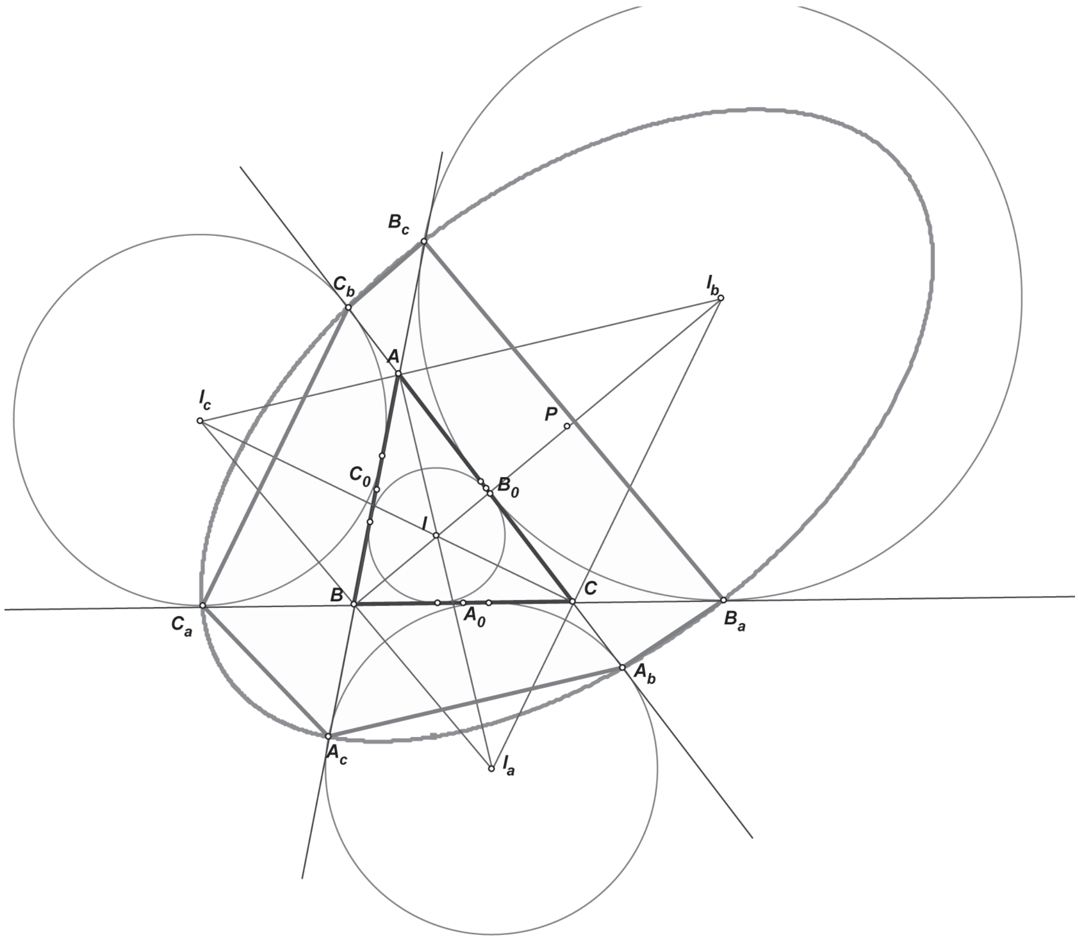


Рис. 7.

Доказательство. Пусть $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника ABC. То, что указанные шесть точек лежат на одной конике, сразу получим, воспользовавшись следствием 1.1, поскольку $BC_a = CB_a = p - a$, $CA_b = AC_b = p - b$, $AB_c = BA_c = p - c$ (см. [5]–[8], [10]). Далее выпишем координаты точек:

$$B_a = 0 : CB_a : -BB_a = 0 : p-a : -p; \quad C_a = 0 : -CC_a : BC_a = 0 : -p : p-a$$

(так как $BB_a = BC + CB_a = a + (p-a) = p = BC + BC_a = CC_a$);

$$A_b = CA_b : 0 : -AA_b = p-b : 0 : -p; \qquad C_b = CC_b : 0 : AC_b = -p : 0 : p-b;$$
$$B_c = -BB_c : AB_c : 0 = -p : p-c : 0; \qquad A_c = BA_c : -AA_c : 0 = p-c : -p : 0.$$

Подставив теперь координаты точек в уравнение коники, получим, что[16]

$$u = v = w = 1;\ \ f = \frac{(b+c)^2 + a^2}{(b+c)^2 - a^2};\ \ g = \frac{(c+a)^2 + b^2}{(c+a)^2 - b^2};\ \ h = \frac{(a+b)^2 + c^2}{(c+a)^2 - b^2}.$$

В силу неравенства треугольника знаменатели всех дробей положительны:

$$(b+c)^2 - a^2 = (b+c-a)(b+c+a) > 0 \qquad \text{и т.д.}$$

Считаем дальше, используя формулы из теоремы 1.3:

$$U = -\frac{4a^2(b+c)^2}{(b+c-a)^2(a+b+c)^2}, \quad V = -\frac{4b^2(c+a)^2}{(c+a-b)^2(a+b+c)^2},$$
$$W = -\frac{4c^2(a+b)^2}{(a+b-c)^2(a+b+c)^2}.$$
$$F = \frac{\left((a+b)^2 + c^2\right)\left(b^2 + (a+c)^2\right)}{(a+b+c)^2(a+b-c)(a+c-b)} - \frac{a^2 + (b+c)^2}{(b+c-a)(a+b+c)}.$$

Поскольку пошли уже довольно длинные выражения, мы не будем выписывать формулы для G и H, а только отметим, что G получается из F посредством циклического сдвига $a \to b \to c \to a$. И точно так же из G затем получается H.

Тогда первая координата центра коники имеет вид:

$$\frac{b^2\left(b^4 - 2abc(c+a-b) - \left(c^2 - a^2\right)^2\right)}{c+a-b} \cdot \frac{4}{(a+b+c)^2(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)},$$

а две другие получаются из нее циклическими сдвигами. И после сокращения на общий множитель

$$\frac{4}{(a+b+c)^2(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

как раз и получаются заявленные в условии выражения для координат центра. □

Замечание 4.1. Как показывает компьютер, данная коника может быть, в зависимости от длин сторон треугольника, как эллипсом, так и параболой или гиперболой.

Когда именно она принимает тот или иной вид, зависит от знака выражения $\Phi = U + V + W + 2(F + G + H)$, согласно теореме 3.1. Подсчеты дают следующее:

$$\Phi = -\frac{4}{(a+b+c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2} \cdot P(a,b,c),$$

где

$$P(a,b,c) = a^8 + b^8 + c^8 - 2\left(b^4c^4 + c^4a^4 + a^4b^4\right) + 4a^2b^2c^2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) +$$
$$+ 4abc\left(a^5 + b^5 + c^5 - b^4c - c^4a - a^4b\right).$$

Поскольку знаменатель дроби положителен, то при $P < 0$ имеем эллипс, при $P = 0$ — параболу, и при $P > 0$ гиперболу.

К сожалению, мы не смогли разложить многочлен P на множители, и потому каких-либо более емких критериев выявить не удалось. Но для каждого треугольника с конкретно заданными длинами сторон вид коники по знаку P определить несложно (рис. 8).

[16]Здесь и далее, в целях экономии бумаги, мы опускаем рутинные, но порою громоздкие тождественные преобразования. По ходу дела мы часто пользовались еще и однородностью коэффициентов и координат, домножая и сокращая некоторые выражения на общие множители. Так, для начала можно положить $f = 1$, например.

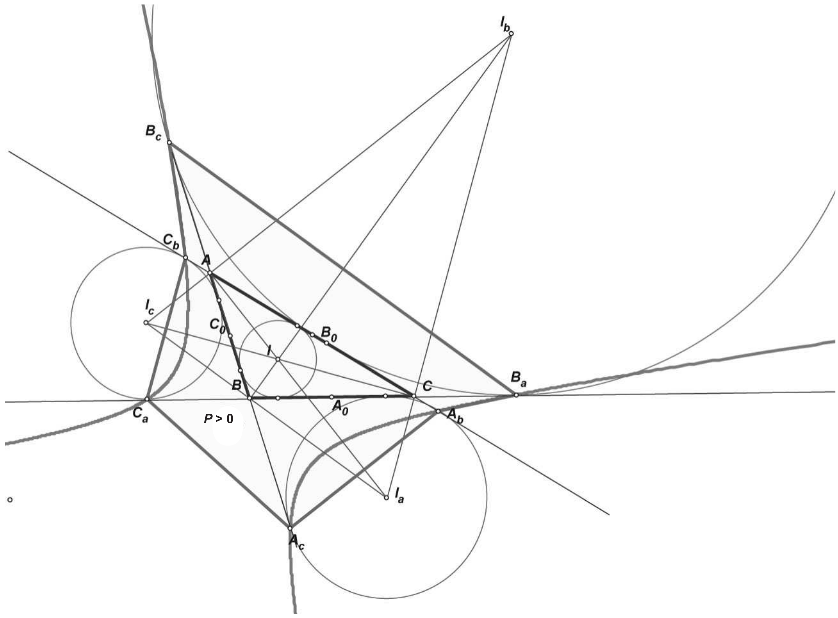


Рис. 8.

Замечание 4.2. Как позже выяснилось, центр рассмотренной коники (равно как и она сама) указан в [9] — это точка $X(478)$ под говорящим названием *Center of Yiu conic*. Таким образом, эта коника была открыта лет 20 назад известным американским геометром *Полем Ю* (*Paul Yiu*), редактором замечательного журнала [11]. Но совпадение не хочется считать досадным — иметь таких предшественников почетно!

Теорема 4.2. Пусть $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ — точки касания вписанной и вневписанных окружностей со сторонами BC, CA, AB треугольника ABC соответственно (рис. 9).

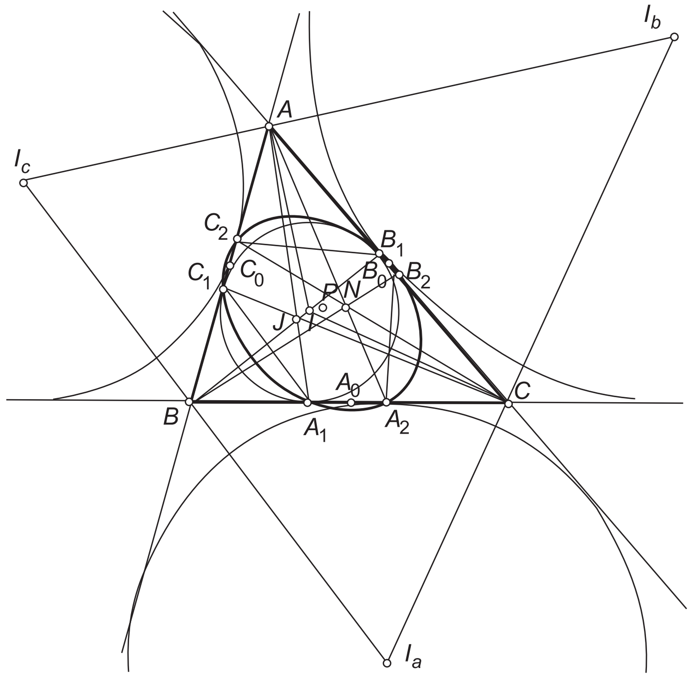


Рис. 9.

Тогда эти точки принадлежат одной конике, центр которой P имеет следующие барицентрические координаты:

$$P = a^2(c+b-a)\left(a^3 - a^2(b+c) - (b-c)^2(b+c) + a\left(b^2+c^2\right)\right) : \ldots : \ldots$$

(две другие получаются из первой циклическими сдвигами $a \to b \to c \to a$).

Первую координату также можно представить в виде

$$a^2(c+b-a)(a^3-b^3-c^3+cb^2+bc^2+ab^2+ac^2-ba^2-ca^2).$$

Доказательство. Пусть $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника ABC. То, что указанные шесть точек лежат на одной конике, сразу получим, воспользовавшись следствием 1.1, поскольку $BA_1 = CA_2 = p-a$, $CB_1 = AB_2 = p-b$, $AC_1 = BC_2 = p-c$. (см. [5]–[8], [10]).

Можно также было воспользоваться следствием 1.2, поскольку прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке J (так называемой *точке Жергонна* — $X(7)$ в [9]), а прямые AA_2, BB_2, CC_2 — в точке N (так называемой *точке Нагеля* — $X(8)$ в [9]), см. также [5]–[8], [10].

Далее выпишем координаты точек:

$$\begin{aligned}
&A_1 = 0 : CB_1 : BB_1 = 0 : p-c : p-b; \;\; A_2 = 0 : CB_2 : BB_2 = 0 : p-b : p-c;\\
&B_1 = CB_1 : 0 : AB_1 = p-c : 0 : p-a; \;\; B_2 = CB_2 : 0 : AB_2 = p-a : 0 : p-c;\\
&C_1 = BC_1 : AC_1 : 0 = p-b : p-a : 0; \;\; C_2 = BC_2 : AC_2 : 0 = p-a : p-b : 0.
\end{aligned}$$

Подставив теперь координаты точек в уравнение коники, получим, что

$$u = v = w = 1; \;\; f = \frac{(b-c)^2+a^2}{(b-c)^2-a^2}; \;\; g = \frac{(c-a)^2+b^2}{(c-a)^2-b^2}; \;\; h = \frac{(a-b)^2+c^2}{(c-a)^2-b^2}.$$

(В силу неравенства треугольника знаменатели всех дробей отрицательны: $(b-c)^2 - a^2 = (b-c-a)(b-c+a) < 0$ и т.д). Дальнейшие подсчеты, с использованием формул из теоремы 1.3, приводят к тому, что:

$$\begin{aligned}
&U = -\frac{4a^2\,(b-c)^2}{(b+c-a)^2\,(a+b-c)^2}, \quad V = -\frac{4b^2\,(c-a)^2}{(c+a-b)^2\,(c+b-a)^2},\\
&W = -\frac{4c^2\,(a-b)^2}{(c+a-b)^2\,(b+c-a)^2}.\\
&F = \frac{2\left(a^4+b^4+c^4-2a^3\,(b+c)+2a^2\left(b^2+bc+c^2\right)-2a\left(b^3+c^3\right)\right)}{(b+c-a)^2\,(c+a-b)\,(a+b-c)}.
\end{aligned}$$

G получается из F посредством циклического сдвига $a \to b \to c \to a$, и H — из G. Тогда первая координата центра коники имеет вид:

$$\frac{4a^2\left(a^3-a^2\,(b+c)-(b-c)^2\,(b+c)+a\left(b^2+c^2\right)\right)}{(c+b-a)^2\,(a+c-b)^2\,(b+a-c)^2},$$

а две другие получаются из нее циклическими сдвигами. И после сокращения на общий множитель

$$\frac{4}{(b+c-a)^2\,(c+a-b)^2\,(a+b-c)^2}$$

возникают заявленные в условии выражения для координат центра. □

Замечание 4.3. И здесь, согласно компьютеру, данная коника может быть, в зависимости от длин сторон треугольника, как эллипсом, так и параболой или гиперболой.

Когда именно она принимает тот или иной вид, — зависит от знака выражения $\Phi = U + V + W + 2\,(F + G + H)$, согласно теореме 3.1. Подсчеты приводят к выражению:

$$\Phi = \frac{4}{(b+c-a)^2\,(c+a-b)^2\,(a+b-c)^2} \cdot P\,(a,b,c)\,,$$

где

$$P(a,b,c) = -a^6 - b^6 - c^6 + 2\left(a^5b + b^5c + c^5a + ab^5 + bc^5 + ca^5\right) - 2\left(a^4bc + b^4ca + c^4ab\right) + 6a^2b^2c^2 - \\ - 3\left(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4\right) + 4\left(b^3c^3 + c^3a^3 + a^3b^3\right).$$

Поскольку знаменатель дроби положителен, то при $P > 0$ имеем эллипс, при $P = 0$ — параболу, и при $P < 0$ гиперболу.

И в этом случае нам также не удалось разложить многочлен P на множители.

Замечание 4.4. Рассмотренная коника теперь занесена в Энциклопедию Треугольных Центров [9], и ее центр получил номер $X(5452)$, см. далее § 10.

$X(5452) =$ *CENTER OF THE PRIVALOV CONIC* (центр коники Привалова).

§ 5. Равноокружностный эллипс

В произвольном треугольнике ABC рассмотрим следующие три пары окружностей (одинаковых в каждой паре):

Первые две равные друг другу окружности вписаны в углы при вершинах B и C соответственно и касаются внешним образом друг друга.

Вторые две касающиеся окружности вписаны в углы C и A.

Третья же пара — в углы A и B[17].

Согласно [9], эту конфигурацию в 1990 г. ввел в геометрический обиход Иван Пааш (*Ivan Paashe*) — точка $X(1123)$, образованная пересечением прямых, соединяющих вершины треугольника с противоположными точками касания, названа в его честь: *Paashe point* (рис. 10).

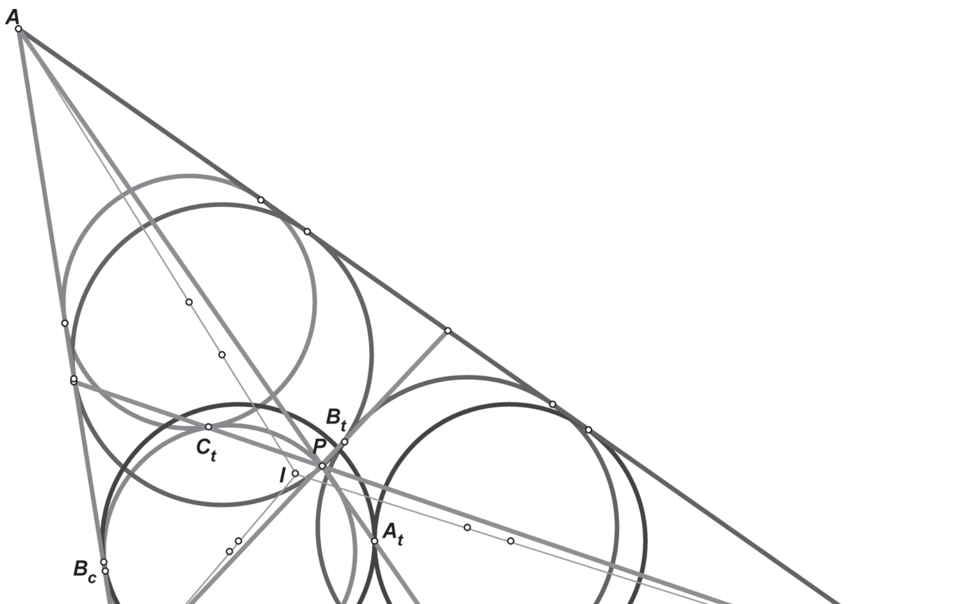


Рис. 10.

Поэтому будем называть описанную выше конструкцию *конфигурацией Пааша.*

Теорема 5.1. В конфигурации Пааша отметим точки $B_a, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c$ — точки касания соответствующих пар равных окружностей со сторонами BC, CA, AB соответственно.

Тогда эти шесть точек лежат на одной конике, причем ее центр M лежит внутри отрезка GI, соединяющего центроид треугольника с центром его вписанной окружности (а прямая,

[17] При этом все рассматриваемые окружности расположены *внутри* исходного треугольника.

