Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год седьмой

№1 (24)

Январь-март 2003 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

№ 1 (24), 2003 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (24), январь – март 2003 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2003 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 28.03.2003 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Поиск и анализ оптимальной стратегии в игре «морской бой»

А. Ф. Ляхов

В статье проводится математический анализ игры «морской бой», которая является классической задачей теории поиска неподвижных объектов. Предлагается методика расчета вероятностей обнаружения нескольких кораблей за конечное число выстрелов с учетом правил игры. Строится матричная игра для случая двух одноклеточных кораблей. Развиваемые в работе идеи, методы и подходы могут быть использованы при изучении курсов по дискретной математике и теории вероятностей, а также при внеклассной работе со школьниками.

Одна из проблем обработки больших баз данных, обладающих сложной многоуровневой структурой, связана с эффективным поиском записей заданного вида. Эта проблема часто трактуется как задача теории поиска неподвижных объектов. К классическим задачам этой теории может быть отнесена игра «морской бой», отдельные аспекты которой рассматривались в работах [1,2,3].

Данная работа имеет второе важное приложение. В педагогике давно изучаются и разрабатываются методики, в основе которых лежат логические развивающие игры [4]. Отмечается их большое влияние на творческие способности учеников, однако, во всех работах анализ игр носит, как правило, качественный характер. При их анализе практически не используются математическая теория игр и теория вероятностей. Применение этих теорий для анализа игр воспринимается учениками с большим интересом и позволяет не только глубже изучить и понять стратегии, применяемые в игре, но и научиться творчески использовать математические знания. Практически, каждая логическая игра может послужить темой для серьезной математической исследовательской работы ученика.

Хотя игра «морской бой» известна и популярна, остановимся на некоторых ее основных правилах. Первый игрок (игрок А) расставляет корабли на квадратном игровом поле из n клеток (обычно это поле 10×10 клеток). Корабли — это выбранные игроком клетки или линейные последовательности клеток. Все корабли делятся по классам: одноклеточные, двухклеточные, трехклеточные и четырехклеточные. Игрок В на своем поле расставляет свои корабли. В соответствии с правилами игры корабли не могут касаться друг друга.

Игра состоит в том, что игроки по очереди называют координаты клеток, в которых, они предполагают, расположены корабли противника, т.е. производят выстрел. О попадании в корабль или промахе игроку сообщается после выстрела. Игра продолжается до тех пор, пока у одного из игроков не будут уничтожены все корабли.

На первый взгляд, эта игра носит чисто вероятностный характер, так как игроки ведут обстрел, не зная расположения кораблей противника. Но, приобретя некоторый опыт игры, можно заметить, что существуют стратегии расстановки кораблей, которые уменьшают вероятность попадания в последний одноклеточный корабль. Например, можно расположить весь флот таким образом, чтобы он занимал минимальное место на игровом поле, а один или два корабля ставят на оставшемся пространстве (Рис.1).

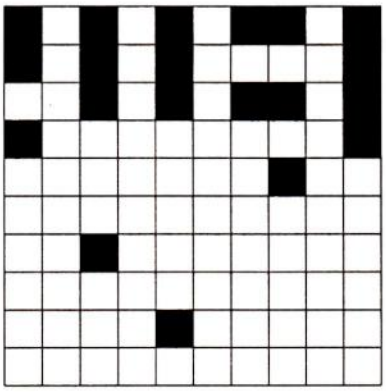


Рис. 1

Поиск кораблей также можно проводить, придерживаясь определенной системы, которая позволяет наиболее быстро обнаружить в начале игры многоклеточные корабли, а затем на оставшемся пространстве искать одноклеточные.

Эти качественные рассуждения показывают, что у игроков A и B существует множество неравнозначных различных эвристических стратегий игры, т.е. может быть поставлен вопрос о поиске оптимальных стратегий [2].

Заметим, что все это разнообразие стратегий, как это будет показано ниже, определяется правилом, запрещающим ставить корабли вплотную, а также правилом окончания игры.

В дальнейшем будем рассматривать только одну часть игры: игрок A расставляет корабли, а игрок B ведет их поиск.

Математическая модель игры может строиться либо в нормальной форме, когда игра сводится к одношаговой игре, в которой в качестве исходного множества событий рассматривается множество стратегий, элементы которого представляют полную последовательность n выстрелов, либо в развернутой форме, при этом игра представляется как многошаговая, т.е. после каждого выстрела учитываются изменения поля игры и вероятности обнаружения кораблей.

Первый подход к построению игры носит интегральный характер, однако, в этом случае возникает проблема, связанная с понятием окончания игры, т.е. с определением множества допустимых стратегий.

Сложность применения второго подхода связана с необходимостью определения вероятностей событий, которые являются комбинацией большого числа элементарных событий. При увеличении числа выстрелов k количество комбинаций растет пропорционально факториалу $k!$.

Анализ игры морской бой в нормальной форме

Для того, чтобы приступить к построению и анализу игры, необходимо определить вероятности обнаружения кораблей при различном их расположении и различных системах поиска.

Обстрел одного одноклеточного корабля

На поле из n клеток расположен один одноклеточный корабль. Определим вероятность попадания в корабль k-ым выстрелом, т. е. его уничтожение.

В качестве пространства элементарных исходов рассмотрим множество стратегий обстрела игрового поля, каждая стратегия состоит из n выстрелов, $\Omega = \{\omega : \ \omega = (\alpha_1, \alpha_2, \ \dots \ , \alpha_n), \alpha_{\rm i} = 1, 2, ..., n\}$, α_i — номер выбранной клетки, т. е. рассмотрим множество всех выборок из n по n клеток. Очевидно, что это пространство содержит $N_0 = n!$ элементов и все эти стратегии равновозможны. Количество стратегий с благоприятным исходом, т.е. количество выборок, содержащих на k-ом месте искомую клетку равно $N_б = (n-1)!$. Вероятность попадания

$$\bar{P}_k = \frac{N_б}{N_0} = \frac{1}{n}.$$

Определим вероятность уничтожения корабля за k выстрелов. Это событие состоит в том, что корабль может быть уничтожен либо первым выстрелом, либо вторым и т. д., т.е. выборка из k клеток содержит искомую клетку с кораблем.

Количество благоприятных стратегий определится как число неупорядоченных выборок из множества $n-1$ клетки по $k-1$ (одна клетка, занятая кораблем, не учитывается при выборке), и умноженное на число перестановок в самой выборке $k!$ и число перестановок клеток, оставшихся за выборкой $(n-k)!$: $N_б = k!C_{n-1}^{k-1}(n-k)!$. Вероятность попадания в одноклеточный корабль за k выстрелов

$$P_k = \frac{k!C_{n-1}^{k-1}(n-k)!}{n!} = \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = \frac{k}{n}. \qquad (1)$$

Обстрел двухклеточного корабля

Усложним задачу. На поле из n клеток расположен двухклеточный корабль. Определим вероятность первого попадания в корабль (в одну из его клеток) выстрелом с номером k. Полное число всевозможных стратегий, как и в предыдущем случае, равно $N_0 = n!$, а число благоприятных стратегий определяется как сумма благоприятных стратегий попадания в одну клетку и попадания во вторую клетку, т.е. $N_б = 2(n-1)!$. Вероятность попадания k-ым выстрелом равна $\bar{P}_k = \frac{2}{n}$.

Очевидно, что при обстреле m-клеточного корабля или m одноклеточных кораблей, вероятность попадания k-ым выстрелом равна $\bar{P}_k = \frac{m}{n}$.

Определение вероятности попадания в двухклеточный корабль за k выстрелов сведется к определению количества стратегий, содержащих искомые клетки в первых k выстрелах. Число таких стратегий будет вычисляться как следующая сумма

$$N_б = (N_1 + N_2 - N_{12}) \cdot (n-k)!,$$

$N_1 = N_2 = k!C_{n-1}^{k-1}$ — выборки, содержащие либо первую клетку, либо вторую клетку, $N_{12} = k!C_{n-2}^{k-2}$ — выборки, содержащие одновременно две клетки. Следовательно,

$$N_б = k!(2C_{n-1}^{k-1} - C_{n-2}^{k-2}) \cdot (n-k)!,$$

после преобразований получим

$$P_k = \frac{k(2n-k-1)}{n(n-1)}. \tag{2}$$

Аналогичным образом можно определить возможность попадания за k выстрелов в корабль из m клеток.

Задача попадания за k выстрелов в многоклеточный корабль хотя бы один раз является задачей теории поиска [1]. Заметим, что если учесть геометрию корабля, то можно предложить систему его поиска, при которой вероятность обнаружения становится выше [5]. Действительно, при поиске двухклеточного корабля можно рассмотреть подмножество всех стратегий, содержащих обстрел, например, клеток только с четными или с нечетными номерами. Поиск двухклеточного корабля сведется к поиску одноклеточного корабля на этом подмножестве. Полагая, что n — число клеток, четное для оптимальной вероятности попадания за k выстрелов, получим

$$P_{k0} = \frac{k!C_{n/2-1}^{k-1}}{A_{n/2}^{k}} = \frac{C_{n/2-1}^{k-1}}{C_{n/2}^{k}} = \frac{2k}{n}. \tag{3}$$

Найденное значение вероятности больше вероятности, найденной выше

$$\frac{k(2n-k-1)}{n(n-1)} < \frac{2k}{n}$$

при всех значениях $k > 1$.

Оптимальная стратегия поиска трехклеточного и четырехклеточного корабля может быть получена аналогичным образом.

Обстрел двух одноклеточных кораблей

При анализе обстрела двух кораблей возникает необходимость учитывать условие того, что корабли не соприкасаются. Разумный игрок, учитывающий это правило, не будет обстреливать соседние с обнаруженным кораблем клетки, следовательно, все они выбывают из игры. Из рассмотрения должны быть исключены последовательности выстрелов, в которых после попадания в корабль производится обстрел соседних клеток.

		11	$\boxed{1}$
		12	13

Рис. 2

Например, если корабль расположен в клетке с номером 1 (как показано на Рис.2), то по правилам игры исключаются последовательности выстрелов

	1	•	11	•		

,

	1	•	12	•		

,

но последовательности

	11	•	1	•		

остаются.

Вторая проблема, возникающая при математической формализации игры, связана с понятием ее окончания, т. е. с определением множества допустимых стратегий. На практике конец игры наступает после попадания в последний корабль. Заметим, что при интегральном описании игры, записать соответствующее локальное правило окончания игры не представляется возможным.

Рассмотрим два варианта окончания игры: первый — игра заканчивается после обстрела всех клеток игрового поля (n выстрелов), второй — игра заканчивается после k выстрелов[1].

На первом этапе исследования рассмотрим обстрел двух кораблей без запрещающих правил на их расположение. Определим вероятность уничтожения кораблей за k выстрелов при условии, что игра заканчивается за n выстрелов. Количество благоприятных неупорядоченных выборок: C_{n-2}^{k-2}, всевозможные перестановки в выборке и за ней $(n-k)! \cdot k!$, $N_б = k! C_{n-2}^{k-2}(n-k)!$; общее количество выборок: $N_0 = n!$, вероятность равна:

$$p = \frac{k! C_{n-2}^{k-2}(n-k)!}{n!} = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} \tag{4}$$

Заметим, что эта задача аналогична задаче поиска m объектов в n клетках и рассматривалась в работе [5].

Выражение для вероятности уничтожения кораблей при условии окончания игры за k выстрелов имеет такой же вид. Действительно, число благоприятных выборок $N_б = C_{n-2}^{k-2}$, полное число выборок $N_o = C_n^k$.

Аналогично можно определить вероятность уничтожения m кораблей, расположенных без учета правил игры: $p = \frac{C_{n-m}^{k-m}}{C_n^k}$.

[1]Эти варианты игры эквивалентны следующим задачам.

Задача 1. Дано n ячеек. Два объекта расположены в несоприкасающихся ячейках. Поиск происходит случайным образом, причем последовательно открываются все ячейки. Какова вероятность, что объекты будут обнаружены при открытии первых k ячеек?

Задача 2. Дано n ячеек. Два объекта расположены в несоприкасающихся ячейках. Какова вероятность, что объекты будут обнаружены при открытии k ячеек?

На втором этапе исследования рассмотрим обстрел кораблей с учетом соответствующих правил расположения. Будем полагать, что конец игры наступает после обстрела всех игровых полей.

Определение числа разрешенных стратегий обстрела начнем с рассмотрения обстрела одноклеточного корабля.

Пусть одноклеточный корабль имеет всего одну соседнюю клетку («хвост» из одной клетки). Заметим, что это возможно для игрового поля, имеющего сложную геометрическую структуру, которая, как правило, возникает в процессе игры.

11	1	•	•		•	•

Приведенной на рисунке конфигурации будет соответствовать $(n-2)!$ стратегий.

