Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год седьмой

№2 (25)

Апрель - июнь 2003 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

№ 2 (25), 2003 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (25), апрель – июнь 2003 г.

Содержание

К 80-летию И. Р. Шафаревича

От редакции 2

Математические работы И. Р. Шафаревича 3

Список математических публикаций И. Р. Шафаревича 12

И. Р. Шафаревич. О некоторых тенденциях развития математики 20

Учебное пособие в журнале

И. П. Костенко. Введение в вероятностное прогнозирование. Курс лекций и упражнений (продолжение)

Лекция 6. Начала математической статистики 25

Лекция 7. Биномиальные случайные величины 45

Учащимся и учителям средней школы

С. В. Дворянинов. Что такое кривые второго порядка 67

Студентам и преподавателям математических специальностей

А. Руинский. Линия Кассини и равносторонняя гипербола 80

М. К. Яковлев. Интеграл Римана как функция области интегрирования 89

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2003 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 28.07.2003 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 6,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

К 80-летию И. Р. Шафаревича

3 июня 2003 года исполнилось 80 лет со дня рождения академика РАН, доктора физико-математических наук, профессора, лауреата Ленинской премии Игоря Ростиславовича Шафаревича. Настоящий выпуск журнала посвящается этому юбилею. В выпуске помещена статья о математических трудах И. Р. Шафаревича, список его научных публикаций, а также статья "О некоторых тенденциях развития математики". Редакция журнала "Математическое образование" поздравляет юбиляра и желает ему долгих лет жизни, крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов.

Математические работы И. Р. Шафаревича

От редакции

Настоящая статья воспроизводит с редакционными изменениями статьи, опубликованные в "Успехах Математических Наук", т.39, 1984, N 1, и "Трудах математического института Академии Наук" N 208, 1995. Нумерация работ дана по следующему за данной статьей списку математических публикаций И. Р. Шафаревича.

И. Р. Шафаревич родился в 1923 г. в г. Житомире. Способности к математике у Игоря Ростиславовича проявились очень рано. Учась в школе, он сдает экстерном экзамены в университет, слушает лекции и участвует в работе семинаров. После окончания школы в 1939 г. Игорь Ростиславович за один год завершает обучение в МГУ и в 1940 г. становится аспирантом. С 1944 г. он — преподаватель МГУ, а с 1946 г. — сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова. В этом же году Игорь Ростиславович защищает докторскую диссертацию.

Первая работа И. Р. Шафаревича [1] посвящена нахождению критерия нормируемости топологических полей. Она составила предмет его кандидатской диссертации.

С самого начала научной деятельности И. Р. Шафаревича привлекали теория Галуа и теория алгебраических чисел. Его первым значительным достижением в этих областях математики были работы [4], [6], в которых изучались неабелевы p–расширения локальных полей k. Здесь рассматривался случай, когда основное поле $k \supset Q$ не содержит корня степени p из единицы. Если $[k : Q] = n$, то максимальное p–расширение поля k имеет группой Галуа свободную про–p–группу с $n+1$ образующей. Аналогичный результат был получен для неразветвленных p–расширений поля k алгебраических функций с алгебраически замкнутым полем констант характеристики p. Таким образом, в этой ситуации была решена обратная задача теории Галуа для конечных p–групп. Эта работа была удостоена премии Московского математического общества. В [4] введено также важное понятие фундаментального класса в теории полей классов локальных полей. Оно позволяет явно вычислить возникающее в теории Галуа расширение.

$$1 \to Gal(L^{ab}/L) \to Gal(L^{ab}/K) \to Gal(L/K) \to 1,$$

где L/K — конечное нормальное расширение, L^{ab} — максимальное абелево расширение поля L. На случай полей алгебраических чисел эта конструкция была перенесена в [5].

К числу крупнейших достижений алгебраической теории чисел относится работа И. Р. Шафаревича "Общий закон взаимности" [7], [8], [9]. В ней были рассмотрены следующие три круга вопросов, относящиеся к полям алгебраических чисел k:

1) Для символа норменного вычета $(\frac{\alpha,\beta}{\wp})$, где α, β — числа из поля алгебраических чисел k и $\wp$ — его простой идеал, дана конструкция, аналогичная определению вычета абелева дифференциала $\alpha d\beta$ в точках римановой поверхности.

2) Задача нахождения общего закона взаимности состоит в явном выражении отношения символов степенных вычетов n-й степени $(\frac{\alpha}{\beta})(\frac{\beta}{\alpha})^{-1}$ через числа α, β. Поскольку

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \prod_{\wp|n}\left(\frac{\alpha,\beta}{\wp}\right),$$

новая конструкция символа норменного вычета дала возможность получить общий закон взаимности.

3) Основной результат этой статьи позволил более естественно построить теорию полей классов, как локальную, так и глобальную.

Этими результатами была решена проблема нахождения общего закона взаимности, связанная с именами таких математиков, как Гаусс, Якоби, Куммер, Гильберт и др. Эта задача была включена Гильбертом в число его знаменитых проблем (девятая проблема Гильберта).

После работы по общему закону взаимности И. Р. Шафаревич снова обращается к обратной задаче теории Галуа, но теперь уже для полей алгебраических чисел. Его усилия увенчались успехом и в 1954 г. появился большой цикл работ на эту тему. Сначала была опубликована работа [16] о существовании расширений полей алгебраических чисел с заданной группой Галуа порядка l^α. Техника, развитая в этой работе, дала затем возможность получить (в [18]) разрешимость задачи погружения для полупрямых произведений F на G в случае, когда: а) нормальный делитель G имеет порядок l^α; б) порядок F прост с l, и, наконец, [19], провести построение полей алгебраических чисел с заданной разрешимой группой Галуа. За цикл работ по решению обратной задачи теории Галуа над полями алгебраических чисел И. Р. Шафаревичу в 1959 г. была присуждена Ленинская премия.

В 1959 г. было получено решение задачи погружения для локальных полей [33]. Для этого сначала исследовались первое и второе препятствия в задаче погружения в общем виде. Первое препятствие — это известное ранее условие согласности. Второе препятствие (связанное с выполнимостью условия согласности после первого шага в задаче погружения) было получено в виде набора циклических алгебр, зависящих от некоторого параметра из основного поля. Для локальных полей было доказано, что с помощью этого параметра соответствующий набор циклических алгебр может быть приведен к распадающемуся виду, т.е. что второе препятствие для локальных полей исчезает. Далее в работе 1962 г. [39] было исследовано второе препятствие для задачи погружения полей алгебраических чисел.

К изучению групп Галуа p-расширений И. Р. Шафаревич возвращается в работе [42] 1964 г. Теперь он рассматривает p-расширения поля алгебраических чисел k, имеющие ветвление лишь в фиксированном множестве S простых дивизоров поля k. Пусть $G_S(p)$ — группа Галуа максимального расширения с этими свойствами. Основные результаты, полученные в [42], состоят в оценке минимального числа образующих d и соотношений r группы $G_S(p)$ через число дивизоров в S и инварианты поля k. Если множество S пусто, то $r < d + \rho$, где ρ — число образующих группы единиц поля k. В обзорном докладе на Международном математическом конгрессе в Стокгольме [40] И. Р. Шафаревич обратил внимание на то, что из этого факта вытекает решение известной проблемы башни в теории полей классов, если число соотношений $r = r(G)$ для конечной p–группы G достаточно велико по сравнению с числом ее образующих $d = d(G)$ (при больших d). В работе [43] было показано, что $r > [(d-1)/2]^2$. Это дало решение проблемы башни, более сорока лет не поддававшейся усилиям алгебраистов. На языке групп $G_S(p)$ проблема башни состоит в выяснении, конечна или нет группа $G_S(p)$ (при пустом S) для данного поля k. Полученное решение (и техника его доказательства) имеют много следствий в теории чисел и алгебре. Достаточно упомянуть доказательство существования полей алгебраических чисел, не вложимых в одноклассные, точные оценки роста дискриминанта числового поля в зависимости от его степени, отрицательное решение расширенной проблемы Бернсайда для p–групп с неограниченным показателем степени и аналогичных проблем для колец и алгебр Ли (напомним, что отрицательное решение классической проблемы Бернсайда с ограниченным показателем получено П. С. Новиковым и С. И. Адяном).

Резонанс, вызванной статьей [33], оказался настолько острым, что ее основной результат, вместе с незначительно измененным доказательством, дающим неравенство $r > d^2/4$, вошел почти сразу же в монографическую и учебную литературу. Удивительно, что столь естественный вопрос комбинаторной теории групп, рассматриваемый изолированно вне всякой связи с полями алгебраических чисел, не был решен раньше, хотя со времен И. Шура проявлялся определенный интерес к замкнутым группам, для которых $r(G) = d(G)$. Были известны примеры такого рода для $d = 1, 2, 3$, но понадобился толчок извне, чтобы взглянуть шире на проблему задания конечных p-групп образующими и соотношениями и увидеть, в частности, отсутствие замкнутых p-групп при $d > 3$. Впоследствии были построены примеры конечных p-групп, для которых отношение $r(G)/d(G)^2$ может быть сколько угодно близким к $1/4$. Таким образом, неравенство $r > d^2/4$ асимптотически (при $d \to \infty$) неулучшаемо.

Когомологическая интерпретация $d(G) = dimH^1(G, Z_p)$ и $r(G) = dimH^2(G, Z_p)$ инвариантов d и r конечной про-p-группы G еще раньше привлекала внимание И. Р. Шафаревича.

В заметке [28], написанной в период экспансии методов гомологической алгебры, было обращено внимание на свойства функции Пуанкаре

$$P_N(t) = \sum_{n>0} dimH^n(N, k)t^n$$

конечномерной нильпотентной алгебры N над полем k. Хотя гипотеза о рациональности функции $P_N(t)$ не подтвердилась, ее важный частный случай, отвечающий радикалу $N(A)$ групповой алгебры над F_p конечной p-группы G, оказался верным. Аналогичные вопросы о производящих функциях градуированных объектов возникли примерно с 1950 по 1970 г.г. по разным поводам и в разных областях математики.

В середине пятидесятых годов И. Р. Шафаревич начинает заниматься алгебраической геометрией. Современная алгебраическая геометрия находится на стыке большого числа областей математики, переживших за последние 30 лет второе рождение или даже заново родившихся.

Естественно, что первые задачи в алгебраической геометрии, которыми стал заниматься И. Р. Шафаревич, находились на границе теории чисел и геометрии. Они относились к теории эллиптических кривых или, в более старой терминологии, к теории неопределенных уравнений третьей степени.

Первые идеи в этой области были высказаны в докладе на III Всесоюзном математическом съезде [25]. В нем указывалось на аналогию между задачей погружения в теории Галуа полей алгебраических чисел и задачей классификации эллиптических кривых, определенных над полями алгебраических чисел. Объекты, изучаемые в обеих теориях, обладают локальными инвариантами, связанными с пополнениями поля определения, и основной интерес представляют именно "локально тривиальные" объекты. В случае эллиптических кривых это приводит к двум конкретным гипотезам: 1) над заданным полем p-адических чисел имеется лишь конечное число бирационально неизоморфных кубических кривых с заданным абсолютным инвариантом и 2) если над полем алгебраических чисел k задана кубическая кривая C, то над k имеется лишь конечное число бирационально неизоморфных кубических кривых, которые над всеми p-адическими пополнениями поля k изоморфны C.

Эти гипотезы были доказаны в работах 1957 г. [26], [27], причем в более общей ситуации — для эллиптических кривых степени n, а не только для кубических кривых. Здесь же была решена давно стоявшая в теории диофантовых уравнений задача: доказать существование над любым полем алгебраических чисел эллиптических кривых произвольной степени n, бирационально неизоморфных кривым степени $< n$. Все эти результаты явились первыми шагами в новом разделе алгебраической геометрии — теории главных однородных пространств, — возникшем в 50-х годах. В нем изучаются алгебраические многообразия X над незамкнутыми полями k, интересными с точки зрения теории чисел, и такие, что над замыканием $\overline{k}$ поля k многообразие X изоморфно некоторой алгебраической группе A. Наиболее интересен случай, когда A — абелево многообразие и, в частности, эллиптическая кривая. Главные однородные пространства образуют группу, которую можно интерпретировать на языке когомологий Галуа как $H^1(G, A(\overline{k}))$, где $G = Gal(\overline{k}/k)$ и $A(\overline{k})$ — группа точек, определенных над полем $\overline{k}$. Именно язык когомологий Галуа оказался связующим звеном между описанной выше задачей погружения и задачами об эллиптических кривых.

В [32] была построена топологическая двойственность в смысле Понтрягина между группой $H^1(G, A(\overline{k}))$ и группой $A(K)$ для p-адических полей. Построив тем самым локальную теорию главных однородных пространств, И. Р. Шафаревич обратился к глобальной ситуации. Поскольку для глобального (числового или функционального) поля k имеется естественный морфизм локализации

$$\varphi : H^1(G, A(\overline{k})) \to H^1(Gal(\overline{k_\wp}/k_\wp), A(\overline{k_\wp})),$$

где $\wp$ пробегает все точки поля k, то основной интерес представляет его ядро, состоящее из локально тривиальных однородных пространств. В честь И. Р. Шафаревича это ядро обозначается в мировой математической литературе через

Ш(A, k). Его вычисление и, в частности, доказательство предполагаемой конечности являются одной из труднейших и интереснейших проблем теории диофантовых уравнений. Первые примеры эллиптических кривых с конечной группой Ш были получены лишь во второй половине 80-х годов. Наиболее сильные результаты в этом направлении получены учеником И. Р. Шафаревича В. А. Колывагиным.

В обширной работе [35] И. Р. Шафаревич исследовал случай, когда основное поле k — поле функций на алгебраической кривой над алгебраически замкнутым полем k_0. Сначала, как и для числового случая, находятся группы $H^1(G_\mathfrak{p}, A(\overline{k_\mathfrak{p}}))$ для локальных полей $k_\mathfrak{p}$ — пополнений поля k. Для них доказывается теорема двойственности с фундаментальной группой $\pi_1(A(k_\mathfrak{p}))$ проалгебраической (над полем k_0) группы $A(k_\mathfrak{p})$. При этом в [35] рассмотрены l–компоненты этих групп с $l \neq char(k_0)$.

Случай p-компонент разбирался в многочисленных позднейших исследованиях. В глобальной ситуации имеется также отображение φ и в [35] полностью найдена структура его ядра и коядра. Работа [35] оказала большое влияние на последующее развитие арифметики абелевых многообразий и на теорию когомологий алгебраических многообразий. Как показало будущее, в ней, по существу, содержалось вычисление группы этальных когомологий алгебраической поверхности, расслоенной на пучок алгебраических кривых. Редукция этальных когомологий к когомологиям Галуа стала впоследствии стандартным приемом.

Уже в этих работах выявилась характерная и для дальнейших исследований И. Р. Шафаревича особенность: в большинстве своих работ он подходит к геометрии как теоретико–числовик и, наоборот, к теории чисел как геометр. Именно так построен обзорный доклад на Международном математическом конгрессе 1962 г. в Стокгольме [40]. В нем особое место занимают две гипотезы И. Р. Шафаревича об алгебраических кривых X рода $g > 0$, определенных над глобальным полем k. Каждой такой кривой можно сопоставить множество S точек поля k, где она имеет плохую редукцию (в [40] введено также более тонкое понятие дифференты кривой X над k). Вдохновляясь классическими теоремами Эрмита и Минковского, И. Р. Шафаревич предположил, что число, с точностью до изоморфизма над k, кривых X с заданными инвариантами g, k и S конечно. Если же множество S пусто и $k = Q$, то кривых рода $g > 0$ с такими инвариантами не существует. В функциональном случае последнюю гипотезу можно также сформулировать для $k = k_0(t)$, если исключить так называемые постоянные кривые. Попытки доказать эти гипотезы привели к существенному продвижению в теории диофантовых уравнений и, в частности, к доказательству гипотезы Морделла о конечности числа рациональных точек на алгебраических кривых рода $g > 1$, определенных над полями алгебраических чисел.

Сравнение числовой и геометрических ситуаций, блестяще использованное И. Р. Шафаревичем уже в его работе по общему закону взаимности, является давней традицией теории чисел и алгебраической геометрии. Она восходит к Кронекеру и Гильберту. В русле этих идей в работе [55] была развита конструкция минимальных моделей и канонического класса для схем размерности два: как обычных двумерных алгебраических многообразий над классическими полями, так и алгебраических кривых над такими естественными кольцами, как кольцо целых чисел. Это единообразное изложение проливает новый свет и на геометрический, и на арифметический случай. По существу, работа [55] впервые открыла возможность серьезного рассмотрения "арифметической поверхности" как геометрического объекта: без нее немыслимы были бы последующие сильные результаты теории чисел, дающие, скажем, полное описание точек конечного порядка эллиптических кривых над полем рациональных чисел. Геометрическому анализу известной проблемы ранга эллиптических кривых посвящена заметка [60], написанная совместно с Дж. Тейтом.

В начале 60-х годов И. Р. Шафаревич собрал и возглавил небольшой коллектив семинара, результатом годичной работы которого явилась монография "Алгебраические поверхности", изданная в "Трудах Математического института" [49] — первое и долгое время единственное систематическое изложение теории поверхностей, соединившее красоту геометрических методов итальянской школы с мощью новейших аналитических и топологических методов. Вклад И. Р. Шафаревича в теорию алгебраических поверхностей и, более специально, в сборник, значительно превосходит то, что может быть реконструировано по лично написанному тексту. Во всяком случае, глава VII [49] содержит описание класса поверхностей с эллиптическим пучком в терминах главных однородных пространств, не известных классикам, и обнаруживает, что в классической литературе была пропущена целая бесконечная серия таких поверхностей (с кратными слоями). Весь сборник [49], существование которого целиком обязано И. Р. Шафаревичу, оказал большое влияние на исследования алгебраических поверхностей во всем мире (перев. на английский — 1967 г., на немецкий — 1968 г.).

Одним из самых ярких феноменов теории алгебраических поверхностей являются поверхности типа K3. Каждая из этих поверхностей обладает единственной невырожденной формой ω типа (2,0). Интеграл этой формы по базисным двумерным циклам удовлетворяет соотношениям, аналогичным соотношениям Римана для римановой поверхности. Двумерный цикл поляризации l дает линейное соотношение на периоды

$$\int_l \omega = 0\,.$$

Таким образом, поверхность X типа $K3$ определяет точку в P^{21}_C с однородными координатами $\int_{\sigma_i} \omega$, $(\sigma_i$ — базис в $H^2(X,C))$, принадлежащую открытому девятнадцатимерному многообразию Ω, которое оказывается классическим симметрическим пространством. В 1971 г. И. Р. Шафаревич в работе [67] доказал (совместно с И. И. Пятецким-Шапиро), что поверхность X однозначно определяется соответствующей точкой симметрического пространства Ω. Это — аналог знаменитой теоремы Торелли для римановых поверхностей.

В конце 80-х г.г. И. Р. Шафаревич обратил внимание на то, что остается совершенно открытым вопрос об описании рациональных отображений поверхностей типа K3, в то время, как теорема Торелли дает полное описание самих поверхностей. Иначе говоря, вопрос стоит в выяснении того, как восстановить категорию поверхностей типа К3 из категории решеток периодов и морфизмов между ними. Более точно, рациональное отображение поверхностей определяет ортогональный морфизм (изогению) рациональных структур Ходжа, соответствующих трансцендентным циклам, и задача состоит в определении тех изогений, которые отвечают рациональным отображениям исходных поверхностей. Ранг соответствующих Q–пространств может принимать значения от 2 до 21. Для случаев ранга 2 и 3 было показано (совместно с В. В. Никулиным), что отображения поверхностей описываются изогениями рациональных структур Ходжа.

Аналитические методы исследования поверхностей типа К3 казались непреодолимым препятствием изучения этих поверхностей над полями конечной характеристики. Однако большой цикл работ ([74] - [81], [83]) открыл возможность найти аналог теории периодов и в этом трудном случае. В работе [74] было доказано, что на поверхностях типа К3 в конечной характеристике отсутствуют векторные поля. Этот результат дал возможность описать деформации поверхностей типа К3 и построить их многообразие модулей. Для суперсингулярных поверхностей, у которых все двумерные циклы — алгебраические, можно определить "пространство периодов" и отображение из многообразия модулей в это пространство. В работе [78] получена глобальная теорема Торелли для суперсингулярных поверхностей над полем характеристики два. Кроме того, глобальную теорему Торелли над полем любой конечной характеристики удалось свести к проблеме "невырождения" суперсингулярных поверхностей. Эта проблема была решена в работе [80] для сильно эллиптических поверхностей. Наконец, в работе [83] получена теорема "невырождения" как частный случай теории поведения высоты формальной группы Брауэра поверхности при специализации. Тем самым был доказан аналог глобальной теоремы Торелли для суперсингулярных поверхностей типа К3.

Помимо работ, объединенных в большие циклы, — также характерная черта научного творчества И. Р. Шафаревича — у него имеется несколько работ по алгебраической геометрии, стоящих особняком. Среди них работа [53], в которой была сделана попытка построить алгебраический аналог теории униформизации для алгебраических многообразий — факторов однородных областей по арифметическим группам. В работе [58] (см. также [82]) изучаются такие группы, как группы автоморфизмов кольца многочленов от $n > 2$ переменных. Хотя ими много занимались, работа И. Р. Шафаревича остается почти единственной, где имеются общие и точные результаты. В случае $n = 2$ дано точное описание группы в терминах разложения в свободное произведение. Полученные факты применены к доказательству того, что у аффинной плоскости нет нетривиальных форм. В случае $n > 3$ получены результаты о структуре алгебр Ли соответствующих групп. Проблема нахождения их "проинтегрированных" версий очень трудна: после работы [58] в ней, по существу, не было прогресса.

К середине 60–х годов в широких кругах математиков пробудился интерес к классификации Э. Картаном простых транзитивных псевдогрупп преобразований. В МИАН СССР некоторое время (1964 - 1966 г.г.) функционировал семинар под руководством И. Р. Шафаревича, на котором обсуждались разные работы по псевдогруппам Ли. Отчасти результатом этой деятельности явились две работы [51],

[62], определившие на долгие годы программу классификации простых конечномерных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$. К тому времени в теории модулярных простых алгебр Ли накопился огромный фактический материал. Казалось, что изобретательности, проявляемой при построении все новых и новых примеров простых алгебр, не будет конца. Важным моментом было появление работы [51], в которой обращалось внимание на тот факт, что все известные неклассические простые p-алгебры Ли при $p > 5$ укладываются в четыре бесконечные серии алгебр картановского типа W_n, S_n, H_n, K_n — общие, специальные, гамильтоновы и контактные. В работе [51] была высказана гипотеза, что алгебры картановского типа вместе с классическими исчерпывают все простые p-алгебры Ли ($p > 5$). Полученные до сих пор в разных странах результаты прекрасно согласуются с этой гипотезой, причем оказалось, что ограничение $p > 5$ существенно. В работе [62] техника полных картановских продолжений была развита в применении к произвольным алгебрам Ли, не обязательно обладающим p-структурой. Были сконструированы и изучены эталонные примеры простых градуированных алгебр Ли. Фактически, результатами работы [62] положено начало реализации обширной классификационной программы. Эта работа цитируется практически в каждом исследовании, посвященном модулярным простым алгебрам Ли.

В последние годы внимание И. Р. Шафаревича было привлечено к изучению структуры многообразия неполупростых коммутативных алгебр. Наличие в этой задаче непрерывных параметров делает естественным использование методов алгебраической геометрии. Все коммутативные и ассоциативные законы умножения на данном n-мерном векторном пространстве определяют алгебраическое многообразие. В работе [97] автор ограничивается рассмотрением первого нетривиального случая, когда изучаемые алгебры N имеют класс нильпотентности 2 (т.е. $N^3 = 0$). Изучаются неприводимые компоненты в многообразии таких алгебр, найдены их размерности и особые точки. Оказывается, что компоненты определяются рангом r квадрата N^2 алгебры N. Все компоненты можно разделить на два класса — устойчивые и неустойчивые компоненты. Если d — число образующих алгебры, то доказано, что компоненты, соответствующие значениям $2 < r \leq (d-1)(d-2)/6+2$, являются устойчивыми, кроме, быть может, случая $d = 5, r = 4$, а компоненты с $r \geq (d^2-1)/3$ и $r = 1, 2$ неустойчивы. Так как всегда $r \leq d(d+1)/2$, то интервал возможных значений для r разделяется на три примерно равные части (асимптотически по d), причем часть меньших значений для r соответствует устойчивым компонентам, часть больших значений — неустойчивым, а для средней части ответ остается неизвестным. Каждая алгебра класса два определяет r симметрических матриц, в терминах которых формулируется критерий устойчивости. Для $r = 3$ он тесно связан с известным в теории векторных расслоений на проективной плоскости условием Барта. Все эти конструкции и результаты являются первыми шагами в новой теории классификации коммутативных алгебр.

И. Р. Шафаревичем написано несколько монографий и учебников (часть из них с соавторами). Уникальной является книга "Теория чисел" [46], созданная на основе многолетних лекционных курсов, читавшихся им в Московском университете. Книга эта вышла двумя изданиями [71], [90] и переведена на все основные языки мира (английский, немецкий – 1966 г., французский – 1967 г., японский – 1971 г.). Огромную популярность завоевали также "Основы алгебраической геометрии" [70] — один из лучших в мировой литературе учебников по алгебраической геометрии. Прозрачность и ясность изложения, обилие неформальных примеров и мотивировок, постепенный переход от простейших ситуаций к более сложным — характерные черты книг И. Р. Шафаревича.

Это в полной мере относится к обзорам [91], [96], написанным Шафаревичем для "Энциклопедии математических наук", начавшей выходить у нас в 80–е годы стараниями Р. В. Гамкрелидзе. И. Р. Шафаревич с самого начала принял самое активное участие в формировании общих принципов этого издания, по существу, совпадающих с приведенными выше особенностями его книг. Редактируя выпуски по алгебре, теории чисел и алгебраической геометрии, он оказал определяющее влияние на содержание и стиль вошедших в них обзоров. Написанный на едином дыхании обзор основных понятий алгебры [91] сразу же приобрел широкую известность и не только в математических кругах. Почти 80 выпусков этого издания, в появлении которого роль И. Р. Шафаревича весьма велика, дают панораму почти всей современной математики.

Среди учеников И. Р. Шафаревича более трех десятков кандидатов и докторов наук — алгебраистов, геометров, специалистов по теории чисел. С 1960 г. И. Р. Шафаревич заведует отделом алгебры Математического института АН СССР. Он — член редакции математической серии "Известий АН СССР". С 1970 по 1974 г. И. Р. Шафаревич был президентом Московского математического общества. И. Р. Шафаревич — академик Российской Академии Наук.

Научные заслуги И. Р. Шафаревича получили широкое международное признание. Он является членом Национальной Академии наук США, Американской академии наук и искусств, Лондонского королевского общества, Германской академии естествоиспытателей "Леопольдина", Нацональной Академии Наук Италии "Деи Линчеи". И. Р. Шафаревич удостоен Ленинской премии, премии Хейнемана Геттингенской академии наук и избран почетным доктором Парижского университета.

Список математических публикаций И. Р. Шафаревича

От редакции

1943

1. О нормируемости топологических полей. *Доклады АН СССР*, т. **40**, N 1, 1943, 149–151.

1945

2. Об абсолютных группах Галуа относительно-абелевых расширений. В *Рефераты научно-исследовательских работ за 1943-44 г. Отд. физ.-матем. наук АН СССР*. Москва–Ленинград (1945).

1946

3. О p-расширениях. В *Рефераты научно-исследовательских работ за 1945 г. Отд. физ.-матем. наук АН СССР*. Москва–Ленинград (1946).

4. О группах Галуа p-адических полей. Резюме докторской диссертации. *Доклады АН СССР*, т. **53**, N 1, 1946, 15–16.

5. Исследования о конечных расширениях. Резюме докторской диссертации. *Успехи Матем. Наук*, т. **2**, N 2, 1946, 223–226.

1947

6. О p-расширениях. *Матем. Сб., Нов. сер.*, т. **20(62)**, N 2, 1947, 351–363.

1948

7. Общий закон взаимности. *Успехи Матем. Наук*, т. **3**, N 3, 1948, 165.

1949

8. Общий закон взаимности. *Доклады АН СССР*, т. **64**, N 1, 1949, 25–28.

1950

9. Общий закон взаимности. *Матем. Сб., Нов. сер.*, т. **26(68)**, N 1, 1950, 113–146.

10. Алгебраическая геометрия. *Больш. Сов. Энцикл., 2-е изд.*, т. **2**, 1950, 62–63.

1951

11. Новое доказательство теоремы Кронекера–Вебера. *Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова*, т. **38**, 1951, 382–387.

1952

12. Общий закон взаимности и его приложения в теории полей алгебраических чисел. *Труды I Конгр. Венгерских Матем. 1950*, 291–298, 1952.

13. Конференция по алгебре и теории чисел. *Успехи Матем. Наук*, т. **7**, N 3, 1952, 151–154.

1953

14. Комментарии к статье: "О числе решений сравнения степени три". В *Г. Ф. Вороной, Собрание сочинений, т.3, стр.205.* Киев, Изд. Акад. Наук Укр. ССР, 1953.

15. Комментарии к статье: "Замечание о последней теореме Ферма относительно неразрешимости уравнения $x^p + y^p = z^p$ в целых числах x, y, z при нечетном простом числе p". В *Г. Ф. Вороной, Собрание сочинений, т.3, стр.247.* Киев, Изд. Акад. Наук Укр. ССР, 1953.

1954

16. О построении полей с заданной группой Галуа порядка l^α. *Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем.*, т. **18**, 1954, 261–296.

17. Об одной теореме существования в теории полей алгебраических чисел. *Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем.*, т. **18**, 1954, 327–334.

18. О задаче погружения полей. *Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем.*, т. **18**, 1954, 389–418.

19. Построение полей алгебраических чисел с заданной разрешимой группой Галуа. *Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем.*, т. **18**, 1954, 525–578.

20. О расширениях полей алгебраических чисел, разрешимых в радикалах. *Доклады АН СССР*, т. **95**, N 2, 1954, 227–227.

21. О задаче погружения полей. *Доклады АН СССР*, т. **95**, N 3, 1954, 459–461.

22. О решении уравнений высших степеней (метод Штурма). *Москва, Гостехтеориздат*, 1954, 24 стр. Немецкий перевод: *Berlin, Deutscher Verkag der Wissenschaften*, 1956.

23. Предисловие к: "Автоморфные функции нескольких комплексных переменных", *К. Л. Зигель, Москва, Гостехтеориздат*, Москва–Ленинград, Изд. Иностранной Литературы, 1954, 3–4.

24. (с Д. Е. Меньшовым и др.) 16-я Московская Математическая Олимпиада. *Успехи Матем. Наук*, т. **9**, N 3, 1954, 257–262.

1956

25. Теория Галуа и арифметика полей алгебраических чисел. *Труды 3-го Всесоюзного Математического Съезда*, Москва, 1956.

1957

26. О бирациональной эквивалентности эллиптических кривых. *Доклады АН СССР*, т. **114**, N 2, 1957, 267–270.

27. Показатели эллиптических кривых. *Доклады АН СССР*, т. **111**, N 4, 1957, 714–716.

28. (с А. И. Кострикиным) Группа гомологий нильпотентных алгебр. *Доклады АН СССР*, т. **115**, N 6, 1957, 1066–1069.

1958

29. Задача погружения для распадающихся расширений. *Доклады АН СССР*, т. **120**, N 6, 1958, 1217–1219.

30. Дмитрий Константинович Фаддеев (к его 50-летию). *Успехи Матем. Наук*, т. **13**, N 1, 1958, 233–236.

31. Аналитические многообразия и алгебраическая геометрия (обзорная статья). *Успехи Матем. Наук*, т. **13**, N 2, 1958.

1959

32. Группы главных однородных алгебраических многообразий. *Доклады АН СССР*, т. **124**, N 4, 1959, 42–43.

33. (с С. П. Демушкиным) Задача погружения для локальных полей. *Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем.*, т. **23**, N 6, 1959, 823–840.

34. Впечатления от Международного Математического Конгресса в Эдинбурге. *Успехи Матем. Наук*, т. **14**, N 2, 1959, 243–246.

1961

35. Главные однородные пространства, определенные над полем функций. *Труды Матем. Инст. им. В.А. Стеклова*, т. **64**, 1961, 316–346.

36. Борис Николаевич Делоне (к его 70-летию). *Успехи Матем. Наук*, т. **16**, N 3, 1958, 239–241.

1962

37. Памяти Франческо Севери. *Вестник Акад. Наук СССР*, т. **2**, 1962, 99–100.

38. Contributii Sovetice la theoria lui Galois. *Bucaresti*, 1962, 1–167; *Acad. Republici Populare Romine*, N 3, 3–36, N 3, 37–93.

39. (с С. П. Демушкиным) Второе препятствие для задачи погружения полей алгебраических чисел. *Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем.*, т. **26**, N 6, 1962, 911–924.

1963

40. Поля алгебраических чисел. *Proc. Int. Cong. Math. Stockholm 1962*, Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963, 163–176.

41. Einige Anwendungen der Galoischen Theorie auf Diophantische Gleichungen. *Ber. Dirichlet Tagung*, Berlin, 1963.

1964

42. Расширения с заданными точками ветвления. *Publ. Math. Inst. Haut. Etud. Sci. Paris*, vol. **18**, 1964, 295–319.

43. (с Е. С. Голодом) О башне полей классов. *Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем.*, т. **28**, N 2, 1964, 261–272.

44. Юрий Иванович Манин. *Молодой Коммунист*, N 3, 1964, 61.

45. (с С. П. Новиковым и И. И. Пятецким-Шапиро) Фундаментальные направления развития алгебраической топологии и алгебраической геометрии. *Успехи Матем. Наук*, т. **19**, N 6, 1964, 75–82.

