ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год тринадцатый

№ 2 (50)

апрель – июнь 2009 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения

117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 2 (50), 2009 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2009 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.06.2009 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г.Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (50), апрель – июнь 2009 г.

Содержание

От редакции. К выходу юбилейного 50-го номера журнала 2

Проблема выпускного/вступительного экзамена

Ю. А. Неретин. Вступительно-экзаменационный пасьянс: Россия и Запад 3

К итогам реформы математического образования

И. П. Костенко. Корни, ветви и "ягодки" реформы-1970 14

Учащимся и учителям средней школы

В. Б. Дроздов. Алгебраический метод решения задач с параметрами 24

Е. В. Потоскуев. Опорные задачи и теоремы при нахождении площадей треугольника и черырехугольника 31

Содержание образования

А. И. Щетников. Линейная перспектива в изобразительном искусстве и исходные идеи проективной геометрии 41

Анонс книги для учителя

В. В. Цукерман. О построении теории основных элементарных функций 51

Учебное пособие в журнале

С. Кулешов, А. Салимова, С. Ставцев. Лекции по аналитической геометрии (продолжение) 55

А. И. Саблин. События и вероятности 70

Образовательные инициативы: история и современность

Л. А. Конченко. Дальновидный образовательный проект А. Н. Колмогорова 77

К выходу юбилейного 50-го номера журнала

От редакции

Уважаемые читатели и авторы журнала “Математическое образование”, сотрудники коллектива редакции! Поздравляем вас с выходом юбилейного 50-го номера журнала. Надеемся, что журнал и в дальнейшем будет вносить свой посильный вклад в распространение и развитие российского математического образования.

В этом юбилейном номере мы постарались как можно более широко представить разделы, охватываемые публикациями нашего журнала.

Первые две статьи публицистические. Доктор физико-математических наук, сотрудник математического факультета Венского университета Юрий Неретин размышляет о ситуации вокруг Единого Государственного Экзамена (ЕГЭ), сопоставляет ее с опытом зарубежных стран и предлагает некоторые пути решения возникших здесь проблем. О реформе математического образования 1970-х годов, ее истоках, методах проведения и последствиях пишет постоянный автор журнала, член редакционной коллегии Игорь Петрович Костенко.

Наша постоянная рубрика для учащихся и учителей средней школы представлена и алгебраическим, и геометрическим материалом. Об алгебраических методах решения задач с параметрами, которые остаются актуальными для решения задач ЕГЭ уровня С, написано в статье опытнейшего преподавателя из Рязани Виктора Борисовича Дроздова. Профессор кафедры алгебры и геометрии Государственного Университета г. Тольятти, Почетный работник общего образования РФ Евгений Викторович Потоскуев представил очень полезную для обеспечения курса геометрии статью об опорных задачах и теоремах при вычислении площадей.

Постоянный автор из Новосибирска Андрей Иванович Щетников продолжает серию публикаций о семинарах для школьников цикла “Применимая математика”. Данный семинар по теории перспективы и началам проективной геометрии описан как единый методический комплекс (в т.ч. и с методологическим обоснованием), поэтому относим статью к рубрике “Содержание образования”.

Методический раздел — презентация книги для учителя, написанной преподавателем с 50-летним стажем, профессором Московского государственного открытого педуниверситета им. Шолохова Виталием Владимировичем Цукерманом. Книга посвящена строгому изложению теории действительных чисел и основных изучаемых в школе элементарных функций. В заметке разъясняется концепция книги, а также некоторые особенности изложения материала.

В рубрике “Учебное пособие в журнале” — продолжение лекций по аналитической геометрии для слушателей Военно-Воздушной инженерной академии им. Жуковского. Авторы (профессор С. Кулешов, доценты А. Салимова и С. Ставцев) нашли интересные методические подходы к изложению многих вопросов этой традиционной тематики. В этой же рубрике продолжение элементарного введения в теорию вероятностей для студентов непрофильных специальностей. Автор — доцент Московского государственного университета природообустройства, член редколлегии журнала Александр Иванович Саблин.

В заключение в статье Исполнительного директора “Клуба ФМШ Колмогорова” Ларисы Александровны Конченко рассказано об уникальном образовательном проекте, реализованном по инициативе и при личном участии Андрея Николаевича Колмогорова — физико-математической школе-интернате при МГУ (ныне школа им. А. Н. Колмогорова СУНЦ МГУ). Современная организационная форма — некоммерческое партнерство “Клуб ФМШ Колмогорова” — позволила выпускникам объединиться для оказания помощи школе в непростых современных условиях.

Вступительно-экзаменационный пасьянс: Россия и Запад

Юрий Неретин

В статье проводится анализ проблем Единого Государственного Экзамена (ЕГЭ) с учетом зарубежного опыта. Обсуждаются альтернативные проекты организации выпускной/вступительной кампании по математике.

Мы могли бы пройти по суше
Мимо болот и рек...

Пит Сигер "Баллада о капитане"
(вольный перевод Александра Дольского)
Pete Seeger "Waist Deep in the Big Muddy"

The Sergeant said, "Sir, with all this equipment
No man will be able to swim."
"Sergeant, don't be a Nervous Nellie,"
The Captain said to him.

Эта статья — попытка ответить на вопрос, что с нами происходит? Почему хорошие идеи, положенные в основу ЕГЭ, не удается воплотить в жизнь? Почему за 9 лет усилий по улучшению "контрольно-измерительных материалов" их все еще не удается улучшить? Почему нарастает снежный ком отрицательных последствий?

Более конкретно. Я часто слышал вопросы и риторические высказывания типа:

— Почему это не получается у нас, а получается в Германии (Австрии, Франции, Америке, Японии...)?

— У них получилось, и у нас постепенно получится!

— Это первый шаг реформ, потихоньку улучшится.

— Только в такой стране, как Россия, невозможно из-за тупости чиновников и коррупции сделать то, что в других странах давно и успешно делают!

В первой половине статьи я попытаюсь на эти вопросы ответить. Последовательная критика ЕГЭ в цели данной статьи не входит, но некоторые из его бед приходится по ходу дела упоминать.

Напомню, что основная идея ЕГЭ — написать единый вариант, который создал бы единую шкалу для всех выпускников школ. Далее он позволяет распределить всех выпускников школ по вузам и специальным средним учебным заведениям России. Как только в летом 2000 году прозвучала идея ЕГЭ, его оппоненты (как правило, активные профессионалы образования) заметили, что у нее есть ряд недостатков. Один из них (причем не главный) — в многолюдной стране со сложно устроенным образованием такой экзамен невозможно реализовать. Это профессиональная техническая проблема. Решить ее невозможно. И, кстати, ЕГЭ за 9 лет ее не решил. Ни по одному предмету. Единственный известный довод в пользу разрешимости данной проблемы — то, что "во всем мире так делают".

Предмет данной статьи (она основана на моих многочисленных разговорах с коллегами из Австрии, Германии, Голландии, Израиля, Норвегии, США, Франции, Швейцарии, Японии) —

обсудить: а что, собственно, люди в других странах делают, как у них устроены всеобщие экзамены, и что можно вообще делать.

Отсекающий экзамен Abitur (Германия 90-х годов, Австрия, Голландия)

Как многие слышали и читали, в Германии 90-х годов существовал общий выпускной экзамен в гимназиях, который одновременно был вступительным экзаменом в университеты. Только вот фактическая отметка на этом экзамене — "да/нет". Сдал успешно экзамен — идешь учиться в тот университет и на тот факультет, куда хочешь.

Читатель, немножко знакомый с реалиями образования, должен несколько удивиться. Да, было ровно так, как должно было быть. Да, в начале обучения у медиков и юристов было слегка тесновато. Студенты слушали лекции, стоя на подоконниках. Да, на матфаке Венского Университета (а это одно из моих мест работы) — 70 процентов естественного отсева.

Немцы все это терпели, а вот ввести экзамен в формате ЕГЭ не догадались. Почему-то медики на подоконниках были для них предпочтительней вышеупомянутого "варианта, устанавливающего единую шкалу".

Потом немцев это все-таки достало, и они ввели очень сложную систему многоэтапных экзаменов.

Выше я упомянул слово "гимназии". Это не все школы. А кроме того, эта система никак не касалась техникумов...

Никакого сходства между тогдашним немецким экзаменом и нашим ЕГЭ нет...

Многоуровневые экзамены (Франция, Израиль)

Французы. Их система экзаменов очень сложна. В первом приближении она выглядит так. Человек, желающий идти в Universite, выбирает себе направление дальнейшего обучения, сдает предметные экзамены BAC, уровень сложности которых зависит от направления обучения. Скажем, филолог, технарь и физик сдают разные экзамены по математике. По языку, впрочем, тоже.

Никакого единого для всех оценивающего варианта...

Выше я написал слово Universite по-французски. Дело в том, что перевод "Universite–Университет" не точен. Лучшие университеты называются "Grand Ecoles". Они проводят вступительные экзамены сами, а молодые люди готовятся к этим экзаменам два года после окончания школы.

Теперь Израиль. Их система попроще (но и страна поменьше). Человек (по своему выбору) при выпуске из школы сдает предметные экзамены одного из четырех уровней. Например, по математике это наборы содержательных задач, требующие нормальных письменных решений. Итог экзамена – уровень плюс оценка на данном уровне.

Университеты, соответственно, сообщают, какой уровень их интересует.

Наряду с результатами экзаменов учитывается общий тест IQ (Intellengence coefficient).

Мои французские собеседники считали свою систему очень дурной (была статья Доценко в "Науке и Жизни"[1], сейчас можно посмотреть, оправдались ли его мрачные предсказания). Но это (при всех минусах) — не ЕГЭ.

Израильтяне, напротив, отзывались о своей системе хорошо (и детали, о которых они рассказывали, на мой взгляд, очень разумны), но добавляли, что тест IQ естественным образом деградирует (по причине развития индустрии подготовки к тестам).

Удачность многоуровней системы в Израиле и сомнительный успех во Франции вряд ли объясняются достоинствами израильтян по сравнению с французами. И здесь я напомню основной "минус ЕГЭ", который был замечен тогда же в 2000 году.

Такой экзамен автоматически ставит школьное образование с ног на голову. Вместо проверки "знаний" (что бы это ни значило), он начинает (как его ни делай), определять школьную программу, и в итоге мы получаем экзамен, проверяющий преимущественно готовность к нему

[1] В. Доценко, Пятое правило арифметики, "Наука и жизнь", 2004, №12 — *Прим. ред.*

самому. Читатель может найти в интернете "демоверсии" вариантов по русскому языку. На них это видно очень четко.

А дальше мы заваливаем школу.

Понимая эту проблему, можно искать ответ на уровне технологии экзамена. В маленьком Израиле найти его легко. В большой Франции эти решения становятся проблематичными. А у нас проблем побольше, чем у французов (назову две, которые, возможно, покажутся читателю неожиданными: часовые пояса и необходимость контркоррупционной игры на уровне составления вариантов).

Многоуровневость экзамена дает дополнительные средства для поиска решения. Но стоит помнить, что французы, будучи в объективно лучшем состоянии, чем мы, решили свою задачу плохо (см. упомянутую статью Доценко). Унификация в образовании — вещь опасная.

Многоэтапные тесты (США)

В Америке есть три самых массовых системы тестирования, используемых при приеме в университеты и колледжи (но есть и другие). Общие тесты SAT-I (Scholastic Aptitude Test, их проходят большинство выпускников школ), промежуточные тесты ACT (American College Test) и сложные предметные тесты SAT-II (необходимые для хороших университетов).

Эти системы тестов являются добровольными, взаимодополняющими, а человек сдает их тогда, когда ему это удобно.

Наряду с итогами тестов (тестов разных и разноуровневых!!) университеты используют собеседования, эссэ (условно говоря, сочинения по специальности) и рекомендательные письма. Это непривычные для нас средства отбора, смысл которых сильно зависит от конкретной ситуации (средства, более замысловатые, чем это кажется на первый взгляд, и, по-видимому, хорошо отлаженные). Интерпретация результатов тестов, эссэ и рекомендательных писем находится в руках университетов (и вообще тамошние университеты, в том числе и государственные, обладают высокой автономией).

Те, кого это не устраивает (или не вполне устраивает), могут проводить вступительные экзамены, интересоваться дополнительной информацией (самой разнообразной); есть университеты, вообще не интересующиеся результатами тестов. Американские университеты не марширують под праведный свист кнута АмерГосОбрНадзора.

В связи с обсуждаемой сейчас проблемой, было бы бесконечно скучно обсуждать, чем хороша или плоха эта американская система (это не идиллия, совсем не идиллия, и в других странах все не так) и надо ли ее перенимать. Все равно мы ее не переймем. Хорошо бы сначала заимствовать не из Америки, а хоть откуда-нибудь поближе (Польши, Чехии, Бразилии, Чили...), уровень зарплат преподавательского состава. Ведь у нас разрушили нормальную систему вступительных экзаменов именно уровнем выплачиваемых зарплат. Если бы только систему экзаменов...

Но я отвлекся. Главное в этом обсуждении — никакого ЕГЭ и в Америке тоже нет. И в помине.

Забавно, что есть простой способ в самом деле приблизить ЕГЭ к "высоким американским стандартам". А именно — сделать ЕГЭ добровольным, и дать ему возможность свободно конкурировать с другими формами экзаменационного отбора.

Сейчас наблюдается картина, комичность которой почему-то не осознается нашим обществом. С одной стороны есть прогрессист и американофил Ярослав Кузьминов (ректор Высшей Школы Экономики), решительный сторонник (и, видимо, один из изобретателей) ЕГЭ — истинно оригинальной и глубоко российской формы экзаменационного отбора. А один из его оппонентов — коммунист Смолин Олег Николаевич — борется за то, чтобы сделать ЕГЭ добровольным, и тем самым приблизить его к "американским стандартам".

Как раскладывать пасьянс?

Автору хотелось бы надеяться, что он ответил на вопрос: "Почему в других странах проводят ЕГЭ, а их образование до сих пор живо?". Ответ более чем прост: потому что ЕГЭ там не проводят.

Во всех многолюдных “цивилизованных” странах раскладывается свой собственный экзаменационно-вступительный пасьянс, чаще сложный, а иногда очень сложный (Франция, современная Германия, США). Россия — страна очень сложная, а образование в ней еще не удушено окончательно. Пока мы не достигнем успешно уровня современной Нигерии или Республики Чад, никаких простых унифицированных решений вступительно-экзаменационной проблемы в России быть не может.

Сейчас диалог правящих кругов с обществом в отношении ЕГЭ ведется в стиле “против лома нет приема”, и, ввиду отсутствия “другого лома”, обсуждение данной проблемы является пустым сотрясанием воздуха (или интернета). Я, однако, попытаюсь обсудить разные возможные карточки экзаменационного пасьянса.

Унифицированный выпускной школьный экзамен

Введение такого экзамена у нас объясняется тем, что школы расслоились на много уровней и типов. Но мне кажется, что это скорее аргумент против унифицированного экзамена.

Выше сказано об унифицированном экзамене в гимназиях Германии и Австрии. Но дело в том, что гимназии сами жестко унифицированы (и, кажется, это проводится жестче, чем унификация школ при большевиках). С другой стороны, в не-гимназиях экзамен — другой, а сами эти школы, в свою очередь, унифицируются.

В Норвегии в самом деле существует унифицированный выпуской и одновременно вступительный экзамен. Но Норвегия — малолюдная страна (с необычным социально-экономическим устройством), в отношении высшего образования в ней скорее естественно видеть область Северной Европы, а не страну. А унификация экзаменов достигается ценой зверской унификации школ.

Повторю, именно из-за расслоения школ унифицированный выпускной экзамен у нас может оказаться орудием разрушения.

Тестирование

Тестирование вообще и вступительно-экзаменационное тестирование в частности — американское изобретение. В Америке тесты сохраняют свое значение, в других странах чрезмерное увлечение вступительными тестами отходит в прошлое. С отрицательными сторонами тестирования человечество ознакомилось, и здесь не место их обсуждать.

Но это не значит, что тестирование вообще есть зло, тесты вполне можно и нужно применять там, где они применимы.

У нас в 1997–2006гг. существовала система централизованного вступительного тестирования (организованная Хлебниковым). Она была добровольной для абитуриентов, а признавать ее или не признавать, — было делом вуза. Тесты были многоуровневыми. Сотни российских вузов признавали итоги добровольного тестирования. На пике система пропускала более 100 000 человек в год. Замечу, что это было “дешевое” мероприятие, не сопровождавшееся величественной маршировкой десятков тысяч людей (а обеспечением ЕГЭ ежегодно занимаются миллион человек).

К сожалению, и это тоже погибло под гусеницами бульдозера ЕГЭ.

А вот как раз такая система (или вот такие системы) могла бы быть одним из элементов нашего экзаменационного пасьянса.

Традиционные вступительные экзамены

В Японии лет 20 назад была введена система всеобщего тестирования, результаты которого обязятельны для всех университетов. Коллеги, с которыми мне приходилось разговаривать, до сих пор вспоминают ту эпоху с ужасом, и подчеркивают важность вступительных экзаменов. Самостоятельные вступительные экзамены в хорошие университеты давно вернулись, плохие университеты удовлетворены централизованным экзаменом.

Про Францию я писал выше. В Австрии несколько лет назад вернули вступительные экзамены на медицинских и ветеринарных специальностях. В Англии вступительные экзамены всегда были и, по-прежнему, в части университетов есть.

Традиционные вступительные экзамены — никакая не архаика. Это хороший инструмент, а на высокоинтеллектуальных или престижных специальностях они остаются самым эффективным средством отбора (но средством очень трудоемким и интеллектоемким).

Кстати, в 2004–2008гг. в МГУ удалось сменить тип математических вариантов на естественно-научных факультетах. В нормальных условиях это могло бы способствовать постепенному общему оздоровлению в приемно-экзаменационной сфере. Но и это тоже погибло под гусеницами бульдозера. МГУ подчинился ЕГЭ.

Устные экзамены

У нас наезд на устные экзамены (вступительные и семестровые) начался лет 20 назад. Основные лозунги за письменные экзамены: объективность, справедливость и контролируемость. Мы много на что насмотрелись за эти 20 лет, и что-то не видим в письменных экзаменах (и в ЕГЭ в особенности) ни объективности, ни справедливости, ни контролируемости. Не буду объяснять, почему это должно было случиться. Но это, так или иначе, случилось.

Замечу, что цель экзамена как контрольного мероприятия — проверка "системы знаний". Эта цель (по большинству предметов) относительно легко достигается экзаменом устным, о вот придумать адекватный письменный экзамен по математике — ой как непросто (причем он будет иметь упорную тенденцию к деградационному развитию, которой можно сопротивляться лишь при наличии жесткой воли).

Добавлю, что в данном случае борьба за объективность предполагает презумпцию негодности преподавательского состава. Но тогда и сами учебные учреждения следует признать негодными. А при одном и том же качестве преподавательского состава устный экзамен будет много лучше и гибче письменного.

Постепенное отступление устных экзаменов из вступительной сферы объясняется скорее не заботой о поступающих, а тем, что организаторам легче так защищаться в агрессивной социальной среде. А также большой трудоемкостью устного экзамена.

А теперь о мировой практике. Я, к сожалению, не расспрашивал последовательно коллег о степени распостраненности устных экзаменов во вступительной индустрии. Но в унифицированной экзаменационной системе Голландии такие экзамены присутствуют (комиссия: учитель плюс представитель центра). И их вернули в Германии в 2000-е годы.

ФИПИрование[2]

То, что у нас в просторечии называется "тестами ЕГЭ" — никакие не тесты, а КИМы (контрольно-измерительные материалы) — глубоко самостийное и незалежное изобретение российского бюрократического гения.

Напомню, что КИМы состоят из трех частей, из собственно теста, из задач, проверяемых машиной по ответу, и из задач, проверяемых вручную. Люди, особенно люди образованные и квалифицированные, глядя на КИМы, испытывают чувство раздражения, оно естественным образом начинается с тестов.

Автор много раз слышал и читал: "Хорошо, что в конце варианта есть нормально проверяемые содержательные задачи". К сожалению, не так уж много людей в состоянии проанализировать наиболее сложную часть варианта по математике. Именно она и является его наихудшей частью (по-моему, на этот счет у "профи" есть консенсус; кстати, в 2009 году очевидно, что так есть, но в 2000 году было очевидно, что так будет).

А вот вторая часть математических КИМов 2007–2008гг. с технически-профессиональной точки зрения забавна и заслуживала бы самостоятельного развития. Она очень неплохо сделана с точки зрения целей собственно отбора по IQ, но, к сожалению, вдребезги заваливает математическое образование (основная беда тут состоит в стандартности вариантов и их одноуровневости).

Кажется, наряду с независимым тестированием можно было бы ввести независимое ФИПИрование (варианты с машинной проверкой по ответу) на тех же принципах: многоуровневость,

[2]От ФИПИ — Федеральный институт педагогических измерений — *Прим. ред.*

добровольность для абитуриента, добровольность для вуза.

Различие ФИПИрования с тестированием (не в смысле формы, а сути): тест — мероприятие, требующее быстрых реакций, в ФИПИровании допускается размышление.

Замечу, что вузы могут признавать итоги тестирования (ФИПИрования) лишь частично, а именно, устанавливать минимальную планку, после которой они готовы рассматривать заявления. Это существенно упростило бы для них организацию вступительных экзаменов.

Варианты организации теста

Документ (или база данных) о тестировании (если мы хотим придавать этому документу универсальное значение) должен содержать информацию о точке, где оно проводилось. Просто иначе опять будет межрегиональное коррупционное соревнование по принципу "честность наказуема". Но любой человек, желающий учиться в другом субъекте, должен иметь возможность поехать туда и протестироваться там. В конкретном вузе или городском центре — вопрос дискуссионный. Сибирь и Дальний Восток — вопрос отдельный.

Еще можно организовать добровольно-обязательное унифицированное одноуровневое ПРОСТОЕ государственное тестирование. Но функции его должны быть предельно ограничены. Его, кстати, не обязательно устраивать в формате одновременного всеобщего мероприятия (и более того, лучше устраивать иначе). Информационная защита для тестирования (если я не ошибаюсь) проще, чем для экзамена, а из-за невысоких ставок ее не очень будут стараться пробивать.

В связи с этим стоит обсудить американский тест SAT-I. Он состоит из математики, Critical Reading, эссэ. Общая технология проведения SAT-I очень интересна.

Он разбит на семь 25-минутных, два двадцатиминутных и один 10-минутный промежуток. После каждого промежутка сдача работ и перерыв. Это позволяет создать хотя бы суррогат многоуровневости или многоэтапности. Тест устроен как гонка, но для разумного человека система снижает необходимость спринта на начальных участках.

Еще один элемент американских технологий (не знаю используется ли это в SAT-I): то, что максимальный балл может ставиться, например, за 85 процентов правильных ответов (ценность более высоких процентов сомнительна, ну их и не учитывают и никого не провоцируют; вот ЕГЭ пошло бы на пользу, если бы баллы выше нынешних 75 не считались).

Отдельная история — что там умеют то ли выравнивать сложность совершенно разных вариантов, то ли уметь оценивать с помощью вариантов разной сложности.

Стоит сравнить это с дуболомной структурой вариантов ЕГЭ.

У нас ведь тоже технологии разрабатывали, похоже, что и это забыто.

Но еще раз повторюсь. Если с помощью теста пытаться достичь чрезмерных целей, то он с замечательной гибкостью превращается в инструмент погрома.

Центро-Сканави

Есть еще одна старая идея российского происхождения, к которой можно было бы вернуться. По крайней мере, в отношении математических экзаменов.

Напомню, что 40 лет назад Сканави с группой сотрудников опубликовали знаменитый сборник задач для подготовки к вступительным экзаменам. Идея была в том, чтобы сделать "открытую базу данных", из которых приемные комиссии могли бы выбирать почти готовые задачи для вступительных экзаменов. Открытость базы компенсировалась ее размерами и разнообразием.

В отношении Мехмата или Физтеха эта идея, очевидно, не подходила. К сожалению, лучшие московские технические вузы в 80-90 годы "пошли другим путем", и путем дурным. Дело не в том, что они брали задачи "не из Сканави" — это, как раз, нормально, а в том, что у Сканави были определенные взгляды на тему "что такое хорошо, а что такое плохо", неявно выраженные составом базы данных; в 80-е годы все делалось хуже, чем было бы при выборке из этой базы. Кроме того "элементарная математика" (и вместе с ней поле для вступительных состязаний) была существенно обеднена по сравнению со взглядами Сканави.

А можно сделать вот что. На основе Сканави изготовляется несколько сот (или тысяч) комплектов из 4-6 одинаковых по смыслу и сложности задач. За час до экзамена компьютер в неком Центре случайным образом (но по хорошо продуманной программе) выдает хорошим вузам комплекты из 4-6 вариантов. Сохранность тайны лучше всего обеспечивается несуществованием тайны. А дальше включаются принтеры, экзамен пишется обычным порядком и обычным порядком проверяется. Можно на всякий случай дублировать проверку с помощью централизованной структуры.

Одно из редко отмечаемых слабых мест ЕГЭ — то, что у нас принципиально невозможно создать общую систему качественной проверки работ. А в хорошем вузе их хорошо проверят.

Другое слабое место ЕГЭ — проблема выравнивания сложности вариантов. Это накладывает на структуру и "идеологию" КИМов тяжелый отпечаток (в частности, влечет стандартизацию)... А сложность все равно не выравнивается. В рамках центро-Сканави никаких проблем с этим нет.

Теперь пара замечаний. Разумеется, не надо держаться за "букву Сканави". Это лишь отправная точка, далее базу вполне возможно пополнять (в том числе качественно новыми элементами). В частности, необходимо внести в нее задачи на доказательство.

Далее, понятно что буквальное "вбивание" Сканави в компьютер провоцирует коммерческий электронный ответ (скажем из Эквадора по законам Эквадора). По той же причине не желательно иметь базу окончательных формулировок задач. Этого можно избежать, включив в цепочку ручную доводку (произведенных компьютером) вариантов. Ее могут делать пары или тройки спецов, которых в ночь перед экзаменом (или на рассвете) сажают трудиться в тот же Центр (или куда-нибудь еще).

И, наконец, при таком подходе возможна и более тонкая игра (о которой мы уже забыли). Сложные варианты по математике могут быть нужны при отборе физиков, юристов, медиков... Но это же совершенно разные люди, и математику они пишут по разным причинам. В рамках Центро-Сканави самые разные специфические запросы вузов вполне можно учитывать. Хочешь — Сканави-classic, хочешь — Сканави с изюмом, хочешь — варианты по de facto расширенной программе, хочешь — казуистику, хочешь — шагистику. Не говоря уж о том, что должен выполняться запрос на уровень сложности варианта.

База должна быть полуоткрыта для всех, а ее состав должен быть предметом открытого обсуждения профессионалов. Управляться база должна университетскими кругами, а не министерскими структурами (которые в момент превратят ее в груду мусора).

Боже упаси совмещать эту базу с Федеральным Банком Заданий, пусть тамошние банкиры распоряжаются тамошними нетленными сокровищами.

"Развитие олимпиадного движения"

В 1950–2000гг. школьные олимпиады были незаменимым элементом нашего образования.

По сути они были просветительским карнавалом. Очень немногие люди поступали с помощью них в вузы (при этом достаточно немногие, чтобы просветительский смысл олимпиад не заменялся на арену социального соревнования).

В последние годы олимпиады старших классов сменили свой смысл — теперь это замаскированные вступительные экзамены, на которые начинают наползать все неизбежные при этом беды. Это больше не олимпиады...

Все прошлые годы олимпиады были в руках неформальных групп, которые могли быть, а могли и не быть связанными с университетами. Так больше продолжаться не может. Хозяева постепенно меняются.

Так что и олимпиады пошли под нож бульдозера ЕГЭ.

Но по нынешним временам, благодаря квазиолимпиадам, у способного человека еще остается шанс поступить в Университет.

Кстати, вузовские квазиолимпиады — неплохое изобретение 90-х годов. А навешивание на карнавальные олимпиады несвойственных им функций — промежуточный итог борьбы последнего десятилетия. В реальности квазиолимпиады сейчас — это фиговый листочек, скрывающий монополию ЕГЭ.

Портфолио

Это мертворожденная идея наших чиновников в подражание некоторым действиям американских университетов. Но в Америке многое может делаться честно, а у нас это портфолио превратится в многоуровневую коррупционную кормушку. Подробнее не обсуждаю.

Эта карточка с точки зрения пасьянса бессмысленна...

Защитный тест или профилирующий экзамен

Мы живем в коррумпированной стране. И вузы как-то надо защищать от нашествия блатного контингента. В принципе возможно такое решение. Перед зачислением человеку дается простой тест (проще того экзамена, который он успешно написал). Сдал — зачисляем. Не сдал — свободен.

Не очень надежно, не очень красиво. Но бороться с коррупцией можно лишь открыто признав, что она есть.

А лучше никого не унижать подозрениями и для всех проводить в вузе (если он этого хочет) профилирующий экзамен или средствами вуза, или с помощью одной из процедур, описанных выше. Интерпретировать результаты экзамена должен вуз.

Это, правда, означает отказ от одного из основных пиарных лозунгов ЕГЭ — упростить подачу документов в вузы. А может, Бог с ним?

Вчера, сегодня, завтра

Кусочков, из которых можно складывать вступительно-экзаменационный пасьянс, много (больше, чем выше обсуждается). В других странах люди пасьянс складывают. И мы бы давно сложили, если бы не потратили 9 лет в борьбе за абсурдную и, в определенном смысле, беспрецедентную идею ЕГЭ. Или давно бы вернули к жизни старую систему вступительных экзаменов (по состоянию на 2000 год она была реформируема).

Я нашел в интернете старые речи 2004–2005гг тогдашних проводников ЕГЭ на уровне Министерства.

Виктор Болотов (тогдашний руководитель РосГосОбрНадзора, который ЕГЭ и вводил, снят весной 2008 года) выглядел хоть и тоталитаристом, но просвещенным тоталитаристом. К сожалению, его диктаторская власть над образованием заставляет вспомнить речи 1953 года: "поставил органы госбезопасности выше партиии". Фактически РосГосОбрНадзор, оставив функции надзора, стал определять школьную программу старших классов посредством ЕГЭ, а также занялся проблемой перестройки массового сознания (соответствующие речи очень забавны).

Владимир Хлебников (снят Болотовым в январе 2007 году по коррупционному обвинению, им отрицавшемуся) в 2006 году говорил о необходимости многоуровневого экзамена, приводил статистические данные, свидетельствовавшие о степени клановости и коррумпированности мероприятия в провинции, о том, что никаких средств для обеспечения его честности придумать нельзя. Его доклад еще интересен и тем, что там предлагались и обсуждались возможные направления реформы (это единственная известная мне попытка подобного анализа, вообще обсуждение возможных альтернатив ЕГЭ — самое страшное табу наших mass-media).

Вроде люди говорили разумные или не вполне безумные речи. Хоть и было пасмурно, а беспросветной мглы, пришедшей в 2007–2009гг., еще ничего не предвещало.

Но итоги экперимента по введению ЕГЭ уже к 2005–2006гг. были плачевны. Мне приходилось беседовать с коллегами из провинции: как только в регионе успешно вводился ЕГЭ, вузы начинали погружаться в трясину (причем не из-за коррупции, не из-за плохого отбора, а из-за скольжения вниз среднего уровня выпускников школ).

Вот автор статьи в эти годы думал, что все закончится на скандалах с коррупцией и с качеством проверки. Блажен, кто верует.

Год 2005-2006 был рубежом. Вполне выяснилось, что экзаменационная идеология никуда не годится, а государство не в состоянии обеспечить проведение экзамена. И в министерстве, и в вузах это прекрасно знали. Надо было срочно искать другой пасьянс. Вместо этого последовало голосование Государственной Думы 2007 года, которое войдет в историю нашей страны. Если у нее еще будет история.

Добавлю, что несмотря на сопротивление, оказываемое самыми разными людьми самыми разными способами, год 2009 много хуже года 2008-го, а год 2010 ничего хорошего не предвещает.

Ближайшие годы нам предстоит стать свидетелями эпической борьбы за исполнение "благородных намерений ЕГЭ", смена лиц разных уровней, воплощающих в жизнь эти намерения, разработки КИМов на альтернативной основе, дальнейшее обогащение ЕГЭ-пиара, лихорадочное переливание из пустого в порожнее, введение ЕГЭ во внутривузовской практике и разные ходы ва-банк для того, чтобы скрыть провал проводимой политики.

Давайте пофантазируем...

Против лома нет приема. Обсуждать, что можно было бы, в принципе, разумное сделать — дело пустое...

И, все-таки, давайте пофантазируем. Если бы мы были в Германии...

То был бы такой выход. С ЕГЭ снимаются функции выпускного экзамена, и от него освобождаются 30 лучших вузов (но именно освобождаются, а не устраивается издевательство типа списка-2009), а все остальное делится на 4 куска (надо помнить, что, кроме вузов есть и техникумы, и тоже разные) по франко-израильскому образцу.

Но мы не в Германии, и сильно лучше от этого (тем, кого не освободят) может и не стать. Останется поход министерских чиновников и реформаторов против всех умных, дельных и порядочных людей. Никуда не денется наша подковерщина. И главное — даже в хорошем исполнении (чего с нашим Минобразом ждать трудно) эта система дурна.