Для второй конфигурации

•	11	1	•		•	•

число стратегий определяется следующим образом: одна клетка выбирается из множества $(n-2)$ клеток C^1_{n-2}. Эта клетка может переставляться с клеткой «хвоста» $2!$. Возможны перестановки выстрелов по оставшимся клеткам $(n-3)!$, т. е. для второй конфигурации число стратегий равно $C^1_{n-2}2!\cdot(n-3)!$. Если впереди расположено i клеток, то число благоприятных стратегий определится по формуле $C^i_{n-2}(i+1)!\cdot(n-2-i)!$. Полное число благоприятных стратегий определится суммой

$$N_б = (n-2)! + C^1_{n-2}2!(n-3)! + \ldots + C^i_{n-2}(i+1)!(n-i-2)!\ldots + (n-1)!.$$

Учитывая, что $C^i_{n-2}(i+1)!\cdot(n-2-i)! = (i+1)\cdot(n-2)!$, получим

$$N_б = (n-2)!\cdot(1+2+3+\ldots+(n-1)) = \frac{n!}{2}.$$

Если вблизи корабля расположено l клеток («хвост» длинной l клеток), то число благоприятных стратегий определится следующей суммой

$$N_б = l!(n-l-1)! + C^1_{n-l-1}(l+1)!(n-l-2)! + \ldots + C^i_{n-l-1}(l+i)!(n-l-i)!\ldots + (n-1)!.$$

Выполняя преобразования, аналогичные выше приведенным, получим:

$$N_б = (n-l-1)!(1\cdot2\cdot3\cdots l + 2\cdot3\cdot4\cdots(l+1) + \ldots + (n-l)(n-l+1)\cdots(n-1)) = \frac{n!}{l+1}.$$

Для удобства дальнейшего описания введем функцию, определяющую число благоприятных стратегий для одного корабля, имеющего «хвост» длиной l клеток

$$A(n,l) = \frac{n!}{l+1}.$$

Определим число разрешенных стратегий для двух кораблей имеющих «хвосты» l_1 и l_2,

$$\underbrace{\boxed{\bullet}\boxed{\bullet}}_{l_1}\boxed{1}\underbrace{\boxed{\bullet}\boxed{\bullet}\boxed{\bullet}}_{l_2}\boxed{2}\boxed{\bullet}\boxed{\bullet}\boxed{\bullet}$$

будем полагать, что хвосты не пересекаются и $l_1 + l_2 + 2 < n$.

Проведя построения, аналогичные предыдущим, получим, что число разрешенных стратегий определятся следующей суммой

$$N_{\text{б}} = \sum_{i=1}^{2} [(n-m)!A(m-1, l_i) + (n-m-1)!C_{n-m}^{1} A(m, l_i) + \ldots$$
$$\ldots + (n-m-j)!C_{n-m}^{j} A(m+j-1, l_i) + \ldots + A(n-1, l_i),$$

где $m = l_1 + l_2 + 2$. Учитывая, что $(n-m-j)!C_{n-m}^{j} = \frac{(n-m)!}{j!}$ имеем

$$N_{\text{б}} = (n-m)! \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{l_i + 1} [1 \cdot 2 \cdot 3 \times ...$$
$$\times (m-1) + 2 \cdot 3 ... \cdot m + ... + (n-m+1) \cdot (n-m+2)...(n-1)].$$

Окончательно получим

$$N_{\text{б}} = \frac{n!}{(l_1+1)(l_2+1)}. \tag{5}$$

Определим вероятности попадания в два корабля за k выстрелов при условии, что произведены все n выстрелов.

Попадания будут реализованы, если корабли и соседние клетки («хвостовые») попадают в первые k выстрелов. Действительно, если хотя бы одна клетка из «хвоста» окажется за выборкой, то такая стратегия будет отнесена к запрещенным правилами. С учетом (5) количество благоприятных стратегий будет определяться по формуле

$$\bar{N}_{\text{б}} = \frac{k!(n-k)!}{(l_1+1)(l_2+1)} C_{n-m}^{k-m}.$$

Полное число разрешенных стратегий

$$\bar{N}_p = \frac{n!}{(l_1+1)(l_2+1)}.$$

Вероятность попадания определится в следующем виде

$$P = \frac{\bar{N}_{\text{б}}}{\bar{N}_p} = \frac{(n-2-l_1-l_2)!k!}{(k-2-l_1-l_2)!n!} \quad .$$

Можно видеть, что найденная вероятность оказалась значительно меньше вероятности (4), полученной для случая обстрела двух одноклеточных кораблей без запрещающих правил расположения. Предложенное правило окончания игры равнозначно поиску m клеточных кораблей.

Рассмотрим другое условие окончания игры. Игра заканчивается, после того как сделано k выстрелов. В этом случае будем считать, что допустимы стратегии, когда часть «хвостов» или все хвосты находтся за выборкой k $(n-k>l_1+l_2)$.

Для удобства описания введем функцию, определяющую число благоприятных стратегий на поле из k клеток для двух кораблей, имеющих «хвосты» из запрещенных клеток

$$B(k,l_1,l_2)=\frac{k!}{(l_1+1)(l_2+1)}.$$

Пусть за выборкой k находится одна клетка из хвоста первого корабля; количество благоприятных стратегий определится по формуле

$$C^1_{l_1}C^{k-m+1}_{n-m}B(k,l_1-1,l_2)(n-k)!,$$

если две клетки, то

$$C^2_{l_1}C^{k-m+2}_{n-m}B(k,l_1-2,l_2)(n-k)!$$

и т.д.

Следовательно, число благоприятных стратегий определится суммой

$$D=(n-k)!\sum_{i=0}^{l_1}\sum_{j=0}^{l_2}C^i_{l_1}C^j_{l_2}C^{k-m+i+j}_{n-m}B(k,l_1-i,l_2-j). \tag{6}$$

Определим общее число разрешенных стратегий. Действительно, в данном рассмотрении общее число допустимых выборок будет определяться как полное число выборок по k клеток $C^k_n k!(n-k)!$ минус запрещенные выборки. Число запрещенных выборок $C^{k-2}_{n-2}k!(n-k)!-D$. Полное число разрешенных стратегий

$$F=C^k_n k!(n-k)!-(C^{k-2}_{n-2}k!(n-k)!-D).$$

Вероятность попадания в два корабля за kвыстрелов равна

$$P=\frac{D}{F}. \tag{7}$$

Приведем несколько значений вероятностей, найденных по формуле (7)

n	k	l_1	l_2	P
20	15	0	0	0,29
20	15	3	3	0,12
20	15	8	3	0,09
20	15	8	8	0,06

Таблица 1.

В реальной игре вероятности попадания в корабли за k выстрелов, при условии, что игра заканчивается сразу после двух попаданий, будут больше. Действительно число благоприятных стратегий в этом случае значительно больше полученного количества (6), т.к. благоприятными будут считаться все возможные стратегии после двух попаданий в корабли, часть из них в приведенных выше построениях относилась к запрещенным стратегиям.

Экспериментальное определение вероятности обнаружения двух одноклеточных кораблей

Современные быстродействующие компьютеры позволяют создавать имитационные модели реальной игры и оценить значения вероятности экспериментально.

Рассмотрим одномерный массив размерности n, каждый элемент которого соответствует одной клетке игрового поля. Поскольку поиск кораблей ведется случайным образом, то корабли и соответствующие граничные клетки в каждой новой реализации игры могут быть расположены в одном и том же месте, в частности, в первых ячейках массива.

Имитация поиска кораблей осуществляется последовательной случайной выборкой одной из клеток с дальнейшим ее выбыванием из игры. При выборке клетки корабля исключаются все с ней граничные. Многократно повторив игру (10000 раз), можно получить оценку искомой вероятности попадании в корабли за k выстрелов.

n	k	l_1	l_2	P
20	15	0	0	0,55
20	15	3	3	0,66
20	15	8	3	0,75
20	15	8	8	0,83

Таблица 2.

Заметим, что экспериментальная вероятность, полученная для случая обстрела кораблей без правил практически совпадает с теоретически вероятностью (4).

Построение матричной игры при обстреле двух одноклеточных кораблей

Рассмотрим следующую игру. Игрок А стремится расставить два одноклеточных корабля таким образом, чтобы вероятность обнаружения кораблей игроком В, при выборе им некоторой эвристической стратегии поиска, за k выстрелов была минимальной. Игрок В ищет эвристические стратегии, позволяющую с наибольшей вероятностью обнаружить корабли за k выстрелов.

Проведенные выше исследования показали, что вероятность обнаружения одноклеточных кораблей зависит от их расположения, т.е. от величин l_1, l_2 — числа соседних с кораблями клеток.

Игрок А может расставить два корабля различными способами, он может поставить один корабль в угол, а один у стенки или оба корабля вдали от стенок. Количество всевозможных расстановок определяется правилом расположения кораблей, т.е. если первый корабль может быть поставлен на любую клетку игрового поля, то второй корабль нельзя ставить в соседние клетки. Число различных стратегий игрока А для поля любой сложной конфигурации будет оцениваться следующим интервалом $n(n-1) \leq N_a \leq n(n-9)$. Игрок В также имеет множество стратегий поиска: он может вначале обстрелять углы, а затем обстрелять клетки у стенок или наоборот и т.д. Всего игрок B имеет C_n^k стратегий поиска.

Пусть игрок A выбрал свою i-ую стратегию A_i, а игрок B — j-ую стратегию B_j. Обозначим вероятность уничтожения кораблей за k выстрелов при этих стратегиях p_{ij}. Рассматривая все стратегии игроков, получим матрицу игры:

	B_1	B_2	B_3	....	B_b
A_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	....	p_{1b}
A_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	....	p_{2b}
A_3	p_{31}	p_{23}	p_{33}	....	p_{3b}
....	....	....	....	....	....
A_a	p_{a1}	p_{a2}	p_{a3}	....	p_{ab}

Введем вероятность r_i выбора i-ой стратегии игрока A и вероятность q_j выбора j-ой стратегии игрока B. Оптимальной стратегией игрока A будем считать ту, которая имеет наибольшую вероятность r_i при минимальном математическом ожидании уничтожения кораблей за k выстрелов $M = \sum\limits_{i=1}^{a}\sum\limits_{j=1}^{b} r_i q_j p_{ij}$. Оптимальной стратегией игрока B будем считать ту, которая имеет наибольшую вероятность q_j при максимальном значении M.

Можно видеть, что часть эвристических стратегий расположения кораблей и поиска являются неразличимыми. Действительно, рассмотрим квадратное поле $n \times n$ клеток и множество стратегий, когда один корабль расположен в угловой клетке, а второй вдали от него и от боковых стенок поля. Количество различных стратегий $N = 4 \cdot (n\text{-}2)^2$, но вероятность обнаружения кораблей при случайном поиске для всех этих стратегий будет одна и та же. Следовательно, в данной игре, все они могут быть представлены одной стратегией.

Определим наиболее предпочтительную стратегию среди следующих эвристических стратегий игроков A и B.

Стратегии игрока A:

A_1 — постановка кораблей в клетки вдали от углов, стенок и друг от друга (т.е. нет пересечения граничных клеток);

A_2 — постановка кораблей в углы поля.

Стратегии игрока B:

B_1 — обстрел поля случайным образом;

B_2 — обстрел угловых клеток, а затем обстрел оставшегося поля случайным образом.

Матрица игры имеет вид:

	B_1	B_2
A_1	p_{11}	p_{12}
A_2	p_{21}	p_{22}

Предположим, что игрок A выбрал первую стратегию с вероятностью r_1, а вторую стратегию — с вероятностью r_2 $(r_1+r_2=1)$. Если игрок B выберет свою первую стратегию, то математическое ожидание для вероятности выигрыша за k выстрелов запишется в виде $M_1 = p_{11}r_1 + p_{21}r_2$, при выборе второй стратегии $M_2 = p_{12}r_1 + p_{22}r_2$. Потребуем, чтобы записанные математические ожидания были меньше некоторого максимального значения M_0 (цены игры).

Для нахождения вероятностей r_1, r_2 получим систему линейных алгебраических неравенств

$$\begin{cases} p_{11}r_1 + p_{21}r_2 \le M_0, \\ p_{12}r_1 + p_{22}r_2 \le M_0, \\ r_1 + r_2 = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Задача (8) является задачей линейного программирования. Введя новые переменные $x_1 = r_1/M_0$, $x_2 = r_2/M_0$, $L_0 = 1/M_0$, запишем

$$\begin{cases} p_{11}x_1 + p_{21}x_2 \le 1, \\ p_{12}x_1 + p_{22}x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 = L_0. \end{cases}$$

Решение этой системы ищем при условии, что L_0 принимает максимальное значение.

Окончательно получим

$$M_0 = \frac{p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}}, \quad r_1 = \frac{p_{22} - p_{21}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}}, \quad r_2 = \frac{p_{11} - p_{12}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}}.$$

Очевидно, что расположение кораблей существенно влияет на игру, если n и k малы и сравнимы с количеством клеток в «хвостах». Приведем конкретное решение при следующих значениях параметров. Величина поля $n = 20$, количество выстрелов $k = 15$, значения вероятностей попадания в корабли возьмем из Таблицы 2, $p_{11} = 0,83$, $p_{21} = 0,66$. Если игрок А расположил корабли в углах игрового поля, то вероятность попадания в них при обстреле углов равна единице $p_{22} = 1$. Если корабли расположены в центре поля, а игрок В вначале обстреливает углы, а затем ведет поиск случайным образом, то вероятность может быть получена с помощью имитационной модели при $n = 16$, $k = 11$, $p_{12} = 0,76$.

Игрок А должен использовать первую стратегию с вероятностью $r_1 = 0,82$, а вторую стратегию с вероятностью $r_2 = 0,18$.

Аналогичным образом можно провести исследование вероятности выбора стратегии игрока В: $q_1 = 0,68$, $q_2 = 0,32$.

Выбор стратегии игроком А в реальной игре, в соответствии с теорией игр, может быть осуществлен с помощью некоторого генератора случайных чисел, генерирующих, например, нуль и единицу с вероятностями r_1, r_2. Игрок В выбирает стратегию, используя другой генератор с вероятностями q_1, q_2 .

Приложение. Анализ игры морской бой в развернутой форме

При анализе игры в развернутой форме описывается каждый ход игроков и возникающая при этом позиция, т.е. после каждого выстрела учитываются изменения поля игры и вероятности обнаружения кораблей.

Обстрел одноклеточного корабля

На поле из n клеток расположен один одноклеточный корабль. Определим вероятность попадания в корабль k-ым выстрелом.

Событие попадания в корабль k-ым выстрелом носит сложный характер. Оно состоит из k элементарных событий отдельных выстрелов.