46. (с З. И. Боревичем) Теория чисел. *Москва, Наука*, 1964. Немецкий перевод: *Basel–Stuttgart, Birkhäuser Verlag*, 1966; Английский перевод: *New York–London, Academic Press*, 1966; Французский перевод: *Paris, Gauthier–Villars*, 1967; Японский перевод: *Tokyo, Joshioka Shoten*, 1971.

47. Конференция по теории чисел. Обервольфах, ФРГ, 6–12 сент. 1964. *Вестник Акад. Наук СССР*, т. **12**, 1964, 63–64.

48. Лекции по высшей алгебре. *Москва, МГУ*, 1963, 1–38.

1965

49. (с Б. Г. Авербухом и др.) Алгебраические поверхности. *Труды Матем. Инст. им. В.А. Стеклова*, т. **75**, 1965, 3–215. Английский перевод: *Providence, Amer. Math. Soc.*, 1967; Немецкий перевод: *Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft*, 1968. Предисловие. Линейчатые поверхности. Поверхности с пучком эллиптических кривых.

50. Предисловие к сборнику работ "Комплексные пространства." *Москва, Мир*, 1965, 5–10.

1966

51. (с А. И. Кострикиным) Псевдогруппы Картана и p-алгебры Ли. *Доклады АН СССР*, т. **168**, N 4, 1966, 740–742.

52. (с А. И. Кострикиным) Псевдогруппы Картана и p-алгебры Ли. *Тезисы. Труды Международного Конгресса Математиков. Секция* 2, Москва, Мир, 1966.

53. (с И. И. Пятецким-Шапиро) Теория Галуа трансцендентных расширений и униформизация. *Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем.*, т. **30**, N 3, 1966, 671–704.

54. (с И. И. Пятецким-Шапиро) Теория Галуа трансцендентных расширений и униформизация. В *Современные проблемы теории аналитических функций. Ереван 1965*, 262–264. Москва, Наука, 1966.

55. Lectures on minimal models and birational transformations of two-dimensional schemes. *Tata Institute of Fundamental Research*, Bombay, 1966, 175 pp.

56. (с А. А. Кирилловым) Вторая летняя школа по топологии. *Успехи Матем. Наук*, т. **21**, N 2, 1966, 257–258.

57. Uber das Klassenkorpenturmproblem. *Berichte Math. Forschungs Inst. Oberwolfach*, Heft **2**, 1966, 265.

1967

58. On some infinite-dimensional groups. В *Simposio Internationale di Geometria Algebrica. Roma 1967*, Edizione Cremonese, 208–212.

59. (с А. Н. Рудаковым) Неприводимые представления простой трехмерной алгебры Ли над полями конечной характеристики. *Матем. Заметки*, т. **2**, N 5, 1967, 439–454.

60. (с Дж. Тэйтом) О ранге эллиптических кривых. *Доклады АН СССР*, т. **175**, N 4, 1967, 770–773.

1968

61. Алгебраическая геометрия. *Москва, МГУ*, 1968, 250 стр.

1969

62. (с А. И. Кострикиным) Градуированные алгебры Ли конечной характеристики. *Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем.*, т. **33**, N 2, 1969, 251–322.

63. Дзета-функция. *Москва, МГУ*, 1969, 148 стр.

64. Основы алгебраической геометрии. *Успехи Матем. Наук*, т. **24**, N 6, 1969, 3–184; Немецкий перевод: *Friedrich Vieweg und Sohn*, 1972; Венгерский перевод: *Magyar Tud. Akad. mat. fiz. Tud. Oszt.*, **22**, 1974, 79–184 и **22**, 1975, 283–360.

1970

65. Предисловие к: H. Koch. Galoissche Theorie der 3-Erweiterungen. *Berlin, Deutsche Verlag der Wissenschaften*, Mathematische Monographien, Bd. 1, 1970, 3–4.

66. Le Theoreme de Torelli pour les surfaces algebriques de type K3. *Actes Congres Intern. Math. Nice 1970*, **1**, 1971, 413–417.

1971

67. (с И. И. Пятецким-Шапиро) Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа K3. *Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем.*, т. **35**, N 3, 1971, 530–572.

68. Лекции по высшей алгебре. *Москва, МГУ*, 1971, 40 стр.

69. (с В. И. Арнольдом, И. М. Гельфандом, Ю. И. Маниным, Б. Г. Мойшензоном, и С. П. Новиковым) Галина Николаевна Тюрина (некролог). *Успехи Матем. Наук*, т. **26**, N 1, 1971, 207–211.

70. Основы алгебраической геометрии. *Москва, Наука*, 1971, 567 стр.; Немецкий перевод: *Berlin, Deutsche Verlag der Wissenschaften*, 1972; Английский перевод: *Grundlehren der Math. Wissenschaften*, **213**, Berlin, Heidelberg, New York, 1974; Румынский перевод: *Bucharesti, Editura stiintifica enciclopedia*, 1976.

1972

71. (с З. И. Боревичем) Теория чисел. Изд. 2-е. *Москва, Наука*, 1972, 495 стр.

1973

72. (с И. И. Пятецким-Шапиро) Арифметика поверхностей типа K3. *Труды Матем. Инст. им. В.А. Стеклова*, т. **132**, 1973, 44–54.

73. О некоторых тенденциях развития математики. *Jahrb. Akad. Wiss. Göttingen*, 1973, 31–36; Английский перевод: *Math. Intelligencer*, т. **3**, 1981, 182–184.

1976

74. (с А. Н. Рудаковым) Несепарабельные морфизмы алгебраических поверхностей. *Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем.*, т. **40**, N 6, 1976, 1269–1307.

1977

75. (с А. Н. Рудаковым) Замечание к работе "Несепарабельные морфизмы алгебраических поверхностей." *Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем.*, т. **41**, N 2, 1977, 476.

1978

76. (с А. Н. Рудаковым) Квазиэллиптические поверхности типа К3. *Успехи Матем. Наук*, т. **33**, N 1, 1978, 227–228.

77. (с А. Н. Рудаковым) Векторные поля на эллиптических поверхностях. *Успехи Матем. Наук*, т. **33**, N 6, 1978, 231–232.

78. (с А. Н. Рудаковым) Суперсингулярные поверхности типа К3 над полями характеристики 2. *Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем.*, т. **42**, N 4, 1978, 848–869.

1981

79. (с А. Н. Рудаковым) Поверхности типа К3 над полями конечной характеристики. В *Итоги Науки и Техники, Сер. Совр. Пробл. Матем.*, т. **18**, 1981, 115–207.

80. (с А. Н. Рудаковым) О вырождении поверхностей типа К3 над полями конечной характеристики. *Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем.*, т. **45**, N 3, 1981, 646–661.

81. (с А. Н. Рудаковым) О вырождении поверхностей типа К3. *Доклады АН СССР*, т. **259**, 1981, 1050–1052.

82. О некоторых бесконечномерных группах. II. *Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем.*, т. **45**, N 1, 1981, 214–226.

1982

83. (с А. Н. Рудаковым и Т. Цинком) Влияние высоты на вырождение алгебраических поверхностей типа К3. *Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем.*, т. **46**, N 1, 1982, 117–134.

1983

84. (с В. В. Никулиным) Геометрии и группы. *Москва, Наука*, 1983; Английский перевод: *Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg– New York–Tokyo*, 1987; Японский перевод: *Springer–Verlag*, 1993.

85. Zum 150 Geburstag von Alfred Clebsch. *Math. Ann.*, т. **266**, 1983, 135–140.

86. Предисловие к: *Дж. Милн "Этальные когомологии"*, Москва, Мир, 1983, 5–6.

1984

87. (с А. Н. Паршиным) Арифметика алгебраических многообразий. *Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова*, т. **168**, 1984, 72–97.

88. (с А. Н. Рудаковым) О вырождении поверхностей типа К3. *Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова*, т. **166**, 1984, 222–234.

89. Анри Пуанкаре. Мысли о науке (рецензия). *Техника и Наука*, т. **2**, 1984, 42–43.

1985

90. (с З. И. Боревичем) Теория чисел. Изд. 3-е. *Москва, Наука*, 1985, 503 стр.

1986

91. Основные понятия алгебры. В: *Итоги Науки и Техники, Сер. Совр. Пробл. Матем., Фундаментальные направления*, т. **11**, 1986, 288 стр.

1988

92. Алгебраическая геометрия, т.т. I и II. Изд. 2-е. *Москва, Наука*, 1988, т. I – 351 стр., т. II – 304 стр.

1989

93. Так сделайте невозможное! (к 80-летию Л. С. Понтрягина) "*Советская Россия*", 16 апреля 1989.

94. О проблеме Люрота. *Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова*, т. **183**, 1989.

95. О факторах одного убывающего центрального ряда. *Матем. Заметки*, т. **45**, N 3, 1989, 114–118.

96. (с В. А. Исковских) Алгебраические поверхности. В: *Итоги Науки и Техники, Сер. Совр. Пробл. Матем., Фундаментальные направления*, т. **35**, 1989, 131–271.

1990

97. Деформации коммутативных алгебр класса 2. *Алгебра и Анализ*, т. **2**, N 6, 1990, 178–194.

98. Дмитрий Константинович Фаддеев (к годовщине смерти). *Алгебра и Анализ*, т. **2**, N 6, 1990, 3–9.

1991

99. Abelian and Nonabelian Mathematics. *The Math. Intelligencer*, т. **13**, 1991, 67–75.

100. Властитель Стекловки (к 100-летию со дня рождения И. М. Виноградова)[1]. *Вестник Акад. Наук СССР*, N 9, 1991, 96–100.

1994

101. Mathematical reasoning versus Nature. *Comment. Math. Univ. Sancti Pauli*, v. **43**, N 1, 1994, 109–116.

102. On the Arithmetics of Singular K3-surfaces. *International Conference on Algebra and Analysis in Honour of N.G. Chebotarev (1894–1947)*, June 6–11, 1994, Kazan. Proceedings.

1995

103. On Some Arithmetic Properties of Algebraic Varieties. *Second Asian Mathematical Conference*, October 17–20, 1995, Nakhon Ratchasima, Tailand. Proceedings.

[1] Без согласия автора название переделано в: "Патриарх советской математики".

1997

104. Японский перевод книги, указанной в п. 91, 1997.

1999

105. Основные понятия алгебры. Переиздание работы, указанной в п. 91, 1999.

2000

106. Избранные главы алгебры. Учебное пособие для школьников. Издательство журнала "Математическое образование", М., 2000.

2001

107. Degeneration of semisimple algebras. *Communications in Algebra*, v. **29**, N 9, 2001.

2002

108. Discourses on Algebra. *Springer*, 2002. (Английский перевод книги, указанной в п. 105).

О некоторых тенденциях развития математики (лекция по случаю официального вручения Хейнемановской премии Геттингенской Академии Наук)

И. Р. Шафаревич

В лекции, прочитанной 30 лет назад, выдающийся русский математик и общественный деятель Игорь Ростиславович Шафаревич предлагает свою версию возможного смысла математической деятельности человечества. Основной текст печатается по изданию *И. Р. Шафаревич, Путь из-под глыб, М.: "Современник", 1991.* В настоящем издании добавлено примечание автора, отражающее его современное отношение к вопросу.

Примечание к публикации 2003 года.

Этот текст был опубликован 30 лет назад. После того я несколько раз сталкивался с возражениями некоторых моих коллег, ставивших под сомнение осмысленность самого вопроса, который здесь обсуждается. Мне говорили, что понятие "смысла" или "цели" так же неприменимо к математике, как, например, к человеческой истории или даже органической жизни, которая течет не "куда-то", а просто потому, что некогда возникла. Неожиданным образом поддержку своей веры в осмысленность вопросов подобного типа я получил от композитора — Шостаковича. В опубликованных после его смерти "Воспоминаниях" (или "Свидетельствах") говорится: "Смысл в музыке — это для многих звучит непривычно... Но несмотря на их наивность и даже грубость, эти вопросы, несомненно, имеют право на существование". Да и от ряда своих коллег-математиков я получил письма, показывавшие, что постановка таких вопросов чему-то в их душах созвучна.

Достоевский писал об этом вопросе, что он "не в его размерах". Точно так же и все упомянутые вопросы "не в человеческих размерах" — сомнительно, чтобы кто-то был способен предложить ответ на один из них. Но мне кажется, что нам полезно о них не забывать, и время от времени примерять их к нашей конкретной ситуации.

Всякое существо склонно воспринимать среду своего обитания как нечто безусловное, что и не может быть другим и что поэтому не порождает никаких вопросов. Так относится и математик к своей науке, — и только изредка, когда представляется повод взглянуть на нее со стороны, он вдруг замечает, с каким странным, в сущности неправдоподобным явлением имел дело всю жизнь. Для меня таким поводом было лестное предложение сказать здесь несколько слов о математике моим коллегам, работающим в далеких от нее областях науки.

При поверхностном наблюдении математика представляется плодом трудов многих тысяч мало связанных индивидуальностей, разбросанных по континентам, векам и тысячелетиям. Но внутренняя логика ее развития гораздо больше напоминает работу **одного** интеллекта, непрерывно и систематически развивающего свою мысль, лишь использующего как средство многообразие человеческих личностей. Как бы в оркестре, исполняющем кем-то написанную симфонию, тема переходит от одного инструмента к другому, и когда один исполнитель вынужден прервать свою партию, ее точно как по нотам, продолжает другой.

Поверьте, это не риторическая фигура! История математики знает очень много примеров того, что открытие, сделанное одним ученым, остается неизвестным, а позже с поразительной точностью воспроизводится другим. В письме, написанном ночью перед дуэлью, окончившейся его гибелью, Галуа высказал несколько утверждений исключительной важности об интегралах алгебраических функций. Более чем двадцать лет спустя Риман, который, безусловно, не знал о письме Галуа, вновь нашел и доказал в точности те же утверждения. Или: после того как Лобачевский и Болиаи независимо друг от друга положили начало неевклидовой геометрии, выяснилось, что два человека — Гаусс и Швейкарт более чем за 10 лет до этого тоже независимо друг от друга пришли к тем же результатам. Странное чувство испытываешь, видя одни и те же чертежи, как будто начерченные одной рукой в трудах четырех ученых, работавших совершенно независимо друг от друга.

Невольно приходишь к мысли, что такая поразительная, загадочная деятельность человечества, длящаяся несколько тысячелетий, не может быть случайной, должна иметь какую-то цель. А признав это, мы с необходимостью приходим к вопросу: **в чем состоит эта цель?**

Как может целая наука — не один только ее раздел и не в один лишь период ее развития — иметь единую цель? Попробуем усмотреть это на примере физики, которая всегда была так тесно связана с математикой. Ко времени Ньютона перед физикой вырисовалась захватывающая цель: построить теорию (или, как тогда говорили, систему) мира, то есть заключить всю вселенную в несколько простых законов, из которых многообразие физического мира может быть выведено чисто логически. Долгое время казалось, что Ньютон эту задачу в принципе решил, а на долю его последователей осталась лишь проверка того, что все известные явления описываются его системой. Только на периферии физики теория электричества не хотела укладываться в эту схему. Но в XIX в. именно явления электромагнетизма стали центром физики, и хотя этим была поколеблена ньютонианская концепция, зато возникла надежда, что ньютоновская механика, дополненная максвелловской теорией электромагнитного поля, позволит создать полную и окончательную систему мира. Однако и этим ожиданиям не было суждено сбыться, — квантовая механика и теория относительности вскоре разбили все старые концепции. Одно время физиков подогревало стремление извлечь из единой теории поля или из релятивистской квантовой механики полную теорию элементарных частиц и новую систему мира. Этого до сих пор не произошло, и вряд ли многие физики сейчас считают такие надежды реальными. Во всяком случае, если некоторое единство в физической картине мира когда-нибудь и восстановится, трудно будет после стольких перестроек верить в окончательность этой системы.

Возвращаясь к математике, мы должны будем признать, что та глобальная цель, которую в своей амбиции физика себе несколько раз, хотя и без успеха, ставила, в нашей науке вообще не созрела. Как же это отражается на ее развитии?

Математика растет стремительно и непрерывно, не зная типичных для физики перестроек и кризисов, обогащая нас все новыми идеями и конкретными фактами. Я глубоко убежден, что достижения современной математики не менее совершенны, чем творения классиков XIX, XVIII и XVII вв., что они могут даже выдержать сравнение с плодами эллинского гения. Но ведь и прекраснейшие из современных достижений ни в чем принципиально не превосходят классические! Какова же ценность неограниченного накопления идей, в принципе одинаково глубоких? Не превращается ли математика в поразительно красивый вариант "дурной бесконечности" Гегеля?

Любая деятельность, лишенная цели, тем самым теряет и смысл. И если сравнить человечество с живым организмом, то математика окажется непохожей на осмысленную, целенаправленную деятельность. Скорее она аналогична инстинктивным действиям, которые могут стереотипно повторяться, пока работает некий внешний или внутренний возбудитель.

Не имея цели, математика не может выработать и представления о своей форме, ей остается в качестве идеала ничем не регулируемый рост, а вернее расширение по всем направлениям. Используя другое сравнение, можно сказать, что развитие математики не похоже на рост живого организма, который сохраняет свою форму, сам определяя свои границы. Оно больше напоминает рост кристалла или диффузию газа, которые будут распространяться неограниченно, пока не встретятся с внешним препятствием.

Очевидно, что такое развитие науки противоречит ощущению осмысленности и красоты, которое непреодолимо возникает при соприкосновении с математикой, — подобно тому, как невозможна бесконечно продолжающаяся прекрасная симфония.

Но только ли в нашей науке встает эта проблема? Я не думаю, что математика радикально отличается от других форм культурной деятельности. Однако ее объекты более абстрактны, в ней происходит отвлечение от большего числа случайных свойств. Как говорил Платон, в ней больше от познания чистого бытия и меньше — от мнений о предметах видимого мира, в ней "как бы грезят о сущем". Поэтому в математике ясно различимы закономерности, хотя и универсальные, но лишь смутно видимые в других областях. В частности, то отсутствие целей и формы, о котором мы говорили выше, относится, как мне кажется, почти ко всей жизни современного человечества. Так, наряду с математикой, развивающейся без цели, мы видели пример физики, в погоне за непосильной, видимо, ей целью теряющей представление о какой-либо цели вообще.

Бесформенная, лишенная иной цели и смысла, кроме неограниченного расширения, лихорадочная деятельность уже несколько веков как захватила человечество. Она получила название "прогресса" и на некоторое время стала чем-то вроде суррогата религии. Ее последним порождением является современное индустриальное общество. Уже много раз указывалось на то, что эта гонка содержит в себе внутреннее противоречие, приводит к катастрофическим материальным последствиям: все возрастающему, непосильному для человека темпу изменений жизни, перенаселенности, уничтожению окружающей среды. На примере математики я хочу обратить внимание на не менее разрушительные духовные последствия: человеческая деятельность лишается глобальной цели, становится бессмысленной.

Опасность здесь не только отрицательная, она заключается не только в том, что напряженные усилия человечества, жизнь его наиболее талантливых представителей не освещаются пониманием их смысла. Она не исчерпывается и тем, что, не понимая цели своих действий, мы не можем предвидеть и их результатов. Духовная конституция человечества не позволяет ему долго мириться с деятельностью, цель и смысл которой ему не даны. И здесь, как и во многих других явлениях, вступает в силу механизм замещения — не найдя того, что им необходимо, люди не успокаиваются на этом, но прибегают к суррогатам. Пример этого нам всем хорошо известен — порвав связь с Богом милосердия и любви, люди тотчас создали себе других богов, требующих миллионов человеческих жертв. Согласно тому же закону, когда культурная деятельность человечества лишена ясного понимания своих целей, она пытается заимствовать себе осмысление из других источников. В частности, математик ищет смысл своей работы в выполнении заказа государства, которому он готов рассчитать траекторию ракеты или подслушивающий аппарат, а если это ученый крупного масштаба, — то спланировать и целое общество, состоящее из гибридов людей и компьютеров. Такая установка уродует не одни только души ученых, — появляются области математики, лишенные той божественной красоты, которая зачаровывает всех, знакомых с нашей наукой.

Более чем двухтысячелетняя история убеждает нас в том, что математика, по-видимому, не способна сама сформулировать ту конечную цель, которой может направляться ее развитие. Она должна, следовательно, заимствовать ее извне. Разумеется, я далек от того, чтобы пытаться указать решение этой глубокой, не только внутриматематической, но и общечеловеческой проблемы. Я хочу лишь указать на основные направления, в которых возможен поиск решения.

По-видимому, таких направлений есть два. Во-первых, можно пытаться извлечь цель математики из ее практических приложений. Но трудно поверить, что более высокая — духовная деятельность найдет свое оправдание в более низкой — материальной. В открытом в 1945 г. "Евангелии от Фомы" Иисус иронически говорит:

"Если плоть произошла ради духа, это — чудо. Если же дух ради тела, это — чудо из чудес".

Вся история математики — убедительное доказательство того, что "чудо из чудес" невозможно. Если мы посмотрим на решающий в развитии математики момент, когда она сделала свой первый и самый значительный для человечества шаг и возникла та основа, на которой она зиждется — логическое доказательство, то увидим, что произошло это на материале, который просто исключал возможность практических приложений. Первые теоремы Фалеса Милетского устанавливали истины, очевидные для каждого здравомыслящего человека — вроде того, что диаметр делит круг на две равные части. Гениальность нужна была не для того, чтобы увериться в справедливости этих положений, а для того, чтобы понять, что они нуждаются в доказательстве. Очевидно, что практическая ценность таких открытий — нулевая.

И в наше время, как ни разнообразны и глубоки приложения математики, отнюдь не под их влиянием возникли ее самые прекрасные достижения. Как же можно тогда ожидать, что приложения математики дадут ей эту цель, которую она не смогла найти своими внутренними силами?

Если мы, таким образом, отбросим этот путь, то останется, как мне кажется, только одна возможность: цель математике может дать не низшая сравнительно с ней, а высшая сфера человеческой деятельности — религия.

Конечно, сейчас очень трудно представить себе, как это может произойти. Но еще труднее вообразить, как математика сможет вечно развиваться, не зная, ни что, ни зачем она изучает. Да уже в следующем поколении она погибнет, захлестнутая потопом публикаций. А ведь это еще самая элементарная, внешняя причина.

С другой стороны, в принципе такое решение возможно — это доказано историей. Обратившись опять к той эпохе, когда математика только возникла, мы увидим, что тогда она знала свою цель и получила ее именно на этом пути. Математика сложилась как наука в VI в. до Р.Х. в религиозном союзе пифагорейцев и была частью их религии. Она имела ясную цель — это был путь слияния с божеством через постижение гармонии мира, выраженной в гармонии чисел. Именно эта высокая цель дала тогда силы, необходимые для научного подвига, которому принципиально не может быть равного: не открытия прекрасной теоремы, не создания нового раздела математики, но создания самой математики.

Тогда, почти в самый момент ее рождения, уже обнаружились те свойства математики, благодаря которым в ней яснее, чем где-либо, проявляются общечеловеческие тенденции. Именно поэтому тогда математика послужила моделью, на которой были выработаны основные принципы дедуктивной науки.

Кончая, я хочу выразить надежду, что по той же причине она теперь может послужить моделью для решения основной проблемы нашей эпохи:

обрести высшую религиозную цель и смысл культурной деятельности человечества.

Впервые опубликовано в журнале "Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften in Göttingen", Göttingen, 1973.

Введение в вероятностное прогнозирование. Курс лекций и упражнений (продолжение)

И. П. Костенко

Продолжаем публикацию учебного пособия по теории вероятностей. В данном номере публикуются лекции 6, 7 с соответствующими упражнениями. Лекции 4, 5 опубликованы в номере 4(23) за 2002 г.

Лекция 6. Начала математической статистики

В предыдущей лекции вы познакомились с фундаментальным понятием *случайной величины* (с.в.). Напомню, — это переменная величина, которая в результате **опыта** может принимать **различные** значения **случайным** образом. Лекция была посвящена *дискретным* с.в., — они имеют конечное или счетное множество значений. Пример: сумма выпавших очков при подбрасывании двух игральных костей. Эта величина связана с опытом — подбрасыванием двух костей. Она может принимать различные значения от 2-х до 12-ти. Предсказать точно, какое значение появится, нельзя, — они появляются случайно. С понятием дискретной с.в. связано другое основное понятие *ряда распределения* вероятностей. Это — таблица, состоящая из двух строк: в первой строке записываются все **возможные** значения с.в. (в порядке их возрастания), а во второй — вероятности значений. Ряд распределения с.в. X с конечным числом значений имеет следующий вид:

Таблица 1

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Ряд распределения содержит полную вероятностную информацию о с.в. Числовые характеристики (*математическое ожидание* $M = \sum x_i p_i$ *и дисперсия* $D = \sum (x_i - M)^2 p_i$)) "сжимают" эту информацию до одного числа M или D, утрачивая при этом какую-то ее часть. Однако этого оказывается достаточно для решения многих практических задач, для надежных прогнозов.

В примерах, которые мы до сих пор рассматривали, ряд распределения рассчитывался теоретически и точно. В реальных задачах точный расчет обычно невозможен, вероятности p_i приходится определять статистически, из серии опытов над с.в. Так же приближенно приходится отыскивать M и D. Замечательно вот что: для получения хороших приближений вероятностей, требуется очень большое количество опытов (несколько сотен), а хорошие приближения числовых характеристик получаются из значительно меньшего числа опытов (несколько десятков). Этим обстоятельством еще больше повышается практическая ценность числовых характеристик.

Итак, практика требует ответа на следующие вопросы. Как строить приближенный ряд распределения с.в.? Как отыскивать приближенные значения числовых характеристик с.в.? Как оценивать степень их точности? Это первые, базовые задачи математической статистики.

Вообще, предмет научной дисциплины, которую называют *математической статистикой*, составляют методы обработки экспериментального (статистического) материала с целью извлечения информации, позволяющей делать обоснованные и надежные прогнозы. Дисциплина эта органически связана с теорией вероятностей, с ее понятиями и фактами, и является, в сущности, ее прикладным продолжением.

Цели занятия. Освоиться с методом первичной обработки статистического материала (*группировка*). Познакомиться со статистическими аналогами понятий, введенных в предыдущей лекции (*статистический ряд, статистические среднее и дисперсия*). Понять своеобразие оценки степени точности статистических формул (*доверительный интервал, доверительная вероятность*).

1. Статистический ряд

Пример 1. При 25 проверках октанового числа одного и того же сорта бензина были получены следующие результаты (в первой и других нечетных колонках записан номер проверки, в четных — результат):

Таблица 2

1	38	6	38	11	44	16	42	21	43
2	41	7	41	12	42	17	45	22	37
3	41	8	44	13	41	18	41	23	40
4	42	9	45	14	40	19	44	24	39
5	39	10	41	15	40	20	43	25	41

Требуется составить приближенный ряд распределения с.в. X — октанового числа.

Прежде чем решать задачу, нелишне осознать, что мы действительно имеем случайную величину (лекция 5, п. 1). Каждую проверку можно рассматривать как опыт. В результате опыта появляется то или иное значение с.в. Значения случайны.

С.в. X — дискретная (лекция 5, п. 4), ее возможные значения — целые числа, отделимые интервалами, их количество конечное. В таблице 2 зафиксированы 25 значений с.в. X, **появившихся** в результате эксперимента. Среди них есть повторяющиеся. Надо понимать, что таблица может не содержать некоторых **возможных** значений с.в., — при увеличении числа проверок могут появиться и другие значения.

Приближенный ряд распределения с.в. X, который надо составить, должен иметь такой же вид, как и точный (таблица 1), только во второй строке будут стоять приближенные значения вероятностей.

Решение. Найдем в таблице 2 минимальное и максимальное значения с.в., это будут $x_1 = 37$ и $x_9 = 45$. Запишем во 2-й строке таблицы 3 **различные** появившиеся значения с.в. X в порядке возрастания. В 1-й строке записываются индексы $i = 1, 2, \ldots, 9$ — номера значений x_i.

Подсчитаем, сколько раз появилось каждое значение x_i в серии из $k = 25$ опытов, — получим частоты l_i. Запишем их в 3-ю строку. Относительные частоты l_i/k запишем в последнюю строку таблицы. Последняя колонка служит для контроля правильности подсчетов.

Таблица 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
x_i	37	38	39	40	41	42	43	44	45	—
l_i	1	2	2	3	7	3	2	3	2	25
l_i/k	1/25	2/25	2/25	3/25	7/25	3/25	2/25	3/25	2/25	1

Обсуждение и выводы. Как вы думаете, можно ли считать полученную таблицу 3 приближенным рядом распределения вероятностей данной с.в.? Во-первых, нельзя быть уверенным, что она содержит **все** возможные значения с.в. X. Во-вторых, относительные частоты l_i/k могут сильно отличаться от истинных вероятностей $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$, ведь число опытов мало ($k = 25$). Вспомните, как медленно приближались относительные частоты к вероятностям при подбрасывании монеток, — нужно было провести 100 или даже 500 опытов, чтобы они приблизились достаточно близко.

Так что таблицу 3 можно считать лишь очень грубым приближением к ряду распределения. Поэтому ее называют *статистическим рядом*, а не статистическим рядом распределения.

Тем не менее, эта таблица содержит существенную информацию о с.в.: из нее видно, что значение $x_5 = 41$ появляется гораздо чаще остальных, и значения, близкие к 41, появляются чаще, чем далекие. Значения, лежащие правее 41, в целом появляются немного чаще, чем "левые". Значит, можно предположить, что математическое ожидание с.в. X должно быть чуть больше 41, — может быть, $M \approx 41,3$.

Определение 1. *Простой статистической совокупностью* называется множество значений с.в., **появившихся** в результате эксперимента (серии из k опытов над с.в.), записанных в порядке их появления: $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$.

Обычно простая статистическая совокупность записывается в виде таблицы 2. Это своеобразный протокол эксперимента, в котором зарегистрированы номера опытов $i = 1, 2, \ldots, k$ и значения $x^{(i)}$, которые появились в этих опытах. Иногда ее называют первичной статистической совокупностью.

Обратите внимание — **появившиеся** значения обозначаются индексом сверху $x^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, а **возможные** значения с.в. X, упорядоченные по возрастанию (таблица 1), — индексом снизу x_i, $x = 1, 2, \ldots, n$. Число появившихся значений равно числу опытов k, а число возможных ($n \leq k$) обычно меньше числа опытов, ибо появляющиеся в эксперименте значения могут повторяться.

Определение 2. *Статистическим рядом* с.в. X называют таблицу, в которой указаны **различные** значения с.в., появившиеся в эксперименте и расположенные в порядке возрастания, а также указаны относительные частоты этих значений.

Согласно определению 2, статистический ряд может состоять из 2-х строк (таблица 4), так же, как и ряд распределения с.в. X (таблица 1). Обратите внимание — число значений X_i в таблицах 4 и 1 может быть разное, поскольку в эксперименте могут появиться не все возможные значения с.в., т.е. $m \leq n$.

Таблица 4

X^*	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
p^*	p_1^*	p_2^*	$\ldots$	p_m^*

Вы могли заметить при решении примера 1, что удобнее строить статистический ряд в виде таблицы 3, состоящей не из 2-х, а из 4-х строк. Добавляется строка (первая), в которой фиксируются индексы различных появившихся в эксперименте значений с.в. Добавляется строка частот (третья).

Дополнение. В некоторых руководствах по математической статистике (или ее специальным приложениям — экономической статистике и др.) используется иная терминология. Простая статистическая совокупность называется *выборкой* или выборочной совокупностью, статистический ряд — *вариационным рядом*, появившиеся в эксперименте значения — *вариантами*, относительные частоты — *частостями*.

Это связано с тем, что на практике методы математической статистики обычно используются при изучении с.в., возникающих в результате обследования какой-то группы предметов, выбранных из другой, большей группы. Эта большая группа, дополненная всеми мыслимо возможными предметами такого же рода, называется *генеральной совокупностью*, а выбранная из нее для обследования часть — *выборочной совокупностью*.

К примеру, на склад поступает месячная продукция какого-то завода и из нее отбирается часть (выборка) для проверки изделий на стандартность. Генеральная совокупность в этом случае это некая абстрактная совокупность, в которую мысленно включаются **все возможные** однотипные изделия завода. Вы скажете, — зачем мыслить то, чего нет? Я отвечу — мы мыслим то, что может быть. То, что надо учитывать, как возможность. Ведь проверка изделий на стандартность (пусть она состоит в измерении изделий) даст нам ряд значений с.в. L (размер изделия), **появившихся** в этом эксперименте, среди которых будут не все **возможные** значения этой с.в. Все мыслимо возможные значения с.в. дало бы обследование этой самой генеральной совокупности. Так что абстракция генеральной совокупности правомерна так же, как и абстракция всех возможных значений с.в.

Наконец, почему значения с.в, появляющиеся в эксперименте, называют *вариантами*? Эти значения появляются хаотично и образуют беспорядочно изменяющийся ряд чисел. Русское слово "изменение" звучит по-иностранному, как "варьирование". Отсюда — "варианты" и "вариационный ряд".

Контроль 1. Имеется статистический материал: 17, 18, 16, 16, 17, 18, 19, 17, 15, 17, 19, 18, 16, 16, 18, 18. Записать его в виде статистического ряда и сделать выводы об особенностях распределения с.в. и о расположении матожидания.

2. Группированный статистический ряд

В примере 1 случайная величина X имела небольшое число различных значений — 9, поэтому статистический ряд (таблица 3) получился легко обозримым. Но взгляните на статистический материал, представленный в таблице 8 (п. 8, упражнение 5), — он содержит 34 различных значения, от 117 до 150. В таких случаях статистический ряд становится длинным, и его трудно анализировать. Возникает потребность "ужать" его, сделать обозримым. Процедура, с помощью которой это делается, называется *группировкой*, а результат — *группированным статистическим рядом.*

Группировку обычно осуществляют сразу над первичной статистической совокупностью, не строя статистического ряда. Она состоит в следующем: 1) определяется основной промежуток $[a;\ b]$, содержащий все появившиеся значения с.в., и он разбивается на меньшие $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots$; 2) подсчитываются частоты l_i попадания значений с.в. в каждый интервальчик Δx_i: 3) вычисляются относительные частоты l_i/k. Проделаем все это на простом примере.