А еще в ЕГЭ, как будто нарочно, все сделано для всестороннего и гармоничного развития коррупции (лучшее свидетельство степени коррумпированности экзамена — степень засекреченности статистики результатов ЕГЭ, до них не может добраться даже Думский комитет).

Поэтому продолжим фантазирование. Другой вариант. За ЕГЭ оставляются функции отсекающего экзамена, а все остальное становится добровольным и дополняется тестирующими, фипирующей, центросканавирующей структурами, а также вступительными экзаменами и предварительными университетскими квазиолимпиадными конкурсами. Все это вызывет сложности, суету, борьбу, но это будет жизнь, а не смерть. Система сможет развиваться, бороться с трудностями, совершенствоваться.

Боюсь, что и в качестве отсекающего экзамена ЕГЭ может оказаться социально опасным. Это может вылиться в показательную порку вузов в наименее коррумпированных регионах страны. Этим летом посмотрим. Оставлю соответствующие комментарии другим ораторам.

Быть может, лучшее, на что способен нынешний ЕГЭ — восстановление из него системы ЦТ — добровольного централизованного тестирования и выделение параллельной системы многоуровневого добровольного фипирования. Ведь если это будет сделано нормально, то и возражать люди не будут. Но этого мало, надо частично восстанавливать вступительные экзамены и вводить центро-Сканави.

Наше образование сейчас в значительно худшем положении, чем в 2000-м году. Что касается вступительных экзаменов, то в 2000-м году был кризис, а ЕГЭ-2009 (ожидавшаяся панацея от всех бед) — это разбитое корыто. И, скорее всего, влиятельные сторонники ЕГЭ понимают это не хуже, чем противники (что видно по лихорадочным действиям министерства этого года).

Но пасьянс пока еще разложить можно. И чем позже его раскладывание начнется, тем меньше будет возможностей и меньше шансов на хотя бы частичный успех.

Москва-Вена 09.05.2009

P.S. 15.06.09.

Некоторые читатели электронной версии статьи *www.mat.univie.ac.at/˜neretin/obraz/y.html* задали вопрос, а что автор, собственно, предлагает. В некотором смысле, ничего. Я говорю, что задача имеет относительно приличные решения. Независимо от того, предлагаю я чего-либо или нет.

Надо понимать, что в пиар-кампании ЕГЭ (которая не обязательно имеет отношение к его действительным целям) обещается очень много. Никакая разумная программа (ни в наших условиях, ни в условиях более благополучных) столько обещать не может. И мы должны (если хотим быть живы) отказаться от части розовых мечтаний. А Министерство должно отказаться от мечтаний управлять образованием на основе ЕГЭ (если у него в самом деле такие мечтания есть). Кроме того, мы не в Германии, а сейчас не 2000-й год. В отношении каких-то существовавших тогда возможностей поезд ушел.

Ну вот, забавы ради, возможное решение.

1. Вводится простой тест ("госприемка") на право поступления в вузы. Детали его организации дискуссионны. Скажу соображения ниже.

2. (Государственные) вузы проводят экзамены внутри себя по одной из четырех схем:

– (многоуровневое) тестирование в стиле собственно тестирования.

– (многоуровневые) варианты с машинной проверкой, разрешающие относительно длительное размышление (и в этом случае, и в предыдущем, варианты сбрасываются сверху компьютерными программами)

– система центро-Сканави с ручной проверкой

– вступительные экзамены

Первые три схемы вуз выбирает свободно.

В принципе, один вуз может (по своему желанию) признавать результаты работ, написанных в других вузах (de facto, такое когда-то было в Москве, многие признавали результаты МГУ). Кроме того, вузы региона или города (или соседних регионов) могут заключать более широкие соглашения.

3. Ведущие вузы Москвы, Санкт-Петербурга, федеральные, и, возможно, некоторые еще вузы проводят экзамены для иногородних в весенние каникулы.

В Сибири и на Дальнем Востоке в областных центрах проводятся централизованные экзамены в вузы Москвы и Санкт-Петербурга.

4. Техникумы при желании могут удовлетворяться результатами отсекающего тестирования, в том числе и не вполне удовлетворительными. Но надо твердо потребовать наличия альтернативных путей (с той или иной имитацией решения для вузов).

5. Выпускные экзамены оставить, попытавшись понять, как их улучшить.

Теперь комментарии. Сначала о вузовских экзаменах.

Основная вступительно-экзаменационная коррупция в вузах в последние 15 лет шла на уровне утечки вариантов. Это пресекается. Тайну не удастся разгласить по причине ее несуществования. С прочими видами коррупции следует бороться иными средствами.

Далее, при формате ЕГЭ нет ни одного человека (ни пишущего, ни обслуживающего, ни родителя), заинтересованного в честности экзамена (и очень много людей, заинтересованных в обратном). Если экзамен пишется в вузе, то все не так (хотя бы потому, что аудитория соревнуется сама с собой)

В принципе, тестироваться и ФИПИ-роваться можно и в городе за пределами вуза, но боюсь, что другие люди с меньшим числом комплексов будут изобретать, как взять на лапу. Это наш фон. Вузы коррумпированы не больше, чем общество в целом, а в хороших студентах заинтересованы.

При дробной системе вступительных экзаменов (по типам и уровням) мы снимем нагрузку на школу, не ее дело готовить школьников к вступительным экзаменам.

Наконец, если речь идет о содержательных задачах, то для комплектов из 4-6 вариантов нет проблемы выравнивания сложности. И, по этой причине, их можно сделать много лучше.

Вступительные олимпиады подурезать (оставив вузам право признавать результаты карнавальных олимпиад).

Теперь об отсекающем тесте. Он может казаться излишним, но о нем мечтают ВШЭ и министерство (и в данном случае автор им сочувствует). Он должен быть простым и должен давать право на ошибку. Нужно, чтобы большинство могло написать его не напрягаясь. Проводить его лучше осенью, с правом пересдачи весной (и с правом немедленной пересдачи тоже). Кроме пары математика–русский, лучше добавить для желающих предмет по выбору (который позволял бы компенсировать "недобор" по этим двум предметам, тут очень многое дискуссионно). Писать его по школам и одновременно нет никакой необходимости. Дискуссионным является и вопрос, что лучше, собственно тест или экзамен с машинной проверкой.

Добавлю, что люди, которых это не касается, писать подобную работу не должны. Чем более обыденным будет это мероприятие, и чем меньше махать дубинкой, тем лучше будет.

Обсуждаемая система допускает отладку, изменения, перестройки. Надо отдавать себе отчет, что будучи сегодня по пояс в трясине, завтра мы на сухом месте не окажемся. И надо иметь гибкую систему, в которой возможны маневры и улучшения.

При наличии волевого решения такая система может быть введена в течение года, с естественным "скрипом" Центро-Сканави и невозможностью проводить отсекаюший тест осенью.

А в качестве переходного шага было бы разумно предложение Смолина (которое, возможно, на сегодня — вообще самый разумный стабилизационный ход) — сделать ЕГЭ добровольным, и параллельно запустить отладку тестирования, ФИПИ-рования и Центро-Сканави.

Теперь (тоже забавы ради) — дырка в предлагаемом решении головоломки (однако не фатальная). В первой строчке пункта 3. Непонятно, возможно ли при нашей общественной системе расселить абитуриентов. В любом случае, остается комбинаторика времени проведения экзаменов в разных вузах, в которой надо предусмотреть максимум возможностей для провинциалов, едущих в крупные центры (возможно жертвуя удобствами людей в центрах). В отношении этой части головоломки автор не силен.

Добавлю, что можно искать возможности для "внутрирегиональных ЕГЭ" (с возможностью соглашения соседей о взаимопризнании, что-то типа Чувашия-Пенза). Это улучшает коррупционную обстановку по сравнению с нынешней, но в отношении школы мы наступаем на те же грабли.

И еще добавлю. Кажется, Министерство мучается от проблемы оценки учителей. Автор этого не очень понимает, так как в любом случае речь идет лишь о выпускных классах и даже "ЕГЭ нашей мечты" проблемы не решит. С другой стороны при современных электронных средствах Министерство может просто запросить у вузов поименную информацию об итогах вступительных экзаменов. Тут тоже есть элемент провокации, но меньше чем в ЕГЭ. Именно при дробной системе учителю, обеспокоенному тем, что его оценивают, будет выгоднее учить чему положено, чем натаскивать.

Автор пишет данный проект для затравки. В любом случае, проблема перед нашим обществом стоит именно в такой постановке (а не в улучшении КИМов), и в любом случае стоит отдельно проблема стабилизации на 2010 год. Кажется, все верхи, кроме самых верхних, хотят, но не могут. Министерская лихорадка 2008–2009 об этом свидетельствует.

P.S. 20.06.09.

И последнее. Независимо от глобальных проектов перестройки. Автору кажется, что цель, за которую бы стоило бороться сегодня, — это центро-Сканави.

Неретин Юрий Александрович,
доктор физико-математических наук,
факультет математики Венского университета.

Email: neretin@mccme.ru

Корни, ветви и "ягодки" реформы-1970

И. П. Костенко

Реформа математического образования 1970-х годов и ее итоги вызывают неоднозначное отношение математической и педагогической общественности. В настоящей статье критического направления приведены факты, которые освещают истоки реформы, ее подготовку, методы, результаты, а также проясняют последствия реформы в сегодняшнем образовании.

Выхолощенное и формализованное преподавание математики на всех уровнях сделалось, к несчастью, системой.

Академик В. И. Арнольд

В следующем 2010 г. мы должны отметить трагический юбилей — сорокалетие начала знаменитой "колмогоровской" реформы школьного математического образования, катастрофически обрушившей качество знаний учащихся. Реформа эта никогда серьёзно не анализировалась. Юбилей — хороший повод для того, чтобы после сорока лет разрушения задуматься, наконец, над смыслом реформы и её наследием в современном образовании. Сорок лет — достаточный срок для нелицеприятной оценки. В данной статье приведены малоизвестные факты, которые освещают забытые истоки реформы, её многолетнюю подготовку, методы, результаты, а также проясняют её последствия в сегодняшнем образовании.

Принято считать, что реформу 1970-1978 гг. (будем называть её "реформа-70") придумал и осуществил А. Н. Колмогоров. Это преднамеренное заблуждение. А. Н. Колмогоров был поставлен во главе реформы на последнем этапе её подготовки — в 1967 г. Его авторитет и личные качества эффективно использовались для "пробивания" реформы и блокирования критического отношения к ней Академии Наук. Его "творческий" вклад сильно преувеличен, — он всего лишь конкретизировал в программах и учебниках известные реформаторские установки (теоретико-множественное наполнение, аксиоматика, обобщающие понятия, строгость и пр.). Конечная предназначенная ему роль была стать "крайним". Все критические стрелы, всё общественное возмущение результатами реформы, проявившимися в 1978 г., было направлено на имя А. Н. Колмогорова. Незавидная, но закономерная участь, — расплата за "самонадеянность, основанную на непонимании" (Жан Лерё [1, с. 204]).

Тогда как всю огромную подготовительную работу вёл в течение двадцати лет, начиная с 1949 г., профессор математики, академик АПН А. И. Маркушевич (о его деятельности чуть позже). Но и он не был инициатором, а был назначенным и очень хорошим исполнителем. Он добросовестно, умело, настойчиво и эффективно выполнял программу, намеченную в 1930-х гг. молодыми в то время математиками: Л. Г. Шнирельманом, Л. А. Люстерником, Г. М. Фихтенгольцем, П. С. Александровым, Н. Ф. Четверухиным, С. Л. Соболевым, А. Я. Хинчиным и др. [2].

Начало будущей реформе было положено в 1936 г. декабрьской сессией Группы математики АН СССР. Странно, что в эту "группу" входило много совсем не академиков, которые, тем не менее, определяли её решения. Декабрьская резолюция "группы-36" потребовала от Наркомпроса "коренной (?!) реорганизации постановки преподавания математики в начальной (?) и средней школе" [2, с. 80]. Это в то время, когда качество образования и качество знаний школьников росло (!) из года в год, — "работники вузов в этом убеждаются повседневно", - признавал Г. М. Фихтенгольц [там же, с. 55].

Тем не менее, в резолюции по начальной и средней школе, принятой на основании докладов Г. М. Фихтенгольца и Л. Г. Шнирельмана, утверждалось: "неудовлетворительность (?) учебных планов и программ,... полная непригодность (?) некоторых стабильных учебников и многочисленные недостатки остальных,... курс арифметики чрезвычайно растянут,... преувеличена роль устного счёта,... нет настоящих (?) задач, способных развить (?) у учащихся инициативу и сметку" [там же, с. 78-80].

Доклад по педагогическим учебным заведениям делал Л. А. Люстерник. По его предложениям в резолюции, в частности, записано: "Необходимо пересмотреть программы всех математических дисциплин с целью внесения большей систематичности (?) и идейности (?) в преподавание этих дисциплин... значительно увеличить относительную роль университетов... в деле выпуска преподавателей математики для средней школы. ... Поставить вопрос о возможности слияния (?!) физико-математических факультетов университетов и педвузов" [там же, с. 82].

Идеология реформаторов базировалась на двух не обоснованных и невнятно сформулированных постулатах: 1) необходимо повысить "идейный" (?) уровень преподавания математики; 2) привести содержание обучения в соответствие с требованиями (?) науки и жизни. Почему "необходимо"? Какие такие "требования" выставляли школе наука и жизнь и каким образом выставляли? Вопросы эти не конкретизировались и открыто не обсуждались. От имени мифической "математической общественности" безапелляционно и агрессивно утверждалось: "необходимо!"

В 1939 г роль главного публичного идеолога реформы, планируемой "группой-36", взял на себя А. Я. Хинчин. В журнале "Математика в школе" он стал публиковать программные статьи. Официальный пост председателя Математического комитета при Наркомпросе дал ему возможность делать доклады перед учителями и начать пропаганду идеологии будущей реформы [3, 1939, №3, с. 75]. Все основные требования реформаторов были суммированы Хинчиным в статье "Всестороннее, реальное образование советской молодёжи" [3, 1939, №6, с. 1-7]. Познакомимся с его требованиями и их обоснованием.

Развивая тезис "группы-36" о "неудовлетворительности программ", Хинчин усиливает его и утверждает "порочность (?) программ по всем (?) разделам математики, преподаваемым в начальной (??) и средней школе... Программы ... страдают оторванностью от жизни" [с. 1]. Что это значит — "оторванность"?

"Программы должны (?) быть построены так, чтобы идеи переменной величины и функциональной зависимости ... как можно ранее (?) усваивались учащимися и ... становились основным стержнем (?) всего (?) школьного курса математики". И после этого будет восстановлена связь программ с жизнью?

В сущности, предлагалось уничтожение ("слом" — по излюбленному выражению всех реформаторов, вплоть до сегодняшних) традиционного содержания и структуры общего математического образования, выработанного несколькими поколениями русских педагогов, и замена его принципиально новым содержанием, которого ещё нет, но которое "в течение ближайших лет" предстоит выработать "всей (?) научной общественностью (?)".

"Самой категорической (?) необходимостью (?) является введение в школьные программы оснований анализа бесконечно малых". "Группа-36" предусмотрительно не выставляла этого требования, но, конечно, имела его в виду.

Аргументация: "если мы хотим довести научно-культурный уровень рабочего и колхозника до уровня работников инженерно-технического труда, то как же мы можем спокойно смотреть на отсутствие в математических школьных программах того, что составляет собой математическую основу всей современной техники? Тем более, что анализу бесконечно малых принадлежит весьма важная роль в деле формирования научного, диалектико-материалистического мировоззрения. Энгельс многократно говорил...".

Утверждалось, что всё это "советской молодёжи нужно..., ибо школа должна готовить молодёжь к труду и обороне советского государства". И, значит, после введения в школьную программу оснований анализа повысится готовность советской молодёжи к "труду и обороне"? Логика неотразимая!

Опытные учителя, педагоги и методисты не принимали учёных новшеств, предостерегали об опасностях, но профессора высокомерно игнорировали все предостережения. "Неверно, будто восприятие этого раздела представляет для учащихся особые (!) затруднения... Неверно, будто преподавание анализа представляет непомерную трудность для нашего учительства. ... Неверно, наконец, будто десятилетняя школа не может вместить основания анализа... нужно изгнать (?!) из школьных программ все архаизмы (?) ...".

"Все часто повторяемые возражения" против навязывания школе профессорских новаций объявлялись "маскировкой косности и рутины методической среды", "равнением на отсталые (?!) слои учительства" [3, 1939, №4, с. 4]. Вместо того, чтобы серьёзно обдумать предостережения опытных педагогов, молодой советский профессор, ни дня не работавший в школе, навешивает на учителей и оппонентов уничижительные ярлыки. Характерный для всех реформаторов приём!

Главной бедой школы Хинчин объявляет "недостаточный **научный** уровень подавляющего большинства нашего учительства". Для искоренения этого "порока" предлагается система мероприятий: "создание новых учебников и методических руководств, пропаганда и разъяснение новых программ, ... переподготовка, методическая и научная, значительной части учительства, ... перестройка ... подготовки учительских кадров". Главное, чему нужно учить учителя, — "умению быть научным организатором (?) и научно-компетентным хозяином (?) педагогического процесса". Какие напыщенные и бессмысленные фразы! Главное, в чём нуждается учитель, — "в литературе, способной повысить его научную квалификацию". Профессор решает за учителя, что главное тому нужно. "Необходимо также..., чтобы наши учителя периодически проходили краткосрочные курсы повышения квалификации".

Профессор не понимает, что никакими краткосрочными мерами поднять научный уровень невозможно. Тем более, в масштабах страны. Да и не нужно. Главное, что нужно уметь учителю, это уметь **понятно** учить детей. А для этого ему нужен понятный учебник и нужна методическая помощь, а не научная. И такую помощь учителя всей (!) страны в 1930-х гг. получали от прекрасных методистов, работников Наркомпроса: Е. С. Березанской, И. К. Андронова и др. [4]. Чем и объясняется рост качества знаний учащихся. Хинчин презрительно называет эту помощь "сообщением методической рецептуры, методических шпаргалок". А "группа-36" требовала, чтобы эти люди были "заменены людьми, способными справиться с огромными задачами, стоящими перед советской школой" [2, с. 81]. И мы теперь знаем, как их люди "справились" в 1960-70-х гг.

В 1978 г. жизнь проявила всю скрытую вредоносность требований реформаторов. Переориентация в результате реформы-70 государственной образовательной политики на повышение "научной", а точнее, псевдонаучной квалификации учителя, содействовала утрате его педагогической квалификации, падению качества обучения и качества знаний учащихся. Подробнее этот процесс прослежен в [5, с. 188-195]. Сегодня он успешно завершается реализацией идеи Люстерника-36 о поглощении growth пединститутов университетами. В частности, старейшее русское педагогическое заведение — РГПУ им. Герцена, — созданное в 1793 г. (Воспитательный дом) Указом императора Павла, перестаёт выпускать учителей математики и переключается на выпуск прикладников, о чём с радостью сообщил участникам 62-х Герценовских чтений проф. В. П. Одинец.

Реформаторы требовали не только повышения научности учителей, но и повышения научности школьников. Они настаивали на большей формальной **строгости** "определений, формулировок и рассуждений", соответствующих "современной науке". На предостережения учителей, что это приведёт учащихся к затруднениям в усвоении, Хинчин отвечает: "не может быть" [3, 1939, 4, с. 4]. И опять клеймит учителей: "по-старинке будет легче ... учителю, вызубрившему учебник и не желающему переучиваться, а никак не ученику" [там же]. И мы, опять же, знаем практический результат внедрения в школу учёной строгости в 1970-х гг., — достаточно вспомнить высоконаучную замену вектора-стрелочки параллельным переносом, или равенства фигур их конгруэнтностью.

Наконец, реформаторы требовали повышения научности методических кадров, воспитания “новых методистов”, “научно апробированных” (?). И опять тот же агрессивный приём голословного очернения: “Подавляющее большинство методических кадров, даже в Москве, до сих пор находится на недопустимо низком научном уровне и воспитывает в учителях педантизм и тот схоластический подход к науке, которым до сих пор грешит преподавание математики в нашей школе. ... Научная общественность должна возвысить свой голос и ... принять непосредственное участие в деле воспитания методической аспирантуры”. И здесь мы знаем, во что превратилась сегодня так называемая методическая наука, в то время, как настоящая, трудная, жизненно необходимая школе методика попросту уничтожена.

В заключение своей статьи Хинчин выставляет ещё два конкретных предложения: специализацию в старших классах и введение учителя-предметника с третьего класса (Г. М. Фихтенгольц-36). Завершает статью “горячее желание наших учительских масс поднять математическое преподавание в школах до уровня, достойного великих культурных и народнохозяйственных задач третьей сталинской пятилетки”. На протяжении всей статьи чернил эти “массы”, а в конце приписывает им “горячее желание” принять предложения реформаторов. Какова логика и совесть! Каковы методы! И так будет всегда в будущем!

Но реформаторы не ограничивались пропагандой. Они намеревались в ближайшее время провести-таки реформу. Первая их цель — сбросить мешающие им кадры Наркомпроса. Вторая — заменить учебники. Ни той, ни другой цели достичь им тогда не удалось. Но кое-чего, всё-таки, добились. В 1936-37 гг. они развернули хорошо скоординированную, яростную политическую компанию против “вредительского руководства” [6, с. 250] Наркомпроса. В 1937 г. нарком просвещения А. С. Бубнов, который не подпускал реформаторов к школе, был снят с должности, как не справившийся с работой, и в 1938 г. расстрелян.

“В качестве временной меры” профессора математики, ни дня не работавшие в школе, взялись исправлять “недостатки” замечательных учебников Киселёва: в 1938 г. Н. А. Глаголев “переделал” Геометрию, в 1940 г. А. Я. Хинчин — Арифметику. Передельщики руководствовались принципом, сформулированном в предисловии Хинчиным: “каждый учебник: должен представлять собой единое, логически систематизированное целое” [7, с. 7]. Т. е. психологическая систематика, ориентированная на понимание, заменялась логической, противоречащей законам детского понимания. Зато повышался “научный уровень”.

Московское математическое общество (председатель П. С. Александров) рекомендовало “на ближайшее время (?) учебник геометрии Киселёва под редакцией (?) Н. А. Глаголева” [6, вып. 4, с. 330]. И вот отзыв учителей об этом учебнике: “с первых же дней работы в школе оказалось, что пользоваться переработанным учебником очень трудно; материал в учебнике не соответствует программе; добавлен отдел, которого нет в программе; распределение материала в учебнике не способствует упрощению доказательств многих теорем, а наоборот, усложняет; нельзя с самого начала приступить к решению задач” [3, 1939, 2, с. 63].

Итак, практика доказала ложность принципиальных установок реформаторов. Но они нисколько не смутились, не высказали никаких замечаний в адрес своей опозорившейся переработки. Более того, профессора взялись сами писать учебники для школы. В 1940 г. А. Н. Колмогоров с П. С. Александровым написали научный учебник алгебры, а Л. А. Люстерник с А. Ф. Бермантом — научный учебник тригонометрии. Эти “учебники” не принесли ни пользы, ни вреда, они так и остались “написанными” и забытыми. А вот в 1970-80-х гг. высоконаучные учебники профессоров и академиков были насильственно внедрены в школу и мгновенно обрушили математическое образование.

Подытоживая, обратим ещё раз внимание на методы и приёмы реформаторов: отсутствие серьёзного обоснования, алогичность, лживость, игнорирование аргументов и предостережений, агрессивность, унижение оппонентов, игнорирование результатов опыта, продуманная организованность и настойчивость в достижении поставленных целей, уничтожение помех, использование авторитетных социальных организаций, политической коньюктуры и тайных механизмов. Все эти методы, внедрённые в нашу жизнь в 1920-30-х гг., успешно использовались всеми реформаторами всегда, и в этом мы убедимся далее.

Активность реформаторов чуть притормозила война. Но не остановила. В 1943 г. создаётся Академия педагогических наук РСФСР и среди её членов-учредителей почему-то сразу оказываются два реформатора: А. Я. Хинчин и В. Л. Гончаров. Хинчин стал членом Президиума АПН и академиком-секретарём по частным методикам. Гончаров возглавил кабинет методики математики созданного в 1944 г. НИИ методов обучения. Реформаторы взяли под контроль методику.

Цели создания АПН формулировались в Постановлении Правительства РСФСР, утверждённом СНК СССР 6 октября 1943 г., так: "научная (?) разработка вопросов общей педагогики, специальной педагогики, истории педагогики, психологии, школьной гигиены, методов преподавания основных дисциплин в начальной и средней школах, обобщать опыт, оказывать научную (?) помошь школам" [8, с. 16]. Обратим внимание: и здесь появляется (дважды) ключевое слово реформаторов — повышение "научности". Интересно, кому в Правительстве в разгар страшной войны могла прийти в голову мысль о необходимости повысить "научность разработки вопросов"?

В 1945 г. на первых официальных выборах в АПН приняты ещё три реформатора: П. С. Александров, Н. Ф. Четверухин, А. И. Маркушевич. Заметьте, учёные-математики, ни дня не работавшие в школе, не знающие педагогики и пренебрежительно к ней относящиеся, становятся вдруг академиками педагогики. Правда, первые два были авторами не действующих научных учебников (для школы и для пединститута). А Маркушевич? Он в 1935 г. приехал в Москву из Ташкента и уже через два года, 29 марта 1937 г. выступил с докладом на сессии Группы математики АН СССР [6], в 1944 г. стал доктором физ.-мат. наук. Никаких педагогических "заслуг" не имел. Но он планировался главной активной общественной фигурой для подготовки замышленной реформы.

В 1949 г. ему было поручено сделать на сессии АПН программный доклад, в котором он сформулировал и разрисовал перед Академией заманчивую задачу "повышения идейно-теоретического уровня (?) преподавания математики в средней школе" [9, с. 29]. После этого вся многогранная деятельность педагогического академика была посвящена решению этой задачи. Деятельность эта шла по нескольким чётко определённым линиям, намеченным "группой-36".

Первая линия — дискредитация учебников А. П. Киселёва (он начал её в докладе 1949 г. [там же, с. 30-32]) и "изгнание" их из школы. Цель достигнута через семь лет, в 1956 г., когда учебники Киселёва для неполной средней школы были заменены "пробными", но пока ещё не реформаторскими (какая тонкая тактика!). Именно с 1956 года, с момента "изгнания" Киселёва началось снижение качества знаний школьников и в министерство стали поступать "жалобы вузов на недостатки знаний поступающих" [там же, с. 38]. Этот факт констатировал сам Маркушевич, выступая в декабре 1961 г. на совещании-семинаре учителей в Министерстве Просвещения. Но он, как всегда, немножечко искажал суть дела, — это были жалобы не на отдельные, по его выражению, "недостатки", а на заметное, сравнительно с прошлыми годами, снижение качества знаний.

И хотя всем было очевидно, что это связано с начавшейся "перестройкой", Маркушевич пытался завуалировать эту связь, утверждая, что "значительная часть недостатков (?) в математической подготовке школьников имела место и в прошлые годы, но мы никогда раньше не ставили вопрос об эффективности и общем уровне (?) математического образования в школе так, как в дни перестройки" (как? — И.К) [там же]. И приводил "аргумент": "наши выпускники прошлых лет, экзаменовавшиеся по математике, составляли примерно одну десятую часть всех выпускников; поэтому оценка их знаний не могла рассматриваться как оценка качества результатов преподавания математики в школе в целом" [там же]. Т. е. из факта заметного снижения качества подготовки абитуриентов вузов он не рекомендует делать вывод о состоянии преподавания в школе (??). Такая вот высоко научная логика.

Вторая линия — "научное" обоснование установок будущей реформы и подготовка заинтересованных в ней кадров. Цель достигалась внедрением реформаторских идей в "научно-исследовательскую" деятельность институтов и лабораторий АПН. В частности, была успешно внедрена идея обучения младшеклассников при помощи перевёрнутого антипедагогического принципа "от общего к частному", привязанного к задаче "математического развития".

Такая задача была абстрактно сформулирована Г. М. Фихтенгольцем ещё в 1936 г. [2, с. 56] и конкретно поставлена А. И. Маркушевичем перед "научными работниками" АПН в 1961 г. [9, с. 33]. Разработчики: академики АПН Д. Б. Эльконин, Л. В. Занков, член-корр. АПН М. Н. Скаткин, кандидат педнаук В. В. Краевский, аспирант В. В. Давыдов и др. [1, с. 173-175; 10, с. 17, 37]. Член-корр и аспирант вскоре стали академиками АПН, а кандидат — член-корром. Вот как по желанию Хинчина расцвела новая высоконаучная методика.

"Математическое развитие" на основе маркушевичевских "обобщающих (!) идей, принципов, понятий" [3 (1993), с. 75] превратилось в результате "научной" разработки в инновационное обучение "по системе Занкова" и "по системе Давыдова". Учителям, применявшим эту "методику", делалась прибавка к зарплате. Как свидетельствует академик РАО Ю. М. Колягин, "обе эти системы не привели к позитивным результатам" [1, с. 175]. И не могли привести, поскольку противоречили законам (!) познания и обучения.

Тем не менее, "с 1993 г. (года "демократической революции") началось новое активное внедрение систем в начальную (!) школу" [там же]. Т.е. продолжается замысленное в 1930-х гг. и начатое реформой-70 разрушение фундамента — начального математического образования. Сегодня идея "математического развития" возросла до "общекультурного развития", заменившего "устаревшую" (замминистра-1997 А. Г. Асмолов) концепцию "ЗУН" (знаний, умений, навыков). Развитие без знаний?!

Третья линия — широкая пропаганда установок предстоящей реформы и формирование в обществе убеждённости в её неизбежной необходимости. Делал это Маркушевич со своими единомышленниками через воскрешённый им журнал "Математическое просвещение" [11] и через популярный среди учителей журнал "Математика в школе", главным редактором которого был поставлен в 1958 г. "свой человек" Р. С. Черкасов — соавтор его реформаторских учебников. Журнал этот по сей день стоит на защите результатов реформы и дезавуирует критику (в частности, моя статья "Почему надо вернуться к Киселёву" была проигнорирована редакцией — её опубликовал в №3 за 2006 г. журнал "Математическое образование" и в №4 за 2007 г. журнал "Педагогика"). Сегодня пост главного редактора занял один из наследников реформаторов-70, соавтор действующих синтетических учебников, член Президиума ФЭС Е. А. Бунимович.

Четвёртая линия — замена "устаревших" программ новыми, отвечающими "требованиям жизни". Цель была поставлена перед АПН в том же докладе 1949 г. и там же намечено, "в каком направлении следует вести перестройку программы" [9, с. 18]. "Направление" состояло в максимальном усечении и ужимании традиционного материала для высвобождения места высшей математике. В частности, по его намёткам курс арифметики должен заканчиваться в 5-м классе, а весь 10-й класс отводился на аналитическую геометрию, анализ и теорию вероятностей [там же, с. 19]. Программу эту (за исключением теории вероятностей) Маркушевич реализовал, когда возглавил совместную Комиссию АН и АПН по определению содержания нового математического образования (1965-1970).

После провала реформы министерские комиссии и лаборатории АПН стали пересматривать маркушевичевское "содержание" и создавать "альтернативные" программы. Но главный разрушительный принцип, мило сформулированный Маркушевичем в докладе 1949 г., остался неизменным: "несколько (?) тесня традиционный и включая новый материал" [там же, с. 20]. Т.е. кромсая выверенную педагогическую систему и перемешивая новый материал со старым.

В результате, вместо цельных учебных предметов появились синтетические конгломераты, составленные из разнородных "методических линий" (?). В начальной школе ужатая арифметика перемешалась с элементами геометрии, алгебры и теории множеств. В 9-10-м классах алгебра "проинтегрировалась" с тригонометрией и анализом. Тем самым, была ликвидирована классическая предметная система преподавания и выведен из нашей школы один из главных дидактических принципов — принцип системности (!) обучения. Это второе фундаментальное достижение реформы-70 (первое — "изгнание" Киселёва).

Пятая линия — "написание" новых учебников. В 1968 г. вышел в свет его первый "пробный" учебник "Алгебра и элементарные функции" (в соавторстве). В разгар реформы (1970-1978) он "редактировал" реформаторские учебники алгебры для 6-8 классов (авт. Ю. Н. Макарычев и др.) [1, с. 302]. Для старших классов учебники "писал" А. Н. Колмогоров (опять же в соавторстве). "Писание" учебников "авторскими коллективами" — ещё одно рационализаторское изобретение реформаторов. Их синтетические учебники, подправленные и подлаженные к новым "требованиям жизни" благополучно навязываются школе по сей день [12, с. 38, 49].

Другие современные "вариативные" (А. Г. Асмолов) учебники составляются по тем же синтетическим программам, и уже только по этой причине не могут быть доброкачественными. Они концентрируют в себе все реформаторские пороки программ: перегруженность, бессистемность, абстрактность и пр. Хорошо только то, что эти учебники никто не читает. Этот факт подтверждает даже наиболее успешный современный автор А. Г. Мордкович: "Не секрет, что нынешние учебники не читают школьники, редко читают и учителя" [3 (1996), с. 32]. Непонятность и потому нечитаемость современных учебников — ещё одно закономерное следствие реформы-70. Достигнута цель, поставленная первыми реформаторами ещё в 1918 г.: "учебники должны быть изгнаны (?!) из школы" [Циркулярное письмо отдела школ Наркомпроса, август 1918 г.].