Пронумеруем все клетки поля числами от 1 до n. Пусть H_1 — пространство элементарных событий отдельных выстрелов α_1, α_2, α_3, $\ldots$, α_n, которым соответствует попадание в клетки с номером 1, 2, 3, $\ldots$, n. Корабль располагается на клетке с номером i. Обстрел ведется случайным образом, вероятности событий α_1, α_2, α_3, ..., α_n равны.

Введем пространство событий $\Omega := \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, где A_1 — попадание в корабль первым выстрелом, A_2 — вторым выстрелом и т.д., A_k — k-ым выстрелом. Первый элемент этого пространства, событие A_1, — попадание в корабль первым выстрелом — состоит в том, что произведен первый выстрел, т.е. произошло событие $h_1 \in H_1$, и при этом выбрана клетка с номером i. Этому событию благоприятствует одно элементарное событие из пространства событий H_1: α_i. Вероятность события A_1, т.е. h_1 определяется отношением числа элементарных событий, благоприятствующих событию h_1, к общему числу: $P(A_1) = P(h_1) = 1/n$.

Второй элемент пространства событий Ω образуется следующими элементарными событиями: первым выстрелом допущен промах, а вторым выстрелом попадание. Событие A_2 — попадание в корабль вторым выстрелом при условии промаха первым выстрелом состоит из пересечения двух событий $A_2 = \bar{h}_1 \cap h_2$: $\bar{h}_1$ — событие, противоположное h_1, т.е. промах первым выстрелом и h_2 — попадание в корабль вторым выстрелом. Событию $\bar{h}_1$ благоприятствует $n-1$ элементарное событие из пространства событий H_1: α_1, α_2, $\ldots$, α_{i-1}, α_{i+1}, $\ldots$, α_n. Вероятность события $\bar{h}_1$ равна $P(\bar{h}_1) = (n-1)/n$. Событие h_2 — второй выстрел происходит, когда число клеток уменьшилось на единицу, т.е. новое пространство элементарных событий H_2 содержит на одно элементарное событие меньше. Событию h_2 благоприятствует одно элементарное событие из нового пространства H_2. Вероятность события h_2 равна $P(h_2) = 1/(n-1)$. Следовательно, вероятность события A_2 равна произведению вероятностей событий $\bar{h}_1$ и h_2:

$$P(A_2) = P(\bar{h}_1) \cdot P(h_2) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}.$$

Рассмотрим событие A_3 — попадание в корабль третьим выстрелом при условии промаха первым и вторым выстрелами. Как и в предыдущем случае $A_3 =$

$= \bar{h}_1 \cap \bar{h}_2 \cap h_3$, где $\bar{h}_2$ — событие, противоположное событию h_2, т.е. промах вторым выстрелом, h_3 — попадание третьим выстрелом.

$$P(A_3) = P(\bar{h}_1) \cdot P(\bar{h}_2) \cdot P(h_3) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}.$$

Для события $A_k = \bar{h}_1 \cap \ldots \cap \bar{h}_{k-1} \cap h_k$ — попадание в корабль k-ым выстрелом при условии промаха первым, вторым $\ldots (k-1)$-ым выстрелами $(k < n)$, получим

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(\bar{h}_1) \cdot P(\bar{h}_2) \cdot \ldots \cdot P(h_k) = \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \\ &= \frac{(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность уничтожения одного одноклеточного корабля выстрелом с номером k равна $P(A_k) = \frac{1}{n}$.

Определим вероятность уничтожения корабля за k выстрелов. Пусть событие B_1 — уничтожение корабля за первый выстрел. Очевидно, что событие B_1 совпадает с событием A_1 — попадание в корабль первым выстрелом. Следовательно, $P(B_1) = \frac{1}{n}$.

Рассмотрим событие B_2 — уничтожение корабля за два выстрела. Это событие представляет собой объединение двух событий $B_2 = A_1 \cup A_2$: A_1 — попадание в корабль первым выстрелом и A_2 — попадание в корабль вторым выстрелом, поэтому для вероятности события B_2 можно записать:

$$P(B_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

или

$$P(B_2) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}.$$

Запишем формулу определения вероятности события B_k — уничтожение корабля за k выстрелов:

$$P(B_k) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_k) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Это выражение совпадает с выражением (1), полученным при описании игры в нормальной форме.

Обстрел двухклеточного корабля

Усложним задачу. На поле из n клеток расположен двухклеточный корабль. Определим вероятность первого попадания в корабль (в одну из его клеток) выстрелом с номером k и вероятность первого попадания в корабль за k выстрелов.

Пусть H_1 — пространство элементарных событий α_1, α_2, α_3, ..., α_n — попадание в клетку с номером 1, 2, 3, ..., n. Двухклеточный корабль занимает клетки с номерами i и j. Событие A_1 — попадание в корабль первым выстрелом h_1 состоит в выборе клетки с номером i или с номером j, т.е. этому событию благоприятствуют два элементарных события (α_i и α_j) из пространства элементарных событий H_1. Следовательно, $P(A_1) = \frac{2}{n}$.

Определим вероятность события A_2 — первое попадание в корабль вторым выстрелом с учетом промаха первым выстрелом. Это событие состоит из пересечения двух событий: $\bar{h}_1$ — противоположное h_1, т.е. промах первым выстрелом и h_2 — первое попадание в корабль вторым выстрелом. Вероятность события $\bar{h}_1$ равна $P(\bar{h}_1) = \frac{n-2}{n}$. После первого выстрела пространство элементарных событий уменьшится на один элемент, но оно содержит элементарные события α_i и α_j, которые благоприятствуют событию h_2, поэтому $P(h_2) = \frac{2}{n-1}$.

$$P(A_2) = P(\bar{h}_1) \cdot P(h_2) = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} = \frac{2(n-2)}{n(n-1)}.$$

Запишем вероятность события $A_k = \bar{h}_1 \cap \bar{h}_2 \ldots \cap h_k$ — первое попадание в корабль k-ым выстрелом:

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(\bar{h}_1) \cdot P(\bar{h}_2) \cdot \ldots \cdot P(\bar{h}_{k-1}) \cdot P(h_k) = \\ &= \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k}{n-k+2} \cdot \frac{2}{n-k+1} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу об определении вероятности попадании в двухклеточный корабль за k выстрелов.

Событие B_1 — первое попадание в корабль первым выстрелом. Очевидно, что $B_1 = A_1$, т.е. $P(B_1) = \frac{2}{n}$.

Событие B_2 — первое попадание в корабль за два выстрела — состоит из объединения двух событий: A_1 — первое попадание в корабль первым выстрелом и A_2 — первое попадание в корабль вторым выстрелом. Следовательно,

$$P(B_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{2}{n} + \frac{2(n-2)}{n(n-1)} = \frac{2(n-1+n-2)}{n(n-1)} = \frac{2(2n-3)}{n(n-1)}.$$

Аналогично запишем вероятность события B_k — {первое попадание в корабль за k выстрелов}.

$$\begin{aligned} P(B_k) &= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) = \frac{2}{n} + \frac{2(n-2)}{n(n-1)} + \ldots + \frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \\ &= \frac{2(n-1+n-2+\ldots+n-k)}{n(n-1)} = \frac{k(2n-k-1)}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Найденное выражение вероятности совпадает с выражением (2), полученным при рассмотрении игры в нормальной форме. Можно показать, что предложенная ранее методика поиска двухклеточного корабля приведет к увеличению вероятности его обнаружения и количественно совпадающей с (3).

Обстрел двух одноклеточных кораблей

На поле из n клеток расположено два одноклеточных корабля. Определим вероятность уничтожения обоих кораблей за N выстрелов ($N < n$). Пусть события T_1, T_2, T_3, ... T_N — попадание в один из одноклеточных кораблей первым, вторым, и т.д., $(N-1)$-ым выстрелом при условии промаха предыдущими выстрелами; события S_{M-1}, S_{M-2} , $\ldots$, S_1 — попадание во второй одноклеточный корабль за $N-i$ выстрелов (первый корабль был уничтожен выстрелом $i = 1, 2, 3, \ldots, N$). Событие F_N — уничтожение обоих кораблей за N выстрелов. Оба корабля могут быть уничтожены разными способами: либо произойдет событие T_1 и S_{N-1}, либо T_2 и S_{N-2}, или любое другое возможное сочетание событий.

Следовательно,

$$F_N = (T_1 \cap S_{N-1}) \cup (T_2 \cap S_{N-2}) \cup (T_3 \cap S_{N-3}) \cup \ldots \cup (T_N \cap S_1),$$

$$P(F_N) = P(T_1) \cdot P(S_{N-1}) + P(T_2) \cdot P(S_{N-2}) + P(T_3) \cdot P(S_{N-3}) + \ldots$$
$$\ldots + P(T_{N-1}) \cdot P(S_1).$$

Процесс обстрела двух одноклеточных кораблей до первого попадания совпадает с обстрелом одного двухклеточного корабля случайным образом, поэтому $P(T_1) = P(B_1)$, $P(T_2) = P(B_2)$, $\ldots$, $P(T_k) = P(B_k)$, где B_1, B_2, $\ldots$, B_k — первое попадание в одну из клеток двухклеточного корабля k выстрелом. После первого попадания в один из кораблей, количество клеток, на которых может располагаться оставшийся корабль, уменьшается на 1, 2, 3, ..., 9 в зависимости от того, где расположен уничтоженный корабль и от того, были ли попадания в соседние с ним клетки.

Поиск второго корабля ведется на поле, содержащем $\tilde{n}^{(i)}$ клеток, $\tilde{n}^{(i)} = n - i - \alpha$, где i — номер выстрела, на котором произошло первое попадание (событие T_i), $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, 8$ — число клеток, запрещенных для расположения второго корабля из-за близости к уничтоженному кораблю.

Рассмотрим событие S_{N-i} — попадание во второй корабль за $N-i$ выстрелов, первый корабль уничтожен i-ым выстрелом. Событие S_{N-i} состоит из объединения событий L_1, L_2, $\ldots$, L_{N-i} — попадание в оставшийся корабль 1, 2, 3, ..., $N-i$ выстрелом.

$$P(L_1) = \frac{1}{\tilde{n}^{(i)}}, \quad P(L_2) = P(\bar{L}_1) \cdot P(\tilde{L}_2) = \frac{\tilde{n}^{(i)} - 1}{\tilde{n}^{(i)}} \cdot \frac{1}{\tilde{n}^{(i)} - 1} = \frac{1}{\tilde{n}^{(i)}}, \quad \ldots, \quad P(L_m) = \frac{1}{\tilde{n}^{(i)}}.$$

Для вероятности события S_{N-i} получим

$$P(S_{N-1}) = P(L_1) + P(L_2) + P(L_3) + \ldots + P(L_{N-i}) = \frac{N-i}{\tilde{n}^{(i)}} = \frac{N-i}{n-i-\alpha}.$$

Число α неизвестно и может быть определено только после попадания в первый корабль. Запишем интервал, в котором лежит вероятность события S_{N-i}

$$P(S_{N-i}) \in \left[\frac{N-i}{n-i}, \frac{N-i}{n-i-8}\right].$$

Вероятность события F_N определится следующим выражением:

$$\begin{aligned}P(F_N) &= \tfrac{2}{n}\cdot\tfrac{N-1}{n-1-\alpha}+\tfrac{2(n-2)}{n(n-1)}\cdot\tfrac{N-2}{n-2-\alpha}+\ldots+\tfrac{2(n-i)}{n(n-1)}\cdot\tfrac{N-i}{n-i-\alpha}+\ldots+\\ &\quad+\tfrac{2(n-N+1)}{n(n-1)}\cdot\tfrac{1}{n-N+1-\alpha}=\\ &=\tfrac{2}{n(n-1)}\cdot\left(\tfrac{(n-1)(N-1)}{n-1-\alpha}+\tfrac{(n-2)(N-2)}{n-2-\alpha}+\tfrac{(n-3)(N-3)}{n-3-\alpha}+\ldots+\tfrac{(n-N+1)}{n-N+1-\alpha}\right)=\\ &=\tfrac{2}{n(n-1)}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N-1}\tfrac{(n-i)(N-i)}{n-i-\alpha}\right),\end{aligned}$$

и она будет лежать в интервале

$$P(F_N)\in\left[\frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{k}\frac{(n-i)(N-i)}{n-i-8},\ \frac{N(N-1)}{n(n-1)}\right].$$

Заметим, что игрок, который расставляет корабли на игровом поле, может изменить интервал значений вероятности. Например, если оба корабля стоят в углу, то α может принимать значения 0, 1, 2, 3:

$$P(F_N)\in\left[\frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{k}\frac{(n-i)(N-i)}{n-i-3},\ \frac{N(N-1)}{n(n-1)}\right].$$

Заключение

Предложенный в работе подход позволяет определить вероятности обнаружения кораблей за конечное число выстрелов для поля любой конфигурации и построить соответствующую матричную игру.

Приведенный пример анализа игры показывает возможность использования логических игр для углубленного изучения таких разделов математики, как комбинаторика, теория множеств и теории вероятностей. Заметим, что изучение даже простейших игровых ситуаций позволяют сформулировать проблемы, которые представляют интерес для современной информатики и теории поиска [5].

В заключение автор выражает признательность доценту кафедры теории вероятностей факультета вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского Баркалову Александру Валентиновичу и Зорину Владимиру Александровичу за проявленный интерес к работе и обсуждение развиваемых в ней подходов.

Литература

[1] Петросян Л.А., Гарнаев А.Ю. Игры поиска. — СПб.: Изд. С.-Петербургского университета. 1992, — 216 с.

[2] Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр.— М.: Высш. шк., Книжный дом «Университет», 1998. — 304 с.