Пример 2. В результате эксперимента, состоящего из $k = 25$ опытов над с.в. X, получена простая статистическая совокупность (таблица 2). Произвести группировку[1].

Решение. 1) Просмотрим результаты наблюдений (таблица 2) и выделим наименьшее и наибольшее значения: $x_{min} = 37$; $x_{max} = 45$. Промежуток $[37;\ 45]$ содержит все другие значения. Можно было бы принять его за основной $[a;\ b]$ и разбить на 4 мелких, длины $\Delta x_i = 2$ (о выборе длины Δx_i поговорим чуть ниже). Но лучше немного расширить его, — за начало рекомендуется брать $a = x_{min} - \Delta x_i/2$. В нашем случае $x_{min} = 37$, $\Delta x_i/2 = 1$ и, значит, $a = 36$. Получаем основной промежуток $[36;\ 46]$ и разбиваем его на 5 мелких: $[36;\ 38)$, $[38;\ 40)$, $[40;\ 42)$, $[42;\ 44)$, $[44;\ 46)$.

Выбор длин Δx_i. При большом количестве значений с.в. возникает проблема: какой выбрать длину мелких промежутков Δx_i? Сколько их надо взять, чтобы получился неперегруженный и содержательный ряд? Опыт показывает, что число промежутков Δx_i должно быть $10 \div 20$ (ни много ни мало, обозримо). Существует формула для расчета длины Δx_i, так называемая *формула Стерджеса*:

$$\Delta x_i = \frac{w}{1 + 3,322 \lg k}, \tag{1}$$

где $w = x_{max} - x_{min}$ — *размах выборки*, k — число опытов. В данном примере $w = 45 - 37 = 8$, $k = 25$, $\lg k = \lg 25 \approx 1,398$, и формула (1) дает:

$$\Delta x_i = \frac{8}{1 + 3,322 \cdot 1,398} \approx \frac{8}{1 + 4,644}\frac{8}{5,644} = 1,417$$

Округляя, получаем $\Delta x_i = 1$. Выходит, что в нашем случае Стерджес не рекомендует проводить группировку (число различных значений с.в. невелико — 9). Однако мы продолжим

[1] По существу, в данном примере группировка не требуется.

ее, взяв минимальные длины $\Delta x_i = 2$, ведь у нас учебная цель — проиллюстрировать процесс группировки.

2) Подсчитаем частоты l_i: сколько значений с.в. X попадает в первый интервальчик $\Delta x_1 = [36, 38)$, сколько — во второй $\Delta x_2 = [38, 40)$, и т.д. Процедуру подсчета удобно организовать с помощью рабочей таблицы 5. Алгоритм действий следующий.

Из таблицы 2 берем первое появившееся значение $x^{(1)} = 38$ и смотрим, в какой промежуток Δx_i оно попадает; видим, что на границу 1-го и 2-го промежутков. Условимся относить его в таких случаях к **правому** промежутку, т.е. $x^{(1)} \in \Delta x_2 = [38; 40)$. Фиксируем этот факт жирненькой "точкой" на рабочем поле таблицы 5 в строке, соответствующей второму промежутку.

Берем второе значение $x^{(2)} = 41$, определяем, что оно попадает в третий промежуток $\Delta x_3 = [40; 42)$, ставим "точку" в соответствующей строке.

Продолжаем так и далее. Причем, по мере накопления "точек" их надо располагать в вершинах "квадратика" и далее связывать "черточками", образуя "конверт". Каждый такой "конверт" отсчитывает 10 значений с.в., попадающих в соответствующий промежуток. После того, как будет учтено последнее значение $x^{(k)}$ и рабочее поле будет заполнено, легко подсчитать частоты l_i, записав их в 4-ю колонку таблицы 5.

3) Вычисляем относительные частоты $\frac{l_i}{k}$ (частости) и записываем их в 5-ю колонку таблицы 5. Контроль правильности подсчета осуществляется суммированием частот (должно получиться число опытов k) и частостей (должна получиться единица).

Таблица 5

№№ п/п	Промежутки Δx_i	Рабочее поле	Частоты l_i	Частости l_i/k
1	$[36; 38)$	•	1	$0,04$
2	$[38; 40)$	• • • •	4	$0,16$
3	$[40; 42)$	⊠	10	$0,40$
4	$[42; 44)$	•—• • •	5	$0,20$
5	$[44; 46]$	•—• • •	5	$0,20$
Σ	–	–	25	1

4) Результат группировки представляется в виде итоговой таблицы 6.

Таблица 6

Промежутки Δx_i	$36 \div 38$	$38 \div 40$	$40 \div 42$	$42 \div 44$	$44 \div 46$
Частости $\frac{l_i}{k}$	0,04	0,16	0,40	0,20	0,20

Вы, наверное, обратили внимание на иную запись промежутков Δx_i в таблице 6. Такая запись нередко используется статистиками.

Если промежутков Δx_i много и они не умещаются в одной строке, таблица продолжается добавлением ниже еще двух строк (это вам придется делать в разделе упражнений).

Определение 3. *Группированным статистическим рядом* с.в. X (*интервальным*) называется таблица (пример — таблица 6), состоящая из двух строк: в верхней строке указываются промежутки Δx_i, разбивающие основной промежуток $[a; b]$, включающий все появившиеся в эксперименте значения с.в. X; во второй строке — относительные частоты (частости) попадания значений с.в. X в соответствующий промежуток.

Итог группировки можно представить несколько иначе, в виде *дискретного* группированного статистического ряда, записывая в первой строке не границы промежутков, а их средние значения. Так, если в таблице 6 заменить промежуток $\Delta x_1 = [36; 38)$ его средним значением $x_1 = 37$, промежуток Δx_2 — значением $x_2 = 39$, и т. д., то в результате получим таблицу 7:

Таблица 7

X^*	37	39	41	43	45
p_i^*	0,04	0,16	0,40	0,20	0,20

Контроль 2. Сделать группировку в статистическом материале из контроля 1, взяв $\Delta x_i = 2$. Представить результат в двух формах: в виде интервального группированного статистического ряда и в виде дискретного.

3. Гистограмма. Полигон

Информацию, заключенную в группированном статистическом ряде (интервальном), можно представить графически в виде диаграммы (рис. 1), которую называют *гистограммой*.

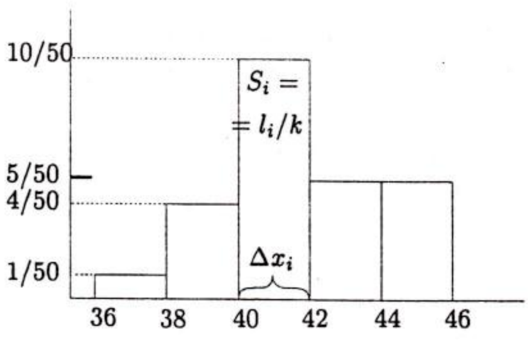


Рис. 1.

Вы видите, что она состоит из "столбиков", построенных на промежутках Δx_i, как на основаниях. Площадь S_i каждого "столбика" равна относительной частоте попадания с.в. в соответствующий промежуток Δx_i: $S_i = l_i/k$. Значит, его высота рассчитывается так: $h_i = S_i/\Delta x_i = (l_i/k) : \Delta x_i = l_i/(k \cdot \Delta x_i)$. (Смею надеяться, что вы знаете формулу площади прямоугольника $S_i = \Delta x_i \cdot h_i$ и умеете выразить из нее $h_i = S_i/\Delta x_i$).

Процедуру построения гистограммы разберем подробно на примере ряда, представленного таблицей 6.

Строим две взаимно перпендикулярные оси и на горизонтальной откладываем промежутки Δx_i, взятые из первой строки таблицы 6 (рис. 1). Понятно, что за начало первого промежутка Δx_1 можно взять любую точку оси.

Берем первый промежуток $\Delta x_1 = [36; 38)$, его длина $\Delta x_1 = 2$. На этом промежутке нам надо построить "столбик" площади $S_1 = l_1/k = 1/25$. Его высота должна быть $h_1 = S_1/\Delta x_1 = (1/25) : 2 = 1/50$. Откладываем на вертикальной оси значение $h_1 = 1/50$ и строим первый "столбик". (Поскольку высота h_1 очень мала, то единица не поместится на вертикальной оси, да она нам и не нужна; за единицу измерения высот "столбиков" можно взять высоту первого, отложив ее на вертикальной оси произвольно).

Берем второй промежуток $\Delta x_2 = [38; 40)$, вычисляем вторую высоту $h_2 = S_2/\Delta x_2 = (4/25) : 2 = 4/50$ и строим второй "столбик", — его высота получается в 4 раза больше высоты первого.

Аналогично рассчитываем высоты остальных трех "столбиков" (они, соответственно, в 10 и в 5 раз больше первого) и строим их. В результате получаем гистограмму (рис. 1).

Определение 4. *Гистограммой* называется графическое представление группированного статистического ряда (интервального) в виде системы прямоугольников, построенных на промежутках Δx_i, как на основаниях. Площадь каждого прямоугольника S_i равна относительной частоте появления значений с.в. в промежутке Δx_i, т.е. $S_i = l_i/k$, а его высота равна $h_i = l_i/(k \cdot \Delta x_i)$.

Свойство гистограммы, простое и важное: *сумма площадей всех "столбиков" равна единице.* Доказательство почти очевидно, ведь сумма всех относительных частот должна быть равна единице:

$$\sum_i S_i = \sum_i (l_i/k) = \frac{\sum_i l_i}{k} = \frac{k}{k} = 1.$$

Графическое, **наглядное представление информации очень удобно**. Взгляните еще раз на рис. 1, вы **видите** распределение относительных частот (площадей) и сразу оцениваете, что правые площади больше левых, а значит, правые значения с.в. возникают в эксперименте чаще левых. Следовательно, математическое ожидание данной с.в. должно лежать немного правее середины основного промежутка, правее точки $x_c = 41$. "Немного" — потому, что правые площади **немного** больше левых, и можно, следовательно, предположить, что $M(X) \approx 4,4$; 4,5.

Полигон — другая форма графического представления статистических рядов, — не интервальных, а дискретных. Это — ломаная, соединяющая точки с координатами (x_i, p_i^*), где x_i — значения с.в., взятые из первой строки статистического ряда, а p_i^* — относительные частоты появления этих значений, взятые из второй строки.

На рис. 2 построен полигон для ряда, заданного таблицей 7. Распределение частот показывается здесь ординатами p_i^* вершин ломаной, а не площадями, как у гистограммы. Поэтому в данном примере полигон в 2 раза "выше" гистограммы. О характере изменения относительных частот можно судить по наклону отрезков ломаной.

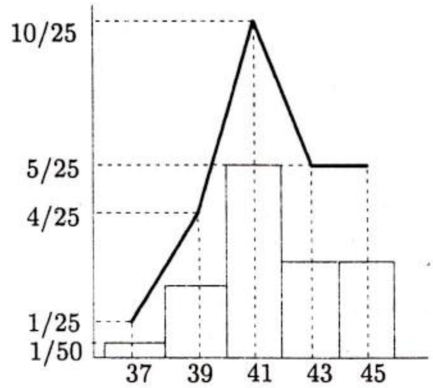


Рис. 2.

Если полигон построен не для группированного (дискретного) статистического ряда, а для статистического ряда некоторой дискретной с.в., то его называют также ***многоугольником распределения относительных частот (частостей)***. Он является статистическим аналогом многоугольника распределения вероятностей с.в. (лекция 5, пп. 1, 5). В качестве примера можете сами построить такой многоугольник для ряда, заданного таблицей 3.

Контроль 3. Построить гистограмму и полигон для статистических рядов (интервального и дискретного), рассчитанных в контроле 2.

4. Статистическое среднее

Итак, вы познакомились с методами первичной обработки статистического материала. Результат — статистический ряд (таблица 3) и группированный статистический ряд (таблица 7).

Следующая задача математической статистики — с помощью статистического ряда найти приближенные значения M^* и D^* математического ожидания M и дисперсии D. данной с.в. X. Сделав это, мы получим сжатую, обобщенную информацию о существенных особенностях изучаемой с.в. А именно, число M^* укажет нам область (около M^*), в которой будут часто[2] появляться значения с.в., а число D^* оценит степень разбросанности появляющихся значений. С помощью этих чисел удобно сравнивать различные с.в., например, сравнивать качество работы (п. 8, упр. 7).

Пример 3. Попробуем найти приближенное значение $M^* \approx M$ для с.в. X примера 1.

Имеем статистический ряд (таблица 3), который можно рассматривать, как приближение ряда распределения (таблица 1). Точное значение M получается из

[2]Не забудьте, что данное истолкование числа M^* относительно и не всегда оправдано (см. лекция 5, п. 6).

ряда распределения по формуле $M = \sum x_i p_i$. Приближенное значение M^* естественно получается из статистического ряда по аналогичной формуле $M^* = \sum x_i p_i^* = \sum x_i (l_i/k)$. При достаточно большом числе опытов k относительные частоты будут близки к соответствующим вероятностям, т.е. $p_i^* = (l_i/k) \approx p_i$, и следует ожидать, что $M^* \approx M$.

Проведем конкретные вычисления с помощью таблицы 3:

$$M^* = 37(1/25) + 38(2/25) + 40(3/25) + 41(7/25) + 42(3/25) + 43(2/25) + \\ +44(3/25) + 45(2/25) = (1/25)(37 \cdot 1 + 38 \cdot 2 + 39 \cdot 2 + 40 \cdot 3 + \\ +41 \cdot 7 + 42 \cdot 3 + 43 \cdot 2 + 44 \cdot 3 + 45 \cdot 2) = 41,28.$$

Итак, $M \approx M^* = 41,28$. Это согласуется с нашим предположением (M должно быть чуть больше 41, — см. п. 1 и п. 3), сделанным при взгляде на статистический ряд (таблица 3) и гистограмму (рис. 1).

Замечание. Заметьте, что мы, в сущности, вычисляли среднее арифметическое появившихся в эксперименте значений с.в. по формуле

$$M^* = (1/k)(x_1 \cdot l_1 + x_2 \cdot l_2 + \ldots + x_m \cdot l_m = \frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(k)}}{k}.$$

Здесь m — число **различных** появившихся значений $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а k — число **всех** появившихся значений $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$, равное числу опытов. Вспомните — эти значения мы условились обозначать с верхними индексами (п. 1).

А теперь я сформулирую теорему, на которую мы, в сущности, опирались выше, решая задачу приближенного отыскания математического ожидания.

Теорема. Пусть с некоторым опытом связана дискретная с.в. X. Пусть опыт повторен k раз и в результате этого эксперимента появились значения $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$. Вычислено среднее арифметическое всех появившихся значений:

$$M^* = \frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(k)}}{k}. \qquad (1)$$

Если число опытов k достаточно велико, то среднее арифметическое близко к математическому ожиданию с.в. X, т.е.

$$M^* \approx M.$$

Обоснование проведем для дискретной с.в. X с конечным числом возможных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ряд распределения такой с.в. задается таблицей 1 (для удобства повторю ее здесь):

Таблица 8

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Статистический ряд имеет вид таблицы 4, в которой число различных появившихся в эксперименте значений с.в. может не совпадать с числом всех возможных значений. Но если число опытов достаточно велико, то можно считать, что и статистический ряд принимает вид:

Таблица 9

X^*	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p^*	$p_1^* = l_1/k$	$p_2^* = l_2/k$	$\dots$	$p_n^* = l_n/k$

Здесь, как и раньше, через l_1 обозначено число повторений в эксперименте первого возможного значения x_1, через l_1 — число повторений второго значения x_2, и т. д.

Среднее арифметическое, вычисленное по формуле (1), можно преобразовать так:

$$M^* = \frac{x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(k)}}{k} = (1/k) \cdot (x_1 \cdot l_1 + x_2 \cdot l_2 + \ldots + x_n \cdot l_n) =$$
$$= x_1 \cdot \frac{l_1}{k} + x_2 \cdot \frac{l_2}{k} + \ldots + x_n \cdot \frac{l_n}{k}.$$

Множители l_i/k — суть относительные частоты появления в эксперименте соответствующих значений x_i. Согласно закону устойчивости частот (лекция 1, п. 2), они близки к вероятностям: $p_i^* = (l_i/k) \approx p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$ (ведь число опытов k достаточно велико). Но тогда и их конечные суммы близки:

$$M^* = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (l_i/k) \approx M = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

(если число опытов много больше числа слагаемых).

Замечание. Вы, наверное, обратили внимание на то, что и в формулировке теоремы и в ее обосновании используется обыденный термин "близка" (что это значит?) и часто звучит фраза "число опытов достаточно велико". Фраза эта хотя и понятная, но, надо признать, "достаточно" неопределенная. Ведь можно представить, что для справедливости теоремы число опытов оказывается настолько громадным, что теорема теряет практический смысл. Сразу скажем, что такой ситуации на практике не наблюдается. Более того, приближенное равенство (2) практически хорошо выполняется уже при нескольких десятках опытов. Однако математическая теорема должна формулироваться точно и доказываться строго. Такая формулировка и такое доказательство есть. Это — знаменитая теорема Чебышева, с которой я познакомлю вас в конце курса (лекция 13). Теорема эта справедлива не только для дискретных, но и для непрерывных с.в. Вы узнаете тогда, что наша фраза заменится иной, точно определенной фразой — "сходимостью по вероятности", а термин "близка" станет не нужным. Сейчас же формальное уточнение понятий и "строгое" доказательство вместо "обоснования" только затемнили бы для вас смысл теоремы.

Определение 5. *Статистическим* или *выборочным средним* случайной величины X называется число M^*, которое определяется по результатам эксперимента

(k опытов) над с.в. X, как среднее арифметическое появившихся в этом эксперименте значений $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$, т. е. по формуле (1).

Примечание. Формула (1) используется в случае, когда статистический материал не обработан и представлен в виде простой статистической совокупности. Если он представлен в виде статистического ряда частот (таблица 4а), то удобнее применять формулу (1′):

$$M^* = \frac{l_1 \cdot x_1 + l_2 \cdot x_2 + \ldots + l_n \cdot x_n}{k}. \tag{1'}$$

Если имеется статистический ряд относительных частот (таблица 4б), то действует формула (1"):

$$M^* = x_1 \cdot p_1^* + x_2 \cdot p_2^* + \ldots + x_n \cdot p_n^*. \tag{1''}$$

Контроль 4. В условиях контрольного упражнения 3 найдите статистическое среднее. Согласуется ли оно с его оценкой, которую вы сделали раньше по гистограмме? Каково расхождение?

5. Статистическая дисперсия

Формула для приближенного определения дисперсии получается аналогичным рассуждением.

Пример 4. Имеем статистический ряд с.в. X (таблица 3) и приближенное значение математического ожидания $M \approx M^* \approx 41,28$, найденное выше. Точное значение дисперсии определяется из ряда распределения (таблица 1) формулой $D = \sum(x_i - M)^2 \cdot p_i$. Приближенное значение определится из статистического ряда аналогичной формулой $D^* = \sum(x_i - M^*)^2 \cdot p_i^*$.

Проведем по этой формуле конкретные вычисления, используя таблицу 3. Вычисления кажутся громоздкими, однако советую вам проследить за каждым шагом, оценивая его правильность. Вы увидите, что это вполне по силам и требует только обостренного внимания и помощи калькулятора.

$$\begin{gathered}
D^* = (37-41,28)^2(1/25) + (38-41,28)^2(2/25) + (39-41,28)^2(2/25) + \\
+(40-41,28)^2(3/25) + (41-41,28)^2(7/25) + (42-41,28)^2(3/25) + \\
+(43-41,28)^2(2/25) + (44-41,28)^2(3/25) + (45-41,28)^2(2/25) = \\
= (1/25)\cdot(4,28^2\cdot 1 + 3,28^2\cdot 2 + 2,28^2\cdot 2 + 1,28^2\cdot 3 + \\
+0,28^2\cdot 7) + (1/25)\cdot(0,72^2\cdot 3 + 1,72^2\cdot 2 + 2,72^2\cdot 3 + \\
+3,72^2\cdot 2) = 0,04\cdot(18,3184 + 10,7584\cdot 2 + 5,1984\cdot 2 + \\
+1,6384\cdot 3 + 0,0784\cdot 7 + 0,5184\cdot 3 + 2,9584\cdot 2) + \\
+0,04\cdot(7,3984\cdot 3 + 13,8384\cdot 2) = 0,04\cdot 113,04 = 4,5216.
\end{gathered}$$

Формулы. Формула, по которой мы только что считали D^*, может быть преобразована так:

$$D^* = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M^*)^2 p_i^* = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M^*)^2(l_i/k) = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i(x_i - M^*)^2}{k} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x^{(i)} - M^*)^2}{k}.$$

Напомню, что здесь x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — возможные значения с.в. X, взятые из ее ряда распределения, $x^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ — значения, появившиеся в эксперименте (они записаны в статистическом ряде), l_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ — число появлений каждого возможного значения x_i в этом эксперименте.

Получается, что D^* вычисляется тоже как среднее арифметическое, только не значений $x^{(i)}$ (как M^*), а квадратов разностей $(x^{(i)} - M^*)^2$. Разности эти называются отклонениями $x^{(i)}$ от M^*.

Определение 6. *Статистической* или *выборочной дисперсией* случайной величины X называется число D^*, которое определяется по результатам серий из k опытов над с.в. X как среднее арифметическое квадратов отклонений появившихся значений $x^{(i)}$ от статистического среднего M^*, т.е. по формуле

$$D^* = \frac{(x^{(1)} - M^*)^2 + (x^{(2)} - M^*)^2 + \ldots + (x^{(k)} - M^*)^2}{k}. \tag{2}$$

Кратко эта формула может быть записана так:

$$D^* = (1/k) \cdot \sum_{i=1}^{k}(x^{(i)} - M^*)^2. \tag{2'}$$

Другой вид, более удобный для вычислений:

$$D^* = (1/k) \cdot \sum_{i=1}^{n} l_i(x_i - M^*)^2. \tag{2''}$$

Сходимость. Статистическая дисперсия D^*, вычисленная по формулам (2′) или (2"), дает практически хорошее приближение к истинной дисперсии D уже при нескольких десятках опытов и позволяет делать достаточно верные прогнозы. С ростом числа опытов k она неограниченно приближается к D, точнее, *сходится по вероятности* к D. Этот факт можно доказать математически, но не здесь.

Контроль 5. В условиях контроля 3 найдите статистическую дисперсию. Найдите D^* двумя путями, используя формулы (2) и (2").

6. Другие оценки M и D

Приближенные значения числовых характеристик с.в. называют их *оценками*. Число M^*, определяемое формулой (1), есть оценка математического ожидания M. Число D^*, определяемое формулами (2) и (2"), есть оценка дисперсии D. Эти оценки не единственные.

Другая оценка M. Оценка M^* получается применением формулы $M^* = \sum x_i p_i^* = \sum x_i(l_i/k)$ к статистическому ряду (таблицы 4а, 4б). Если применить ту же формулу к группированному статистическому ряду (дискретному), то получим другое приближенное значение $M^{**} \approx M$. Условимся называть M^{**} *группированным статистическим средним.*

Проведем вычисления для ряда, заданного таблицей 7:

$$M^{**} = 37 \cdot (1/25) + 39 \cdot (4/25) + 41 \cdot (10/25) + 43 \cdot (5/25) + 45 \cdot (5/25) =$$
$$= (1/25) \cdot (37 \cdot 1 + 39 \cdot 4 + 41 \cdot 10 + 43 \cdot 5 + 45 \cdot 5) = 0,04 \cdot 1043 = 41,72.$$

Сравним $M^{*} = 41,28$ и $M^{**} = 42,72$, — расхождение значительное, почти 0,5. Оно вызвано искажением значений с.в., которое мы допустили при группировке, заменяя истинные значения серединами промежутков. По-видимому, оценка M^{**} "хуже", чем оценка M^{*}. Однако ее легче считать, т.к. группировка уменьшает число слагаемых.

Если с.в. имеет много различных значений, то при увеличении числа опытов k разница между M^{*} и M^{**} должна сглаживаться (это вы заметите, выполняя упражнения). Следовательно, в этих случаях выгоднее пользоваться оценкой M^{**}, как легче вычисляемой. Возникает проблема сравнения оценок, ее мы коснемся в следующем разделе лекции.

Другая оценка D. Оценка D^{*}, вычисленная по формуле (2), обладает небольшим дефектом — она часто занижает дисперсию. Как было отмечено выше, с ростом числа опытов k она все же неограниченно приближается к истинной дисперсии D. Но, пользуясь этой оценкой, вы будете совершать **систематическую ошибку** в меньшую сторону.

Несложный теоретический анализ (у нас пока нет средств его провести) позволяет легко исправить дело. Оказывается, достаточно ввести поправку, умножив D^{*} на множитель, чуть больший единицы, а именно, на $k/(k-1)$, и тем самым чуть увеличив D^{*}. Таким образом получается вторая оценка дисперсии:

$$D^{**} = \frac{k}{k-1} \cdot D^{*}. \tag{3}$$

Будем называть ее *исправленной статистической дисперсией.* С учетом формулы (3), формула (4) принимает вид:

$$D^{**} = \frac{k}{k-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(x^{(i)} - M^{*}\right)^2. \tag{3'}$$

Применим формулу (3) к примеру предыдущего раздела. Статистическая дисперсия в этом примере была $D^{*} = 4,5216$. Число опытов $k = 25$, значит, множитель $(k/k-1) = (25/24)$. Исправленная дисперсия: $D^{**} = (25/24) \cdot 4,5216 = 4,71$. Исправление существенное — почти на две десятых.

При большом числе опытов k поправочный множитель $k/(k-1)$ становится мало отличим от единицы и его применение теряет смысл (в этом вы убедитесь, выполняя упражнения из п. 8).

Общее понятие "оценки". Кроме M и D есть другие числовые характеристики, обобщенно отражающие иные особенности распределения вероятностей с.в.

(например, степень асимметрии ряда распределения). Их называют ***моментами.*** Подробнее о них мы будем говорить в связи с изучением непрерывных с.в. (лекция 10). Для них строятся свои оценки, свои приближенные формулы, сходные по структуре с формулами (1), (2).

Определение 7. *Оценкой* некоторой числовой характеристики ν случайной величины X (дискретной или непрерывной) называется приближенное значение этой характеристики, вычисляемое по определенному правилу или формуле, исходя из значений $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$, появившихся в результате эксперимента над с.в. X. *Оценкой* называют также саму формулу, по которой она считается.

Добавление. Термин "оценка" применяется не только к числовым характеристикам с.в. Его можно применить к любому параметру a, связанному с классом с.в., если параметр этот вычисляется приближенно по результатам эксперимента над с.в. В дальнейшем мы будем подробно изучать некоторые классы с.в. и вы увидите конкретно, что такое параметры с.в. Впрочем, в предыдущей лекции (лекция 5, п. 9) уже рассматривался класс геометрических распределений (число опытов до первого "успеха"), параметром которого было число p — вероятность "успеха". Оценка этого параметра есть относительная частота p^* появления "успеха" в k опытах, она рассчитывается по формуле $p^* = l/k$, где l — число "успехов".

Контроль 6. В условиях контрольного упражнения 3 найдите оценки M^{**} и D^{**}. Сравните их с оценками M^* и D^*, которые вы нашли, выполняя контрольные упражнения 4 и 5. Большие ли расхождения? Чем вызваны расхождения?

7. Сравнение оценок. Точность и надежность оценки

Как сравнивать оценки? Каков точный смысл фразы: "оценка M^{**} "хуже", чем оценка M^*"? Как проверить справедливость этого утверждения?

Для ответа на эти вопросы нужно отчетливо представлять вероятностный характер любой оценки. Возьмем, к примеру, оценку M^*, определяемую формулой (1). Эта формула применяется после проведения эксперимента (серии опытов) над с.в. и дает некоторое значение. После проведения другой серии опытов она даст другое значение M_2^*. Если провести много (k) экспериментов, то получим множество оценок $M_1^*, M_2^*, \ldots, M_k^*$. В каждом из этих экспериментов можно посчитать и вторую оценку M^{**}, получим другое множество $M_1^{**}, M_2^{**}, \ldots, M_k^{**}$. В каждой из этих двух групп будут как близкие к истинному значению M оценки, так и далекие. По-видимому, в первой группе будет больше близких к M оценок, чем во второй. Но что значит "близких"? Это мы сейчас и уточним.

Задача. Имеется с.в. X и известно точное значение некоторой ее числовой характеристики μ (можете представить, что $\mu = M$). Имеется формула (или правило), по которой можно вычислять приближенные значения μ^*. Задана необходимая *степень точности* оценки малым числом $\varepsilon > 0$: если $|\mu^* - \mu| < \varepsilon$, значение оценки считается "хорошим", в противном случае — "плохим". Спрашивается: с какой вероятностью (*надежностью*) формула будет давать "хорошие" оценки?

Решение. Проведем серию из нескольких десятков опытов над с.в. и вычислим оценку μ_1^*. Проведем другую серию опытов и вычислим вторую оценку μ_2^* (для определенности будем предполагать, что число опытов в каждой серии одно и то же). Продолжая так и далее, получим последовательность оценок μ_1^*, μ_2^*, $\ldots$, μ_k^* (число экспериментов обозначено через k).

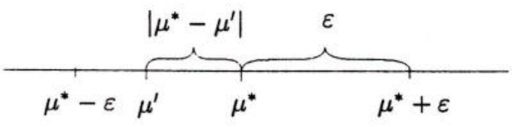
Отберем из полученной последовательности “хорошие” оценки, пусть их число l. Значит, относительная частота появления “хорошей” оценки в серии из k экспериментов над с.в. будет $p^* = l/k$. Если число экспериментов k достаточно велико, то статистическая вероятность p^* решает задачу.

Замечание 1. Решение задачи предполагало знание истинного значения μ. На практике это бывает редко. Вообще, за μ можно принять среднее арифметическое всех найденных оценок, т.е. $\mu = (1/k) \cdot (\mu_1^* + \mu_2^* + \ldots + \mu_k^*)$. Так определенное μ есть результат очень большого числа опытов (k экспериментов, в каждом по несколько десятков опытов), поэтому оно будет очень близко к истинному значению (в вероятностном смысле, конечно).

Замечание 2. Проведенное решение требует очень большого числа опытов, и в этом его практическое неудобство. Существуют другие, универсальные методы решения данной задачи, они основаны на теории непрерывных с.в. В лекции 12 (пп. 5-6) вы познакомитесь с формулами, которые позволяют рассчитывать вероятности “хороших” оценок математического ожидания M и дисперсии D по результатам только одного эксперимента из 20–30 опытов.

Итак, наше решение не имеет большой практической ценности. Но оно имеет психологическую ценность. Я показал его вам для того, чтобы вы почувствовали вероятностную специфику ответа на вопрос о точности оценки. После этого легче будет усвоить два новых, не простых и фундаментальных понятия математической статистики — *доверительный интервал* и *доверительную вероятность*.

Прежде, чем формулировать определение, полезно вспомнить геометрический смысл неравенства $|\mu^* - \mu| < \varepsilon$. Модуль разности двух чисел — это расстояние между точками числовой прямой, изображающими эти числа. Следовательно, наше неравенство означает, что точки μ^* и μ отстоят друг от друга на расстоянии, меньшем, чем ε. Но тогда ясно, что $\mu \in (\mu^* - \varepsilon;\ \mu^* + \varepsilon)$ (рис. 3). В этом случае говорят, что μ *покрывается* интервалом $(\mu^* - \varepsilon;\ \mu^* + \varepsilon)$.



Не геометрическое, формальное рассуждение таково:

$$|\mu^* - \mu| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \mu - \mu^* < \varepsilon \iff$$
$$\iff \mu^* - \varepsilon < \mu < \mu^* + \varepsilon \iff \mu \in (\mu^* - \varepsilon;\ \mu^* + \varepsilon).$$

Определение 8. Пусть X — случайная величина и μ^* — оценка некоторой ее числовой характеристики или параметра μ (точное значение μ, как правило, не известно). Пусть задано число $\varepsilon > 0$, определяющее требуемую степень точности оценки μ^*. Интервал $(\mu^* - \varepsilon;\ \mu^* + \varepsilon)$ называется *доверительным интервалом* для μ, если можно установить, что истинное значение μ покрывается этим интервалом с вероятностью p_ε, т.е. $\mathbf{P}(\mu \in (\mu^* - \varepsilon;\ \mu^* + \varepsilon)) = p_\varepsilon$. Вероятность p_ε называется *доверительной вероятностью* или *надежностью* оценки.

В данном определении тесно связаны два понятия — доверительный интервал и доверительная вероятность, одно без другого не имеет смысла. Они зависят друг от друга в том смысле, что если увеличивать доверительный интервал (увеличивать ε), то есть ослаблять степень точности оценки, то доверительная вероятность p_ε будет или возрастать, или оставаться прежней (объясните, почему?).

Вернемся к вопросу, с которого начали: каков точный смысл фразы: "оценка M^{**} "хуже", чем оценка M^*"? Теперь мы понимаем, что сравнивать оценки можно, лишь уточнив предварительно требуемую степень точности ε. И наш вопрос, следовательно, должен звучать чуть иначе: как понимать фразу — "при заданной точности ε оценка M^{**} "хуже", чем оценка M^*"?

Ответ: если задать доверительный интервал, а также интервал $(M^{**}-\varepsilon;\ M^{**}+\varepsilon)$, то доверительная вероятность для первого интервала будет меньше, чем для второго. Это и означает, что оценка M^* чаще дает близкие к M результаты, чем M^{**}.