Наконец, Маркушевич несёт не только моральную, а юридическую ответственность за разрушение образования, — кроме "работы" на посту Председателя Комиссии АПН и АН по определению содержания образования (1965-1970), он "поработал" заместителем министра просвещения РСФСР (1958-1963) и вице-президентом АПН РСФСР-СССР (1964-1975), — должности более действенные, чем министр и президент АПН. Первая ключевая позиция (замминистра) позволила ему удержать начальную пропедевтику реформы, несмотря на сразу проявившиеся отрицательные результаты и протесты вузов и учителей, вторая (вице-президент) — блокировать в АПН серьёзное обсуждение и критику подготавливаемых программ и учебников [13, с. 125]. Параллельно блокировалось ответственное отношение Академии наук к изменению программ (А. Н. Колмогоров, С. Л. Соболев, Л. В. Канторович [1, с. 197, 3 (1979)]). Взорвалась АН только в 1978 г., когда увидела результаты реформы [1, с. 200-201]. Но остановить реформу не смогла.

Вот какая продуманная и предусмотрительная подготовка была сделана Маркушевичем. Были учтены все возможные препятствия и приняты меры их нейтрализации. В частности, "те же, кто разрабатывал реформу, сами у себя принимали работу" [13, с. 27]. Этот факт акад. Д. В. Аносов, осуждающий сегодня реформу-70, квалифицирует как "организационный недостаток" [там же], в то время как он выдаёт блестящую (!) организационную подготовку реформы.

Из вышеизложенного можно заключить, что во всём "виноват" Маркушевич. Это не совсем верно. Программу действий для Маркушевича составил в 1939 г. Хинчин. Действовал Маркушевич не единолично, а с дружным коллективом, который умело расширялся. Состав этого коллектива можно определить по оглавлениям журнала "Математическое просвещение": А. И. Маркушевич, В. Г. Ашкинузе, В. Г. Болтянский, И. Н. Бронштейн, Н. Я. Виленкин, Г. Б. Гуревич, Е. Б. Дынкин, Я. С. Дубнов, В. И. Левин, А. М. Лопшиц, А. А. Ляпунов, А. З. Рывкин, А. Д. Семушин, Л. Я. Цлаф, И. М. Яглом и др. [11]. В этом списке все авторы материалов, имеющих отношение к будущей реформе. Многие из них являются питомцами кабинета методики математики НИИ методов обучения АПН, созданного реформаторами в 1944 г. Между прочим, во всех шести номерах журнала можно найти только одну маленькую не методическую заметку А. Н. Колмогорова [11, №2, с. 160-171].

Все идеи Маркушевича — это не его идеи, это идеи "отцов-основателей" нашей реформы, задуманной в 1930-х гг. В частности, предложение "показать (?) учащемуся математику как науку" публично озвучил в 1935 г. П. С. Александров [9, с. 13]. Требование сократить курс арифметики, который “необычайно растянут” [2, с. 56] высказал в 1936 г. Г. М. Фихтенгольц. Тезис Г. М. Фихтенгольца о “вредности” решаемых в начальной школе задач был подхвачен и развит в 1938 г. А. Я. Хинчиным, который предложил решать их в старших классах с помощью уравнений [6, №6]. Эта идея была усилена (начать с 5 класса) Маркушевичем в его докладе 1949 г. [9, с. 19]. В 1961 г. Маркушевич в ранге замминистра требует от учителей “критически пересмотреть традиционное отношение к арифметическим методам решения задач и остатки “культа” (?) этих задач изжить (?) из нашей школы. Это будет одним из шагов сближения школы с жизнью (??)” [2, с. 42-43].

Установка “изжить” была-таки внедрёна реформой-70 в школу и уничтожила классическую методику обучения решению задач, — методику, неторопливо и основательно развивавшую мышление детей. Результат официально проявило международное исследование 1995 г., — лишь 37% наших восьмиклассников решили задачу: “В классе 28 человек; отношение числа девочек к числу мальчиков равно 4/3. Сколько в классе девочек?” [15, с. 9]. До реформы, в 1949 г. подобные и более сложные текстовые задачи решали 83,5% пятиклассников [16, с. 5]. Сегодня новые реформаторы-2000, “исправляя” устрашающую ситуацию, предлагают не давать школьникам задач более, чем в одно действие.

Итак, мы проследили ветви двадцатилетней подготовки реформы. Реализация реформы в 1970-78 гг. крепко связана с именем Колмогорова, который в 1967 г. был поставлен во главе Учёного методического совета Министерства просвещения СССР и взял на себя утверждение программы, детальную конкретизацию её установок и написание новых учебников. А главное, слепо взял на себя всю ответственность за запланированные результаты. Маркушевич на этом этапе уходит в тень, но занимает в том же 1967 году ключевую позицию вице-президента АПН, которая позволяет сохранять контроль за ходом реформы. В частности, он блокирует серьёзное обсуждение Академией учебных программ, учебников и плана реформы, что в 1981 г. признаёт Президиум АПН в ответе журналу “Коммунист” [13, (1982), с. 125].

Конечную цель реформаторов все с ужасом увидели в 1978 г., когда первый выпуск “отреформированной” [1, с. 200] молодёжи пошёл в вузы. Свидетельствует непосредственный участник реформы академик РАО Ю. М. Колягин: “Когда были обнародованы результаты приёмных экзаменов, среди учёных АН СССР и преподавателей вузов началась паника. Было повсеместно отмечено, что математические знания выпускников страдают формализмом, навыки вычислений, элементарных алгебраических преобразований, решения уравнений фактически отсутствуют. Абитуриенты оказались практически неподготовленными к изучению математики в вузе” [1, с. 200].

В 1981 г. учителя, методисты и учёные Уральской зоны пишут в редакцию журнала “Коммунист”: “Студенты первых курсов испытывают затруднения при операциях с дробями, при выполнении простейших алгебраических преобразований, решении квадратных уравнений, действиях с комплексными числами, построении простейших геометрических фигур и графиков элементарных функций. Это объясняется в значительной мере несовершенством (?) существующих школьных программ и учебников по математике.” [13, с. 125].

Обратите внимание на мягкость обозначения причины — “несовершенство” программ и учебников. Всегдашняя наша боязнь называть вещи своими именами. Ложная формулировка определяет ложные ориентиры: для исправления ситуации надо лишь “усовершенствовать” то и другое. Это и стало оправданием и руководящей установкой дальнейших действий реформаторов и министра М. А. Прокофьева. Что позволило им сохранить в программах и учебниках все главные “достижения” реформы, сохранить и углубить все её страшные для учащихся результаты.

Единственный, кто прямо и точно назвал причину провала реформы, это академик Л. С. Понтрягин: “Современные школьные учебники по математике несостоятельны по своему существу (!!), поскольку выхолащивают (!) суть математического метода. Внедрение нарочито (!) усложнённой программы, вредной (!) по своей сути, ... главный порок (!), конечно же, в самом ложном (!) принципе (!) — от более совершенного его исполнения школа не выиграет” [13 (1980), с.

105-106].

Все (!) “недостатки” в знаниях школьников, которые появились в результате реформы и были отмечены вузами в 1978 г., к сегодняшнему дню усугубились и стали привычными. В 2000 г. на Всероссийской конференции “Математика и общество” те же уральские учёные, во главе с акад. Н. Н. Красовским заявили то же самое: “Вызывает сомнение недооценка арифметики, ограниченное внимание к содержательным задачам, отсутствие раздела “комплексные числа” в массовой школе, ослабление геометрии как со стороны пространственной интуиции, так и стороны логики рассуждений, вообще, представляется недостаточной тренировка в логических рассуждениях.” [17, с. 26].

Все “ягодки” реформы сохраняются до сего дня и становятся ещё более яркими. Гнилостное цветение реформы-70 продолжается вот уже 40 лет!

Сегодня нам предлагают новые объяснения деградации образования, наиболее массово понятное из которых — недостаток финансирования. Переводят наше внимание и активность на новые ложные цели: всеобщую компьютеризацию и информационные технологии обучения. Сокращают учебные часы, выбрасывают базовые разделы и при этом строго сохраняют главные “достижения” реформы-70: “интегрированные” учебные курсы вместо цельных учебных предметов, суррогат высшей математики в программах, схоластический формализм и абстрактность изложения в учебниках. Сохраняются даже учебники реформаторов Колмогорова, Маркушевича, Виленкина, Погорелова и дополняются учебниками их последователей: Дорофеева, Петерсон, Аргинской и др. [11].

Реформа-70 отдаляется и отдаляется. И мы забываем, что деградация началась именно с этой реформы, и её идеология — главная, коренная, исходная причина катастрофического падения качества математического образования (и школьного, и вузовского). Ложный принцип этой реформы — повышение научности, а на самом деле, псевдонаучности обучения — изгнал из учебников педагогику и методику, изгнал Ученика. Он ответствен за деградацию мышления, а значит, и личности учащихся. Именно он привёл учащихся к массовому отвращению от учёбы. Он породил государственную ложь (Прокофьевскую так называемую “процентоманию”), которая заблокировала все возможности исправления ситуации. До сего дня наша школа живёт под тяжким бременем этой реформы. И мало кто помнит и понимает истоки сегодняшних бед.

Забыв прошлое, не понимая истинных причин и движущих сил, глупо надеяться на будущее.

Литература

1. Колягин Ю. М. Русская школа и математическое образование. М.: Просвещение. 2001.

2. Высшая школа. 1937, №2.

3. Математика в школе. 1939, №№4-6. 1979, №4. 1993, №6. 1996, №6.

4. Материалы Всероссийского совещания преподавателей математики средней школы, март-апрель 1935. М., 1935.

5. Костенко И. П. Правильно ли мы учим математике будущих учителей? (история вопроса) // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения - 2009. С.-Пб. 2009.

6. УМН, 1938, вып. 4, 6.

7. Киселёв А. П. Арифметика. М.: Физматлит. 2002.

8. Каиров И. А. Очерки деятельности Академии педагогических наук РСФСР 1943/66. М.: Педагогика. 1973.

9. На путях обновления школьного курса математики М.: Просвещение. 1978.

10. Проблемы школьного учебника. М. 1983.

11. Математическое просвещение. 1965-1969, №№1-6.

12. Вестник образования России. 2008, №2.

13. Коммунист. 1980, №14. 1982, №2.

14. Образование, которое мы можем потерять. М. 2002.

15. Народное образование. 1998, №4.

16. О преподавании математики в V-IX классах. М.: АПН РСФСР. 1949.

17. Всероссийская конференция “Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков”. Дубна, сентябрь 2000. М.: МЦНМО, 2000.

Костенко Игорь Петрович,
Ростовский государственный университет
путей сообщений (филиал в г. Краснодаре),
доцент, кандидат физ.-мат. наук,
действительный член Международной
педагогической академии.

E-mail: kost@kubannet.ru

Алгебраический метод решения задач с параметрами

В. Б. Дроздов

В статье рассмотрен ряд алгебраических методов решения задач с параметрами на примерах конкурсных задач различных вузов за разные годы. В современных условиях эти методы могут быть полезны старшеклассникам при решении задач ЕГЭ уровня С.

Далеко не каждая задача с параметром (уравнение, неравенство, система) может быть решена с использованием прямоугольной системы координат. Примерно в половине случаев силу и наглядность геометрических соображений применить не удастся. Причина этого в том, что соответствующие графики неудобны для анализа (например, два «движущихся» при изменении параметра сложных графика), либо просто отсутствует объект для построения.

Такие задачи следует решать, используя чисто алгебраическую логику. Они весьма разнообразны и, естественно, невозможно указать общий метод их решения. Хотя, существуют приемы решения определенных типов задач, которые надо понять и запомнить. Чтобы легче ориентироваться в математической ситуации конкретной задачи, необходимо решить достаточное количество задач. К рассмотрению которых и приступаем.

Задача 1. (МГУ, физфак, 1988). При каких значениях a система

$$\begin{cases} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Выражаем y через x из второго уравнения системы: $y = -\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ (что возможно только при $x \neq -2$!) и подставляем в первое уравнение:

$$\frac{(a-1)x^2 + (a - \frac{9}{2})x - 4}{x+2} = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) при $a = 1$ будет иметь единственное решение как линейное. Оно будет иметь один корень и при равенстве нулю дискриминанта $D = a^2 + 7a + \frac{17}{4}$, то есть при $a = \frac{-7\pm4\sqrt{2}}{2}$.

Математическая «изюминка» задачи в том, что уравнение (1) не может иметь своим корнем $x = -2$. Значит, если $x = -2$, то квадратное уравнение $(a-1)x^2 + (a - \frac{9}{2})x - 4 = 0$ наряду с единственным корнем $x = -\frac{4}{3}$ содержит и посторонний для уравнения (1) корень $x = -2$. Легко проверить вычислением, что это будет при $a = -\frac{1}{2}$. Итак, ответ в задаче таков: $a = 1$; $a = \frac{-7\pm4\sqrt{2}}{2}$; $a = -\frac{1}{2}$.

Задача 2. (МГУ, мехмат, 1996). При каких значениях параметра a уравнение

$$(x^2 - x + a^2 + 1)^2 = 4a^2(5x^2 - x + 1)$$

имеет ровно три различных решения?

Решение. Естественно, записав уравнение в эквивалентном виде $(x^2 - x + a^2 + 1)^2 - -4a^2(5x^2 - x + 1) - 0$, попробовать разложить левую часть уравнения на множители. Используем выражение $x^2 - x + 1$, общее для обоих слагаемых, выделив его:

$$\big((x^2 - x + 1) + a^2\big)^2 - 4a^2\big((x^2 - x + 1) + 4x^2\big) = 0;$$
$$(x^2 - x + 1) + 2a^2(x^2 - x + 1) + a^4 - 4a^2(x^2 - x + 1) - (4ax)^2 = 0;$$
$$\big((x^2 - x + 1) - a^2\big)^2 - (4ax)^2 = 0;$$
$$\big(x^2 + (4a - 1)x + (1 - a^2)\big)\big(x^2 - (4a + 1)x + (1 - a^2)\big) = 0.$$

Итак, данное уравнение эквивалентно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + (4a - 1)x + (1 - a^2) = 0, \\ x^2 - (4a + 1)x + (1 - a^2) = 0. \end{array}\right.$$

Легко видеть, что исходное уравнение будет иметь ровно три различных корня тогда и только тогда, когда:

а) дискриминант первого уравнения равен нулю, и при этом дискриминант второго — больше нуля;

б) дискриминант второго уравнения равен нулю, и при этом дискриминант первого — больше нуля;

в) какой-либо корень первого уравнения совпадает с каким-либо корнем второго уравнения, причем дискриминанты обоих уравнений положительны.

Последовательный перебор этих вариантов носит рутинный характер, и ответ задачи: $a_{1,2} = \pm 1$, $a_{3,4} = \pm\frac{1}{10}(2 + \sqrt{19})$.

Задача 3. (Московский государственный открытый университет, 2002). Решить уравнение

$$\frac{1 + x - \sqrt{2x + x^2}}{1 + x + \sqrt{2x + x^2}} = a^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2 + x} + \sqrt{x}}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{x}}\right).$$

Решение. Очевидно, что $x \geq 0$. Наличие иррациональностей в знаменателях наводит на мысль убрать их оттуда умножением на сопряженные выражения. В результате получим:

$$\left(1 + x + \sqrt{2x + x^2}\right)^2 = \frac{1 + x - \sqrt{2x + x^2}}{a^2}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части последнего уравнения, на $1 + x + \sqrt{2x + x^2}$:

$$\left(a\left(1 + x + \sqrt{2x + x^2}\right)\right)^3 = 1.$$

Наступил переломный момент в решении — данное уравнение эквивалентно гораздо более простому:

$$a\left(1 + x + \sqrt{2x + x^2}\right) = 1.$$

Ясно, что при $a \leq 0$ решений нет. При $a > 0$ решаем иррациональное уравнение $\sqrt{2x + x^2} = \frac{1}{a} - (x + 1)$ возведением обеих частей в квадрат и учитывая, что $\frac{1}{a} - (x + 1) \geq 0$:

$$2x + x^2 = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a}(x + 1) + x^2 + 2x + 1,$$

откуда $x = (a-1)^2/2a$. Видим, что условие $x \geq 0$ выполняется. Легко проверить, что $\frac{1}{a} - (x+1) \geq 0$ при $-1 \leq a \leq 1$. С учетом положительности a приходим к ответу: при $0 < a \leq 1$ $x = (a-1)^2/2a$; при остальных a решений нет.

Задача 4. (МГУ, экономический факультет, 1974). Найти все значения величины h, при которых уравнение

$$x(x+1)(x+h)(x+1+h) = h^2$$

имеет четыре различных корня.

Решение. Если в левой части уравнения перемножить все скобки, то получим уравнение четвертой степени. Чтобы этого избежать, естественно отдельно перемножить два двучлена и одночлен с трехчленом:

$$\big(x^2+(h+1)x+h\big)\big(x^2+9h+1)x\big) = h^2.$$

Очевидная замена $x^2+(h+1)x = y$ приводит к квадратному уравнению $y^2+hy-h^2=0$ с корнями $y_{1,2} = \frac{h(-1\pm\sqrt{5})}{2}$. Таким образом, данное уравнение эквивалентно следующей совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+(h+1)x+\frac{(1+\sqrt{5})h}{2}=0, \\ x^2+(h+1)x+\frac{(1-\sqrt{5})h}{2}=0. \end{array}\right.$$

Корни квадратных уравнений таковы:

$$x_{1,2} = \frac{-(h+1)\pm\sqrt{h^2-2\sqrt{5}h+1}}{2}, \qquad x_{3,4} = \frac{-(h+1)\pm\sqrt{h^2+2\sqrt{5}h+1}}{2}.$$

Ясно, что условие задачи выполняется в том и только в том случае, когда справедлива система неравенств:

$$\begin{cases} h^2-2\sqrt{5}h+1>0, \\ h^2+2\sqrt{5}h+1>0, \\ x_1\ne x_3;\ x_1\ne x_4;\ x_2\ne x_3;\ x_2\ne x_4. \end{cases}$$

Решение квадратных неравенств и выяснение условия несовпадения корней (а они совпадают только при $h=0$) вполне элементарно и приводит к такому результату:

$$-\infty<h<-2-\sqrt{5};\quad 2-\sqrt{5}<h<0;\quad 0<h<\sqrt{5}-2;\quad 2+\sqrt{5}<h<+\infty.$$

Задача 5. (МИРЭА, 1993). Найти все значения параметра a, при которых данная система разрешима, и решить ее при всех найденных a:

$$\begin{cases} 2(x^2+a^2)+5y^2+24y+29 = 6(xy+a)+2ay+14x, \\ 2^x+3^y=35. \end{cases}$$

Решение. Сначала обратим внимание на первое уравнение, записав его в виде квадратного, например, относительно x:

$$2x^2-(6y+14)x+(2a^2+5y^2+24y-2ay-6a+29)=0.$$

Переменную y условно считаем как бы вторым параметром. Этот прием следует запомнить: он пригодится при решении других задач! Находим дискриминант и требуем его неотрицательности:

$$-y^2-6y-9-4a^2+12a+4ay\ge 0 \text{ или } y^2+4a^2+9-4ay-12a\le 0.$$

В левой части последнего неравенства узнаем квадрат трехчлена: $(y-2a+3)^2\le 0$, откуда $y=2a-3$. Значит,

$$x = \frac{6y+14}{4} = 3a-1.$$

Настало время рассмотреть второе уравнение, которое принимает вид

$$2^{3a-1}+3^{2a-3}=35.$$

Это уравнение, по известной терминологии, «нестандартное», то есть не сводящееся к алгебраическому уравнению. Его левая часть — монотонно возрастающая на всей числовой прямой функция. Значит, уравнение, если и имеет решение, то единственное, законно находимое подбором. Легко видеть, что $a = 2$, чему соответствует $x = 5$, $y = 1$. При остальных a предложенная система уравнений решений не имеет.

Задача 6. (МГУ, экономический факультет, 1974). При каких значениях h многочлен $x^4+2^{\cos h}\cdot x^2 + (\sin h + \operatorname{tg} h)x + 2^{\cos h} - 1$ является квадратом квадратного трехчлена относительно x?

Решение. По условию задачи имеем

$$x^4 + 2^{\cos h}\cdot x^2 + (\sin h + \operatorname{tg} h)x + 2^{\cos h} - 1 = (x^2+bx+c)^2 = x^4 + 2bx^3 + (2c+b)x^2 + 2bcx + c^2.$$

Исходя из тождественного равенства двух многочленов, получим систему четырех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} 2b = 0, \\ 2c + b = 2^{\cos h}, \\ 2bc = \sin h + \operatorname{tg} h, \\ c^2 = 2^{\cos h} - 1. \end{cases} \quad \text{откуда следует} \quad \begin{cases} 2c = 2^{\cos h}, \\ 0 = \sin h + \operatorname{tg} h, \\ c^2 = 2^{\cos h} - 1. \end{cases}$$

Теперь исключаем c:

$$\begin{cases} \sin h + \operatorname{tg} h = 0, \\ 2^{\cos h} = 4\cdot 2^{\cos h} - 4. \end{cases}$$

Последнее уравнение легко приводится к виду $(2^{\cos h}-2)^2 = 0$, откуда $\cos h = 1$. Но тогда $\sin h + \operatorname{tg} h = 0$, ибо $\sin h = \operatorname{tg} h = 0$. Следовательно, $h = 2k\pi$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Задача 7. (МФТИ, 1991). В зависимости от значений параметра a найти число корней уравнения

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} = a.$$

Решение. Решение задачи радикально упрощается, если заметить под корнем квадрат двучлена:

$$x + \frac{1}{2} + \sqrt{x+\frac{1}{4}} = \left(x + \frac{1}{4}\right) + \sqrt{x+\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} = \left(\sqrt{x+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Тогда $x + \sqrt{x+\frac14} + \frac12 = a$, или $\left(x+\frac14\right) + \sqrt{x+\frac14} + \frac14 = a$. Опять видим квадрат двучлена: $\left(\sqrt{x+\frac14}+\frac12\right)^2 = a$. Очевидно, что при $a \geq \frac14$ имеется единственное решение $x = \left(\sqrt{a}-\frac12\right)^2 - \frac14$, а при $a < \frac14$ решения отсутствуют.

Задача 8. (МФТИ, 1989). Найти все значения a, при которых уравнения

$$22x^4 + 33x^3 - 16ax^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{и} \quad 11x^4 + 33x^3 + 21x^2 - 2ax - 2 = 0$$

имеют общие корни. Найти эти корни.

Решение. Фактически надо исключить x из системы двух уравнений с двумя переменными x и a. Так как $x = 0$ не удовлетворяет второму уравнению, то приходим к системе с одинаковыми старшими членами:

$$\begin{cases} 33x^3 + 66x^2 + (21 - 16a)x - (2a + 3) = 0, \\ 33x^3 + (42 + 16a)x^2 + (3 - 4a)x - 6 = 0, \end{cases}$$

следствием которой является квадратное уравнение относительно x:

$$(24 - 16a)x^2 + (18 - 12a)x + (3 - 2a) = 0,$$

равносильное уравнению $(2a - 3)(8x^2 + 6x + 1) = 0$. Сразу получаем: $a_0 = a_0 = 3/2$.

Корням квадратного уравнения $8x^2 + 6x + 1 = 0$, $x_1 = -1/2$ и $x_2 = -1/4$ соответствуют значения $a_1 = 3/16$ и $a_2 = 297/128$, что легко находится из любого исходного уравнения.

Задача 9. Решить уравнение $ax^3 + (a^2 - 2)x^2 - ax - 2 = 0$.

Решение. Можно применить искусственный прием, представив левую часть уравнения в виде $ax^3 + a^2x^2 + ax - (2x^2 + 2ax + 2)$ с последующим очевидным разложением ее на множители. А можно использовать и более общее соображение, которое разумно «взять на вооружение»: если степень уравнения относительно параметра ниже его степени относительно переменной, то надо решать уравнение относительно параметра.

Имеем: $x^2 \cdot a^2 + (x^3 - x)a - (2x^2 + 2) = O$. Дискриминант уравнения «удобный» — квадрат двучлена: $D = (x^3 - x)^2 + 8x^2(x^2 + 1) = (x^3 + 3x)^2$. Значит,

$$a = \frac{x - x^3 \pm (3x + x^3)}{2x^2} = \frac{1 - x^2 \pm (3 + x^2)}{2x}; \qquad (x \neq 0).$$

Осталось решить совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} ax = 2, \\ x^2 + ax + 1 = 0. \end{array} \right.$$

Последнее несложно и приводит к такому результату:

1) $-\infty < a \leq -2 \Rightarrow x_1 = 2/a$; $x_{2,3} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$;

2) $-2 < a < 0 \Rightarrow x = 2/a$;

3) $a = 0 \Rightarrow$ нет решений;

4) $0 < a < 2 \Rightarrow x = 2/a$;

5) $2 \leq a < +\infty \Rightarrow x_1 = 2/a$; $x_{2,3} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$.

Задача 10. (МГУ, мехмат, 1965). Найти все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} \left|\frac{x^y - 1}{x^y + 1}\right| = a, \\ x^2 + y^2 = b, \\ x > 0 \end{cases}$$

имеет только одно решение.

Решение. Необходимо запомнить: если в уравнении или системе уравнений с параметром говорится о единственном решении, надо проверить, не имеется ли решений, равных по модулю, но противоположных по знаку. В случае утвердительного ответа на этот вопрос очевидно, что решением может быть только нулевое.

Имеем:

$$\left|\frac{x^{-y} - 1}{x^{-y} + 1}\right| = \left|\frac{1 - x^y}{1 + x^y}\right|,$$

откуда вытекает, что $y = 0$. После этого система уравнений радикально упрощается:

$$\begin{cases} a = 0, \\ x^2 = b, \\ x > 0. \end{cases}$$

Если $a = 0$, то $x^y = 1$, что будет не только при $y = 0$, но и при $x = 1$. Следовательно, данная система уравнений распадается на две:

$$\begin{cases} x = \sqrt{b}, \\ y = 0, \\ b > 0; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y^2 = b - 1, \\ b > 0. \end{cases}$$

При $0 < b < 1$ вторая система решений не имеет, а при $b = 1$ имеет то же решение, что и первая. Однако при $b > 1$ вторая система имеет решения $(1; \pm\sqrt{b-1})$, дополнительные к единственному решению $(\sqrt{b}; 0)$ первой системы. Значит, данная система уравнений имеет только одно решение $(\sqrt{b}; 0)$ в том, и только том случае, когда $a = 0$ и $0 < b \le 1$.

В заключение — домашнее задание: десять задач с ответами.

1. (МГУ, физфак, 1967). Для каждого числа $a > 0$ решить неравенство $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$.

2. (МГУ, физфак, 1968). Решить уравнение $|\cos x|^{\operatorname{ctg} 2x + a \operatorname{ctg} x} = 1$.

3. (МГУ, физфак, 1991). При каких значениях a все корни уравнения $3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$ удовлетворяют условию $|x| < 1$?

4. (МГУ, экономический факультет, 1974). Найти все значения величины h, при которых уравнение $x^4 + (h-1)x^3 + x^2 + (h-1)x + 1 = 0$ имеет не менее двух различных отрицательных корней.

5. (МГУ, экономический факультет, 1977). Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $25y^2 + \frac{1}{100} \ge x - axy + y - 25x^2$ выполняется для любых пар чисел (x, y), таких, что $|x| = |y|$.

6. (МГУ, экономический факультет, 1988). Найти все значения параметра a, при которых неравенство $|3\sin^3 x + 2a \sin x \cos x + \cos^3 x + a| \le 3$ выполняется для любых значений a.

7. (МГУ, химфак, 2001). При всех a решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x - 2a(\sin x + \sin 2x + \sin 3x) + \cos x - \cos 3x + 2a^2 = 0.$$

8. (МГУ, факультет психологии, 1995). Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2 + 9} \le -\frac{x^2 + 9}{a + \cos x} - a$$

имеет единственное решение.

9. (МФТИ, 1994). Числа $x \le 0$, $y > 0$ — решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy - 3y^2 = \frac{10p - p^2}{4p^2 + 9}, \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = \frac{10 - p}{4p^2 + 9}, \end{cases}$$

p — параметр. При каких p выражение $x^2 + y^2$ принимает: а) наибольшее значение; б) наименьшее значение? Вычислить эти значения.

10. (МФТИ, 1993). В зависимости от параметра a определить число корней уравнения

$$x^4 - 10x^3 - 2(a - 11)x^2 + 2(5a + 6) + 2a + a^2 = 0.$$

Ответы

1. $0 < a < 2 \Rightarrow -a \leq x \leq a$; $a = 2 \Rightarrow -2 < x < 2$; $2 < a < 4 \Rightarrow -\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)} < x < \frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}$; $a \geq 4 \Rightarrow$ нет решений. **2.** $a > -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = k\pi \pm \operatorname{arctg}\sqrt{1+2a}$, где $k \in \mathbb{Z}$; при $a \leq -\frac{1}{2}$ нет решений. **3.** $a = 0$; $2+\sqrt{3} < a < 2+\sqrt{5}$. **4.** $h > 5/2$. **5.** $a = 50$. **6.** $-12/5 \leq a \leq 0$. **7.** При $a = 0 \quad x = \pi n$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $n, k \in \mathbb{Z}$. При остальных a решений нет. **8.** $a = 2$. **9.** $f_{\max} = f(-1/2) = 7/40$; $f_{\min} = f(1) = 1/7$. **10.** При $a < -9$ нет решений; при $a = -9$ одно решение; при $-9 < a < -6$ два решения; при $a = -6$, $a = -5$ три решения; при $-6 < a < -5$, $a > -5$ четыре решения.

Дроздов Виктор Борисович,
г. Рязань.

Опорные задачи и теоремы при нахождении площадей треугольника и черырехугольника

Е. В. Потоскуев

Автор рассматривает ряд опорных фактов, помогающих при решении задач на нахождение площадей. С другой стороны, “метод площадей” сам является средством решения многих задач, в том числе и повышенной трудности. Каждый приведенный опорный факт сопровождается примером его использования.

В теоретической части школьного курса планиметрии содержатся, в основном, теоремы, необходимые для логического изложения этого курса. Однако, некоторые теоремы, носящие “прикладной характер” и востребованные при решении задач, оказываются исключенными из курса. Одной из причин такого “выхода из обращения” многих “рабочих” теорем является тот факт, что решение задач зачастую носит тематический характер, вследствие чего ведется выработка навыков применения лишь определенной теоремы: решаются задачи, которые называют опорными, базовыми. Но при решении более сложной задачи приходится использовать целый комплекс, как опорных задач, так и теорем “прикладного характера”.

В данной статье сделана попытка проиллюстрировать роль “великого содружества” различных “опорных фактов” и теорем “прикладного характера” при решении задач, связанных с вычислением площадей треугольника и четырехугольника.

Заметим, что прежде чем приступить к решению геометрической задачи, необходимо представить, вообразить и нарисовать фигуры, о которых идет речь. Иначе говоря, первым и важнейшим этапом решения геометрической задачи является построение верного, наглядного чертежа (рисунка) по условию этой задачи.

При решении задач на нахождение площади S треугольника недостаточно знать и уметь пользоваться только формулами: $S = \frac{1}{2}a \cdot h$; $S = \frac{1}{2}ab\sin C$; $S = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r$, r — радиус вписанной окружности; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, p — полупериметр. $S = \frac{abc}{4R}$, R — радиус описанной окружности. Довольно часто возникает необходимость использовать утверждения о том, что: а) отношение площадей двух треугольников, имеющих общее основание (равные высоты), равно отношению высот (оснований) этих треугольников; б) отношение площадей двух треугольников, имеющих равный угол, равно отношению произведений длин сторон этих треугольников, заключающих этот угол: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MPK}} = \frac{AB \cdot AC}{MP \cdot MK}$, $(\angle BAC = \angle PMK)$; в) если AM — биссектриса треугольника ABC, то $S_{\Delta ABM} : S_{\Delta ACM} = AB : AC$. “Рабочими” являются и ряд других базовых, “опорных” утверждений. Знание и умение применять их во многих случаях облегчает решение нестандартных задач, задач повышенной сложности, в том числе, задач олимпиадных.

Рассмотрим, например, задачу, при решении которой используется свойство диагонали параллелограмма делить его на два равных (равновеликих) треугольника.

Задача 1. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 26$ см, $AC = 30$ см и длина медианы AM равна 14 см.

Решение. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ (рис. 1), в котором M — середина AD. Тогда $AD = 28$, и по формуле Герона находим $S_{ABD} = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 12 \cdot 14} = 336$, что составляет половину площади параллелограмма $ABDC$, которая, в свою очередь, равна удвоенной площади треугольника ABC. Значит, $S_{\Delta ABC} = 336$ (см^2).

Ответ: 336 см^2.