[3] Новиков Ф.А. Дискретная математика. — СПб.: Изд. Питер, 2000, — 304 с.

[4] Беденко М. Как выучить на творца. М.: Математическое образование, 1999, № 2-3, 58–87 с.

[5] Тарасов В.П. Оптимальное восстановление характеристических функций, заданных в узлах целочисленной решетки. — Математические вопросы кибернетики, вып.5, Наука 1994,— 239–261 с.

Ляхов Александр Федорович,
доцент кафедры теоретической механики
механико-математического факультета
Нижегородского государственного университета
имени Н. И. Лобачевского.

E-mail: Lyakhov@mm.unn.ac.ru

Проблема филлотаксиса

А. И. Щетников

В статье рассматривается явление филлотаксиса, представляющего собой интересный пример явлений живой природы, которые демонстрируют явно видимые количественные и геометрические закономерности. Приведено несколько подходов к математическому описанию этого явления. Даны рекомендации по подготовке учебно-исследовательского семинара для школьников по проблеме филлотаксиса.

«Природа любит прятаться»

Гераклит

«Книга природы написана
на языке математики»

Галилей

1. Введение

1.1. *Филлотаксисом* (от $\varphi\upsilon\lambda\lambda o\nu$ — *лист* и $\tau\alpha\xi\iota\varsigma$ — *строй*) называется своеобразное решётчатое расположение листьев, семян, лепестков и чешуек многих видов растений. Ряды ближайших соседей в таких решётках, так называемые *парастихи* (от $\pi\alpha\rho\alpha$ — *рядом* и $\sigma\tau\iota\chi o\varsigma$ — *ряд*), разворачиваются по спиралям на плоской, конической или куполообразной поверхности или закручиваются винтовыми линиями вокруг цилиндра.

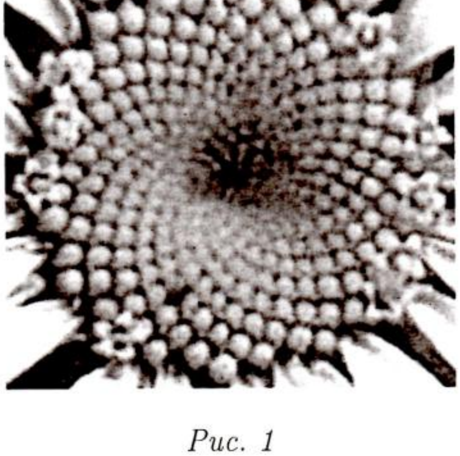


Рис. 1

В соцветии маргаритки (рис. 1) видны 34 парастихи, разворачивающиеся против часовой стрелки, и 21 парастиха, разворачивающаяся по часовой стрелке. Достоин удивления тот факт, что оба числа (мы будем называть их *индексами* парастих) входят в качестве последовательных членов в последовательность Фибоначчи

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \dots\ ,$$

где на первых двух местах стоят две единицы, а каждый следующий член вычисляется по рекуррентной формуле

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \tag{1}$$

Рассматривая корзинки подсолнухов, где на периферии индексы пары семейств встречных парастих доходят обычно до $(55, 89)$ (см. рис. 5, на котором изображена математическая модель такой корзинки), можно заметить, что ближе к центру семейство парастих с индексом 89 постепенно «рассасывается», — зато «проявляется» семейство парастих с индексом 34, закрученное в том же направлении; ещё ближе к центру «рассасывается» семейство с индексом 55 и «проявляется» семейство с индексом 21, и т. д. Увеличение индексов семейств парастих при обратном движении от центра корзинки к периферии принято называть *возрастанием филлотаксиса*.

1.2 Явление филлотаксиса упоминал ещё Иоганн Кеплер в своём сочинении «О шестиугольных снежинках», а начиная с основателей кристаллографии братьев Луи и Огюста Браве, опубликовавших в 1837 г. «Опыты о спиральном расположении листьев», началось систематическое его изучение, включавшее в себя феноменологические и математические описания, теоретические объяснения различных аспектов явления и экспериментальные исследования. Недостатка в разнообразных описаниях и объяснениях филлотаксиса нет — в обзоре [8] упомянуто 115 работ, и при желании к ним можно добавить как минимум ещё столько же. Неизменный интерес исследователей к проблеме филлотаксиса подчёркивается изображением модели спирального филлотаксиса на серийной обложке журнала «Mathematical Biosciences». Этот интерес подогревается в последнее время тем фактом, что аналогичные спиральные структуры были обнаружены и в неживой природе (см. [3], [9], [13], [14]).

Можно сказать, что проблема филлотаксиса предстаёт перед современными исследователями не как специфически математическая, биологическая, физическая, химическая, кристаллографическая и т. д., а как по преимуществу методологическая. По-видимому, все или почти все возможные элементы её решения давно уже выявлены, — и задача исследователей состоит прежде всего в том, чтобы согласовать их друг с другом, указав границы разумной применимости каждого из подходов.

1.3. В разделах 2–7 настоящей статьи представлены рассуждения о филлотаксисе, посвящённые некоторым подходам к описанию и объяснению этого явления. В разделе 6 обсуждается аналогия между явлением филлотаксиса и некоторыми аспектами учения древних стоиков о «семенном логосе». Наконец, в разделе 8 представлен проект учебно-исследовательского семинара для старшеклассников по проблеме филлотаксиса.

2. Теоремы Браве

Основная идея братьев Браве состояла в том, чтобы рассматривать при изучении филлотаксиса не только явно видимые спирали контактных парастих, но также и другие, менее заметные спирали, составленные из периодически расположенных зёрен, не находящихся в непосредственном контакте (найдите такие спирали на рис. 1 и попробуйте подсчитать их индексы).

В качестве базовой модели для изучения филлотаксиса братья Браве предложили рассматривать точечную решётку $\mathfrak{R}$ на поверхности цилиндра, удовлетворяющую следующим требованиям:

Если на спиральной линии, соединяющей узлы A и B решётки $\mathfrak{R}$, находятся другие узлы решётки $\mathfrak{R}$, то эти узлы разбивают отрезок AB на равные отрезки.

Пусть точки A, B, C лежат на одной спиральной линии, и $AC = m \cdot AB$. Тогда если точки A и B являются узлами решётки $\mathfrak{R}$, то и точка C является узлом решётки $\mathfrak{R}$.

Пусть точки A, B, C, D являются вершинами параллелограмма. Тогда если точки A, B, C являются узлами решётки $\mathfrak{R}$, то и точка D является узлом решётки $\mathfrak{R}$.

Для удобства мы будем изображать решётку $\mathfrak{R}$ на развёртке цилиндра — полосе, ширину которой удобно принять за единицу.

Говоря о спирали с индексом m, мы будем иметь в виду семейство из m параллельных спиральных линий, на которых лежат все узлы решётки $\mathfrak{R}$.

Далее мы будем рассматривать *встречные* (одна закручивается вправо, а другая влево) пары спиралей с индексами n и m. Следуя за Ирвином Адлером [7], мы будем называть пару встречных спиралей *видимой*, если каждая точка их пересечения является узлом решётки $\mathfrak{R}$.

Теорема 1. Пусть на решётке $\mathfrak{R}$ проведена видимая пара встречных спиралей (n, m), где $n > m$. Тогда новые спирали, «диагональные» по отношению к параллелограммам сетки, образованной исходными спиралями, имеют индексы $n + m$ («сумма спиралей») и $n - m$ («разность спиралей»).

Доказательство. Результат непосредственно следует из построения (рис. 2). Все необходимые рассуждения проделайте самостоятельно.

Теорема 2. Если индексы видимой пары встречных спиралей (m, n) являются взаимно простыми числами, то через все точки решётки $\mathfrak{R}$ может быть проведена спираль с индексом «1». И обратно, если через все точки решётки $\mathfrak{R}$ может быть проведена спираль с индексом «1», то индексы любой видимой пары встречных спиралей являются взаимно простыми числами.

Доказательство. Прямая теорема доказывается с помощью алгоритма последовательного взаимного вычитания (алгоритма Евклида). Обратная теорема доказывается от противного. Проведите оба доказательства самостоятельно.

Спирали контактных парастих, по-видимому, вторичны; первична же *основная генетическая спираль* с индексом «1», поскольку зёрна располагаются на ней в порядке их появления. Азимутальный угол между двумя последовательными зёрнами основной генетической спирали принято называть *углом расхождения* (углом дивергенции).

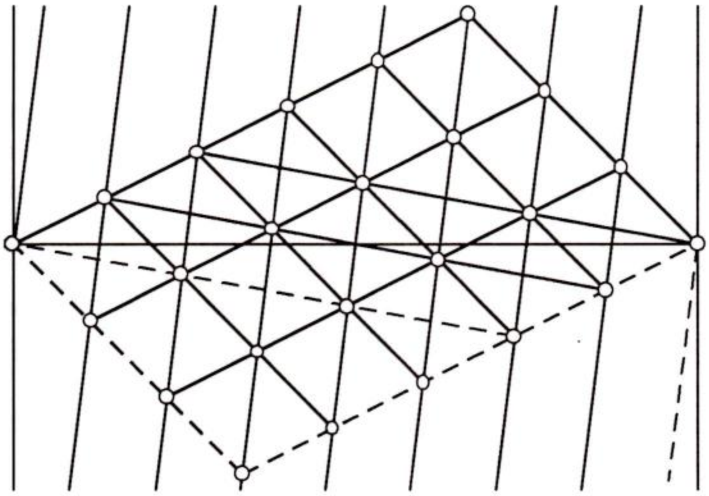


Рис. 2

Если через все узлы решётки может быть проведена спираль с индексом «1», то через эти же узлы может быть проведена ещё одна спираль с индексом «1», закручивающаяся в противоположную сторону. Если последовательные зёрна закручиваются по одной из этих спиралей на угол a (измеряемый в долях полного оборота), то по противоположной спирали они закручиваются на угол $1 - a$.

Теорема 3. Если узлы решётки занумерованы по порядку их расположения на основной генетической спирали, то в семействе спиралей с индексом m каждую спиральную линию образуют узлы решётки с номерами, сравнимыми по модулю m. (Докажите эту теорему самостоятельно.)

3. Почему золотое сечение даёт оптимальное заполнение корзинки?

3.1. Будем считать, что (α) заполняющие корзинку зёрна последовательно выпускаются из центра корзинки через равные интервалы времени, (β) каждое зерно движется в своём радиальном направлении по одному и тому же закону $r = r(t)$, (γ) угол расхождения между радиусами в любой паре последовательных зёрен равен фиксированной величине a. Такую модель заполнения корзинки зёрнами мы будем называть *глобальной кинематической моделью*.

Мы можем смотреть на процесс последовательного заполнения значений угловой координаты зёрнами как на аналог алгоритма поиска наибольшей общей меры двух величин путём их попеременного взаимного вычитания.

Пусть после того, как сделано n_1 поворотов на угол a, до полного оборота остался угол $b < a$ (рис. 3). Тем самым $1 = n_1 a + b$.

После ещё одного поворота на угол a дуга между отметками «0» и «1» будет поделена на отрезки $a - b$ и b. Далее от каждого отрезка a справа будет отсечён отрезок b, затем, при следующем проходе, ещё один отрезок b, и так до тех пор, пока не окажется, что левый остаток $c < b$ (рис. 4). При этом каждый отрезок a в итоге будет разделён на n_2 отрезков b и остаток c: $a = n_2 b + c$.

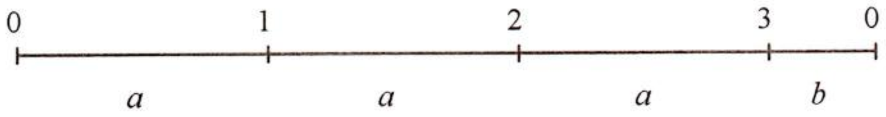


Рис. 3

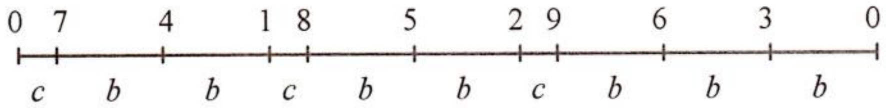


Рис. 4

Следующая серия проходов даст точки, сдвинутые влево от правых концов всех отрезков b на c, $2c$ и т. д., пока не окажется, что правый остаток $d < c$. При этом каждый отрезок b в итоге будет разделён на n_3 отрезков c и остаток d: $b = n_3c+d$.

Продолжая эту процедуру далее, получим цепочку равенств

$$1 = n_1a + b, \quad a = n_2b + c, \quad b = n_3c + d, \quad c = n_4d + e, \ \ldots,$$

которую можно переписать в виде

$$a = 1/(n_1+b/a), \quad b/a = 1/(n_2+c/b), \quad c/b = 1/(n_3+d/c), \quad d/c = 1/(n_4+e/d), \quad \ldots .$$

Подставляя последовательно второе равенство в первое, третье во второе и т. д., представим a в виде непрерывной дроби

$$a = 1/(n_1 + 1/(n_2 + 1/(n_3 + 1/(n_4 + ...)))).$$

Если величина a соизмерима с единицей, рассматриваемая процедура попеременного взаимного вычитания завершится на каком-то шаге k, когда очередной остаток окажется равным нулю — и соответствующая непрерывная дробь будет конечной; если же величина a несоизмерима с единицей, эта процедура не будет иметь завершения, и соответствующая непрерывная дробь будет бесконечной. В первом случае значения угловых координат зёрен с номерами k, $k+1$, $k+2$, ... будут повторять значения угловых координат зёрен с номерами 0, 1, 2, ...; во втором случае любые два зерна будут иметь различные азимутальные координаты.