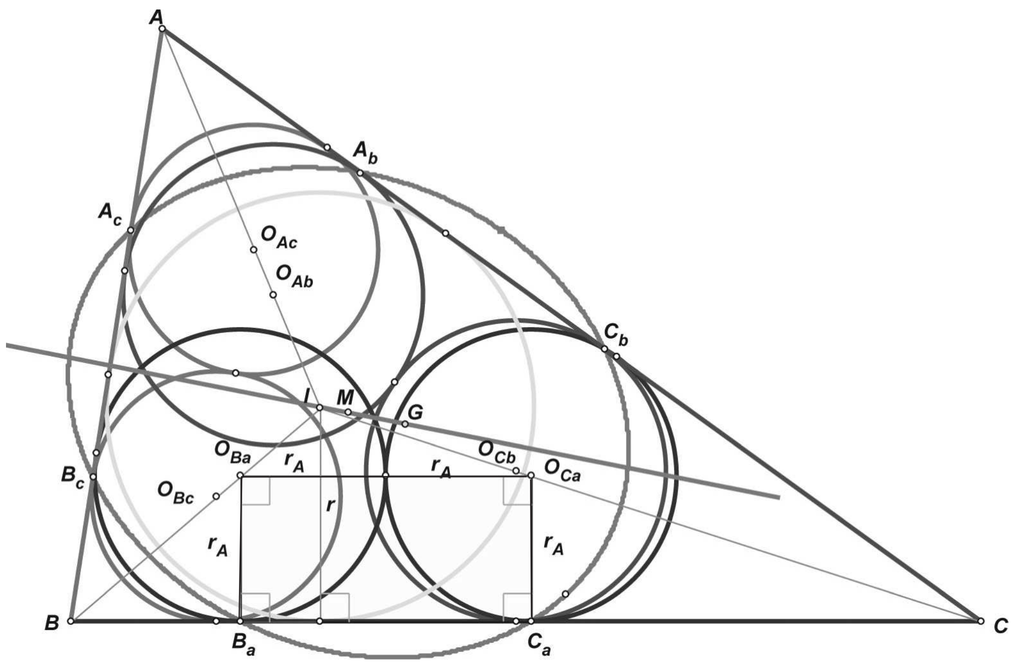


Рис. 11.

содержащая этот отрезок, называется *прямой Нагеля*, поскольку на ней также лежит и точка Нагеля N). Известно также, что центроид G делит отрезок NI в отношении 2:1 внутренним образом, см. [5], [6], [8]). Кроме того,

$$\frac{GM}{IM} = \frac{p}{3r} = \frac{p^2}{3S}$$

(где, как обычно, p — полупериметр исходного треугольника, r — радиус вписанной в него окружности, а S — площадь).

Барицентрические координаты центра имеют следующий вид:

$$M = 2 + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} : 2 + \cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2} : 2 + \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} = \\ = 2 + \frac{a}{r} : 2 + \frac{b}{r} : 2 + \frac{c}{r} = \frac{a}{r_A} : \frac{b}{r_B} : \frac{c}{r_C},$$

где a, b, c, A, B, C — длины соответствующих сторон треугольника и величины его соответствующих углов, а r_A, r_B, r_C — радиусы соответствующих окружностей Пааша.

Доказательство. Пусть $O_{B_a}, O_{C_a}, O_{C_b}, O_{A_b}, O_{A_c}, O_{B_c}$ — центры рассматриваемых окружностей (рис. 11).

Очевидно, что четырехугольник $O_{B_a}B_aC_aO_{C_a}$ является *прямоугольником*, причем $O_{B_a}B_a = C_aO_{C_a} = r_A$ и $O_{B_a}O_{C_a} = B_aC_a = 2r_A$. Поэтому $BB_a = r_A \cot\frac{B}{2}$ и

$$CB_a = CC_a + B_aC_a = r_A\left(\cot\frac{C}{2} + 2\right) \Rightarrow \frac{BB_a}{CB_a} = \frac{\cot\frac{B}{2}}{\cot\frac{C}{2} + 2}.$$

Совершенно аналогично,

$$\frac{BC_a}{CC_a} = \frac{\cot\frac{B}{2} + 2}{\cot\frac{C}{2}}, \quad \frac{CC_b}{AC_b} = \frac{\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2} + 2}, \quad \frac{CA_b}{AA_b} = \frac{\cot\frac{C}{2} + 2}{\cot\frac{A}{2}}, \quad \frac{AA_c}{BA_c} = \frac{\cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2} + 2}$$

$$\text{и} \qquad \frac{AB_c}{BB_c} = \frac{\cot\frac{A}{2} + 2}{\cot\frac{B}{2}}.$$

Поэтому условие Карно (теорема 1.1), конечно же, выполняется:

$$\left(\frac{\overrightarrow{BB_a}}{\overrightarrow{CB_a}}\cdot\frac{\overrightarrow{BC_a}}{\overrightarrow{CC_a}}\right)\cdot\left(\frac{\overrightarrow{CC_b}}{\overrightarrow{AC_b}}\cdot\frac{\overrightarrow{CA_b}}{\overrightarrow{AA_b}}\right)\cdot\left(\frac{\overrightarrow{AA_c}}{\overrightarrow{BA_c}}\cdot\frac{\overrightarrow{AB_c}}{\overrightarrow{BB_c}}\right)=$$
$$=-\frac{\cot\frac{B}{2}}{\cot\frac{C}{2}+2}\cdot-\frac{\cot\frac{B}{2}+2}{\cot\frac{C}{2}}\cdot-\frac{\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}+2}\cdot-\frac{\cot\frac{C}{2}+2}{\cot\frac{A}{2}}\cdot-\frac{\cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2}+2}\cdot-\frac{\cot\frac{A}{2}+2}{\cot\frac{B}{2}}=1.$$

Итак, принадлежность точек одной конике доказана.

Далее, поскольку отношения, в которых точки делят стороны, уже найдены, то легко выписать их координаты:

$$B_a=0:\cot\frac{C}{2}+2:\cot\frac{B}{2};\qquad C_a=0:\cot\frac{C}{2}:\cot\frac{B}{2}+2;$$
$$C_b=\cot\frac{C}{2}:0:\cot\frac{A}{2}+2;\qquad A_b=\cot\frac{C}{2}+2:0:\cot\frac{A}{2};$$
$$A_c=\cot\frac{B}{2}+2:\cot\frac{A}{2}:0;\qquad B_c=\cot\frac{B}{2}:\cot\frac{A}{2}+2:0.$$

Подставив затем координаты точек в уравнение коники (теорема 1.2), получим, что

$$u=2\cot\frac{A}{2}\left(\cot\frac{A}{2}+2\right);\quad v=2\cot\frac{B}{2}\left(\cot\frac{B}{2}+2\right);\quad w=2\cot\frac{C}{2}\left(\cot\frac{C}{2}+2\right);$$

$$f=-(\cot\frac{C}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}+\left(\cot\frac{C}{2}+2\right)\left(\cot\frac{B}{2}+2\right));$$
$$g=-(\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}+\left(\cot\frac{A}{2}+2\right)\left(\cot\frac{C}{2}+2\right));$$
$$h=-(\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{A}{2}+\left(\cot\frac{B}{2}+2\right)\left(\cot\frac{A}{2}+2\right)).$$

Совершив, для удобства дальнейших вычислений, замены $x=\cot\frac{A}{2}>0$, $y=\cot\frac{B}{2}>0$ и $z=\cot\frac{C}{2}>0$, найдем по формулам из теоремы 1.3 значения U,V,W,F,G,H:

$$U=-4\left(2+y+z\right)^2;\quad V=-4\left(2+z+x\right)^2;\quad W=-4\left(2+x+y\right)^2;$$
$$F=4((2+y)\left(2+z\right)+x^2\left(3+2y+2z+2yz\right)+x\left(8+5y+5z+4yz\right));$$
$$G=4((2+z)\left(2+x\right)+y^2\left(3+2z+2x+2zx\right)+y\left(8+5z+5x+4zx\right));$$
$$H=4((2+x)\left(2+y\right)+z^2\left(3+2x+2y+2xy\right)+y\left(8+5x+5y+4xy\right)).$$

Так же аккуратно приведя и сгруппировав подобные, по формулам из все той же теоремы 3.1, для координат центра получим[18]:

$$M=8(1+x)(1+y)(1+z)(2+y+z):8(1+x)(1+y)(1+z)(2+z+x):$$
$$:8(1+x)(1+y)(1+z)(2+x+y)$$

Остается только с удовольствием сократить на общий множитель $8\left(1+x\right)\left(1+y\right)\left(1+z\right)$:

$$M=2+y+z:2+z+x:2+x+y=$$
$$=2+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}:2+\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}:2+\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}.$$

[18]К своей немалой радости!

Две другие формы записи координат

$$M = 2+\frac{a}{r} : 2+\frac{b}{r} : 2+\frac{c}{r} = \frac{a}{r_A} : \frac{b}{r_B} : \frac{c}{r_C}$$

сразу следуют из только что полученной формы и очевидных соотношений

$$a = \left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)r; \quad b = \left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)r; \quad c = \left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)r$$

и

$$a = \left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}+2\right)r_A; \quad b = \left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}+2\right)r_B; \quad c = \left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+2\right)r_C.$$

В заключение разберемся с коллинеарностью точек G, M, I, используя немного геометрию масс (все необходимое для понимания имеется в [6], [10]).

Итак, $M = 2+\frac{a}{r} : 2+\frac{b}{r} : 2+\frac{c}{r}$, т.е. M является центром масс системы материальных точек $(2+\frac{a}{r})A : (2+\frac{b}{r})B : (2+\frac{c}{r})C$.

Эту систему можно разбить на две подсистемы: $2A, 2B, 2C$ (с центром масс в G и суммарной массой 6) и $\frac{a}{r}A, \frac{b}{r}B, \frac{c}{r}C$ (с центром в I и суммарной массой $\frac{a+b+c}{r} = \frac{2p}{r}$). Из правил группировки и рычага тогда получим, что $M \in [GI]$ (т.к. суммарные массы одного знака — в данном случае «+», то деление отрезка GI точкой M осуществляется *внутренним* образом) и

$$6 \cdot GM = \frac{2p}{r} \cdot IM \Leftrightarrow \frac{GM}{IM} = \frac{p}{3r}.$$

И, если применить известную формулу о площади треугольника через радиус вписанной окружности (см. [7], [8]), то полученное отношение можно переписать несколько по-другому:

$$S_{ABC} = p \cdot r \Rightarrow \frac{GM}{IM} = \frac{p}{3\left(\frac{S}{p}\right)} = \frac{p^2}{3S}. \ \square$$

Теорема 5.2. Рассматриваемая коника является эллипсом.

Доказательство. После приведения подобных и разложения на множители выражение Φ (из теоремы 3.1), знак которого определяет тип коники, примет следующий прекрасный вид:

$$\Phi = 16(1+x)(1+y)(1+z)(3+x+y+z) > 0 \text{ (так как } x, y, z > 0).$$

Стало быть, по теореме 1.3, наша коника представляет из себя эллипс.

Замечание 5.1. Рассмотренная коника теперь занесена в Энциклопедию Треугольных Центров [9], и ее центр получил номер $X(5393)$:

> $X(5393)$ = CENTER OF THE PAACHE-MYAKISHEV ELLIPSE (центр эллипса Пааша-Мякишева)
> Barycentrics (барицентрическме координаты) $2+\cot(B/2)+\cot(C/2) : 2+\cot(C/2)+\cot(A/2) : 2+\cot(A/2)+\cot B/2)$
> Barycentrics (барицентрическме координаты) a $+ 2r : b+2r : c+2r$
> $X(5393) = s * X(1) + 3r * X(2)$ (Peter Moses, January 2, 2013)

Let $W(B_A)$ and $W(C_A)$ be the two congruent circles, within triangle ABC, each tangent to the other and to sideline BC of triangle ABC, with $W(B_A)$ also tangent to sideline AB and $W(C_A)$ also tangent to sideline AC; cf. the Paache configuration at $X(1123)$. Let B_A and C_A be the touchpoints of these circles with sideline BC. Define the points C_B, A_C cyclically and define the points A_B, B_C cyclically. The six points lie on an ellipse having center $X(5393)$ and equation

$$d(2+d)x^2+e(2+e)y^2+f(2+f)z^2-2(2+e+f+ef)yz-2(2+f+d+fd)zx-2(2+d+e+de)xy=0,$$

where $d = \cot(A/2), e = \cot(B/2), f = \cot(C/2)$.

Let $X = X(5393)$. Then $|GX|/|IX| = s/(3r)$, where $G =$ centroid, $I =$ incenter, $r =$ inradius, and $s =$ semiperimeter. (Alexei Myakishev, December 25, 2012).

If you have The Geometer's Sketchpad, you can view $X(5393)$, including the ellipse. You can also view the configuration for pairs of circles used in the constructions of $X(5393)$ and $X(5405)$: *Pairs of Circles*.

$X(5393)$ lies on these lines: $\{1, 2\}$, $\{9, 3068\}$, $\{37, 590\}$, $\{57, 482\}$, $\{81, 3300\}$, $\{175, 5226\}$, $\{226, 481\}$, $\{491, 4357\}$, $\{492, 3879\}$, $\{515, 2048\}$, $\{615, 1100\}$, $\{642, 3666\}$, $\{940, 1335\}$, $\{1124, 4383\}$, $\{1255, 3302\}$, $\{1267, 3875\}$, $\{1449, 3069\}$, $\{1585, 1785\}$, $\{1991, 4643\}$[19]

Русский перевод (добавлен редакцией): Пусть $W(B_A)$ и $W(C_A)$ — две конгруэнтные окружности внутри треугольника ABC, каждая из которых касается другой, а также стороны BC треугольника ABC, причем $W(B_A)$ касается также стороны AB, а $W(C_A)$ — стороны AC; сравните с конфигурацией Пааша для центра $X(1123)$. Пусть B_A и C_A — точки касания этих окружностей со стороной BC. Определим точки C_B, A_C циклически, также определим циклически точки A_B, B_C. Эти шесть точек лежат на эллипсе с центром $X(5393)$; уравнение эллипса:

$$d(2+d)x^2+e(2+e)y^2+f(2+f)z^2-2(2+e+f+ef)yz-2(2+f+d+fd)zx-2(2+d+e+de)xy = 0,$$

где $d = \cot(A/2), e = \cot(B/2), f = \cot(C/2)$.

Пусть $X = X(5393)$. Тогда $|GX|/|IX| = s/(3r)$, где G — центроид, I — центр вписанной окружности, r ее радиус и s — полупериметр. (Алексей Мякишев, 25 декабря, 2012).

Если у вас есть программа "The Geometer's Sketchpad", вы можете увидеть $X(5393)$, а также этот эллипс. Вы можете также увидеть конфигурацию пар окружностей, используемых при построении центров $X(5393)$ и $X(5405)$: *Pairs of Circles*.

Точка $X(5393)$ лежит на следующих прямых: $\{1, 2\}$, $\{9, 3068\}$, $\{37, 590\}$, $\{57, 482\}$, $\{81, 3300\}$, $\{175, 5226\}$, $\{226, 481\}$, $\{491, 4357\}$, $\{492, 3879\}$, $\{515, 2048\}$, $\{615, 1100\}$, $\{642, 3666\}$, $\{940, 1335\}$, $\{1124, 4383\}$, $\{1255, 3302\}$, $\{1267, 3875\}$, $\{1449, 3069\}$, $\{1585, 1785\}$, $\{1991, 4643\}$.

Замечание 5.2. В начале 2013 г. американский математик *Peter Moses* сообщил, что если рассматривать вписанные в углы пары равных окружностей, *не* содержащихся внутри исходного треугольника, то точки касания также будут всегда лежать на некоторой *конике* (но не всегда — на эллипсе).

Просто «*скопипастим*» соответствующий текст из *ETC* (поскольку вывод уравнения коники и координат центра — полностью аналогичен предыдущему), сопроводив его некоторыми комментариями

$X(5405)$ = CENTER OF THE PAACHE-MYAKISHEV-MOSES CONIC (центр коники Пааша-Мякишева-Мозеса)

An associated conic, the Paache-Myakishev-Moses conic, is introduced at $X(5405)$. This conic results from the two congruent circles that do *not* lie within triangle ABC.

Barycentrics $2 - \cot(B/2) - \cot(C/2) : 2 - \cot(C/2) - \cot(A/2) : 2 - \cot(A/2) - \cot B/2)$

[19] И за каждой из таких прямых (содержащих центр рассматриваемой коники и найденных банальным компьютерным перебором) — какая же *притаилась* геометрия? Бог весть. Но отыскивать самобытную геометрическую суть столь многочисленных вдруг появившихся задач — навряд ли найдутся охотники.

Этот пример на самом деле довольно убедительно (хоть и в миниатюре) демонстрирует как плюсы, так и минусы *компьютерных технологий* и *НТР* в целом — мы очень многое узнаем о том, *как* происходит то или иное явление, но совсем немногое (или просто *ничего*) о том — *почему*.

Таким образом, постепенно у многих *пользователей PC* пропадает желание и отбивается охота разбираться в *глубинных сущностях и первопричинах тех или иных вещей (событий)* — и прививается *поверхностно-легкомысленное* отношение вообще к чему бы то ни было.

А интересно, все же, было бы запустить программку, и прояснить еще, какие «энциклопедические» точки лежат на самой конике (этой и других, здесь рассматриваемых). Соблазн велик! Но я такой программой не располагаю, хотя и написать ее было бы, полагаю, делом несложным — тому, кто в этом разбирается.

$$\text{Barycentrics a} - 2r : b - 2r : c - 2r \quad X(5405) = s * X(1) - 3r * X(2)$$

(Peter Moses, January 2, 2013)

For the construction of this conic, see $X(5393)$, where the associated Paache-Myakishev ellipse is introduced.

If you have The Geometer's Sketchpad, you can view $X(5405)$, including the conic.

X(5405) lies on these lines: $\{1,2\}$, $\{9,3069\}$, $\{37,615\}$, $\{57,481\}$, $\{81,3299\}$, $\{176,5226\}$, $\{226,482\}$, $\{491,3879\}$, $\{492,4357\}$, $\{590,1100\}$, $\{591,4643\}$, $\{641,3666\}$, $\{940,1124\}$, $\{946,2048\}$, $\{1255,3300\}$, $\{1335,4383\}$, $\{1449,3068\}$, $\{1586,1785\}$, $\{1659,5219\}$ (рис. 12)

Русский перевод (добавлен редакцией): Ассоциированная коника, коника Пааша-Мякишева-Мозеса, введена для центра $X(5405)$. Эта коника получается из двух конгруэнтных окружностей, которые *не* лежат внутри треугольника ABC.

Барицентрические координаты $2-\cot(B/2)-\cot(C/2) : 2-\cot(C/2)-\cot(A/2) : 2-\cot(A/2)-\cot B/2)$

$$\text{Барицентрические координаты а} - 2r : b - 2r : c - 2r \quad X(5405) = s * X(1) - 3r * X(2)$$

(Питер Мозес, 2 января, 2013)

За описанием построения этой коники обратитесь к центру $X(5393)$, где введен ассоциированный эллипс Пааша-Мякишева.

Если у вас есть программа "The Geometer's Sketchpad", вы можете увидеть $X(5405)$, а также конику.

Точка X(5405) лежит на следующих прямых: $\{1,2\}$, $\{9,3069\}$, $\{37,615\}$, $\{57,481\}$, $\{81,3299\}$, $\{176,5226\}$, $\{226,482\}$, $\{491,3879\}$, $\{492,4357\}$, $\{590,1100\}$, $\{591,4643\}$, $\{641,3666\}$, $\{940,1124\}$, $\{946,2048\}$, $\{1255,3300\}$, $\{1335,4383\}$, $\{1449,3068\}$, $\{1586,1785\}$, $\{1659,5219\}$ (рис. 12).

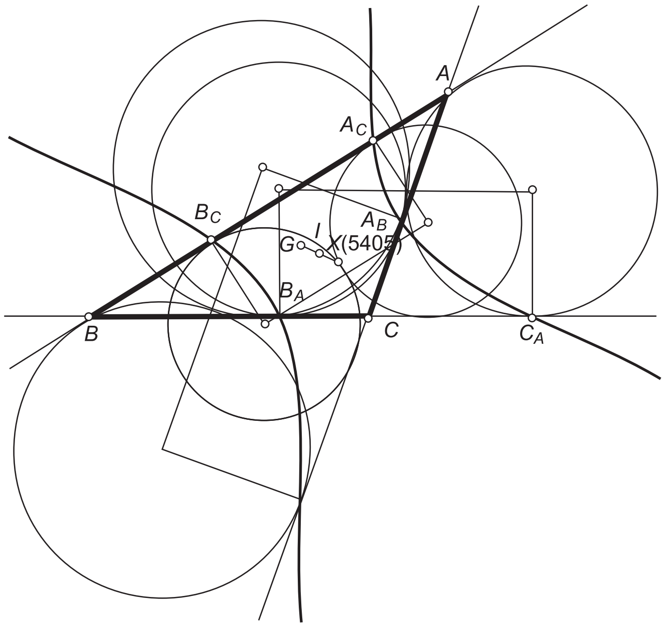


Рис. 12.