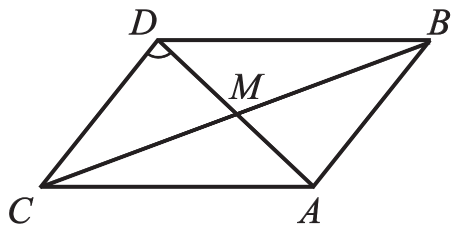

Рис. 1

Известно, что радиус r окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c, находится по формуле: $r = \dfrac{a+b-c}{2}$. Использование этой формулы в сочетании с формулой $S = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$ обеспечивает простое решение целого ряда задач, в той или иной форме связанных с вычислением площади треугольника. Примером может служить решение следующей задачи.

Задача 2. Площадь прямоугольного треугольника равна 60 дм^2, а его периметр равен 40 дм. Найдите катеты треугольника.

Решение. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC : $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$; $\angle ACB = 90°$; r — радиус окружности, вписанной в этот треугольник (рис. 2). Тогда: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a\cdot b = 60$; $r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{2S_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{2\cdot 60}{40} = 3$.

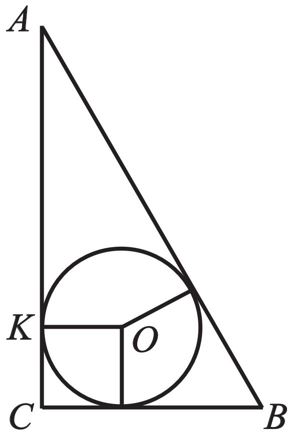

Рис. 2

Получаем: $\begin{cases} a+b+c = 40, \\ a+b-c = 6 \end{cases} \Rightarrow 2c = 34 \Rightarrow c = 17$. Имеем: $\begin{cases} a\cdot b = 120, \\ a+b = 23. \end{cases}$ Это означает, что значения a и b являются корнями уравнения: $t^2 - 23t + 120 = 0$, $t > 0$. Находим $t_1 = 8, t_2 = 15$. Значит, $a = 8$, $b = 15$. Таким образом, $BC = 8$(дм), $AC = 15$(дм).

Ответ: 8дм, 15дм.

При решении задач на вычисление площадей во многих случаях "помогает" теорема Менелая: Пусть A_1, B_1, C_1 — три точки, лежащие на сторонах соответственно BC, CA, AB треугольника ABC, или на их продолжениях (рис. 3). Точки A_1, B_1, C_1 тогда и только тогда лежат на одной прямой, если:

$$\left|\frac{AC_1}{C_1B}\right| \cdot \left|\frac{BA_1}{A_1C}\right| \cdot \left|\frac{CB_1}{B_1A}\right| = 1.$$

В качестве примера рассмотрим решение следующей задачи.

Задача 3. В треугольнике ABC точка M делит сторону BC в отношении $BM : MC = 3:4$, а точка H — сторону AC в отношении $AH : HC = 2:5$. Отрезки BH и AM пересекаются в точке K. Найдите площадь треугольника AKH, если площадь треугольника BKM равна 45.

Решение. На рис. 3 видно, что $S_{\Delta AKH} : S_{\Delta ABK} = HK : KB$, поэтому для решения задачи достаточно найти $S_{\Delta ABK}$ и определить величину отношения $HK : KB$.

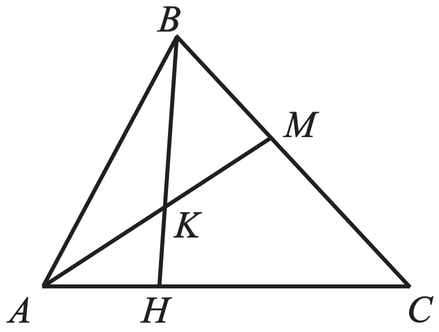

Рис. 3

Воспользуемся теоремой Менелая для треугольника BCH и прямой AM. Имеем:

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CA}{AH} \cdot \frac{HK}{KB} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{HK}{KB} = 1 \Rightarrow \frac{HK}{KB} = \frac{8}{21}.$$

Далее, по теореме Менелая для треугольника AMC и прямой BH имеем:

$$\frac{AK}{KM} \cdot \frac{MB}{BC} \cdot \frac{CH}{HA} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{AK}{KM} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow \frac{AK}{KM} = \frac{14}{15}.$$

Получаем: $\frac{AK}{KM} = \frac{14}{15}$, $S_{\Delta BAK} : S_{\Delta BKM} = AK : KM \Rightarrow S_{\Delta BAK} : S_{\Delta BKM} = 14 : 15 \Rightarrow S_{\Delta BAK} =$ $= \frac{14}{15} S_{\Delta BKM} = \frac{14}{15} \cdot 45 = 42.$

Тогда: $S_{\Delta AHK} : S_{\Delta AKB} = HK : KB = 8 : 21 \Rightarrow S_{\Delta AHK} = \frac{8}{21} S_{\Delta AKB} == \frac{8}{21} \cdot 42 = 16$ (кв.ед.).

Ответ:16 кв.ед.

Полезно во многих случаях использовать “опорный” факт о том, что четырехугольник, вершинами которого служат середины сторон данного четырехугольника, является параллелограммом. Причем, этот параллелограмм может быть прямоугольником, ромбом или квадратом, в зависимости от длин диагоналей данного четырехугольника и величины угла между ними.

Рассмотрим, например, решение следующих двух “родственных”, вместе с тем, “по условиям противоположных” задач.

Задача 4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины диагоналей равны 7 и 18. Найдите площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.

Решение. Пусть MK и PH — отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (рис. 4), причем $MK = PH$, $AC = 18$, $BD = 7$.

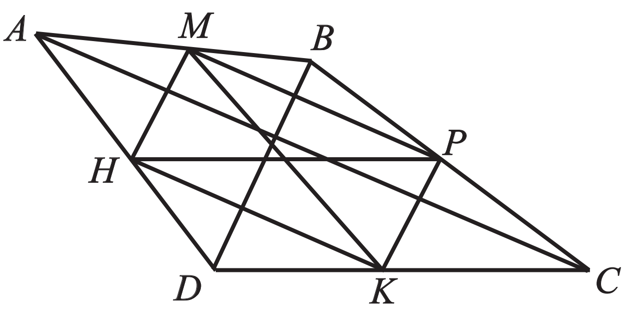

Рис. 4

Имеем: $MP \parallel AC$, $MP = \frac{1}{2}AC$ (как средняя линия ΔABC); $HK \parallel AC$, $HK = \frac{1}{2}AC$ (как средняя линия ΔADC) $\Rightarrow MP \parallel HK$, $MP = HK \Rightarrow MPKH$ — параллелограмм. А так как $MK = PH$, то четырехугольник $MPKH$ — прямоугольник, стороны которого параллельны диагоналям AC и BD данного четырехугольника $ABCD$, поэтому $AC \perp BD$. Это означает, что $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 7 = 63$ (кв.ед.).

Ответ: 63 кв. ед.

Задача 5. Найдите площадь выпуклого четырехугольника, имеющего равные диагонали, если длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны 13 и 7.

Решение. Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки M, P, K и H — середины его сторон соответственно AB, BC, CD и AD (рис. 5), при этом $MK = 7$, $PH = 13$; $O = AC \cap BD$; $\angle BOC = \varphi$. Так как MP и KH средние линии треугольников ABC и ADC с общим основанием AC, то $MP \parallel KH \parallel AC$, $MP = KH = \frac{1}{2}AC$, поэтому $MPKH$ — параллелограмм, в котором $PK \parallel MH \parallel BD$, $PK = MH = \frac{1}{2}BD$. Учитывая, что $AC = BD$, получаем: $MPKH$ — ромб, в котором $\angle MHK = \angle BOC = \varphi$. Найдем дважды площадь этого ромба.

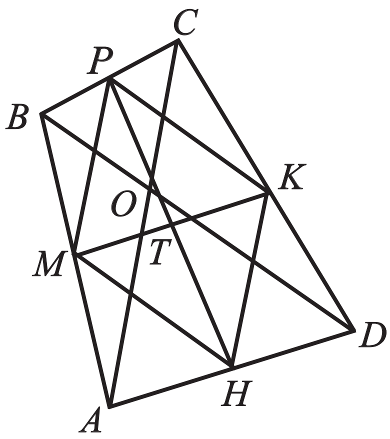

Рис. 5

Имеем: $S_{MPKH} = MH \cdot HK \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}MK \cdot PH$. Теперь находим:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 2HK \cdot 2HM \cdot \sin\varphi = 2 \cdot HK \cdot HM \cdot \sin\varphi = 2S_{MPKH} = 2 \cdot (\frac{1}{2}MK \cdot PH) = MK \cdot PH = 7 \cdot 13 = 91$ (кв. ед.).

Ответ: 48 кв. ед.

А в решении следующей задачи “ключевым моментом” является использование “опорной” задачи о равновеликости двух треугольников, имеющих общее основание, если третьи вершины треугольников расположены на прямой, параллельной их общему основанию.

Задача 6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ через середину диагонали BD проведена прямая, параллельная диагонали AC и пересекающая сторону AD в точке E. Докажите, что прямая CE разбивает четырехугольник $ABCD$ на две равновеликие части.

Решение. Пусть K — середина диагонали BD, P — точка пересечения данной прямой со стороной CD четырехугольника $ABCD$ (рис. 6). Тогда $S_{\Delta ACE} = S_{\Delta ACM}$, где M — любая точка прямой PE. Значит, $S_{ABCE} = S_{ABCM}$.

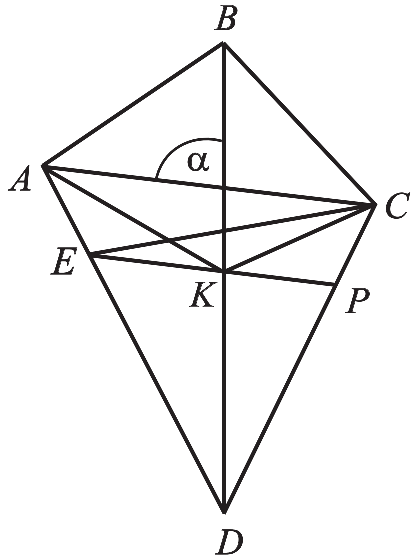

Рис. 6

Возьмем в качестве M точку K — середину диагонали BD. Тогда $S_{ABCE} = S_{ABCK} = \frac{1}{2}BK \cdot AC \cdot \sin\alpha$, где α — угол между диагоналями данного четырехугольника. Так как $BK = \frac{1}{2}BD$, то $S_{ABCK} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}BD \cdot AC \cdot \sin\alpha)$. Значит, $S_{ABCE} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, что и требовалось доказать.

Известно, что если два треугольника имеют равный угол, то отношение площадей данных треугольников равно отношению произведений длин их сторон, заключающих этот угол: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MPK}} = \frac{AB \cdot AC}{MP \cdot MK}$, $(\angle BAC = \angle PMK)$.

Рассмотрим использование этого факта на примере решения следующей задачи.

Задача 7. Точки K, M и T расположены соответственно на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC так, что $AK\colon KB = BM : MC = CT : TA = 2 : 5$ (рис. 7). Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника KMT равна 38.

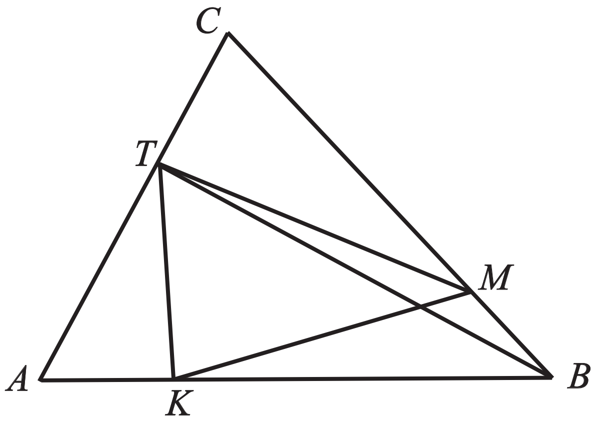

Рис. 7

Решение. Имеем: $AK : KB = 2 : 5 \Rightarrow AK : AB = 2 : 7$; $CT : TA = 2 : 5 \Rightarrow AT : AC = 5 : 7$. Тогда: $S_{\Delta ATK} : S_{\Delta ABC} = \frac{AK \cdot AT}{AB \cdot AC} = \frac{AK}{AB} \cdot \frac{AT}{AC} = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{49} \Rightarrow S_{\Delta ATK} = \frac{10}{49} \cdot S_{\Delta ABC}$.

Аналогично, $AK : KB = 2 : 5 \Rightarrow BK : BA = 5 : 7$; $BM : MC = 2 : 5 \Rightarrow BM : BC = 2 : 7$. Тогда: $S_{\Delta BMK} : S_{\Delta ABC} = \frac{BK \cdot BM}{BA \cdot BC} = \frac{BK}{BA} \cdot \frac{BM}{BC} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{10}{49} \Rightarrow S_{\Delta BMK} = \frac{10}{49} \cdot S_{\Delta ABC}$.

Далее, аналогично найдем: $S_{\Delta CMT} = \frac{10}{49} \cdot S_{\Delta ABC}$.

Получаем: $S_{\Delta MTK} = S_{\Delta ABC} - (S_{\Delta ATK} + S_{\Delta BMK} + S_{\Delta CMT}) = S_{\Delta ABC} - 3 \cdot \frac{10}{49} \cdot S_{\Delta ABC} = = \frac{19}{49} S_{\Delta ABC} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{49}{19} S_{\Delta MTK} = \frac{49}{19} \cdot 38 = 98$ (кв.ед.).

Ответ: 98 кв. ед.

Можно при решении этой задачи воспользоваться и другим “опорным” фактом: если точка C лежит внутри отрезка AB и делит этот отрезок в отношении $AC : CB = m : n$, то для любой точки $P \notin AB$ имеет место:

$$S_{\Delta PAC} = \frac{m}{n} S_{\Delta PBC}; \quad S_{\Delta PAC} = \frac{m}{m+n} S_{\Delta PAB}; \quad S_{\Delta PBC} = \frac{n}{m+n} S_{\Delta PAB}.$$

В нашем случае имеем:

$$AK : KB = 2 : 5 \Rightarrow AK : AB = 2 : 7 \Rightarrow AK = \frac{2}{7} AB \Rightarrow S_{\Delta ATK} = \frac{2}{7} S_{\Delta ATB};$$

$$CT : TA = 2 : 5 \Rightarrow AT : AC = 5 : 7 \Rightarrow AT = \frac{5}{7} AC \Rightarrow S_{\Delta ATB} = \frac{5}{7} S_{\Delta ABC}.$$

Тогда $S_{\Delta ATK} = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} S_{\Delta ABC} = \frac{10}{49} \cdot S_{\Delta ABC}$. Аналогично находятся $S_{\Delta BMK}$ и $S_{\Delta CMT}$.

Полезно рассмотреть и третий возможный путь решения этой задачи.

Имеем: $AK = \frac{2}{7} AB$; $AT = \frac{5}{7} AC$. Тогда: $S_{\Delta ATK} = \frac{1}{2} AT \cdot AK \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} AC \cdot \frac{2}{7} AB \times \sin A = = (\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7}) \cdot (\frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin A) = \frac{10}{49} \cdot S_{\Delta ABC}$.

Аналогично: $S_{\Delta BMK} = \frac{1}{2} BK \cdot BM \cdot \sin B == \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} BA \cdot \frac{2}{7} BC \cdot \sin B = \frac{10}{49} \cdot S_{\Delta ABC}$.

Далее: $S_{\Delta CMT} = \frac{1}{2} CT \cdot CM \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} CA \cdot \frac{2}{7} CB \cdot \sin C = \frac{10}{49} S_{\Delta ABC}$. Получаем: $S_{\Delta MTK} = = S_{\Delta ABC} - (S_{\Delta ATK} + S_{\Delta BMK} + S_{\Delta CMT}) = S_{\Delta ABC} - 3 \cdot \frac{10}{49} S_{\Delta ABC} == \frac{19}{49} S_{\Delta ABC} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = = \frac{49}{19} S_{\Delta MTK} = \frac{49}{19} \cdot 38 = 98$ (кв.ед.).

Ответ: 98 кв. ед.

“Опорные” (иногда называемые “дежурными”) факты довольно часто позволяют найти решение нестандартной, творческой задачи. Рассмотрим, например, следующие нестандартные задачи разного уровня сложности.

Задача 8. Длины двух сторон треугольника равны 13 и 14. Сколько различных целых значений может принимать площадь этого треугольника?

Указание. Пусть в $\Delta ABC : AB = 13$, $AC = 14$. Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = 91 \cdot \sin A$. Так как $0 < A < 180°$, то $0 < \sin A < 1$. Значения $S_{\Delta ABC}$ будут целыми при условии: $\sin A = \frac{1}{91}; \frac{2}{91}; \frac{3}{91}; \ldots; \frac{90}{91}; \frac{91}{91} = 1$, откуда следует, что число целых значений площади данного треугольника равно 91.

Ответ: 91.

Равновеликость двух треугольников с числовыми данными доказывается непосредственным вычислением их площадей. Однако могут появиться трудности при решении такой задачи, если не даны ни длины сторон, ни величины углов данных треугольников. В этом случае для равновеликости треугольника ABC (с основанием AC и высотой BH) и треугольника MPK (с основанием MK и высотой PT) достаточно доказать, что $AC \cdot BH = MK \cdot PT$ или $\frac{AC}{MK} = \frac{PT}{BH}$. Равенство отношений длин сторон двух треугольников во многих случаях связано с их подобием.

Рассмотрим, например, решение следующей нестандартной задачи.

Задача 9*. Дан треугольник ABC, в котором $AB = BC$, $BC \neq AC$. На стороне AB выбрана точка M, а на продолжении стороны AC за точку A выбрана точка H так, что $\angle BHC = \angle ACM$ (рис. 8). Докажите, что площади треугольников AMH и CBM равны.

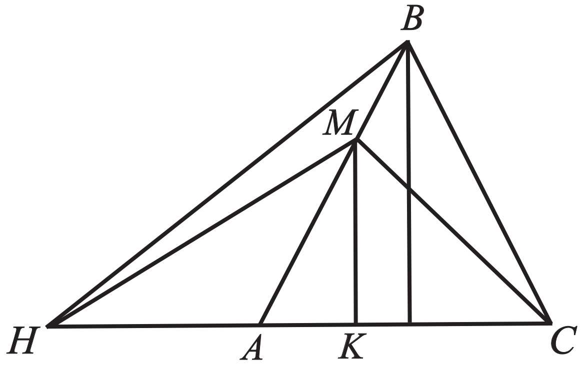

Рис. 8

Решение. Замечаем, что ΔAMH является составной частью треугольника CMH, а ΔBCM — составной частью треугольника ABC, при этом ΔAMC является общим для треугольников CMH и ABC. Поэтому для доказательства равновеликости треугольников AMH и BCM достаточно доказать равновеликость треугольников CMH и ABC.

Проведем высоты BP и MK треугольников соответственно ABC и MCH. Имеем: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BP$, $S_{\Delta MCH} = \frac{1}{2}HC \cdot MK$.

Тогда: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta MHC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}HC \cdot MK = \frac{1}{2}AC \cdot BP \Leftrightarrow HC \cdot MK = AC \cdot BP \Leftrightarrow \frac{AC}{HC} = \frac{MK}{BP}$. Докажем, что $\frac{AC}{HC} = \frac{MK}{BP}$.

Так как $\angle BHC = \angle ACM$ (по условию), $\angle MAC = \angle ACB$ (как углы при основании равнобедренного ΔABC), то треугольники AMC и CBH подобны. Из подобия этих треугольников следует: $\frac{AC}{HC} = \frac{MK}{BP}$, откуда $HC \cdot MK = AC \cdot BP \Rightarrow \frac{1}{2}HC \cdot MK = \frac{1}{2}AC \cdot BP \Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMC}$. Учитывая ранее сказанное, получаем: $S_{\Delta AMH} = S_{\Delta BMC}$, что и требовалось доказать.

Площади треугольников могут использоваться и как своеобразный аппарат, который можно назвать "методом площадей" решения более сложных задач. Может быть полезен, например, следующий "опорный", "базовый" факт: если точки A и K лежат по одну сторону от прямой BC, при этом площади треугольников ABC и KBC равны, то четырехугольник с вершинами A, B, C и K является трапецией.

Рассмотрим, к примеру, решение следующей нестандартной задачи.

Задача 10*. Точки M и K — середины сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$ (рис. 9). Отрезок MK пересекает диагонали AC и BD соответственно в точках P и H ($P \neq H$). Докажите, что если $MP = HK$, то четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

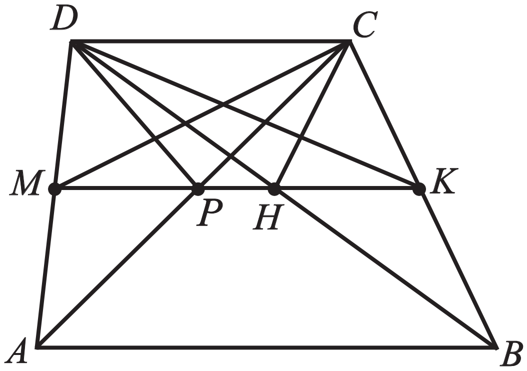

Рис. 9

Решение. Обозначим: $S_{\Delta AMP} = S_1$, $S_{\Delta BHK} = S_2$. Имеем: точка M — середина отрезка $AD \Rightarrow S_{\Delta AMP} = S_{\Delta DMP} = S_1$; точка K — середина отрезка $BC \Rightarrow S_{\Delta BHK} = S_{\Delta CHK} = S_2$.

Далее, $MP = HK \Rightarrow S_{\Delta DMP} = S_{\Delta DHK} = S_1$. Тогда $S_{\Delta DBK} = S_{\Delta DHK} + S_{\Delta BHK} = S_1 + S_2$. А так как точка K — середина отрезка BC, то $S_{\Delta DBC} = 2S_{\Delta DBK}= 2(S_1 + S_2)$.

Аналогично, $MP = HK \Rightarrow S_{\Delta CMP} = S_{\Delta CHK} = S_2$. Тогда $S_{\Delta CAM} = S_{\Delta AMP} + S_{\Delta CMP} = S_1 + S_2$. А так как точка M — середина отрезка AD, то $S_{\Delta ACD} = 2S_{\Delta CAM} = 2(S_1 + S_2)$. Таким образом, получили: $S_{\Delta BDC} = S_{\Delta ACD} \Rightarrow$ точки A и B равноудалены от прямой $CD \Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow$ четырехугольник $ABCD$ — трапеция, что и требовалось доказать.

Биссектриса угла трапеции (параллелограмма) “отрезает” от трапеции (от параллелограмма) равнобедренный треугольник. Это свойство биссектрисы угла трапеции (параллелограмма) находит применение при решении многих задач.

Рассмотрим, например, решения таких задач.

Задача 11. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 12 см, а длины биссектрис — 15 см и 13 см.

Решение. Пусть отрезок BK — высота данной трапеции $ABCD$ ($BK = CH = 12$); BM и CM — биссектрисы углов соответственно ABC и BCD (рис. 10), причем $BM = 15$, $CM = 13$.

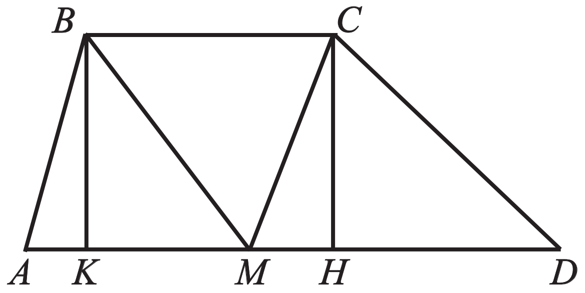

Рис. 10

В прямоугольных треугольниках BKM и CHM по теореме Пифагора находим соответственно: $KM = \sqrt{BM^2 - BK^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$; $MH = \sqrt{CM^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.

Обозначим: $HD = x$, $AK = y$.

Так как $\angle ABM = \angle CBM$ (BM — биссектриса угла ABC) и $\angle CBM = \angle AMB$ (как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD), то $\angle ABM = \angle AMB$, значит, ΔABM — равнобедренный, при этом $AB = AM = KM + AK = 9 + y$. В прямоугольном ΔABK имеем: $AB^2 = AK^2 + BK^2$ или $(9+y)^2 = y^2 + 144 \Rightarrow 2y = 7 \Rightarrow y = 3,5$. Тогда: $AB = AM = 9 + 3,5 = 12,5$.

Аналогично, так как $\angle BCM = \angle MCD$ (CM — биссектриса угла BCD) и $\angle BCM = \angle CDM$ (как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD), то $\angle MCD = \angle CMD$, значит, ΔCMD — равнобедренный, при этом $CD = MD = MH + HD = 5 + x$.

В прямоугольном ΔCHD имеем: $CD^2 = CH^2 + HD^2$ или $(5 + x)^2 = x^2 + 144 \Rightarrow 10x = 119 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 11,9$. Тогда : $CD = MD = 5 + 11,9 = 16,9$.

Получаем: $AD = AM + MD = 12,5 + 16,9 = 29,4$; $BC = KH = 5 + 9 = 14$. Теперь находим площадь трапеции:

$S_{ABCD} = \dfrac{AD + DC}{2} \cdot CH = \dfrac{29,4 + 14}{2} \cdot 12 = 260,4$ (см^2).

Ответ: 260,4 см^2.

Задача 12. Биссектриса острого угла равнобедренной трапеции пересекает боковую сторону и делит ее на отрезки длиной 20 и 30, считая от меньшего основания трапеции. Длина меньшего основания трапеции равна 6. Найдите площадь этой трапеции.

Решение. Пусть AK — биссектриса угла BAD равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис.11); $CK = 20$, $KD = 30$; $BC = 6$; P — точка пересечения прямых AK и BC. Тогда $\angle BAP = \angle PAD = \angle APB \Rightarrow \Delta ABP$ — равнобедренный $\Rightarrow AB = BP = 50$. Тогда $CP = BP - BC = 50 - 6 = 44$.

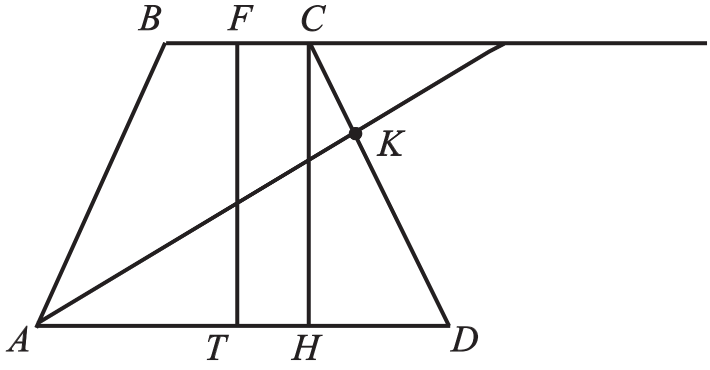

Рис. 11

Из подобия треугольников AKD и PKC находим: $CP : AD = CK : KD = 20 : 30 = 2 : 3$, откуда $AD = \dfrac{3CP}{2} = \dfrac{3 \cdot 44}{2} = 66$.

Если точки F и T — середины оснований BC и AD трапеции, CH — ее высота, то $TD = 33$, $FC = 3 = TH$, $HD = TD - TH = 33 - 3 = 30$. Тогда в прямоугольном $\Delta CHD : CH = \sqrt{CD^2 - HD^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$. Значит, площадь трапеции равна $\dfrac{BC + AD}{2} \cdot CH = \dfrac{6 + 66}{2} \cdot 40 = 1440$ (кв. ед.).

Ответ: 1440 кв. ед.

Трудно переоценить при решении задач свойства вписанных в окружность углов, с помощью которых обнаруживаются равные углы, которые “казались” не равными. А использование, на первый взгляд, достаточно простого, но важного при решении задач свойства биссектрисы угла быть геометрическим местом точек плоскости, равноудаленных от сторон этого угла, часто позволяет получить нужный результат.

Рассмотрим, например, решение следующей красивой нестандартной задачи.

Задача 13*. Диагональ BD вписанного четырехугольника $ABCD$ является биссектрисой угла ABC (рис. 12). Найдите площадь этого четырехугольника, если $BD = 32\sqrt{3}$ дм, $\angle ABC = 60°$.

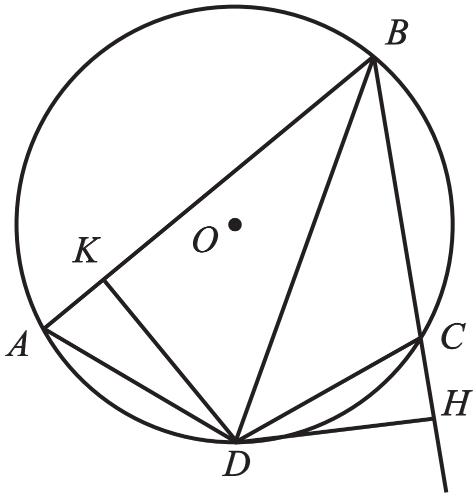

Рис. 12

Решение. Четырехугольник $ABCD$ составлен из треугольников ABD и BCD, поэтому $S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD}$. Так как BD — биссектриса угла ABC ($\angle ABC = 60°$), то высоты DK и DH треугольников ABD и BCD равны ($DK = DH$); $\angle ABD = \angle DBC = 30°$, откуда следует равенство дуг AD и CD, значит, $AD = CD$ (как хорды, стягивающие равные дуги).

Тогда в прямоугольном треугольнике DBK имеем: $DK = \frac{1}{2}BD = 16\sqrt{3}$ (как катет, лежащий против угла в 30°). Из равенств $\Delta ADK = \Delta DCH$ и $\Delta DBK = \Delta DBH$, следует $S_{\Delta ADK} = S_{\Delta DCH}$, $S_{\Delta DBK} = S_{\Delta DBH}$. А так как $S_{\Delta DBH} = S_{\Delta DBC} + S_{\Delta DCH}$, то $S_{\Delta DBC} = S_{\Delta DBH} - S_{\Delta DCH} = S_{\Delta DBK} - S_{\Delta ADK}$.

Получаем: $S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = (S_{\Delta DBK} + S_{\Delta ADK}) + (S_{\Delta DBK} - S_{\Delta ADK}) = 2S_{\Delta DBK}$.

В прямоугольном треугольнике DBK находим $BK = BD \cdot \cos 30^\circ = 32\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48$. Тогда $S_{ABCD} = 2S_{\Delta DBK} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BK \cdot DK = 48 \cdot 16\sqrt{3} = 768\sqrt{3}$ (кв. ед.).

Ответ: $768\sqrt{3}$ кв. ед.

Литература

[1] Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. и др. Геометрия 7-9: учебник для общеобразовательных учреждений. — М.: Просвещение, 2006.

[2] Потоскуев Е. В., Звавич Л.И. Геометрия, 10 класс: задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. — М.: Дрофа, 2008.

[3] Шарыгин И. Ф. Геометрия, 7-9 классы, учебник для общеобразовательных учреждений. — М.: Дрофа, 2006.

Потоскуев Евгений Викторович,
профессор кафедры алгебры и геометрии
Тольяттинского государственного университета,
кандидат физ.-мат. наук,
Почетный работник общего образования РФ.

Email: potoskuev@pisem.net

Линейная перспектива в изобразительном искусстве и исходные идеи проективной геометрии

А. И. Щетников

Учебно-познавательные семинары проекта "Применимая математика" проводятся сотрудниками Школы Пифагора (Новосибирск) начиная с 2001 года; к настоящему моменту проведено 36 таких семинаров. Некоторые разработки этого проекта уже были описаны в статьях, опубликованных в "Математическом образовании" ([1]–[4]). Настоящая статья продолжает эту серию публикаций.

1. О семинарах проекта "Применимая математика"

Семинары проекта "Применимая математика" направлены на формирование у школьников представления о том, как и зачем создаются научные понятия, на воспитание у них умения математически исследовать явления реального мира, на развитие их мыслительных способностей и навыков продуктивной коммуникации.

Задачи, предлагаемые участникам семинаров, являются "открытыми". Их исходные условия описывают некоторую ситуацию человеческой деятельности и возникшие в ней практические сложности и познавательные проблемы, которые, как представляется, могут быть решены математическим путем. Но как и какую математику надо здесь применять, из самого описания ситуации в начале не слишком понятно. Решение таких задач требует неоднократных уточнений и изменений формулировок, а процесс решения не исчерпывается найденным ответом, поскольку приводит к постановке новых вопросов, о существовании которых мы раньше и не подозревали. По ходу решения необходимо выделять образующиеся фрагменты содержания, сопоставлять их между собой и анализировать в рамках некоторой возникающей системы математических знаний. Тем самым решение "открытой" задачи требует более сложной организации деятельности: процессы поиска ответов на отдельные вопросы включаются в объемлющую "исследовательскую программу" семинара.

Реальные научные исследования и инженерные проекты всегда осуществляются в рамках сложно организованной коллективной деятельности. Индивидуальное решение учебных математических задач (в том числе и задач повышенной трудности) еще не готовит человека к интеллектуальной работе в исследовательском коллективе. Ведь в такой работе важно уметь представить свои мысли в понятной для других людей форме, улавливать смысл задаваемых вопросов и отвечать на них по существу, понимать чужие подходы к решению общей задачи, даже если они расходятся с нашими собственными. Отсюда проистекает важная задача обучения школьников коллективным формам мыслительной работы. Задачи наших семинаров решаются не индивидуально, а в рабочих группах, и результаты такой работы докладываются перед всеми участниками семинара в стендовых докладах или на пленарных общих заседаниях. Многие школьники впервые понимают здесь, что о математике и ее приложениях можно осмысленно размышлять и разговаривать, а не только "корпеть над задачами".