Добавление. Проведенное выше сравнение оценок M^* и M^{**} было сделано по критерию их "близости" к истинному значению M. Существуют другие критерии. Так, выше мы сравнивали оценки D^* и D^{**} по критерию "несмещенности". В науке есть теория сравнения оценок по критериям "состоятельности", "эффективности" и "несмещенности", с которой можно познакомиться в литературе по математической статистике.

При практическом оценивании параметров с.в. следует выбирать вид оценки с учетом удобства вычислительной процедуры ее получения. С этой точки зрения бывает выгоднее пользоваться "худшей" оценкой, как вы видели на примере оценки M^{**}.

Контроль 7. С.в. X — число выпадений гербов при троекратном подбрасывании монеты. Что надо делать, чтобы найти оценку M^*? Что надо делать, чтобы найти приближенно доверительную вероятность для доверительного интервала $(M^* - 0,6;\ M^* + 0,6)$? Что произойдет с доверительной вероятностью (и почему), если интервал изменится так: $(M^* - 0,4; M^* + 0,4)$?

8. Упражнения

1. Изучается с.в. Y — число изделий, изготовленных за смену в цехе небольшого предприятия, работающего по заказам. В таблице 10 приведен статистический материал, собранный за 80 рабочих дней.

Таблица 10

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	136	122	132	128	123	133	130	131
2	134	149	138	127	119	137	133	130
3	143	134	128	131	118	133	131	132
4	118	128	122	130	139	145	122	130
5	128	136	132	136	124	117	139	132
6	141	144	138	127	150	144	133	133
7	134	125	140	135	129	138	138	147
8	150	126	135	136	150	135	138	140
9	122	142	127	127	132	145	140	133
10	127	142	144	125	132	145	137	132

Требуется обработать данный статистический материал и составить: а) статистический ряд; б) группированный статистический ряд (интервальный); в) группированный статистический ряд (дискретный). Построить гистограмму и полигон. Найти статистическое среднее M^* и группированное среднее M^{**}. Найти статистическую дисперсию D^* и исправленную дисперсию D^{**}.

2. Двое рабочих изготовили по 70 одинаковых деталей, для которых поле допуска размеров — $50,04 \div 50,28$ мм. Распределения сделанных каждым рабочим деталей по их размерам даны в таблице 11. Качество работы тем выше, чем меньше разброс размеров относительно середины поля допуска. Кто работает лучше?

Таблица 11

Размер детали в *мм*		50,02	50,06	50,10	50,14	50,16	50,18	50,22	50,26	50,28	50,30
Кол-во деталей данного размера	у 1-го рабочего	1	7	9	26	0	14	7	5	1	0
	у 2-го рабочего	0	2	5	13	2	14	19	8	6	1

3. Опыт состоит в том, что монета подбрасывается трижды. С.в. X — число появившихся гербов. Рассчитайте вероятности возможных значений с.в. и составьте ее ряд распределения. С помощью полученного ряда найдите точные значения математического ожидания M и дисперсии D. Каково максимальное отклонение значений с.в. X от M и каково среднее квадратическое отклонение? Покрывается ли M двухсигмовым интервалом? (Это упражнение является подготовительным к следующему, а также имеет цель повторить основные понятия предыдущей лекции).

4. С.в. X — число появившихся гербов при троекратном подбрасывании монеты. Проведите эксперимент, состоящий из 20-ти опытов (каждый опыт — это **три** подбрасывания монеты; всего, следовательно, у вас будет 60 подбрасываний),

и зафиксируйте появившиеся значения с.в. в виде простой статистической совокупности. Проведите первичную обработку вашего статистического материала и составьте статистический ряд. Сравните его с рядом распределения с.в. X, который вы получили в предыдущем упражнении, — можно ли его считать приближенным рядом распределения? Вычислите статистическое среднее M^*, статистическую дисперсию D^* и исправленную дисперсию D^{**} — близки ли они к точным значениям M и D? За степень близости возьмите, например, $\varepsilon = 0,2$.

5. С.в. X — та же, т.е. число появившихся гербов при троекратном подбрасывании монеты. M^* — оценка математического ожидания M, найденная в предыдущем упражнении по результатам 20-ти опытов. Задана требуемая точность оценки числом $\varepsilon = 0,2$. Найдите приближенно доверительную вероятность p_ε.

Указание. Действуйте, как при решении задачи из п. 7. Проведите 10 экспериментов над с.в. X (в каждом по 20 опытов) и подсчитайте частоту l попадания M в доверительный интервал $(M^* - 0,2;\ M^* + 0,2)$ или, что то же, частоту попадания M^* в интервал $(M^* - 0,2;\ M^* + 0,2)$, т.е. в интервал $(1,3;\ 1,7)$. Затем вычислите относительную частоту $p_1^* = l_1/10$, — это будет первое приближение к доверительной вероятности p_ε. Далее, добавьте к первой серии экспериментов еще 10 экспериментов (в каждом по-прежнему по 20 опытов), тем самым вы проделаете вторую серию из 20-ти экспериментов. Рассчитайте так же второе приближение $p_2^* = l_2/20$. Аналогично постройте третью серию из 30-ти экспериментов и рассчитайте $p_3^* = l_3/30$. Так же найдите p_4^* и p_5^*. (В конце курса, в лекции 12 мы сможем решить эту задачу проще и точнее. Тогда и сравним ответы. Не забудьте!).

6. При измерении диаметров 200 валиков после шлифовки получены следующие результаты (значения не дискретной, а непрерывной с.в.):

Таблица 12

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	6,75	6,77	6,73	6,70	6,80	6,74	6,74	6,74	6,83	6,78	6,72	6,75	6,75	6,72	6,81
2	6,73	6,76	6,81	6,81	6,78	6,72	6,76	6,77	6,80	6,76	6,76	6,77	6,76	6,77	6,75
3	6,77	6,77	6,77	6,76	6,81	6,80	6,76	6,74	6,73	6,75	6,76	6,81	6,79	6,72	6,74
4	6,77	6,70	6,77	6,76	6,74	6,73	6,70	6,78	6,72	6,74	6,80	6,82	6,79	6,71	6,78
5	6,78	6,68	6,77	6,75	6,76	6,74	6,76	6,70	6,68	6,80	6,77	6,72	6,77	6,80	6,78
6	6,76	6,75	6,73	6,75	6,76	6,74	6,73	6,80	6,82	6,75	6,76	6,74	6,78	6,71	6,80
7	6,76	6,78	6,74	6,73	6,76	6,76	6,77	6,77	6,76	6,72	6,73	6,78	6,75	6,70	6,74
8	6,71	6,74	6,74	6,77	6,78	6,76	6,77	6,75	6,74	6,72	6,69	6,82	6,73	6,74	6,75
9	6,72	6,77	6,76	6,70	6,76	6,74	6,80	6,76	6,80	6,78	6,76	6,73	6,73	6,70	6,76
10	6,77	6,82	6,74	6,75	6,75	6,74	6,82	6,74	6,80	6,74	6,69	6,76	6,76	6,8 0	6,76
11	6,77	6,76	6,75	6,77	6,70	6,74	6,70	6,76	6,80	6,77	6,76	6,74	6,70	6,7 4	6,81
12	6,78	6,77	6,77	6,74	6,77	6,74	6,71	6,75	6,73	6,74	6,74	6,77	6,71	6,7 3	6,77
13	6,77	6,70	6,78	6,78	6,74	6,72	6,77	6,70	6,71	6,74	6,73	6,77	6,77	6,7 6	6,75
14	6,76	6,75	6,76	6,76	6,72										

Проведите первичную обработку данного статистического материала: определите возрастающую последовательность различных появившихся значений x_1, x_2, ..., x_n, подсчитайте частоту l_i каждого значения, вычислите относительные частоты $p_i^* = l_i/k$ и постройте статистический ряд. С его помощью вычислите статистическое среднее M^* и статистическую дисперсию D^*, используя, конечно, калькулятор.

Затем проведите группировку и постройте группированный статистический ряд (интервальный). После этого перейдите к дискретному ряду и вычислите группированное среднее M^{**}. Вы убедитесь, что при большом числе опытов ($k = 200$) различие между двумя оценками M^* и M^{**} очень мало, и, следовательно, выгоднее пользоваться "худшей", но легче вычислимой оценкой M^{**}.

Указание. В результате группировки у вас должны получиться 9 интервалов и следующие частоты: 2; 15; 17; 44; 52; 44; 14; 11; 1.

Ответ: $M^* = 6,7578$; $D^* \approx 0,0001$; $M^{**} = 6,7578$.

7. Следующее распределение частот было получено в результате эксперимента с разведением мышей:

Таблица 13

Число мышей в одном помете	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота	7	11	16	17	26	31	11	1	1

Найдите выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

8. Из урожая молодой кукурузы, снятого с одного поля, произведена выборка, состоящая из 800 початков. Длины початков измерены в дюймах с точностью до половины дюйма (1 дюйм равен 2,54 *см*). Подсчитаны частоты длин и результат представлен в виде следующего статистического ряда частот:

Таблица 14

Длина початка	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0
Частота	1	1	8	33	70	110	176	172	124	61	32	10	2

Найдите выборочное среднее M^* и выборочное среднее квадратическое отклонение σ^*. Какой процент початков попадает а) в односигмовый интервал $(M^* - \sigma;\ M^* + \sigma^*)$; б) в двухсигмовый; в) в трехсигмовый?

9. Из студентов факультета выбраны случайным образом 100 человек и измерен рост каждого. Полученный статистический материал обработан и представлен в виде следующего группированного ряда частот:

Таблица 15

Рост	$154 \div 158$	$158 \div 162$	$162 \div 166$	$166 \div 170$	$170 \div 174$	$174 \div 178$	$178 \div 182$
Число студентов	10	14	26	28	12	8	2

Найдите оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения случайной величины R — роста молодого человека. Оцените процент студентов, рост которых попадает а) в двухсигмовый интервал; б) в трехсигмовый.

Ответ: $M^* = 166$; $D^* = 33,44$; $\sigma^* = 5,78$.

Лекция 7. Биномиальные случайные величины

Наша следующая **теоретическая задача:** выделить несколько обобщенных типов с.в., часто встречающихся на практике, и абстрактно изучить их свойства. После этого, при встрече с любой конкретной с.в. изученного типа, мы сможем пользоваться готовыми результатами абстрактного анализа (формулами, выводами). Таков общенаучный путь познания реальности.

Цели занятия: понять, как возникают с.в. биномиального типа; установить общие закономерности в распределении их вероятностей; получить формулы для вычисления математического ожидания и дисперсии, минуя ряд распределения. Последняя задача потребует некоторого развития теории (сложение с.в., их независимость).

1. Пример полезности теории

Пример 1. Автоматический станок штампует детали, при этом на каждые 100 деталей приходится, в среднем, 6 бракованных. Из **большой** партии деталей (скажем, несколько сотен), выпущенных станком за смену, выбираются случайным образом 30 деталей для проверки (так называемый *выборочный контроль качества*). Сколько бракованных деталей можно ожидать в этой выборке?

Анализ. Вопрос задачи приводит нас к случайной величине X — числу бракованных деталей в данной выборке. Ее возможные значения: 0, 1, 2, 3, ..., 30. Ответ, очевидно, имеет вероятностный характер: мы должны указать не одно значение, а некоторый промежуток наиболее вероятных значений с.в. Желательно также оценить вероятность появления значений из этого промежутка.

Мы могли бы решить нашу задачу, если бы знали ряд распределения с.в., т.е. знали вероятности p_l каждого значения $l = 0, 2, \ldots, 30$. Но эти вероятности можно рассчитать формулой Бернулли $p_l = \mathbf{P}(W_l) = C_k^l \cdot p^l \cdot (1-p)^{k-l}$ (лекция 4, п. 2,). Убедимся в этом.

Действительно, вспомните: формула Бернулли (Б) применима тогда, когда имеется "сложный" опыт (эксперимент), состоящий в повторении "простого" опыта k раз. Наша с.в. X связана с подобным экспериментом — повторением "простого" опыта (выбор одной детали) $k = 30$ раз. Второе условие применимости формулы (Б) — независимость опытов. Это значит, что вероятность выбора бракованной детали не должна меняться от выбора к выбору. В нашем примере эта вероятность, строго говоря, меняется, ибо каждый следующий выбор происходит из меньшего на единицу числа деталей. Однако изменение незначительное, поскольку выбор делается из **большой**, сравнительно с выборкой, партии деталей[3] (подчеркнуто в условии примера 1). Пожалуй, можно пренебречь малой ошибкой и считать, что

[3]Надо иметь в виду, что большое количество "незначительных" изменений может дать зна-

при выборе каждой из 30-ти деталей вероятность появления бракованной детали одна и та же: $p = 0,06$.Таким образом, мы моделируем с.в. X чуть иной, "близкой" к ней с.в., вероятности значений которой определяются формулой (Б).

Первое решение. Вводим с.в. X — число бракованных деталей в данной выборке, и рассчитываем вероятности p_l ее значений $l = 0,\ 2,\ \dots,\ 30$ приближенно по формуле Бернулли (для вычислений придется использовать калькулятор):

$$p_0 = C_{30}^0 \cdot 0,06^0 \cdot (1 - 0,06)^{30} = 0,94^{30} \approx 0,1563;$$
$$p_1 = C_{30}^1 \cdot 0,06^1 \cdot (1 - 0,06)^{29} = 30 \cdot 0,06 \cdot 0,94^{29} \approx 0,2992;$$
$$p_2 = C_{30}^2 \cdot 0,06^2 \cdot 0,94^{28} \approx 15 \cdot 29 \cdot 0,0036 \cdot 0,1768 \approx 0,2769;$$
$$p_3 = C_{30}^3 \cdot 0,06^3 \cdot 0,94^{27} \approx 10 \cdot 29 \cdot 14 \cdot 0,000216 \cdot 0,1881 \approx 0,1650;$$
$$p_4 = C_{30}^4 \cdot 0,06^4 \cdot 0,94^{26} \approx 5 \cdot 29 \cdot 7 \cdot 27 \cdot 0,0036 \cdot 0,0036 \cdot 0,2001 \approx 0,0710;$$
$$p_5 = C_{30}^5 \cdot 0,06^5 \cdot 0,94^{25} \approx 29 \cdot 7 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 0,0036 \cdot 0,000216 \cdot 0,2129 \approx 0,0236;$$
$$p_6 = C_{30}^6 \cdot 0,06^6 \cdot 0,94^{24} \approx 29 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 25 \cdot 0,000216 \cdot 0,000216 \cdot 0,2265 \approx 0,0056;$$

Далее вычислять не будем, ибо ясно, что вероятности становятся очень маленькими. Запишем получившийся ряд распределения с.в. X:

Таблица 1

X	0	1	2	3	4	5	6	...	30
p	0,1563	0,2992	0,2769	0,1650	0,0710	0,0236	0,0056	...	0,0000

Прогнозы. Из таблицы 1 видно, что наиболее вероятное число бракованных деталей в выборке — единица. Чуть реже будут появляться две бракованных детали. Одна или две детали появятся с вероятностью $\mathbf{P}(X \in [1;\ 2]) = 0,2992 + 0,2769 = 0,5761$, т. е. примерно в шести случаях из десяти.

Ответом на вопрос задачи следует, видимо, считать промежуток $[0;\ 3]$, ибо вероятность появления значений с.в. X из этого промежутка близка к единице: $\mathbf{P}(X \in [0;\ 3]) = 0,1563 + 0,2992 + 0,2769 + 0,1650 = 0,8964$. Примерно в девяти контрольных выборках из десяти число бракованных деталей не превысит 3.

Из таблицы также видно, что вероятности резко убывают, начиная с 6-го значения. В одном случае из десяти число бракованных деталей окажется или 4, или 5: $\mathbf{P}(X \in [4;\ 5]) = 0,0710 + 0,0236 = 0,0946$. Гарантированно можно прогнозировать, что число бракованных деталей практически всегда будет не более пяти, ибо $\mathbf{P}(X \in [0;\ 5]) = \mathbf{P}(X \in [0;\ 3]) + \mathbf{P}(X \in [4;\ 5]) = 0,8964 + 0,0946 = 0,9910$. Лишь в одном случае из ста число таких деталей может выйти за пределы промежутка $[0; 5]$.

чительное изменение. В нашем случае общее число таких малых изменений вероятностей — 29. Но число деталей, из которых производится выборка, много больше — несколько сотен. Поэтому 30-я вероятность p_{30}, вычисленная по формуле Бернулли, будет так же мало отличаться от истинной, как и вторая p_2.

Проведенное выше решение оказалось осуществимым только благодаря современной мощной вычислительной технике. Каких-нибудь два десятка лет назад оно было бы практически невозможным. Сейчас я покажу вам другое решение и вы оцените его поразительную краткость и эффективность.

Решение это основано на использовании не ряда распределения с.в., а его числовых характеристик M, D и σ. Эти характеристики определяются, вообще говоря, рядом распределения по соответствующим формулам (лекция 5, п. 6, (2), п. 7, (3), п. 8, (5)). Однако, для того типа с.в, к которому относится наша с.в. (точнее, та с.в., которой мы моделируем с.в. X), в теории найдены формулы, позволяющие быстро вычислять M и D, минуя ряд распределения. Вот эти спасительные формулы (далее в лекции мы их выведем):

$$M = k \cdot p, \quad D = k \cdot p \cdot (1-p) \tag{1}$$

Второе решение. Вычисляем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$\begin{aligned}
&M = k \cdot p = 30 \cdot 0,06 = 1,8 \\
&D = k \cdot p(1-p) = 1,8 \cdot 0,94 = 1,692 \\
&\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1,692} \approx 1,3
\end{aligned}$$

Вспомним смысл числа M (лекция 6, п. 6): оно условно указывает область (около M), в которой следует часто ожидать появления значений с.в. Дисперсия оценивает степень разброса значений около M (лекция 5, п. 7). В нашем случае дисперсия мала, значит, с большой вероятностью можно предполагать, что часто будут появляться значения 1, 2, 3.

С помощью σ оценивается промежуток практически возможных значений с.в. (лекция 5, п. 8), — это значения, попадающие в интервал $(M-3\sigma, M+3\sigma)$. В нашем случае $3\sigma \approx 3 \cdot 1.3 = 3,9$ и трехсигмовый интервал получается таким: $(1,8-3,9;\ 1,8+3,9) = (-2,1;\ 5,7)$. В этот интервал попадают 6 значений нашей с.в.: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Итак, второе решение дает следующий ответ на вопрос задачи. В данной выборке следует ожидать 1, 2 или 3 бракованных изделия. И можно практически гарантировать, что их число не превысит 5.

Сравнение решений. Первое решение дает более информативный ответ, нежели второе. Оно позволяет узнать любые вероятности. Но второе проще и короче. И по сути дает тот же ответ, что и первое. Чуть дальше (п. 4) вы узнаете, что по результатам второго решения тоже можно оценить вероятности. Второе решение иллюстрирует практическую ценность числовых характеристик с.в., о чем я говорил вам раньше (лекция 5, п. 6).

Контроль 1. Какое количество бракованных деталей можно ожидать в выборке из 10-ти деталей? Каков промежуток, за пределы которого не выйдет число бракованных деталей?

2. Условия возникновения биномиальных с.в. (б.с.в.)

В условиях примера 1 можно было бы изменять выборку (увеличивать или уменьшать число выбранных деталей k) или менять вероятность брака p — мы имели бы другие с.в. Таким образом получаются разнообразные однотипные с.в. Их общее свойство: вероятности их значений достаточно точно рассчитываются формулой (Б) — формулой Бернулли.

В практических задачах часто возникают подобные с.в. Все они объединяются в класс так называемых *биномиальных* с.в. Три условия, при выполнении которых применима формула (Б), мы припомнили выше: повторяемость опытов; их независимость; с.в. — число "успехов". Эти условия и составляют абстрактное определение данного класса с.в.

Определение 1. Имеется эксперимент, который состоит в повторении некоторого опыта k раз. Каждый раз при повторении опыта может появиться событие A ("успех"), а может не появиться ("неуспех"). Опыты независимые: вероятность "успеха" $\mathbf{P}(A) = p$ не меняется от опыта к опыту. Случайная величина X_σ — число "успехов" в эксперименте — называется *биномиальной* (сокращенно — *б.с.в.*), или *Бернуллиевской.* Числа k и p называются *параметрами* б.с.в.

Абстрактный **ряд распределения б.с.в** X_σ. выглядит так (для краткости обозначено $1 - p = q$):

Таблица 2

X_σ	0	1	2	...	l	...	k
p	q^k	$C_k^1 p^1 q^{k-1}$	$C_k^2 p^2 q^{k-2}$	...	$C_k^l p^l q^{k-l}$	...	p^k

При $k = 30$ и $p = 0,06$ ($q = 1 - 0,06 = 0,94$) из таблицы 2 после вычислений получается таблица 1 — конкретный ряд распределения с.в. X примера 1.

Примечание. Термин "биномиальная" происходит от формулы бинома Ньютона

$$(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1} b^1 + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots + C_k^l a^{k-l} b^l + \ldots + b^k.$$

Если в этой формуле положить $a = q$ и $b = 1 - q = p$, то слагаемые превратятся в вероятности из нижней строки таблицы 2. Сумма этих вероятностей равна единице, ибо $(a+b)^k = (p+q)^k = 1$. Следовательно, основное свойство ряда распределения (лекция 5, п. 5, (1)) выполняется.

Как было сказано, три условия возникновения б.с.в. выполняются во многих ситуациях, встречающихся на практике. Вот еще один из распространенных примеров (упрощенный, конечно):

Пример 2. Орудие попадает в мишень, в среднем, 3 раза из 10. Каково будет распределение числа попаданий при 5-ти выстрелах? Какие прогнозы можно сделать, исходя из этого распределения?

Решение. Перед нами с.в. Y — число попаданий. Проверим выполнение трех условий определения 1.

Читаем определение и сопоставляем его с нашим примером. С.в. Y связана с экспериментом, состоящим в повторении опыта (одного выстрела) 5 раз, значит, $k = 5$. Каждый раз может появиться или нет событие A (попадание в мишень).

Вероятность попадания постоянна и равна $p = 0,3$. С.в. Y — число попаданий, т. е. число "успехов". Условия выполнены, с.в. Y — биномиальная.

Наша с.в. имеет 6 значений: 0, 1, 2, ... , 5. Рассчитаем их вероятности по формуле (Б), или, что то же, по формулам из нижней строки таблицы 2, полагая в них $k = 5$, $q = 0,7$, $p = 0,3$. Расчет не трудный, ибо число опытов k невелико:

$$p_0 = 0,7^5 = 0,16807;$$
$$p_1 = 5 \cdot 0,7^4 \cdot 0,3 = 0,36015;$$
$$p_2 = 10 \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^2 = 0,3087;$$
$$p_3 = 10 \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^3 = 0,1323;$$
$$p_4 = 5 \cdot 0,7 \cdot 0,3^4 = 0,02835;$$
$$p_5 = 0,3^5 = 0,00243;$$

Составляем ряд распределения:

Таблица 3

Y	0	1	2	3	4	5	$\sum$
p	0,16807	0,36015	0,3087	0,1323	0,02835	0,00243	1,00000

Изобразим этот ряд в виде многоугольника распределения (рис. 1).

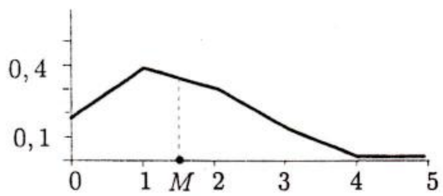


Рис. 1

Прогнозы. Из рис. 1 сразу видно, что следует ожидать 1-2 попадания из пяти — их суммарная вероятность больше половины. Ожидать более 3-х попаданий не реально.

Таблица 3 содержит более определенную информацию о степени ожидаемости тех или иных значений. Так, $\mathbf{P}(Y \in [1;2]) = p_1 + p_2 = 0,36015 + 0,3097 = 0,66885$, следовательно, если провести много серий из 5-ти выстрелов, то примерно в 2/3 серий будет 1-2 попадания. Вероятность более 3-х попаданий: $p_4 + p_5 = 0,02835 + 0,00243 = 0,03078$. Значит, более 3-х попаданий может быть в 100 сериях раза три. Ни одного попадания — раз 17! Многовато.

Замечание. К тем же выводам мы могли прийти быстрее, используя формулы (1): $M = kp = 5 \cdot 0,3 = 1,5$ и $D = kpq = 1,5 \cdot 0,7 = 1,05$. Сделайте это сами.

Контроль 2. Опыт состоит в том, что подбрасываются три однородные игральные кости. С.в. X_1 — сумма выпавших очков, с.в. X_2 — число костей с четными очками. Какая из этих с.в. биномиальная? Обоснуйте. Составьте ее ряд распределения, постройте многоугольник распределения и сделайте прогнозы.

3. Как распределение б.с.в. зависит от ее параметров?

Посмотрите на рис. 1: он наглядно показывает распределение вероятностей с.в. Y — числа попаданий при пяти выстрелах. С.в. Y биномиальная с параметрами $k = 5$ и $p = 0,3$. Распределение имеет вид несимметричной "горки", вершина которой находится почти над математическим ожиданием $M = 1,5$. Интересно, характерна ли подобная "горка" для любой б.с.в.?

Давайте проследим , как изменяется распределение б.с.в. при изменении параметров k и p. Вначале станем изменять один параметр p, оставляя неизменным k. Потом — наоборот.

Зависимость от p. На рис. 2 показаны многоугольники распределения при фиксированном $k = 5$ и меняющемся $p = 0,1;\ 0,3; 0,5$. Вы видите, что при малом p "горка" превращается в "обрыв". При возрастании p "горка" сдвигается вправо и уменьшает высоту, при $p = 0,5$ становится симметричной.

Если продолжить увеличение p от 0,5 до 1, то картинка симметрично отразится относительно прямой, проходящей через "середину" значений с.в., т.е. через точку $c = 2,5$. Вершина "горки" продолжит движение вправо и станет набирать высоту, превращаясь в "обрыв" при значениях p, близких к 1.

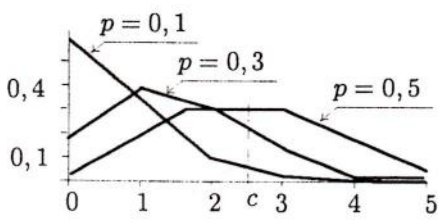


Рис. 2

Симметричное отражение рис. 2 происходит в силу своеобразной "симметричности" формулы Бернулли. К примеру, при $p = 0,3$ наибольшее значение вероятности p_1 (вершина "горки") находится в точке $x_1 = 1$: $p_1 = 5 \cdot 0,3 \cdot 0,7^4 \approx$ (рис. 2). Если же $p = 0,7$, то наибольшее значение остается тем же: $p_4 = 5 \cdot 0,7^4 \cdot 0,3$, но сдвигается в точку $x_4 = 4$. Так же меняются местами и остальные значения: p_0 с p_5 и p_2 с p_3 (объясните это сами).

Нетрудно согласиться, что если зафиксировать любое другое значение k и менять p от малых значений к $p = 0,5$ и далее к значениям, близким единице, то характер изменения "горки" будет тот же: она сдвигается вправо, уменьшая высоту, при $p = 0,5$ становится симметричной, потом набирает высоту, превращаясь в "обрыв".

Зависимость от k. Зафиксируем теперь вероятность p и станем увеличивать число опытов k. При этом будет расти математическое ожидание $M = k \cdot p$ и, следовательно, вершина "горки" двинется вправо. Станет расти и дисперсия $D = k \cdot p \cdot q$, т. е. значения с.в. будут широко "разбрасываться" около M. Вероятности распределятся среди большего числа значений и, значит, вершина "горки" понизится, а сама "горка" станет более пологой, плосковершинной. На рис. 3 показана эта динамика при фиксированном $p = 0,3$ и меняющемся $k = 5;\ 10;\ 15;\ 30$.

Заметьте, "горка" никогда не станет симметричной, левая ее "половина" всегда будет чуть-чуть выше правой. В этом можно убедиться, если посчитать (разумеется, с помощью хорошего калькулятора) вероятности значений с.в., близких к M. К примеру, при $k = 30$ ближайшие к $M = k \cdot p = 30 \cdot 0,3 = 9$ значения с.в. — это $x_8 = 8$ и $x_{10} = 10$; их вероятности: $p_8 = C_{30}^{8} \cdot 0,3^8 \cdot 0,7^{22} \approx 0,1501$ и $p_{10} = C_{30}^{10} \cdot 0,3^{10} \cdot 0,7^{20} \approx 0,1416$; высота же "горки" — $p_9 \approx 0,1573$ (рис. 3). Аналогично $p_7 \approx 0,1219 > p_{11} \approx 0,1103$, $p_6 \approx 0,0829 > p_{12} \approx 0,00749$, и т.д.

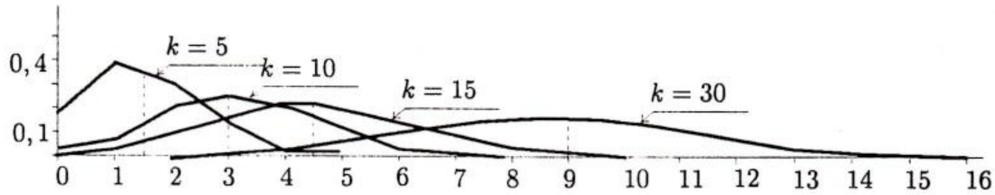


Рис. 3

Вывод. Многоугольник распределения биномиальной с.в. всегда имеет вид "горки", симметричной в случае $p = 0,5$. Вершина "горки" находится примерно над математическим ожиданием M. С ростом параметра k вершина сдвигается вправо, "горка" уменьшает высоту и становится все более "широкой" и пологой, оставаясь не строго симметричной.

Контроль 3. Используя рис. 2, постройте "горку" при $p = 0,7$ и $k = 5$. Может ли "горка" превратиться в "обрыв" при больших значениях k? Обоснуйте.

4. Правило "трех сигм" для б.с.в.

Вы, наверное, заметили, что при изучении конкретных с.в. часто возникает практический вопрос: какова вероятность появления значений с.в. в некотором промежутке? Существует удобное правило, позволяющее быстро и достаточно точно отвечать на этот вопрос. Правило это применимо для различных типов с.в. и, в частности, для биномиальных. Звучит оно так:

Правило "3σ". Если биномиальная с.в. X связана с экспериментом, состоящим из достаточно большого числа опытов k, в которых вероятность "успеха" p не слишком мала, то при любом выполнении этого эксперимента появившееся значение б.с.в. практически достоверно попадает в интервал $(M - 3\sigma, M + 3\sigma)$. Точнее, вероятность этого события оценивается так:

$$\mathbf{P}(X \in (M - 3\sigma, M + 3\sigma)) \approx 0,9972 \tag{2}$$

Добавление. Вероятности попадания б.с.в. в двухсигмовый и в односигмовый интервалы тоже можно оценить подобным образом:

$$\mathbf{P}(X \in (M - 2\sigma, M + 2\sigma)) \approx 0,954 \tag{3}$$

$$\mathbf{P}(X \in (M - \sigma, M + \sigma)) \approx 0,683 \tag{4}$$

Последнее равенство оценивает вероятность появления значений 1, 2, 3 в примере 1 так: примерно 7 раз из десяти. В сущности, так же, как и вероятность, найденная из ряда распределения: $p_1 + p_2 + p_3 = 0,7411$.

Соотношения (2), (3), (4), как и само правило "3σ", будут обоснованы при изучении непрерывных с.в. (лекция 11, п. 8, лекция 12, п. 4).

Практическая достоверность. Равенство (2) устанавливает, что значения б.с.в. могут выйти за пределы трехсигмового интервала лишь примерно 2–3 раза на тысячу экспериментов. Вероятность 0,997 и принято считать обеспечивающей практическую достоверность вероятностных прогнозов. В дальнейшем, когда встретится фраза "практически достоверный прогноз", вы будете помнить, что доверительная вероятность этого прогноза именно 0,997 или больше.

Примечание. В формулировке сказано, что правило хорошо оценивает вероятность попадания значений с.в. в трехсигмовый интервал при условии "достаточно большого числа опытов". В дальнейшем (лекция 11, п. 8 и лекция 12, п. 4) вы узнаете, что эту фразу можно уточнить так: число опытов должно удовлетворять неравенству $k > (10/p)$. Из данного неравенства следует, что требуемое число опытов зависит от вероятности p — чем меньше p, тем больше число опытов k. Тогда же вы узнаете и смысл этого неравенства — оно определяет достаточную для выполнения правила "3σ" степень симметричности распределения б.с.в. Нижеследующие примеры проиллюстрируют сказанное.

Примеры. Проверим, как выполняется правило "3σ" в условиях примера 2, где рассматривалась б.с.в. Y с параметрами $k = 5$ и $p = 3$ (многоугольник распределения показан на рис. 1). Для этого надо определить трехсигмовый интервал и вычислить вероятность попадания с.в. Y в этот интервал, а затем сравнить эту вероятность с той, которая указана правилом "3σ". Сделаем это.

Вычислим числовые характеристики:

$$M = kp = 5 \cdot 0,3 = 1,5, \quad D = kpq = 1,5 \cdot 0,7 = 1,05, \quad \sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1,05} \approx 1,0247.$$

Трехсигмовый интервал получается таким:

$$(M - 3\sigma, M + 3\sigma) \approx (1,5 - 3 \cdot 1,0247;\ 1,5 + 3 \cdot 1,0247) = (-1,5741;\ 4,5247).$$

Поскольку с.в. Y принимает только целые неотрицательные значения, то ее попадание в найденный трехсигмовый интервал равносильно попаданию в промежуток $[0;4]$. Вероятность этого попадания легко найти с помощью ряда распределения (таблица 3):

$$\mathbf{P}(Y \in [0;4]) = p_0 + p_1 + p_3 + p_4 = 1 - p_5 = 1 - 0,00243 = 0,99757.$$

Правило "3σ" указывает вероятность 0,9972. Разница крохотная — 0,00037!