3.2. Зададимся вопросом, какая последовательность подходящих частных $\{n_i\}$ соответствует *наиболее эффективному заполнению корзинки зёрнами*?

Мы знаем, что чем большим будет некоторое подходящее частное n_i, тем большими окажутся долго не заполняемые «пустоты» на соответствующей серии шагов. Наличие таких пустот можно считать свидетельством о не самом эффективном использовании площади корзинки. Поэтому выгодно, чтобы все подходящие частные n_i были как можно меньшими, т. е. равными 1. Тем самым оптимальный угол расхождения равен

$$\phi = 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + ...))).$$

Составив уравнение $\phi = 1/(1+\phi)$ и решив его, получим, что $\phi = (\sqrt{5}-1)/2 = 0,618\ldots$. Выраженный в градусной мере, этот угол с точностью до секунды равен $222^\circ\,29'\,32''$. Удобнее рассматривать его дополнение до полного оборота, равное $137^\circ\,30'\,28''$.

Только что составленное уравнение можно преобразовать в пропорцию

$$1 : \phi = \phi : (1-\phi).$$

Мы видим, что угол в полный оборот так относится к углу ϕ, как угол ϕ относится к его дополнению $1-\phi$ до полного оборота. Деление непрерывной величины на две части, когда целое относится к большей части как большая часть к меньшей, называется *золотым сечением*, соответственно иррациональное число ϕ и обратное к нему число $\Phi = \phi^{-1} = 1+\phi = (\sqrt{5}+1)/2 = 1,618\ldots$ называются *числами золотого сечения*.

3.3. Обрывая разложение ϕ в непрерывную дробь на очередном подходящем частном, получим подходящие рациональные дроби, всё точнее приближающие ϕ:

$$1/1,\ 1/(1+1/1) = 1/2,\ 1/(1+1/2) = 2/3,\ 1/(1+2/3) = 3/5,\ 1/(1+3/5) = 5/8,\ \ldots$$

Числители и знаменатели этих подходящих дробей являются последовательными числами Фибоначчи (попробуйте доказать это). Именно это обстоятельство приводит к тому, что индексы контактных парастих, проявляющихся при возрастании филлотаксиса, оказываются равными последовательным числам Фибоначчи. Можно было бы рассмотреть соответствующее доказательство (см., к примеру [2]), — но мы не станем этого делать, потому что сама глобальная кинематическая модель заполнения корзинки зёрнами будет подвергнута ниже сильнейшей критике. Эта модель служит хорошим средством для *описания* филлотаксиса — но в качестве *объяснения* причин этого явления её следует признать совершенно неудовлетворительной!

3.4. Посмотрим, как заполняется зёрнами круговая корзинка в глобальной кинематической модели. Пусть на зерно с номером n приходится площадь S (вообще говоря, величина переменная). Кольцо радиуса r и ширины dr имеет площадь $2\pi r dr$. Но эта же площадь равна Sdn, что приводит к дифференциальному уравнению $2\pi erdr = Sdn$. В простейшем случае $S = \mathrm{const}$ связь между n и r задаётся соотношением $Sn = \pi r^2$.

Результаты численного счёта для 1000 зёрен, выпущенных под углом расхождения ϕ, представлены на рис. 5. По краям корзинки просматривается пара встречных парастих $(55, 89)$; по мере приближения к центру она сменяется парами $(34, 55)$, $(21, 34)$ и т. д.

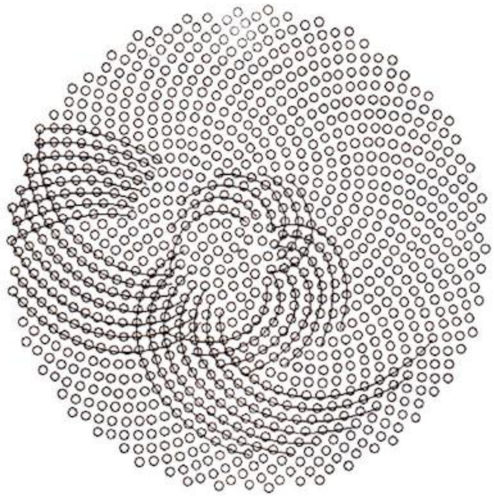


Рис. 5

4. Критика глобальной кинематической модели

В глобальной кинематической модели каждое зерно выпускается из центра с абсолютной азимутальной точностью, и зёрна двигаются по радиусу независимо друг от друга. Но оба эти предположения не соответствуют действительности!

- Во-первых, абсолютная точность отмеривания угла в природе недостижима.

  (а) Простые численные эксперименты показывают, что малое изменение угла расхождения ведёт к радикальной перестройке рисунка спиралей (рис. 6). Это приводит нас к выводу, что филлотаксис Фибоначчи возникает скорее всего не за счёт «предустановленной кинематической гармонии», но в результате «программированного» действия неких динамических факторов, сообщающих системе структурную устойчивость.

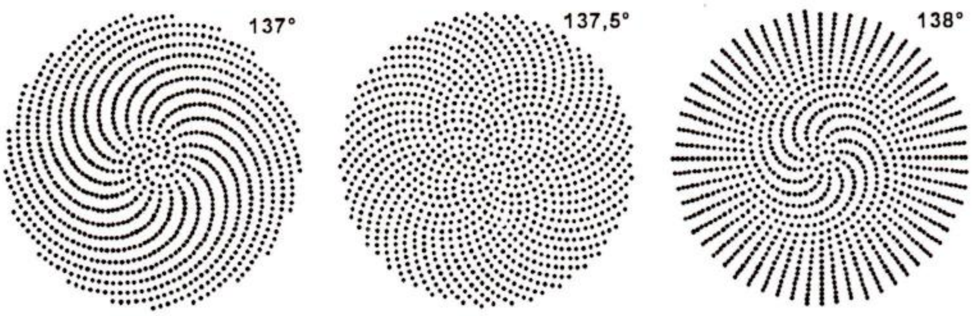


Рис. 6

  (б) Кроме того, в природе иногда (несколько процентов от общего числа случаев) встречаются корзинки, у которых возрастание филлотаксиса описывается другими числовыми последовательностями, также удовлетворяющими рекурсивному соотношению (1). Вот две такие последовательности (первая из них называется последовательностью Люка) и соответствующие им модели коробочек (рис. 7); непрерывные дроби во втором столбце таковы, что числители их подходящих дробей образуют нужную последовательность:

Последовательность	Непрерывная дробь	Угол расхождения
1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 86...	$1/(3+1/(1+1/(1+1/(1+\ldots))))$	$99°\,30'\,06''$
1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, 60, 97...	$1/(4+1/(1+1/(1+1/(1+\ldots))))$	$77°\,57'\,19''$

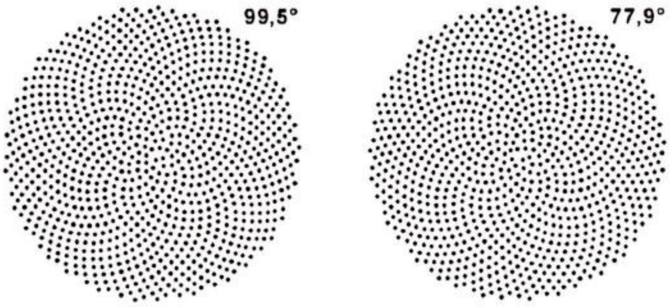


Рис. 7

Надо думать, что такие разновидности филлотаксиса возникают взамен филлотаксиса Фибоначчи *в результате некоторого сбоя*. Но было бы совершенно неправдоподобно, чтобы этот сбой приводил к другому — и опять абсолютно точно заданному и специально подобранному — углу расхождения! Скорее следует предположить, что угол расхождения вообще не является первичным формообразующим фактором. А ещё очень сомнительно, что выписанным здесь бесконечным непрерывным дробям можно приписать какой-нибудь физический смысл.

- Во-вторых, зёрна давят друг на друга, протискиваются, раздвигаются, деформируются и т. д. Парастиха — не то же самое, что точечная спираль. Решётки Браве суть объекты математической природы; парастихи — физически реальны. И когда мы наблюдаем за тем, как идёт возрастание филлотаксиса, в центре нашего внимания находится процесс перемыкания контактных парастих. При этом формообразующим фактором должно являться само рекуррентное соотношение (1), которое следует интерпретировать «локально» в том смысле, что каждое зерно взаимодействует только со своими непосредственными соседями.

5. Проблема размыкания младшей парастихи

5.1. Возрастание филлотаксиса происходит за счёт того, что при перемыкании пары противоположных контактных парастих (m, n) появляется новая контактная парастиха с индексом $m+n$. Пусть $m<n$; будем называть парастиху с индексом m «младшей», парастиху с индексом n «старшей», парастиху с индексом $m+n$ «диагональной».

При перемыкании пары противоположных контактных парастих система проходит *точку виртуального ветвления*, поскольку после замыкания диагональной парастихи разомкнуться может как младшая парастиха, так и старшая парастиха. Однако для того, чтобы возрастание филлотаксиса всегда шло в соответствии с рекуррентным законом (1), требуется, чтобы *при очередном шаге возрастания филлотаксиса всегда размыкалась младшая парастиха* (рис. 8). И действительное решение проблемы филлотаксиса состоит в отыскании механизма, обеспечивающего такой порядок перемыкания!

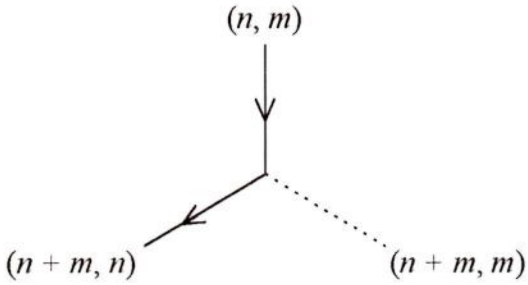


Рис. 8

Модельная часть искомого объяснения может быть выстроена либо на языке сил (см., [7]), либо на языке минимизации энергии системы (см. [3], [9], [11]–[13]). По-видимому, все эти представления (а также — и некоторые другие) в какой-то мере эквивалентны, и для нашей задачи предпочтительнее выбрать самое простое из них, — такое, из которого сразу же проистекает условие размыкания младшей парастихи.

5.2. В наших дальнейших рассуждениях будет подразумеваться, что расстояние от выделенного фрагмента решётки до центра корзинки в несколько раз больше характерного расстояния между зёрнами, и тем самым (а) локальное расположение зёрен может изображаться решёткой параллелограммов, (б) индексы рассматриваемых контактных парастих достаточно велики (≥ 13).

Выделим параллелограмм $ABCD$, образованный пересечением соседних спиральных линий, относящихся к паре видимых встречных парастих. Пусть индекс сторон AD и BC равен m, индекс сторон AB и DC равен n, индекс диагонали AC равен $n+m$. Проведём через A прямую MN перпендикулярно радиальному направлению; эта прямая (мы будем называть её «базой») локально совпадает с «базовой» окружностью, центр которой расположен в центре корзинки. Продолжим прямые CB и CD до пересечения с базой в точках M и N (рис. 9).

«Базовые сечения» младшей парастихи AM и старшей парастихи AN составляют соответственно $1/m$ и $1/n$ от длины базовой окружности. И поскольку $1/m > 1/n$, из двух парастих большее базовое сечение имеет парастиха с меньшим индексом.

5.3. Следуя за Адлером [7], введём важнейшее различение регулярной и иррегулярной конфигураций. В *регулярной* конфигурации диагональ $n + m$ образует

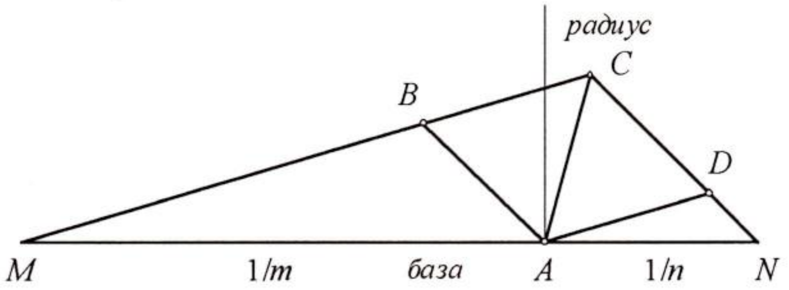


Рис. 9

встречную пару со старшей парастихой n, в *иррегулярной* конфигурации диагональ $n+m$ образует встречную пару с младшей парастихой m (рис. 10).

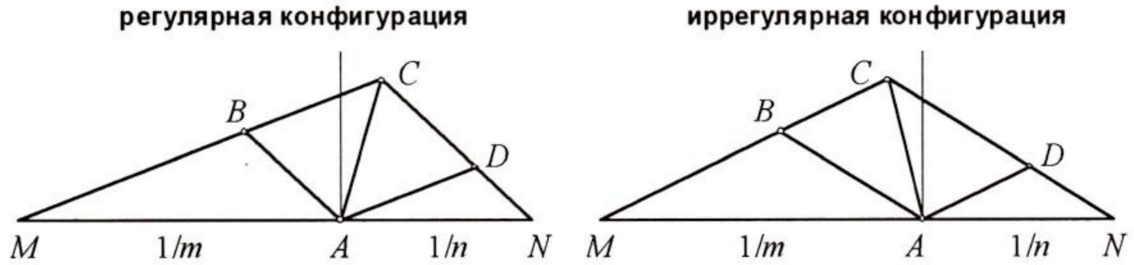


Рис. 10

Посмотрим теперь, как идёт перемыкание парастих в обеих конфигурациях. За точкой виртуального ветвления зёрна контактной диагональной парастихи продолжают сближаться по радиальному направлению так, что диагональная парастиха всё время сохраняет своё направление и «размыкает» сонаправленную с ней парастиху исходной пары. При этом в регулярной конфигурации размыкается младшая, а в нерегулярной — старшая парастиха. Тем самым необходимым и достаточным условием возрастания филлотаксиса по рекуррентному закону (1) является регулярность всякой вновь образовавшейся пары встречных контактных парастих.