К этому можно еще добавить следующее.

Во-первых, уравнение данной коники получается из уравнения рассмотренного выше эллипса простой заменой во всех коэффициентах котангенсов половинных углов на противоположные им по знаку, т.е.: $\cot\frac{A}{2} \to -\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2} \to -\cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2} \to -\cot\frac{C}{2}$.

То же самое относится и к координатам центра в их тригонометрической форме.

Там же, где они выражены через стороны и радиус, надо поменять знаки у соответствующих дробей (или, после приведения к общему знаменателю r и сокращению на него — поставить минус перед $2r$): $\frac{a}{r} \to -\frac{a}{r}, \frac{b}{r} \to -\frac{b}{r}, \frac{c}{r} \to -\frac{c}{r}$.

Во-вторых, скажем несколько слов и о центре коники — им будет всегда *конечная* точка плоскости, поскольку общая сумма координат центра: $6-\frac{a+b+c}{r}=2\left(3-\frac{a+b+c}{2r}\right)$ — *отрицательна*, ведь *любая из сторон треугольника больше диаметра вписанной в него окружности.*

Если же исходить из тригонометрической формы, надо показать, что для углов любого треугольника справедливо неравенство $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}>3$. Но, оказывается, выполняется даже более сильное неравенство: $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$! Факт, как говорится, *учителю на заметку* и в копилку, поскольку существует довольно симпатичное тому доказательство: ведь, как известно (!) в любом треугольнике $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}\cdot\cot\frac{C}{2}$ — хорошее упражнение на тему «преобразование тригонометрических выражений» [20] — достаточно лишь потребовать, чтобы $A+B+C=\pi$.

А дальше, т.к. половинки углов треугольника — углы острые, значит, их *котангенсы* — *положительны* и классическое неравенство Коши дает нам искомую оценку:

Пусть

$$t=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\Rightarrow\frac{t}{3}\geq\sqrt[3]{t}\Leftrightarrow\ (\text{при}\ \ t>0)\ \ t^3\geq 27t\Leftrightarrow t^2\geq 27\Leftrightarrow t\geq 3\sqrt{3}.$$

Если теперь вернуться к доказательству коллинеарности центра коники и точек G и I, (теорема 5.1) то, с поправкой на *отрицательность* соответствующей суммарной массы, приходим к выводу, что центр коники Мозеса делит отрезок GI в том же отношении, что и прежде, но только *внешним* образом: $\frac{GM}{IM}=\frac{p}{3r}$, и *центр коники лежит на продолжении отрезка GI* за точку I. Иначе говоря, центры эллипса и коники вместе с центроидом и инцентром образуют так называемую *гармоническую четверку точек* (см.[5], [10]).

В третьих, условия, определяющие вид этой коники, поддаются простому геометрическому описанию, а именно:

- если исходный треугольник остроугольный, то коника представляет собой *эллипс* (рис. 13);
- если исходный треугольник тупоугольный, то — *гиперболу* (рисунок см. выше);
- если же треугольник *прямоугольный* (граничный случай) — то *пару параллельных прямых* (! — не параболу, как можно было ожидать априори, но — *вырожденную параболу*) (рис. 14).

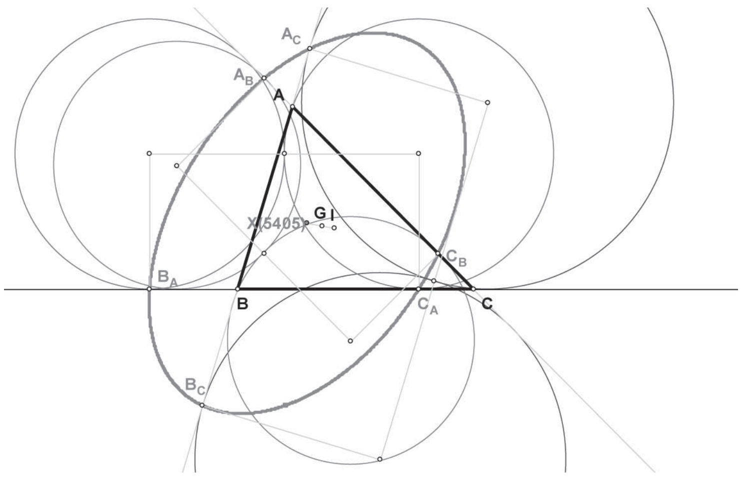


Рис. 13.

[20]Опять же, педагогу-профи на карандаш: из этого равенства, между прочим, сразу можно вывести формулу Герона (и наоборот!), записав его через стороны треугольника: $(p-a)/r+(p-b)/r+(p-c)/r=(p-a)(p-b)(p-c)/r^3\Leftrightarrow(3p-2p)/r=(p-a)(p-b)(p-c)/r^3\Longleftrightarrow p/r=(p-a)(p-b)(p-c)/r^3\Longleftrightarrow pr^2=(p-a)(p-b)(p-c)\Longleftrightarrow(pr)^2=p(p-a)(p-b)(p-c)\Longleftrightarrow S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$

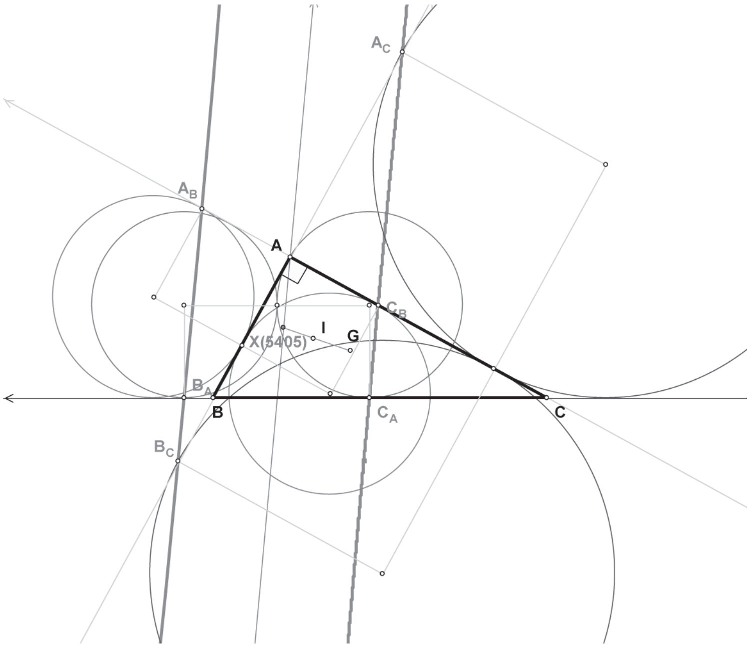


Рис. 14.

Разберемся, почему получается именно так (будем придерживаться обозначений из ETC).

Напомним, что $d = \cot\frac{A}{2} > 0$, $e = \cot\frac{B}{2} > 0$ и $f = \cot\frac{C}{2} > 0$, а выражение, знак которого определяет тип коники, имеет вид, аналогичный полученному при изучении эллипса Пааша (но с поправкой на смену знаков котангенсов): $\Phi = 16(1-d)(1-e)(1-f)(3-(d+e+f))$.

Последняя скобка, как было установлено в *«во-вторых»,* всегда меньше нуля. Котангенс убывает на интервале $(0, \pi)$, поэтому, если все углы треугольника *острые*, то их половинки меньше $\frac{\pi}{4}$, а соответствующие *котангенсы — больше единицы.* Значит, и три другие скобки *отрицательны*, а *произведение всех четырех — положительно*, $\Phi > 0$ — и коника есть *эллипс.* Если же треугольник *тупоугольный* (например, тупым является угол при вершине A — и тогда углы при двух других вершинах острые), то первая скобка — *положительна,* а вторая и третья — по-прежнему отрицательны. В результате $\Phi < 0$ — получаем гиперболу. Наконец, если треугольник прямоугольный, то $\Phi = 0$ и теория предсказывает явление *параболы*, а поскольку ее *центр — точка конечная*, то параболе этой не остается ничего кроме, как *«выродиться»* в *пару параллельных прямых.*

Ради, так сказать, научного интереса, приведем все же и чисто *формальное*, (т.е. алгебраическое) доказательства последнего утверждения.

Уравнение коники (коэффициенты которой мы обсудили *«во-первых»)* имеет вид:

$$-d(2-d)x^2 - e(2-e)y^2 - f(2-f)z^2 -$$
$$-2(2-e-f+ef)zy - 2(2-f-d+fd)xz - 2(2-d-e+de)yx = 0.$$

С учетом того, что $d = 1$, оно перепишется (после домножения на *«минус один»)* как $x^2 - e(e-2)y^2 - f(f-2)z^2 + 2(2-e-f+ef)zy + 2xz + 2yz = 0$. (Как мы уже знаем, сумма котангенсов половинных углов треугольника равна их произведению, т.е. $d+e+f = def$ и, если $d = 1$, то $1+e+f = ef$ — и потому коэффициент при zy вообще-то, в случае прямого угла при вершине A, запишется просто как 6. Но мы даже не воспользуемся этим счастливым обстоятельством, поскольку в том вовсе нет необходимости).

Выделив квадрат суммы по x, y, z, перейдем к равносильному уравнению

$$(x+y+z)^2 - (e(2-e)y^2 - y^2) - (f(2-f)z^2 - z^2) + 2(2-e-f+ef)zy - 2zy = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (x+y+z)^2 - ((e-1)^2y^2 + (f-1)^2z^2 - 2(1-e-f+ef)zy) = 0.$$

Однако, простым раскрытием скобок, легко убедиться в том, что $((e-1)y-(f-1)z)^2$ в точности и есть $((e-1)^2y^2+(f-1)^2z^2-2(1-e-f+ef)zy)$. И вот возникает, наконец, долгожданная разность квадратов:

$$(x+y+z)^2-((e-1)y-(f-1)z)^2=0 \Leftrightarrow (x+(2-e)y+fz)(x+ey+(2-f)z)=0.$$

Как и было предсказано, коника распалась на две прямые: $x+(2-e)y+fz=0$ и $x+ey+$ $+(2-f)z=0$.

Координаты точки их пересечения P находятся из определителя $\begin{vmatrix} p & q & r \\ 1 & 2-e & f \\ 1 & e & 2-f \end{vmatrix}$, т.е. $P=$ $(2-e)(2-f)-ef : 1\cdot f-1\cdot(2-f) : 1\cdot e-(2-f)\cdot 1$ И *сумма их равна*, очевидно, *нулю* — т.е. P является *бесконечно удаленной точкой*, что и означает *параллельность наших прямых в обычном евклидовом смысле* (подробности см. в [6], [7], [10]). $\square$

Литература

[1] Штейнгарц Л.А. Гипотезы о медианах, высотах, биссектрисах и... эллипсах // Математическое образование. - 2012. - № 2(62). - С. 41-48.

[2] Штейнгарц Л.А. Орбиты Жукова и теорема Морлея // Математика в школе. - 2012. - № 6. - С. 53-61.

[3] Григорьев Д.С., Мякишев А.Г. И снова о гипотезах Штейнгарца // Математическое образование. - 2013. - № 3(67). - С. 40-56.

[4] Осипов Н.Н. О механическом доказательстве планиметрических теорем рационального типа // Программирование. - 2013. - № 2. - С. 1-10.

[5] Акопян А., Заславский А. Геометрические свойства кривых второго порядка. - М.: МЦНМО. - 2011.

[6] Мякишев А. Элементы геометрии треугольника. - М.: МЦНМО. - 2009.

[7] Прасолов В. Задачи по планиметрии. - М.: МЦНМО. - 2007.

[8] Шарыгин И. Геометрия. Планиметрия. (Задачник 9-11). - М.: Дрофа. - 2001.

[9] Kimberling C. Encyclopedia of Triangle Centers. URL: http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/

[10] Yiu P. Introduction to the Geometry of the Triangle. URL: http://math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf

[11] ForumGeometricorum — электронный журнал, посвященный элементарной геометрии. URL: http://forumgeom.fau.edu

[12] Куланин Е., Мякишев А. О некоторых кониках, связанных с треугольником. - М.: Институт логики. - 2008.

Мякишев Алексей Геннадьевич

E-mail: myakishev62@mail.ru

Статья поступила в редакцию 16 июля 2013 г.

К определению криволинейных интегралов и доказательству формулы Грина

С. В. Шведенко

В статье приведено логически корректное и простое в обращении определение криволинейных интегралов и доказаны их основные свойства, включая формулу Грина. Подробно и точно описан класс кривых, по которым производится интегрирование.

1. Гладкие дуги, кусочно гладкие контуры и пути их обхода

Намереваясь дать логически корректное и простое в обращении определение *криволинейных интегралов*, следует начать с точного описания объектов, по которым предполагается интегрирование. Наиболее удобным как в теоретическом плане, так и в видах приложений представляется принятый в данной заметке вариант понятия *кусочно гладкого контура* — вариант, в котором сочетаются (не смешиваясь) описания объекта "криволинейного интегрирования" как *множества точек* плоскости[1] и как *движения* по нему. За исходное берется понятие *гладкой дуги*.

Гладкая дуга на плоскости $\mathbb{R}^2$ (переменных x и y) — это подмножество $L \subset \mathbb{R}^2$, являющееся образом некоторого отрезка $[\alpha, \beta]$ числовой оси при *взаимно однозначном* отображении его в плоскость парой функций[2] $\begin{cases} x = x(\tau) \\ y = y(\tau) \end{cases}$, имеющих на указанном отрезке *непрерывные производные*[3] $x'(\tau)$, $y'(\tau)$ с выполнением дополнительного условия $\{x'(\tau), y'(\tau)\} \neq \vec{0}$. Точки $(x(\alpha), y(\alpha))$ и $(x(\beta), y(\beta))$ принимаются за *концевые* точки гладкой дуги[4], выбор одной из которых за *начальную* определяет *порядок следования* точек гладкой дуги — либо по *возрастанию*, либо по *убыванию* значений $\tau \in [\alpha, \beta]$. Гладкая дуга с выбранным порядком следования ее точек считается *ориентированной*.

Замечания к определению.

1. Если $\begin{cases} x = \widetilde{x}(\widetilde{\tau}) \\ y = \widetilde{y}(\widetilde{\tau}) \end{cases}$, $\widetilde{\tau} \in [\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}]$, — какая-либо другая пара функций, осуществляющих *параметрическое задание* той же гладкой дуги L, то в силу *взаимной однозначности* отображений $[\alpha, \beta] \mapsto L$ и $[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}] \mapsto L$ (рис. 1) определена функция $\tau = \tau(\widetilde{\tau})$, *взаимно однозначно* отображающая отрезок $[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}]$ *на* отрезок $[\alpha, \beta]$ и являющаяся на отрезке $[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}]$ *непрерывной*[5]. В силу **теоремы о промежуточном значении** такая функция $\tau = \tau(\widetilde{\tau})$ необходимо является *строго монотонной*, и следует вывод: разделение точек гладкой дуги на *концевые* и *внутренние* и два (противоположных друг другу) *порядка следования точек* гладкой дуги не зависят от выбора *параметрического задания*, т. е. присущи самой *гладкой дуге*.

---

[1] Настоящая заметка посвящена криволинейному интегрированию на плоскости, но многое из нижеследующего имеет распространение на координатное пространство любой размерности.

[2] Осуществляющих, как говорят, *параметрическое задание* (или *параметризацию*) гладкой дуги L.

[3] Понимаемые в *концевых* точках отрезка как *односторонние производные*.

[4] Остальные точки гладкой дуги считаются ее *внутренними* точками.

[5] Вот доказательство ее *непрерывности*. Пусть $\{\widetilde{\tau}_n\}$ — любая последовательность точек отрезка $[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}]$, сходящаяся к точке $\widetilde{\tau}_0$, и пусть $\{\tau_n\} = \{\tau(\widetilde{\tau}_n)\}$, т. е. $(x(\widetilde{\tau}_n), y(\widetilde{\tau}_n)) = (x(\tau_n), y(\tau_n))$. Если бы последовательность $\{\tau_n\}$ *не сходилась* к точке $\tau_0 = \tau(\widetilde{\tau}_0)$, то некоторая ее подпоследовательность $\{\tau_{n_k}\}$ сходилась бы к отличной от τ_0 точке $\tau_\star$, что (с учетом *взаимной однозначности* и *непрерывности* представляющих функций) приводило бы к противоречию:

$$\{(x(\tau_{n_k}), y(\tau_{n_k}))\} = \{(\widetilde{x}(\widetilde{\tau}_{n_k}), \widetilde{y}(\widetilde{\tau}_{n_k}))\} \to (\widetilde{x}(\widetilde{\tau}_0), \widetilde{y}(\widetilde{\tau}_0)),$$

$$\{(x(\tau_{n_k}), y(\tau_{n_k}))\} \to (x(\tau_\star), y(\tau_\star)) \neq (x(\tau_0), y(\tau_0)) = (\widetilde{x}(\widetilde{\tau}_0), \widetilde{y}(\widetilde{\tau}_0)).$$

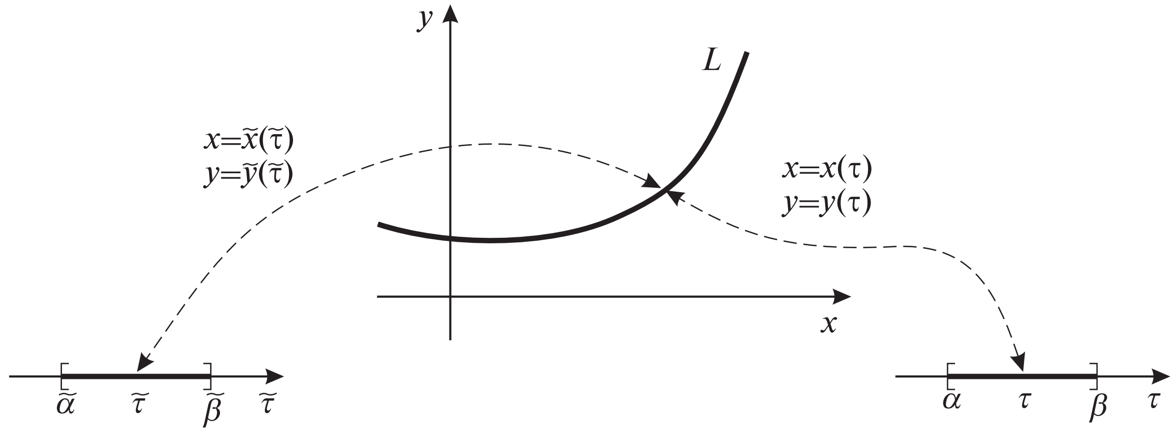


Рис.1

2. Непрерывность производных $x'(\tau)$, $y'(\tau)$ вместе с условием $\{x'(\tau), y'(\tau)\} \neq \vec{0}$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, обеспечивают *гладкость* дуги L в том смысле, что

а) в каждой точке $(x(\tau), y(\tau)) \in L$ существует *касательная прямая* к L, направление которой задает вектор $\{x'(\tau), y'(\tau)\}$:

$$\frac{\{\triangle x, \triangle y\}}{\triangle \tau} = \frac{\{x(\tau+\triangle\tau) - x(\tau), y(\tau+\triangle\tau) - y(\tau)\}}{\triangle\tau} \to \{x'(\tau), y'(\tau)\} \text{ при } \triangle\tau \to 0;$$

б) компоненты направляющего вектора касательной являются *непрерывными* функциями *точки касания*: поскольку

$$|\triangle\tau| = \left(\sqrt{\left(\frac{\triangle x}{\triangle\tau}\right)^2 + \left(\frac{\triangle y}{\triangle\tau}\right)^2}\right)^{-1} \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2} = O\big(\sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}\big),$$

$$x'(\tau+\triangle\tau) \to x'(\tau) \text{ и } y'(\tau+\triangle\tau) \to y'(\tau) \text{ при } \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2} \to 0.$$

3. Любая *гладкая дуга* на плоскости есть либо *график* функции ($y = f(x)$ или $x = f(y)$) на каком-то отрезке (оси x или y), на котором она имеет непрерывную производную, либо результат последовательного соединения нескольких таких *графиков*[6]. Для доказательства достаточно, взяв какую-либо *параметризацию* $\begin{cases} x = x(\tau) \\ y = y(\tau) \end{cases}$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, гладкой дуги L, стандартной процедурой последовательного деления отрезков пополам разделить отрезок $[\alpha, \beta]$ на конечное число отрезков $[\alpha_j, \beta_j]$, на каждом из которых *не обращается в нуль* (а поэтому *сохраняет знак*) либо производная $x'(\tau)$, либо производная $y'(\tau)$; в первом случае определена и имеет непрерывную производную (на отрезке оси x)[7] функция $\tau = \tau(x)$, обратная к функции $x = x(\tau)$, $\tau \in [\alpha_j, \beta_j]$, а во втором — функция $\tau = \tau(y)$ (на отрезке оси y), обратная к функции $y = y(\tau)$, $\tau \in [\alpha_j, \beta_j]$) . В итоге *гладкая дуга* L распадается на участки (отвечающие значениям $\tau \in [\alpha_j, \beta_j]$), оказывающиеся *графиками* либо функции $y = y(\tau(x))$, имеющей *непрерывную производную* $y'(x) = \frac{y'(\tau)}{x'(\tau)}$ (на отрезке оси x), либо функции $x = x(\tau(y))$, имеющей *непрерывную производную* $x'(y) = \frac{x'(\tau)}{y'(\tau)}$ (на отрезке оси y).