Замечание 1. Не обратили ли вы внимание на малое количество опытов $k = 5$, в то время как правило требует, чтобы число опытов было "достаточно большое"? Оказывается, что 5 опытов для нашего случая это и есть **достаточно** большое их число. Это число опытов достаточно потому, что другой параметр $p = 0,3$ **не слишком мал**. Не малость вероятности "успеха" p оговаривается в приведенной формулировке (обратите на это внимание!).

Замечание 2. Если вы читали примечание, сделанное мелким шрифтом чуть выше, то можете проверить выполнение неравенства $k > (10/p)$ и обнаружите, что оно не справедливо. А правило, тем не менее, действует очень хорошо. Следовательно, уточнение правила данным неравенством сужает его возможности. Неравенство $k > (10/p)$ определяет лишь достаточные условия применимости правила.

Проверим теперь, насколько хорошо правило "3σ" оценивает вероятность в условиях примера 1. Имеем б.с.в. X с параметрами $k = 30$ и $p = 0,06$. Число опытов k здесь значительно больше, чем в предыдущем примере, и можно думать, что правило даст более точную оценку. Но вероятность p мала!

В первом разделе лекции (второе решение) был найдены математическое ожидание с.в. X — $M = 1,8$, дисперсия $D = 1,692$ и $\sigma = 1,3$. Трехсигмовый интервал получился таким: (-2,1; 5,7), в него попадают 6 значений с.в. X: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Там же было установлено с помощью ряда распределения (таблица 1), что точная вероятность попадания с.в. X в трехсигмовый интервал равна 0,9910. Отличие от правила "3σ" — 0,0062!

Отличие как будто небольшое, но оно провоцирует существенную ошибку в прогнозе. Если руководствоваться оценкой 0,9972, то попадание с.в. X в трехсигмовый интервал практически достоверно и выход за его пределы возможен лишь 2-3 раза на тысячу экспериментов. Точная же вероятность 0,9910 указывает нам, что выход значений с.в. X за пределы трехсигмового интервала будет около 9 раз на тысячу, или 1 раз на **сто** экспериментов. Согласитесь, что это существенная разница.

Итак, для данного примера 30 опытов не являются достаточно большим количеством для успешного применения правила "3σ". Причина — очень малое значение $p = 0,06$.

Вот здесь-то и помогает неравенство $k > (10/p)$. С его помощью можно рассчитать достаточное число опытов: $k > (10/0,06) \iff k > (1000/6)$, откуда следует, что $k > 167$. Многовато!

Контроль 4. Монетку подбрасывают 100 раз. Какое число гербов можно практически гарантировать? Как часто можно ожидать, что число гербов окажется близко к пятидесяти, точнее — в пределах [45; 55]?

5. Как доказать формулу $M_\sigma = k \cdot p$?

Главная часть лекции нами пройдена. Вы узнали все существенное о биномиальных с.в.: какие с.в. собираются в класс биномиальных, каковы особенности распределения их вероятностей. Вы поработали с конкретными примерами б.с.в. и научились делать обоснованные прогнозы. Решающую помощь в этом оказывали две простые формулы (1): $M = k \cdot p$ и $D = k \cdot p \cdot (1 - p)$. Не любопытно ли вам теперь узнать, как получены эти замечательные формулы?

Идея вывода. Если бы мы не знали этих формул, а надо было найти математическое ожидание M б.с.в. $X\sigma$, пришлось бы использовать ряд распределения (таблица 2). И, согласно определению математического ожидания (лекция 5, п. 6, (2): $M = \sum x_i \cdot p_i$), пришлось бы вычислять длинную сумму:

$$M(X_\sigma) = 0 \cdot C_k^0 \cdot p^0 \cdot q^k + 1 \cdot C_k^1 \cdot p^1 \cdot q^{k-1} + 2 \cdot C_k^2 \cdot p^2 \cdot q^{k-2} + \ldots + k \cdot C_k^k \cdot p^k \cdot q^0.$$

Теперь же мы знаем, что эта "страшная" сумма равна просто-напросто произведению параметров: $M_\sigma = k \cdot p$! Неожиданно и приятно!

Как же получилась эта красивая и полезная формула? Сейчас я раскрою вам **идею** вывода формулы. В следующих двух разделах лекции мы реализуем эту идею. Понять идею, организующую рассуждения, очень важно, ибо после этого станет виден весь предстоящий путь и понятны причины тех или иных действий на этом пути.

Идея, как всякая идея, проста. Представим с.в X_σ в виде суммы k штук некоторых простейших с.в.: $X_\sigma = I_1 + I_2 + \ldots + I_k$, математические ожидания которых легко вычислимы[4] (все они окажутся равными p). После этого вычислим математическое ожидание с.в. X_σ, как сумму математических ожиданий простейших слагаемых, т.е. $M(X_\sigma) = p + p + \ldots + p = k \cdot p$. Поясню эту идею примером.

Пример 3. Опыт состоит в подбрасывании трех монет. С.в. Z — число появившихся гербов. Очевидно, эта с.в. биномиальная, ее значения — 0, 1, 2, 3. Найдем математическое ожидание с.в. Z.

Введем три простейших с.в.: I_1 — число гербов при подбрасывании 1-й монеты, I_2 — второй, I_3 — третьей. Очевидно, все эти три с.в. могут принимать только два значения — 0 и 1. Действительно, первая монетка может упасть или гербом вверх, и тогда с.в. I_1 примет значение 1, или решкой, и тогда появляется значение 0. Вероятности этих значений: $p = 0,5$ и $q = 0,5$.

Нетрудно понять, что значения с.в. Z получаются сложением значений, которые приняли в опыте простейшие с.в. I_i, т. е. $Z = I_1 + I_2 + I_3$. Например, если в результате опыта появилось два герба (с.в. Z приняла значение 2), то две монетки упали гербом вверх, одна — решкой. Следовательно, две простейшие с.в. приняли значения 1 и 1, а одна — 0. Значение 2, которое приняла с.в. Z, получается сложением значений, принятых простейшими с.в.: 2=1+1+0.

Математические ожидания всех трех простейших с.в. одинаковы: $M(I_i) = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 = 0,5$, $i = 1, 2, 3$. Складываем их: $M(Z) = 0,5 + 0,5 + 0,5 = 1,5$. Все!

Программа. Теперь предстоит обосновать действия, которые мы делали в примере 3. Мы должны дать абстрактное определение *суммы* случайных величин. Для биномиальных с.в. надо ввести понятие *простейших* с.в. Далее, — установить, что **любая** биномиальная с.в. представима в виде суммы простейших. Затем, — доказать теорему о том, что математическое ожидание суммы с.в. равно сумме математических ожиданий слагаемых. В качестве следствия этой теоремы и получится красивая формула $M_\sigma = k \cdot p$. Таким же путем будет получена и вторая красивая формула для дисперсии б.с.в. — $D_\sigma = k \cdot p \cdot q$.

Контроль 5. Орудие стреляет в мишень два раза. Вероятность попадания ка-

[4]Данная идея следует общенаучному методу исследования сложных явлений — сведению их к простым, более понятным и доступным для анализа или решения. Этот метод носит название редукции (от латинского reductio - возвращение, приведение обратно). Мы неоднократно использовали этот метод ранее, например, рассчитывая вероятности сложных событий с помощью теорем сложения и умножения (лекция 3). Широко применялся он и в курсе анализа (вычисление производных, интегралов, решение дифференциальных уравнений с помощью подстановок и др.)

ждый раз одинакова и равна $p = 0,7$. Случайная величина Y — число попаданий. Проверьте, что с.в. Y — биномиальная. Введите простейшие с.в. и представьте Y, как сумму простейших (обоснуйте). Вычислите математические ожидания простейших с.в. Вычислите математическое ожидание $M(Y)$. После этого вычислите $M(Y)$ с помощью ряда распределения.

6. Сумма случайных величин. Биномиальная с.в. — сумма простейших

В этом разделе мы выполним первую часть программы: определим понятия суммы с.в. и простейших с.в. и установим теорему о разложении б.с.в. в сумму простейших.

Прежде, чем определять сумму с.в., вспомним точное определение случайной величины. Это — функция на полной группе несовместимых событий некоторого опыта (лекция 5, п. 3).

К примеру, выше мы рассматривали с.в. Z — число гербов в опыте с трехкратным подбрасыванием монеты. Полная группа несовместимых событий этого опыта состоит из 4-х событий: A_0 — ни одного герба, A_1 — ровно один герб, A_2 — ровно два герба, A_3 — три герба. Случайная величина Z ставит в соответствие каждому событию этой группы число 0, или 1, или 2, или 3, соответственно. Это и есть задание числовой функции на группе событий.

Если случайная величина это функция, то сумму с.в. естественно определить, как сумму функций (соответствующие значения складываются).

Определение 2. Пусть с некоторым опытом связаны несколько случайных величин — X_1, X_2, ..., X_k. *Суммой* этих с.в. называется новая с.в. X, которая в результате опыта принимает значение, равное сумме появившихся значений всех данных с.в. Обозначение:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k, \text{ или } X = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

Свойства суммы с.в. те же, что и свойства сложения чисел, поскольку значения суммы с.в. получаются сложением чисел — значений слагаемых с.в. Значит, значения суммы с.в. не зависят от того, в каком порядке будут складываться случайные величины.

1^0. $X_1 + X_2 = X_2 + X_1$ (коммутативность);

2^0. $X_1 + X_2 + X_3 = X_1 + (X_2 + X_3) = (X_1 + X_2) + X_3$ (ассоциативность).

Примеры суммы с.в. были выше. Вот еще один: с.в. X — сумма очков, выпавших при подбрасывании двух игральных костей. Очевидно, что, согласно определению 2, $X = X_1 + X_2$, где с.в. X_1 — число очков, выпавших на первой кости, X_2 — на второй. Здесь сумма X не является биномиальной с.в., как это было в предыдущих примерах.

Введем теперь понятие *простейшей с.в.* Обратите внимание: эти с.в. определяются именно в тех опытах (экспериментах), в которых появляются биномиальные с.в.

Определение 3. Пусть имеется эксперимент, который состоит в повторении некоторого опыта k раз. Пусть каждый раз может появиться или нет некоторое событие A ("успех" опыта).

Определим k *простейших*[5] *с.в.* $i_1, i_2, \ldots, i_k$, каждая из которых принимает только **два** значения — 0 и 1 — следующим образом:

если в **первом** опыте появляется "успех", то первая с.в. i_1 принимает значение 1, если "неуспех", то 0 (независимо от того, каковы будут результаты остальных опытов эксперимента!);

если во **втором** опыте появляется "успех", то вторая с.в. i_2 принимает значение 1, если "неуспех", то 0; и т. д.

Теорема 1. Любая биномиальная с.в. X_6 разлагается в сумму простейших с.в.:

$$X_\sigma = i_1 + i_2 + \ldots + i_k \tag{5}$$

Доказательство почти тривиально. Согласно определению биномиальной с.в. (определение 1), X_σ связана с экспериментом, состоящим в повторении некоторого опыта k раз, причем, каждый раз может появиться или нет событие A ("успех" опыта). В этих условиях определение 3 вводит k простейших с.в. $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Составим новую с.в. $i = i_1 + i_2 + \ldots + i_k$. Очевидно, что $i = X_\sigma$, ибо при любом выполнении эксперимента с.в. X_σ и с.в. i принимают одинаковые значения (X_σ принимает значение, равное числу "успехов" эксперимента, а i — значение, равное сумме единиц, число которых равно числу "успехов" в том же эксперименте).

Контроль 6. Эксперимент состоит в подбрасывании трех игральных костей. С.в. X — число появившихся "шестерок". Покажите, что с.в. X биномиальная. Сколько простейших с.в. связано с данным экспериментом? Определите их. Докажите, что с.в. X есть сумма простейших.

7. Математические ожидания суммы с.в. и биномиальной с.в.

Здесь мы установим общую теорему о сложении математических ожиданий дискретных с.в., из которой, как следствие, получим нужную нам формулу для вычисления математического ожидания биномиальной с.в.

Теорема 2. Пусть с некоторым опытом связаны две дискретные с.в — X и Y, а также третья с.в. — их сумма $X + Y$. Математическое ожидание суммы с.в. равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y) \tag{6}$$

Доказательство проведем для самого простого случая, когда слагаемые с.в. имеют всего два разных значения: X может принимать в опыте значение x_1 с

[5]В научной литературе с.в. i_l, $l = 1, 2, \ldots, k$ называют l-м *индикатором* "успеха".

вероятностью p_1 и другое значение x_2 с вероятностью p_2; Y — значения y_1 и y_2 с вероятностями q_1 и q_2, соответственно. Для с.в., имеющих большее число значений, доказательство идет аналогично, только с большим формальным усложнением. Вы сможете в этом убедиться, выполнив контрольное упражнение в конце данного раздела.

1. Запишем ряды распределения слагаемых и вычислим их математические ожидания:

Таблица 4

X	x_1	x_2
p	p_1	p_2

Таблица 5

Y	y_1	y_2
q	q_1	q_2

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 \qquad M(Y) = y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2$$

2. Составим ряд распределения суммы с.в. и вычислим ее математическое ожидание. Значения суммы $X+Y$, согласно определению 2, получаются сложением любого значения с.в. X с любым значением с.в. Y: x_1+y_1, x_1+y_2, x_2+y_1, x_2+y_2. Обозначим вероятности этих значений через p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}, соответственно. Ряд распределения с.в. $X+Y$ и математическое ожидание получаются такими:

Таблица 6

$X+Y$	x_1+y_1	x_1+y_2	x_2+y_1	x_2+y_2
p	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}

$$M(X+Y) = (x_1+y_1)p_{11} + (x_1+y_2)p_{12} + (x_2+y_1)p_{21} + (x_2+y_2)p_{22}.$$

3. Наша цель — доказать справедливость равенства (6), которое для двузначных с.в. X и Y принимает вид:

$$(x_1+y_1)p_{11} + (x_1+y_2)p_{12} + (x_2+y_1)p_{21} + (x_2+y_2)p_{22} = x_1p_1 + x_2p_2 + y_1q_1 + y_2q_2.$$

Чтобы понять, когда это равенство может быть справедливым, преобразуем левую часть, раскрыв скобки и сделав группировку так:

$$x_1(p_{11}+p_{12}) + x_2(p_{21}+p_{22}) + y_1(p_{11}+p_{21}) + y_2(p_{12}+p_{22}) = x_1p_1 + x_2p_2 + y_1q_1 + y_2q_2.$$

Теперь видно, что суммы вероятностей, стоящие в скобках в левой части, должны равняться соответствующим вероятностям, стоящим в правой части. Убедимся, что в наших условиях это так и есть.

4. Покажем, что $p_{11} + p_{12} = p_1$.

Рассмотрим три события: $X = x_1$ — в результате опыта с.в. X принимает значение x_1;

$(X+Y = x_1+y_1)$ — X принимает значение x_1 и, в то же время, Y принимает значение y_1;

$(X+Y = x_1+y_2)$ — X принимает значение x_1, а Y принимает значение y_2.

Ясно, что первое событие происходит тогда, когда происходит или второе, или третье. Значит, первое событие есть сумма второго и третьего, согласно определению суммы событий (лек. 3, п. 1):

$$(X = x_1) = (X + Y = x_1 + y_1) + (X + Y = x_1 + y_2).$$

Поскольку значения y_1 и y_2 — разные, то слагаемые события, стоящие в правой части, несовместимы и, следовательно, применима первая теорема сложения вероятностей (лек. 3, п. 4):

$$\mathbf{P}(X = x_1) = \mathbf{P}(X + Y = x_1 + y_1) + \mathbf{P}(X + Y = x_1 + y_2).$$

Вероятности этих событий указаны в таблицах распределений. Последнее равенство, следовательно, и означает, что $p_1 = p_{11} + p_{12}$.

5. Совершенно аналогично доказывается, что $p_{11} + p_{21} = p_2$ (постарайтесь сделать это сами), а также $p_{11} + p_{21} = q_1$, $p_{12} + p_{22} = q_2$.

Замечание. Вы, может быть, не заметили одно скрытое предположение, при котором проведено наше доказательство. А именно: значения с.в. $X + Y$ предполагались различными. В то время, как, вообще говоря, некоторые из них могут совпадать. Учет этого обстоятельства заставил бы нас объединить равные значения и сложить соответствующие вероятности, что формально усложнило бы обозначения и рассуждения, не отменив их справедливости.

Следствие 1. Математическое ожидание суммы любого конечного числа дискретных случайных величин X_i, $i = 1, 2, \dots, k$ равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_k) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_k) \tag{7}$$

Доказательство для трех с.в. заключено в следующей цепочке равенств (применяется ассоциативное свойство сложения с.в. и дважды — только что доказанная теорема 2):

$$M(X_1+X_2+X_3) = M(X_1+(X_2+X_3)) = M(X_1)+M(X_2+X_3) = M(X_1)+M(X_2)+(M_3).$$

Для 4-х и более с.в. цепочка составляется совершенно аналогично, лишь удлиняется (сделайте это самостоятельно, например, для $k = 5$).

Следствие 2. Математическое ожидание биномиальной с.в. X_σ с параметрами k и p равно произведению параметров:

$$M(X_\sigma) = k \cdot p \tag{8}$$

Доказательство. Согласно теореме 1, $X_\sigma = I_1 + I_2 + \dots + I_k$. Согласно следствию 1 теоремы 2, $M(X_\sigma) = M(I_1) + M(I_2) + \dots + M(I_k)$. Согласно определению простейших с.в. (определение 3), $M(I_1) = M(I_2) = \dots = M(I_k) = 0\cdot(1-p)+1\cdot p = p$. Следовательно, $M(X_\sigma) = p + p + \dots + p = k \cdot p$.

Контроль 7. Игральная кость подбрасывается 6 раз. С.в. X — сумма появившихся очков, с.в. Y — число "шестерок". Найдите математические ожидания этих с.в.

Контроль 7*. Проведите доказательство теоремы 2 для случая, когда с.в. X имеет три различных значения x_1, x_2, x_3 с вероятностями p_1, p_2, p_3. В чем отличия?

8. Независимость случайных величин

Осталось доказать вторую из формул (1). Схема рассуждений та же. Небольшое осложнение возникнет с теоремой о сумме дисперсий — она справедлива не для всех с.в., а для независимых. Обсудим это новое важное понятие.

Воспоминания. Вспомним сначала понятие независимости **событий** (лекция 3, п. 7). Оно использует другое, подзабытое, наверное, вами понятие условной вероятности (лекция 3, п. 6).

Условной вероятностью события B относительно события A называется вероятность события B, вычисленная при условии, что событие B произошло. Обозначение — $\mathbf{P}_A(B)$. События A и B называются независимыми, если условная вероятность одного из них не меняется в зависимости от того, произошло или нет другое, т. е. $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$.

Примеры. 1) В урне 5 шаров — 3 белых, 2 черных. Вынимаются последовательно 2 шара. Событие A — первым вынут белый шар, B — вторым вынут белый шар. $\mathbf{P}_A(B) = 1/2$, $\mathbf{P}_{\overline{A}}(B) = 1/4$. События A и B зависимые.

2) Орудие 2 раза стреляет в мишень. Вероятность поражения цели каждым выстрелом равна p. Событие A_1 — цель поражена 1-м выстрелом, A_2 — вторым. $\mathbf{P}_{A_1}(B_2) = p$, $\mathbf{P}_{\overline{A_1}}(A_2) = p$. События A_1 и A_2 независимые. В данном примере независимость событий очевидна без вычислений, — они физически независимы.

Напомню, что теорема умножения вероятностей (лекция 3, п. 8) упрощается для независимых событий так:

$$\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \tag{9}$$

Определение 4. Две с.в. X и Y, связанные с одним опытом, называются *независимыми*, если любое событие, связанное с одной с.в., независимо с любым событием, связанным с другой с.в.

Данное определение охватывает как дискретные, так и непрерывные с.в. Уточним его для дискретных с.в.

Определение 4′. Пусть с некоторым опытом связаны две дискретные с.в. — X и Y. Пусть возможные значения с.в. X — $\{x_i, i = 1, 2, \ldots, m\}$, а значения с.в. Y — $\{y_j, j = 1, 2, \ldots, n\}$. *Случайные величины* X и Y называются *независимыми*, если любое событие $A_i = (X = x_i)$, состоящее в том, что с.в. X приняла в опыте значение x_i, независимо с любым событием $B_j = (Y = y_j)$ — с.в. Y приняла значение y_j.

Независимость с.в. X и Y позволяет легко находить по формуле (9) вероятности произведений $A_i \cdot B_j$: $\mathbf{P}(A_i \cdot B_j) = \mathbf{P}(A_i) \cdot \mathbf{P}(B_j)$. Этот факт понадобится нам чуть далее.

Примеры. Опыт — вынимание двух шаров из урны, где лежат 3 белых и 2 черных шара. С.в. X — число появившихся белых шаров, с.в. Y — число черных. Очевидно, возможные значения данных с.в. одинаковы — 0, 1, 2, а распределения вероятностей разные, из-за разного числа белых и черных шаров в урне. Почти очевидно также, что с.в. X и Y зависимые. Проверим это с помощью определения 4′.

С с.в. X связаны три основных события: $(X = 0)$, $(X = 1)$, $(X = 2)$. С с.в. Y — тоже три: $(Y = 0)$, $(Y = 1)$, $(Y = 2)$. Выберем, например, пару $A = (X = 2)$ и $B = (Y = 0)$ и проверим, зависимы ли эти события. Без труда определяем условные вероятности: $\mathbf{P}_A(B) = 1$, $\mathbf{P}_{\overline{A}}(B) = 0$. События зависимые. Значит, согласно определению 4′, с.в. X и Y тоже зависимые.

Другой пример. Орудие дважды стреляет в мишень. С.в. X_1 — число попаданий при первом выстреле (значения 0 и 1), с.в. X_2 — число попаданий при втором (значения те же). Очевидно, эти с.в. независимые, т. к. вероятность попадания при втором выстреле не меняется от того, каков результат первого.

Обобщим предыдущее определение, данное для двух с.в., на случай нескольких с.в.

Определение 5. Пусть с некоторым опытом связаны n случайных величин X_1, X_2, ..., X_n. Эти *с.в.* называются *независимыми в совокупности*, если каждая из них независима с любой другой и, более того, независима с суммой любого числа других с.в.

Примером независимых в совокупности с.в. может быть система простейших с.в., связанных с любой биномиальной с.в. Взять, хотя бы, опыт, когда орудие три раза стреляет в мишень, и три простейшие с.в. — X_1 — число попаданий при первом выстреле, X_2 — при втором, X_3 — при третьем. Их независимость мы сейчас установим в общем виде.

Лемма[6] **1**. Пусть эксперимент состоит в повторении некоторого опыта k раз и каждый раз может появиться или нет некоторое событие A с **неизменной** вероятностью p. Простейшие с.в. I_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, которые принимают значение 1, если в i-м опыте появилось событие A, и 0, если не появилось, образуют систему независимых в совокупности с.в.

Доказательство тривиально следует из независимости опытов, т. е. из **неизменности** вероятности p. Действительно, если с.в. I_i приняла значение 1, т.е. произошло событие $(I_i = 1)$, то вероятность этого события равна p, независимо от того, что произошло в других опытах и какие значения приняли другие с.в. I_j, $j \neq i$, а значит и любые их суммы.

Ценность. Понятие независимости с.в. очень важно в теории случайных ве-

[6] *Леммой* называют вспомогательное утверждение, используемое для доказательства последующей теоремы.

личин. Ценность его состоит в том, что многие основополагающие факты теории можно установить только для независимых с.в. Сейчас вы увидите один такой пример: зная законы распределения слагаемых с.в., мы найдем распределение их суммы. Для зависимых с.в. сделать это в общем виде невозможно.

Лемма 2. Пусть с некоторым опытом связаны две с.в. X и Y, законы распределения которых известны:

Таблица 7

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_m
p	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_m

Таблица 8

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_i	$\dots$	y_n
q	q_1	q_2	$\dots$	q_j	$\dots$	q_n

Если с.в. X и Y независимые, то закон распределения их суммы $X + Y$ имеет вид (значения складываются, а вероятности перемножаются!):

Таблица 9

$X+Y$	x_1+y_1	x_1+y_2	$\dots$	x_i+y_j	$\dots$	x_m+y_n
p	$p_1 \cdot q_1$	$p_1 \cdot q_2$	$\dots$	$p_i \cdot q_j$	$\dots$	$p_m \cdot q_n$

Доказательство. Согласно определению 2, значения суммы $X + Y$ определяются всевозможными суммами значений $\{x_i + y_j\}$, которые могут появиться в результате опыта. Найдем вероятность появления произвольного значения $x_i + y_j$, т. е. вероятность события $C = (X + Y = x_i + y_j)$, состоящего в том, что с.в. X приняла значение x_i (появилось событие $A = (X = x_i)$), и одновременно с.в. Y приняла значение y_j (появилось событие $B = (Y = y_j)$).

Согласно определению произведения событий (лекция 3, п. 1), $C = A \cdot B$, т.е.

$$(X + Y = x_i + y_j) = (X = x_i) \cdot (Y = y_j).$$

В этом равенстве справа стоят независимые события, согласно условию леммы. Поэтому применима теорема о произведении независимых событий (лекция 3, п. 8), т. е. применима формула :

$$\mathbf{P}(X + Y = x_i + y_j) = \mathbf{P}(X = x_i) \cdot \mathbf{P}(Y = y_j).$$

Вероятности, стоящие в правой части последнего равенства, известны и равны p_i и q_j, соответственно. В итоге, следовательно, получаем то, что нужно доказать:

$$\mathbf{P}(X + Y = x_i + y_j) = p_i \cdot q_j.$$

Контроль 8. В условиях контроля 7, обоснуйте зависимость с.в. X и Y. Введите систему независимых в совокупности с.в. и обоснуйте это.

9. Дисперсия суммы с.в. Дисперсия биномиальной с.в.

Теорема 3. Пусть с некоторым опытом связаны две дискретные с.в. — X и Y, а также их сумма — $X+Y$. Если с.в. X и Y независимые, то дисперсия суммы равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y). \tag{9}$$

Доказательство проведем для простейшего случая, когда слагаемые с.в. имеют два значения (так же мы поступали и с теоремой 2).

Минимальное число значений с.в. позволит обозримо провести необходимые преобразования длинной суммы (4-й пункт доказательства). Эти преобразования можно провести и в общем случае, но они станут трудно понимаемыми. Если же вы сильно захотите сами преодолеть технические трудности, попробуйте вести нижеследующие рассуждения и выкладки, считая, что с.в. X имеет m значений $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а с.в. Y — n значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

1. Нам нужно вычислить три дисперсии и установить равенство (9). Для этого будем пользоваться следующей формулой (лекция 5, п. 7, (4′)):

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X). \tag{10}$$

В этой формуле участвует с.в X^2; напомню, — X^2 получается из с.в. X возведением в квадрат ее значений при неизменных вероятностях.

2. Вычислим дисперсии слагаемых X и Y. Закон распределения этих с.в. задается таблицами 4 и 5. Математические ожидания обозначим так:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 = a, \;\; M(Y) = y_1q_1 + y_2q_2 = b. \tag{11}$$

Дисперсии, согласно формуле (10), получаются такими:

$$D(X) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 - a^2, \;\; D(Y) = y_1^2q_1 + y_2^2q_2 - b^2.$$

Значит, правая часть формулы принимает вид:

$$D(X) + D(Y) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 - a^2 + y_1^2q_1 + y_2^2q_2 - b^2. \tag{12}$$

3. Вычислим дисперсию суммы $X+Y$. Закон распределения суммы, согласно лемме 2, выглядит так:

Таблица 10

$X+Y$	x_1+y_1	x_1+y_2	x_2+y_1	x_2+y_2
p	p_1q_1	p_1q_2	p_2q_1	p_2q_2

Математическое ожидание квадрата суммы $(X+Y)^2$ получается таким:

$$M((X+Y)^2) = (x_1+y_1)^2p_1q_1 + (x_1+y_2)^2p_1q_2 + (x_2+y_1)^2p_2q_1 + (x_2+y_2)^2p_2q_2.$$

Квадрат математического ожидания суммы, с учетом теоремы 2:

$$M^2(X+Y) = (a+b)^2.$$

Формула (10) для суммы $X+Y$ принимает вид

$$D(X+Y)=M((X+Y)^2)-M^2(X+Y).$$

С учетом всех предыдущих равенств вычисляем дисперсию суммы:

$$D(X+Y)=(x_1+y_1)^2p_1q_1+(x_1+y_2)^2p_1q_2+(x^2+y_1)^2p_2q_1+(x_2+y_2)^2p_2q_2-(a+b)^2.$$

4. Преобразуем последнюю формулу так, чтобы прийти к сумме дисперсий (12). Для этого сначала возведем в квадрат выражения, стоящие в скобках, и сделаем перестановку слагаемых (соберем удвоенные произведения):

$$D(X+Y)=x_1^2p_1q_1+y_1^2p_1q_1+x_1^2p_1q_2+y_2^2p_1q_2+x_2^2p_2q_1+y_1^2p_2q_1+$$

$$+x_2^2p_2q_2+y_2^2p_2q_2+2x_1y_1p_1q_1+2x_1y_2p_1q_2+2x_2y_1p_2q_1-a^2-2ab-b^2.$$

Группируем 1-е и 3-е слагаемые, 2-е и 4-е, и т. д., 9-е и 10-е, 11-е и 12-е:

$$D(X+Y)=x_1^2p_1(q_1+q_2)+x_2^2p_2(q_1+q_2)+y_1^2q_1(p_1+p_2)+y_2^2q_2(p_1+p_2)+$$

$$+2x_1p_1(y_1q_1+y_2q_2)+2x_2p_2(y_1q_1+y_2q_2)-a^2-2ab-b^2.$$

Используем свойство ряда распределения — $q_1+q_2=1$, $p_1+p_2=1$, а также 2- ю формулу (11):

$$D(X+Y)=x_1^2p_1+x_2^2p_2+y_1^2q_1+y_2^2q_2+2x_1p_1b+2x_2p_2b-a^2-2ab-b^2.$$

Делаем очевидную перестановку слагаемых, используем 1-ю формулу и приходим к сумме дисперсий (12):

$$D(X+Y)=(x_1^2p_1+x_2^2p_2-a^2)+(y_1^2q_1+y_2^2q_2-b^2)+$$

$$+2b(x_1p_1+x_2p_2)-2ab=D(X)+D(Y)+2ba-2ab=D(X)+D(Y).$$

Следствие 1. Дисперсия суммы любого конечного числа независимых в совокупности дискретных с.в. X_i, $i=1,\,2,\,\ldots,\,n$ равна сумме их дисперсий:

$$D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n). \tag{13}$$

Доказательство заключено в следующей цепочке равенств:

$$D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=D(X_1+(X_2+X_3+\ldots+X_n))=D(X_1)+D(X_2+X_3+\ldots+X_n)=$$

$$D(X_1)+D(X_2+(X_3+\ldots+X_n))=\ldots=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n).$$

Надеюсь, вы понимаете, что в этой цепочке $m-1$ раз использованы свойство ассоциативности сложения с.в. и теорема 3.

Следствие 2. Дисперсия биномиальной с.в. X_σ, параметры которой k и p, определяется формулой

$$D(X_\sigma) = k \cdot p \cdot (1-p). \tag{14}$$

Доказательство. Согласно теореме 1, наша биномиальная с.в. X_σ представима в виде суммы простейших с.в. I_i, $i = 1, 2, \ldots, k$:

$$X_\sigma = I_1 + I_2 + \ldots + I_k$$

Согласно лемме 1, простейшие с.в. . I_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ образуют систему независимых в совокупности с.в., и значит, к ним применимо следствие 1:

$$D(X_\sigma) = D(I_1) + D(I_2) + \ldots + D(I_k).$$

Все простейшие с.в. I_i принимают одинаковые значения 0 и 1 с одинаковыми вероятностями $1-p$ и p, соответственно. Их математические ожидания $M(I_i) = p$. Значит, их дисперсии одинаковы и равны

$$D(I_i) = (0-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot = p^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p =$$
$$= p \cdot (1-p) \cdot (p + 1 - p) = p \cdot (1-p).$$

Из последних двух равенств и следует

$$D(X_\sigma) = D(I_1) + D(I_2) + \ldots + D(I_k) =$$

$$p \cdot (1-p) + p \cdot (1-p) + (1-p) + \ldots + p \cdot (1-p) = k \cdot p \cdot (1-p).$$

Следствие 3. Среднее квадратическое отклонение биномиальной с.в. X_σ, параметры которой k и p, определяется формулой

$$\sigma(X_\sigma) = \sqrt{k \cdot p \cdot (1-p)}. \tag{15}$$

Доказательство следует из определения среднего квадратического отклонения $\sigma = \sqrt{D}$ (лекция 5, п. 8, (5)) и формулы (14).

Контроль 9. В условиях контроля 7, найдите дисперсии и средние квадратические отклонения с.в. X и с.в. Y.

10. Упражнения

1. Подбрасываются случайным образом две однородные игральные кости. С.в. X — число выпавших "шестерок", Y — число выпавших костей с четными очками. Какая из этих с.в. биномиальная и каковы ее параметры? Постройте эскизы многоугольников распределения этих с.в. Рассчитайте ряды распределения вероятностей данных с.в. и постройте многоугольники распределения точно. Согласуются ли они с эскизами? Вычислите математические ожидания и дисперсии данных с.в. двумя способами — с помощью ряда распределения и по формулам для с.в. X_σ.

Ответ: $M(X) = 1/3$, $D(X) = 5/18$, $M(Y) = 1$, $D(Y) = 1/2$.

2. Подбрасываются 5 игральных костей. С.в. X и Y — те же, что и в предыдущем упражнении. Вопросы — те же.

Ответ: $M(X) = 5/8$, $D(X) = 25/36$, $M(Y) = 5/2$, $D(Y) = 5/4$.