5.4. Вывести *необходимое* условие регулярности несложно, но мы не станем этого делать, ограничившись следующим *достаточным* условием:

> *если в момент ветвления встречные контактные парастихи n и m имеют одинаковую ширину, образованная ими конфигурация является регулярной.*

Действительно, в таком случае параллелограмм $ABCD$ является ромбом, и из $AM > AN$ следует, что угол CAN является острым.

5.5. Для примера рассмотрим две модели возрастания филлотаксиса, удовлетворяющие *достаточному условию регулярности* (весьма правдоподобному физически!).

- В первой модели все зёрна представляют собой касающиеся жёсткие диски одинакового радиуса. В точке виртуального ветвления образуется локальный фрагмент гексагональной решётки, когда зерно касается шести своих соседей (рис. 11). За точкой ветвления сближение зёрен идёт по направлению 1–5, 2–4, что приводит к размыканию младшей парастихи.

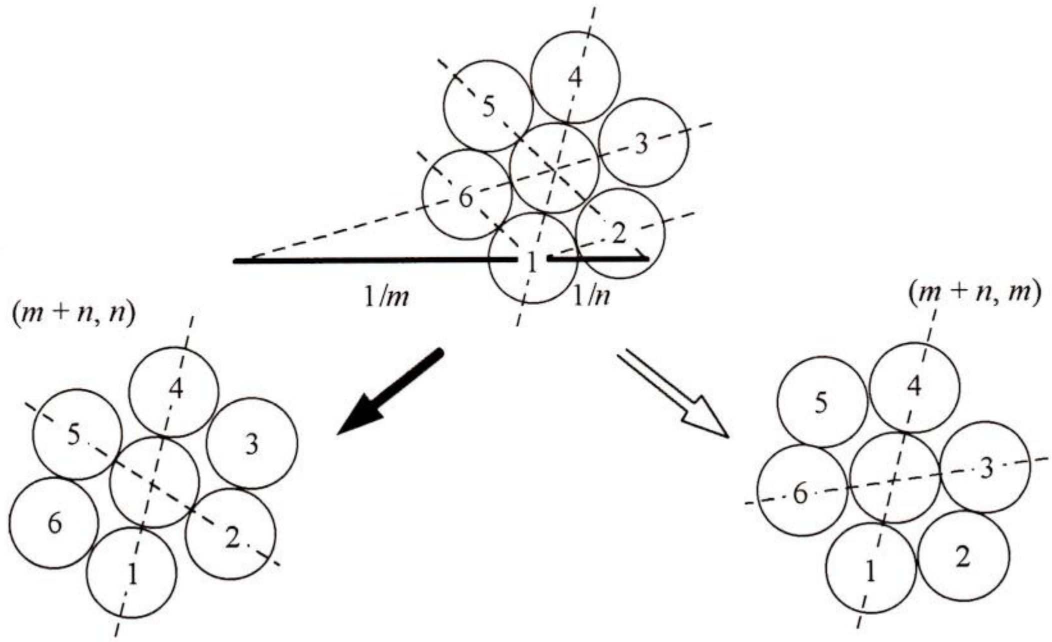


Рис. 11

- Во второй модели зёрна стремятся сохранять форму, максимально близкую к квадратной. В точке виртуального ветвления контактные парастихи ортогональны друг другу; между двумя последовательными точками ветвления *парастихи старшего семейства скользят друг по другу* (рис. 12). За точкой виртуального ветвления скольжение идёт вдоль старшей парастихи, что приводит к размыканию младшей парастихи.

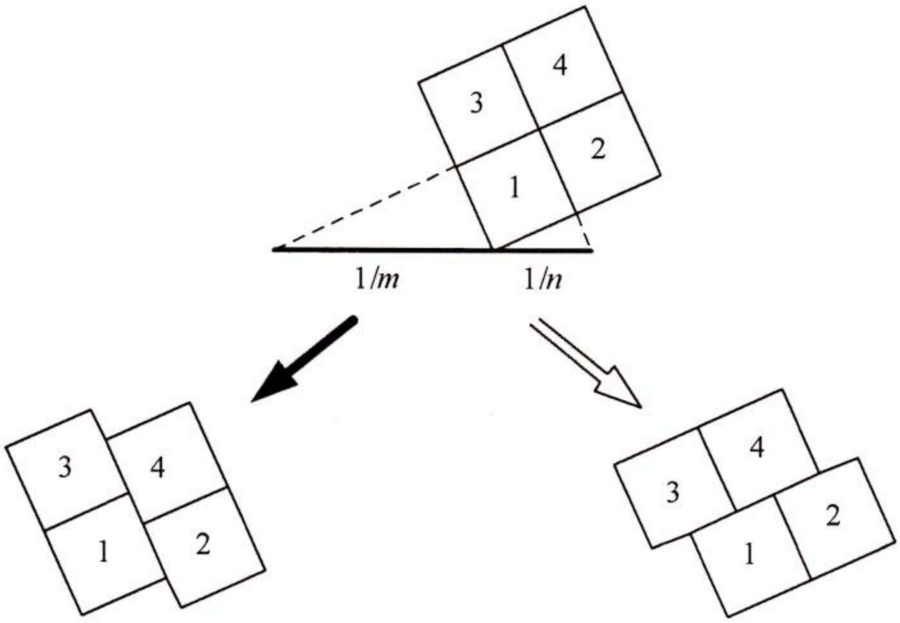


Рис. 12

6. Разворачивание непрерывной дроби «наружу» и античное учение о семенном логосе

6.1. Теперь мы можем дать адекватное описание рассмотренных в разделе 4 «сбойных» последовательностей. При смене пары встречных контактных парастих (m, n) на пару $(n, m+n)$ образуется новое отношение индексов парастих:

$$(n+m)/n = 1 + 1/(n/m).$$

При этом «старое» отношение n/m «сдвигается этажом ниже», а «наверху» появляется новая единица. Если возрастание филлотаксиса всё время идёт с размыканием младшей контактной парастихи, эта операция будет воспроизводиться на каждом шаге:

$$1 + 1/(n/m), \quad 1 + 1/(1 + 1/(n/m)), \quad 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(n/m))), \quad \ldots$$

Но тогда естественно сделать вывод о том, что первые пары чисел в каждой из рассматривавшихся последовательностей являются «затравочными» для последующего единообразно действующего механизма. К примеру, для последовательности Люка роль затравки играет отношение 3/1. А потом начинается процесс возрастания филлотаксиса, которому соответствует «наращивание» конечных непрерывных дробей

$$1 + 1/3 = 4/3, \quad 1 + 3/4 = 7/4, \quad 1 + 4/7 = 11/7, \quad 1 + 7/11 = 18/11, \quad \ldots$$

6.2. Разворачивание непрерывной дроби вовне от затравочного отношения замечательным образом схоже с реконструкцией, которую мы дали в работе [4] для пифагорейского учения о сторонних и диагональных числах, отношения которых рационально приближают иррациональное отношение диагонали квадрата к его стороне. Применительно к приближению золотого отношения парами соседних чисел Фибоначчи античные математики сказали бы, что два первых числа последовательности и обрабатывающий их алгоритм задают «семенное отношение ($\sigma\pi\epsilon\rho\mu\alpha\tau\iota\kappa o\varsigma$ $\lambda o\gamma o\varsigma$), по которому упорядочиваются фигуры».

Само слово «$\lambda o\gamma o\varsigma$» является в древнегреческом языке чрезвычайно многозначным. Это разумное начало, проявляющееся в способности приводить доводы и отчитываться в содеянном, это разумная речь и составляющие её слова; а в математике этим словом называют отношение чисел и величин. В оборот античной философской мысли понятие «семенного логоса» было введено ранними стоиками, называвшими так воплощённое в живых существах начало, благодаря которому они могут расти и воспроизводить себя в потомстве: «После того, как семя высажено в землю, оно разворачивает собственные логосы, привлекая необходимую материю и преобразуя те логосы, которые оно содержит в себе» (SVF II 499); «Природа — это структура, выходящая из себя самой в согласии с семенными логосами, выполняющая и воспроизводящая их в назначенные сроки» (Diog. Laert, VII, 158_7).

Связь пифагорейского учения о «семенном логосе» квадратного корня из двух и стоического учения о «семенном логосе» живых существ выглядит на первый взгляд не более чем интересной метафорой. И однако мы видим, как в теории филлотаксиса математическое учение пифагорейцев и натурфилософское учение стоиков теснейшим образом соединяются друг с другом, проясняя и исходный онтологический тезис Пифагора «всё есть число», и последующий гносеологический тезис, выдвинутый Иммануилом Кантом в «Математических началах естествознания»: «Во всяком частном учении о природе содержится ровно столько науки, сколько в нём содержится математики».

7. Модель спирального филлотаксиса с квадратными зёрнами

7.1. Исследуем, какую форму имеют скользящие парастихи в модели филлотаксиса с одинаковыми квадратными зёрнами (см. 5.4). Поскольку все парастихи имеют одинаковую ширину δ, спирали с индексом n будут являться эвольвентами окружности радиуса $R = n\delta/2\pi$ (рис. 13).

В обозначениях рис. 13, *a* каждая спираль-эвольвента описывается уравнением

$$\varphi = \alpha - \operatorname{arctg}\alpha = \operatorname{tg}\vartheta - \vartheta,$$

где $\alpha = \operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{(r/R)^2 - 1}$.

7.2. Соответствующие двум последовательным точкам виртуального ветвления концы «скользящей» парастихи определяются из того условия, что угол ϑ между направлением парастихи и радиусом удовлетворяет на нижнем и верхнем концах (рис. 14) соотношениям

$$\operatorname{tg}\vartheta^{\vee} = m/n \approx \Phi^{-1}, \qquad \operatorname{tg}\vartheta^{\wedge} = (m+n)/n \approx \Phi.$$

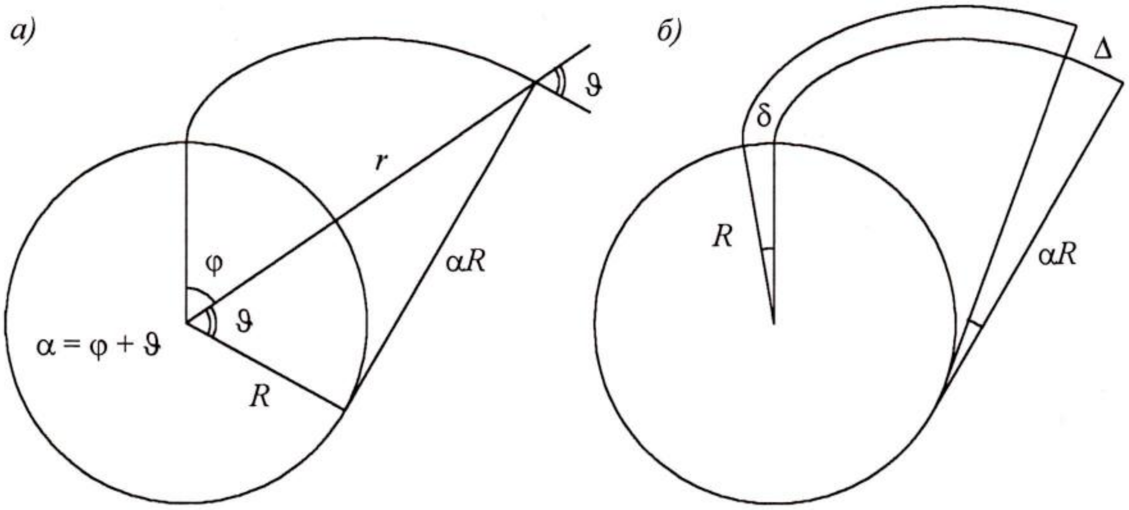

а)
б)
r
αR
R
φ
ϑ
$\alpha = \varphi + \vartheta$
δ
Δ

Рис. 13

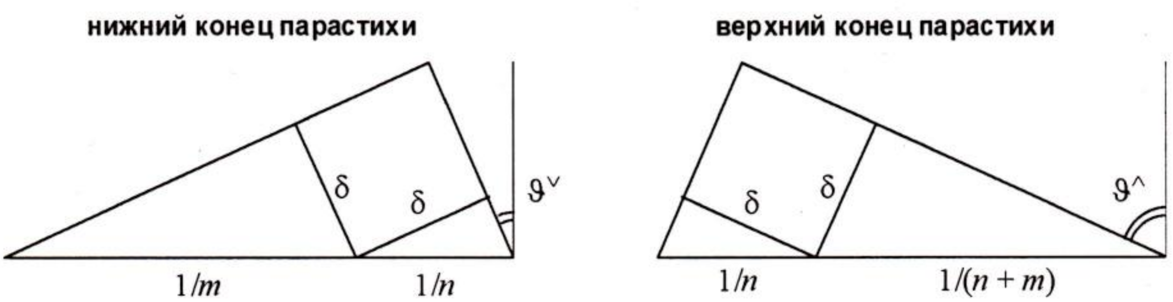

нижний конец парастихи
верхний конец парастихи
δ
$\vartheta^{\vee}$
$\vartheta^{\wedge}$
$1/m$
$1/n$
$1/(n+m)$

Рис. 14

Радиусы нижнего и верхнего концов скользящей парастихи и их отношение:

$$r^\vee = R\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta^\vee} \approx R\sqrt{1+\Phi^{-2}}, \qquad r^\wedge = R\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta^\vee} \approx R\sqrt{1+\Phi^2}$$

$$\frac{r^\wedge}{r^\vee} = \frac{\sqrt{1+\Phi^2}}{\sqrt{1+\Phi^{-2}}} = \Phi.$$

Азимутальные углы нижнего и верхнего концов парастихи и их разность:

$$\varphi^\vee = \Phi^{-1} - \operatorname{arctg}(\Phi^{-1}), \qquad \varphi^\wedge = \Phi - \operatorname{arctg}(\Phi);$$

$$\varphi^\wedge - \varphi^\vee = 1 - \operatorname{arctg}(1/2) = 30,73^\circ.$$

Нам осталось показать, что относительный сдвиг зерна между нижним и верхним концами соседних скользящих парастих одного семейства в точности равен ширине парастихи δ. Полный сдвиг соседних спиралей Δ так относится к δ, как радиус кривизны спирали αR относится к R (рис. 13, б); поэтому $\Delta = \delta\alpha = \delta \operatorname{tg}\vartheta$. Тем самым относительный сдвиг зерна между нижним и верхним концами равен

$$\Delta^\wedge - \Delta^\vee = \delta(\operatorname{tg}\vartheta^\wedge - \operatorname{tg}\vartheta^\vee) = \delta(\Phi - \Phi^{-1}) = \delta.$$

Семейства скользящих контактных парастих, построенные по приведённым выше формулам, изображены на рис. 15.