Кусочно гладкий контур — это конечный набор $\Gamma = \{L_1, \ldots, L_m\}$ последовательно соединенных ориентированных гладких дуг (в том смысле, что *конечная* точка дуги L_1 совпадает с *начальной* точкой дуги L_2 и т. д.); при совпадении *конечной* точка дуги L_m с *начальной* точкой дуги L_1 контур Γ называется *замкнутым*.

[6] В свете следующего ниже определения *кусочно гладкого контура* (точнее, п. 4 сопровождающих его *замечаний*) под *гладкими дугами* на плоскости можно понимать исключительно *графики* функций указанного вида.

[7] Точнее, на отрезке $[x(\alpha_j), x(\beta_j)]$, если $x'(\tau) > 0$, и на отрезке $[x(\beta_j), x(\alpha_j)]$, если $x'(\tau) < 0$.

Замечания к определению.

1. Оперируя *одной* гладкой дугой, взяв ее с двумя противоположными направлениями обхода (в обозначениях L и L^-), можно составить *бесконечно много* кусочно гладких контуров (как замкнутых, так и незамкнутых), проходящих *одно и то же* множество точек на плоскости:

$$\Gamma_1 = \{L\},\ \Gamma_2 = \{L^-\},\ \Gamma_3 = \{L, L^-\},\ \Gamma_4 = \{L^-, L\},\ \Gamma_5 = \{L, L^-, L\},\ \ldots$$

2. Порядок следования точек кусочно гладкого контура $\Gamma = \{L_1, \ldots, L_m\}$ определяется порядком следования составляющих его ориентированных гладких дуг и порядком следования точек каждой из них. *Противоположно ориентированным* по отношению к кусочно гладкому контуру $\Gamma = \{L_1, \ldots, L_m\}$ является кусочно гладкий контур $\Gamma^- = \{L_m^-, \ldots, L_1^-\}$.

3 Гладкое соединение двух гладких дуг L_1 и L_2 в их общей концевой точке подразумевает существование гладкой дуги $L \subset L_1 \cup L_2$, для которой общая концевая точка дуг L_1 и L_2 оказывается *внутренней*. Кусочно гладкий контур, в котором все соединения составляющих гладких дуг являются *гладкими*, считается *гладким*.

4. Два разных набора последовательно соединенных ориентированных гладких дуг считаются *взаимозаменяемыми* (т. е. задающими один и тот же *кусочно гладкий контур*), если один можно перевести в другой посредством *разделения* составляющих гладких дуг и их *объединения* (при наличии между ними гладкого соединения). Например, изображенные на рис. 2 верхняя и нижняя половины L_1 и L_2 единичной окружности и три ее дуги L_1', L_2', L_3' (рис. 2), задают один и тот же *гладкий контур*, словесно описываемый как *“единичная окружность, однократно обходимая от точки* $(1, 0)$ *в положительном направлении, т. е. так, что внутренность окружности остается слева от нее”.*

5. В случае *замкнутого* контура *циклическую перестановку* (возможно, с предварительным разбиением) составляющих его дуг (например, $\{L_1, L_2\} \to \{L_2, L_1\}$ или $\{L_1', L_2', L_3'\} \to \{L_2', L_3', L_1'\}$ на рис. 2) можно рассматривать как изменение *начальной точки* контура (а не как переход к другому контуру).

6. То, что кусочно гладкий контур *не имеет самопересечений*, подразумевает, что никакие две из составляющих его гладких дуг не имеют общих точек кроме точек их последовательного соединения.

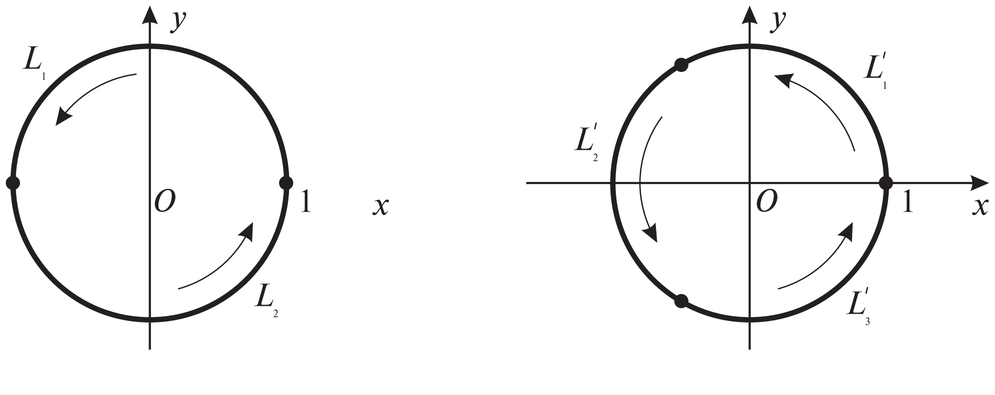


Рис.2

Задание *пути* γ на плоскости $\mathbb{R}^2$ (переменных x и y) подразумевает задание на каком-то отрезке $[a, b]$ двух *непрерывных* функций $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, значениям которых можно придать смысл *текущих координат* точки, перемещающейся в плоскости в течение отрезка времени $a \leqslant t \leqslant b$. Если же эти функции имеют на данном отрезке *непрерывные производные* $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ (наглядно представаляемые *компонентами вектора скорости* движения точки), то путь γ называется *путем класса* C^1, т. е. с *непрерывными* (лат. continuus) *первыми* производными.

Путь $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$, есть <u>*путь обхода*</u> *кусочно гладкого контура* Γ, если в ходе возрастания t от a до b точка $(x(t), y(t))$ принимает положение каждой точки каждой составляющей ориентированой гладкой дуги контура Γ в порядке их следования друг за другом.

Замечания.

1. Любое *параметрическое задание* $\begin{cases} x = x(\tau) \\ y = y(\tau) \end{cases}$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, ориентированной гладкой дуги L одновременно задает и *путь класса* C^1 *обхода* либо контура $\Gamma = \{L\}$ (если начальной для L является точка $(x(\alpha), y(\alpha))$), либо контура $\Gamma^- = \{L^-\}$. Напротив, отнюдь не всякий *путь класса* C^1 *обхода* контура $\Gamma = \{L\}$ (или $\Gamma^- = \{L^-\}$) осуществляет *параметрическое задание* гладкой дуги L: от функций, задающих *путь*, не требуется ни взаимной однозначности осуществляемого ими отображения, ни не обращения (одновременного) в нуль их производных.

2. Наглядно соотнести понятия *гладкой дуги*, *кусочно гладкого контура* и *пути обхода* контура позволяет “дорожно-транспортная“ аналогия, если уподобить:

гладкую дугу — участку дороги на схеме дорожной сети;
ориентацию гладкой дуги — указанию направления движения на данном участке;
кусочно гладкий контур — маршрутному заданию;
путь обхода контура — повременному графику выполнения маршрутного задания[8].

Следующее утверждение оказывается весьма удобным как при определении криволинейных интегралов, так и при обосновании их свойств.

Для любого *кусочно гладкого контура* Γ существует *путь класса* C^1 его *обхода*.

<u>*Доказательство*</u>. Вначале простой пример, проясняющий суть доказательства. Пусть контур Γ составлен из отрезка оси y с начальной точкой $(0, 1)$ и конечной $(0, 0)$ и отрезка оси x с начальной точкой $(0, 0)$ и конечной $(1, 0)$. Полагая

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ t, & \text{если } \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{а} \quad y(t) = \begin{cases} -t, & \text{если } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

получают путь $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [-1, 1]$, обходящий контур Γ, но не являющийся путем класса C^1. Чтобы получить путь класса C^1 обхода того же контура Γ, достаточно взять (например)

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ t^2, & \text{если } \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{а} \quad y(t) = \begin{cases} t^2, & \text{если } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

или же

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ \sin^2 \frac{\pi}{2} t, & \text{если } \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{а} \quad y(t) = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi}{2} t, & \text{если } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Пусть теперь $\Gamma = \{L_1, \ldots, L_m\}$ — любой кусочно гладкий контур и пусть

$$\begin{cases} x = x_1(\tau) \\ y = y_1(\tau) \end{cases}, \ \tau \in [\alpha_1, \beta_1], \quad \cdot \ \cdot \ \cdot \ , \quad \begin{cases} x = x_m(\tau) \\ y = y_m(\tau) \end{cases}, \ \tau \in [\alpha_m, \beta_m], \ -$$

любые *параметрические задания* составляющих его гладких дуг $L_1, \ldots, L_m$. Полагая для каждого значения $j = 1, \ldots, m$

$$\tau = \begin{cases} \alpha_j + t(\beta_j - \alpha_j), & \text{если } \textit{начальной} \text{ для дуги } L_j \text{ является точка } (x_j(\alpha_j), y_j(\alpha_j)), \\ \beta_j + t(\alpha_j - \beta_j), & \text{если } \textit{начальной} \text{ для дуги } L_j \text{ является точка } (x_j(\beta_j), y_j(\beta_j)), \end{cases}$$

[8] В случае *пути класса* C^1 — с условием, что *скорость* движения есть *непрерывная* функция времени.

можно преобразовать их в *параметрические задания*

$$\begin{cases} x=\widetilde{x}_1(t) \\ y=\widetilde{y}_1(t) \end{cases},\ t\in[0,1],\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ ,\quad \begin{cases} x=\widetilde{x}_m(t) \\ y=\widetilde{y}_m(t) \end{cases},\ t\in[0,1],$$

тех же гладких дуг $L_1,\ldots,L_m$, но уже со свойством: при любом $j=1,\ldots,m$ *начальной* для гладкой дуги L_j служит точка $(\widetilde{x}_j(0),\widetilde{y}_j(0))$, а *конечной* — точка $(\widetilde{x}_j(1),\widetilde{y}_j(1))$. Полагая далее

$$x(t)=\begin{cases} \widetilde{x}_1(t), & \text{если } t\in[0,1], \\ \widetilde{x}_2(t-1), & \text{если } t\in[1,2], \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \widetilde{x}_m(t-m+1), & \text{если } t\in[m-1,m], \end{cases},\quad y(t)=\begin{cases} \widetilde{y}_1(t), & \text{если } t\in[0,1], \\ \widetilde{y}_2(t-1), & \text{если } t\in[1,2], \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \widetilde{y}_m(t-m+1), & \text{если } t\in[m-1,m], \end{cases}$$

получают *путь* $\gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases},\ t\in[0,m]$, осуществляющий *обход* контура $\Gamma=\{L_1,\ldots,L_m\}$. Для получения *пути класса* C^1 обхода того же контура достаточно взять (например)

$$x(t)=\begin{cases} \widetilde{x}_1(\sin^2\frac{\pi}{2}t), & \text{если } t\in[0,1], \\ \widetilde{x}_2(\sin^2\frac{\pi}{2}(t-1)), & \text{если } t\in[1,2], \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \widetilde{x}_m(\sin^2\frac{\pi}{2}(t-m+1)), & \text{если } t\in[m-1,m], \end{cases}\quad \text{а}\quad y(t)=\begin{cases} \widetilde{y}_1(\sin^2\frac{\pi}{2}t), & \text{если } t\in[0,1] \\ \widetilde{y}_2(\sin^2\frac{\pi}{2}(t-1)), & \text{если } t\in[1,2], \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \widetilde{y}_m(\sin^2\frac{\pi}{2}(t-m+1)), & \text{если } t\in[m-1,m]. \end{cases}$$

2. Дифференциал длины кусочно гладкого контура

Каждому пути (класса C^1) $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases},\ t\in[a,b]$, задающему обход кусочно гладкого контура Γ, отвечает переменная величина $s(t)$, $t\in[a,b]$, — *длина участка контура* Γ от его начальной точки $(x(a),y(a))$ до точки $(x(t),y(t))$, определяемая как *точная верхняя грань длин ломаных*, вписанных в данный участок контура[9].

Каков бы ни был путь (класса C^1) $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases},\ t\in[a,b]$, задающий обход кусочно гладкого контура Γ, величина $s(t)$ как функция переменной $t\in[a,b]$ имеет в каждой точке $t\in[a,b]$ *дифференциал* $\boxed{ds=\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}dt}$, называемый *дифференциалом* (или *элементом*) *длины* кусочно гладкого контура Γ, соответствующим выбранному *пути* (класса C^1) его *обхода*[10].

Доказательство. При переходе от какого-либо значения $t_0\in[a,b]$ к значению $t_0+\triangle t\in[a,b]$ величина $s(t)$ получает *приращение* $\triangle s$, представляющее собой взятую со знаком "плюс" (если $\triangle t>0$) или "минус" (если $\triangle t<0$) *точную верхнюю грань* длин всевозможных *ломаных*, вписанных в участок контура Γ между точками $(x(t_0),y(t_0))$ и $(x(t_0+\triangle t),y(t_0+\triangle t))$. Так как любая такая ломаная имеет вершинами точки вида

---

[9] Последовательными вершинами каждой такой *ломаной* служат расположенные на контуре Γ точки $(x(t_0),y(t_0))$, $(x(t_1),y(t_1))$, $\ldots$, $(x(t_{n-1}),y(t_{n-1}))$, $(x(t_n),y(t_n))$, где $a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n\leqslant b$, а n может быть любым натуральным числом. За *длину ломаной* принимают *сумму длин* составляющих ее прямолинейных отрезков.

[10] В соответствии с *формулой Ньютона-Лейбница* значение $\int\limits_a^t\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}dt=s(t)-s(a)\ \big(=s(t)\big)$ есть *длина участка контура*, пройденного к "моменту времени" $t\in[a,b]$, а $\int\limits_a^b\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}dt$ — *длина всего контура* Γ (обозначаемая $l(\Gamma)$).

$$(x(t_0), y(t_0)),\ (x(t_1), y(t_1)),\ \dots,\ (x(t_{n-1}), y(t_{n-1})),\ (x(t_n), y(t_n)),\ \text{где}\ t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_0 + \triangle t$$

(при $\triangle t < 0$ знаки неравенств меняются на противоположные), ее *длина* $\triangle l$ выражается равенствами

$$\triangle l = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\dot{x}(c_i))^2 + (\dot{y}(\widetilde{c_i}))^2}\,|t_i - t_{i-1}|,$$

где c_i и $\widetilde{c_i}$ — некоторые значения, промежуточные между t_{i-1} и t_i, $i = 1, \dots, n$.

Пусть теперь ε — любое положительное число. В силу *непрерывности* на отрезке $[a, b]$ производных $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ существует такое положительное число δ, что при $0 < |\triangle t| < \delta$ неравенства $|\dot{x}(t) - \dot{x}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\dot{y}(t) - \dot{y}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполняются для всех значений t от t_0 до $t_0 + \triangle t$. Как следствие каждая из величин $\sqrt{(\dot{x}(c_i))^2 + (\dot{y}(\widetilde{c_i}))^2}$, $i = 1, \dots, n$, отличается от величины $\sqrt{(\dot{x}(t_0))^2 + (\dot{y}(t_0))^2}$ *меньше*, чем на ε (рис. 3)[11].

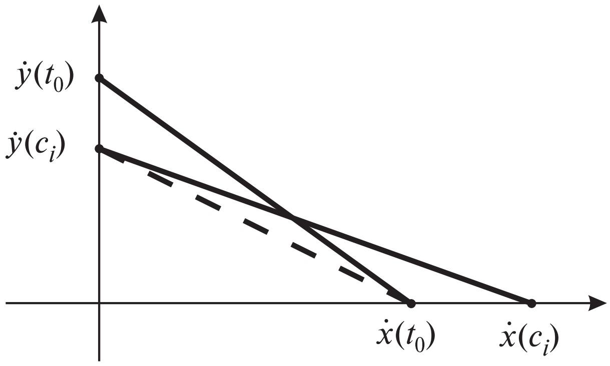


Рис.3

Справедливы поэтому соотношения

$$\left|\triangle l - \sqrt{(\dot{x}(t_0))^2 + (\dot{y}(t_0))^2}\,|\triangle t|\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{(\dot{x}(c_i))^2 + (\dot{y}(\widetilde{c_i}))^2} - \sqrt{(\dot{x}(t_0))^2 + (\dot{y}(t_0))^2}\right)(t_i - t_{i-1})\right| <$$

$$< \left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon (t_i - t_{i-1})\right| = \varepsilon |\triangle t|,$$

на основании которых можно заключить: если $|\triangle t| < \delta$, то величина $\triangle s = s(t_0 + \triangle t) - s(t_0)$, равная[12] $\pm \sup\{\triangle l\}$, отличается от величины $\sqrt{(\dot{x}(t_0))^2 + (\dot{y}(t_0))^2}\,\triangle t$ *не больше*, чем на $\varepsilon|\triangle t|$. В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ следует вывод: $\triangle s = \sqrt{(\dot{x}(t_0))^2 + (\dot{y}(t_0))^2}\,\triangle t + o(\triangle t)$ при $\triangle t \to 0$, а это означает, что величина $s(t)$ является *дифференцируемой* функцией переменной $t \in [a, b]$ в любой точке $t_0 \in [a, b]$, и ее *дифференциал* в этой точке выражается равенством $ds = \sqrt{(\dot{x}(t_0))^2 + (\dot{y}(t_0))^2}\,dt$.

3. Определение и свойства криволинейных интегралов

Символы

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y)\, ds \quad (\textit{криволинейный интеграл 1-го рода})$$

[11] Так как длина каждого из двух отрезков, изображенных сплошными линиями, отличается от длины “пунктирного” отрезка меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, длины указанных двух отрезков различаются меньше, чем на ε.

[12] В зависимости от знака приращения $\triangle t$.

и

$$\int\limits_{\Gamma} u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy \quad (\textit{криволинейный интеграл 2-го рода})^{13}$$

в предположении, что подынтегральные функции заданы в той части плоскости $\mathbb{R}^2$ (переменных x и y), в которой расположен *кусочно гладкий контур* Γ, и являются *непрерывными* на множестве точек этого контура, имеют следующее *определение*.

Если $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$, — любой *путь класса* C^1, задающий обход контура Γ, то

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,ds \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\,\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}\,dt,$$

$$\int\limits_{\Gamma} u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b \big(u(x(t),y(t))\dot{x}(t) + v(x(t),y(t))\dot{y}(t)\big)\,dt$$

(интегралы в правых частях обоих равенств – это *интегралы Римана* по отрезку $[a,b]$ функций, *непрерывных* на этом отрезке).