3. Подбрасываются 10 игральных костей. С.в. X и Y — те же. Найдите быстро M, D и σ для этих с.в. Постройте эскизы многоугольников распределения. Какие значения той и другой с.в. (укажите диапазон) появятся в опыте с практически достоверной вероятностью?

4. Монета подбрасывается 7 раз. Определите быстро: каково наиболее вероятное число гербов? Рассчитайте эту вероятность точно. Какое число гербов можно гарантировать с вероятностью большей, чем 0,9? Как проверить этот прогноз ?

Ответ: 0,27, [1; 6].

5. В урне 10 шаров — 7 белых, 3 черных. Опыт — последовательное вынимание 5-ти шаров с возвращением (каждый вынутый шар кладется обратно, после чего вынимается следующий шар). С.в. X — число белых шаров. Запишите без вычислений ряд распределения с.в. X (найдите нужный для этого пример в тексте лекции). Определите вероятность того, что с.в. X примет значение, не большее двух. Как часто следует ожидать появления малого числа белых шаров (не больше двух)? Останется ли с.в. X биномиальной, если вынимать шары без возвращения? Почему? Рассчитайте вероятность появления малого числа белых шаров в этом случае. Прогноз? Как его проверить?

6. Три стрелка производят залп по цели. Вероятности попаданий: $p_1 = 0,5$, $p_2 = 0,7$, $p_3 = 0,9$. С.в. X — число попаданий. Является ли с.в. X биномиальной? Обоснуйте. Можно ли ввести простейшие с.в.? Обоснуйте. Запишите ряды распределения простейших с.в. Будут ли простейшие с.в. независимыми в совокупности? Можно ли разложить с.в. X в сумму простейших? Обоснуйте. Найдите $M(X)$ и $D(X)$, не строя ряд распределения.

Указание. Данный опыт можно рассматривать, как повторение выстрела 3 раза.

7. Стрелок стреляет в мишень 20 раз. Вероятность попадания при каждом выстреле неизменна и равна 0,7. Какое число попаданий можно практически гарантировать?

Ответ: не менее восьми.

8. По каналу связи могут передаваться одновременно до пяти сообщений. Вероятность искажения сообщения не зависит от других сообщений и равна 0,3. Найти вероятность не более двух искажений (ряд распределения числа искажений отыщите в тексте лекции).

Ответ: 0,837.

Указание. Опыт — передача одного сообщения, "успех" — искажение сообщения.

9. По каналу связи могут передаваться одновременно до 50 сообщений. Вероятность искажения каждого сообщения не зависит от других и равна 0,3. Каково среднее число искажений? Какой диапазон числа искажений можно гарантированно ожидать?

Ответ: [6; 24].

10. Прибор состоит из трех элементов. Вероятность безотказной работы в течение определенного периода эксплуатации (надежность) для каждого элемента равна 0,9. Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Прибор может выполнять свои функции, если работает не менее двух его элементов. Какова надежность прибора в целом? Какое число элементов практически достоверно выйдет из строя за период эксплуатации?

Ответ: 0,972; не более одного.

11. Прибор состоит из 100 элементов. Вероятность выхода из строя каждого элемента за определенное время работы равна 0,02, независимо от состояния других элементов. Какое число элементов будет в рабочем состоянии к концу срока работы?

Ответ: не менее 96.

12. Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятностью $p_1 = 0,2$ оказывается брюнетом, с $p_2 = 0,3$ шатеном, с $p_3 = 0,4$ блондином, с $p_4 = 0,4$ рыжим. Выбирается наугад группа из 6 человек. Рассмотрите 4 случайные величины: X_1 — число брюнетов в группе, X_2 — число шатенов, X_3 — число блондинов, X_4 — число рыжих. Будут ли эти с.в. независимыми в совокупности? Обоснуйте. Будут ли они биномиальными? Почему? Какие значения могут принимать с.в $X_1 + X_2$ и $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$? Найдите среднее значение и дисперсию той и другой с.в.

Указание. Выясните, зависимы ли, например, такие события $(X_1 = 6)$ и $(X_2 = 1)$.

13. По некоторой цели стрельба ведется до трех попаданий. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,4. Найдите среднее число расхода снарядов. Какой диапазон расхода снарядов?

Указание. Введите с.в. K_i — число снарядов, потраченных от $(i-1)$-го до i-го попадания. Все эти с.в. имеют геометрическое распределение, их математическое ожидание $M(K_1)$ найдите, заглянув в лекцию 5, п. 9.

14. В партии из большого количество деталей, содержится 10% нестандартных. Для проверки отбираются случайным образом 4 детали. Сделайте прогнозы о числе нестандартных деталей в выборке: а) на основе числовых характеристик; б) на основе ряда распределения.

Ответ: $p_0 = 0,6561$; $p_1 = 0,2916$; $p_3 = 0,0036$; $p_4 = 0,0001$.

15. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина? Предположите, что мужчин и женщин поровну.

Ответ: 20/21.

16. Известна статистическая вероятность того, что два близнеца окажутся одного пола, — 0,64. Статистическая вероятность рождения мальчика 0,51. Найти вероятность того, что второй из близнецов окажется мальчиком, если первый мальчик.

Ответ: 11/17.

Что такое кривые второго порядка

С. В. Дворянинов

В статье представлена теория кривых второго порядка в элементарном изложении, доступном учащимся 10-11 классов.

"Первая математическая книжка была
"Числа и фигуры" Радемахера и Теплица, в 12 лет.
Годом позже мой дядя за один вечер рассказал
мне, что такое математический анализ".
Из интервью акад. В. И. Арнольда,
"Квант", 1990, №7, с. 2.

"Читатели "Кванта" знают, конечно,
как выглядят кривые, заданные
уравнением второй степени:
эллипсы, гиперболы и параболы".
Там же, с. 6.

Напомним, что математический анализ (или другое название — дифференциальное и интегральное исчисление) — это большой и важный раздел математики. На мех-мате матанализ изучают на первых двух курсах. Наверное, многие современные студенты позавидовали бы способу, который позволяет узнать за один вечер то, на что требуется два года!

Разумеется, все понимают, что речь здесь может идти об основных, важнейших идеях. Но как важно в компактной, ясной форме представлять всю панораму предмета! Однако, не у каждого есть такой замечательный дядя, и тогда на помощь приходят книги и журналы. Мы представляем сейчас наших юных читателей, уютно расположившихся вечером у лампы с журналом в руках. Попробуем же и мы за один вечер рассказать, что такое кривые второго порядка.

В "Математическом энциклопедическом словаре" находим: "линия второго порядка — множество точек на плоскости, координаты которых в декартовой системе координат удовлетворяют алгебраическому уравнению 2-й степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0\text{''}. \qquad (1)$$

Далее говорится, что среди таких линий есть эллипсы, гиперболы, параболы, пересекающиеся и параллельные прямые. При этом упомянуты *инварианты и полуинварианты, определители, комплексные числа,* другие математические понятия известные, конечно, не всем школьникам. Такие кривые со всеми подробностями обычно изучают в конце первого курса по аналитической геометрии. Сейчас мы постараемся рассказать об этом так, чтобы наш рассказ был доступен в основном восьмикласснику — всякому, кто знает, что такое декартова координатная плоскость, кто умеет решать квадратные уравнения и рисовать квадратичную параболу и гиперболу и преобразовывать графики.

В уравнении (1) пять коэффициентов при переменных величинах x и y и свободный член a_{33} — это произвольные числа. Есть, конечно, и такие уравнения (1), которые не выполняются ни при каких значениях переменных (например, $x^2+y^2+1=0$). Ясно, что при этом всякое такое уравнение никакую линию на плоскости не задает.

Рассмотрим два других уравнения:

$$x^2 - y^2 = 0 \ \text{ и } \ x^2 + 2xy + y^2 = 0.$$

Перепишем эти уравнения так:

$$(x-y)(x+y) = 0 \ \text{ и } \ (x+y)^2 = 0.$$

Первое уравнение на координатной плоскости задает *две* прямые $y = x$ и $y = -x$. Второе уравнение задает *одну* прямую $y = -x$. Принято однако говорить, что и второе уравнение задает *две* прямые и что эти прямые совпадают.

Простейшее уравнение $x^2 + y^2 = 0$ задает на плоскости одну единственную точку (0;0).

Другой частный случай уравнения (1) — это уравнение $x^2 - 1 = 0$. Какое множество точек ему соответствует? Получив два равенства $x = 1$ и $x = -1$, надо не забыть, что мы находимся на плоскости XOY, и здесь два последних уравнения задают две прямые, параллельные оси ординат.

Итак, рассмотрение примеров показывает, что уравнению (1) могут соответствовать

1) пустое множество,
2) одна точка,
3) одна прямая,
4) две пересекающиеся прямые,
5) две параллельные прямые.

Линии второго порядка 3)–5) называют *распадающимися.* Название объясняется тем, что во всех перечисленных случаях правая часть задающего эти линии уравнения (1) является произведением двух множителей. Каждый из этих множителей линейным образом зависит от x и y.

Теперь принципиальный вопрос: как исследовать уравнение (1) в общем случае?

Ответ таков (напомним, что наша цель — ограничиться уровнем 8-го класса!).

Уравнение (1) следует рассматривать как квадратное уравнение относительно одной переменной величины, считая вторую величину параметром. Другими словами надо из уравнения (1) выразить или y через x, или же x через y.

Пример 1. Какое множество точек соответствует уравнению

$$y^2 - xy - x - y = 0?$$

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно y:

$$y^2 - (x+1)y - x = 0.$$

Отсюда по формуле корней квадратного уравнения находим $y_1 = 1$, $y_2 = x$. Следовательно, на координатной плоскости данное уравнение задает две пересекающиеся прямые линии.

Этот же результат можно получить, если левую часть данного уравнения разложить методом группировки на множители и представить его в виде

$$(y-1)(y-x) = 0.$$

Уместно вспомнить здесь также прямую и обратную теоремы Виета.

Задача 1. Определите, какое множество точек соответствует каждому из уравнений:

А) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 1 = 0$;
Б) $x^2 + 4y^2 - 4xy + x - 2y - 2 = 0$;
С) $x^2 + 5y^2 - 2xy + 2x - 10y + 5 = 0$;
Д) $x^2 + 5y^2 - 2xy + 2x - 10y + 25 = 0$.

Ответ. Соответствующие множества (в другом порядке) представлены на рис. 1. Одно из уравнений задает пустое множество.

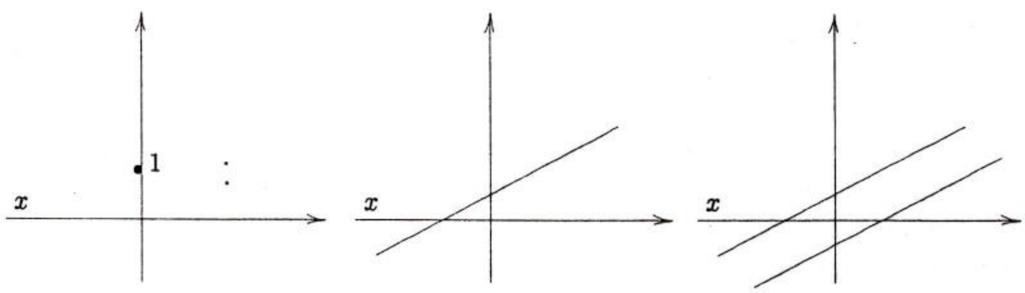


Рис. 1

После решения этих несложных задач, понятно следующее наблюдение: выражая из уравнения (1) по формуле корней квадратного уравнения переменные x или y, мы получим такие равенства:

$$y = ax + b \pm \sqrt{px^2 + qx + r} \tag{2}$$

или

$$x = ay + b \pm \sqrt{py^2 + qy + r}. \tag{3}$$

Разумеется, в формулах (2) и (3) все параметры разные.

Обратим внимание на квадратные трехчлены, стоящие под знаком квадратного корня, и для определенности будем говорить далее о формуле (2) (ясно, что все полученные при этом выводы будут справедливы и для (3)).

Изучим вначале пять простых возможных вариантов (а всего вариантов восемь).

1) Если трехчлен $px^2 + qx + r$ принимает только отрицательные значения при всех значениях независимой переменной x, то на множестве действительных чисел формула (2) не имеет смысла и уравнение (1) никакого множества не задает.

2) Может случиться так, что этот трехчлен отрицателен при всех значениях переменной x, за исключением одного единственного значения $x = x_0$. Ясно, что тогда (2) (и уравнение (1) тоже) задает на плоскости лишь одну точку с абсциссой x_0.

3) Коэффициенты уравнения (1) могут быть такими, что в (2) под знаком корня окажется тождественный ноль, и, следовательно, $y = ax+b$. Стало быть, уравнение (1) задает в этом случае одну прямую (или *две*, но совпадающие).

4) В формуле (2) под знаком корня может оказаться точный квадрат, то есть

$$y = ax + b \pm \sqrt{(cx + d)^2}.$$

Здесь при $c = 0$ и $d \neq 0$ получаем две параллельные прямые.

5) Наконец, при $c \neq 0$ имеем две пересекающиеся прямые.

Все эти пять возможностей мы уже наблюдали на примерах.

Замечание 1. Наши внимательные читатели видимо уже давно заметили, что рассматривать уравнение (1) как квадратное относительно хотя бы одной из переменных можно не всегда. Действительно, среди уравнений (1) есть и такие, которые имеют вид

$$2a_{12}xy + 2a_13x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (4)$$

то есть являются *линейными* относительно *каждой* переменной. Таким, в частности, является уравнение $xy - 1 = 0$, изучаемое в школе. Графиком этого уравнения является линия, называемая гиперболой.

В случае уравнения (4) одна переменная выражается через другую посредством дробно-линейной функции вида $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (или $x = \dfrac{ay+b}{cy+d}$). График любой дробно-линейной функции получается из графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ с помощью растяжений, сдвигов и симметрии. Его также называют гиперболой. Всякая такая гипербола имеет вертикальную и горизонтальную асимптоты.

При $a_{12} = 0$ уравнение (4) вырождается в линейное, график которого — прямая.

Вернемся к основным для нас формулам (2) и (3) и вновь сосредоточимся на формуле (2). В центре внимания по-прежнему будет квадратный трёхчлен $px^2 + qx + r$.

Эллиптический случай

Пусть теперь этот трехчлен неотрицателен на отрезке $\alpha \leq x \leq \beta$. Рассмотрим на этом отрезке вспомогательную функцию $\nu = \sqrt{px^2 + qx + r}$. На этом же отрезке согласно (2) определены и две функции $y_{\text{В}}(x)$ и $y_{\text{Н}}(x)$

$$y_{\text{В}} = ax + b + \nu(x), \quad y_{\text{Н}} = ax + b - \nu(x).$$

Здесь индексы *в* и *н* — от слов *верх* и *низ* — соответствуют плюсу и минусу в (2).

Вначале выясним, какая линия является графиком функции $\nu = \nu(x)$ (тем самым мы исследуем (2) в случае $a = b = 0$).

Пример 2. Пусть $\nu = \sqrt{-x^2 + R^2}$. После возведения обеих частей уравнения в квадрат, легко увидеть, что графиком является полуокружность $x^2 + \nu^2 = R^2$, лежащая в верхней полуплоскости.

При наших предположениях функция $\nu(x)$ всегда представима в виде $\nu = \sqrt{-p(x - x_0)^2 + R^2}$ (здесь $p > 0$). При условии $\nu \geq 0$ после возведения в квадрат получим $\nu^2 + p(x - x_0)^2 = R^2$. График этого уравнения получается из окружности $\nu^2 + x^2 = R^2$ сжатием или растяжением вдоль оси OX и последующим сдвигом на расстояние $|x_0|$ вдоль оси OX. Такая линия носит название "эллипс". Графиком функции $\nu(x)$ является верхняя половина этого эллипса.

График верхней функции $y_{\text{В}}(x)$ получается добавлением к отрезку прямой (то есть к части графика линейной функции $y = ax + b$) "шапочки" — верхней части эллипса. График нижней функции $y_{\text{Н}}(x)$ получается пристраиванием этой шапочки к отрезку снизу. Получаемая в итоге замкнутая кривая также всегда является эллипсом. Строгое доказательство этого факта мы не приводим. При этом отрезок $\alpha \leq x \leq \beta$ представляет проекцию этого эллипса на ось абсцисс OX.

На всяком эллипсе есть самая верхняя точка, условно ее можно назвать "северным полюсом", где ордината y принимает наибольшее значение $y_{\text{наиб}}$.

Замечание 2. Не следует думать, что в результате пристраивания шапочки абсцисса "северного полюса" совпадает с x_0. Вот поясняющий этот факт пример (требующий, правда, знания тригонометрии).

Пример 3. Рассмотрим следующее уравнение вида (1)

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0, \tag{5}$$

из которого находим $y = x \pm \sqrt{-x^2 + 1}$. Здесь $x \in [-1; 1]$.

Значение $x = -1$ — это абсцисса самой "западной", то есть крайней левой точки эллипса — точки $A(-1; -1)$.

Значение $x = 1$ — это абсцисса самой "восточной", то есть крайней правой точки эллипса — точки $B(1; 1)$.

При $x_0 = 0$ получаем соответственно $y_0 = \pm 1$.

В данном случае полезна тригонометрическая замена $x = \cos t$. Тогда $y = \cos t + \sin t$. Два последних уравнения при $t \in [0; 2\pi]$ представляют параметрическое задание рассматриваемого эллипса. Равенство $y = \sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4})$ показывает, что значения ординат точек эллипса изменяются от $-\sqrt{2}$ до $+\sqrt{2}$. Эти два числа являются ординатами "южного" и "северного" полюсов нашего эллипса — точек $S(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2})$ и $N(\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2})$ (рис.2).

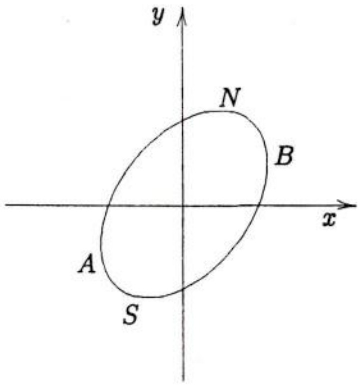


Рис. 2

Замечание 3. После того, как для эллиптической кривой найдены две крайние точки A и B, их следует соединить плавной линией. На рис.3 представлены два способа соединения. Один из них, при котором количество точек экстремума функции $y_В$ больше одного, невозможен. Поясним это на наглядном уровне. Если допустить, что эта функция имеет несколько точек экстремума, то найдется горизонтальная прямая $y = y^*$, пересекающая ее график в трех точках. Это означает, что при некотором значении y^* *квадратное* относительно x уравнение (1) имеет *три* корня. А это невозможно! Доказано, следовательно, что эллипс (как и любая нераспадающаяся кривая второго порядка) может пересекать любую горизонтальную (то есть параллельную оси OX) прямую не более чем в двух точках. Очевидно, что это так и для произвольной прямой на плоскости (докажите это). Этот факт всегда полезно помнить при рисовании любой кривой второго порядка (1).

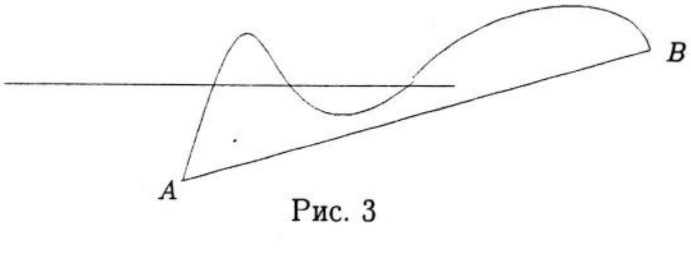


Рис. 3

Задача 2. Зная параметрическое задание эллипса

$$x = 2 + 3\cos t, \ y = -1 + 0,2\sin t - \cos t,$$

получите его уравнение вида (1).

Указание. Выразите синус и косинус через x и y и воспользуйтесь основным тригонометрическим тождеством.

Тригонометрическая параметризация возможна для любого эллипса.

Задача 3. Проверьте, что уравнение $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ задает окружность (то есть частный случай эллипса) и найдите параметрическую параметризацию этой окружности вида

$$x = a + R\cos t, \quad y = b + R\sin t$$

с подходящими параметрами a, b, R

Задача 4. Для эллиптической кривой $4x^2 - xy + y^2 + y = 0$, пользуясь уравнениями (2) и (3), определите прямоугольник, все стороны которого касаются эллипса и параллельны осям координат.

Параболический случай

Пусть теперь в уравнении (2) квадратный трехчлен, стоящий под знаком корня, вырождается в линейную функцию. Это означает, что $p = 0$, $q \neq 0$. Для удобства исследования перейдем от переменной x к новой переменной t согласно формуле $qx + r = t$. Напомним, что такой замене переменной отвечает сдвиг и растяжение (или сжатие) графиков вдоль оси абсцисс (при $q < 0$ следует не забыть еще и о симметрии относительно оси ординат OY). В результате получим два новых уравнения

$$y = At + B \pm \sqrt{t}.$$

Изменение параметра B приводит к сдвигу их графиков вдоль оси ординат, и поэтому без ограничения общности рассуждений можно считать, что $B = 0$, и исследовать уравнение

$$y = At + \sqrt{t}.$$

Если число A положительно, то легко исследовать одну (скажите, какую именно?) из двух последних функций; если же A отрицательно, то легче установить свойства другой функции.

Ограничимся случаем, когда число A положительно. В последнем равенстве от переменных t, y перейдем к новым переменным u, ν по формулам

$$t = \frac{u}{A^2}, \quad y = \frac{\nu}{A}.$$

В итоге задача сводится к исследованию двух конкретных функций уже без всяких параметров

$$y = u \pm \sqrt{u}.$$

Очевидно, что функция $\nu_{\text{В}} = u + \sqrt{u}$ как сумма двух возрастающих функций сама является возрастающей. График этой функции идет из точки (0;0) неограниченно вправо и вверх, и нарисовать его легко.

Вторая функция $\nu_{\text{Н}} = u - \sqrt{u}$ является в смысле монотонности более сложной, ибо она представима разностью двух монотонно возрастающих функций. Какая из этих двух функций "перебарывает" другую — сразу сказать нельзя.

Старшеклассники, конечно, с помощью производной мгновенно найдут промежутки монотонности этой функции. Мы же стремимся все объяснить нашим читателям-восьмиклассникам. С этой целью в последнем уравнении сделаем нелинейную, но монотонную замену переменной (продумайте, какой смысл мы вкладываем в эти слова). Положим $u = s^2$, где новая независимая переменная $s \geq 0$. В итоге получим $\nu = s^2 - s$, или $\nu = (s - 0,5)^2 - 0,25$. Сколько уже раз выручала нас квадратичная функция, и вот снова мы с ней встретились! Легко видеть, что эта функция убывает на отрезке $0 \leq s \leq 0,5$ и возрастает при $s \geq 0,5$.

Следовательно, функция $\nu_{\text{н}} = u - \sqrt{u}$ убывает на отрезке $0 \leq u \leq 0,25$ и неограниченно возрастает на бесконечном промежутке $0,25 \leq u < \infty$. Зная, следовательно, точку минимума этой функции (0,25;- 0,25) и используя контрольные точки, легко нарисовать график и этой функции.

Итак, график двух уравнений $\nu = u + \sqrt{u}$ (рис.4) представляет собой две ветви, которые охватывают прямую $\nu = u$ сверху и снизу, подобно тому, как парабола $y = x^2$ охватывает ось ординат (которая является осью симметрии этой параболы), а парабола $x = y^2$ охватывает свою ось симметрии — ось абсцисс.

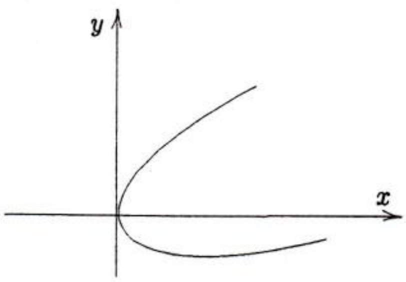


Рис. 4.

Замечание 4. Обращаем особое внимание на то, что прямая $\nu = u$ *не является* осью симметрии этой параболы! Эта прямая лишь задает направление этой оси!! Не вдаваясь в подробности (это хорошая задача для самостоятельного решения), заметим, что осью симметрии параболы $\nu = u + \sqrt{u}$ является прямая $\nu = u - \frac{1}{4}$. Вершина параболы — точка $\left(\frac{1}{16}; -\frac{3}{16}\right)$.

Заметим, что точно нарисовать параболическую кривую второго порядка сложнее, чем эллиптическую. В самом деле, для эллипса, рассматривая два квадратных трехчлена $px^2 + qx + r$ из формул (2) и(3), легко найти наименьший прямоугольник с параллельными осям координат сторонами, содержащий внутри себя эллипс, и точки касания эллипса со сторонами прямоугольника. Это действительно довольно большой объем информации!

О параболической кривой соответствующее уравнение (2)

$$y = ax + b \pm \sqrt{qx + r}$$

говорит, к сожалению, намного меньше. Во-первых, при $q > 0$ получаем абсциссу крайней левой точки параболы $x = -\frac{r}{q}$ (при q отрицательных — абсциссу крайней правой точки), во-вторых, прямая $y = ax + b$ задает направление оси параболы. (Если для параболической кривой рассматривать уравнение (3), то получаются абсциссы крайней верхней или крайней нижней точек параболы). Вот и все, что удается получить элементарными средствами. Следовательно, установив, что данная кривая второго порядка является параболической, при ее рисовании приходится использовать большее количество контрольных точек, чем для эллипса.

Наше элементарное исследование кривых второго порядка приближается к завершению. Последний из возможных вариантов — это

Гиперболический случай

Снова обратимся к ключевому для нас уравнению (2). Нам осталось рассмотреть еще две возможности, на первый взгляд отличающиеся одна от другой, но определяющие в действительности один и тот же класс кривых второго порядка.

Случай Г1. Пусть вначале в уравнении (2) квадратный трехчлен $px^2 + qx + r$ не является точным квадратом и положителен при всех значениях x.

Рассмотрим модельный

Пример 4. Простейшее уравнение такого типа — это $y = \pm\sqrt{x^2+1}$.

Здесь функция $y_{\text{В}} = \sqrt{x^2+1}$ определена при $x \in R$, является четной, поэтому достаточно исследовать ее при $x \geq 0$. Очевидно, на этом промежутке функция возрастает. Сравним эту функцию с функцией $y_{\text{ас}} = x$ при больших значениях аргумента. Имеем равенство

$$\Delta = y_{\text{В}} - y_{\text{ас}} = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

При больших x последняя дробь становится сколь угодно малой, или, как говорят, при x, стремящемся к $+\infty$, величина Δ стремится к нулю. Следовательно, график функции $y_{\text{В}}$ неограниченно приближается к прямой $y = x$ сверху. Используя контрольную точку (0;1), приходим к рис.5, где учтено равенство $y_{\text{Н}} = -y_{\text{В}}$. Прямые $y = \pm x$ называют *асимптотами* гиперболы.

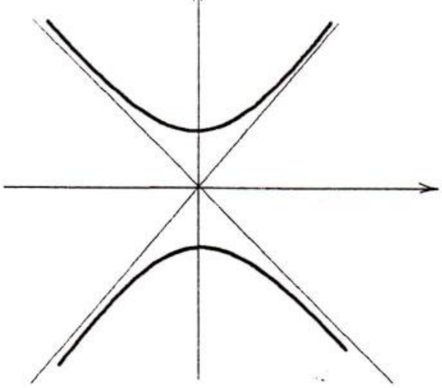


Рис. 5.

Итак, графиком уравнения $-x^2 + y^2 - 1 = 0$ является линия, называемая *гиперболой* и состоящая из двух ветвей. Две прямолинейные асимптоты имеет всякая гипербола.

Случай Г2. Пусть теперь в уравнении (2) квадратный трехчлен $px^2 + qx + r$ неотрицателен на двух непересекающихся промежутках $(-\infty; \alpha]$ и $[\beta; +\infty)$. Тогда на этих двух промежутках определены две функции, графики которых пересекаются только при $x = \alpha$ и $x = \beta$. В этом случае графиком уравнения (1) также является гипербола. Эту ситуации иллюстрирует следующий

Пример 5. Рассмотрим уравнение $-y^2 + x^2 - 1 = 0$. Здесь $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ (рис. 6). В примерах 4 и 5 переменные x и y меняются местами, поэтому соответствующие параболы симметричны относительно прямой $y = x$.

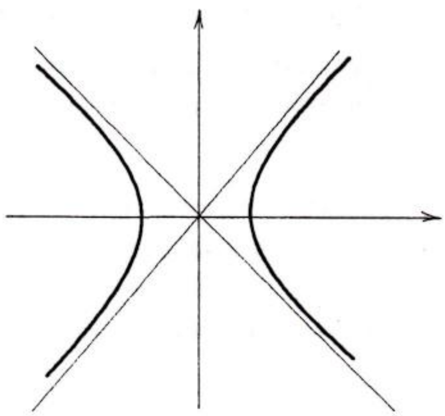


Рис. 6.

Пояснить совпадение по своей сути случаев Г1 и Г2 нам поможет хорошо знакомая всем школьная гипербола $xy = 1$.

Если через каждую точку прямой $y = -x$ проводить перпендикуляр к этой прямой, то на каждом таком перпендикуляре будут лежать две точки разных ветвей гиперболы (рис. 7). Это — случай Г1, только здесь в роли оси абсцисс выступает биссектриса второй и четвертой четвертей.

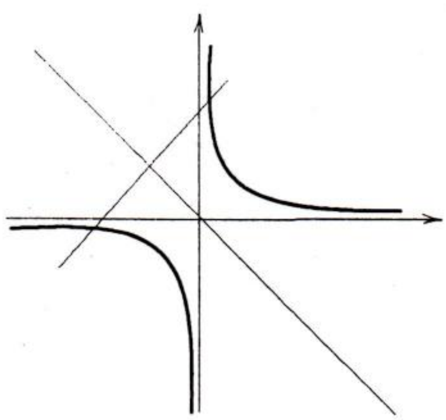


Рис. 7.

Если же мы будем двигаться по другой прямой $y = x$, то некоторые из перпендикуляров к этой прямой будут пересекать ту или иную ветвь гиперболы $xy = 1$ в двух точках, два перпендикуляра касаются ветвей, другие — вообще не пересекают гиперболу (рис. 8). Это — случай Г2, только здесь в роли оси абсцисс выступает биссектриса первой и третьей координатной четвертей.

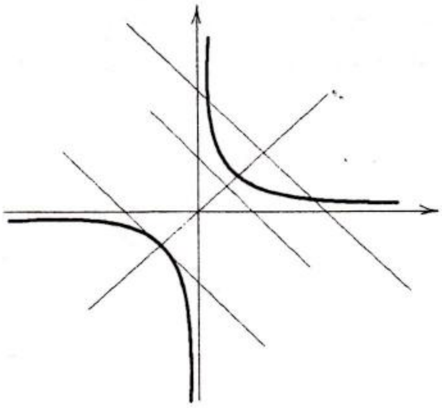


Рис. 8.

Заметим, что поворот гиперболы $xy = 1$ на 45° приводит к гиперболам из примеров 4 и 5.

Следует сказать, что гиперболу нарисовать намного легче, чем эллипс или параболу. У гиперболы есть две асимптоты. Эти асимптоты делят плоскость на четыре части. Ветви гиперболы лежат в двух из них. Каждая ветвь гиперболы неограниченно приближается к каждой из асимптот (не пересекая их). Расположение всякой гиперболы по отношению к своим асимптотам похоже на то, как гипербола $xy = 1$ расположена по отношению к осям координат. На всякой гиперболе нет никаких изгибов, как говорят, всякая ветвь гиперболы сохраняет свое направление выпуклости. Рисуя гиперболу, полезно помнить, что произвольная прямая не может пересекать гиперболу более чем в двух точках — об этом говорилось в замечании 3. Все эти факты плюс использование нескольких контрольных точек дает возможность довольно точно рисовать гиперболу в каждом конкретном случае.

Пример 6. Рассмотрим уравнение $x^2 - xy - x + 1 = 0$.

Относительно y оно линейное, а относительно x — квадратное, поэтому выразим из уравнения именно эту переменную

$$x = 0,5y + 0,5 \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{y}{2} - \frac{3}{4}}.$$

Квадратный трехчлен, стоящий под знаком корня, определен на промежутках $-\infty < y \le -3$ и $1 \le y < +\infty$. Следовательно, это гиперболический случай, графиком является гипербола. Для нахождения асимптот выделим полный квадрат и получим

$$x = 0,5y + 0,5 \pm \sqrt{\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - 1}.$$

Следовательно, при больших значениях $|y|$ получаем приближенные равенства

$$x \approx 0,5y + 0,5 \pm (0,5y + 0,5).$$

Эти равенства дают уравнения двух асимптот $x = y + 1$ и $x = 0$. Асимптоты делят плоскость на четыре части, гипербола расположена в двух из них. Чтобы узнать, в каких именно областях располагается кривая, достаточно взять одну контрольную точку. Выбрав, например, $x = 1$, получим $y = 1$ (рис. 9).

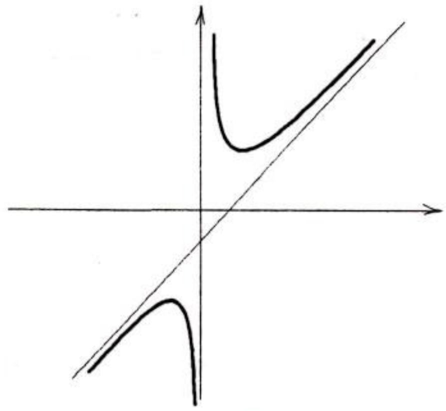


Рис. 9.

Пример 7. Определить вид кривой второго порядка

$$8x^2 + 20xy + 8y^2 - 8x - 4y - 1 = 0$$

и нарисовать ее.