Для полноценного включения всех участников семинара в работу желательно, чтобы поставленная перед ними задача выглядела на первый взгляд достаточно простой. Будет хорошо, если действительные трудности выявятся не в самом начале работы, а некоторое время спустя, в процессе коллективного обсуждения первых полученных результатов. Ведь тогда участники семинара, уже включившиеся в процесс решения задачи, будут рассматривать эти трудности как свои собственные.

Важно подчеркнуть, что часть предлагаемых школьникам задач такова, что для них нельзя указать фиксированную предметную рамку, внутри которой идет поиск решения. Сами границы математического подхода предстают здесь не как незыблемые и заданные раз и навсегда, но как подвижные, проблемные, требующие постоянного осознания и воспроизведения. Здесь предметом обсуждения, анализа и действия оказывается сама "применимость математики", возможность соотносить математическую схему явления с так называемой "жизнью".

Семинар по одной и той же теме может проводиться со школьниками разного уровня подготовленности и разного возраста; длительность семинара может составлять от двух до четырех дней. Поэтому приведенный ниже текст описывает не "почасовую разработку", а некоторую идейную канву, которая на каждом семинаре разворачивается заново, и зачастую — совсем не так, как это происходило на предыдущих семинарах по этой же теме.

2. Линейная перспектива в изобразительном искусстве

(Этот исторический материал не предназначен для того, чтобы рассказывать его школьникам в самом начале семинара. Однако он задает общую картину истории предмета, и к нему имеет смысл обращаться по ходу семинара по мере необходимости. Возможно, на его основе имеет смысл прочитать лекцию на второй день семинара — с хорошими слайдами, представляющими картины художников эпохи Возрождения, такими, как "Афинская школа" Рафаэля.)

Тема "Перспектива в живописи" рассматривается историками математики как первая глава в истории проективной геометрии. Исходные проблемы этой науки были сначала обдуманы художниками, решавшими свои практические и познавательные задачи. Эти задачи потребовали создания особого, не существовавшего доселе раздела геометрии — учения о линейной перспективе. И лишь после того, как это учение было создано, появилась возможность посмотреть на его содержание отвлеченно — как на некоторую теорию, имеющую дело со взаимным расположением точек и прямых, в которой к обычным прямым и точкам добавляются идеальные "бесконечно удаленные" элементы, а потом оказывается, что любую прямую можно считать "бесконечно удаленной", что точки и прямые в этой теории в некотором смысле взаимозаменяемы и т. д.

Перспективные изображения впервые появились в древнегреческом театре во времена Эсхила и Софокла. Оба драматурга стремились к тому, чтобы их постановки произвели на зрителя особое впечатление своим правдоподобием; свой вклад в это правдоподобие должны были вносить и сценические декорации, которые для Эсхила выполнял художник Агафарх. По его почину крупнейшие математики и натурфилософы того времени Анаксагор и Демокрит написали сочинения о том, "каким образом надлежит сообразно взору глаз и распространению лучей провести линии из помещенного в определенном месте центра сообразно естественной пропорции, чтобы об определенной вещи определенные изображения зданий давали впечатление в сценических декорациях, и чтобы из предметов, изображенных в одной плоскости, одни казались находящимися позади, другие — выступающими вперед".

Надо заметить, что это новшество пришлось по душе далеко не всем. Великий древнегреческий философ Платон отнесся к нему с явным неодобрением, обвиняя перспективные рисунки в том, что они обманывают и отвлекают наше зрение, делая из трагического представления — зрелище на потребу публики. Однако исследование перспективных изображений продолжалось и в последующие века; и хотя сочинения Анаксагора и Демокрита до нас не дошли, мы можем судить о состоянии античной теории перспективы по сочинениям Евклида и Птолемея. В Средние века художники также стремились своими произведениями дать пищу прежде всего "глазам души", поэтому перспективные изображения здесь тоже не были в чести. И все же отдельные математики, такие, как живший в XIII веке польский ученый Витело, продолжали исследовать законы перспективы, в приложении не столько к живописи, сколько к различным научным нуждам (прежде всего — к географии и астрономии).

Стремление сделать человека "мерой всех вещей" и вытекающая из него потребность рисовать предметы такими, какими их видит человеческий глаз, вновь выходят на первый план в живописи Возрождения. Открытое в практике живописных работ, учение о перспективном рисовании было теоретически обосновано в трактате "О живописи" Леона Баттисты Альберти (1404–1472), а затем развито в трудах Леонардо да Винчи (1452–1519) и Альбрехта Дюрера (1471–1528). Итог этим исканиям подводят "Шесть книг о перспективе" Гвидо Убальди (1545–1607), в которых содержатся решения почти всех основных задач теории перспективы.

Слово *"перспектива"* в переводе с латыни означает "просматривание". Как говорит Альберти, "картина — это окно, через которое мы глядим в пространство". В свете этого воззрения основная задача перспективного рисования может быть сформулирована следующим образом. Имеются пространственные объекты, рассматриваемые наблюдателем из некоторой точки. Требуется нарисовать эти объекты на плоскости картины так, чтобы при рассматривании этого изображения из определенной точки различные его части представлялись нам в таком же виде, как и соответствующие им видимые части реальных объектов.

3. Точка схода

(В установочной лекции, читаемой участникам семинара в начале первого дня, нужно ввести понятие о точке схода. Чтобы начать работу над задачей, примем, пока без доказательства, следующее допущение: прямые линии, параллельные в реальном мире, сходятся на картине в точку, лежащую на линии горизонта.

При обсуждении задачи придется разбираться с еще одним фактом. Школьники могут считать, что видимый горизонт возникает по причине шарообразности Земли; однако мы видели бы линию горизонта, отделяющую небо от земли, и в том случае, если бы мы жили не на сфере, а на бесконечной плоскости.)

Характерной чертой любого изображения, сделанного по законам линейной перспективы, является наличие одной или нескольких *точек схода*, обычно лежащих на линии горизонта (рис. 1). В каждую такую точку сходятся изображения нескольких параллельных прямых, проведенных на поверхности земли или идущих в пространстве параллельно этой поверхности. Когда точка схода располагается на вертикальной оси симметрии картины, она буквально притягивает к себе наше зрение; поэтому в окрестность центральной точки схода художники часто помещали самые важные детали изображения.

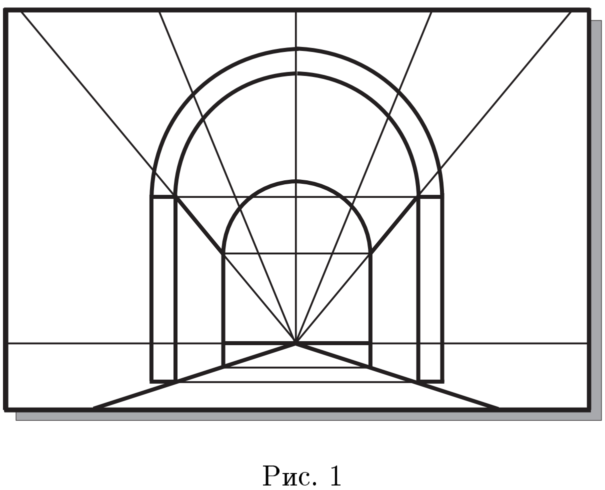

Рис. 1

Художники Возрождения рассматривали точку схода параллельных прямых как "зримый образ бесконечности". В обычной евклидовой геометрии параллельные прямые не пересекаются;

однако их изображения, построенные по правилам все той же евклидовой геометрии, встречаются друг с другом. Но что соответствует этой встрече в реальности? Можно представить себе точку, уходящую вдаль по одной из прямых пучка; ее изображение будет подходить к точке схода все ближе и ближе, но никогда с ней не сольется. Но можно рассматривать в качестве независимого движения не движение реальной точки, но движение ее изображения в плоскости картины. И когда изображение достигнет точки схода, его прообраз удалится на бесконечное расстояние.

4. Базовая задача семинара

Задача. На схематическом изображении картины или фотоснимка (рис. 2) видны сходящиеся на горизонте рельсы железной дороги и две шпалы, которым присвоены номера 0 и 1. В реальности все шпалы отстоят друг от друга на одно и то же расстояние. Где же тогда на этом же изображении будут находиться шпалы с номерами 2, 3, 4, ... , расположенные “ближе к горизонту”?

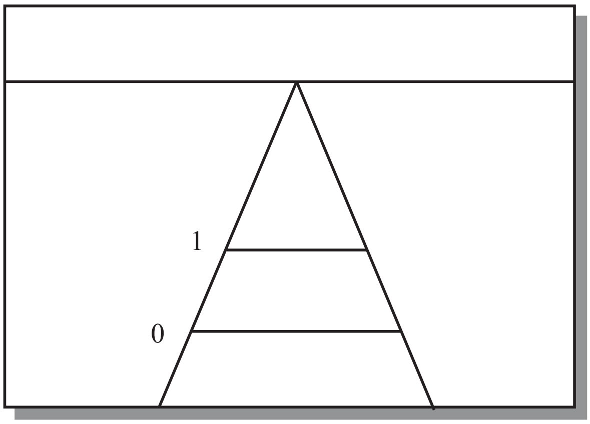

Рис. 2

Предположение о геометрической прогрессии и его критика. Многие школьники сразу же пытаются подобрать для расстояний от шпалы до горизонта такую алгебраическую формулу, которая, как им кажется, “решает задачу”. Часто высказывается предположение, что расстояния от изображений шпал до линии горизонта образуют геометрическую прогрессию. Нетрудно показать, что тогда геометрическую прогрессию образуют также длины отрезков, изображающих шпалы, и расстояния между соседними изображениями шпал. “Ясно ведь, что разности должны убывать; а единственная зависимость для убывания, которую мы изучаем в школе — это геометрическая прогрессия, когда первое расстояние так относится ко второму, как второе к третьему, и т. д.”

Это предположение опровергается двумя следствиями из него. Хорошо, если на общем заседании такие опровержения будут предложены другими школьниками, участвующими в семинаре; если этого не случится, такую работу придется проделать взрослым. Следует заметить, что оба опровержения нетривиальны, и для уяснения их смысла надо проговаривать эти рассуждения тщательно и по несколько раз.

(1) Если бы указанные расстояния образовывали геометрическую прогрессию, то при неограниченном увеличении рамки картины все шпалы с отрицательными номерами были бы изображены на плоскости картины. Но это представляется невозможным: ведь начиная с какого-то номера эти шпалы в реальности находятся *за спиной у рисовавшего картину художника* и в принципе не могут быть нарисованы на картине! На общих заседаниях эта критическая линия часто разворачивается в форме полемического вопроса: “а где на картине находятся ноги художника?”

(2) Если бы искомые расстояния образовывали геометрическую прогрессию, тогда все трапеции на картине были бы подобны. Но тогда все диагонали этих трапеций шли бы на картине параллельно, пересекая линию горизонта *в разных точках* (рис. 3). Однако в реальности этим диагоналям соответствуют диагонали прямоугольников. Они параллельны, и поэтому их изображения на картине должны сходиться *в одну точку на горизонте*. Поэтому сделанное предположение следует отвергнуть.

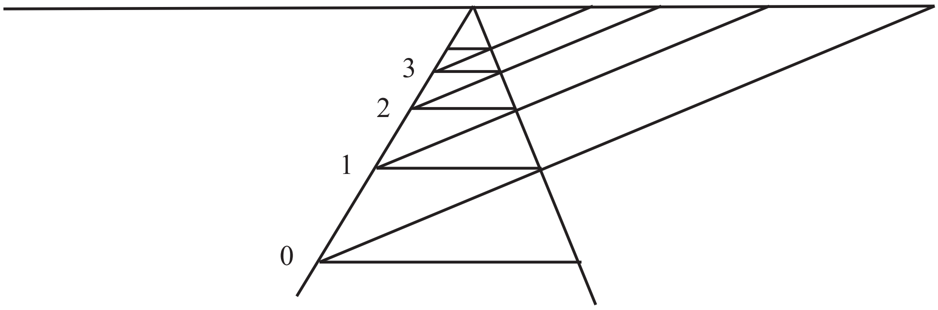

Рис. 3

Опытный подход к решению задачи. Хорошо, когда на семинаре находится группа, которая начинает решать задачу практическим предметным моделированием. Проведем на поверхности стола несколько равноудаленных “шпал” и будем рассматривать эти линии сбоку, измеряя кажущиеся расстояния между ними с помощью линейки. Можно ли из этих измерений вывести математическую зависимость, которой подчиняется последовательность разностей между соседними шпалами?

Первое решение. Вспомним о том, что картина — это “окно в мир”. Изобразим эту ситуацию на “виде сбоку”. От каждой шпалы сквозь плоскость картины к зрачку зрителя идет луч зрения. Луч, идущий через зрачок параллельно поверхности земли, порождает на картине изображение линии горизонта (рис. 4).

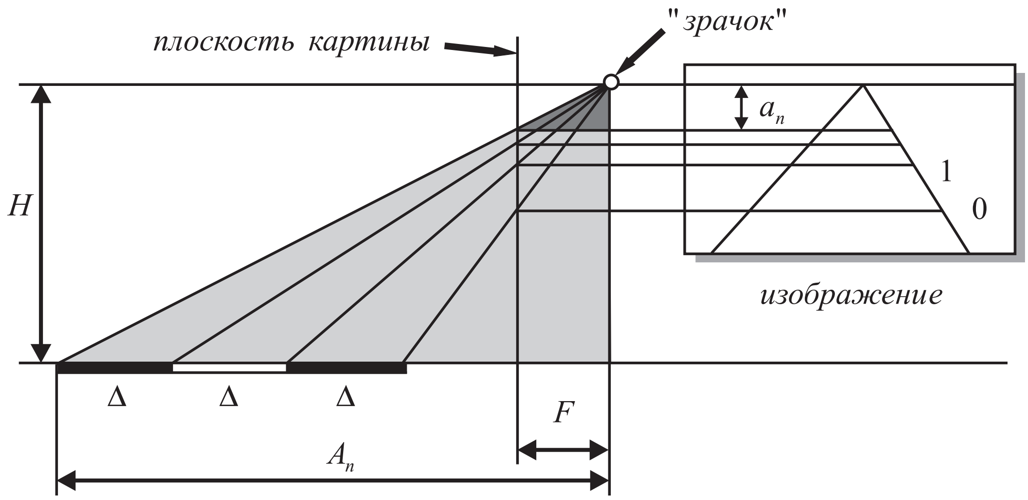

Рис. 4

Чтобы построить недостающие изображения шпал, начертим в плоскости картины за ее рамкой две прямые: вертикальную “плоскость картины” и горизонтальную “поверхность земли”. Продолжим линию горизонта за рамку картины и отметим на ней произвольную точку — “глаз наблюдателя”. Нулевую и первую шпалы “сбросим” с плоскости картины на поверхность земли. Тем самым будет задано расстояние между шпалами Δ, после чего можно будет отметить на поверхности земли вторую, третью и т. д. шпалы. А сделав это, мы можем и “сбросить” эти шпалы обратно в плоскость картины.

Дополнения.

(1) Выполняя построение, мы приняли на нашем чертеже некоторые условные расстояния от зрачка до плоскости картины и до поверхности земли. Получится ли картина в точности такой же, если изменить высоту глаза над поверхностью земли H и расстояние от глаза до плоскости картины F? Отвечая на этот вопрос, мы познакомимся с аффинными преобразованиями растяжения-сжатия и с некоторыми их простейшими свойствами.

(2) Наше геометрическое построение позволяет вывести также и расчетную формулу. Пусть A_n — расстояние по горизонтали от картины до n-ой шпалы, a_n — расстояние от изображения линии горизонта до изображения n-ой шпалы Из подобия треугольников проистекает пропорция

$$\frac{A_n}{H} = \frac{F}{a_n}.$$

По условию A_n является *средним арифметическим* между A_{n-1} и A_{n+1}:

$$A_n = \frac{1}{2}\left(A_{n-1} + A_{n+1}\right).$$

Тем самым a_n является *средним гармоническим* между a_{n-1} и a_{n+1}:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

(3) Будем отображать на плоскость картины шпалы с отрицательными номерами. Видно, что изображения шпал, находящихся за спиной художника, оказываются “вывернутыми на небо” (рис. 5). При этом получается, что к образу бесконечно удаленной точки мы можем подойти с двух сторон: “снизу” — по бесконечно возрастающим положительным числам, и “сверху” — по бесконечно убывающим отрицательным числам. И обе эти последовательности “смыкаются в одной общей бесконечности”.

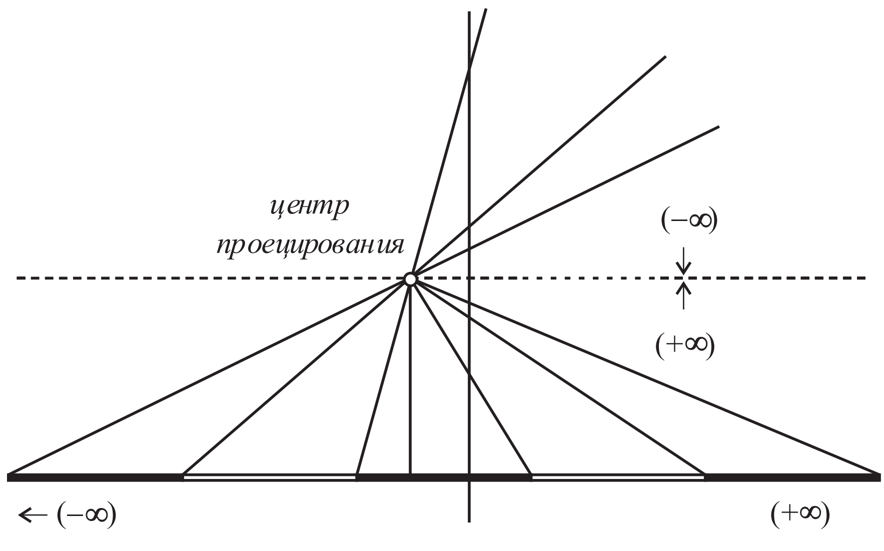

Рис. 5

Второе решение. На “виде сверху” шпалы и рельсы образуют полосу из одинаковых прямоугольников. Диагонали этих прямоугольников параллельны друг другу. Поэтому на фотографии все изображения этих диагоналей должны сходиться в одну точку P на линии горизонта. Проведем первую диагональ и найдем эту точку. Дальнейшее построение ясно из чертежа: проводим вторую диагональ и находим положение второй шпалы; проводим третью диагональ и находим положение третей шпалы, и т. д.

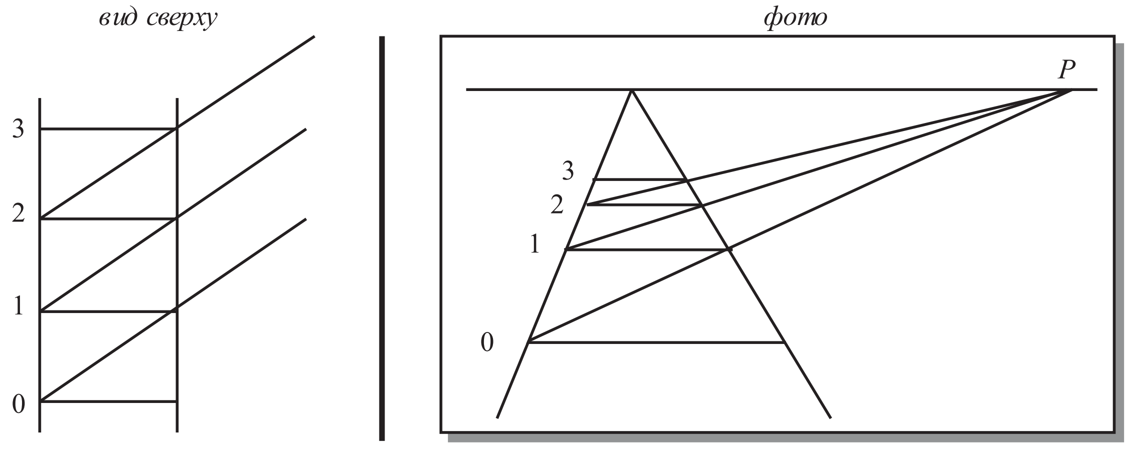

Рис. 6

Дополнения.

(1) Вот еще один вариант построения, не выходящий на рисунке за пределы двух рельсов. Мы рассмотрим сразу тот общий случай, когда рельсы на изображении не параллельны линии горизонта; в этом случае их продолжения должны пересекаться в точке, лежащей на линии горизонта, поскольку сами шпалы в реальности параллельны между собой. Проведем диагонали в четырехугольнике, образованном рельсами и данными шпалами. Затем проведем вспомогательный "рельс", проходящий через точку схода рельсов и точку пересечения диагоналей. В реальности эта прямая делит полотно железной дороги пополам и проходит через середины всех шпал. Теперь проведем прямые, проходящие через концы нулевой шпалы и "середину" первой шпалы; точки, в которых эти прямые пересекут противоположные рельсы, будут концами второй шпалы. Таким же образом строятся третья и следующие шпалы.

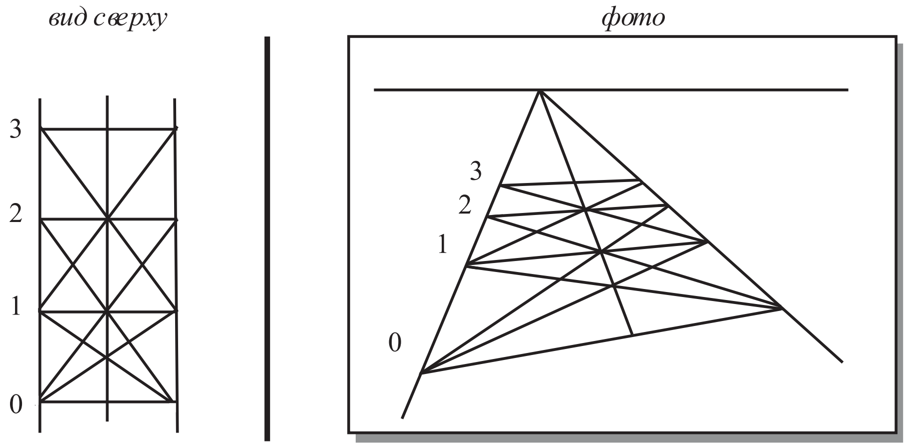

Рис. 7

(2) Вот еще одна задача в развитие той же темы: "На прямой указаны точки трех последовательных шпал. Найдите точку, в которой эта прямая пересекает линию горизонта".

Путь к проективной геометрии. Заметим, что продолжения всех шпал, построенных на рис. 7, должны проходить через одну и ту же точку; и эта точка, в паре с точкой схода рельсов, будет задавать линию горизонта. Все диагонали одного направления также будут проходить через одну точку, и эта точка по необходимости будет лежать на линии горизонта. Получающаяся при этом сеть прямых с четырьмя точками схода изображена на рис. 8.

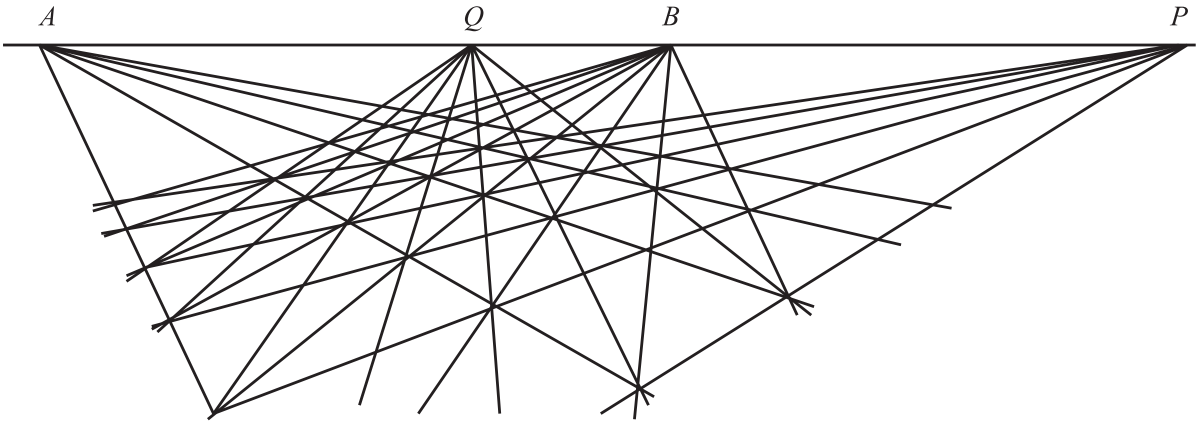

Рис. 8

Если посмотреть на законы перспективного рисунка с отвлеченно-математической точки зрения, то окажется, что они доставляют нам способ открывать многочисленные теоремы геометрии, относящиеся ко взаимному расположению точек и прямых на плоскости. Впервые эту идею высказал французский инженер, архитектор и геометр Жерар Дезарг (1591–1661), поставивший перед собой задачу поднять учение о перспективе до уровня настоящей геометрической науки и доказавший базовую теорему проективной геометрии, носящую его имя.

5. Продолжение семинара: точка наилучшего рассматривания

Задача. Выясните, с какого расстояния следует разглядывать картину Рафаэля “Обручение Марии” (рис. 9), чтобы она выглядела наиболее естественно.

Рис. 9

Точка наилучшего рассматривания. Посмотрим на рисунок, на котором изображено здание, стоящее к нам углом (рис. 10). На этом рисунке имеются две точки схода. Соответствующие пучки параллельных прямых в реальности идут под прямым углом друг к другу. Поэтому наш глаз при рассматривании картины должен находиться в такой точке пространства, из которой обе точки схода видны под прямым углом.

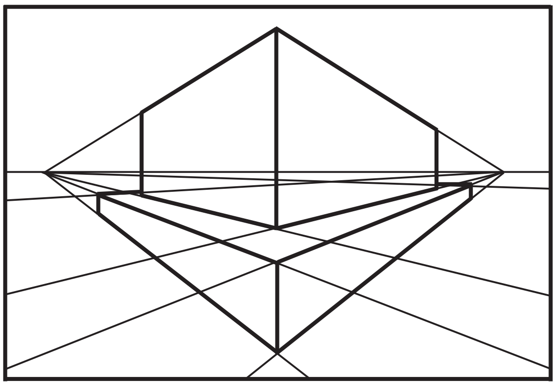

Рис. 10

Конечно, пододвинуть глаз на расстояние нескольких сантиметров к нашему рисунку будет довольно неудобно. Но размеры настоящих картин заметно больше размеров наших иллюстраций, и зритель спокойно может встать в нужное место перед картиной. По этой причине рассматривание репродукций в альбомах часто не дает той иллюзии объемного пространства, какая возникает у зрителя, когда он смотрит на оригинал или полномасштабную копию картины.

Некоторые итоги

Разбирая практическую задачу построения перспективных изображений в живописи, мы подошли к некоторым ключевым понятиям проективной геометрии: это понятия о гармонической четверке точек, о проективных координатах и т. д. Все эти понятия введены пока что в натурализованном виде, и на первом этапе ознакомления с ними такой подход, как мне представляется, будет самым лучшим. Надо сначала научиться видеть в плоской картине изображение некоторой лежащей за ней "реальности". А потом уже можно переходить и к изучению отвлеченной геометрической теории, начиная с теоремы Дезарга и теоремы о единственности четвертой гармонической точки, тем более что к тому времени принципы доказательства и самая суть этих теорем будут уже вполне уяснены школьниками в рамках учения о перспективе.

На Летней школе "Пифагор 2008" семинар по теории перспективы проводился на второй учебной четырехдневке, а на третьей четырехдневке его участники могли продолжить занятия на учебном курсе "Основные идеи проективной геометрии", который вела А. С. Великих. По ее отзывам, восьмиклассники, предварительно участвовавшие в семинаре, чувствовали себя на этом курсе гораздо увереннее десятиклассников, в семинаре не участвовавших.

Благодарности

Я благодарен своим коллегам, с которыми мы несколько раз проводили описанный здесь семинар. Особо хочу поблагодарить сотрудников Школы Пифагора А. А. Колчина и А. В. Рыбалкину за их весомый вклад в наше общее дело.

Литература

[1] Щетников А. И., Щетникова А. В. Учебно-исследовательский семинар "Распределение первых значащих цифр". *Математическое образование*, № 2 (21), 2002, с. 107–123.

[2] Щетников А. И. Проблема филлотаксиса. *Математическое образование*, №1 (24), 2003, с. 19–37.

[3] Колчин А. А., Щетников А. И. Материалы к курсу "Применимая математика". Показательная зависимость. Логарифмы. Предел $(1+1/n)^n$. *Математическое образование*, №3 (26), 2003, с. 29–43.

[4] Щетников А. И. Сумма углов звездчатого многоугольника: учебно-исследовательский семинар для 7 класса. *Математическое образование*, №1 (28), 2004, с. 78–86.

Щетников Андрей Иванович,
руководитель проекта "Школа Пифагора",
Центр образовательных проектов "Сигма",
Новосибирск.

Email: pythagor@ngs.ru

Анонс книги для учителя

О построении теории основных элементарных функций

В. В. Цукерман

Автор заметки — профессор Московского государственного открытого педагогического университета им. Шолохова с пятидесятилетним стажем преподавания. Им написана и депонирована в ВИНИТИ книга для учителей «Действительные числа и основные элементарные функции» (деп. ВИНИТИ РАН, 18.12.2008, №978-И2008.), посвященная построению строгой теории основных элементарных функций школьного курса математики. Книга готовится к выходу отдельным изданием. В настоящей заметке разъясняются концепция и структура книги, а также ряд особенностей изложения материала.

Изучение основных элементарных функций (линейной, степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических) является ведущей линией содержания традиционного школьного курса «Алгебра» (ныне «Алгебра и начала анализа»). Эти функции в вузовском образовании являются фундаментом изучения высшей математики, а к обоснованию их собственной теории обычно не возвращаются. Таким образом, изучение основных элементарных функций — прерогатива средней школы. В связи с этим ясно, что учителю математики важно знать обоснование теории этих функций. Доказательное изложение теории важно и для школьников, разумеется, в пределах его доступности, ибо такое изложение развивает логическое мышление и воспитывает математическую культуру. Тем более несомненно, что учитель математики должен иметь возможность ознакомиться с доказательным обоснованием этого предмета своей непосредственной деятельности на работе в школе. Но, как это ни удивительно, в отношении основных элементарных функций (в отличие, скажем, от геометрии) выпускник педвуза такой возможности не имеет[1]. Впрочем, это не совсем так. Хорошее знание содержания совокупного педвузовского образования дает возможность протянуть ниточки обоснования ко всем моментам построения их теории. Однако пятидесятилетний опыт автора статьи по обучению будущих учителей математики показывает, что без дополнительной работы, не предусмотренной стандартными планами педвузов, выпускники педвузов по специальности «Математика» таких знаний, за редкими исключениями, не имеют. Это обстоятельство оказывается «согласованным» и с практикой школьного преподавания.

В школьном курсе «Алгебра и начала анализа» декларирование важности понятия действительного числа не сопровождается обычно достаточно ясным выяснением смысла самого понятия и его важнейших свойств (в том числе арифметических операций над действительными числами). Изъяны в изложении вопроса о действительных числах влекут многочисленные следствия. Так, оказывается необоснованным существование арифметического корня, а вслед за этим степени с рациональным показателем и т.д.

Понятие степени с действительным показателем, свойства степеней с действительными показателями, введение показательной функции, указание её свойств (в частности, множества значений, без чего не обосновано существование логарифма) — все эти и другие вопросы в школьном преподавании не связаны логически последовательным изложением.

Наконец, введение тригонометрических функций числового аргумента на геометрической основе требует установления взаимно-однозначного соответствия между множествами действительных чисел и углов поворота. Тогда произвольному действительному числу отвечает определённая точка на тригонометрической окружности, определяющая значения функций косинус

[1]Школьное изложение геометрии в основном строится дедуктивно, а школьные учебники геометрии часто являются проекцией вузовских учебников тех же авторов.

и синус. Вопрос о существовании (уже не говоря об обосновании) отмеченного соответствия в школьном преподавании даже не упоминается.

Различные школьные учебники определенного временного периода, как правило, содержат некоторый устоявшийся, общий для всех этих учебников материал и отличаются друг от друга тем, как авторы обходят логические пробелы в построении курса. Возникает искусственное разнообразие учебников, в котором учителям порой трудно ориентироваться.

Содержание книги «Действительные числа и основные элементарные функции» в процессе её написания претерпевало изменения, но неизменным оставалось требование доказательного изложения рассматриваемого материала, не требующего обращения к другим печатным изданиям. Задача состояла в том, чтобы предоставить учителю условия для самостоятельного выбора способа изложения материала, когда, опуская проведение тех или иных трудоемких доказательств, оставляют возможность обсуждения существа связанных с этим проблем. Важно отметить, что все доказательства книги по своей сложности не превышают уровня трудности разбора олимпиадных задач и вполне доступны интересующимся школьникам профильного обучения.