Следующие утверждения, вытекающие из данного определения, выражают основные свойства *криволинейных интегралов*.

1° (**свойство аддитивности**). Если кусочно гладкий контур Γ разделен на части $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ (например, на составляющие его *ориентированные гладкие дуги*), то

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,ds = \int\limits_{\Gamma_1} f(x,y)\,ds + \cdots + \int\limits_{\Gamma_m} f(x,y)\,ds$$

и

$$\int\limits_{\Gamma} u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy = \int\limits_{\Gamma_1} u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy + \cdots + \int\limits_{\Gamma_m} u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy.$$

Для доказательства этого свойства достаточно воспользоваться *определением* криволинейных интегралов и *свойством аддитивности* интеграла Римана по отрезку.

Вот одно из следствий свойства аддитивности: криволинейные интегралы по *замкнутому* контуру не зависят от выбора *начальной точки* контура.

2°. $\displaystyle\int\limits_{\Gamma^-} f(x,y)\,ds = \int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,ds$, а $\displaystyle\int\limits_{\Gamma^-} u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy = -\int\limits_{\Gamma} u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy.$

Доказательство. Если $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$, — какой-либо *путь класса* C^1, задающий *обход* контура Γ, то $\begin{cases} x = x(-t) \\ y = y(-t) \end{cases}$, $t \in [-b,-a]$, есть *путь* (*класса* C^1), задающий *обход* контура Γ^-, поэтому

$$\int\limits_{\Gamma^-} f(x,y)\,ds \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-b}^{-a} f(x(-t),y(-t))\,\sqrt{(\dot{x}(-t))^2+(\dot{y}(-t))^2}\,dt \underset{t\to -t}{=} \int\limits_b^a f(x(t),y(t))\,\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}\,(-1)\,dt =$$

[13] В случае *замкнутого* контура Γ знак интеграла часто снабжают кружочком: $\oint\limits_{\Gamma}$.

$$= \int\limits_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt = \int\limits_\Gamma f(x, y)\, ds;$$

$$\int\limits_{\Gamma^-} u(x,y)\, dx + v(x,y)\, dy \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-b}^{-a} \big(u(x(-t), y(-t))\dot{x}(-t) + v(x(-t), y(-t))\dot{y}(-t)\big)\, dt \underset{t\to -t}{=}$$

$$= \int\limits_b^a \big(u(x(t), y(t))\dot{x}(t)(-1) + v(x(t), y(t))\dot{y}(t)(-1)\big)(-1)\, dt = -\int\limits_\Gamma u(x,y)\, dx + v(x,y)\, dy.$$

3° (**корректность определения интегралов**). Значения

$$\int\limits_\Gamma f(x,y)\, ds \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt,$$

и

$$\int\limits_\Gamma u(x,y)\, dx + v(x,y)\, dy \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b \big(u(x(t), y(t))\dot{x}(t) + v(x(t), y(t))\dot{y}(t)\big)\, dt$$

не зависят от выбора *пути* (*класса* C^1) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$, задающего *обход* контура Γ.

<u>*Доказательство*</u>. Ввиду предыдущих двух свойств достаточно обсудить случай контура Γ, состоящего из *одной* гладкой дуги L, причем ориентированной так, что при ее *параметрическом задании* $\begin{cases} x = \tilde{x}(\tau) \\ y = \tilde{y}(\tau) \end{cases}$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, ее *начальной* точкой является $(\tilde{x}(\alpha, \tilde{y}(\alpha))$. *Взаимная однозначность* отображения $[\alpha, \beta] \to L$ позволяет утверждать, что при любом выборе *пути класса* C^1 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$, задающего *обход* контура $\Gamma = \{L\}$, на отрезке $[a, b]$ определена *неубывающая* функция $\tau = \tau(t)$, отображающая отрезок $[a, b]$ *на* отрезок $[\alpha, \beta]$ и являющаяся на отрезке $[a, b]$ *непрерывной*[14]. Придание любому значению $t \in [a, b]$ *бесконечно малого* приращения $\triangle t$, которому отвечает *бесконечно малое* приращение $\triangle \tau$, приводит (с учетом *неубывания* функции $\tau = \tau(t)$ и условия $\{\tilde{x}'(\tau), \tilde{y}'(\tau)\} \neq \vec{0}$) к соотношениям

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle \tau}{\triangle t} = \lim_{\triangle t \to 0} \left[\frac{\sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}}{\triangle t} \left(\frac{\sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}}{\triangle \tau} \right)^{-1} \right] = \frac{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}}{\sqrt{(\tilde{x}'(\tau))^2 + (\tilde{y}'(\tau))^2}},$$

из которых следует, что функция $\tau = \tau(t)$ имеет на отрезке $[a, b]$ *непрерывную* (и притом *неотрицательную*) *производную* $\dot{\tau}(t)$. Это позволяет в интегралах Римана, определяющих значения $\int\limits_\Gamma f(x,y)\, ds$ и $\int\limits_\Gamma u(x,y)\, dx + v(x,y)\, dy$, совершить переход от переменной $t \in [a, b]$ к переменной $\tau \in [\alpha, \beta]$, чем устанавливается *независимость* этих значений от выбора пути $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$, *обхода* контура Γ:

$$\int\limits_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt = \int\limits_a^b f\big(\tilde{x}(\tau(t)), \tilde{y}(\tau(t))\big) \sqrt{(\tilde{x}'(\tau(t)))^2 + (\tilde{y}'(\tau(t)))^2}\, \dot{\tau}(t)\, dt =$$

[14] Доказательство ее *непрерывности* дано в подстрочном примечании 5.

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau)) \sqrt{(\tilde{x}'(\tau))^2 + (\tilde{y}'(\tau))^2} d\tau;$$

$$\int\limits_{a}^{b} \big(u(x(t), y(t))\dot{x}(t) + v(x(t), y(t))\dot{y}(t)\big) dt = \int\limits_{a}^{b} \big(u(\tilde{x}(\tau(t)), y(t))\tilde{x}'(\tau(t)) + v(\tilde{x}(\tau(t)), \tilde{y}(\tau(t)))\tilde{y}'(\tau(t))\big) \dot{\tau}(t) dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(u(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau))\tilde{x}'(\tau) + v(x(\tau), y(\tau))\tilde{y}'(\tau)\big) d\tau.$$

4° (**формула Ньютона–Лейбница для интегралов 2-го рода**). Если кусочно гладкий контур Γ целиком расположен в той части плоскости, в которой $u(x, y)\,dx + v(x, y)\,dy$ есть *дифференциал* $d\varphi(x, y)$ некоторой *непрерывно дифференцируемой* функции, то

$$\int\limits_{\Gamma} u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy = \varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_0, y_0),$$

где (x_0, y_0) — *начальная*, а (x_1, y_1) — *конечная* точки контура Γ; в частности, если контур Γ является *замкнутым*, то

$$\oint\limits_{\Gamma} u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy = 0.$$

Доказательство. Пусть $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$, — любой путь класса C^1, задающий обход контура Γ. Тогда в соответствии с классической *формулой Ньютона–Лейбница* для интеграла Римана по отрезку

$$\int\limits_{\Gamma} u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} \big(u(x(t), y(t))\dot{x}(t) + v(x(t), y(t))\dot{y}(t)\big) dt =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} \frac{d\varphi(x(t), y(t))}{dt} dt = \varphi(x(b), y(b)) - \varphi(x(a), y(a)) = \varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_0, y_0).$$

5° (**оценка интегралов**). Если в любой точке (x, y) кусочно гладкого контура Γ выполняются неравенства $|f(x, y)| \leqslant h$, $|u(x, y)| \leqslant h$, $|v(x, y)| \leqslant h$, то

$$\Big|\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,ds\Big| \leqslant h\cdot l(\Gamma), \quad \text{а} \quad \Big|\int\limits_{\Gamma} u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy\Big| \leqslant \sqrt{2}\, h\cdot l(\Gamma),$$

где $l(\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} ds$ — *длина* контура Γ (см. подстрочное примечание 10).

Доказательство. Пусть $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$, — любой путь класса C^1 обхода контура Γ. В соответствии с определениями и сделанными предположениями тогда

$$\Big|\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,ds\Big| = \Big|\int\limits_{a}^{b} f(x(t), y(t)) \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt\Big| \leqslant \int\limits_{a}^{b} h \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt = h\cdot l(\Gamma);$$

$$\Big|\int\limits_{\Gamma} u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy\Big| = \Big|\int\limits_{a}^{b} \big(u(x(t), y(t))\dot{x}(t) + v(x(t), y(t))\dot{y}(t)\big) dt\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \sqrt{(u(x(t),y(t)))^2+(v(x(t),y(t)))^2}\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}\,dt = \sqrt{2}\,h\cdot l(\Gamma).$$

4. Формула Грина

Пусть Γ — *замкнутый* и *не имеющий самопересечений* кусочно гладкий контур на плоскости, который ограничивает область D, остающуюся при его обходе *слева* от него. В предположении, что функции $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$, а также их частные производные $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$ определены на множестве $\overline{D}$ (т. е. во всех точках области D и контура Γ) и являются *непрерывными* на этом множестве, справедлива *формула Грина*[15]

$$\oint_\Gamma u(x,y)\,dx+v(x,y)\,dy = \iint_{\overline{D}} \left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Доказательство[16]. В случае, когда Γ есть контур *прямоугольника* $\{a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$, для вывода этой формулы достаточно в левой ее части воспользоваться определением криволинейного интеграла и свойством его аддитивности, а в правой перейти от двойного интеграла к повторным и примененить *формулу Ньютона-Лейбница* к интегралам по отрезкам $[c,d]$ и $[a,b]$:

$$\oint_\Gamma u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy = \int_a^b u(x,c)\,dx + \int_c^d v(b,y)\,dx - \int_a^b u(x,d)\,dx - \int_c^d v(a,y)\,dx;$$

$$\iint_{\overline{D}}\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_c^d\!\!\int_a^b \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy - \int_a^b\!\!\int_c^d \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\,dy\,dx = \int_c^d \big(v(b,y)-v(a,y)\big)\,dy - \int_a^b \big(u(x,d)-u(x,c)\big)\,dx.$$

Начальным шагом доказательства *формулы Грина* в общем случая является построение на координатной плоскости сетки равновеликих квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Среди этих квадратов[17] выделяются:

а) квадраты (обозначаемые $\mathcal{K}_i$), целиком принадлежащие множеству $\overline{D}$;

б) квадраты (обозначаемые K_j), *внутри* которых есть точки контура Γ.

Множество $\overline{D}$ содержится в объединении квадратов того и другого вида, так что (в силу свойства аддитивности двойного и контурного интегралов) правую часть *формулы Грина* можно предствить в виде

$$\sum_i \iint_{\mathcal{K}_i}\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)dx\,dy + \sum_j \iint_{K_j\cap\overline{D}}\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

а левую — в виде

$$\sum_i \oint_{\partial\mathcal{K}_i} u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy + \sum_i \oint_{\partial(K_j\cap\overline{D})} u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy,$$

где $\partial\mathcal{K}_i$ — контур квадрата $\mathcal{K}_i$, а $\partial(K_j\cap\overline{D})$ — совокупность замкнутых кусочно гладких контуров[18], ограничивающих общую часть квадрата K_j и множества $\overline{D}$ (рис. 4).

---

[15] По поводу названия этой *формулы* см. статью *Грина формулы* в [1] (с. 1123). Что же касается традиционных ее доказательств, то большинство из них следует считать лишь *свидетельствами в пользу*, поскольку они состоят из разбора одного - двух "оранжерейных" случаев и призыва поверить, что умело ими оперируя, можно охватить и изначально заявленный в формулировке.

[16] С использованием сюжетных линий доказательства *теоремы Коши*, которое приведено в учебнике Б.В.Шабата [2] (на с. 100-102) и которое было сообщено ему (по его свидетельству) тверским математиком Л.Д.Ивановым.

[17] Каждый квадрат рассматривается вместе с его границей, обходимой так, что внутренняя часть квадрата остается слева.

[18] Она может состоять из одного, нескольких или бесконечного числа контуров.

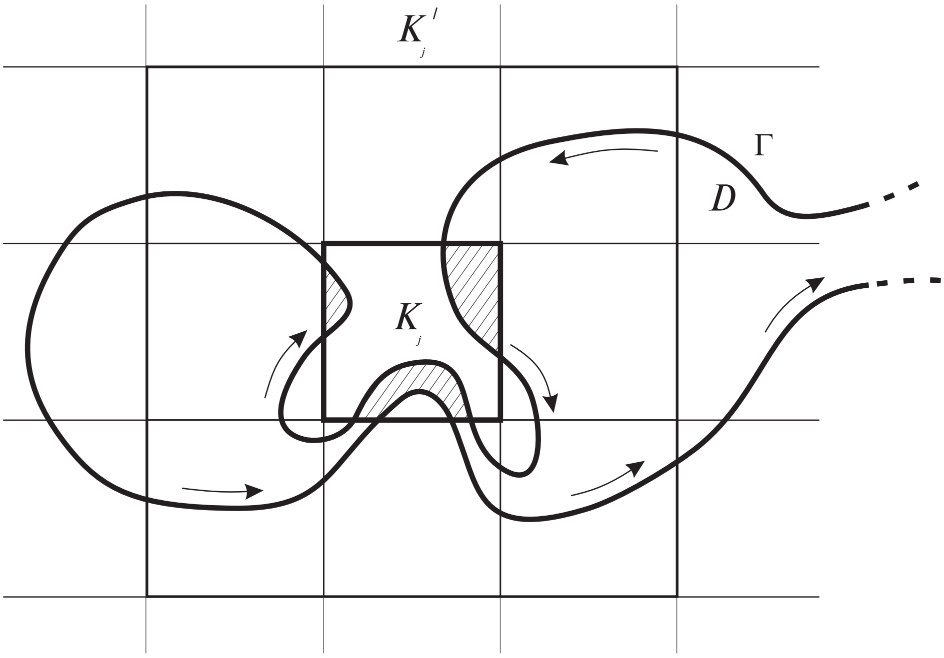


Рис.4

Справедливость *формулы Грина* для прямоугольников приводит к равенству

$$\sum_i \oint_{\partial\mathcal{K}_i} u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy = \sum_i \iint_{\mathcal{K}_i} \Big(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Big)dx\,dy,$$

и остается доказать, что при неограниченном измельчении сетки обе величины

$$\sum_j \iint_{K_j\cap\overline{D}} \Big(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Big)dx\,dy \quad \text{и} \quad \sum_j \oint_{\partial(K_j\cap\overline{D})} u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy$$

становятся сколь угодно малыми.

Пусть ε — произвольно взятое положительное число.

Так как по предположению функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ и их частные производные $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$ являются *непрерывными* на множестве $\overline{D}$, существуют такие положительные числа h и δ, что

а) $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant h$ и $\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \leqslant h$ на множестве $\overline{D}$;

б) $|u(x,y) - u(\widetilde{x},\widetilde{y})| < \varepsilon$, $|v(x,y) - v(\widetilde{x},\widetilde{y})| < \varepsilon$ каковы бы ни были точки $(x,y),(\widetilde{x},\widetilde{y}) \in \overline{D}$, отстоящие друг от друга меньше, чем на δ.

Относительно квадратов сетки далее предполагается, что длина d диагонали каждого из них *меньше* как обоих чисел ε и δ, так и *половины* расстояния между какими-то двумя фиксированными точками контура Γ.

Если обозначить $K_j{}'$ квадрат с тем же центром, что и K_j, но *втрое* большего размера, и учесть что точки контура Γ есть не только *внутри* квадрата K_j, но и *вне* квадрата $K_j{}'$, можно утверждать что общая длина пересечений контура Γ с каждым квадратом $K_j{}'$ *больше* удвоенной длины стороны квадрата K_j, т. е. числа $\sqrt{2}d$. Поскольку каждый из квадратов K_j входит в состав не более чем *девяти* “штрихованных” квадратов, а сумма длин пересечений контура Γ с квадратами K_j не превосходит длины $l(\Gamma)$ всего контура, следует заключение: *сумма длин пересечений контура* Γ *с квадратами* $K_j{}'$ *больше* числа $\sum\limits_j \sqrt{2}d$, *но не превосходит* числа $9l(\Gamma)$.

В результате возникает оценка:

$$\Big|\sum_j \iint_{K_j\cap\overline{D}} \Big(\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Big)dx\,dy\Big| \leqslant \sum_j \iint_{K_j\cap\overline{D}} 2h\,dx\,dy \leqslant 2h\sum_j \iint_{K_j} dx\,dy =$$

$$= 2h\sum_j \frac{d^2}{2} = \frac{d\cdot h}{\sqrt{2}}\sum_j \sqrt{2}d < \frac{d\cdot h}{\sqrt{2}}9l(\Gamma) < \frac{\varepsilon\cdot h\cdot 9l(\Gamma)}{\sqrt{2}}.$$

Записывая же для произвольно взятой точки $(x_j,y_j)\in K_j\cap\overline{D}$ равенство

$$\oint\limits_{\partial(K_j\cap\overline{D})} u(x,y)\,dx+v(x,y)\,dy = \oint\limits_{\partial(K_j\cap\overline{D})} u(x_j,y_j)\,dx+v(x_j,y_j)\,dy + \oint\limits_{\partial(K_j\cap\overline{D})} \big(u(x,y)-u(x_j,y_j)\big)\,dx+\big(v(x,y)-v(x_j,y_j)\big)\,dy$$

и замечая, что в его правой части первый интеграл[19] *равен нулю*, а второй допускает[20] оценку

$$\left|\oint\limits_{\partial(K_j\cap\overline{D})} \big(u(x,y)-u(x_j,y_j)\big)\,dx+\big(v(x,y)-v(x_j,y_j)\big)\,dy\right| \leqslant \sqrt{2}\varepsilon\big(l(\Gamma\cap K_j)+2\sqrt{2}d\big),$$

можно прийти к заключению:

$$\left|\sum_j \oint\limits_{\partial(K_j\cap\overline{D})} u(x,y)\,dx+v(x,y)\,dy\right| \leqslant \sum_j \sqrt{2}\varepsilon\big(l(\Gamma\cap K_j)+2\sqrt{2}d\big) \leqslant \sqrt{2}\varepsilon\big(l(\Gamma)+18l(\Gamma)\big).$$

Литература

[**1**] Математическая энциклопедия. Том. 1. - М.: Советская энциклопедия. - 1977.

[**2**] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. - М.: Наука. - 1976.

Шведенко Сергей Владимирович,
доцент кафедры высшей математики
Национального исследовательского ядерного
университета (МИФИ), кандидат физ.-мат. наук

E-mail: sershvedenko@mail.ru

[19] В силу *формулы Ньютона-Лейбница* с учетом того, что $u(x_j,y_j)dx+v(x_j,y_j)dy = d\big(u(x_j,y_j)x+v(x_j,y_j)y\big)$.

[20] Ввиду выполнения для точек $(x,y)\in\partial(K_j\cap\overline{D})$ неравенств $|u(x,y)-u(x_j,y_j)|<\varepsilon$, $\;|v(x,y)-v(x_j,y_j)|<\varepsilon$.

Каким быть строгому доказательству?

А. Я. Белов, Н. С. Келлин

В работе идет речь о доказательствах в математике. Очевидно, что с доказательствами человек познакомился после возникновения письменности. А сейчас можно задуматься над такой "пропорцией":

Появилась письменность — возникли тексты доказательств.

Появились компьютеры — ?

Иными словами, что будет с доказательствами, на разбор которых уходили основные время и силы при изучении математики, сегодня — при возросших скоростях в вычислениях и всех других областях, где нашел применение компьютер? Видимо, формальные доказательства надо проводить не так уж часто: например, как образец в начале разработки какой-либо крупной темы. Далее можно ограничиваться рассуждениями, из которых следует а) можно ли провести формальное доказательство интересующего утверждения; б) сможет ли это сделать заинтересованный читатель.