Решение. В данном случае формула (2) принимает вид

$$y = \frac{1}{4}(1 - 5x \pm \sqrt{(3x+1)^2 + 2}). \tag{6}$$

Квадратный трехчлен под знаком радикала принимает только положительные значения, следовательно, данное уравнение задает на плоскости гиперболу. Ее асимптоты задаются уравнениями $y = \frac{1}{4}(1 - 5x \pm (3x + 1))$.

Отсюда получаем

$$y_1 = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad y_2 = -2x.$$

Асимптоты изображены на рис. 10. При выборе областей, содержащих гиперболу, учтено расположение двух контрольных точек, получаемых при $x = 0$, относительно асимптот. Старшеклассники могут проверить монотонность функций $y_{\text{В}}(x)$ и $y_{\text{Н}}(x)$, получаемых из (6), с помощью производной. Монотонность можно также установить, пользуясь определением.

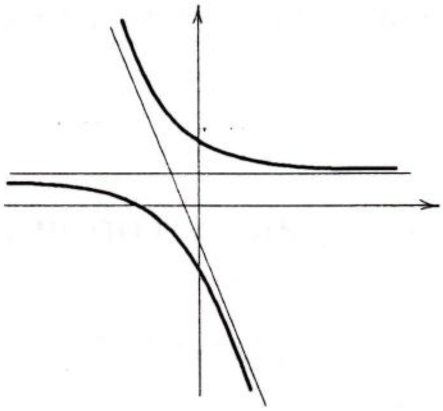


Рис. 10.

Задача 5. Напишите уравнение вида (1) с произвольными числовыми коэффициентами, определите тип получившейся кривой второго порядка и схематично изобразите ее на плоскости.

Вместо заключения

Нам не дано предугадать,
Как наше слово отзовется.

Закончился наш рассказ, а у наших читателей — пролетел вечер. Пройдут годы. Многие из них станут математиками, а кто-то — даже академиком. Академикам же помимо прочего положено давать интервью. Быть может, наш читатель, рассказывая о своем пути в науку, вспомнит свой журнал и скажет: *"Однажды, за один вечер, я прочитал о том, что такое теория кривых второго порядка."*

Дворянинов Сергей Владимирович,
Самарский государственный университет,
доцент, к.ф.-м.н.
e-mail: dvoryan@ssu.samara.ru

Линия Кассини и равносторонняя гипербола

А. Руинский

В статье изучаются геометрические свойства линий Кассини — кривых четвертого порядка, представляющих собой геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до двух данных точек постоянно.

Введение

Линии Кассини (или *овалы Кассини*) — геометрическое место точек (K), произведение расстояний от которых до двух данных точек $F_1\,(c;0)$ и $F_2\,(-c;0)$ (*фокусов*) — есть некоторое фиксированное число. То есть $KF_1 \cdot KF_2 = a^2$. Общее уравнение этих линий в декартовых координатах:

$$\left(x^2+y^2\right)^2 - 2c^2\left(x^2-y^2\right) = a^4 - c^4.$$

Форма линий Кассини достаточно разнообразна: два овала, двухпетельная лемниската Бернулли, гантелеобразная, эллипсообразная.

В данной заметке мы познакомимся с одним интересным геометрическим свойством нормали линий Кассини, общим для всех форм. Геометрические свойства нормали эллипса и касательной гиперболы, известные со времен Аполлония, относятся к треугольнику F_1PF_2 , где точка P лежит на кривой, а F_1 и F_2 — фокусы. Нормаль эллипса и касательная гиперболы являются биссектрисами этого треугольника.

Объектом нашего внимания будет треугольник F_1KF_2, где K — произвольная точка линии Кассини.

Нормаль линии Кассини

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Для произвольной точки K линии Кассини с фокусами F_1 и F_2 нормаль есть симедиана треугольника F_1KF_2.*

Доказательство. Пусть O — центр линии Кассини. Достаточно показать, что $\angle F_2KO$ равен углу между нормалью и стороной KF_1.

(1) Обозначим $K\left(x_0;y_0\right)$. Тогда:

$$tg\angle F_2KO=\left|\frac{\frac{y_0}{x_0+c}-\frac{y_0}{x_9}}{1+\frac{y_0^2}{x_0^2+cx_0}}\right|=\left|\frac{-cy_0}{x_0^2+y_0^2+cx_0}\right|.$$

(2) Продифференцируем уравнение линии Кассини в точке K и получим:

$$y'\left(x_0;y_0\right)=-\frac{x_0}{y_0}\cdot\frac{x_0^2+y_0^2-c^2}{x_0^2+y_0^2+c^2}.$$

Тогда угловой коэффициент нормали равен $k=\dfrac{y_0}{x_0}\cdot\dfrac{x_0^2+y_0^2+c^2}{x_0^2+y_0^2-c^2}$.

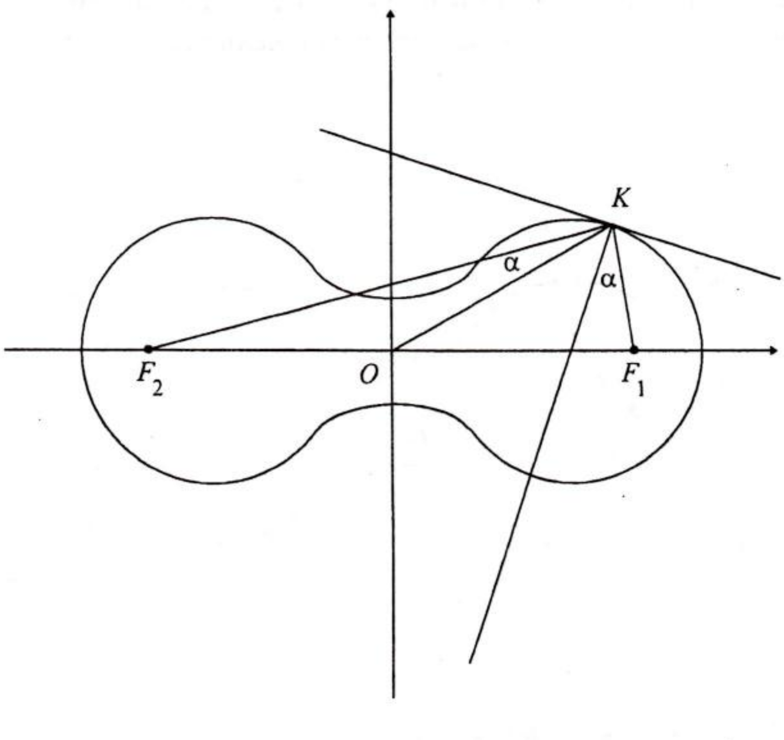
(3) Поскольку угловой коэффициент прямой KF_1 равен $y_0/(x_0-c)$, вычислим тангенс угла между нормалью и стороной KF_1. Обозначим искомый угол α .

$$tg\alpha=\left|\frac{\frac{y_0}{x_0}\cdot\frac{x_0^2+y_0^2+c^2}{x_0^2+y_0^2-c^2}-\frac{y_0}{x_0-c}}{1+\frac{y_0}{x_0}\cdot\frac{x_0^2+y_0^2+c^2}{x_0^2+y_0^2-c^2}\cdot\frac{y_0}{x_0-c}}\right|=\left|\frac{2c^2x_0y_0-cx_0^2y_0-cy_0^3-c^3y_0}{x_0^4+2x_0^2y_0^2+y_0^4+c^3x_0+c^2y_0^2-c^2x_0^2-cx_0^3-cx_0y_0^2}\right|$$

Преобразуем знаменатель последней дроби, выделяя выражение $x_0^2+y_0^2+cx_0$. Получаем:

$$tg\alpha\ =\ \left|\frac{-cy_0\left(x_0^2+y_0^2+c^2=2cx_0\right)}{\left(x_0^2+y_0^2+cx_0\right)\left(x_0^2+y_0^2+c^2=2cx_0\right)}\right|=\left|\frac{-cy_0}{x_0^2+y_0^2+cx_0}\right|.$$

Теорема доказана.



Ортогональное семейство кривых

Рассмотрим следующую задачу.

Найти семейство кривых, ортогональных семейству линий Кассини с данными фокусами.

Ясно, что для этих кривых касательные — симедианы треугольника F_1KF_2. Известные ортогональные семейства:

(1) концентрические окружности и прямые, проходящие через центр,

(2) конфокальные эллипсы и гиперболы.

Для решения данной задачи достаточно решить дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{y}{x} \cdot \frac{x^2 + y^2 + c^2}{x^2 + y^2 - c^2} \quad \Leftrightarrow \quad y'x^3 + y'xy^2 - c^2y'x - y^3 - x^2y - c^2y = 0.$$

Разделим на x^2y^2 и сгруппируем члены уравнения попарно.

$$\left(\frac{y'x}{y^2} - \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\right) - c^2\left(\frac{y'}{xy^2} + \frac{1}{x^2y}\right) = 0$$

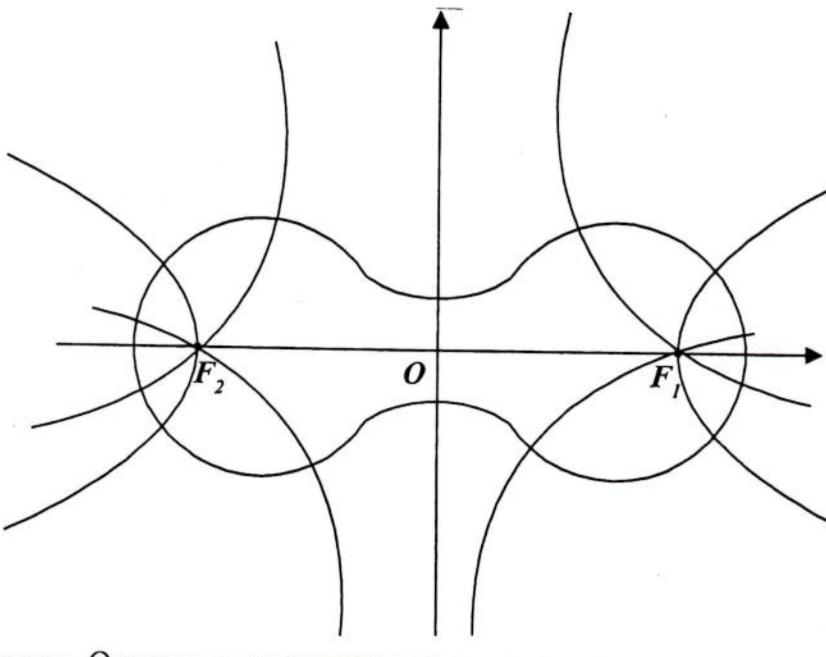
Очевидно, что решением этого уравнения будет семейство кривых

$$-\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{c^2}{xy} = A \quad \text{или} \quad x^2 - y^2 + Axy - c^2 = 0.$$

Легко показывается, что при любом A это уравнение определяет равностороннюю гиперболу с центром в начале координат и проходящую через фокусы линии Кассини.

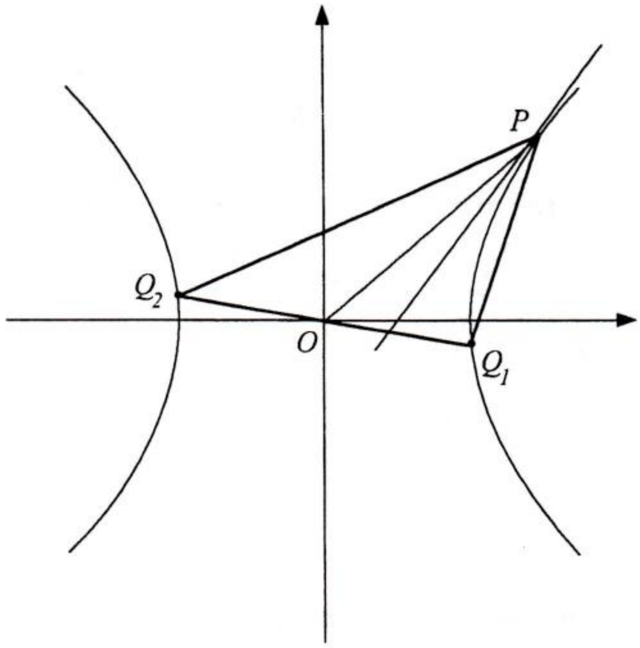
Таким образом, доказаны две теоремы.

Теорема 2. *Семейство линий Кассини с центром O и фокусами F_1, F_2 ортогонально семейству равносторонних гипербол с центром O, и проходящими через F_1, F_2.*



Замечание. Очевидным решением исходного уравнения является ось x ($y = 0$).

Теорема 3. *Пусть точки P, Q_1 и Q_2 принадлежат равносторонней гиперболе, причем Q_1 и Q_2 симметричны относительно центра гиперболы. Тогда касательная гиперболы в точке P есть симедиана треугольника PQ_1Q_2.*



Фокусы гипербол ортогонального семейства

Докажем следующую теорему:

Теорема 4. *Геометрическое место фокусов равносторонних гипербол, ортогональных семейству линий Кассини с фокусами F_1 и F_2, есть лемниската Бернулли данного семейства.*

Доказательство.

(1) Пусть G_1 и G_2 — фокусы равносторонней гиперболы с центром O, проходящей через фокусы F_1 и F_2 семейства линий Кассини. Покажем, что G_1 и G_2 лежат на лемнискате с фокусами F_1 и F_2, то есть, что

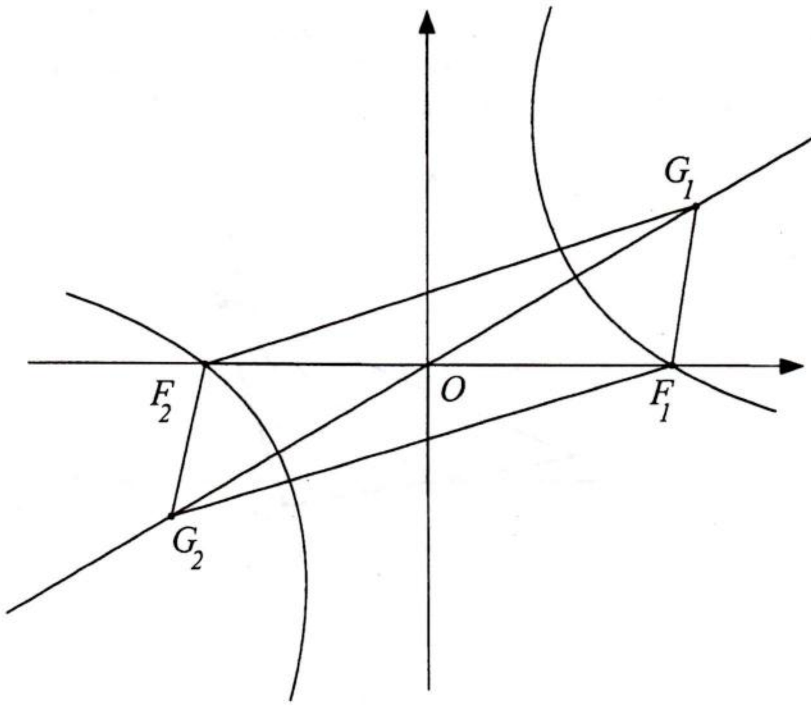
$$G_1F_1 \cdot G_1F_2 = (OF_1)^2 \text{ и } \quad G_2F_1 \cdot G_2F_2 = (OF_1)^2 .$$

Действительно, для точек F_1 и F_2, лежащих на равносторонней гиперболе, имеем:

$$|F_1G_1 - F_1G_2| = |F_2G_1 - F_2G_2| = \sqrt{2}OG_1.$$

Поскольку O — центр гиперболы, $G_1F_1G_2F_2$ — параллелограмм. Тогда:

$$F_1G_2 = F_2G_1 \Rightarrow |F_1G_1 - F_1G_2| = |F_1G_1 - F_2G_1| = \sqrt{2}OG_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (F_1G_1 - F_2G_1)^2 = 2OG_1^2.$$



По свойству сторон и диагоналей параллелограмма:

$$(2OF_1)^2 + (2OG_1)^2 = 2(F_1G_1)^2 + 2(F_2G_1)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(OF_1)^2 + (F_1G_1 - F_2G_1)^2 = (F_1G_1)^2 + (F_2G_1)^2.$$

Ясно, что из последнего равенства следует: $G_1F_1 \cdot G_1F_2 = (OF_1)^2$.

Аналогично, $G_2F_1 \cdot G_2F_2 = (OF_1)^2$.

(2) Аналогичным способом доказывается обратное утверждение, то есть:

Если точки G_1 и G_2 лежат на лемнискате с фокусами F_1 и F_2 и симметричны относительно ее центра, то G_1 и G_2 — фокусы равносторонней гиперболы, проходящей через F_1 и F_2.

Приведем другую формулировку теоремы 4.

Если равносторонняя гипербола и лемниската Бернулли имеют общий центр, то гипербола проходит через фокусы лемнискаты тогда и только тогда, когда лемниската проходит через фокусы гиперболы.

Замечание. Доказанная теорема дополняет ряд интересных свойств, связывающих равностороннюю гиперболу и лемнискату Бернулли.

(1) Лемниската — г.м.т. оснований перпендикуляров,опущенных из центра равносторонней гиперболы на ее касательные.

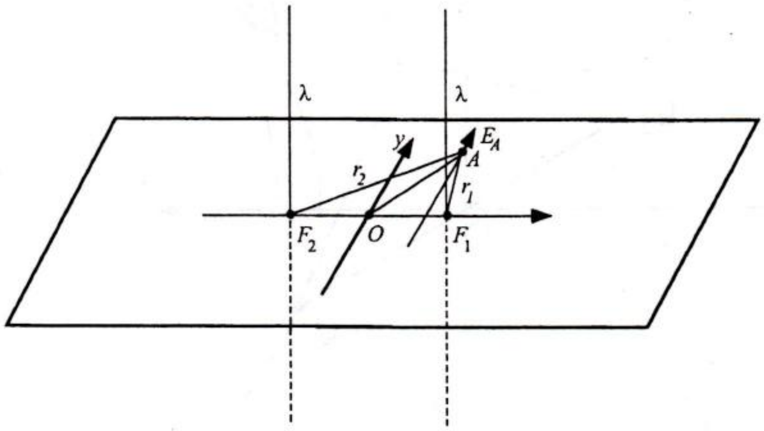
(2) Равносторонняя гипербола и лемниската с общим центром и общими осями, инверсны друг другу.

Электростатическая модель

Рассмотрим поле бесконечной прямой нити заряженной однородно положительно (или отрицательно) с линейной плотностью λ. С помощью теоремы Остроградского-Гаусса можно показать, что напряженность поля $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$, а потенциал $\varphi(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r$, где r — расстояние до нити.

Тогда для поля двух параллельных нитей, заряженных с одинаковой линейной плотностью имеем $\varphi_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_1 r_2$, где r_1 и r_2 расстояние некоторой точки до нитей. Отсюда $r_1 r_2 = e^{-\frac{2\pi\varepsilon_0\varphi_0}{\lambda}} = const$.

Пересечем нити перпенликулярной плоскостью и обозначим точки пересечения F_1 и F_2.



Тогда множество точек, потенциал которых φ_0, описывает линию Кассини с фокусами F_1 и F_2 (см. т. А). Очевидно, что эквипотенциальными поверхностями в этом поле будет семейство прямых цилиндров Кассини, силовыми линиями — цилиндры равносторонних гипербол, а направление силы, действующей на заряд определяется симедианой треугольника AF_1F_2. Похожие, но немного более сложные поля, получаются для двух одинаковых цилиндров, заряженных по поверхности или по объему.

Задачи

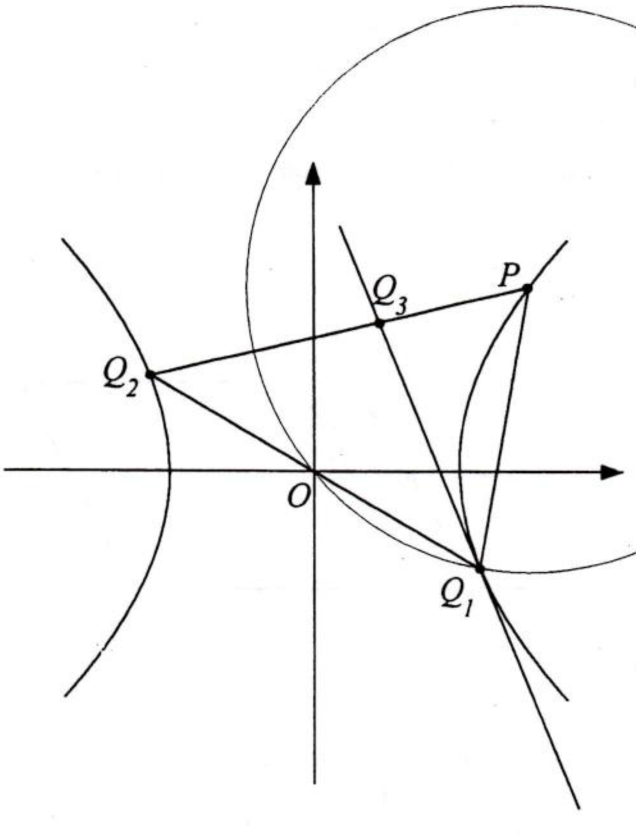
Рассмотрим несколько геометрических задач, опирающихся на доказанные теоремы.

Задача 1. *Доказать, что если окружность с центром O и радиусом OF_1 пересекает линию Кассини, то касательная этой линии в точках пересечения параллельна F_1F_2.*

Доказательство. Ясно, что если K — точка пересечения, то треугольник F_1KF_2 — прямоугольный и его симедиана, как известно, является высотой. То есть нормаль перпендикулярна F_1F_2, а касательная параллельна.

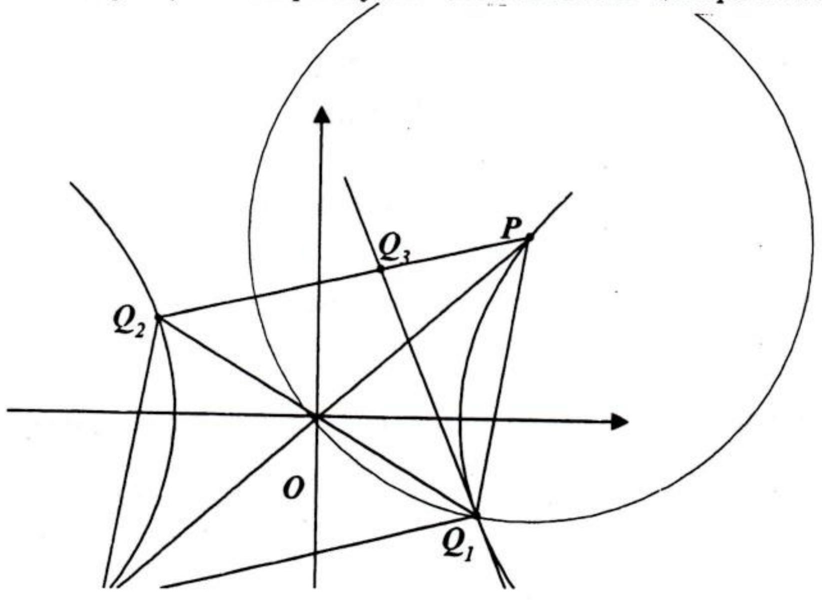
Задача 2. *Точки P, Q_1 и Q_2 лежат на равносторонней гиперболе, причем точки Q_1 и Q_2 симметричны относительно центра гиперболы. Проводим окружность с центром P и радиусом PQ_1 и строим точку Q_3, инверсную точке Q_2 относительно этой окружности. Доказать, что Q_3Q_1 — касательная гиперболы.*

Доказательство.



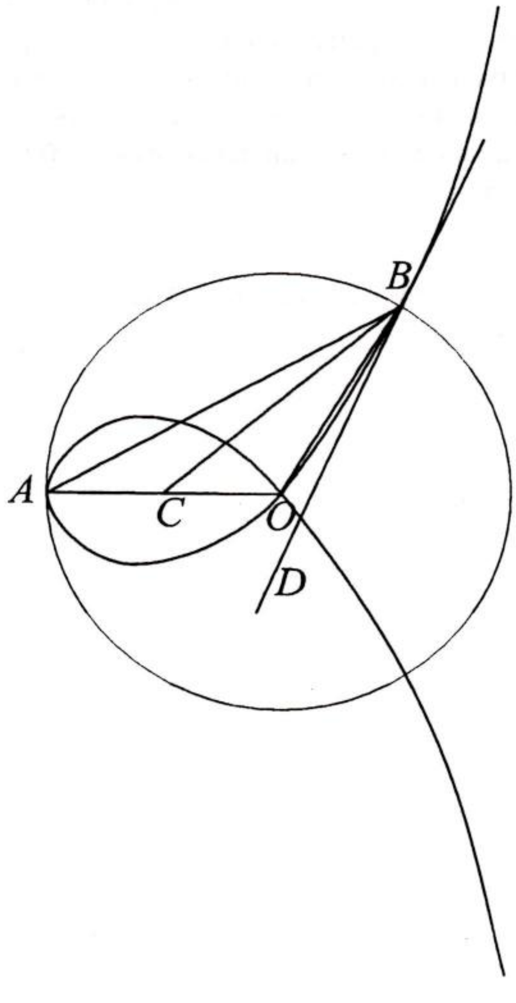
(1) Из инверсности точек Q_2 и Q_3 следует подобие треугольников PQ_1Q_3 и PQ_2Q_1. Отсюда $\angle PQ_1Q_3 = \angle PQ_2Q_1$.

(2) Построим точку P', симметричную P относительно центра гиперболы (см. рис.)



Поскольку $PQ_1P'Q_2$ — параллелограмм, $\angle P'Q_1Q_2 = \angle PQ_2Q_1 = \angle PQ_1Q_3$.

Тогда Q_1Q_3 — симедиана треугольника PQ_1P' и, по теореме 3, касательная гиперболы.



Задача 3. *Пусть A — полюс строфоиды, O — узловая точка, C — середина отрезка AO. Окружность с центром O и радиусом AO пересекает строфоиду в точке B. BD — кательная строфоиды в точке B. Доказать, что $\angle ABC = \angle OBD$.*

Доказательство. Рассмотрим инверсию строфоиды относительно данной окружности. Образом строфоиды является равносторонняя гипербола с вершинами A и O. Это свойство доказано в моей статье «Инверсии равносторонней гиперболы» (Математическое просвещение, выпуск 4, 2000 г.). Поскольку точка B переходит в себя, касательная гиперболы в точке B — симедиана треугольника ABO, то есть образует с BO угол, равный $\angle ABC$. Ввиду того, что инверсия сохраняет углы между образами, касательная строфоиды образует с BO тот же угол, что и касательная гиперболы. Таким образом $\angle ABC = \angle OBD$.

Замечание 1. Аналогичное свойство имеет место и для наклонных строфоид. Можно показать, что инверсными образами наклонных строфоид относительно окружности с центром в узловой точке и проходящей через полюс будут равносторонние гиперболы с центром в точке C.

Замечание 2. С помощью доказанного свойства легко обосновать простой способ построения касательной строфоиды (прямой или наклонной).

Действительно, пусть P — произвольная точка строфоиды, а P' ее инверсный образ, принадлежащий равносторонней гиперболе. Симедиана треугольника $AP'O$ — касательная гиперболы. Если от прямой OP в точке P отложить угол равный углу между $P'O$ и симедианой (в противоположную полуплоскость), получится касательная строфоиды в точке P.

Руинский Александр,
преподаватель математики колледжа Тель-Хай,
(Верхняя Галилея, Израиль).

Интеграл Римана как функция области интегрирования

М. К. Яковлев

В статье предлагается единый подход к интегралам всех типов, изучаемых в курсе высшей математики высших технических учебных заведений.

Теория определённых интегралов всех видов (по отрезку, по плоской области, по телу, по кривой или криволинейной поверхности) исторически возникла как решение задачи восстановления скалярной аддитивной величины (САВ) по известной плотности её распределения по соответствующей области.

В этом смысле операция интегрирования является обратной по отношению к операции вычисления плотности распределения САВ по соответствующей области распределения, называемой дифференцированием рассматриваемой САВ по мере области распределения.

Строго определяя упомянутые выше понятия, мы получим теорию, по форме и по существу не отличающуюся от теории восстановления первообразной $F(x)$ по известной производной $f(x)$ числового аргумента x. Сформулированная точка зрения на интеграл, по существу, изложена в монографии А. Лебега «Об измерении величин», написанной более 60 лет тому назад, но до сих пор не достаточно используемой в советской учебной литературе по анализу. Вследствие этого наши учащиеся полагают, что предметом интегрирования являются пределы интегральных сумм, а не вопросы измерения скалярных аддитивных величин.

Далее следует обратить внимание на то, что практическое вычисление плотности распределения САВ будет иметь физический смысл, если в близких точках области эти плотности будут близки по значению, то есть плотность распределения САВ должна быть непрерывна как функция точки, если она определена в этой точке. Разумеется, может случиться, что в некоторых точках области эта плотность не определена или уходит в бесконечность. Можно ли и как восстановить САВ по разрывной плотности? Ответ на этот вопрос становится более простым и понятным, если обучаемые предварительно поймут решение задачи в случае непрерывной плотности. Поэтому в методическом и логическом плане представляется целесообразным сначала изучить интегралы от непрерывной функции $f(p)$ точки p. Техника доказательств всех формул этой теории сводится просто к вычислению производной по мере области интегрирования. Ниже рассматриваются сразу все виды определённых интегралов. При обучении в этом, разумеется, нет необходимости, и, в зависимости от математического развития слушателей, преподаватель может повторять одно и то же для каждого вида определённых интегралов отдельно. Предлагаемая здесь методика неоднократно использовалась автором, начиная с семидесятых годов, при изложении теории интегрирования студентам 1-го и 2-го курсов Рязанской государственной радиотехнической академии.

Статья предназначена преподавателям математического анализа в школе и в вузе.

1. Основные определения

Пусть G — ограниченное, связное множество точек $p \in \mathbb{R}^n$, представляющее собою:

1) отрезок прямой или непрерывной кривой линии,

2) кусок плоскости или непрерывной поверхности,

3) тело в $\mathbb{R}^3$ или, наконец,

4) любое другое аналогичное многообразие в $\mathbb{R}^n$.

Естественным образом в G можно ввести понятие окрестности точки $p \in G$, а, следовательно, и понятие открытой или замкнутой подобласти $g \subseteq G$.

Пусть $\bar{g}$ обозначает замыкание g.

Определение 1. *Открытые g и замкнутые $\bar{g}$ подобласти G будем называть ячейками G. Конечное или счетное множество $R(G) = \{\bar{g}_i\}$ замкнутых ячеек $\bar{g}_i \subseteq G$ назовём разбиением области G*, если $\bigcup\limits_i \bar{g}_i = \bar{G}$ и $g_i \cap g_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Пусть A — некоторое множество открытых, замкнутых и полуоткрытых ячеек G, удовлетворяющее условиям:

1) $G \in A$;

2) если $g \in A$, то $\bar{g} \in A$;

3) объединение конечного или счетного множества ячеек $\bar{g}_i \in A$ не налегающих друг на друга, то есть $g_i \cap g_j = \varnothing$ при $i \neq j$, принадлежит A, если оно связно;

4) непустое пересечение $g \cap g'$ ячеек g и g' из A принадлежит A, если оно связно или состоит из ячеек $g_i \in A$, не пересекающихся между собой;

5) если $g \in A$, $\bar{g}' \in A$ и $\bar{g}' \subset g$, то разность $g \setminus \bar{g}' \in$ A, если она связна или состоит из непересекающихся между собой ячеек $g_i \in A$;

6) для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $R(G)$ области G на ячейки $\bar{g}_i$, диаметр которых меньше ε.

Пусть на алгебре ячеек A задана скалярная функция $\Phi : A \to R$, обозначаемая далее $\Phi(g)$, $g \in A$.

Определение 2. *Скалярная функция $\Phi(g)$ ячейки $g \in A$ называется аддитивной на A*, если

$$\forall g \in A \quad \forall \bar{g}' \in A : \bar{g}' \subset g \Rightarrow \Phi(g) = \Phi(\bar{g}') + \Phi(g \setminus \bar{g}').$$

Пусть $g(p)$ — ячейка, содержащая точку p.

Определение 3. *Функция $\Phi(g)$, $g \in A$ называется непрерывной на A*, если

1) $\forall\, g \in A; \quad \Phi(g) = \Phi(\bar{g})$

2) $\forall\, p\, \forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, \bar{g}(p) : diam\, \bar{g}(p) < \delta \Rightarrow |\Phi\left(\bar{g}(p)\right)| < \varepsilon.$

В дальнейшем, имея в виду условие 2, будем говорить и писать

$$\lim_{\bar{g}(p) \to p} \Phi\left(\bar{g}(p)\right) = 0.$$

Определение 4. *Значение $\Phi(G)$ функции $\Phi(g)$ при $G = g$ будем называть непрерывной скалярной величиной, аддитивно распределённой по ячейкам A (НСАВ).*

Для того, чтобы ввести понятие плотности этой величины, нужно, чтобы на множестве A была задана ещё одна непрерывная и аддитивная функция $m = m(g)$, $g \in A$, принимающая только положительные значения. Эта функция $m = m(g)$ в дальнейшем называется мерой, а сама область G, на ячейках которой задана мера $m(g)$, называется измеримой. Вопрос о том, как задать такую функцию $m = m(g)$ мы оставим пока открытым. В качестве меры области G чаще всего выступает длина, площадь, объём области G в зависимости от её размерности.