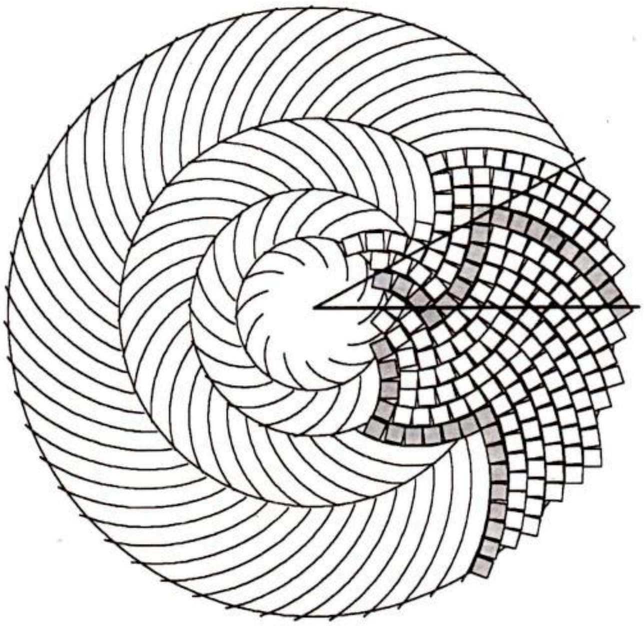


Рис. 15

8. Учебно-исследовательский семинар для старшеклассников

8.1. Одним из основных проектов виртуальной Лаборатории теоретической и прикладной эпистемологии (ЛТиПЭ) на сегодняшний день является учебный курс для старшеклассников «Применимая математика». Этот курс направлен на формирование у школьников представления о том, как и зачем создаются научные понятия, на воспитание у них умения математически исследовать явления реального мира, на развитие их мыслительных способностей и коммуникативных компетенций.

Чтобы научиться математике, надо решать математические задачи. Однако задача задаче рознь. Привычные задачи школьных учебников и математических олимпиад являются «закрытыми» в том смысле, что главное в них — получение правильного и окончательного ответа. Как только ответ получен, про задачу можно тут же забыть. И совсем другое дело — «открытые» задачи, исходное условие которых требует неоднократных переформулировок и уточнений, и процесс решения которых не исчерпывается найденным «ответом», поскольку приводит к постановке новых вопросов и задач, о существовании которых мы в начале и не подозревали.

Основной организационной формой курса «Применимая математика» является интенсивный учебно-познавательный семинар. Предлагаемые на семинаре задачи решаются обычно не индивидуально, а в рабочих группах, и результаты такой работы докладываются всем участникам семинара в стендовых докладах или на пленарных общих заседаниях. Многие школьники впервые понимают здесь, что о математике и её приложениях можно осмысленно размышлять и разговаривать.

8.2. Задача, в которой школьникам предлагается исследовать и объяснить явление филлотаксиса, является, на наш взгляд, весьма подходящей для проведения полноценного трёх- или даже четырёхдневного семинара-погружения. Организационные принципы такого семинара обсуждались нами в докладе [5], развёрнутое описание одного из семинаров этого проекта содержится в статье [6]; к этим работам мы и отсылаем заинтересованного читателя, предполагая, что если кто-либо соберётся организовать и провести учебно-исследовательский семинар по проблеме филлотаксиса, ему будет гораздо полезнее не воспроизвести готовую разработку, но осуществить свой проект самостоятельно. Мы же ограничимся несколькими замечаниями и советами.

1) Имеет смысл за неделю до семинара выдать его участникам подборку простых задач, приводящих к числам Фибоначчи, — чтобы сама эта последовательность и некоторые её свойства уже запечатлелись в памяти участников.

2) Основные усилия первого дня работы следует направить на внимательное наблюдение за спиральными структурами филлотаксиса на разнообразном материале. Во-первых, это комнатные растения, сосновые и еловые шишки, морские раковины и т. п. Во-вторых, это подборка фотографий цветов из семейства сложноцветных (подсолнух, ромашка, маргаритка и др.). Некоторые фотографии имеет смысл распечатать в увеличенном виде и вложить в

папку, выдаваемую каждому участнику семинара. В-третьих, в эту же папку вкладывается несколько рабочих листов с крупно распечатанным модельным изображением корзинки (наподобие того, что изображено на рис. 5), на котором можно выделять цветом семена, проводить спирали и т. п.

3) Общая дискуссия первого дня посвящена переходу от наблюдений к первым попыткам объяснения явления. Как будут разворачиваться следующие два дня семинара, зависит как от составленного плана, так и от конкретных идей, выдвигаемых участниками семинара. Можно сказать заранее, что помимо соображений, изложенных в данной статье, будут рассматриваться и разные другие соображения, в том числе телеологические и эволюционные. К примеру, участники могут заметить, что листья на пятигранном стволе молочая образуют семейство встречных спиралей $(2, 3)$, и предположить, что такое расположение обеспечивает наилучший доступ света к листьям.

4) На общей дискуссии второго дня важно сделать предварительную сборку результатов, выделить дальнейшие направления исследования и сформировать группы третьего дня по этим направлениям.

8.3. Устройство для моделирования расположения листьев в цилиндрическом филлотаксисе изображено на рис. 16. На подставке закреплена вертикальная труба высотой около 50 см и диаметром около 10 см. На поверхность трубы нанесена вертикальная градусная разметка. На тубус плотно (но не туго) надеваются кольца из прозрачной пластмассы; высота каждого кольца около 1 см. В каждом кольце проделано отверстие, в которое вставляется «черенок листа». В черенках могут закрепляться «листья» разных цветов (на рисунке не показаны).

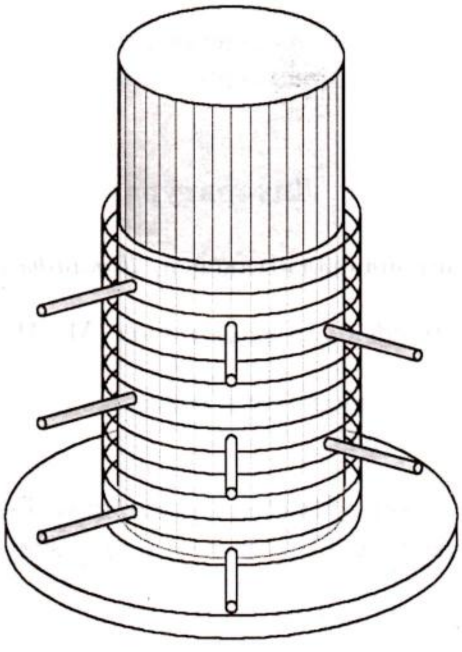


Рис. 16

8.4. Семинар приобретает дополнительные измерения, если его участникам обеспечен выход в Интернет. Важнейшими сетевыми ресурсами для нашей темы в настоящее время являются:

•сайт «Филлотаксис» (Smith College, штат Массачусетс, США): http://www.math.smith.edu/~phyllo/

•сайт «Числа Фибоначчи», поддерживаемый Роном Кноттом (Великобритания): http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/

•программа для моделирования филлотаксиса, составленная Брайаном ДиЛорето:
http://atomicconcept.united.net.kg/phylotaxis.htm

Замечание

Настоящая статья была посвящена в первую очередь поискам механико-геометрических объяснений закона регулярного возрастания филлотаксиса. По этой причине в ней не были отражены интереснейшие математические подходы, в которых возрастание филлотаксиса рассматривается как геометрическое преобразование в псевдоевклидовой геометрии Минковского (О. Я. Боднар, [1]) или неевклидовой геометрии Лобачевского (Л. С. Левитов, [11], [12]).

Благодарности

Я выражаю свою признательность Дмитрию Вейзе (Москва), Леониду Левитову (MIT) и Константину Метлову (Прага) за участие и ценные замечания, высказанные на завершающей стадии написания этой статьи. Пользуясь случаем, я сердечно благодарю Настю Щетникову (ЛТиПЭ), вместе со мной проводившую учебно-познавательный семинар по проблеме филлотаксиса в школе № 11 г. Мыски Кемеровской обл., а также всех участников и организаторов этого семинара. И ещё: «Gracias a la vida que me ha dado tanto», как пела когда-то Виолетта Парра.

Литература

[1] Боднар О. Я., Геометрия филлотаксиса, *Доклады АН Украины* 9 (1992) 9–14.

[2] Кокстер Г. С. М., *Введение в геометрию* (М., Наука, 1966).

[3] Левитов Л. С., Числа Фибоначчи в ботанике и физике: филлотаксис, *Письма в ЖЭТФ* **54** (1991) 542–545.

[4] Щетников А. И., Атомы Платона, алгоритм Теона и понятие «семенного логоса», *Математическое образование* 1(8) (1999) 84–94.

[5] Щетников А. И., Щетникова А. В., Учебный семинар «Как решать незнакомую задачу», *Труды конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения Алексея Андреевича Ляпунова* (Новосибирск, ОИИ СО РАН, 2001) 773–780.

[6] Щетников А. И., Щетникова А. В., Учебно-исследовательский семинар «Распределение первых значащих цифр», *Математическое образование* 2(21) (2002) 107–123.

[7] Adler I., A model of contact pressure in phyllotaxis, *J. Theor. Biol.* **45** (1974) 1–79.

[8] Adler I., Barabe D., Jean R. V., A history of the study of phyllotaxis, *Annals of botany* **80** (1997) 231–244.

[9] Douady S., Couder Y., Phyllotaxis as a physical self-organized growth process,*Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 2098–2101.

[10] Jean R. V., *Phyllotaxis: A systemic study in plant morphogenesis* (Cambridge Univ. Press, 1995).

[11] Lee H. W., Levitov L. S., Universality in phyllotaxis: a mechanical theory, *Symmetry in plants* (Singapore, World Scientific, 1998) 619–653.

[12] Levitov L. S., Energetic approach to phyllotaxis,*Europhys. Lett.* **14** (1991) 533–539.

[13] Levitov L. S., Phyllotaxis of flux lattices in layered superconductors,*Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 224–227.

[14] Rivier N., Occelli N., Pantaloni J., Lissowski A., Structure of Bénard convection cells, phyllotaxis and crystallography in cylindrical symmetry, *J. Physique* **45** (1984) 49–63.

Щетников Андрей Иванович,
координатор Лаборатории теоретической
и экспериментальной эпистемологии.

E-mail: schetnikov@ngs.ru
http://ltpe.stsland.ru

Математическое миросозерцание П. А. Флоренского и геометрические фантазии с использованием целой и дробной части числа

В. А. Еровенко, Н. В. Михайлова

В статье рассказано о некоторых философско-математических взглядах П. А. Флоренского, относящихся к понятиям бесконечности, непрерывности и разрывности. Приведена подборка задач на построение геометрических мест точек с использованием изучаемых в школе разрывных функций "целая часть числа" и "дробная часть числа".

Обсуждать природу интеллектуальной деятельности в таком теоретически сложном знании, как современная математика, — довольно трудная задача даже для профессионалов. Философ Мераб Мамардашвили (1930—1990) однажды заметил, что *профессионал это не тот, кто все знает, а тот, кто хорошо знает то, что он знает.* Если говорить о математике в философском контексте, то следует иметь в виду, что нематематические рассуждения, вообще говоря, лишаются существенной и убедительной для математиков аргументации.

В античные времена математика сводилась в основном к геометрии, изучаемой сейчас в школьных курсах. Хотя из современных исследований по основаниям геометрии известно, что математическая наука не может основываться только на нескольких предложениях, рассматриваемых в школьных учебниках в виде аксиом, геометрия и ее многочисленные ответвления все еще остаются довольно обширными разделами современной математики. Возникшая в конце XIX и начале XX века *теория множеств Кантора* оказалась чрезвычайно полезной и плодотворной для всей современной математики, хотя и породила значительные трудности, поскольку некоторые рассуждения этой теории приводили к логическим противоречиям. В связи с этим возникли внутриматематические философские проблемы с целью отделить "опасные рассуждения" от содержательной части теории множеств. Вот тогда и выяснилось, что использование некоторых важных понятий, как например "существование", в современной математике вызывает серьезные философские возражения.