В этом состоит суть вводимого понятия математического комикса. Оно применяется к теореме Ван-дер-Вардана об арифметических прогрессиях и к теореме Эйлера о многогранниках. В заключение рассмотрены аналоги м-комиксов в других областях и дается краткий обзор развития понятия доказательства в педагогике.

(Статья была напечатана в препринте Института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН, препринт № 6 за 1992 г. Публикуется с разрешения авторов. — *Прим. ред.*)

Формальные доказательства и строгие доказательства

Всем без сомнения знакомы математические доказательства. Те, кто не связал в дальнейшем свою судьбу с естественно-научными дисциплинами, в большинстве своем воспринимают школьную геометрию как дурной сон или по крайней мере как нечто, весьма слабо связанное с повседневной жизнью (а ведь геометрия, если дословно, является землемерием). А те, кому в дальнейшем пришлось разбираться в математике, именуемой по традиции "высшей", также могут быть не в восторге от того, что и как приходилось им доказывать в школе, а зачастую и в вузе.

В данной работе пойдет речь и о том, как для достижения строгости рассуждений в чистой и в прикладной математике происходит их формализация с неизбежным при этом "торжеством науки над здравым смыслом", согласно мнению академика А. Н. Крылова [1], а также и о том, как в настоящее время можно, не теряя строгости, противостоять этому процессу.

Общеизвестный, но существенный факт: разбираться в доказательстве теоремы значительно проще, если предварительно оно прослушано в соответствующей лекции. Более того, лекционное изложение теорем воспринимается гораздо легче, нежели книжное, несмотря на то, что книжку можно отложить, а темп лекции навязан. Устную форму доказательств обсудим позже, а начнем с рассмотрения их текстов.

Очевидно, что только после возникновения письменности появилась возможность последовательного изложения и формализации математических рассуждений, то есть появления математики как таковой. Не дает ли появление современных компьютеров новые возможности для изложения и восприятия математических рассуждений, которые позволят лучше понять основные идеи, а в дальнейшем *обернуться* математическими открытиями?

Вопрос этот далеко не праздный. Нахождение удачного обозначения, символики часто стимулировало появление новой техники рассуждений, а в последствии и конкретных результатов, например, диаграммы Дынкина, а также диаграммы в гомологической алгебре, которые поначалу были в шутку названы одним из ее создателей — С. Маклейном, "абстрактной чепухой" (потом этот термин прижился в математической литературе [2]). За удобством изложения или оформления обычно стоит содержательный смысл. Попытки просто изложить по-новому известные результаты вели к открытиям, как это получилось при написании Э. Шредингером легшего в основу квантовой механики уравнения, описывающего в более удачной форме результаты, уже полученные к тому времени В. Гейзенбергом другим методом. Что поделать: "работы первооткрывателей всегда неуклюжи" [3]. Это замечание Дж. И. Литтлвуда как нельзя лучше подчеркивает необходимость тщательной методической обработки "журнальных" формулировок и доказательств.

Интересно, что отмеченная неуклюжесть связана отнюдь не с тем, что оригинально мыслящий человек обычно бывает плохим методистом (напротив, часто автор оригинальной "нечитабельной" работы красиво и понятно излагает результаты других авторов), но с тем, что сам предмет исследования "изнутри" выглядит не так, как "снаружи" и шкалы ценностей и сложностей поначалу бывают смещены. Именно поэтому при написании статьи первому черновику полезно "отлежаться".

Подобная методическая работа, разумеется, в той или иной форме велась всегда и не только в математике. В настоящее время бурного развития и совершенствования ЭВМ актуальным стал вопрос о том, не приведут ли новые возможности ЭВМ в области визуализации знаний (развитая графика, многооконность, многоцветность, мультфильмы и т.п.) к лучшему способу изложения идей, используемых в том или ином доказательстве, а в дальнейшем и к принципиальному пересмотру традиционного способа изложения математики?

На наш взгляд, такая возможность имеется. Однако для того, чтобы ответить на этот вопрос, нужно понять, что такое строгое доказательство, поскольку это понятие тесно связано с традиционными методами изложения и даже на них опирается.

Самая распространенная точка зрения состоит в следующем: имеются понятия, принимаемые без определений, аксиомы, логические правила вывода новых утверждений из уже доказанных и из аксиом, а также правила построения новых определений. Доказательством некоторого утверждения называется такая последовательность утверждений, в которой каждое утверждение является либо аксиомой, либо получено из предыдущих по правилам вывода, а последнее утверждение и есть доказываемое [4].

Есть существенное уточнение: в тексте доказательства допускаются ссылки на утверждения, доказанные в других текстах. Возможны также споры из-за аксиом и правил вывода, но они не будут интересовать нас сейчас. Предполагается, что принципы построения формальных текстов обеспечивают истинность всех утверждений (хотя бы в случае естественно-научных дисциплин), если только истины исходные посылки, и придают убедительность математическим методам. По образному выражению академика А. Н. Крылова "Математика, подобно жернову, перемалывает то, что под него засыпают, и как засыпав лебеду, Вы не получите пшеничной муки, так, исписав целые страницы формулами, Вы не получите истины из ложных предпосылок" [1].

Таково вкратце описание идеальных текстов. Возникает естественный вопрос: такие ли требования предъявляются к текстам реальных статей, учебников и т.д.? Можно ли их рассматривать как идеальные тексты? Ответ очевиден: никогда. На то есть по крайней мере две причины.

Во-первых, для признания текста неидеальным формально достаточным основанием является наличие в нем опечаток. Вопрос, как быть с ними, не так прост, как кажется. Разумеется, "ачепатки", наподобие только что сделанных, не слишком сильно искажают смысл текста, и их легко исправлять. Но, если, к примеру, в тексте присутствует таблица значений изучаемой в работе величины, а в ней пару раз вместо 2 поставлено 3, а 9 несколько раз вообще не пропечаталось, то находить и исправлять подобные опечатки во много раз труднее. Подобная ситуация встречается, к сожалению, часто, особенно при заполнении таблицы на ЭВМ, печатающее устройство которой барахлит. К разряду опечаток надо отнести и сбой в работе ЭВМ, в результате чего может измениться смысл получаемого текста. Именно опасение, что во время многодневной работы ЭВМ, которая потребовалась для доказательства известной гипотезы четырех красок [5], более ста лет сопротивлявшейся усилиям доказывавших ее математиков, произошла подобная опечатка, не позволяет нам быть полностью уверенными в правильности обоих предложенных машинных доказательств этой гипотезы.

Во-вторых, во всех реальных текстах имеется апелляция к интуиции читателя (очевидно, что...; ясно, что...) или к его возможностям проделать самостоятельно тот или иной этап доказательства (это — непосредственное следствие..., точно так же, после преобразований получим...; тем же методом доказывается, что...; действуя, как и при доказательстве...). Встречается перемена порядка следования — доказывается сначала теорема, а затем нужная для ее доказательства лемма (как мы впоследствии узнаем), а также слова, предназначенные для интуиции (например, действительно, иными словами, таким образом, немедленно). Приведенные обороты взяты из книги [6], изложение материала в которой наиболее аккуратно. Что говорить о многих других книгах! Впрочем, читатель сам может в этом убедиться, например, раскрыв любой курс высшей математики. Такие уступки наглядности изложения в ущерб его формальности, отражают стремления авторов, в данном случае — Н. Бурбаки (зачастую, видимо, неосознанные) приблизить текст доказательства к лучше воспринимаемому устному его варианту, быть может самими авторами и предлагавшемуся в их лекциях. Не случайно, что доказательства, приводимые в статьях и книгах, как правило, формальными и не называют; о них говорят как о "строгих".

В чем причины расхождения формальных и реальных текстов? Первая, "официальная" заключается в экономии бумаги. Вторая, разумеется главная, состоит в уступке неформальному человеческому мышлению. Однако оно может приводить к ошибкам даже умудренных опытом профессионалов-математиков: в книге [7], например, рассказано сколь плохую шутку может сыграть геометрическая интуиция в задачах из теории функций действительной переменной. Так в чем же может состоять такая уступка без ущерба для доказательности, и что же такое "строгое" доказательство?

Мы считаем, что это — "нечто" (обычно текст), с помощью которого адресат, (заинтересованный читатель), может изготовить, ЕСЛИ СОЧТЕТ НУЖНЫМ, формальное доказательство и видит, как это сделать. Точка зрения на строгость доказательств, требующая их полной формализованности, предполагающая возможность непосредственной машинной проверки правильности их текста и потому не требующая творческого подхода к их разбору, опровергается хотя бы наличием опечаток; на это придется ответить:"от них МОЖНО ИЗБАВИТЬСЯ" (быть может перепоручив эту трудоемкую работу машине), что не лучше слов "ТЕКСТ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА МОЖНО ФОРМАЛИЗОВАТЬ" Пример с гипотезой 4-х красок — еще один аргумент в пользу нашей точки зрения.

К сожалению, мы не знаем никого, кто явно поставил бы вопрос о том, что же это такое: строгое доказательство? Полагаем, однако, что основная масса людей, занимающихся математикой, быстро ответит на этот явно поставленный вопрос: формализованные доказательства, конечно, вещь нужная, но очень редко.

На словах строгое доказательство часто отождествляют с формальным, что неверно. Вместе с тем такая постановка вопроса необходима: отсутствие четкого представления о строгости может привести ко многим нежелательным последствиям, например, может не учитываться, каким будет читатель. Пожалуй, только в уже цитированной книге [3] есть явное упоминание о том, что доказательство может (и должно!) зависеть от адресата: "Евклидово доказательство бесконечности множества простых чисел может быть для профессионала сжато в одну строчку...". Также происходит отказ от многих средств изложения: считалось, например, что в строгом доказательстве не должно быть рисунков (см. [3], где на стр. 33-37 приведен пример того, к чему может привести следование этому принципу). Формализованные части текста считаются более важными, и поэтому происходит экономия на неформальных пояснениях, от чего теряется наглядность изложения основных идей. Стараясь противостоять этому искусу, В. И. Арнольд во введении к книге [8] отмечает: "При изложении всех вопросов автор стремился избежать аксиоматически-дедуктивного стиля, характерным признаком которого являются немотивированные определения, скрывающие фундаментальные идеи и методы; подобно притчам их разъясняют лишь ученикам наедине".

Происходит, наконец, и переоценка необходимой степени формализованности текста, в результате чего огромные усилия при оформлении математической работы зачастую тратятся на ее “кодировку” (формализацию) при написании, и, как следствие, на “декодировку” при чтении. Особенно это относится к изложению комбинаторных рассуждений (см. приводимый ниже пример).

Само определение понятия строгости носит субъективный характер, поскольку предполагает зависимость от адресата. Чем выше относительный уровень и возможности последнего, тем больше может быть разрыв между строгостью и формализмом. Поэтому в более простых местах доказательства изложение бывает менее формальным, от чего они опять-таки становятся проще для восприятия. Здесь уместно сравнение с качеством фотоматериалов о сложном водном или горном походе: в изобилии представлены “бивуачные” снимки, и совсем мало таких, которые повествуют о прохождении сложного порога или ледопада...

Не случайно также, что при проведении математических рассуждений физики, инженеры и другие специалисты-нематематики, как и школьные учителя, перегибают палку в сторону формализма. Да и во время профессионального роста самого математика на каком-то этапе формализм возводится в абсолют. На этом этапе останавливается большинство учителей математики, и находятся ученики старших классов математических школ. В конце статьи мы обсудим это более подробно.

Из того, что строгость изложения зависит только от понимания читателя, следует вывод: путь к строгости — не обязательно путь к формализму, строгость достигается передачей любым образом идей и рецептов составления формального доказательства. Чем шире круг адресатов, тем строже текст (а не чем он формальнее). Чем лучше в нем переданы идеи, тем больше возможностей у читателя, тем больше разница между уровнем строгости и формализацией текста, тем меньше требований к четкости и формальной аккуратности, тем больше возможность приблизить изложение к человеческому мышлению. Это, в свою очередь, опять-таки из-за неформальности нашего мышления облегчает восприятие и понимание, а, следовательно, ведет к лучшей передаче идей и к увеличению различий с формальным текстом, и, быть может, в дальнейшем к пересмотру самих правил формализации текстов.

Заметим, что и само понятие формального доказательства представляет собой некоторую историческую условность. Достаточно проследить за историей обоснования математического анализа: полный отказ от интуиции принципиально недостижим, хотя бы потому, что нельзя формально доказать непротиворечивость самой математики [4]. В основе любого научного знания лежит акт веры... в истинность, в полезность, в интересность, наконец, того, что получено в результате исследования. Что бы означало обосновать необходимость обоснования, или удостовериться на практике, что практика — критерий истины?

При формализации (как и в процессе моделирования) некоторые факты могут потеряться, поэтому иногда формализация возможна несколькими различными способами, подобно существованию большого числа моделей одного объекта — сравните различные определения бесконечно малых и дифференциалов в обычном курсе математического анализа и в нестандартном анализе [9-10].

В самой формализации заключена загадка: чтобы доказать разрешимость уравнения в радикалах, достаточно привести соответствующую формулу для корней, но чтобы доказать неразрешимость, необходимо сначала формализовать понятие разрешимости. Точно так же только после постановки Д. Гильбертом проблемы о доказуемости любого истинного математического утверждения, появились формальные определения понятия доказательства, а затем уже К. Геделю удалось доказать неразрешимость поставленной проблемы. Быть может причина заключается отчасти в том, что формализация идеи делает ее объектом изучения средствами самой математики (в которой есть, как только что отмечено, истинные, но недоказуемые утверждения!). Аналогичная ситуация отмечается и в программировании при переводе процедуры решения на машинный язык. Чтобы решить задачу, мы часто воображаем идеальный аппарат (машину Тьюринга или Поста), которому мы ее должны объяснить, то есть формализовать. Уровень формализации зависит от возможности обойтись без этого аппарата. Сама возможность или невозможность формализации имеет принципиальнее значение (так, невозможность однозначно определить слова “и т.д.” связана с наличием нестандартных моделей).

Итак, строгость обеспечивается не обязательно формализмом, но способом изложения, наиболее адекватным человеческому мышлению (в изучаемом вопросе), которое является принципиально нечетким. Но в таком случае нет никакой необходимости все доказательство разворачивать в текст, то есть располагать информацию линейно, поскольку люди в большинстве своем мыслят картинками. Как о человеке с очень редким типом мышления пишет Ж. Адамар о Г. Биркгофе “который мыслит символами” [11]. В настоящее время для оформления доказательств можно использовать графические и другие возможности ЭВМ, а текстовые комментарии располагать не обязательно линейно.

М-комиксы

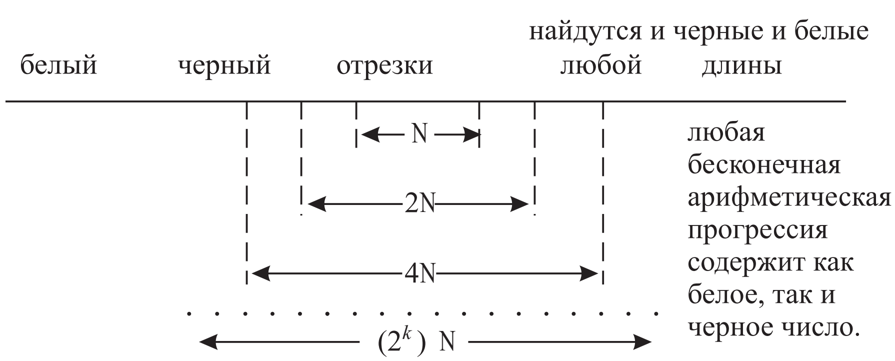
Мы приходим таким образом к понятию “математического комикса” (м-комикса), то есть объекта, сконстуированного любыми доступными способами (чаще всего текстовым и графическим, в перспективе с использованием акустики и мультипликации), для проведения с его помощью формальных доказательств. Проще говоря, м-комикс — это конспект формального доказательства, а, если сказать еще более образно, то м-комикс — это раскрашенный лист бумаги, глядя на который читатель сможет провести строгое доказательство интересующей его теоремы. В этой связи нельзя не вспомнить историю написания иллюстраций книги [12], которые, по словам автора — А. Т. Фоменко, заменяли ему в свое время конспект лекций по гомотопической топологии.

Мы приведем пример изложения одной комбинаторной теоремы с помощью м-комикса. Именно комбинаторные рассуждения хуже всего воспринимаются при обычном изложении: всегда остается непонятным, как придумано доказательство.

Теорема (Ван-дер-Варден). Пусть k и 1 — произвольные натуральные числа. Тогда существует такое натуральное число $n = n(k, l)$, что при раскраске любого отрезка ряда натуральных чисел длины n любым способом k цветами в нем найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины l .

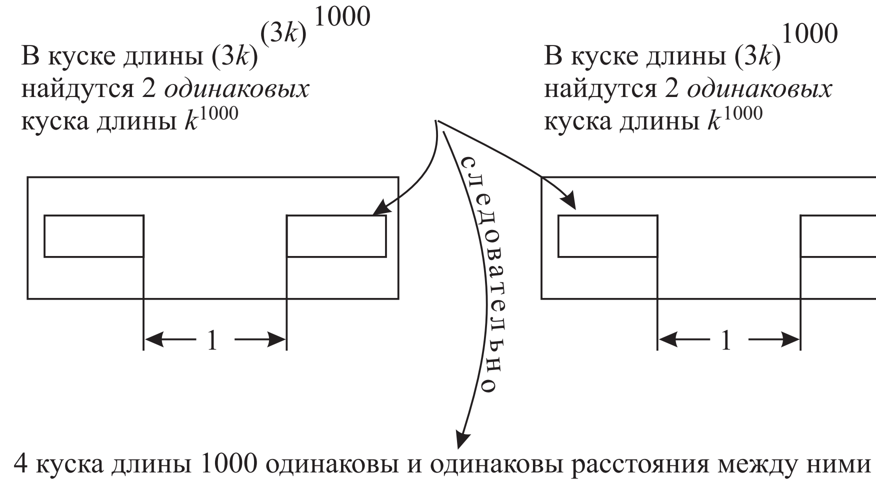
Замечание. В частности, при любой раскраске всего натурального ряда в k цветов найдется одноцветная прогрессия любой длины, но бесконечной одноцветной прогрессии можно и не найти.

Пример:

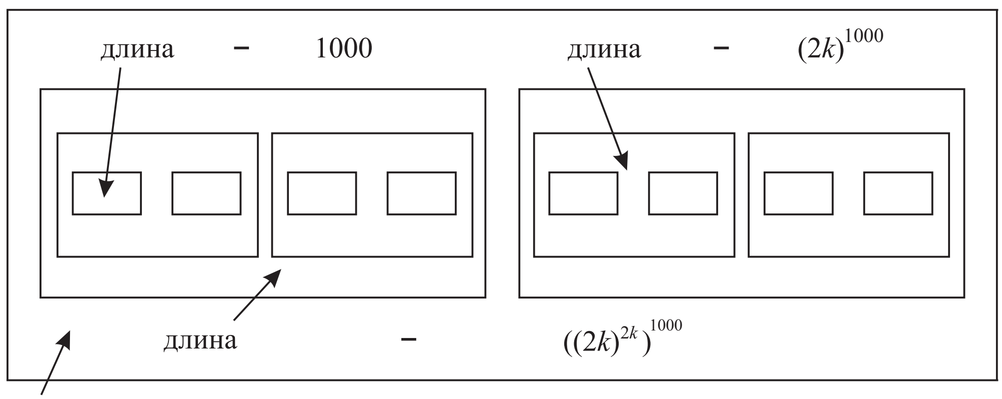


Здесь и далее полоса – символ натурального ряда, а прямоугольники – куски натурального ряда

Поиск прогрессии длины 3 (k — число цветов):

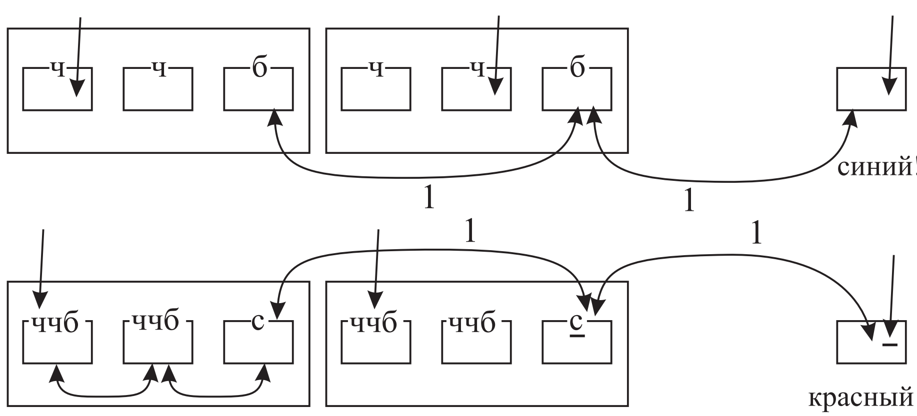


Аналогично можно построить и “трехэтажный бутерброд”



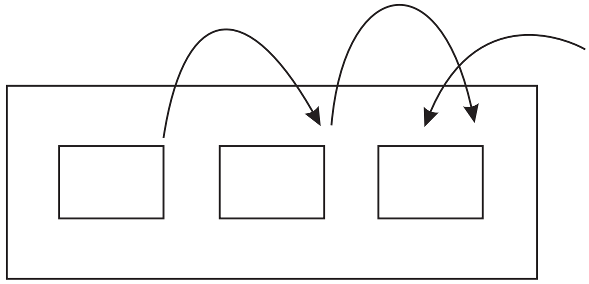
длины $(((2k)^{2k})^{2k})^{1000}$, и далее — N-этажный, где N фиксировано.