Определение 5. *Число $\frac{\Phi(\bar{g}(p))}{m(\bar{g}(p))}$ называется средней плотностью величины $\Phi\left(\bar{g}(p)\right)$ в области $\bar{g}$.*

Предел средней плотности при условии, что ячейка $\bar{g}(p)$ стягивается к своей точке p, называется плотностью величины $\Phi(G)$ в точке p. Точнее

$$\begin{aligned}\lim_{\bar{g}(p)\to p} \frac{\Phi\left(\bar{g}(p)\right)}{m\left(\bar{g}(p)\right)} = f(p) \rightleftarrows \forall \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, p \in \bar{g}(p)\; \forall \bar{g}(p) : \\ diam\, \bar{g}(p) < \delta \Rightarrow \left| \frac{\Phi\left(\bar{g}(p)\right)}{m(\bar{g}(p))} - f(p) \right| < \varepsilon.\end{aligned} \tag{1}$$

Число $f(p)$ будем обозначать так же $\Phi'(p)$ и называть производной по мере $m(g)$ в точке p. Функция $\Phi(g)$, $g \in A$ называется дифференцируемой на G, если $\forall\, p \in G$ она имеет плотность в точке p (производную по выбранной мере $m(g)$).

Определение 6. *Пусть функция* $f(p)$ точки p определена в области G. *Скалярная функция $\Phi(g)$, $g \in A$ ячейки g называется первообразной для* $f(p)$, если

$$\forall\, p \in G : \quad \Phi'_{m(g)}(p) = f(p). \tag{2}$$

Замечание. Пусть множество B ячеек g содержится в A. Если условие (1) выполняется лишь для ячеек из B, то говорят о частичной производной, вычисляемой по ячейкам алгебры B.

2. Основные теоремы

Теорема 1. *Если плотность $f(p)$ непрерывной скалярной аддитивной величины $\Phi(g)$ определена в каждой точке $p \in G$, то функция $f(p)$ непрерывна на G.*

Доказательство. Пусть p и p_0 принадлежат ячейке $\bar{g}(p_0)$ достаточно малого диаметра. Тогда из (1) следует

$$|f(p) - f(p_0)| = \left| f(p) - \frac{\Phi\left(\bar{g}(p_0)\right)}{m\bar{g}(p_0)} + \frac{\Phi\left(\bar{g}(p_0)\right)}{m\bar{g}(p_0)} - f(p_0) \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{\Phi\left(\bar{g}(p_0)\right)}{m\bar{g}(p_0)} - f(p) \right| + \left| \frac{\Phi\left(\bar{g}(p_0)\right)}{m\bar{g}(p_0)} - f(p_0) \right| < 2\varepsilon,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{p \to p_0} f(p) = f(p_0) \quad \forall p_0 \in G$.

Теорема 2. *Пусть функция* $\Phi(g)$, $g \in A$ *дифференцируема на* G. *Если* $\Phi(\bar{G}) = 0$, *то* $\exists p_0 \in G: \ \Phi'_{m(\bar{g})}(p_0) = 0$.

Доказательство. Если $\Phi(g) \equiv 0$ на A, то $\Phi'_{m(g)}(p) \equiv 0$, поэтому будем предполагать, что $\Phi'_{m(g)}(p) \neq 0$. Если функция $\Phi'_{m(g)}(p)$ меняет знак в области G, то, будучи непрерывной, она обратится в нуль в некоторой точке $p_0 \in G$. Поэтому предположим, что $\Phi'_{m(g)}(p)$ не меняет знака в области G. Пусть $\forall p \subset G: \ \Phi'_{m(g)}(p) > 0$. Из условия (1) существования производной следует:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \bar{g}(p) \ \forall p \in \bar{g}(p) : diam\, \bar{g}(p) < \delta \Rightarrow \left| \frac{\Phi\left(\bar{g}(p)\right)}{m(\bar{g})(p)} - \Phi'_{m(g)}(p) \right| < \varepsilon.$$

Пусть $R_\delta(\bar{G})$ — разбиение $\bar{G}$ на ячейки, диаметр которых меньше δ. Тогда

$$\forall i \, \forall \bar{g}_i \in R_\delta(\bar{G}) \, \forall p_i \in \bar{g}_i : \left| \frac{\Phi\left(\bar{g}_i(p_i)\right)}{m(\bar{g})(p_i)} - \Phi'(p_i) \right| < \varepsilon.$$

Освободившись от модуля, получим

$$\forall i : \Phi'(p_i)m(\bar{g}_i) - \varepsilon \cdot m(g_i) < \Phi\left(\bar{g}_i(p_i)\right) < \Phi'(p_i) \cdot m(\bar{g}_i) + \varepsilon \cdot m(\bar{g}_i). \qquad (*)$$

Просуммировав неравенства $(*)$ по всем ячейкам разбиения $R_\delta(\bar{y})$, получим

$$\sum_i \Phi'(p_i)m(\bar{g}_i) - \varepsilon m(\bar{G}) < \Phi(\bar{G}) < \sum_i \Phi'(p_i)m(\bar{g}_i) + \varepsilon \cdot m(\bar{G}).$$

Так как $\Phi(\bar{G}) = 0$, то из левого неравенства следует при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_i \Phi'(p_i) \cdot m(\bar{g}_i) < \varepsilon \cdot m(\bar{G}),$$

то есть $\sum\limits_i \Phi'(p_i)m(g_i) = 0$, что невозможно, так как все слагаемые суммы $\sum\limits_i \Phi'(p_i)m(g_i)$ положительны.

Аналогично отвергается предположение, что $\forall p \in y : \Phi'(p) < 0$. Следовательно, непрерывная, согласно теореме 1, функция $\Phi'(p)$ меняет знак в области G и потому обращается в некоторой точке в нуль.

Доказанная теорема 2 является распространением теоремы Ролля на функции ячейки.

Теорема 3. *Если $\Phi(g)$ непрерывна на $\bar{\text{G}}$ и дифференцируема на G, то существует $p_0 \in G$ такая, что $\Phi(\bar{G}) = \Phi'(p_0) \cdot m(\bar{G})$.*

Доказательство. Рассмотрим аддитивную функцию

$$\varphi(\bar{g}) = \Phi(\bar{g}) - \frac{\Phi(\bar{G})}{m(\bar{G})} \cdot m(\bar{g}) \, , \; \bar{g} \in A.$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы 2:

1) $\varphi'(p) = \Phi'(p) - \dfrac{\Phi(\bar{G})}{m(\bar{G})}$,

2) $\varphi(\bar{G}) = 0$,

следовательно, $\exists\, p_0 \in G : \varphi(p_0) = 0$, то есть

$$\exists\, p_0 \in G : \; \Phi'(p_0) = \frac{\Phi(\bar{G})}{m(\bar{G})}.$$

Следствие 1. *Для любой функции $f(p)$, $p \in G$ существует не более одной первообразной Φ(g).*

Действительно, пусть $\Phi(g)$ и $F(g)$ первообразные для $f(p)$. Тогда производная их разности $\varphi(g) = \Phi(g) - F(g)$, $g \in A$ тождественно равна нулю. Следовательно, $\forall\, \bar{g} \in A\, \exists\, p_0 : \varphi(\bar{g}) = \varphi'_{m(g)}(p_0) \cdot m(\bar{g}) = 0$, то есть $\Phi(g) \equiv F(g)$.

Следствие 2. *Существует не более одной скалярной аддитивной величины распределённой по* G *с наперёд заданной плотностью $f(p)$, $p \in G$.*

Следствие 3. *Пусть A_1 более обширное множество ячеек $g \subseteq G$, чем A, то есть $A \subset A_1$.* Тогда

$$\lim_{\substack{\bar{g}(p) \to p \\ \bar{g}(p) \in A_1}} \frac{\Phi(\bar{g})}{m(\bar{g})} = \lim_{\substack{\bar{g}(p) \to p \\ \bar{g} \in A}} \frac{\Phi(\bar{g})}{m(\bar{g})},$$

если последний существует.

Действительно, согласно теореме 3

$$\forall\, \bar{g} \in A_1\, \exists\, p_0 \in g : \frac{\Phi(\bar{g})}{m(\bar{g})} = \Phi'_A(p_0),$$

переходя к пределу при $\bar{g} \to p$ и учитывая непрерывность производной $\Phi'(p)$ получим:

$$\Phi'_{A_1}(p) = \lim_{\substack{\bar{g} \to p \\ \bar{g} \in A_1}} \frac{\Phi(\bar{g})}{m(\bar{g})} = \lim_{g \to p} \Phi'_A(p_0) = \Phi'_A(p).$$

Согласно следствию 3, для вычисления плотности $\Phi'(p)$ по множеству ячеек A_1 достаточно найти частичную плотность по множеству A, выбирая в качестве ячейки $\bar{g}(p)$ области G, например, n-мерный куб, содержащий точку p.

Далее мы решим вопрос о существовании первообразной для непрерывной функции $f(p)$ точки $p \in G$.

3. Верхний и нижний интеграл Дарбу

Пусть J — ограниченная замкнутая область и $m(g)$, $g \in A$ — мера, заданная на A. $f(p)$, $p \in \bar{G}$ — ограниченная на $\bar{G}$ скалярная функция. Пусть $R(\bar{G}) = \{\bar{g}_1, \bar{g}_2, ..., \bar{g}_n, ...\}$ — разбиение $\bar{G}$ на неналегающие друг на друга ячейки $\bar{g}_i \in A$.

Обозначим:

$$m_i = \inf_{p \in \bar{g}_i} \{f(p)\}, \quad \mathrm{M}_i = \sup_{p \in \bar{g}_i} \{f(p)\}$$

$$m = \inf_{p \in \bar{G}} \{f(p)\}, \quad M = \sup_{p \in \bar{G}} \{f(p)\}$$

$$\underline{S}\left(f, R(\bar{G})\right) = \sum_{\bar{g}_i \in R(\bar{G})} m_i \cdot m(\bar{g}_i), \qquad \overline{S}\left(f, R(\bar{G})\right) = \sum_{\bar{g}_i \in R(\bar{G})} M_i m(\bar{g}_i)$$

Числа $\underline{S}$ и $\overline{S}$ называются нижней и верхней суммой Дарбу соответственно. Легко показать, что для любых разбиений R и R' области $\bar{G}$ на ячейки из A справедливо:

$$m \cdot m(\bar{G}) \le \underline{S}(f, R) \le \overline{S}(f, R') \le M \cdot m(\bar{G}). \tag{3}$$

Обозначим

$$\underline{J}(f) = \sup_R \{\underline{S}(f, R)\} \qquad \overline{J}(f) = \inf_R \{\overline{S}(f, R)\}.$$

Числа $\underline{J}(f)$ и $\overline{J}(f)$ однозначно определены для любой ограниченной функции $f(p)$, $p \in \bar{\mathrm{J}}$ и называются нижним и верхним интегралами Дарбу от функции $f(p)$. Из (3) следует, что

$$m \cdot m(\bar{G}) \le \underline{J}(f) \le \overline{J}(f) \le Mm(\bar{G}). \tag{4}$$

Пусть $\bar{g}$ — произвольная (неопределённая) замкнутая ячейка из A.

Аналогичные построения для переменной ячейки $\bar{g}$ приводят к неравенству:

$$\forall \bar{g} \in A : m_{\bar{g}} \cdot m(\bar{g}) \le \underline{J}(f, \bar{g}) \le \overline{J}(f, \bar{g}) \le M_{\bar{g}} \cdot m(\bar{g}), \tag{4a}$$

где $m_{\bar{g}} = \inf\limits_{p \in \bar{g}} \{f(p)\}$, $M_{\bar{g}} = \sup\limits_{p \in \bar{g}} \{f(p)\}$.

Переменные $\underline{J}(\bar{g})$ и $\overline{J}(\bar{g})$ называются нижним и верхним неопределенными интегралами соответственно.

Функции $\underline{J}(f, \bar{g})$ и $\overline{J}(f, \bar{g})$ ячейки $\bar{g} \in A$ аддитивны на A.

Действительно, пусть область $\bar{g}$ разрезана на две не налегающие друг на друга ячейки $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$ так, что $\bar{g} = \bar{g}_1 \cup \bar{g}_2$ и $g_1 \cap g_2 = \varnothing$.

Пусть R_1 и R_2 — произвольные разбиения областей $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$. Тогда $R_1 \cup R_2 \equiv R$ есть некоторое разбиение R ячейки $\bar{g}$. Пусть R' — произвольное разбиение ячейки $\bar{g}$. Ясно, что

$$\underline{S}(R) = \underline{S}_1(R_1) + \underline{S}_2(R_2) \le \sup_{R'} \{\underline{S}(R)\} \equiv \underline{J}(\bar{g}),$$

откуда $\underline{S}_1(R_1) \le \underline{J}(\bar{g}) - \underline{S}_2(R_2)$. Следовательно,

$$\underline{J}(\bar{g}_1) = \sup_{R_1} \{\underline{S}_1(R_1)\} \le \underline{J}\{\bar{g}) - \underline{S}_2(R_2).$$

Далее $\underline{S}_2(R_2) \le \underline{J}(\bar{g}) - \underline{J}(\bar{g}_1)$, откуда следует, что

$$\underline{J}(g_2) = \sup_{R_2} \{\underline{S}_2(R_2)\} \le \underline{J}(\bar{g}) - \underline{J}(\bar{g}_1).$$

Таким образом,

$$\underline{J}(\bar{g}_1) + \underline{J}(\bar{g}_2) \le \underline{J}(\bar{g}). \tag{$*$}$$

Далее, пусть R' — произвольное разбиение $\bar{g}$. Общая граница ячеек $\bar{g}_1$ и $\bar{g}_2$ разрежет некоторые ячейки разбиения R' на более мелкие. Полученное новое разбиение обозначим R"

$$\underline{S}(R') \le \underline{S}(R") = \underline{S}_1(R_1) + \underline{S}_2(R_2) \le \underline{J}(\bar{g}_1) + \underline{J}(\bar{g}_2).$$

Следовательно,

$$\underline{J}(\bar{g}) = \sup_{R'} \{\underline{S}(R')\} \le \underline{J}(\bar{g}_1) + \underline{J}(\bar{g}_2). \tag{$**$}$$

Из неравенств ($*$) и ($**$) следует

$$\forall\, \bar{g} \in A: \quad \underline{J}(\bar{g}) = \underline{J}(\bar{g}_1) + \underline{J}(\bar{g}_2).$$

Аналогично доказывается аддитивность верхнего интеграла Дарбу:

$$\forall\, \bar{g} \in A: \quad \bar{\mathrm{J}}(\bar{\mathrm{g}}) = \bar{J}(\bar{g}_1) + \bar{J}(\bar{g}_2), \quad \text{если} \quad \bar{g} = \bar{g}_1 + \bar{g}_2.$$

Теорема 4 (о существовании первообразной $\Phi(g)$). *Для любой непрерывной на ограниченной измеримой области G функции $f(p)$ существует (и только одна) первообразная функция $\Phi(g)$, $g \in A$ такая, что $\Phi'_{m(g)}(p) \equiv f(p)$, $\forall\, p \in G$.*

Действительно, поделив члены неравенства (4а) на $m(\bar{g})$, получим

$$m_g \le \frac{\underline{J}(\bar{g})}{m(\bar{g})} \le \frac{\bar{J}(\bar{g})}{m(\bar{g})} \le M_g. \tag{5}$$

Крайние члены неравенства (5) при стягивании ячейки $\bar{g}$ к её точке p стремятся к общему пределу $f(p)$, откуда, согласно теореме о пределе промежуточной переменной, заключаем:

$$\forall\, p \in y: \quad \underline{J}'_{m(g)}(p) = \lim_{\bar{g}\to p} \frac{\underline{J}(\bar{g})}{m(\bar{g})} = f(p) \qquad \bar{J}'_{m(g)}(p) = \lim_{\bar{g}\to p} \frac{\bar{J}(\bar{g})}{m(\bar{g})} = f(p). \tag{6}$$

Итак, нижний и верхний неопределённые интегралы $\underline{J}(\bar{g})$ и $\bar{J}(g)$ являются первообразными для непрерывной $f(p)$ и потому $\forall\, \bar{g} \in A: \ \underline{J}(\bar{g}) = \bar{J}(\bar{g})$, согласно следствию 1 к теореме 3.

Следствие 1. *Существует и только одна НСАВ, распределённая по ячейкам области G с наперёд заданной непрерывной плотностью $f(p)$. Этой величиной является общее значение J верхнего и нижнего интегралов $\underline{J}(\bar{G}) = \bar{J}(G)$.*

Замечание. Если функция $f(p)$ определена $\forall p \in \bar{G}$, ограничена и выполняется одно из равенств (6), то именно соответствующий интеграл Дарбу будет первообразной для $f(p)$, и $f(p)$ — необходимо непрерывна $\forall p \in G$, согласно теореме 1.

Если оба равенства (6) несправедливы, хотя бы в одной точке $p \in G$, то ни $\underline{J}$\{g\}, ни $= \overline{J}(g)$ не являются первообразными для $f(p)$ в смысле определения 5.

В связи с этим вводится

Определение 6. *Ограниченная функция $f(p), p \in G$ называется интегрируемой по Риману по области G, если $\underline{J}(G) = \overline{J}(G)$.*

Определение 7. *Интегрируемая по Риману функция $f(p)$ называется плотностью распределения величины $\int\limits_G f(p)d\mathrm{m}(\mathrm{g})$.*

Равенство

$$\lim_{\bar{g}\to p} \frac{\int\limits_{\bar{g}} f(p)dm(g)}{m(\bar{g})} = f(p) \tag{7}$$

выполняется лишь в точках непрерывности $f(p)$. Для непрерывных функций $f(p)$ новое определение 7 плотности равносильно старому определению 5.

Таким образом интеграл по ограниченной измеримой области G от интегрируемой по Риману функции $f(p)$ — это скалярная аддитивная величина, распределённая по ячейкам из A с плотностью $f(p)$ в смысле определения 7.

3.1 Интеграл как предел интегральной суммы

Интегральная сумма для разбиения $R(G)$ — это

$$S\left(f(p), R(G)\right) \equiv \sum_i f(p_i)m(\bar{g}_i), \quad \text{где} \quad p_i \in \bar{g}_i.$$

Очевидно $\underline{S}\,(R, f) \le S\,(f, R) \le \overline{S}\,(f, R)$. Так как крайние члены этого неравенства при $diamR \to 0$, стремятся к общему пределу $J\,(f, R)$, то для любой интегрируемой по Риману функции $\lim\limits_{\mathrm{diam}R\to 0} S\,(f, R) = J\,(f, R)$.

Справедливо и обратное утверждение:

> если существует предел интегральной суммы $\lim\limits_{diamR\to 0} S\left(f(R)\right) = J^*(f)$,
> то функция $f(p)$-интегрируема по Риману и $J^*(f) = J(f)$.

На очевидном доказательстве этого утверждения мы здесь останавливаться не будем.

4. Вычисление определённых интегралов

4.1. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $f(x)$, $x \in (a, b)$ — непрерывная и ограниченная функция и $\Phi\left([\alpha, \beta]\right)$, $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ — скалярная аддитивная функция отрезка $[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, заданная на множестве A всех отрезков $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ и распределённая по A с плотностью $f(x)$, то есть $\lim\limits_{[\alpha,\beta]\to x} \frac{\Phi([\alpha,\beta])}{m[\alpha,\beta]} = f(x)$ $\forall x \in (a, b)$. Длина отрезка $\mathrm{m}[\bar{\alpha}, \beta] = \beta - \alpha$ является непрерывной и аддитивной функцией, заданной на A и это очевидно.

Согласно теореме 4, функция $\Phi([\alpha,\beta])$ определяется однозначно по непрерывной плотности $f(x)$. Обозначим $F(x) \equiv \Phi([a,x])$ $a < x \le b$. Доопределим $F(x)$ при $x = a$, положив $F(a) = 0$.

Вычислим $F'(x)$. Ввиду аддитивности $\Phi([\alpha,\beta])$
при $\Delta x > 0$

$$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) = \Phi([a, x+\Delta x]) - \Phi([a,x]) = \Phi([x, x+\Delta x]),$$

при $\Delta x < 0$

$$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) = \Phi([a, x+\Delta x]) - \Phi([a,x]) = -\Phi([x+\Delta x, x]).$$

Поэтому

$$F'(x-0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} = \lim_{[x,x+\Delta x]\to x} \frac{\Phi([x, x+\Delta x])}{\Delta x} = f(x),$$
$$F'(x+0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{[x,x+\Delta x]\to x} \frac{\Phi([x+\Delta x, x)}{-\Delta x} = f(x).$$

Таким образом, $\forall x \in [a,b] : \ F'(x) = f(x)$, то есть справедлива

Теорема 5. *Для любой непрерывной скалярной функции $f(x)$ скалярного аргумента x существует первообразная. Ею является функция*

$$F(x) \equiv \int\limits_a^x f(t)dt \equiv \Phi([a,x]), \ x \in [a,b].$$

Пусть $V(x)$ какая-либо первообразная для $f(x)$. Тогда $\forall x: \ F(x) = V(x) + c$, при $x = a$ получим $0 = F(a) = V(x) + c$, то есть $c = -V(a)$ и $F(x) = V(x) - V(a)$. При $x = b$ $\ F(b) = \Phi([a,b]) = V(b) - V(a)$, то есть

$$\int\limits_a^b f(x)dx = V(b) - V(a), \quad a \le b.$$

Теорема 6. *Пусть $f(x)$ — кусочно-непрерывна и ограничена на $[a,b]$. Существует непрерывная функция $F(x)$, $x \in [a,b]$ такая, что $F'(x) = f(x)$ в любой точке непрерывности $f(x)$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случаи, когда $f(x)$ имеет одну точку разрыва c, где $a < c < b$. Пусть $F_1(x) \equiv \int\limits_a^x f(t)dt$, $x \le c$.

$$\Delta F_1(c) = F_1(c) - F(x) = \int\limits_x^c f(t)dt = f(t_0)(c-x), \quad \text{где} \quad t_0 \in (x,c),$$

то есть $\lim\limits_{x\to c-0} F_1(x) = F_1(c)$ и $F_1'(x) = f(x)$ $\forall x < c$.

Пусть $F_2(x) \equiv \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt,\ x_0, x \in (c, b)$.

$$\lim_{x\to c+0} F_2(x) = \int\limits_{x_0}^{c} f(t)dt \equiv F_2(c) \text{ и } F_2'(x) = f(x) \quad \text{где} \quad c < x \leq b.$$

Пусть

$$F(x) \equiv \begin{cases} F_1(x), & x \leq c; \\ F_2(x) - F_2(c) + F_1(c), & x \geq c. \end{cases}$$

Функция $F(x)$ непрерывна при всех $x \in [a, b]$ и $\forall x \neq c$ имеем $F'(x) = f(x)$.

Следствие. *Пусть $V(x)$ — непрерывная первообразная для кусочно-непрерывной $f(x)$, $x \in [a, b]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = V(b) - V(a).$$

Доказательство. Пусть $c \in (a, b)$ — единственная точка разрыва $f(x)$.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx = V(c) - V(a) + V(b) - V(c) = V(b) - V(a).$$

Аналогично доказывается формула Ньютона-Лейбница для функции $f(x)$, имеющей конечное число точек разрыва на $[a, b]$.

Замечание. Если $f(x)$ стремится к бесконечности в точке c, непрерывна на $[a, c)$ и $(c, b]$, и несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, то построенная выше функция $F(x)$ будет непрерывной первообразной для $f(x)$. Таким образом, и для неограниченной кусочно-непрерывной на $[a, b]$ функции существует непрерывная первообразная, если несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится.

Удобно определить интеграл по отрезку $[a, b]$ при $b < a$ по формуле $\int\limits_{[a,b]} f(x)dx = + \int\limits_{[b,a]} -f(x)dx$. Это определение превращает интеграл по отрезку в интеграл по направленному отрезку $\overrightarrow{[a, b]}$. При изменении ориентации (направления) плотность САВ $\int\limits_a^b f(x)dx$ меняет знак на противоположный, то есть является функцией не только точки x, но и избранного направления отрезка $[a, b]$.

4.2. Вычисление кратных интегралов и теорему Фубини рассмотрим на примере двойного интеграла по элементарной области.

Пусть $\bar{G} = \{p\,(x,y) : \ a \le x \le b, \ y_н(x) \le y < y_в(x)\}$, где $a < b \quad y_н(x) < y_в(x)$ — заданные на $[a,b]$ непрерывные функции. Такую область называют правильной по y. В качестве алгебры ячеек A рассмотрим множество всех правильных ячеек

$$g = \{(x,y) : a \le \alpha \le x \le \beta \le b \quad y_н(x) \le y_н^*(x) \le y \le y_в^*(x) \le y_в(x)\}$$

$$m(\bar{g}) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dx \int\limits_{y_н^*(x)}^{y_в^*(x)} dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [y_в^*(x) - y_н^*(x)]\, dx > 0$$

Эта мера аддитивна за счет аддитивности внешнего и внутреннего интегралов. Очевидно, эта мера непрерывна на A.

Повторный интеграл от непрерывной на G функции $J(G) = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_н(x)}^{y_в(x)} f(x,y)dx$ удовлетворяет условию

$$m \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_н(x)}^{y_в(x)} dy \le J \le M \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_н(x)}^{y_в(x)} dy.$$

Поделив все члены полученного неравенства на $m(G)$, получим

$$m \le \frac{J(G)}{m(G)} \le M,$$

где m и M — наименьшее и наибольшее значение $f(x,y)$ на G. Стягивая G к точке $p = (x,y)$ получим

$$\bar{J}'_{mg}(p) = \lim_{\bar{g} \to p} \frac{J(\bar{g})}{m(\bar{g})} = f(p).$$

Но двойной интеграл $\iint\limits_G f(p)\, d\, m(g)$ также является первообразной для $f(p)$. Таким образом, $\iint\limits_{\bar{G}} f(p)\, dm\bar{q} = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_н(x)}^{y_в(x)} f(x,y)dy$.

4.3. Вычисление криволинейных интегралов

Пусть гладкая кривая Жордана (L) задана параметрическим уравнением $p = p(l)$, где l-длина кривой $(l) = AP$ от точки A до текущей точки $p \in (L)$.

Пусть L — длина кривой (L) и R — разбиение числового отрезка $[0, L]$ на ячейки Δl_i. Разбиение R индуцирует разбиение $R(L)$ кривой (L) на ячейки. Пусть по ячейкам кривой (L) распределена НСАВ $\Phi(L)$ с линейной непрерывной плотностью

$$f(p) = \lim_{(L) \to p} \frac{\Phi(L)}{L}, \ p \in (L).$$

Отрезку (Δl_i) кривой (L) соответствует величина $\Phi(\Delta l_i)$ которую мы соотнесём соответствующему отрезку (Δl_i) числового отрезка $[0, L]$.

Для любого $l \in [0, L]$

$$f(l) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Phi(\Delta l)}{\Delta l} = \lim_{(\Delta l) \to p} \frac{\Phi(\Delta l)}{m(\Delta l)} = f\left(p(l)\right)$$

Откуда

$$\Phi(L) = \int_0^L f\left(p(l)\right) \tag{$*$}$$

Если гладкая кривая AB задана параметрическим уравнением $p = p(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то для вычисления интеграла $(*)$ сделаем замену переменной, положив

$$l = \int_\alpha^t \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}\, d\tau,$$

где $x(t), y(t), z(t)$ — координаты текущей точки $p \in (L)$. Получим

$$\Phi(L) = \int_\alpha^\beta f\left(p(t)\right) l'(t) dt = \int_\alpha^\beta f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}\, dt. \tag{$**$}$$

Ввиду аддитивности определенного интеграла по отрезку и по кривой последняя формула распространяется на кусочно-непрерывные функции $f(p)$, $p \in (L)$ и кусочно-гладкие кривые (L).

4.4. Криволинейный интеграл по ориентированной кривой

Пусть на гладкой ориентированной кривой AB выбрано одно из двух возможных направлений. Направление от начала A кривой AB к концу B назовём положительным (L^+), а противоположное — отрицательным.

Пусть в точках $p \in AB$ задано непрерывное векторное поле $\bar{F}(p) = F_x(p)\bar{i} + F_y(p)\bar{j} + F_z(p)\bar{k}$. Обозначим $\bar{\tau}^+(p)$ единичный вектор касательной в точке p, направленный в сторону движения точки p при возрастании параметра t.

$$\bar{\tau}^+(p) = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} \Big/ \left|\frac{d\bar{r}(t)}{dt}\right| = \cos\alpha(p)\bar{i} + \cos\beta(p)\bar{j} + \cos\gamma(p)\bar{k},$$

где $\bar{r}(t)$ — радиус-вектор точки $p(t) \in L$

$$\cos\alpha = \frac{dx(t)}{\sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}}, \quad \cos\beta = \frac{dy(t)}{\sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}}, \quad \cos\gamma = \frac{dz(t)}{\sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}}.$$

Пусть функция $f^+(t) \equiv \bar{F}(p) \cdot \bar{\tau}^+(p)$ является плотностью распределения САВ $\Phi(L^+)$ по направленной кривой (L^+)

$$\Phi(L^+) \equiv \int_{(L^+)} f^+(p) dl. \tag{$*\,*\,*$}$$

Сводя криволинейный интеграл $(***)$ к определённому интегралу по отрезку $[\alpha, \beta]$ по формуле $(**)$, получим

$$\int\limits_{(L^+)} f^+(p)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [F_x \cdot x'(t) + F_y \cdot y'(t) + F_z \cdot z'(t)]dt.$$

Если $\bar{\tau}^-(p) = -\bar{\tau}^+(p)$, то

$$\Phi(L^-) = \int\limits_{(L^-)} \bar{F}(p)\bar{\tau}^-(p)dl = -\int\limits_{(L^+)} \bar{F}(p)\bar{\tau}^+(p)dl = -\Phi(L^+).$$

4.5. Формула Грина

Пусть $\bar{G}$ — замкнутая ограниченная плоская область с границей Γ, $P(x, y)$, $Q(x, y)$, P'_y, Q'_x — непрерывны в G. Тогда

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x, y), dx + Q(x, y)dy = \iint\limits_{\bar{G}} \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy$$

Соотнесём каждой ячейке $\bar{g} \subseteq \bar{G}$ интеграл $\oint\limits_{\partial\bar{g}} Pdx + Qdy$, вычисленный по её границе в положительном направлении и вычислим производную $f(p)$ полученной аддитивной функции ячейки. Применяя следствие 3 к теореме 3, произвольную точку $p(x_0, y_0) \in G$ накроем квадратом $\bar{g} = \left\{(x, y) : \begin{array}{c} x_0 \le x \le x_0 + \Delta x \\ y_0 \le y \le y_0 + \Delta y \end{array}\right\}$. Вычисляя $\oint\limits_{\partial\bar{g}} Pdx + Qdy$ по его границе , получим:

$$\oint\limits_{\partial\bar{g}} Pdx + Qdy = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} P(x_0, y_0)dx - \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} P(x, y + \Delta y)dx + \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} Q(x_0 + \Delta x, y)dy -$$

$$- \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} Q(x_0, y)dy = \Delta x \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} Q'_x(c_1, y)dy - \Delta y \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} P'_y(x, c_2)dx =$$

Далее, применяя теорему о среднем для интегралов, получим

$$= \Delta x \cdot \Delta y \left[Q'_x(c_1, c_3) - P'_y(c_4, c_2)\right],$$

где

$$c_1,\ c_4 \in (x_0, x_0 + \Delta x) \quad c_3,\ c_2 \in (y_0, y_0 + \Delta y),$$

откуда следует

$$\forall\, p_0 = (x_0, y_0) : f(p) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\oint\limits_{\partial\bar{g}} Pdx + Qdx}{\Delta x \Delta y} = Q'_x(x, \bar{y}) - P'_y(x_0, y_0),$$

что и утверждает формула Грина.

Вычисление поверхностных интегралов, доказательство формул Остроградского-Гаусса и Стокса вполне аналогичны приведённым выше и их здесь приводить не будем, предоставляя это читателю. Геометрические и физические приложения определённых интегралов сводятся к вычислению плотности распределения той или иной НСАВ и восстановлению НСАВ по плотности с помощью интегрирования по области распределения $\bar{G}$, см. [2], [3], [4].

Литература

[1] А. Лебег «Об измерении величин», М., 1962.

[2] Слободецкий Л.Н. «Интегральное исчисление», Высшая школа, М., 1974.

[3] Яковлев М.К., Яковлева Н.Г. «Определённый интеграл» Методические указания, изд. РРТИ, Рязань 1985.

[4] Яковлев М.К. «Криволинейный и поверхностный интегралы» РРТИ, Рязань, 1986.

Яковлев Михаил Константинович,
Рязанская государственная радиотехническая академия.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, пр-д завода "Серп и Молот", д.3а.

Контактные телефоны: (095) 362-91-70, (095) 362-91-02.

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

E-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2003 год (включая стоимость пересылки) – 45 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2003 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

С сентября 2000 выходит "Обозрение Z" — научно-популярное приложение к журналу "Математическое образование". Условия подписки (адрес, реквизиты, стоимость одного номера) — те же, что и для журнала.

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 35 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 45 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Mathematical Education №2 (25), 2003

Contents

To the 80-th Anniversary of I. Shafarevich

Mathematical works of I. Shafarevich 3

List of mathematical publications of I. Shafarevich 12

I. Shafarevich. On Some Tendencies of Development of Mathematics 20

The paper was published for the first time in Germany 30 years ago. The outstanding Russian mathematician Igor Shafarevich suggests a version of possible sense of human mathematical activities. The author has written the new preface for the present publication.

I. Kostenko. Introduction to Probabilistic Prediction (continued) 25

We continue to publish the manual on probability theory. This issue contains lectures 6, 7 and the corresponding exercises. Lectures 4, 5 are published in the issue 4(23), 2002.

S. Dvoryaninov. What is a Curve of Order 2? 67

The theory of curves of order 2 is presented in an elementary way for High School students of age 15-16.

A. Ruinsky. Kassini Curve and an Equilateral Hyperbola 80

Some geometrical properties of Kassini curves as well as of equilateral hyperbolas are studied.

M. Yakovlev. Riman Integral as a Function of a Domain 89

All types of integrals that are studied in Russian technical institutes, from common point of view.