По первоначальному замыслу, книга должна была основательно знакомить с понятием действительного числа, свойствами действительных чисел, и на этой основе дать определения основных элементарных функций с обоснованием их основных свойств (с обязательным включением характеристик: монотонности, множества значений, схемы графиков). Это повлекло необходимость изучения вопросов, являющихся по существу геометрическими приложениями действительных чисел: измерение отрезков, координатная прямая, координатная плоскость, умножение вектора на действительное число и линейная комбинация векторов, измерение дуг окружности, введение радианной меры угла, установление указанного выше взаимно-однозначного соответствия. Усвоение такого объёма знаний (даже без запоминания ряда доказательств) вполне достаточно, чтобы стать в дальнейшем фундаментом серьёзного изучения математического анализа.

Расширение первоначально намеченного содержания книги связано со следующим обстоятельством. Приводимые в школьных учебниках графики основных элементарных функций визуально содержат дополнительную информацию, которую не предполагалось обосновывать, когда книга задумывалась: асимптоты, возможность проведения касательных, выпуклость графика функции (не в локальном смысле: точки графика функции расположены ниже или выше хорды). Возникло желание восполнить этот пробел. Строгое обоснование указанных свойств основных элементарных функций потребовало рассмотрения понятия предела и непрерывности функции. Локальная теория предела и непрерывности функции в книге рассмотрена достаточно подробно. Вопрос о касательной к графику функции рассмотрен в связи с понятием производной. Выяснен содержательный смысл утверждения: «Касательная — это предельное положение секущей». Приведены доказательства «замечательных пределов», и на этой базе установлены производные основных элементарных функций, а также уравнения касательных к их графикам. Весь этот дополнительный материал изложен в пятой главе и используется также в последующих главах. Так как в книге рассматриваются только основные элементарные функции, то удалось обойтись без теорем дифференциального исчисления и их следствий, касающихся исследования функций с помощью производных.

Книга не заменяет школьный учебник «Алгебра и начала анализа». В ней не рассматриваются способы решения уравнений и неравенств, связанных с основными элементарными функциями, не рассмотрен ряд алгебраических вопросов. Это монография методического характера, подробно и доказательно рассматривающая материал, заявленный в её названии.

Отходя от общего описания книги, целесообразно остановиться на ряде характерных моментов её содержания и на инструментарии, позволившем справиться с трудностями доказательного изложения теории.

Рассмотрение рациональных чисел начинается с указания ряда их свойств (названых *основными свойствами*), играющих роль аксиом. Из *основных свойств* выводятся многочисленные следствия (в частности неравенство Бернулли: $(1+q)^m > 1+mq$, $q > -1$, $q \neq 0$, $m = 2, 3, \ldots$ и утверждение о том, что неотрицательное число, не превосходящее любого положительного, есть ноль). Таким образом, для вводимых позже действительных чисел необходимо установить только основные свойства, и тогда все свойства рациональных чисел оказываются справедливыми и для действительных.

Из *основных свойств* следует *архимедово свойство* рациональных чисел, которое может быть выражено в форме:

> Для произвольных положительных рациональных чисел ρ и r существует натуральное число n, что $10^n\rho > r$ или $r/10^n < \rho$.

Это показывает, что величина $r/10^n$ может быть сделана меньше любого положительного числа за счет выбора достаточно больших значений n.

Архимедово свойство рациональных чисел и аксиома Архимеда (Евдокса) для отрезков позволяют доказать, что при разложении рационального числа в бесконечную десятичную дробь (например, с помощью алгоритма деления «столбиком») и при измерении отрезков «девятка» в периоде появится не может. Это является одним из пунктов мотивации определения действительного числа в виде бесконечной десятичной дроби без «девятки» в периоде. Действительное число $a = a_0, \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, где $a_0 \in Z, \alpha_n$ — некоторая цифра от нуля до «9».

Каждому действительному числу $a = a_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ сопоставляются два множества «примыкающих» конечных десятичных дробей — десятичных приближений «по недостатку» и «по избытку»: $\{a_n\}$ и $\{a'_m\} \ldots$ $(n, m \in \mathbb{N})$, где $a_n = a_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$, $\alpha'_m = a_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m + \frac{1}{10^m} = a_m + \frac{1}{10^m}$. Последовательность (a_n) оказывается неубывающей, а (a'_m) — невозрастающей и при этом $a_0 \leq a_n < a'_m \leq a'_0 = a_0 + 1$ для произвольных $n, m \in \mathbb{N}$. Множества $\{a_n\}$ и $\{a'_m\}$ играют важную роль во многих доказательствах книги. Так, в доказательстве теоремы о нижней грани множества, ограниченного снизу, строится бесконечная десятичная дробь $a_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$; α_n является нижней границей, а a'_n таковой не является. Оказывается, что такая дробь не имеет «девятки» в периоде, т. е. является действительным числом и кроме того наибольшей нижней границей — нижней гранью.

Множества действительных чисел $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$ называются последовательно расположенными (X левее Y), если для любых их элементов выполняется соотношение $x \leq y$.

Показывается, что для последовательно расположенных множеств действительных чисел всегда существует разделяющее число[2] (обозначаемое, например, «c»), такое что $x \leq c \leq y$. Этот факт естественно принять за основное выражение *свойства непрерывности множества действительных чисел*. Для множества рациональных чисел свойство непрерывности не имеет места (приводится пример).

Доказывается, что критерием единственности разделяющего числа двух последовательно расположенных множеств является существование сколь угодно близких элементов этих множеств (сначала это доказывается для последовательно расположенных множеств рациональных чисел, так как арифметические операции над действительными числами ещё предстоит определить).

Очень важную роль в доказательствах книги играет почти очевидная *Лемма* о разделяющем числе. Если $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$ последовательно расположены, $U = \{u\}$ и $V = \{v\}$ — их подмножества ($U \subset X$ и $V \subset Y$) и у множеств U и V разделяющее число «c» единственно, то это число является также единственным разделяющим числом множеств X и Y.

Так, сумма действительных чисел $a_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ и $b = b_0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_m$ и их произведение (если a и b неотрицательны) естественно определяются как разделяющие числа множеств $\{\rho_a + \rho_b\}$ и $\{r_a + r_b\}$ или $\{\rho_s\rho_b)$ и $\{r_a r_b\}$, если эти разделяющие числа единственны (в случае произведения ρ_a, ρ_b, r_a, r_b — неотрицательны). Здесь ρ_a, ρ_b — рациональные числа, не превосходящие a и b, соответственно, а r_a, r_b — не меньшие, чем a и b.

На основании *леммы* эти общие определения могут быть заменены, используются разделяющие числа множеств $\{a_n + b_n\}$, $\{a'_m + b'_m\}$ или $\{a_n b_n\}$, $\{a'_m b'_m\}$. Это позволяет легко доказать един-

[2]Автор является последователем Н. Я. Виленкина в использовании понятия разделяющего числа.

ственность разделяющего числа, а также свойства ассоциативности и дистрибутивности арифметических операций (коммутативность такого метода не требует). В итоге устанавливается, что действительные числа удовлетворяют всем *основным соотношениям* для рациональных чисел; следовательно, все свойства рациональных чисел распространяются и на действительные числа.

При изучении степенной функции с натуральным показателем $y = f(x) = x^n$ на множестве $[0, \infty)$ трудным местом является доказательство установления её множества значений. Корень уравнения $x^n = b$, где b — произвольное положительное действительное число, ищется следующим образом. Строится бесконечная десятичная дробь $x_0, \xi_1 \ldots \xi_k \ldots$, такая что $x_k^n \leq b$, $(x'_k)^n > b$, $k \in \mathbb{N}$. Число x — единственное разделяющее число множеств $\{x_k\}$ и $\{x'_l\}$ $(k, l \in \mathbb{N})$. По построению число b является разделяющим числом множеств $\{x_k\}$ и $\{(x'_l)^n\}$, но таким числом является и x^n. Единственность разделяющего числа устанавливается на основе формулы разложения для $z^n - y^n$. Показывается, что $(x'_k)^n - x_k^n \leq \frac{n(x_0+1)^{n-1}}{10^k}$, $k \in \mathbb{N}$. Таким образом $x^n = b$. Далее устанавливается, что дробь $x_0, \xi_1\xi_2 \ldots \xi_k \ldots$ не имеет «девятки» в периоде. Следовательно $x = x_0, \xi_1\xi_2 \ldots \xi_k \ldots$

Показательная функция на множестве рациональных чисел a^r, является монотонно возрастающей при $a > 1$ и монотонно убывающей при $0 < a < 1$. Значение a^x для действительного числа $x = x_0, \xi_1\xi_2 \ldots \xi_k \ldots$ естественно определить как разделяющее число множеств $\{a^{\rho_x}\}$ и $\{a^{r_x}\}$, где ρ_x и r_x — произвольные рациональные приближения к x по недостатку и по избытку, если разделяющее число единственно. По лемме о разделяющем числе вместо множеств $\{a^{\rho_x}\}$ и $\{a^{r_x}\}$ можно рассматривать множества $\{a^{x_n}\}$ и $\{a^{x'_m}\}$. Единственность разделяющего числа устанавливается на основе следствий неравенства Бернулли: $0 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < \frac{a-1}{10^n}$, $a > 1$ и $0 < 1 - a^{\frac{1}{N}} < \frac{1-a}{aN}$, $0 < a < 1$. Или, если $N = 10^n$ и n — натуральное число: $0 < a^{\frac{1}{10^n}} - 1 < \frac{a-1}{10^n}$, $a > 1$ и $0 < 1 - a^{\frac{1}{10^n}} < \frac{1-a}{a10^n}$, $0 < a < 1$.

Эти же оценки используются для доказательства свойств степеней с действительным показателем и установления множества значений показательной функции.

Длина дуги окружности может быть определена как единственное разделяющее число множеств длин вписанных и описанных ломаных в эту дугу. Дроблению дуги окружности на части соответствуют определенные вписанная и описанная ломаные: концы дуги и точки дробления являются концами и вершинами вписанной ломаной, а для описанной ломаной эти точки являются концами и точками касания.

Используются обозначения Λ и T для длин вписанной и описанной ломаных, отвечающих некоторому дроблению дуги окружности; Λ_1 и T_1 — соответствующие длины ломаных после дополнительного дробления всех частичных дуг пополам; Λ_k и T_k $(k \in \mathbb{N})$ — длины ломаных после k-кратного дробления частичных дуг пополам. Доказательство существования длины дуги окружности, выражение длины дуги через предел последовательности, обоснование свойства аддитивности длины, введение радианной меры угла базируются на оценке: $\mathrm{T}_k - \Lambda_k < \frac{\mathrm{T}}{3 \cdot 2^{2k+1}}$. Используется также лемма о разделяющем числе, а для вывода оценки дополнительно предполагается, что наибольшая из частичных дуг первоначального дробления не превышает шестой части окружности, что автоматически выполняется, если, например, в качестве Λ и T взять Λ_3 и T_3.

Цукерман Виталий Владимирович,
профессор кафедры высшей математики
Московского государственного открытого
педагогического университета им. М. А. Шолохова,
кандидат физ.-мат. наук.

Email: tsuckerman@front.ru

Лекции по аналитической геометрии

С. Кулешов, А. Салимова, С. Ставцев

Продолжаем публикацию лекций по аналитической геометрии, прочитанных курсантам Военно-воздушной инженерной академии им. проф. Н. Е. Жуковского. В настоящем номере содержится тема 4. Темы 2, 3 опубликованы в предыдущем номере журнала.

Тема 4

Скалярное произведение

20. Проекция вектора на вектор и ее свойства. Формула проекции

Прежде чем ввести еще одно действие над векторами (скалярное произведение), рассмотрим ряд вспомогательных понятий, которые пригодятся нам для решения задач по аналитической геометрии. Более того, эти термины будут использоваться при изучении общей физики и механики. А именно, введем скалярную и векторную проекции вектора на вектор. С этими понятиями читатель, скорее всего, уже встречался на интуитивном уровне в школьном курсе физики, когда рассматривал кинематику движения тела, брошенного под углом к горизонту, или динамику тела, движущегося по наклонной плоскости, проецируя векторы скорости и векторы сил на координатные оси. Изучим эти понятия с более общей точки зрения.

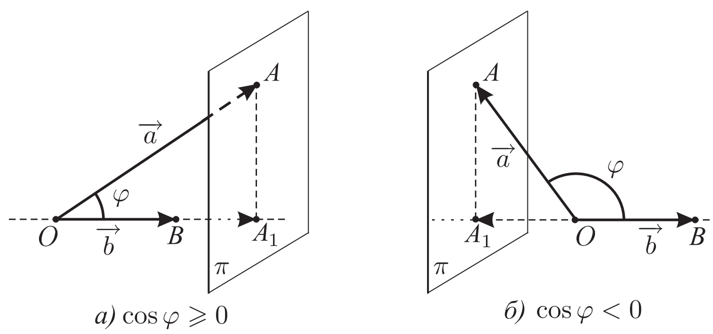

Рис. 4.1. Векторная проекция $\overrightarrow{a}$ на $\overrightarrow{b}$

20.1. Определение. Рассмотрим ненулевые векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Построим их геометрические реализации $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ соответственно (см. рис. 4.1). Проведем через точку A плоскость π, перпендикулярную прямой (OB) и пересекающую эту прямую в точке A_1.

Вектор, геометрической реализацией которого является направленный отрезок $\overrightarrow{OA_1}$, называется *векторной проекцией* $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{b}$ и обозначается $\overrightarrow{\text{Пр}}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$ (см. рис. 4.1).

Возникает вопрос, как найти $\overrightarrow{\text{Пр}}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$ по заданным векторам $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Не хотелось бы строить каждый раз плоскость π, а получить готовую формулу (вспомним информативное преимущество формул по сравнению с описанием).

Из построений видно, что направленный отрезок $\overrightarrow{OA_1}$ лежит на прямой (OB), т. к. и точка O, и точка A_1 лежат на этой прямой (см. рис. 4.1). Тогда по определению векторы $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{\text{Пр}}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$ коллинеарны, а значит, и пропорциональны, т. е. существует такое число λ, что $\overrightarrow{\text{Пр}}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA_1} = \lambda\overrightarrow{b}$, и задача состоит в том, чтобы найти это число.

Обозначим через $\overrightarrow{b}^0$ *орт вектора* $\overrightarrow{b}$, т. е. вектор единичной длины, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{b}$ выражается через орт по формуле: $\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{b}|\overrightarrow{b}^0$ (поскольку векторы в левой и правой частях формулы сонаправлены и длины их равны). Отсюда орт любого ненулевого вектора можно получить по формуле:

$$\overrightarrow{b}^0 = \frac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}. \tag{4.1}$$

Перепишем векторную проекцию через орт:

$$\overrightarrow{\text{Пр}}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \lambda|\overrightarrow{b}|\overrightarrow{b}^0. \tag{4.2}$$

20.2. Определение. Из рис. 4.1 видно, что величина λ, а значит, векторная проекция, зависит от угла φ между направленными отрезками $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. В наших рассуждениях мы будем рассматривать углы только меньше развернутого[1], называя их *углами между векторами* $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, и обозначать символом $(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$.

Выразим λ через $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$. Так как по построению плоскость $\pi\perp(OA_1)$, то прямые $(OA_1)\perp(AA_1)$, значит, $\triangle OA_1A$ прямоугольный с прямым углом $\angle A_1$. Рассмотрим два случая: 1) когда $\cos\varphi \geqslant 0$ (рис. 4.1, *а*) и 2) $\cos\varphi < 0$ (рис. 4.1, *б*). В первом случае из $\triangle OA_1A$ находим

$$\cos(\angle BOA) = \cos\varphi = \frac{|A_1O|}{|AO|},$$

а во втором —

$$\cos(\angle BOA) = \cos\varphi = -\frac{|A_1O|}{|AO|}.$$

Тогда при $\cos\varphi \geqslant 0$

$$\overrightarrow{OA_1} = |A_1O|\overrightarrow{b}^0 = |AO|\cos\varphi\,\overrightarrow{b}^0 = |\overrightarrow{a}|\cos\varphi\,\overrightarrow{b}^0,$$

а при $\cos\varphi < 0$

$$\overrightarrow{OA_1} = -|A_1O|\overrightarrow{b}^0 = |AO|\cos\varphi\,\overrightarrow{b}^0 = |\overrightarrow{a}|\cos\varphi\,\overrightarrow{b}^0.$$

Сравнивая полученные результаты с (4.2), имеем

$$\lambda = \frac{|\overrightarrow{a}|\cos\varphi}{|\overrightarrow{b}|}.$$

В результате

$$\overrightarrow{\text{Пр}}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\cos\varphi\,\overrightarrow{b}^0 \tag{4.3}$$

или, вспоминая, что $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$, и учитывая соотношение (4.1), получаем

$$\overrightarrow{\text{Пр}}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{|\overrightarrow{a}|\cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})}{|b|}\overrightarrow{b}, \tag{4.4}$$

[1]На каждом из рисунков рис. 4.1 присутствуют по два угла $\angle BOA$, один из которых больше развернутого, а второй меньше.

что дает возможность вычислить проекцию вектора $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{b}$.

20.3. Определение. Множитель при векторе $\overrightarrow{b}^0$ в формуле (4.3) называется *скалярной проекцией* (или просто проекцией) вектора $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{b}$ и обозначается $\text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$.

Таким образом,

$$\overrightarrow{\text{Пр}}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \left(\text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}\right)\overrightarrow{b}^0. \tag{4.5}$$

Ввиду формулы (4.3) скалярную проекцию вектора $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{b}$ можно вычислить так:

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}). \tag{4.6}$$

Как видно из соотношения (4.6), скалярная проекция — это алгебраическая величина, которая может быть как положительной, равной нулю, а также и отрицательной. Ее знак совпадает со знаком $\cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$.

20.4. Проекция и координаты. В этом разделе доказывается простой, но очень полезный факт, позволяющий вычислять скалярную проекцию вектора на базисные векторы ортонормированного базиса.

Рассмотрим прямоугольную систему координат, связанную с ортонормированным базисом $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$, и вектор $\overrightarrow{OA}$ (см. рис. 4.2). Предположим, что координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ относительно этого базиса — (x, y, z). Из рисунка следует, что координата x вычисляется по правилу:

$$x = |OA|\cos\varphi,$$

где φ — угол между $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{e_1}$. Сравнивая это равенство с формулой (4.6), получаем: если $\overrightarrow{OA}(x, y, z)$, то

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{e_1}}\overrightarrow{OA} = x. \tag{4.7}$$

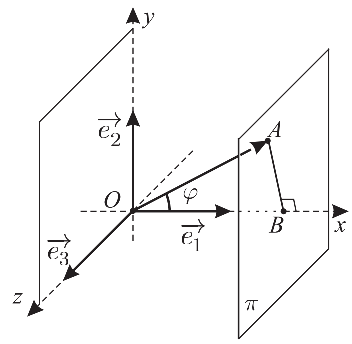

Рис. 4.2. Проекция вектора на базисные векторы

Иными словами, *скалярная проекция вектора на первый базисный вектор ортонормированного базиса совпадает с его первой координатой!*

Убедитесь, что вторая координата вектора — это его проекция на второй базисный вектор, а третья — на третий.

20.5. Линейные свойства проекций. Замечательно, что скалярная проекция — линейная операция, т. е. проекция суммы векторов совпадает с суммой проекций, а скалярный множитель можно выносить за знак проекции. На языке формул эти свойства выглядят следующим образом:

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{b}}(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) = \text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a_1} + \text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a_2}; \tag{4.8}$$

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{b}}(\lambda\overrightarrow{a}) = \lambda\text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}. \tag{4.9}$$

Линейность проекции можно доказать, исходя из определения. Однако этот путь достаточно сложен и мы сделаем иначе, а именно, воспользуемся тем, что скалярная проекция вектора на первый базисный вектор ортонормированного базиса — это первая координата.

Заметим, что согласно формуле (4.6) скалярная проекция $\text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$ вектора не зависит от длины вектора $\overrightarrow{b}$, т. е. длины вектора, на который проецируется вектор $\overrightarrow{a}$. Поэтому мы можем считать, что длина вектора $\overrightarrow{b}$ в формулах (4.8) и (4.9) равна 1.

Обозначим вектор $\overrightarrow{b}$ через $\overrightarrow{e_1}$ и достроим его до ортонормированного базиса $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ что, очевидно, сделать можно. Пусть координаты векторов $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a}$ из формул (4.8) и (4.9) относительно этого базиса будут:

$$\overrightarrow{a_1}(x_1, y_1, z_1); \qquad \overrightarrow{a_2}(x_2, y_2, z_2); \qquad \overrightarrow{a}(x, y, z).$$

Тогда по формуле (4.7) $\text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a_1} = x_1$, $\text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a_2} = x_2$. Значит, правая часть доказываемого равенства (4.8) выглядит как

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a_1} + \text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a_2} = x_1 + x_2. \tag{4.10}$$

С другой стороны, мы знаем, что координаты суммы векторов — это суммы координат слагаемых. Поэтому координаты суммы $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$ — это набор

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

а проекция суммы векторов $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$ на вектор $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{e_1}$ — ее первая координата, т. е.

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{b}}(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) = x_1 + x_2. \tag{4.11}$$

Сравнивая формулы (4.10) и (4.11), убеждаемся, что равенство (4.8) действительно верное.

Формула (4.9) доказывается аналогично. Проверьте ее самостоятельно.

Линейными свойствами обладает и векторная проекция. Мы этого факта проверять не будем, а оставим вам в качестве полезной задачи (задача 4.29*).

21. Скалярное произведение

21.1. Определение. *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется число $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, равное произведению длин этих векторов и косинуса угла между этими векторами:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}). \tag{4.12}$$

Если хотя бы один из векторов $\overrightarrow{a}$ или $\overrightarrow{b}$ нулевой, то скалярное произведение считается равным нулю. Обозначается скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ как символом $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, так и символом[2] $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$.

21.2. Следствия из определения. В качестве первого примера вычислим *скалярный квадрат вектора* $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})$. Поскольку угол $(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}}) = 0$, а $\cos 0 = 1$, то

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = |\overrightarrow{a}|^2.$$

Отсюда

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})}. \tag{4.13}$$

Иными словами, если мы каким-то образом можем вычислить скалярный квадрат вектора, то можем найти и его длину как квадратный корень из этого скалярного квадрата.

Пусть теперь $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$. Так как $\cos(\pi/2) = 0$, то $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$. Более того, если $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ и $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$, то

$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0. \tag{4.14}$$

Через скалярное произведение ненулевых векторов можно вычислить и косинус угла между ними:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) = \frac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}. \tag{4.15}$$

Очень полезной для приложений является так называемая *формула проекции*, выражающая проекцию вектора через скалярное произведение. Напомним, что по формуле (4.6)

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}).$$

[2] Обозначение скалярного произведения через $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ является современным международным, а через $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ — устаревшим российским, хотя оно довольно часто встречается в технической литературе.

Умножив это равенство на длину вектора $\overrightarrow{b}$, получим

$$|\overrightarrow{b}|\text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}).$$

Обратите внимание, что справа стоит скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Поэтому

$$|\overrightarrow{b}|\text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \tag{4.16}$$

или

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{b}|}.$$

Последнее соотношение и называется формулой проекции.

Векторная проекция $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{b}$ рассчитывается по формуле

$$\overrightarrow{\text{Пр}}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{b}|^2}\overrightarrow{b}, \tag{4.17}$$

справедливость чего следует из (4.4) и (4.15) (проверьте!).

22. Свойства скалярного произведения

22.1. Симметричность скалярного произведения. Для любых векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ справедливо равенство:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}). \tag{4.18}$$

Доказательство. Справедливость утверждения вытекает непосредственно из определения скалярного произведения 21.1. Детали доказательства разберите самостоятельно. □

22.2. Положительная определенность скалярного произведения. Пусть $\overrightarrow{a}$ — произвольный вектор. Тогда

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) \geqslant 0, \text{ причем } (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = 0 \text{ только при } \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}. \tag{4.19}$$

Доказательство. Мы знаем (стр 58), что $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = |\overrightarrow{a}|^2$. Так что неравенство $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) \geqslant 0$ следует из того факта, что квадрат числа (длины вектора) всегда неотрицателен. Более того, он равен нулю только тогда, когда длина вектора нулевая, т. е. сам вектор нулевой. □

22.3. Билинейность скалярного произведения. Термин «билинейность» означает линейность по каждому аргументу, что на языке формул выглядит так:

$$\forall \overrightarrow{a}, \ \overrightarrow{b}, \ \overrightarrow{c} \quad \text{и} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) + \mu(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}); \tag{4.20}$$

$$(\overrightarrow{a}, \lambda\overrightarrow{b} + \mu\overrightarrow{c}) = \lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + \mu(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}). \tag{4.21}$$

Доказательство. Доказательство этого свойства основано на формуле проекции (4.16), которая выражает скалярное произведение через проекцию вектора на вектор. Начнем с проверки равенства (4.20).

$$\begin{aligned}
(\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) &= |\overrightarrow{c}|\text{Пр}_{\overrightarrow{c}}(\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}) = && \text{(по (4.16))}\\
&= |\overrightarrow{c}|\left(\text{Пр}_{\overrightarrow{c}}\lambda\overrightarrow{a} + \text{Пр}_{\overrightarrow{c}}\mu\overrightarrow{b}\right) = && \text{(по (4.8))}\\
&= |\overrightarrow{c}|\left(\lambda\text{Пр}_{\overrightarrow{c}}\overrightarrow{a} + \mu\text{Пр}_{\overrightarrow{c}}\overrightarrow{b}\right) = && \text{(по (4.9))}\\
&= \lambda\left(|\overrightarrow{c}|\text{Пр}_{\overrightarrow{c}}\overrightarrow{a}\right) + \mu\left(|\overrightarrow{c}|\text{Пр}_{\overrightarrow{c}}\overrightarrow{b}\right) = \\
&= \lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) + \mu(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) && \text{(по (4.16))}.
\end{aligned}$$

Итак, формула (4.20) доказана. Чтобы доказать линейность по второму аргументу, можно воспользоваться симметричностью скалярного произведения и доказанной линейностью по первому аргументу.

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{a}, \lambda \overrightarrow{b} + \mu \overrightarrow{c}) &= (\lambda \overrightarrow{b} + \mu \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) = && \text{(по (4.18))} \\
&= \lambda(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) + \mu(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) = && \text{(по (4.20))} \\
&= \lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + \mu(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) && \text{(по (4.18)).} \ \square
\end{aligned}$$

23. Скалярное произведение в координатах

Напомним, что аналитическая геометрия — это тот раздел математики, в котором к исследованию геометрических объектов привлекается алгебра, позволяющая выполнять всевозможные полезные вычисления. Мы уже знаем, что при фиксированном базисе векторы полностью описываются своими координатами, т. е. упорядоченными тройками чисел. Поэтому естественно ожидать, что операции над векторами можно осуществлять, оперируя координатами. В этом разделе мы покажем, как найти скалярное произведение векторов через их координаты. Наиболее простую форму соответствующие формулы имеют, когда координаты заданы в ортонормированном базисе. Напомним, что ортонормированным называется базис $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ и $\overrightarrow{k}$, векторы в котором попарно перпендикулярны и имеют единичную длину.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{E}^3$, которые заданы координатами $\overrightarrow{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\overrightarrow{b}(b_x, b_y, b_z)$ в ортонормированном базисе $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ и $\overrightarrow{k}$. По определению координат это означает, что векторы выражаются через базис следующим образом:

$$\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{\imath} + a_y \overrightarrow{\jmath} + a_z \overrightarrow{k}, \qquad \overrightarrow{b} = b_x \overrightarrow{\imath} + b_y \overrightarrow{\jmath} + b_z \overrightarrow{k}.$$

Подставим эти выражения в скалярное произведение $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ и воспользуемся его билинейностью (4.20), (4.21), т. е. раскроем скобки:

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \big((a_x \overrightarrow{\imath} + a_y \overrightarrow{\jmath} + a_z \overrightarrow{k}), (b_x \overrightarrow{\imath} + b_y \overrightarrow{\jmath} + b_z \overrightarrow{k})\big) &= \\
= a_x b_x(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\imath}) + a_x b_y(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}) + a_x b_z(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{k}) + a_y b_x(\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{\imath}) &+ \\
+ a_y b_y(\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{\jmath}) + a_y b_z(\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}) + a_z b_x(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{\imath}) + a_z b_y(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{\jmath}) + a_z b_z(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}). &\quad (4.22)
\end{aligned}$$

Как видите, для вычисления $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ нам осталось вычислить попарные скалярные произведения базисных векторов. Но это уже сделать просто. Поскольку скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины (стр 58), а длина векторов ортонормированного базиса — единица, то

$$(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\imath}) = (\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{\jmath}) = (\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}) = 1.$$

Кроме того, векторы ортонормированного базиса попарно перпендикулярны. Поэтому, согласно (4.14), получаем

$$(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}) = (\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{\imath}) = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{k}) = (\overrightarrow{k}, \overrightarrow{\imath}) = (\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}) = (\overrightarrow{k}, \overrightarrow{\jmath}) = 0,$$

и от всего громоздкого равенства (4.22) остается простая и полезная формула:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \qquad (4.23)$$

Из этой формулы и формулы (4.13) получаем известную со школы формулу вычисления длины вектора:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (4.24)$$

24*. Евклидово пространство

Понятие скалярного произведения можно ввести не только для направленных отрезков, но и для векторов абстрактных векторных пространств. Эта операция позволяет определить длину вектора и угол между двумя элементами векторного пространства. Соответственно, мы сможем ответить на вопрос: «Какие векторы являются ортогональными (или, что то же самое, перпендикулярными)?», введя определение угла между ними. Причем в качестве векторов можно, например, рассматривать непрерывные на некотором отрезке функции или бесконечные сходящиеся последовательности, или какие-либо другие элементы векторного пространства.

Более того, с помощью скалярного произведения и понятия ортогональности мы сможем определить и построить проекцию одного вектора на другой. Давайте вспомним, что проекция точки на прямую позволяет найти кратчайшее расстояние от этой точки до прямой. То есть в результате проецирования мы получаем точку, которая во-первых, лежит на прямой, а во-вторых, наиболее близка к проецируемой. Так же дело обстоит с проекцией вектора на вектор (или на ось): мы получаем вектор, который, с одной стороны, лежит на оси, а с другой, расстояние между концами исходного и полученного векторов минимально (рис. 4.1). Другими словами, векторная проекция является наилучшим приближением исходного вектора среди векторов, лежащих на оси. Значит, если мы сможем построить проекцию вектора $\mathbf{v}$ на некоторое подмножество векторного пространства, определенное векторами $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, то научимся решать задачи о наилучшем приближении вектора $\mathbf{v}$ векторами $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$. Более того, вычисление длины через скалярное произведение позволяет найти ошибку приближения как «расстояние» между исходным вектором и найденным приближением. Очевидно, что ошибка для заданных $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ будет минимальной.

Задачи о наилучшем приближении часто возникают в прикладных исследованиях, когда мы не можем найти $\mathbf{v}$, а заменяем его наилучшим приближением $\mathbf{v}_1$, являющимся проекцией $\mathbf{v}$ на линейную комбинацию известных векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$. Например, в теории сигналов разложение исходного сигнала, заданного функцией $\mathbf{v}(x)$ по конечному числу гармоник, т. е. по функциям 1, $\cos(mx)$, $\sin(mx)$, $m = 1, 2, \ldots, n$, является ничем иным, как нахождением наилучшего приближения $\mathbf{v}_1$ исходного сигнала.

Так что же в современной математике понимается под скалярным произведением?

24.1. Определение. Если любым векторам $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ векторного пространства V сопоставлено вещественное число (которое обозначается $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$), такое что выполняются следующие свойства

1) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$;

2) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \ (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$;

3) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})$;

4) $\forall \mathbf{u} \in V \ (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant 0$, причем $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ только при $\mathbf{u} = \mathbf{0}$,

то операция $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ называется *скалярным произведением* векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Обратите внимание, что свойства, заложенные в определении, — это в точности симметричность, билинейность и положительная определенность. Иными словами, это именно те свойства, которые доказаны ранее, в разделе 22. Поэтому более коротко можно сказать, что скалярное произведение — это *симметричная, билинейная положительно определенная форма на векторном пространстве.* Термин «форма на векторном пространстве» означает лишь некое правило, по которому паре векторов сопоставляется число.

24.2. Определение. Векторное пространство V, в котором введено скалярное произведение 24.1, называется *евклидовым пространством* и его обозначают $\mathbb{E}$.

24.3. Пример евклидового пространства. Введем в векторном пространстве $C[-\pi, \pi]$ (непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций) скалярное произведение двух его элементов $f(x)$

и $g(x) \in C[-\pi, \pi]$ в следующем виде:

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx. \tag{4.25}$$

Чтобы назвать операцию (4.25) скалярным произведением с полной уверенностью, необходимо проверить свойства (1)–(4) определения скалярного произведения 24.1. Доказательство для введенной операции (4.25) основывается на свойствах определенного интеграла.

Доказательство справедливости свойств (1)–(3) предоставим читателю в качестве самостоятельного упражнения.

Для доказательства (4) из 24.1 укажем следующее свойство определенного интеграла: если функция $h(x)$ интегрируема на промежутке $[-\pi, \pi]$, неотрицательна и $a < b$, то

$$\int_{a}^{b} h(x)\,dx \geqslant 0.$$

Это действительно так, поскольку геометрический смысл интеграла от неотрицательной функции — площадь под ее графиком, которая не может быть отрицательной.