Как построить прогрессию длины 3:

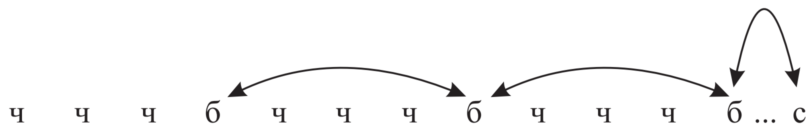


Вообще, если цветов k, то нужен “k-этажный бутерброд”.

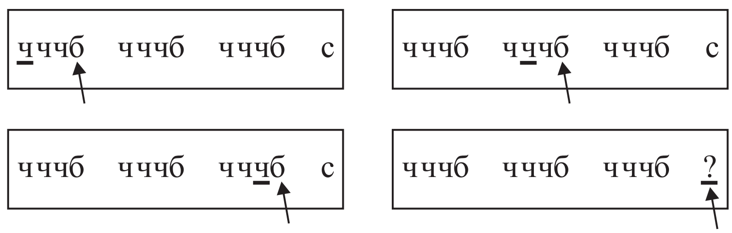
Уточнение: нужно требовать, чтобы симметричный кусок попадал внутрь куска следующей ступени в их иерархии.



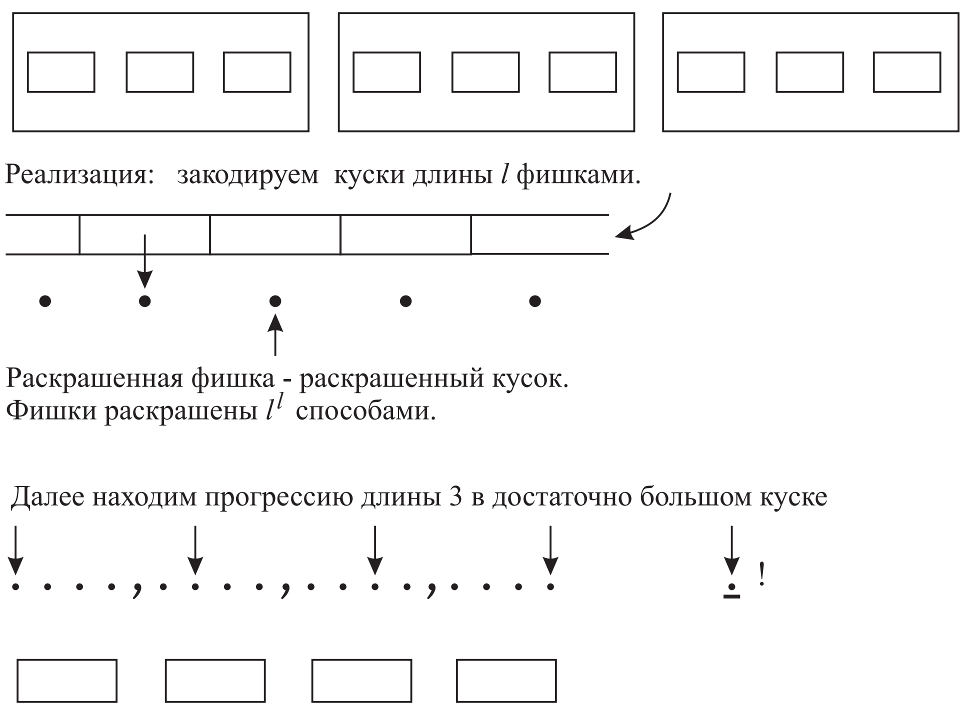
Поэтому, первый этаж надо брать длиной не $2k^{1000}$, а $4k^{1000}$.
Случай прогрессии длины 4.
Мечта:



Вилка:

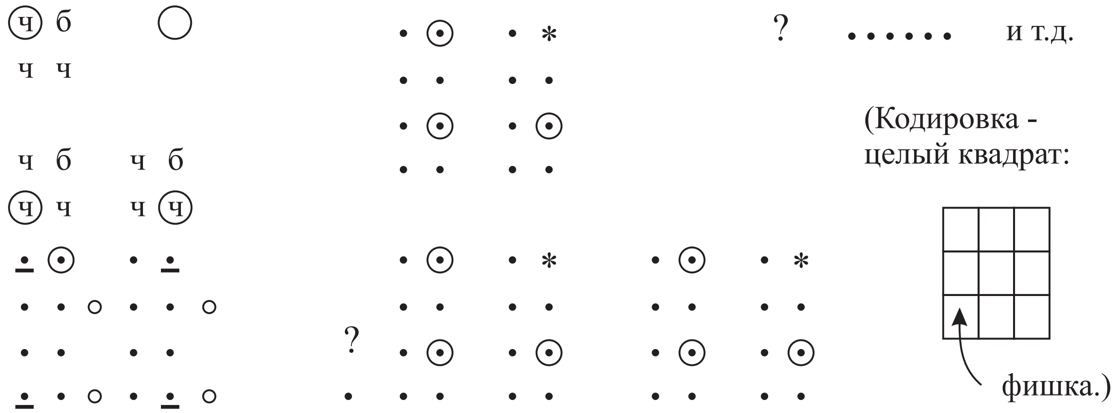


“Бутерброд” получается аналогично:

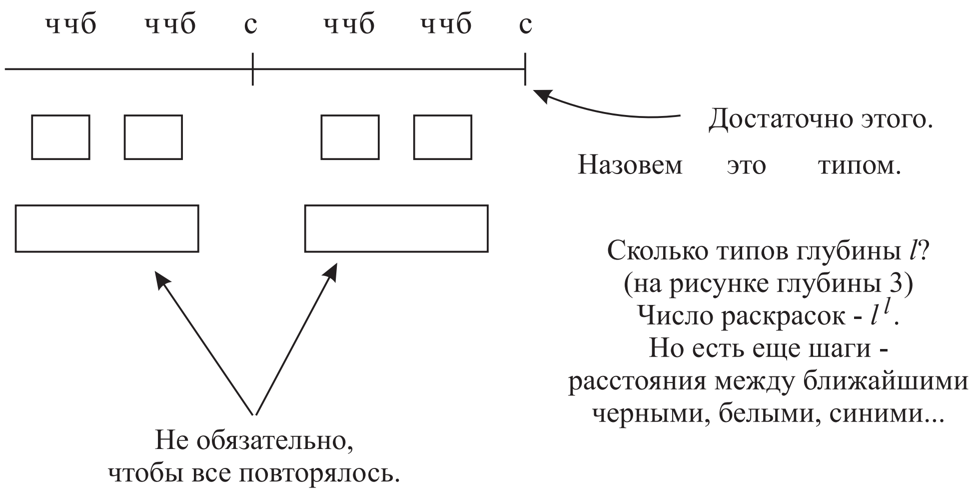


Плоское и пространственное обобщения.

Доказательство того, что найдутся 4 фишки одного цвета в вершинах некоторого квадрата.



Приведенный м-комикс — это полное доказательство обобщения теоремы Ван-дер-Вардена на евклидово пространство любого числа измерений [23], хотя соответствующая многомерная теорема даже не сформулирована! Можно показать даже, как усиливается полученная оценка.



$B(t+1,k,3) = k^{(t+1)} \cdot B(t-1,k,3) \cdot \ldots$

число способов для самого большого шага	число способов для второго по величине шага

$B(t+1,k,3) = k^{(t+1)} \cdot B(t-1,k,3) \cdot \ldots$

Доказательство этой теоремы семиклассникам ВМШ при Московском математическом обществе, данное по схеме приведенного м-комикса, потребовало одного занятия со всеми дополнительными комментариями.

В книге А. Я. Хинчина [13] доказательство этой теоремы в ее одномерном варианте без усиленной оценки числа $n(k,\, l)$ занимает 12 страниц трудно читаемого текста. Сам автор в предисловии говорил, что разбор доказательства может занять у студента около недели. Разумеется причина этого заключается отнюдь не в неумении Хинчина излагать материал (наоборот, написанные им учебники и свидетельства слушавших его лекции, говорят как раз об обратном), а именно в неприспособленности традиционного способа для изложения достаточно тонких комбинаторных рассуждений.

Традиционное доказательство ведется индукцией по l, вводится число $n(k,\, l)$, определяется рекуррентная последовательность:

$$q(0) = 1; \quad n(0) = n(k,l); \quad q(s) = 2 \cdot q(s-1) \cdot n(s-1); \quad n(s) = n(k^{q(s)}, 1).$$

В дальнейшем доказывается, что в качестве $n(k, l{+}1)$ можно взять число $q(k)$. Геометрически $q(s)$ — это длины введенных в м-комиксе s-этажных бутербродов, смысл двойки в том, чтобы не перекрывались прогрессии, но читатель пока этого знать не может. Затем определяется “строгое” понятие однотипных отрезков (то есть совпадающих при наложении). Мы их назвали равными, что “нестрого”: каждый отрезок равен только с амому себе. Затем определяется прогрессия из отрезков. Сразу разбирается случай общей иерархии, все вилки строго доказываются введением большого количества индексов.

Очевидно, что данный вариант доказательства неудобочитаем, так как в нем используются, как минимум, три идеи: идея многоэтажного бутерброда, идея вилки и идея кодировки. Рассуждения, использующие сразу столь много несхожих между собой идей, воспринимаются плохо, а введение требующихся идей по одной и разбор возникающих частных случаев ведет к непомерному разбуханию текста. В м-комиксе этого не происходит из-за отказа проводить формализацию идеи, когда формальный вариант доказательства читателю легче приготовить самостоятельно.

Понятие м-комикса возникает не только из абстрактных соображений типа: “почему бы не использовать какие-то новые возможности для изложения доказательств?” и, разумеется, не только из желания довести до совершенства изложение отдельных красивых теорем, ранее считавшихся трудными (недоступными) для восприятия учащимися. Дело в том, что на математику можно смотреть по крайней мере с двух точек зрения: “административной”, характеризуемой рассмотрением отдельных ее разделов и “индустриальной”, заключающейся в изучении отдельных идей, их применения в различных ситуациях и разделах математики.

“Административная” точка зрения представлена во всех книгах, исключая, пожалуй, только [14] и другие того же автора. “Индустриальная” — главным образом в работах методистов, которые почти никогда не привлекают внимания математиков-профессионалов, несмотря на то что каждая новая содержательная точка зрения на что-либо всегда очень важна и приверженность методистов “индустриальному” подходу в рамках рассматриваемых ими дисциплин также заслуживает внимания. Впрочем, в данном отношении грешат не одни математики: достаточно вспомнить отношение биологов к сформулированному Виллисом и Юлом закону в систематике [15], поначалу резко отрицательное, так как он описывает не только биологические объекты, но и социальные явления и многое другое!

Возвращаясь к математике, надо сказать, что в настоящий момент трудно даже ответить на вопрос об относительной важности двух названных точек зрения из-за неразвитости второй. Здесь любопытно отметить, что стали появляться книги, написанные математиками-прикладниками, следующие “индустриальному” подходу, ведь математика используется главным образом и прежде всего как источник идей, а не формальных рецептов, в чем легко убедиться на примере того, какие разделы математики чаще всего используются в других науках: анализ, линейная алгебра, теория вероятностей и математическая статистика. Об арифметике здесь и не надо упоминать: она стала частью наших бытия и культуры.

Если ставить цель изучать идеи, то, чтобы быть последовательным, их следует излагать по возможности ближе к тому виду, в каком они появились. Человек же как правило мыслит картинками [11]. Достаточно аккуратное воспроизведение их машинными средствами или средствами полиграфии и будет, по-видимому, наилучшим м-комиксом, реализующим применение изучаемой идеи.

Поскольку “индустриальная” точка зрения важна для исследований в области искусственного интеллекта, м-комиксы дадут возможность продвинуться и в этой проблеме. В этой связи можно заметить, что если обычные тексты приспособлены для изложения алгоритмов для одного процессора, то м-комиксы помогут при составлении алгоритмов для параллельных вычислений, а человеческий мозг скорее всего так и работает: мышление картинками и естественность м-комиксов служат тому подтверждением.

Против идеи м-комиксов выдвигается несколько возражений. Обсудим важнейшие из них более подробно.

Одно из возражений базируется на необходимости унификации текстов: люди думают по разному, а понять текст должны все одинаково. Такова культурная роль стандартов. Быть может, поэтому наблюдаем такой консерватизм культуры, такую нетерпимость к нарушению стилевых норм, особенно применительно к письменным[1] текстам (когда нет обратной связи с адресатом). Зачастую автор совершает над собой и, что уже хуже, над читателем насилие из "чувства долга", и это несмотря на условность культурных норм!

Действительно, если не учитывать это обстоятельство, м-комикс может не читаться из-за своей неоднозначности. Эта неоднозначность указывает на то свойство человеческого мышления, что думая над одной задачей, человек параллельно с этим решает и множество других, ассоциирующихся с ней задач, накопленных его опытом. Одна картинка, стоящая перед мысленным взором а, если быть последовательным по отношению к строгости — один м-комикс, может содержать решение очень большого числа задач, подобно тому, как одна идея может работать в самых разных ситуациях.

Это не случайно: м-комикс является моделью явления, она получается отбрасыванием всего несущественного, так что разные явления часто имитируются одной и той же моделью. Сама идея (как правило тривиальная, будучи сформулирована в чистом виде) уже является моделью явления, рафинированного до тривиальности, однако, такая тривиальность зачастую облегчает решение трудных задач. В этой связи достаточно вспомнить принцип Дирихле, идея, если она часто встречается, кажется естественной, но именно поэтому выглядит тривиально, будучи сформулирована в чистом виде и не всегда заметна в контексте сложной задачи. На это возражение можно ответить так. Во-первых, достаточным основанием для написания м-комикса послужит наличие широкого круга адресатов, которые правильно поймут содержащиеся в нем идеи доказательства. Во-вторых, однозначность чтения можно при желании обеспечить комментариями, к которым по мере необходимости может обращаться читатель.

В-третьих, семантически м-комикс, как, впрочем, и тексты многих доказательств, выполненных традиционно, может содержать один смысл, а текст расшифровки (прочтения) — другой. Этот эффект может проявиться, если автор текста и его читатель не являются современниками друг друга или (и) говорят на разных языках. С аналогичной ситуацией приходилось сталкиваться в астрономии (и в хронологии) при изучении астрологических текстов, а также и в химии при изучении текстов алхимических. Современная трактовка математических результатов, полученных в Древнем Мире и в Средневековье (например, магических квадратов и иррациональных чисел), разумеется, не использует магии и мистики. В более близком к нашему времени тексте книги [16] читателю, по мнению ее переводчика, могут встретиться доказательства с кажущимися в них пробелами и ошибками — так изменилась за сорок лет терминология, используемая в теории функций комплексной переменной.

С аналогичной ситуацией можно часто столкнуться во всех науках. При исследовании любого достаточно сложного явления необходимо идти на компромисс с природой и решать не исходную задачу (иногда даже сформулированную нестрого или вовсе некорректно), но другую, похожую на нее, для которой удается построить математическую модель. При этом исследователь стремится соблюсти следующий принцип: в модели должны быть учтены все факторы, влияние которых на это явление примерно одинаково по величине.

Другое возражение состоит в том, что м-комикс явно опирается на интуицию, которая может иной раз ввести в заблуждение. Многочисленные примеры подобного рода (кривая, имеющая площадь, область, площади не имеющая и т. п.) приведены в книге [7].

На это возражение мы уже частично ответили при определении понятия строгости. Речь идет отнюдь не о всевластии интуиции: м-комикс должен содержать рецепт приготовления формального доказательства, а само доказательство с помощью такого текста должен суметь приготовить читатель. Речь идет о явном допущении интуиции при наличии "ответственности". Это

[1]Мы понимаем, что процесс шифровки текста связан с насилием над собой; хотя, увы, такая деятельность необходима. Но часто то, что пишется "запоем", "запоем" и читается. Если же текст не хочет ложиться в прокрустово ложе стандартов, то над ним автор совершает насилие, а также над собой и над читателем.

отражает общий философский принцип верификации, который проявляется постоянно: в физике имеет принципиальное значение только сама возможность наблюдать интересующую величину, а не то, располагает ли человечество необходимыми для этого средствами — таково понятие наблюдаемой. Точно так же в логике важна только принципиальная возможность проверить истинность утверждения алгоритмически за конечное число шагов, а не мощность современных ЭВМ — таково понятие конечности. Точно так же понятие строгости — это понятие формальной верифицируемости.

Третье возражение заключается в относительной сложности написания м-комикса. Ответ: разумеется, построение изящного м-комикса — дело весьма сложное. Но, во-первых, традиционные тексты доказательств являются частным случаем м-комиксов, а использование дополнительных возможностей, предоставляемых современными ЭВМ — дело добровольное. Они часто упрощают разбор доказательств, а само написание м-комикса ведет к прояснению движущих доказательств идей. Во-вторых, эта проблема не стоит при написании учебников — здесь оправданы любые усилия автора. До сих пор речь шла о строгости как о возможности формализации, однако, это понятие можно обобщить. Человеческое мышление нечетко, есть различные уровни четкости изложения (и соответствующие культурные стандарты), которые образуют целую иерархию. Так уровень четкости у математика ниже, чем у ЭВМ, у физика — чем у математика, у инженера — чем у физика, у гуманитария — чем у инженера (возможно и более детальное структурирование). Назовем уровнем строгости мысли тот уровень четкости, к которому эту мысль может привести читатель, если вести рассмотрение с методической точки зрения, или к которому она объективно может быть приведена человеком, если рассмотрение ведется с философских позиций.

Нечеткое мышление более мощное, оно быстрее приводит к результату (или к ошибке!). Абсолютно четкое мышление у современных ЭВМ, "творческие" способности которых общеизвестны. С другой стороны, та же самая мысль, но переведенная на более высокий уровень четкости, ценнее. Получить результат легче на более низком уровне четкости, а далее следует повышение его уровня четкости — то есть формулировка, обоснование... и, наконец, изложение, сначала в устной (лекция, доклад) форме, а, затем и письменно.

Обратим далее внимание на устное изложение доказательств. Можно с уверенностью сказать, что идея м-комикса изначально содержалась в них (конечно, в расчет принимаются лишь доказательства из достаточно хорошо читанных лекций). Предпочтение в них всегда отдавалось рассказу о тех идеях и методах, которые привели к доказываемому результату. Те лекции, которые были перегружены излишними подробностями (длинными выкладками, например) справедливо вызывали скуку вместо внимания: "Можно поспать, а доказательство разберу по учебнику".

Такой отход от чрезмерного увлечения формальными совершенствами текста доказательств наметился в 20 столетии. Раньше наоборот, качество устного доказательства оценивалось степенью его формализованности, то есть приспособленности к непосредственному перенесению в учебник. К примеру, книга [17] является почти не обработанной записью лекций П. Л. Чебышева по теории вероятностей, проведенной одним из его слушателей А. М. Ляпуновым.

Схемы доказательств

Таким образом, приходам к вопросу о роли и возможностях идеи м-комиксов и ее практической реализации современными компьютерными средствами при изложении математических результатов для аудитории. По нашему мнению лекционный вариант м-комиксов, известный, кстати, значительно более своего письменного аналога, — это схемы доказательств. Разумеется, лекция, посвященная доказательству какой-либо теоремы, сама является скорее м-комиксом, чем формальным доказательством, при условии, что прочитана она хорошо! Согласно легендам, в древности часто в ответ на вопрос ученика почему верен тот или иной факт из геометрии, учитель, рисуя на песке чертеж, давал единственный к нему комментарий: "Смотри".

Необходимо отметить, речь сейчас идет об *учебных* лекциях. Наличие дополнительной зрительной информации, привносимой в доказательство с экрана или с плакатов, конечно, упрощает и ускоряет его процесс, но известно, что профессионалы-математики, в МИАНе, например, предпочитают во время докладов смотреть не на экран, но на доску, регулируя таким образом скорость подачи докладчиком нового материала. В этом примере хорошо заметно различие между собственно математическим и математико-педагогическим творчеством.

Основные требования, предъявляемые к приводимым в лекции схемам доказательств таковы. Схемы доказательств должны быть хорошо структурированы; по возможности не следует перемежать этапы самого доказательства с, пусть даже одинаковой или меньшей, чем у них, сложности, доказательствами вспомогательных утверждений. Схема доказательства хороша, если все пункты, из которых она состоит требуют от слушателя примерно одинаковых усилий для их восприятия.

Отрицательные последствия отсутствия у докладчика опыта подачи слушателям схем доказательств отмечены в предисловии к книге [18]: неудачи в занятиях математических кружков при МГУ в 1935-1937гг. в значительной мере были связаны с господствовавшим тогда стилем — изложением материала *самими* школьниками, в оптимальном случае хорошо разобравшимися в докладываемом материале, но не имевшими, разумеется, никакого лекционного опыта и не обладавшими еще достаточной эрудицией.

Приведем пример схемы доказательства формулы Эйлера для многогранников, давно входящей в золотой фонд популярной математики, но, увы, не входящей в школьный курс геометрии, несмотря на то, что теория графов, к которой фактически и относится формула Эйлера, уже давно имеет не меньшее значение, как для самой математики, так и для ее приложений, чем, скажем, признаки равенства треугольников.

Теорема. Для любого простого многогранника (получаемого из шара отсечением сегментов или их частей, оставшихся после предыдущих отсечений) справедлива формула: $B - P + \Gamma = 2$, где B — число вершин многогранника, P и Γ — числа его ребер и граней соответственно.

Комментарии. Обычно эта теорема доказывается ученикам 6 или 7 классов, посещающих занятия Вечерней математической школы при Московском Математическом Обществе, за одно двухчасовое занятие. Разумеется, в такой аудитории нет возможности пользоваться никакими теоремами стереометрии. Тем не менее, результат Эйлера (точнее Декарта-Эйлера, [19]), переходя к соответствующим характеристикам плоских графов, удается получить даже в обобщенной форме с учетом возможной несвязности рассматриваемого графа.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

1. Спроецировать поверхность многогранника на объемлющую его сферу, с центром внутри многогранника.

Вопросы по ходу изложения.

А. Какие линии будут образами ребер многогранника?

Б. Что произойдет с суммой $B - P + \Gamma$ при проецировании?

2. Стереографически спроецировать сферу с полученной на ней сеткой дуг окружностей на плоскость, сферу не пересекающую. Вопросы по ходу изложения те же, что и в пункте 1.

3. Обобщить задачу: ввести (если этого не было сделано на предыдущих занятиях) понятие графа с произвольными линиями в качестве ребер и поставить для него вопрос о сумме $B-P+\Gamma$.

4. Упростить граф: найти в нем все концевые вершины (степени 1, понятие вводится по ходу изложения), убрать их вместе с выходящими из них ребрами и повторить эту процедуру, пока на то есть возможность. Проследить за изменением суммы $B - P + \Gamma$.

5. Упростить граф: найти в нем все вершины степени 2, убрать их, а пару ребер, им соответствующую, заменить одним и повторить эту процедуру, пока на то есть возможность. Проследить за изменением суммы $B - P + \Gamma$.

6. Упростить граф: найти в нем все петли и кратные ребра (эти понятия вводятся тут же), убрать петли, а от кратных ребер оставить по одному. Проследить за изменением суммы $B - P + \Gamma$.

7. Если возможно, повторно проделать процедуры пунктов 4-6.

8. Упростить граф: заменить в нем любое ребро с его концевыми вершинами одной вершиной, соединенной со всеми вершинами, с которыми были соединены две убранные вершины и только с ними. Повторить эту процедуру, пока на то есть возможность. Проследить за изменением суммы $B - P + \Gamma$.

9. Проделать процедуру пункта 6. Прийти к графу без ребер, для которого сосчитать сумму $B - P + \Gamma$ можно без труда. Ввести понятие связной компоненты в графе (прообраза каждой из полученных в результате всех упрощений вершин).

Вопрос по ходу изложения: к скольким вершинам приведется граф, соответствующий вершинам и ребрам простого многогранника?

10. Обобщить (если время и внимание аудитории позволяют) доказанную формулу Эйлера на (некоторые) непростые многогранники переходом к торическим графам.

КОММЕНТАРИИ К СХЕМЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

1. Краткие комментарии заключены в скобки в самом тексте.

2. Можно сделать отступление и рассказать о стереографической проекции подробнее, если контингент слушателей это позволяет.

3. На нестрогость понятия "произвольной" линии следует закрыть глаза: доказательство теоремы по приводимой схеме можно проводить и для случая задания ребер отрезками прямых и дугами окружностей, но это очень его удлиняет. Кроме того, обычно на следующих занятиях ученикам рассказывается теорема о возможности линейного вложения в плосость любого планарного графа [20]. Потому же откладывается введение термина "плоский граф", тем более, что сразу после доказательства теоремы будет и ее применение: доказательство непланарности простейших графов: полного на 5 вершинах и полного двудольного на 3 парах вершин.

4-6. Логически эти упрощения не обязательны: достаточно упрощения из пункта 8 и стирания петель с сохранением суммы $B - P + \Gamma$. Но практика изложения доказательства по приведенной схеме показывает, что восприятие самого сложного из преобразований графа (п.8) следует подготовить рассказом более простых преобразований — стирания вершин степеней 1 и 2, петель и кратных ребер. Кроме того, данная часть схемы дает учащимся содержательный пример *алгоритма*, что будет для них хорошим подспорьем в дальнейшем изучении информатики.

10. Этот пункт, разумеется, не обязателен.

Ограничение изложения материала лекций только схемами доказательств дает, кроме того, прекрасную возможность для преподавателя проводить контрольные и опросы по данной теме неформально, предлагая учащимся не просто повторить (пересказать) изложенный в лекции материал, но и ответить на содержательные по нему вопросы о детализации изложения тех или иных частей доказательств, в ней приведенных.

Отдельные темы (фрагменты, уроки) учебников для среднего образования по любому предмету должны, по нашему мнению, быть составлены (созданы) самими учащимися. При этом может сохраниться внутренняя логика изложения и восприятия материала, присущая школьникам, и поэтому более понятная для них и лучше ими воспринимаемая. Педагог, взявшийся обработать полученный им от учащихся материал, должен весьма бережно подходить к сохранению стиля и логики изложения рассматриваемой темы, гораздо бережнее, нежели редактор научного или художественного журнала: читать и изучать текст будут дети.

В таком способе написания школьных учебников, разумеется, просматриваются и слабые стороны, основной из которых, a priori, видится трудность в сопряжении отдельных, ярко изложенных тем, с отходами от традиционного способа изложения, в единый текст — задача, очевидно, для самих школьников неразрешимая.

В качестве статистического эксперимента могут оказаться очень полезными конкурсы доказательств в лекционных курсах, проводимых в нескольких школах (вузах). В них мыслится изложение различных доказательств одних и тех же теорем. Результаты работы (например, за полгода или год) фиксируются и сравниваются по различным характеристикам (процент усвоения, наличие стандартных ошибок при опросах и т.п.). В учебные пособия попадают победители — доказательства, оказавшиеся оптимальными по заранее установленным критериям.

Такой способ составления учебных пособий (автор у которых коллективный) может устранить по крайней мере некоторые из недостатков существующих учебников: даже лучшие из них написаны неодинаково хорошо в разных своих частях. Их автор — специалист в одной группе излагаемых вопросов вполне может иметь свои “излюбленные” темы, изложение которых будет получаться у него лучше остальных. Кроме того, в тех главах учебников, где для полноты излагаются классические результаты, почти неизбежно возникают заимствования.

Выводы для преподавания

1. Зрительный образ процесса доказательства, зафиксированный в м-комиксе, является в большой мере и ответом на вопрос, вынесенный в заглавие книги [14], “как решать задачу?”, в которой автор впервые показывает математику in statu nascendi (в процессе рождения), чего никогда ранее не показывали ни ученикам, ни учителям, ни широкой публике. Д. Пойа говорит здесь же, что оба аспекта математики: индуктивный (экспериментальный) — ему и посвящена книга — и дедуктивный (евклидов) столь же стары, как сама математическая наука. Следует отметить, что вывод этот справедлив для любой науки, не только для математики, и что исследование динамики обоснования результата важно для математики также, как и исследование динамики его получения.

Переход к использованию м-комиксов в доказательствах способен не только создавать иллюзию самостоятельной деятельности, как это зачастую получается при работе школьников с компьютером: “наука — это то, что можно сделать на машине, кроме игр, сверх школьной программы”, но и приложить их компьютерную активность к еще не решенным задачам. Примеры задач, с формулировкой, не требующей специальной терминологии, в исследовании которых компьютер может оказать очевидную помощь, приведены в [21]. Наиболее известная из них — это задача о “числах-градинах”: всегда ли получим 1, если, взяв натуральное число N, перейдем к $N/2$, если оно четно, или к $3N{+}1$ в противном случае, и повторим эту процедуру многократно?

2. Вместо формализованных текстов доказательств для понимания того, что сделали их авторы, заинтересованному читателю более удобно иметь перед собой четкую систему ссылок на последовательно используемые вспомогательные промежуточные утверждения, очевидные для него или с уже знакомыми ему доказательствами. Такая структура текстов доказательств, напоминающая систему указателей правильного пути на дереве поиска в библиотеках или в банках данных, позволяет значительно удобнее представлять саму динамику процесса доказательства. В системе образования указанную динамику в рассуждениях надо демонстрировать и использовать, как можно раньше (в начальной школе), причем ее применение автоматически дает возможность оценки учащихся, как с точки зрения скорости прохождения дерева поиска доказательства, так и по достигнутой его глубине.

Одним из уже достигнутых в этом направлении результатов следует считать выход в свет таких задачников, как, например, [22], в которых, наряду с условиями задач и подробными их решениями, есть разделы “первых-вторых указаний” и “третьих указаний”, подсказывающие читателю, заинтересованному в самостоятельном решении задач, необходимые возможные его этапы. Применение компьютеров позволит в дальнейшем вводить необходимый динамизм при изложении материала и в более крупном масштабе: в пределах одной лекции, занятия, темы. Запись соответствующим образом начитанного материала (с возможностью воспроизведения динамики изложения!) будет являться естественным обобщением опорных сигналов — одного из главных элементов методики Шаталова.

3. Важно представлять эволюцию отношения к понятию строгости доказательства у школьника.

В начале обучения большинство из них не имеет сколько-нибудь отчетливого понимания того, что такое доказательство, хотя спять-таки большинство владеет некоторыми устными приемами доказательной речи (знает в каких случаях следует употреблять элементарные логические связки типа “если, то”, “значит” — в смысле следования и т. п.).

Далее, в какой-то момент может прийти понимание того, в каком случае утверждение можно считать доказанным. Спустя немного времени видимая четкость и формальность в рассуждениях возводятся в абсолют, и школьник (уже увлекшийся математикой) становится привередливым в мелочах. В этот период может прийти понимание того, что такое строгое доказательство. Этим увлечением надо воспользоваться и начать разбирать доказательства отрицательных утверждений, в особенности доказательства невозможности, требующие формализации, казалось бы, и без того четких понятий. Удачной с этой точки зрения темой являются построения одной линейкой и конкретно задача о невозможности с помощью одной линейки опустить на заданную прямую перпендикуляр. Полезен также факультатив по логике и теории множеств.

Как для формирования понятия строгости, так и для того, чтобы дать ученику возможность "самому провести" доказательства трудных и глубоких теорем, можно использовать м-комиксы, постепенно готовя его к переходу на новый уровень — понимания того, что м-комикс является строгим доказательством, если адресат (школьник) может его формализовать. К этому этапу относятся многочисленные задачи восстановления решения по основной идее (приводимой в задачниках, но, к сожалению, далеко не во всех, в разделе "указания"), написания традиционного варианта доказательства по предлагаемому м-комиксу, задачи на оформление (имеется в виду, конечно, не каллиграфия). К сожалению, оформлению никто не учит: у простых и типовых задач такое же и оформление, а требовать от класса решения трудных задач невозможно. Математики-профессионалы и то относительно редко сталкиваются со сложными (для них) задачами и приобретают навыки оформления результатов весьма поздно: обычно первая статья автора много раз возвращается ему из редакции на доработку.

Задачи восстановления решения по м-комиксу могут помочь в решении этой проблемы. Здесь уместна аналогия с начинающими поэтами и художниками, которые во время учебы пишут подражательные вещи. Подобные упражнения сами по себе могут явиться источником новых результатов.

Конечно, заинтересовавшемуся математикой школьнику надо показать различие между формализмом и строгостью, однако здесь следует избегать прямых нотаций: это его увлечение формализмом вызвано необходимостью усвоить математические рассуждения и стандарты изложения, а также научиться доводить мысль до конца, и ученик должен вдоволь наиграться в эти игры. Общее правило для преподавателя здесь весьма просто: дать ученику возможность самостоятельно решать как можно больше задач.

В конце концов ученик, "устав от обилия формальных выкладок", должен прийти к пониманию того, что "математика — это язык" (Гиббс). Чтобы получать удовольствие от доказательств, надо уметь говорить на соответствующем языке, но не быть многословным: собеседник (учитель, лектор, слушатель) и сам может многое сказать по поводу решаемых задач и доказываемых теорем.

На следующем этапе приходит понимание того, что рассуждение доказательно, если адресат может его формализовать. Подобным образом и математическое определение есть "доказательство существования" формального объекта, соответствующего интуитивному представлению о его реальном прототипе. Однако этот этап, если вообще наступает, то уже после школы.

Литература

1. Сборник "Математическое просвещение". Новая серия. Вып. 1-6. - М.: ГИФМЛ. - 1958-61.

2. Ленг С. Алгебра. - М.: Мир. - 1968.

3. Литтлвуд Дж. Математическая смесь. - М.: ГИФМЛ. - 1962.

4. Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. - М.: Наука. - 1972.

5. Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. - М.: Наука. - 1982.

6. Бурбаки Н. Алгебра. - М.: ГИФМЛ. - 1962.

7. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. - М.: Наука. - 1969.

8. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука. - 1978.

9. Шварц Л. Анализ. Т. 1. - М.: Мир. - 1972.

10. Успенский В.А. Что такое нестандартный анализ?. - М. Наука. - 1987.

11. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. - М.: Советское Радио. - 1970.

12. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. - М.: Наука. - 1989.

13. Хинчин А. Я. Три жемчужины теории чисел. - М.-Л.: ОГИЗ, ГОСТЕХИЗДАТ. - 1947.

14. Пойа Д. Как решать задачу. - М.: Учпедгиз. - 1961.

15. Чайковский Ю. Изумительная асимметрия // Знание — сила. - 1981. - № 2. - С. 16-19.

16. Титчмарш Е. Теория функций. - М.: Наука. - 1980.

17. Теория вероятностей. Лекции академика П. Л. Чебышева, читанные в 1879-80гг. По записи А. М. Ляпунова. - Изд. АН СССР. - М.-Л. - 1936.

18. Сборник задач Московских математических олимпиад. (Сост. А.А.Леман). - М.: Просвещение. - 1965.

19. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика?. - М.: Просвещение. - 1967.

20. Басакер Т., Саати Т. Теория графов. - М.: Наука. - 1974.

21. Интервью с профессором Рональдом Грэхемом // Квант. - 1988. - № 4. - С. 21-26.

22. Ваховский Е.Б., Рыбкин А.А. Задачи по элементарной математике. - М.: Наука. - 1969.

23. Грэхем Р. Начала теории Рамсея. - М.: Мир. - 1984.

Канель-Белов Алексей Яковлевич,
профессор МИОО,
доктор физ.-мат. наук.

Email: kanelster@gmail.com

Келлин Николай Сергеевич,
старший научный сотрудник Института
прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
кандидат физ.-мат. наук.

О деятельности ФМОП в 2013 г.

В 2013 г. Фонд математического образования и просвещения (ФМОП) осуществлял следующие виды деятельности по разделам: поддержка образовательных инициатив, в том числе образовательного математического портала[1], издательская деятельность, благотворительная деятельность:

- Методическая поддержка и обеспечение экспериментальными учебными материалами учащихся гуманитарных классов ГОУ СОШ № 179, № 1314 (ныне учебный комплекс № 2090) и № 261 г. Москвы.
- Поддержка мероприятий по работе со школьниками: Турнир Городов, Турнир Ломоносова, Летняя конференция Турнира Городов.
- Выпуск журнала "Математическое образование", учредителем которого ФМОП является; в 2013г. вышли номера 1-2(65-66), 3(67), 4(68).
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей и участников математической олимпиады САММАТ, г. Самара, апрель 2013 г.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей и участников регионального тура Всероссийской Олимпиады школьников, г. Королев, апрель 2013 г.
- Предоставление изданий Фонда для участников Межрегигнальной Конференции "Предельные возможности образования в XXI веке: вызовы, цели, ценности, технологии" г. Москва, апрель 2013 г.
- Предоставление изданий Фонда для участников XI Колмогоровских чтений, г. Ярославль, май 2013 г.
- Приобретение учебных пособий, в частности, материалов для подготовки к ЕГЭ для учащихся 11 классов нескольких школ г. Москвы.
- Предоставление безвозмездных услуг организациям и физическим лицам, работающим в области математического образования.
- Организация бесплатной подписки на журнал "Математическое образование" ряду организаций и физических лиц, работающих в области математического образования.
- Поддержка ряда вновь созданных некоммерческих негосударственных организаций в области научных и научно-методических исследований по математике.
- Предоставление номера журнала "Математическое образование" с юбилейными материалами о СУНЦ МГУ для празднования 50-летия СУНЦ.
- Приобретение книг для библиотеки Свято-Алексиевской Пустыни.

[1] www.lomonosovclub.com

О выходе книги И. П. Костенко

Вышла из печати книга члена редколлегии нашего журнала Игоря Петровича Костенко "Проблема качества математического образования в свете исторической ретроспективы".

Книгу можно приобрести:

- В редакции журнала по адресу: Москва, ул. Авиамоторная, 6 (помещение ВНИИ по переработке нефти), офис 305. Телефон для справки (499) 763 61 97.
- В книжном магазине МЦНМО, Москва, пер. Б. Власьевский, д. 11.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.npcmapro.ru   Раздел: Партнеры, журнал “Математическое образование”.

Журнал в электронном виде размещается формате PDF в архиве по указанной ссылке.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2013 год (включая стоимость пересылки) – 80 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2013 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 70 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ) и Российском индексе научного цитирования (РИНЦ).

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138
9 771992 613776 >