В силу неотрицательности функции $f^2(x)$ на $[-\pi, \pi]$ для скалярного произведения (4.25) первая часть свойства (4) выполнена.

Также очевидно, что при $f(x) \equiv 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 0.$$

Покажем теперь, что если функция $f(x) \in C[-\pi, \pi]$ не равна тождественно нулю, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx > 0.$$

Поскольку $f(x) \not\equiv 0$, то найдется такая точка $x_0 \in (-\pi, \pi)$, что $f(x_0) \neq 0$. Значит, $f^2(x_0) > 0$. По одному из свойств функций, непрерывных в точке x_0, найдется такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [-\pi, \pi]$, в которой $f^2(x) > 0$. Иными словами, отыщется хотя бы небольшой промежуток, над которым график функции $f^2(x)$ будет идти выше оси Ox. Стало быть, и площадь под графиком $f^2(x)$ будет положительна. Отсюда, в частности, следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx > 0.$$

Таким образом, мы ввели евклидово пространство непрерывных функций со скалярным произведением (4.25), которое обозначают $C_2[-\pi, \pi]$. Почему здесь пишут именно индекс 2, будет видно из дальнейших рассуждений.

Укажем простейшие следствия, которые вытекают из определения скалярного произведения 24.1.

24.4. Линейность скалярного произведения по второму аргументу. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{E}$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w}).$$

Доказательство. Доказательство следует из последовательного применения аксиом (1), (2) и (3) из 24.1:

$$(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\alpha\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\alpha\mathbf{v}, \mathbf{u}) + (\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + (\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w}). \ \square$$

24.5. Скалярное произведение с нулевым вектором. Скалярное произведение любого вектора $\mathbf{u}$ с нулевым вектором $\mathbf{0}$ равно нулю:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = 0.$$

Доказательство. Для доказательства представим нулевой вектор в виде $\mathbf{0} = 0\mathbf{u}$, тогда

$$(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = (\mathbf{u}, 0\mathbf{u}) = 0(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0. \ \square$$

25*. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца

Как Вы, надеемся, помните, скалярное произведение на абстрактном векторном пространстве было нужно, чтобы вычислять длины векторов и углы между ними, пользуясь формулами (4.13) и (4.15). Однако формулой для угла

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

реально можно воспользоваться только тогда, когда $\left|\frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right| \leqslant 1$. Да и длина должна обладать некоторыми специфическими свойствами, чтобы ею можно было успешно пользоваться. Свойства длины, да и что это такое вообще, мы обсудим позже, а сейчас займемся важным неравенством, которое нам поможет убедиться, что формулы (4.13) и (4.15) действительно работают.

25.1. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Для всех векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$ справедливо неравенство:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 \leqslant (\mathbf{u}, \mathbf{u})(\mathbf{v}, \mathbf{v}). \tag{4.26}$$

Доказательство. Рассмотрим вектор вида $\mathbf{u} + t\mathbf{v}$, где $t \in \mathbb{R}$. Из свойства (4) в 24.1 для этого вектора имеем:

$$(\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{u} + t\mathbf{v}) \geqslant 0, \tag{4.27}$$

или согласно свойствам (1)–(3) из 24.1 и доказанным 24.4 получаем, раскрыв скобки:

$$t^2(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant 0. \tag{4.28}$$

Иначе говоря, стоящий слева квадратный трехчлен относительно t принимает неотрицательные значения. Это может быть только в том случае, когда дискриминант уравнения

$$t^2(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$$

неположителен, т. е.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{u})(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leqslant 0.$$

Тем самым мы доказали неравенство (4.26). $\square$

25.2. Замечание. В формуле (4.26) равенство имеет место только в том случае, когда $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ линейно зависимы.

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ линейно независимы. Согласно свойству (4) из 24.1 в соотношении (4.27) знак равенства возможен только в том случае, если $\mathbf{u} + t\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Но это означает (по определению линейной зависимости), что $\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v} = \mathbf{0}$ при $\lambda_1 = 1 \neq 0$, т. е. $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ линейно зависимы. Таким образом, для линейно независимых элементов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ неравенство (4.27) строгое. В результате аналогичных в вышеприведенном доказательстве рассуждений получаем для линейно независимых $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ строгое неравенство (4.26).

Если векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ линейно зависимы, то они пропорциональны: $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$. Подставим это выражение в (4.26) и получим в правой части

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 = (\lambda\mathbf{v}, \mathbf{v})^2 = \big(\lambda(\mathbf{v}, \mathbf{v})\big)^2 = \lambda^2(\mathbf{v}, \mathbf{v})^2,$$

а в левой части

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u})(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{v}, \lambda\mathbf{v})(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \lambda^2(\mathbf{v}, \mathbf{v})(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \lambda^2(\mathbf{v}, \mathbf{v})^2.$$

Поэтому для линейно зависимых $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ неравенство (4.26) превращается в равенство. □

По аналогии с формулой (4.13) в силу неотрицательности скалярного произведения введем обозначение

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}. \tag{4.29}$$

Очень хотелось бы сказать, что это и есть длина вектора. Но надо быть осторожным. Что мы вообще знаем про длину? Можно сказать, конечно, что это расстояние от начала до конца. Но тогда возникает вопрос: «Что такое расстояние?»

А как на самом деле появляются в математике определения, которые вам приходится учить? Оказывается — и просто, и сложно одновременно. Уже упоминалось, что при исследовании окружающего нас мира ученые, и математики, в частности, пытаются выделить в изучаемом объекте или явлении какие-то характерные свойства и включают их в определение абстрактного понятия. Исследуют эту абстракцию, постоянно помня о конкретных явлениях, и проверяют, насколько абстракция близка к конкретике.

Попытаемся так же подойти к понятию длины вектора. Ясно, что это — прежде всего вещественное число, причем неотрицательное. Кроме того важно, чтобы нулевую длину имел только нулевой вектор. Запишем это свойство под номером 1.

1. Длиной вектора $\mathbf{v}$ называется неотрицательное число (которое мы будем традиционно обозначать как $|\mathbf{v}|$), причем $|\mathbf{v}| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Достаточно ли этого требования? Видимо, нет. Векторы можно умножать на числа. Надо, чтобы и длина менялась правильно. Поэтому в качестве второго свойства потребуем следующее.

2. При умножении вектора на число λ его длина меняется в $|\lambda|$ раз: $|\lambda\mathbf{v}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{v}|$.

Вот это уже ближе к желаемому. Однако есть еще одно важное свойство длины, про которое никто и не думает, настолько оно естественно, но если это свойство не заложить в определение, ничего хорошего не получится. Мы уже говорили, что понятие длины тесно связано с расстоянием. Так вот представьте, что вам нужно попасть из Петербурга в Москву. Как будет короче: ехать напрямую или через Астрахань? Ясно, что напрямую короче. Это свойство расстояния и длины называется *неравенством треугольника*, которое на языке векторов можно сформулировать следующим образом

3. Для любых двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ выполнено свойство:

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|.$$

Нарисуйте соответствующую картинку и подумайте, причем тут треугольник, и как это связано с путешествием из Петербурга в Москву.

С учетом введенного обозначения сформулируем следствие из неравенства Коши–Буняковского–Шварца.

25.3. Следствие. Для всех $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$ имеет место неравенство

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|. \tag{4.30}$$

Доказательство. По формулам (4.28) и (4.29) $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leqslant |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. Поэтому

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u},\mathbf{u}) + 2(\mathbf{u},\mathbf{v}) + (\mathbf{v},\mathbf{v}) \leqslant$$
$$\leqslant (\mathbf{u},\mathbf{u}) + 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| + (\mathbf{v},\mathbf{v}) = (|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|)^2,$$

что доказывает (4.30). □

Естественно, что величина, рассчитываемая по формуле (4.29), удовлетворяет всем перечисленным требованиям длины (можете проверить самостоятельно с помощью свойств скалярного произведения и доказанного неравенства треугольника). Конечно, длину в пространствах можно определить и без скалярного произведения, поэтому величину $\sqrt{(\mathbf{u},\mathbf{u})}$ можно рассматривать как частный случай.

25.4. Пример ортонормированной системы. В качестве примера рассмотрим евклидово пространство $C_2[-\pi,\pi]$. По формуле (4.29) получаем, что длина в этом пространстве может быть вычислена по формуле

$$|f| = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx\right)^{1/2}. \tag{4.31}$$

Поясним индекс в обозначении пространства $C_2[-\pi,\pi]$. В пространстве непрерывных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций длину можно ввести по более общей формуле

$$|f| = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^p(x)\,dx\right)^{1/p},$$

где $p\in\mathbb{N}$. Пространство с такой длиной обозначают $C_p[-\pi,\pi]$. Пространство $C[-\pi,\pi]$ с длиной (4.31) является частным случаем, когда $p=2$.

Рассмотрим в пространстве $C_2[-\pi,\ \pi]$ систему функций $f_0(x)=1$, $f_{2n-1}=\cos(nx)$, $f_{2n}=\sin(nx)$, $n\in\mathbb{N}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$(f_i,f_j) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_i(x)f_j(x)\,dx = 0, \quad i\neq j, \quad i,j=0,1,2\ldots$$

а также

$$(f_0,f_0) = |f_0|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx = 2\pi, \qquad (f_i,f_i) = |f_i|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_i^2(x)\,dx = \pi,\ i=1,2\ldots$$

Таким образом, согласно (4.14) система функций $f_0(x)=1$, $f_{2n-1}=\cos(nx)$, $f_{2n}=\sin(nx)$ ортогональна в пространстве $C_2[-\pi,\pi]$. Более того, известно, что в этом пространстве она образует базис. То есть любую непрерывную на отрезке $[-\pi,\pi]$ функцию $h(x)$ можно представить в виде

$$h(x) = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n\cos(nx) + \mu_n\sin(nx)), \tag{4.32}$$

который называют *рядом Фурье* функции $h(x)$.

Поскольку данная система функций ортогональна, то коэффициенты λ_n и μ_n — суть проекции функции $h(x)$ на соответствующие базисные функции.

Опираясь на формулу проекции (4.16), получаем формулы для вычисления коэффициентов:

$$\lambda_0 = \frac{(h(x),f_0)}{|f_0|}, \quad \lambda_n = \frac{(h(x),f_{2n-1})}{|f_{2n-1}|}, \quad \mu_n = \frac{(h(x),f_{2n})}{|f_{2n}|},\ n=1,2,\ldots \tag{4.33}$$

Числа λ_n, μ_n, $n = 1, 2, \ldots$ называются коэффициентами Фурье.

В качестве примера разложим функцию $h(x) = x^2$ в ряд Фурье. Из формулы (4.33) получаем коэффициенты Фурье:

$$\lambda_0 = \frac{\pi^2\sqrt{2\pi}}{3},\ \lambda_i = \frac{(-1)^n 4\sqrt{\pi}}{n^2},\ \mu_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$$

и соответствующий ряд:

$$x^2 = \frac{\pi^2\sqrt{2\pi}}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4\sqrt{\pi}}{n^2} \cos(nx).$$

Примеры решения типовых задач

Пример 4.1. Вычислить расстояние между точками $A(2, 4, 6)$ и $B(0, 2, 4)$.

Решение. Ясно, что расстояние между точками совпадает с длиной отрезка, который их соединяет, поэтому искомое расстояние равно длине вектора $\overrightarrow{AB}$. Его координаты определяются стандартным способом: $\overrightarrow{AB}(-2, -2, -2)$. Теперь достаточно воспользоваться формулой (4.24):

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{3}.$$

Пример 4.2. Даны координаты вершин треугольника $\triangle ABC$: $A(1, -1)$, $B(-2, 3)$, $C(4, 7)$. Найти длину медианы AM, проведенной в этом треугольнике.

Решение. Выразим вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Для этого достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ (см. рис. 4.3). По правилу параллелограмма

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

Так как по свойству параллелограмма диагонали точкой пересечения делятся пополам, а M — точка пересечения диагоналей параллелограмма, то

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Так как $\overrightarrow{AB} = (-3, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 8)$, то по формуле (4.13)

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\Big(1/2\big(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\big)\Big)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 + 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + |\overrightarrow{AC}|^2},$$

где длины $|\overrightarrow{AB}|$ и $|\overrightarrow{AC}|$ рассчитываются по формуле (4.24), а скалярное произведение $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ — по формуле (4.23)

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5; \qquad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}; \qquad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (-3) \cdot 3 + 4 \cdot 8 = 23.$$

В результате получаем длину медианы

$$|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{2}\sqrt{25 + 2 \cdot 23 + 73} = 6.$$

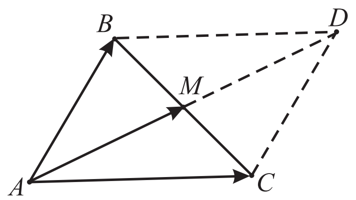

Рис. 4.3 Рисунок к задаче 4.2

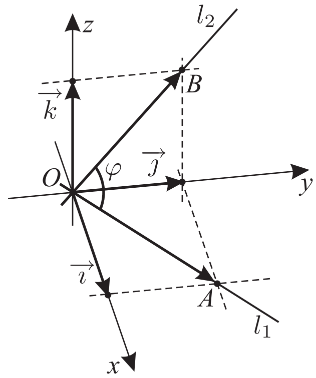

Рис. 4.4 Рисунок к задаче 4.3

Пример 4.3. Вычислить острый угол между биссектрисами координатных углов Oxy и Oyz.

Решение. Сделаем рисунок к задаче (см. рис. 4.4). На биссектрисах l_1 и l_2 соответствующих координатных углов xOy и yOz отметим точки A и B таким образом, чтобы координаты векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ были $\overrightarrow{OA}(1,1,0)$, $\overrightarrow{OB}(0,1,1)$ (см. рис. 4.4).

Угол φ между прямыми l_1 и l_2 — это угол между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Рассчитаем косинус этого угла по формуле (4.15):

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, искомый угол $\varphi = 60^\circ$.

Пример 4.4. Найти координаты точки, A_1 симметричной точке $A(3,-4,1)$ относительно прямой, проходящей через точки $B(1,-1,2)$ и $C(-1,0,4)$.

Решение. Для решения задачи найдем координаты вектора $\overrightarrow{AA_1}$. Для этого представим его в виде (рис. 4.5)

$$\overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{AM} = 2\big(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}\big),$$

где по определению векторной проекции 20.1 и формуле (4.17)

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{\text{Пр}}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA} = \frac{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{BC}|^2}\overrightarrow{BC}.$$

Координаты векторов $\overrightarrow{BC}(-2,1,2)$ и $\overrightarrow{BA}(2,-3,-1)$, тогда

$$\overrightarrow{BM} = \frac{(-2)\cdot 2 + 1\cdot(-3) + 2\cdot(-1)}{(-2)^2+1^2+2^2}(-2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}) =$$
$$= 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}.$$

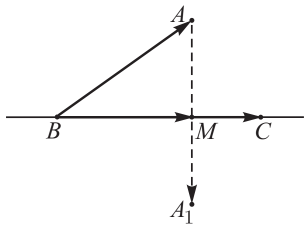

Рис. 4.5. Рисунок к задаче 4.4

Таким образом, $\overrightarrow{AA_1} = \big(2\cdot(2-2), 2\cdot(-1-(-3)), 2\cdot(-2-(-1))\big)$ или $\overrightarrow{AA_1}(0,4,-2)$. Координаты искомой точки $A_1 = (3,0,-1)$.

Контрольные вопросы

4.1. Что называется векторной проекцией вектора $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{b}$?

4.2. Что называется ортом ненулевого вектора $\overrightarrow{a}$?

4.3. Дайте определение угла между ненулевыми векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

4.4. Что называется скалярной проекцией вектора $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{b}$?

4.5. Чему равна проекция вектора на векторы ортонормированного базиса?
4.6. Перечислите свойства векторной проекции.
4.7. Перечислите свойства скалярной проекции.
4.8. Дайте определение скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
4.9. Запишите формулу вычисления длины вектора через скалярное произведение.
4.10. Перечислите свойства скалярного произведения.
4.11. Запишите формулы вычисления скалярной и векторной проекции одного вектора на другой через их скалярное произведение.
4.12. Запишите скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме.

Задачи

4.1°. Найдите расстояние от точки $A(-2,4,4)$ до начала координат.

4.2°. Найдите длины векторов $\vec{a}=2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{\imath}-\sqrt{5}\vec{\jmath}$, $\vec{c}=-3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}$.

4.3°. Найдите расстояние между точками:
а) $A(-1,2,2)$ и $B(2,2,6)$;
б) $C(-2,3,1)$ и $D(0,4,5)$.

4.4°. Известно, что $|\vec{a}|=1$; $|\vec{b}|=2$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляет 60°. Найдите скалярное произведение этих векторов, а также скалярную проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

4.5°. Найдите скалярную и векторную проекции вектора $\vec{a}=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}$ на вектор $\vec{b}=3\vec{\jmath}+4\vec{k}$.

4.6°. Найдите орты векторов $\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$, $2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}$.

4.7. Найдите длину вектора $2\vec{a}-3\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°.

4.8. Найдите длину вектора $\vec{a}=2\vec{m}-\vec{n}+3\vec{p}$, если $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=2$, $|\vec{p}|=3$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=(\widehat{\vec{n},\vec{p}})=45^\circ$. $(\widehat{\vec{m},\vec{p}})=60^\circ$.

4.9. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ — геометрические реализации векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ соответственно. Найдите длины диагоналей A_1C и BD_1, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=3$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=(\widehat{\vec{a},\vec{c}})=60^\circ$, $(\widehat{\vec{b},\vec{c}})=90^\circ$.

4.10. Найдите угол между векторами

$$\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k} \qquad \text{и} \qquad -\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+2\vec{k}.$$

4.11. Найдите внутренние углы и длины сторон в треугольнике $\triangle ABC$, если известны координаты его вершин $A(2,1,1)$, $B(4,-1,2)$, $C(3,3,3)$.

4.12. Даны координаты точек $A(1,-1,-2)$, $B(3,0,0)$, $C(1,2,0)$, $D(1,1,1)$. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, а также скалярную и векторную проекции $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{DC}$.

4.13. Докажите, что $A(1,-3,0)$, $B(2,-1,1)$, $C(2-\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$ и $D(1-\sqrt{3},-3,\sqrt{3})$ — последовательные вершины квадрата.

4.14. В пирамиде $ABCD$ известны длины ребер: $AB=1$, $AC=2$, $AD=3$, плоские углы при вершине A равны 60°. Найдите скалярную проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{DB}$.

4.15. Луч света, имеющий направление $\vec{v}(v_x,v_y,v_z)$, отражается от плоскости Oyz. Найдите направление отраженного луча.

4.16. В треугольнике $\triangle ABC$, вершины которого $A(1,0,0)$, $B(5,-1,3)$, $C(1,1,1)$, определите угол между медианой AP и стороной AC.

4.17. Найдите расстояние от точки $M(1,0,-3)$ до прямой (AB): $A(1,-1,3)$, $B(2,3,0)$.

4.18. Найдите координаты проекции точки $C(5,0,1)$ на прямую (AB), если $A(0,0,1)$, $B(1,2,4)$.

4.19. Определите координаты точки P, симметричной точке $Q(1,0,1)$ относительно прямой (AB), если $A(-2,0,3)$ и $B(1,1,4)$.

4.20. Найдите координаты векторной проекции вектора $2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ на прямую (AB), если $A(1,1,0)$, $B(2,0,2)$.

4.21. В треугольнике $\triangle ABC$ с известными координатами вершин $A(0,0,1)$, $B(1,2,4)$, $C(5,0,1)$. Определите вектор высоты $\overrightarrow{BD}$ в координатной форме.

4.22. Известны координаты точек $A(1,1,0)$, $B(2,0,2)$, $C(1,0,0)$. Найдите координаты вектора, симметричного вектору $\overrightarrow{AC}$ относительно вектора $\overrightarrow{AB}$.

4.23. Плоскость π перпендикулярна вектору $\overrightarrow{n}(4,-1,-3)$ и проходит через точку $A(-1,2,1)$. Найдите координаты точки, симметричной точке $M(1,2,-3)$ относительно этой плоскости.

4.24*. Докажите, что для произвольного вектора $\overrightarrow{v}$, компланарного с векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, выполняется равенство $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{Пр}}_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{v} + \overrightarrow{\text{Пр}}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{v}$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$.

4.25*. Найдите сумму векторных проекций вектора $\overrightarrow{a}$, лежащего в плоскости произвольного квадрата, на стороны этого квадрата.

4.26*. В равнобедренном треугольнике угол между медианами, проведенные к боковым сторонам, равен 60°. Найдите углы равнобедренного треугольника.

4.27*. В правильном октаэдре $ABCDEF$ точки M и N — середины ребер AB и BC соответственно, P и Q — соответственно середины граней ACD и BFE (т. е. точки пересечения медиан соответствующих треугольников). Найдите угол между прямыми (MN) и (PQ) (см. рис. 4.6).

4.28*. Найдите координаты проекции точки $M(4,4,4,4)$ на плоскость в пространстве $\mathbb{R}^4$, проходящую через точки

$$A(0,0,0,2),\ B(1,2,0,2),\ C(-2,1,-5,2),\ D(2,-1,-1,3).$$

4.29*. Докажите линейные свойства векторной проекции:

$$\overrightarrow{\text{Пр}}_{\overrightarrow{b}}(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}) = \overrightarrow{\text{Пр}}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{\text{Пр}}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a_2};$$
$$\overrightarrow{\text{Пр}}_{\overrightarrow{b}}(\lambda\overrightarrow{a}) = \lambda\overrightarrow{\text{Пр}}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}.$$

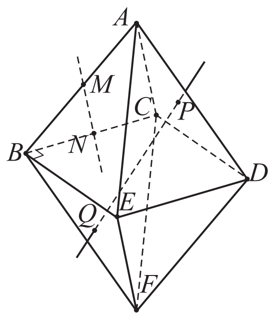

Рис. 4.6. Рисунок к задаче 4.27*

Кулешов Сергей Алексеевич, дфмн, профессор кафедры “Высшая математика” Военно-воздушной Академии имени проф. Н. Е. Жуковского. KuleshovSergej@rambler.ru

Салимова Альфия Фаизовна, кпн, доцент той же кафедры. afsalimova@mail.ru

Ставцев Станислав Леонидович, кфмн, доцент той же кафедры. stav@inm.ras.ru

События и вероятности

А. И. Саблин

Второй раздел учебного пособия — элементарного введения в теорию вероятностей. Первый раздел был опубликован в нашем журнале в номере 1(41), 2007 г.

Введение

В первом разделе [1] пособия мы рассмотрели понятие вероятности и методы вычисления вероятности для случайных экспериментов, когда удаётся выделить множество (конечное или бесконечное) равновероятных исходов. Однако на практике часто встречаются и ситуации иного рода: вероятности некоторых событий известны, а вероятности некоторых других событий, связанных с первыми, требуется найти. В качестве примера можно привести следующую задачу.

Задача о стрелках. Первый стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,6, второй — с вероятностью 0,7, третий — с вероятностью 0,8. Стрелки сделали по одному выстрелу в мишень. Какова вероятность, что

а) первый и второй стрелок попали в мишень;
б) все три стрелка попали в мишень;
в) первый или второй стрелок попали в мишень;
г) мишень поражена;
д) в мишени ровно одно попадание.

Для того чтобы решить эту задачу, нам требуется ввести целый ряд новых понятий: первым делом мы должны уяснить, как события, вероятности которых требуется найти, связаны с событиями, вероятности которых известны, затем произвести классификацию событий, дать определение вероятности и, наконец, ввести так называемые независимые события. Кроме того, в данном пособии мы рассмотрим понятие условной вероятности и формулы: полной вероятности и Байеса.

Действия с событиями и их свойства

Определение. *Произведением* событий называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят все рассматриваемые события.

Определение. *Суммой* событий называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из рассматриваемых событий.

Определение. *Противоположным* событием называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда данное событие не происходит.

Обозначения. Если даны два события, обозначаемые A и B, то их сумму будем обозначать $A+B$, произведение будем обозначать AB, а событие, противоположное событию A, будем обозначать $\overline{A}$.

Оказывается любую связь между событиями можно записать формулой, содержащей только три указанных действия с событиями.

Можно установить, что для введённых действий с событиями справедливы следующие тождества:

1. $AB = BA$
2. $A + B = B + A$
3. $(AB)\,C = A\,(BC) = ABC$
4. $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
5. $A\,(B + C) = AB + AC$
6. $A + BC = (A + B)\,(A + C)$

7. $AA = A$
8. $A + A = A$
9. $A + AB = A$
10. $A\left(A + B\right) = A$
11. $\overline{\overline{A}} = A$
12. $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$
13. $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$

Докажем, например, справедливость тождества 7. Равенство событий означает, что одно из них происходит тогда и только тогда когда происходит второе. Пусть происходит событие-правая часть, т.е. событие A, тогда происходит каждое из событий-сомножителей стоящих в левой части, т.е. событие-левая часть тоже происходит. Пусть происходит событие-левая часть. Так как происходит произведение, то происходит каждое из событий-сомножителей т.е. событие A. Аналогичными рассуждениями, основанными на определениях, можно доказать и остальные тождества.

Заметим, что тождества 3 и 4 можно рассматривать также как определения суммы и произведения для трёх и более слагаемых. Они также остаются справедливыми, если считать определения суммы и произведения событий применимыми к произвольному количеству слагаемых и сомножителей.

Пример 1. Пусть в задаче о стрелках A обозначает событие, происходящее тогда и только тогда, когда первый стрелок попал в мишень, B обозначает событие, происходящее тогда и только тогда, когда второй стрелок попал в мишень, и C обозначает событие происходящее, тогда и только тогда, когда третий стрелок попал в мишень. Записать события, вероятности которых требуется найти, используя введённые обозначения и действия с событиями.

Ответ: а) AB; б) ABC; в) $A + B$; г) $A + B + C$; д) $A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$.

Классификация событий

Определение. Событие называется *достоверным*, если оно происходит при каждом проведении случайного эксперимента; событие называется *невозможным*, если при каждом проведении случайного эксперимента оно не происходит.

Будем обозначать достоверное событие буквой Ω, а невозможное значком $\emptyset$. Тогда к тождествам 1- 13 можно добавить следующие:

14.$A + \overline{A} = \Omega$
15. $A\overline{A} = \emptyset$
16. $A + \emptyset = A$
17. $A\emptyset = \emptyset$
18. $A + \Omega = \Omega$
19. $A\Omega = A$
20. $\overline{\Omega} = \emptyset$
21. $\overline{\emptyset} = \Omega$

Определение. События называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно.

Другими словами, A и B несовместны, если $AB = \emptyset$. В частности, A и $\overline{A}$ несовместны.

Определение и свойства вероятности

Определение. Пусть каждому событию A поставлено в соответствие число $P\left(A\right)$. Если выполняются условия

$$1.\ \ P\left(A\right) \geq 0,$$

$$2.\ \ P\left(\Omega\right) = 1,$$

$$3.\ P(A+B) = P(A) + P(B)\,,\ \text{если}\ A\ \text{и}\ B\ \text{несовместны},$$

то число $P(A)$ называется *вероятностью* события A.

Таким образом, мы называем вероятностью любую функцию на множестве событий, удовлетворяющую свойствам 1,2,3. И наоборот, если мы называем некоторую функцию вероятностью, то полагаем, что свойства 1,2,3 выполняются. Нетрудно проверить, что классический и геометрический способы подсчёта вероятностей, рассмотренные ранее, удовлетворяют свойствам 1,2,3. Из свойств 1,2,3 нетрудно вывести дополнительные свойства, полезные при решении задач.

4. $P(A) \le 1$.

Доказательство: $1 = P(\Omega) = P\left(A+\overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right) \ge P(A)$, так как $P\left(\overline{A}\right) \ge 0$. Из приведённых выкладок следует также свойство

5. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

6. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Доказательство: Заметим, что события AB, $A\overline{B}$,$\overline{A}B$ и $\overline{A}\ \overline{B}$ попарно несовместны, так как, например $(AB)\left(A\overline{B}\right) = (AA)\left(B\overline{B}\right) = A\emptyset = \emptyset$ и т.п. Далее $A = A\Omega = A\left(B+\overline{B}\right) = AB + A\overline{B}$, аналогично $B = AB + \overline{A}B$. Кроме этого,

$$A+B = \left(AB + A\overline{B}\right) + \left(AB + \overline{A}B\right) = (AB + AB) + A\overline{B} + \overline{A}B = AB + A\overline{B} + \overline{A}B$$

Наконец,

$$P(A) + P(B) - P(AB) = P\left(AB + A\overline{B}\right) + P\left(AB + \overline{A}B\right) - P(AB) =$$
$$= P(AB) + P\left(A\overline{B}\right) + P(AB) + P\left(\overline{A}B\right) - P(AB) =$$
$$= P(AB) + P\left(A\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}B\right) = P\left(AB + A\overline{B} + \overline{A}B\right) = P(A+B)\,,$$

что и требовалось доказать.

В последнем доказательстве мы воспользовались тем, что тождество, аналогичное 3, справедливо для трёх попарно несовместных слагаемых, как, впрочем, и для любого конечного числа. Современная математическая теория вероятностей постулирует это тождество для *счётного* количества слагаемых; мы, однако считаем, что на практике без этого можно обойтись. Покажем его справедливость для трёх слагаемых. Если события A, B и C попарно несовместны, то

$$(A+B)\,C = AC + BC = \emptyset + \emptyset = \emptyset,\ \text{т.е.}\quad A+B\ \text{и}\quad C\ \text{несовместны, поэтому}$$

$$P(A+B+C) = P(A+B) + P(C) = P(A) + P(B) + P(C)\,.$$

Независимые события

Определение. События A и B называются *независимыми*, если

$$P(AB) = P(A)\,P(B) \tag{1}$$

Замечание. В соответствии с этим определением, для установления независимости событий необходимо доказывать равенство (1), однако на практике его обычно не доказывают, а считают вытекающим из существа задачи, т.е. фактически считают дополнительной аксиомой. Для установления равенства $P(ABC) = P(A)\,P(B)\,P(C)$ кроме независимости событий A и B требуется ещё независимость событий AB и C. Соответствующие предположения во многих задачах, например в задаче о стрелках, достаточно естественны. Во всяком случае, без подобных предположений решить задачу о стрелках в приведённой формулировке невозможно.

Решим теперь задачу о стрелках, используя обозначения примера 1, свойства вероятности и независимость событий.

а) $P(AB) = P(A)\,P(B) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$;
б) $P(ABC) = P(A)\,P(B)\,P(C) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0{,}336$;
в) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,6 + 0,7 - 0,6 \cdot 0,7 = 0,88$;
г) $P(A+B+C) = 1 - P\left(\overline{A+B+C}\right) = 1 - P\left(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\right) =$

$$= 1 - P\left(\overline{A}\right) P\left(\overline{B}\right) P\left(\overline{C}\right) = 1 - 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 1 - 0,024 = 0{,}976;$$

д) $P\left(A\overline{B}\ \overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\ \overline{B}C\right) = P\left(A\overline{B}\ \overline{C}\right) + P\left(\overline{A}B\overline{C}\right) + P\left(\overline{A}\ \overline{B}C\right) =$

$$= P(A)\,P\left(\overline{B}\right) P\left(\overline{C}\right) + P\left(\overline{A}\right) P(B)\,P\left(\overline{C}\right) + P\left(\overline{A}\right) P\left(\overline{B}\right) P(C) =$$

$$= 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,188.$$

Ответ: а) $0,42$; б) $0,336$; в) $0,88$; г) $0,976$; д) $0,188$.

Упражнения.

1. В первом ящике один белый и четыре чёрных шара, во втором ящике два белых и три чёрных шара, в третьем ящике три белый и два чёрных шара. Из каждого ящика случайным образом выбрали по одному шару. Какова вероятность, что все три шара чёрные? Какова вероятность, что среди взятых шаров ровно два белых? Какова вероятность, что среди взятых шаров не менее двух белых?

2. Игральную кость бросают до появления шестёрки. Какова вероятность, что бросят не более трёх раз?

Условная вероятность

Теперь мы знаем, как найти вероятность произведения событий, если условия задачи позволяют предположить их независимость. А как быть, если сомножители заведомо не являются независимыми? Здесь может помочь концепция *условной вероятности.*

Определение. *Условной вероятностью* события B при условии, что событие A произошло, называется число $\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

Обозначение: $P(B/A)$ или $P_A(B)$.

Таким образом, условная вероятность определяется равенством

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \tag{2}$$

Пример 2. Игральную кость бросили два раза. Найти вероятность, что тройка выпала хотя бы раз, если известно, что сумма выпавших очков меньше шести.

Решение: Пусть событие A состоит в том, что сумма выпавших очков меньше шести, а событие B состоит в том, что тройка выпала хотя бы раз. Тогда вероятность, которую надо найти, — это $P(B/A)$. Изобразим множество равновероятных исходов в виде таблицы.

	1	2	3	4	5	6
1	a	a	a,b	a		
2	a	a	a,b			
3	a,b	a,b	b	b	b	b
4	a		b			
5			b			
6			b			

Буквой a помечены элементарные исходы, соответствующие событию A, буквой b помечены элементарные исходы, соответствующие событию B. При этом событию AB соответствуют исходы, помеченные двумя буквами. Поэтому

$$P\left(B/A\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}=\frac{4/36}{10/36}=\frac{4}{10}=0,4$$

Ответ: $0,4$.

Замечание. Искомую условную вероятность мы могли найти и непосредственно с помощью классического способа подсчета вероятности. Если сумма выпавших очков меньше шести, то возможны и равновероятны следующие исходы: (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,2); (2,3); (3,1); (3,2); (4,1). Из них благоприятны: (1,3); (2,3); (3,1); (3,2). Поэтому искомая вероятность равна 4/10.

Упражнения.

1. Игральную кость бросили два раза. Найти вероятность, что сумма выпавших очков меньше шести, если известно, что в первый раз выпало больше, чем во второй.

2. Первый стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,6, второй - с вероятность 0,7. Стрелки сделали по одному выстрелу в мишень. Какова вероятность, что первый стрелок попал в мишень, если известно, что в мишени ровно одно попадание?

Теорема произведения вероятностей

Формально равенство (2) является определением условной вероятности. Однако в некоторых случаях условную вероятность можно найти непосредственно, тогда (2) можно использовать для отыскания вероятности произведения событий:

$$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B/A\right) \tag{3}$$

Последняя формула допускает обобщение на случай произвольного количества сомножителей:

$$P\left(A_1A_2\ldots A_n\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_1/A_2\right)\ldots P\left(A_n/A_1A_2\ldots A_n\right)$$

и называется теоремой произведения вероятностей.

Докажем её для случая трех сомножителей. Так как $ABC=\left(AB\right)C$, то на основании (3) имеем

$$P\left(ABC\right)=P\left(AB\right)P\left(C/AB\right)$$

Ещё раз применив (3) к первому сомножителю, имеем

$$P\left(ABC\right)=P\left(AB\right)P\left(C/AB\right)=P\left(A\right)P\left(B/A\right)P\left(C/AB\right) \tag{4}$$

Для четырёх сомножителей имеем:

$$P\left(ABCD\right)=P\left(ABC\right)P\left(D/ABC\right)=P\left(A\right)P\left(B/A\right)P\left(C/AB\right)P\left(D/ABC\right)$$

Мы последовательно использовали равенства (3) и (4). Аналогично доказывается теорема произведения вероятностей и для произвольного количества сомножителей.

Пример 3. В ящике три белых, четыре чёрных и пять красных шаров. Случайным образом выбрали пять шаров. Какова вероятность, что первый — белый, второй и третий — чёрные, четвёртый и пятый — красные.

Решение: Пусть A обозначает событие, состоящее в том, что первый шар белый, B обозначает событие, состоящее в том, что второй шар чёрный, C обозначает событие, состоящее в том, что третий шар чёрный, D обозначает событие, состоящее в том, что четвёртый шар красный, E обозначает событие, состоящее в том, что пятый шар красный. Тогда

$$P\left(ABCDE\right)=P\left(A\right)P\left(B/A\right)P\left(C/AB\right)P\left(D/ABC\right)P\left(E/ABCD\right)=$$

$$= \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{1}{132}$$

Поясним подробнее, почему $P(C/AB) = 3/10$. Так как события A и B произошли, то в ящике осталось 10 шаров, три из которых чёрные. Для события C имеем три благоприятных исхода из десяти равновероятных.

Ответ: 1/132.

Упражнения.

1. Буквы слова БАРАБАН написали на семи карточках, затем случайным образом выбрали пять карточек, и положили в ряд. Какова вероятность, что получится слово БАРАН?

2. В ящике пять белых и четыре чёрных шара. Шары берут до появления белого. Какова вероятность, что возьмут три шара?

Формулы полной вероятности и Байеса

Определение. События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и их сумма есть достоверное события.

Другими словами, события образуют полную группу, если при каждом проведении случайного эксперимента одно из них обязательно происходит, причём только одно.

Теорема. Если события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу, то для любого события A справедливы равенства

$$P(A) = P(H_1)\, P(A/H_1) + \ldots + P(H_n)\, P(A/H_n) \tag{5}$$

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)\, P(A/H_i)}{P(H_1)\, P(A/H_1) + \ldots + P(H_n)\, P(A/H_n)} \tag{6}$$

для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство:

1)$P(A) = P(\Omega A) = P((H_1 + \ldots + H_n)\, A) = P(H_1 A + \ldots + H_n A) =$

$$= P(H_1 A) + \ldots + P(H_n A) = P(H_1)\, P(A/H_1) + \ldots + P(H_n)\, P(A/H_n)$$

2)

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)\, P(A/H_i)}{P(H_1)\, P(A/H_1) + \ldots + P(H_n)\, P(A/H_n)}.$$

Что и требовалось доказать.

Формула (5) называется формулой *полной вероятности*, а формула (6) — формулой *Байеса.*

Пример 4. В ящик попадают детали с трёх станков. Первый даёт три процента брака, второй четыре процента, а третий 5 процентов. Какова вероятность, что случайно выбранная деталь бракована, если производительность второго станка выше производительности первого в полтора раза, а производительность третьего станка выше производительности первого в два с половиной раза? Взятая из ящика деталь оказалась бракованной. Какова вероятность, что она изготовлена на втором станке?

Решение: Пусть событие H_1 состоит в том, что случайно выбранная деталь изготовлена на первом станке, событие H_2 состоит в том, что случайно выбранная деталь изготовлена на втором станке, событие H_3 состоит в том, что случайно выбранная деталь изготовлена на третьем станке, событие A состоит в том, что случайно выбранная деталь бракована. Пусть число деталей, изготовленных на первом станке, равно x. Тогда число деталей, изготовленных на втором станке, равно $3x/2$, а число деталей, изготовленных на третьем станке, равно $5x/2$. Общее число деталей в ящике равно

$$x+\frac{3x}{2}+\frac{5x}{2}=5x$$

Поэтому $P\left(H_1\right)=x/5x=0,2$; $P\left(H_2\right)=\left(\frac{3x}{2}\right)/(5x)=0,3$; $P\left(H_3\right)=\left(\frac{5x}{2}\right)/(5x)=0,5$.
По условию задачи $P\left(A/H_1\right)=0,03$; $P\left(A/H_2\right)=0,04$;$P\left(A/H_3\right)=0,05$.
По формуле полной вероятности

$$P\left(A\right)=P\left(H_1\right)P\left(A/H_1\right)+P\left(H_2\right)P\left(A/H_2\right)+P\left(H_3\right)P\left(A/H_3\right)=$$

$$=0,2\cdot 0,03+0,3\cdot 0,04+0,5\cdot 0,05=0,43$$

По формуле Байеса

$$P\left(H_2/A\right)=\frac{P\left(H_2\right)P\left(A/H_2\right)}{P\left(H_1\right)P\left(A/H_1\right)+P\left(H_2\right)P\left(A/H_2\right)+P\left(H_3\right)P\left(A/H_3\right)}=$$

$$=\frac{0,3\cdot 0,04}{0,2\cdot 0,03+0,3\cdot 0,04+0,5\cdot 0,05}=\frac{12}{43}$$

Ответ: $0,43$; $\frac{12}{43}$.

Упражнения.

1. В лесу 80 процентов лосей здоровы и 20 процентов больны. Зиму переживают 90 процентов здоровых лосей и 50 процентов больных. Какой процент лосей переживёт зиму? Какой процент здоровых лосей будет среди лосей переживших зиму?

2. В первом ящике пять белых и четыре чёрных шара. Во втором ящике три белых и два чёрных шара. Из первого во второй переложили два шара, затем из второго взяли шар. Какова вероятность, что он белый? Какова вероятность, что переложили два белых шара, если взятый из второго ящика шар оказался белым?

Литература

1. Саблин А. И., Введение в теорию вероятностей, Математическое образование, №1(41), 2007, с. 49-56.

Саблин Александр Иванович,
доцент кафедры высшей математики
Московского государственного университета
природообустройства, кандидат физ.-мат. наук.

Email: sablin3103@gmail.com

Дальновидный образовательный проект А. Н. Колмогорова

Л. А. Конченко

Физико-математическая школа-интернат при МГУ (ФМШ №18, ныне школа им. А. Н. Колмогорова Специализированного учебно-научного центра МГУ (СУНЦ МГУ)) была создана по инициативе и при личном участии Андрея Николаевича Колмогорова. В 2008г. школе исполнилось 45 лет. В статье разъясняются педагогические и мировоззренческие концепции, лежавшие в основе создания школы, показана большая социальная роль школы как уникального организма в советской/российской научной среде, рассказано о клубной форме, которая позволила объединиться выпускникам для оказания помощи школе в непростых современных условиях.

Часто в истории науки оказывается, что потенциал идеи в полноте раскрывается только с течением времени. Так получается и с неожиданным для современников решением Андрея Николаевича Колмогорова по достижении 60-ти лет изменить приоритет с активной научной деятельности на образовательную. Исследователи рукописного наследия академика свидетельствуют: это не было спонтанным решением, сроки переключения творческой активности на решение образовательных задач были запланированы. Если анализировать бурную деятельность реформаторов образования в начале 60-х годов XX столетия, может сложиться впечатление, что Колмогоров реагировал на запросы времени, но пристальный анализ его педагогических достижений показывает, что взгляд Андрея Николаевича на проблему образования отличается фундаментальностью, а научный интерес к педагогике формировался параллельно с развитием ученого. Образовательные инициативы Андрея Николаевича и сегодня далеко не исчерпали свой потенциал. В концепцию специализированного образования в области естественных наук заложены такие основания, которые в новой реальности развития нашего общества открывают неожиданные перспективы.

В качестве образовательной модели для внедрения и отработки своих идей Колмогоров выбрал специализированную школу-интернат физико-математического профиля при Московском государственном университете (ФМШ МГУ). Методические архивы организации, становления и развития этой модели еще ждут своих исследователей, а нас ожидает переосмысление масштабности задуманного и успешно реализованного научно-образовательного проекта, а так же перспектив, открывающихся восприемникам педагогических идей великого Ученого и Учителя. В декабре 2008 года на очередной ежегодной встрече выпускников отмечали 45-летие школы (1963–2008), носящей теперь имя академика Андрея Николаевича Колмогорова.

Создавалась школа по образу уже действующих математических специализированных школ, ориентированных на детей университетских и академических центров. Первоначально специализированное математическое образование вводилось как дополнительное, в форме вечерних курсов или аналогично школам рабочей молодежи, куда аспиранты и молодые ученые направлялись преподавать математику. Затем стали формироваться профильные специализированные школы и в них передавались методики университетских математических и олимпиадных кружков. Эта модель подразумевала формирование у подростков математических навыков, необходимых для эффективной инженерной деятельности, в таких специалистах нуждалась экономика государства.

Модель формирования навыков решения кем-то поставленных задач, мотивация подростков к деятельности на основе повышения статуса профессии, применение методик включения в конкурентную борьбу среди сверстников за улучшение социальной позиции — все это было продолжением так печально знакомого Колмогорову советского академического сообщества “деятелей науки”.

Андрей Николаевич ностальгировал по атмосфере научно-образовательного и педагогического творчества из его гимназического юношества. На своем опыте он ощутил важность поддержки школьными учителями тех учеников, кто в силу личных качеств обладает способностями к восприятию более сложной программы. Ранняя педагогическая деятельность в деревенской школе, где Андрей Николаевич начинал формулировать принципы мотивации подростков к математическому образованию, задумывался над современным содержанием школьных математических дисциплин, исследовал потенциал детей из провинциальных школ, мог впоследствии натолкнуть его на мысль об университетском центре подготовки детей из провинции. Уникальная идея А. Н. Колмогорова состояла в том, чтобы предоставить равные возможности раннего старта в творческую научную деятельность детям из регионов, отдаленных от университетских центров.

В частной гимназии Е. А. Репман, где учился Андрей Николаевич, сложилась творческая атмосфера, поддержать которую приглашались университетские преподаватели — возникало дружеское сотрудничество старшеклассников и ученых . В свою очередь, концепцию и методики преподавания в ФМШ Андрей Николаевич обсуждал с академиками, приглашал к сотрудничеству профессоров Московского Университета, учеников своей научной школы — молодых ученых-математиков, аспирантов мехмата и физфака МГУ, а впоследствии и выпускников школы.

Выпускники приходят в школу еще молодыми учеными в качестве “второго” преподавателя (Колмогоров ввел в обиход эту форму трансляции методических идей и педагогического навыка, что создавало атмосферу единомыслия и сотрудничества сквозь поколения). Осваивая в родной школе педагогические приемы под руководством Колмогорова, выпускники составляли авторские учебные курсы, разрабатывали методики специализированного естественно-научного образования, участвовали в работе над общеобразовательными учебниками для средней школы и высших учебных заведений.

Такой опыт принес весомые плоды: выпускник первого выпуска школы Абрамов Александр Михайлович — теперь член-корреспондент Российской Академии Образования; один из его одноклассников — Алексеев Валерий Борисович — зав. кафедрой ВМК МГУ, другой — Ваничкин Владимир Иванович — зав. кафедрой геометрии Астраханского педагогического института, а Нехорошев Николай Николаевич и Кукушкин Андрей Серафимович — профессора Миланского и Мюнхенского университетов соответственно. Архипов Геннадий Иванович — ведущий научный сотрудник Математического института АН, профессор мех-мата МГУ, Ивлев Борис Михайлович — автор учебника “Алгебра и начала анализа”, завуч в ФМШ 18 при МГУ. И это только один класс.

Выпуск 2009 года стал сорок пятым, за это время школу окончило более 7000 одаренных детей из неуниверситетских центров европейской части России. Далеко не полный перечень учебников для школы и вузов, в списке авторов которых представлены разные поколения выпускников нашей школы, можно посмотреть на страничке, созданной Коровиным Игорем (выпуск 1988 года) по инициативе Адамчука Александра (выпуск 1976 года): http://www.mathbook.ru. Этот список показывает: учебники настолько востребованы, что их готовы покупать через систему интернет-магазинов. Здесь же можно упомянуть мультимедийные репетиторы по разным предметам, разработанные нашими выпускниками и преподавателями, выпущенные массовым тиражом, а так же разного рода образовательные интернет-проекты от дистанционных школ и курсов до олимпиад и “математических каруселей”. В среде сообщества выпускников и преподавателей школы разрабатывается концепция Интернет-портала для популяризации естественно-научного мировоззрения.

Чтобы иметь возможность анализировать и развивать педагогическое наследие академика Колмогорова, сегодня организуется архив учебных материалов, методических рекомендаций, бесед, личных размышлений и публичных выступлений Андрея Николаевича с целью последующего анализа, обработки и применения к современным возможностям системы образования.

Особое внимание уделялось Колмогоровым общекультурному развитию учеников. Поддерживалась любая творческая инициатива в форме дополнительных семинаров, музыкальных и книжных клубов (интересно, что пока библиотека в школе еще только формировалась, чему Андрей Николаевич уделял пристальное внимание и сам прикладывал немало усилий, все ученики школы были записаны в Государственную библиотеку — “Ленинку”, — фонды которой в то время были доступны только научным сотрудникам). Формировалась традиция просветительских поездок и туристических походов (в любое время года: пешком в Крым, на лыжах в Подмосковье). Понимая, что уехав из далекого дома дети остаются включены в культуру своей семьи, народа, особую заботу Колмогоров проявлял к родителям своих школьников. Их он собирал на ежегодное родительское собрание и, кроме объяснения перспектив, открывающихся детям, обеспечивал родителям культурную программу с посещением театра, художественных музеев и достопримечательностей Москвы и Подмосковья, побуждая их к развитию вместе со своими детьми и большему взаимопониманию впоследствии.

Колмогоров ревностно наблюдал за тем, чтобы в школе укоренился высокоинтеллектуальный творческий дух и редко ошибался в потенциале тех, кого приглашал к преподаванию в школе. Например, его ученик В. И. Арнольд, разрабатывавший для школы курс математического анализа, — сегодня ученый с мировым именем. При этом следует отметить, что для формирования культурной среды подросткового научного сообщества на места преподавателей гуманитарных дисциплин приглашались специалисты уровня, соответствующего высшему образованию. Так, А. И. Зализняк, преподававший в середине 60-х в школе французский язык, одновременно с В. И. Арнольдом в 2008 году стали лауреатами Государственной премии.

Сегодня гуманитарное образование имеет единую концепцию и разрабатывается в школе на кафедре гуманитарных наук, а вот воспитание школьников часто оторвано от образовательного процесса. На отсутствие четкой воспитательной концепции сетует и нынешний директор школы, но здесь сказывается отсутствие государственной политики по отношению к феномену подобных школ. Должность воспитателя школы-интерната для одаренных детей до сих пор не являлась предметом рассмотрения государственных служб, а потому и финансируется по остаточному принципу. Как, впрочем, и питание детей, занятых напряженной умственной деятельностью, и возможность вести здоровый образ жизни (отсутствие бассейна, тренажеров, профилактических и оздоровительных процедур, охраны зрения и т.д.). А может быть этот “спартанский” образ жизни, отсутствие камерной творческой обстановки, эти морально и физически труднопереносимые условия проживания и обучения и есть та воспитательная концепция, так сказать, отечественное know-how, которое мы “не ценим по достоинству”, только потому, что нельзя разумно обосновать принцип “чем хуже, тем лучше”?

Несмотря на то, что творческая активность в какой-то степени мешает создать единую методику специализированного образования, а может быть и благодаря этому, до сих пор так и не создан комплект учебников для специализированных школ и профильных математических классов. Но отсутствие методической инициативы федерального уровня очень мешает образовательному и воспитательному процессам, так как не систематизированная нагрузка на учеников ввергает их в постоянный цейтнот. Мало того, что они углубленно изучают специализированные предметы, осваивают исследовательские подходы в процессе решения доступных их восприятию научных проблем, участвуют в различного рода научно-образовательных конкурсных и просветительских мероприятиях, — так они еще должны отчитываться по общеобразовательным нормативам. Конечно, они “одаренные”, ну что им стоит решить задачки школьной программы, да заучить массу информации по программе школьного курса, которую они не проходят... Ну и что, что к ним в процессе образования предъявляются совсем другие требования, что им прививаются навыки творческого мышления, и объем информации, сильно превышающий школьный, они осваивают не зазубривая... Ведь им так не сложно сдать ЕГЭ... Так же не сложно, как мастеру спорта сдать нормативы школьной физкультуры, но тяжело, поскольку речь идет о несравнимых нагрузках, и ведь никто не пристает к спортсменам с очевидной глупостью: докажите свой профессионализм, взяв тысячу раз высоту метр десять. В случае со спортсменом очевидно, что способность к выдающимся результатам и профессионализм доказываются как-то иначе.

На момент создания и еще в течение долгого времени проект "Школа-интернат при университете" не имел аналогов в мире. Школа задумывалась как научно-образовательный центр для подростков, развитие которых тормозили социальные условия, предполагалось, что при адекватной поддержке и мотивации, при погружении в соответствующую культурную среду, эти дети могли бы составить здоровую конкуренцию в научно-академической среде как страны, так и мира.

Критерием оценки эффективности своего образовательного проекта А. Н. Колмогоров выдвинул идею о защите докторской степени выпускниками школы до 30-летнего возраста, что в то время являлось исключительным научным достижением. Идея блестяще оправдалась и 10 выпускников школы стали докторами физико-математических наук в обозначенные академиком сроки. Таким образом, успешная ранняя научная деятельность из феномена стала образовательным фактом. Те вершины педагогических достижений, которые демонстрировал Андрей Николаевич в качестве иллюстрации своих образовательных теорий, все еще не покорены его учениками.

Непростое время, на которое пришлась педагогическая деятельность Колмогорова, не позволяло и мечтать о международных образовательных инициативах. Но ученый мирового масштаба, академик А. Н. Колмогоров, понимая утопичность автономного развития науки, сумел заложить в свой образовательный проект такой потенциал, создать такую педагогическую школу, которая позволила воспитывать из провинциальных детей ученых международного уровня. И сейчас выпускники школы занимают стабильные позиции в ведущих университетах и научных центрах мира, а модель университетской школы-интерната для подростков, проявляющих интерес к естественным наукам, стала тиражируемой как в России, так и за рубежом Отечества.

Международными аналогами российских университетских школ стали республиканские университетские школы-интернаты распавшегося Советского Союза. Европу с ее многовековыми традициями образования идея "социального лифта" не впечатлила, а развивающиеся страны Азии и латинской Америки активно перенимают опыт школы им.А. Н. Колмогорова — Московского специализированного учебно-научного центра МГУ (СУНЦ МГУ). Вот только нашему государству перенять бы ту заинтересованность, материальную поддержку и технологическое обеспечение научно-образовательного процесса, которое сопровождает создание таких центров инкубации молодых ученых. Преподаватели нашей школы с радостью делятся методиками образования (радость доставляет и уровень принятого в других странах материального вознаграждения), но особенно радуются за своих зарубежных коллег, потому что они могут разрабатывать новые методики воспитания юных исследователей с применением современных экспериментальных технологий на новейшем оборудовании, которое найдешь не в каждом российском университете.

Экономическое обеспечение развития современного общества не мыслится без освоения новых наукоемких технологий, а потому государство ставит задачи подготовки ученых-специалистов: в 60-е годы — для "оборонки", сегодня — для развития инновационных проектов. Созданная для удовлетворения общественных запросов система специализированного образования, как и предвидел Колмогоров, успешно справляется с поставленными задачами — большая часть выпускников становится научными сотрудниками различных научно-исследовательских центров. Еще первые десятилетия деятельности школы показали, что грамотно организованная подготовка школьников, проявивших интерес и способности в естественно-научной области, обеспечивает потребности государственной экономики в инженерных кадрах. Современный государственный заказ на создание конкурентоспособных технологий может быть эффективно исполнен при условии адекватного понимания потенциала заложенных А. Н. Колмогоровым идей подготовки научных и инженерных кадров, использующих "энергию креативности" подростков. Юношеский максимализм, поддержанный и грамотно направленный активно действующими учеными, создает ситуацию "жука в муравейнике", активизируя деятельность хорошо отлаженной системы.

Несмотря на устаревшую за полвека материальную базу школы, научно-образовательный потенциал выпускников и сейчас соответствует запросам времени. Федеральный интерес к отечественной науке может быть поддержан методиками, технологиями подготовки и развития молодых ученых, кадровым составом выпускников российских университетских научно-образовательных центров на всех этапах: от школы до технопарков.

Но более важная функция школы, к осознанию чего мы подходим только сейчас, — создание культурной среды, формирующей личную, профессиональную и социальную ответственность за реализацию выдающихся научных талантов. Полноценное развитие академической науки, без которой невозможно говорить о современных технологиях, предполагает постоянный приток талантов. Андрей Николаевич прекрасно понимал, что выдающиеся способности, все же, — не столько результат образования, сколько феномен одаренности, который Колмогоров оценивал в 10% от поступивших в школу. Важным аспектом воспитания таланта он считал культурную среду. Объединение ответственных единомышленников, сформированное из активных, талантливых, культурных людей имеет созидательный потенциал невероятной силы. Такое саморазвивающееся сообщество, нацеленное на задачу выращивания выдающихся ученых, быть может, и было главной целью образовательной инициативы Колмогорова.

Сила эмоциональных связей, порожденная в процессе недолгого, но доверительного творческого взаимодействия в подростковом возрасте, оказывается порой крепче той, что формируется на протяжении долгих лет конкурентного высшего образования. Сегодня в школьной атмосфере сотрудничества бок о бок развиваются как те, кто станет "двигать" академическую науку, так и те, кто сможет адекватно воспринять научные идеи, обеспечивая их реализацию в качестве научных специалистов, менеджеров разного уровня в области науки, финансов и государственной политики.

Понимал Андрей Николаевич и то, что не все выпускники школы покажут выдающиеся результаты в науке. Следовало принимать как данность, что, к сожалению, среди выпускников трудно ожидать адекватного потенциала для противостояния бюрократической системе, которая не обошла своим пристальным вниманием и область специализированного образования, и область научного позиционирования. Но надежды Учителя были связаны с тем, что со временем, получив "культурную прививку", научившись реализовывать свой творческий потенциал в любой области деятельности, став учеными или приняв педагогическую эстафету, выпускники смогут сформировать систему развития и продвижения его образовательных идей. И эти надежды в большой степени оправдались. Мы видим выпускников школы на всех позициях управления наукой и образованием: в Академии Наук РФ и Российской Академии Образования, в образовательном комитете Общественной палаты, в Агентстве по науке и образованию и его исследовательских институтах, исследовательских институтах Академии наук, в ведущих федеральных и региональных вузах, специализированных школах, центрах дополнительного образования.

Творческий потенциал выпускников ищет различные формы реализации, особенно в ситуации невостребованности в начале научного пути. Высокообразованному провинциалу без жилья и средств к существованию общество не радо, тут-то и проявляется сила сообщества единомышленников, но пока что, к сожалению, не в государственном, а корпоративном масштабе.

В той социальной ответственности, ощущении сопричастности, которую демонстрируют выпускники школы, просматривается заложенное в процессе формирования личности отношение к общему делу, как к непреложной ценности. Именно это отношение позволяет верить в осуществимость колмогоровской образовательной модели, когда одни из выпускников занимаются наукой и образованием, другие обеспечивают организацию процессов и лоббирование, а третьи помогают ресурсами и каждый воспринимает свое участие как служение единому делу. Звучит утопично, если бы не было неоднократно проиллюстрировано за сорокапятилетнюю историю школы. Сообщество выпускников и преподавателей школы берется показать историю реализации этой идеи, раскрыть ее потенциал на современном этапе.

В русле национальных образовательных инициатив лежит предложение выпускников создать систему аналогичных школ в тех университетских центрах, которые их еще не имеют (написано письмо с обращением к Президенту, которое поддержано рядом выдающихся ученых и общественных деятелей, и, даже, “бумаге был дан ход”, да только вот инициаторов письма к беседе не пригласили). В соответствии с этим предложением уже существующие федеральные школы могли бы передавать методики выявления одаренных детей, подготовки их для обучения в специализированных школах, организации научно-образовательного процесса в регионе (для чего предполагается использовать систему дистанционного повышения квалификации преподавателей и дополнительного образования для учеников с использованием большого методического багажа университетских центров). Организация методической площадки на Интерент-портале Клуба выпускников, преподавателей и друзей школы им. А. Н. Колмогорова — еще одна программа клубного сообщества.

Таким образом, одаренные дети получили бы возможность воспользоваться технологией “социального лифта”. Получив поддержку своих научно-образовательных интересов в региональных центрах развития творческой личности, поступить в школу им.А. Н. Колмогорова СУНЦ МГУ, где им предоставляется широкий спектр возможностей начального научного роста и научного кураторства со школьной скамьи до современной научной школы.

История — единственный объективный судья — показывает, что образовательная инициатива Колмогорова имеет внушительный внутренний потенциал. Несмотря на то, что школа не всегда имела менеджмент, соответствующий ее целям и задачам, всегда была неудобным элементом государственной системы образования, не единожды оказывалась на грани закрытия, — она непременно востребована в среде тех, кому не безразлична судьба талантов из провинции и будущее российской науки. И потому каждый раз школа “удерживается на плаву” усилиями выпускников, окрыленных энергией идей, рожденных в ее стенах (от образовательных и воспитательных до мировоззренческих).

Выпускники приходят в школу не только преподавать, но и в качестве организаторов и управляющих. Приходят они и благотворителями для реализации “социальной ответственности”. Поддержка выпускниками образовательных проектов в школе в существенной мере покрывает недостаток государственного финансирования, которое едва-едва обеспечивает коммунальные платежи, заработную плату преподавателям и питание ученикам. Стоит только отметить, что прием в школу в регионах (первый этап приема — письменный экзамен на региональных олимпиадах, второй этап приема — устный экзамен и собеседование), проведение летних школ (как третьего этапа приемных экзаменов), организация Колмогоровских чтений, научные экспедиции, участие в олимпиадах всех уровней, поездки учеников школы на региональные, федеральные и международные научно-образовательные турниры, конференции, чтения, — не финансируются государством ни в лице Агентства по науке и образованию, ни в лице МГУ, а спонсируются выпускниками школы. В этом случае возможно вести речь о социально-ответственном бизнесе, представители которого воспитывались в атмосфере научного творчества и стремятся сохранить теплящуюся жизнь в образовательном проекте, несомненно отмеченном гением Колмогорова, обеспечившим ему такую жизнеспособность.

И идея создания Клуба выпускников и преподавателей школы им.А. Н. Колмогорова была продиктована желанием объединить усилия для поддержки научно-образовательных и воспитательных программ школы теми компетенциями, которые приобрели выпускники. А компетенции эти распространяются как на область современных научных достижений, так и на область управления образованием и наукой (на региональном и на федеральном уровне). Востребованы компетенции выпускников школы и в государственном менеджменте, достаточно отметить, что ряд выпускников занимали и занимают такие посты, как советники региональных администраций, депутаты Государственной Думы различных созывов, Мэр миллионного города, Губернатор области, советник Президента РФ. Современное развитие нашего общества предоставило выпускникам возможность реализации и в экономической сфере: многие их них занимают позиции топ-менеджмента, являются авторами и организаторами удачных бизнес-проектов, в том числе наукоемких, востребованными консультантами во всех областях деятельности, где требуется проявить системное, проектное, математическое мышление.

В апреле 2009 года Клубу исполнилось пять лет. Для разработки программ клубной деятельности объединились выпускники и преподаватели с наиболее активной гражданской позицией, осознающие ответственность за успешное развитие колмогоровских образовательных идей. Осуществить клубные программы стало возможно благодаря тем из них, кто готов предоставить ресурсы или личное время для общественной деятельности.

В обществе вновь востребованы идеи общественного и профессионального служения, проявление нравственной мотивации и самоограничения. Советское понятие служения (служащий ничего не производит, а потому нанят за вознаграждение) затмило культурную доминанту: "служение — это реализация делегированной сообществом ответственности представителям, наиболее соответствующим для исполнения определенной деятельности, а потому материальное обеспечение реализации такого рода ответственности сообщество добровольно принимает на себя".

Понятно, что невозможно частными пожертвованиями решать задачи государственного масштаба, но инициировать их решение еще какое-то время можно и нужно. Все меньше остается тех, кто в непосредственном взаимодействии воспринял мировоззрение и "школьную заботу" Андрея Николаевича, все труднее доносить его идеи зараженному современным прагматизмом руководству системы российского образования (всех уровней). Но многое уже удалось. Систематично выполняется задача привлечения внимания общественности, профессионалов и чиновников к бедственному положению университетских школ, составляющих национальное достояние. Средствами СМИ пропагандируется идея, что образовательный инструмент, показывающий в умелых руках выдающиеся результаты, следует "настроить" в соответствии с современными запросами общественного развития.

Разделяя воззрение Колмогорова на то, что математическое образование, полученное подростком в период от 14 до 16 лет, определяет качество реализации человека в любой области деятельности, клубное сообщество (несмотря на сложность задачи) прикладывает усилия для широкого распространения идей развития естественно-научного мировоззрения в школах. Это позволит своевременно заметить и развить таланты, которые наконец-то востребованы обществом. Именно для этих целей и был создан тот самый "социальный лифт", который законсервирован вот уже более 20-ти лет. Кто-то должен заставить его работать. Может быть то самое сообщество единомышленников, формированием которого был озабочен Андрей Николаевич?

Конченко Лариса Александровна,
Исполнительный директор
Некоммерческого Партнерства
"Клуб ФМШ Колмогорова",
выпускница ФМШ 1979 года.

Email: alumni_info@mail.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2009 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2009 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

On the Occasion of the 50-th Issue of the Journal **2**

Yu. Neretin. Entrance Examination Patience: Russia and the West **3**

The author analyzes the system of the State Centralized Testing in Russia and make some proposals how the entrance examination system could be modified and optimized.

I. Kostenko. The Background, Branches, and "Berries" of the Reform-1970 **14**

The famous reform of the mathematical education in the Soviet Union held in 1970-th is analyzed. Some of its consequences seem to date controversial.

V. Drozdov. Algebraic Methods of Solving Problems with Parameters **24**

Some algebraic methods of solving problems with parameters are considered. The examples are entrance problems for different institutions of higher education.

E. Potoskuev. Reference Problems and Theorems for Computing of Areas of Triangles and Quadrangles **31**

Computing of areas is based on a number of reference facts which are considered in the paper. Every reference problem or theorem is illustrated with an example.

A. Schetnikov. Linear Perspective in Fine Arts and Basic Ideas of Projective Geometry **41**

This is a regular theme in the series of seminars on applicable mathematics for school students.

V. Tsuckerman. On Constructing the Theory of Basic Elementary Functions **51**

A book for high school teachers on the strict theory of real numbers and basic elementary functions is written by the author. The paper explains the concept and some particular approaches of the book.

S. Kuleshov, A. Salimova, S. Stavtsev. Lectures on Analytic Geometry (continued) **55**

Theme 4, scalar and vector projections as well as scalar product, is considered.

A. Sablin. Random Events and Probabilities **70**

The elementary introduction to probability theory is continued, for the beginning see №1(41), 2007.

L. Konchenko. The Far-seeing Educational Project of A. Kolmlgorov **77**

The specialized physical and mathematical boarding school in Moscow was launched under the guidance of A. Kolmogorov. The paper reminds the Kolmogorov pedagogical principles applied to the school, tells about social consequences and to date state of the project.