Выдающийся американский математик Джон фон Нейман (1903—1957), говоря об изменении стиля математических работ, указывает на такой парадоксальный факт, что "по стилю доказательств различие между современными авторами и математиками XVIII и XIX веков гораздо сильнее, чем между современными математиками и Евклидом" [1, с.91]. Поэтому, несмотря на современный, достаточно высокий для теоретических работ, уровень математической строгости, *математическое доказательство*, как и во времена древнегреческого математика Евклида (ок. 365 — ок. 300 до н.э.), все еще продолжает оставаться не более, чем убедительным рассуждением, что следует учитывать в преподавании математических курсов любого уровня. Поскольку понятие "абсолютной математической строгости" подвержено изменениям, то по мнению профессора фон Неймана, "в математику существенно должен входить некий нематематический элемент, каким-то образом связанный либо с эмпирическими науками, либо с философией, либо с эмпирическими науками и философией ..." [1, с.90]. О неэмпирическом характере философии, точнее теории познания, можно говорить, если она может существовать независимо от опыта. В одной из бесед замечательный русский филолог и философ А.Ф.Лосев (1893—1988) сказал, что поскольку *математика и философия* касаются самых общих предметов, то они *никогда не умирают*. Они меняются. Но никогда не умирают. Во времена Платона, в период необыкновенного духовного подъема во всей истории цивилизаций, когда еще не было ни глубоко развитой математики, ни искусства в его современном понимании, математика и философия были едины.

Математики постоянно ощущают присутствие бесконечности в основных теоретических разделах своей науки. Трудность изучения проблемы бесконечного для человека из мира конечного и преходящего выдающийся немецкий математик Давид Гильберт (1862—1943) в статье "О бесконечном" (1925) объясняет тем, что *бесконечное нигде не реализуется*, поскольку "его нет в природе, и оно недопустимо как основа нашего разумного мышления". Поэтому одна из современных тенденций философии математики состоит в рассмотрении понятия "бесконечность в математике" в тесной связи с философскими, религиозными и мифопоэтическими представлениями о бесконечном. Последнее можно рассматривать как определенную тенденцию "гуманитаризации" математики, когда акцент делается не на "познаваемом объекте", а на "творящем субъекте". Один из крупнейших мыслителей начала XX века Павел Александрович Флоренский (1882—1937) в своем "Автореферате" (1925—1926) писал, что *видит в математике необходимую и первую предпосылку мировоззрения*, но в "самодовлеемости математики" находит причину ее "культурного бесплодия", поэтому направляющие импульсы математике необходимо получать, с одной стороны, — от общего миропонимания, а с другой — от опытного изучения мира и от техники. Таким образом, хотя математика, по Флоренскому, необходимая и первая, но все же лишь предпосылка мировоззрения, и потому дает возможность создания только теоретических основ миропонимания.

Интерес к математике появился у П.А.Флоренского еще в гимназии, когда его заинтересовал вопрос о прерывности и разрывности в математике и естествознании. Большой удачей для Флоренского, считает историк математики, доктор физико-математических наук С.С.Демидов, была встреча в Московском университете с профессором Н.В.Бугаевым (1837—1903), который читал ему курс математического анализа. "Мне очень приятно, — писал он отцу, — что мои мысли совпали с мыслями нашего Бугаева, он постоянно на лекциях ... напирает на тот пункт, что математика состоит из двух равноправных частей Анализа и Аритмологии, что далеко не все исчерпывается непрерывностью, что последняя есть только частный случай прерывности, что, наконец, слишком блестящие успехи Анализа вскружили голову математикам и они переувлеклись ..." [2, с.76]. Наиболее влиятельный московский математик того времени, глава Московской философско-математической школы Н.В.Бугаев стремился создать математическое направление, исключающее *односторонность аналитического мировоззрения*, игнорировавшего разрывные процессы действительности [3]. Поэтому построение теории разрывных функций было для Бугаева самой актуальной задачей математики. Именно идеи Н.В.Бугаева стали для П.А.Флоренского источником собственных философско-математических исследований.

Тему исследования, в границах бугаевской тематики, над которой Павел Флоренский работал во время учебы в университете, он сформулировал так: *Идея прерывности, как элемент миросозерцания.* Хотя лично с Бугаевым он общался мало, Флоренский все же считал себя его учеником. После лета 1903 года его, как принято сейчас говорить, научным руководителем стал профессор Л.К.Лахтин (1853—1927). "Смерть прервала исполненный веры призыв Бугаева как раз в то время, — писал Флоренский, — когда его идеи, или идеи, подобные его идеям, начали пробиваться из-под камней в разных закоулках науки" [4, с. 164]. Одним из стимулов работы Флоренского над этой темой было начинающееся общее преклонение перед личностью, что он оценивал как новое "прерывное миросозерцание". Поэтому, хотя исследование и было "перепевом" бугаевских тем, основной его целью было представление в систематизированном виде фактов, показывающих прерывность в "действительности, данной теперешнему сознанию". Интересно отметить, что первая книга сочинения Флоренского посвящена именно геометрии по следующим причинам. "Во-первых, изложение подействует убеждающим образом, — считает он, — когда подавляющая совокупность фактов покажет, что даже в последней крепости непрерывного ... — пространстве, на почве которого и была создана Зеноном и Парменидом идея непрерывного, даже в геометрических образах находит себе место прерывность" [4, с. 165]. Вторая причина состояла в необходимости рассмотреть наглядные представления о прерывности прежде, чем приступать к очень отвлеченному учению Кантора, содержащемуся во второй книге этого сочинения, а в-третьих, считал Флоренский, изучение *геометрических образов* позволит изучить многое из того, что пришлось бы изучать много раз сряду.

Студенческая работа Павла Флоренского интересна еще и тем, что в ней бугаевская тема прерывности связывается с канторовской теорией множеств и с новейшими исследованиями французской школы теории разрывных функций действительного переменного. Аритмологию Н.В.Бугаева, понимаемую не только в узком смысле слова как теорию прерывных функций, но и более широко как идею прерывности, свойственную всему новому миросозерцанию, П.А.Флоренский обогатил понятийным аппаратом теории множеств Георга Кантора (1845—1918). Понятие непрерывности возникло внутри самой математики, поэтому, как писал П.А.Флоренский в работе "*Об одной предпосылке мировоззрения*" (1904), "вполне естественно было ждать, что ... математика с течением времени захочет исправить ту односторонность миросозерцания, которую она, хотя и непреднамеренно, вызвала в умах целых поколений" (цит. по [5, с.34]). Определенные надежды, в этой связи, Флоренский связывал с "теорией групп", как тогда он переводил немецкое слово, по современному называемое "теория множеств". Из канторовского определения *континуума, как совершенного связного множества*, где под совершенным множеством понимается замкнутое множество без изолированных точек, он делает вывод о том, что непрерывность есть частный случай прерывности. Вообще, в вопросе о континууме Кантор был убежденным противником понимания его как некой данности или априорной формы мышления. Однако канторовское определение континуума представляет собой только некоторую модель континуума и, как замечает доктор философских наук В.Н.Катасонов, имеет в виду некоторую *интуицию континуума*, оставляя открытым вопрос о ее философском смысле.

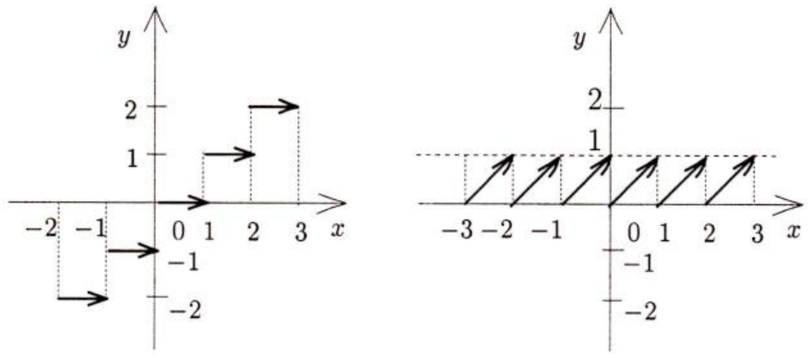
Идея бесконечного для Флоренского пронизывает все остальные идеи и связывает их в единый образ, то есть является основной для миропонимания. В журнале "Новый путь" была опубликована статья выпускника физико-математического факультета Московского университета П.А.Флоренского "О символах Бесконечности (Очерк идей Г.Кантора)" (1904). Хотя сама эта работа не является оригинальной, в ней впервые на русском языке излагались основные идеи теории множеств Кантора. Различие математических понятий *актуальной* и *потенциальной бесконечности* помогает Флоренскому осмыслить отношение "тварного мира" и "мира Божественного", "дольнего" и "горнего", а именно, для него важна первичность актуальной бесконечности в отношении потенциальной. Обосновывает он это тем, что поскольку "в математике невозможно обойтись без потенциально бесконечных переменных величин, но использование такой величины требует, чтобы "область" ее изменения уже была задана, определена" [6, с.375]. Математический способ познания является для Флоренского промежуточным между *рассудочным подходом* и *мистическим*. Введение иррациональных чисел по Кантору для Флоренского является образцом символического постижения актуально бесконечного по отношению к конечному. Иррациональные числа при таком подходе определяются символом, которому соответствует класс эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Поэтому иррациональное число трудно уловимо *единым актом мысли*, поскольку мы не можем придти к нему, следуя вдоль последовательности рациональных чисел.

В научных объяснениях различных явлений природы основным орудием древних была геометрия, а в Новое время — математический анализ. Еще великий французский мыслитель Блез Паскаль (1623—1662) различал *ум геометрический* и *ум проницательный*. Ум геометрический способен логически выводить различные положения из конечного числа принципов, а ум проницательный способен ориентироваться и выносить суждения из необозримого числа принципов, хотя эти способности и взаимодополнительны. Довольно часто в своей деятельности математики пользуются эстетическим критерием. Например, профессор Н.В.Бугаев специально подчеркивал то обстоятельство, что особую прелесть геометрическим истинам, кроме *логической доказательности*, придает наглядность и *созерцательная убедительность*. Некоторые фантазии на условную тему "геометрическое место точек", с использованием целой и дробной части числа, то есть разрывных функций, мы попробуем сейчас воспроизвести.

Целой частью числа x, обозначается $[x]$, называют наибольшее целое число не превосходящее x. Обозначение $[x]$ для целой части числа ввел в 1808 году немецкий математик Карл Гаусс (1777—1855). Другое, более раннее (1798 года) обозначение этой функции $E(x)$ (антье от x) принадлежит французскому математику Андриену Лежандру (1752—1833). *Дробной частью числа* x, обозначается $\{x\}$, называют разность между этим числом и его целой частью, то есть $\{x\} = x - [x]$. Дробная часть числа — это неотрицательное число, которое всегда меньше 1.

Замечание 1. *Из равенства* $[x] + \{x\} = x$ *для функций целой и дробной части числа следует, что сумма двух разрывных функций, кусочно-постоянной и немонотонной, может быть непрерывной и монотонной функцией.*

Напомним, что графики функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$ имеют следующий вид:



Замечание 2. *Отметим важные свойства дробной части числа: функция* $y = \{x\}$ *— периодическая с периодом 1, то есть* $\{x+1\} = \{x\}$, *и, кроме того,* $\{x\} = x$ *для* $x \in [0, 1)$.

В частности, справедливо следующее равенство для дробной части числа $\{x + n\} = \{x\}$, где $n \in \mathbf{Z}$, хотя для целой части числа $[x + n] = [x] + n$, при $n \in \mathbf{Z}$. Напомним также, что *для нецелых* x *верны равенства вида* $\{-x\} = 1 - \{x\}$ *и* $[-x] = -[x] - 1$ (см., например, [3]).

Используя замечания 1 и 2, рассмотрим простейшие примеры на построение графиков функций и некоторые уравнения, содержащие целую $[x]$ и дробную $\{x\}$ части числа x (см. также примеры в книге заслуженного учителя А.В. Столина [7]).

Задача 1. *Построить график функции* $y = [x] + \left(\frac{1}{2}\right)\{x\}(1 + (-1)^{[x]})$.

Решение. Чтобы раскрыть выражение $(-1)^{[x]}$ рассмотрим два случая, когда целое число $[x]$ четное и нечетное.

Пусть $[x] = 2n$, $n \in \mathbf{Z}$, тогда $(-1)^{[x]} = 1$ и, поэтому, $y = [x] + \left(\frac{1}{2}\right)\{x\}(1 + 1) = [x] + \{x\}$. Следовательно (см. Замечание 1), $y = x$ для $2n \le x \le 2n + 1$.

Пусть $[x] = 2n+1$, $n \in \mathbf{Z}$, тогда $(-1)^{[x]} = -1$ и, поэтому, $y = [x]+\left(\frac{1}{2}\right)\{x\}(1-1) = [x]$, то есть, $y = [x]$ для $2n + 1 \le x \le 2n + 2$.

График функции $y = [x] + \left(\frac{1}{2}\right)\{x\}(1 + (-1)^{[x]})$ построен на Рис. 1.

Задача 2. *Построить график функции* $y = \{x\} + \left(\frac{1}{2}\right)[x](1 - (-1)^{[x]})$.

Решение. Как и в задаче 1 рассмотрим два случая, когда целое число $[x]$ четное и нечетное, и воспользуемся периодичностью функции $\{x\}$ (см. Замечание 2).

Пусть $[x] = 2n$, $n \in \mathbf{Z}$, тогда $(-1)^{[x]} = 1$ и, поэтому, $y = \{x\} + \left(\frac{1}{2}\right)[x](1-1) - \{x\}$ и, таким образом, $y = \{x\}$ для $2n \le x \le 2n + 1$.

Пусть $[x]=2n+1$, $n\in\mathbf{Z}$, тогда $(-1)^{[x]}-1$ и, поэтому, $y=\{x\}+\left(\frac{1}{2}\right)[x](1+1)=\{x\}+[x]$. Следовательно, $y=x$ для $2n+1\le x\le 2n+2$.

График функции $y=\{x\}+\left(\frac{1}{2}\right)[x](1-(-1)^{[x]})$ построен на Рис.2.

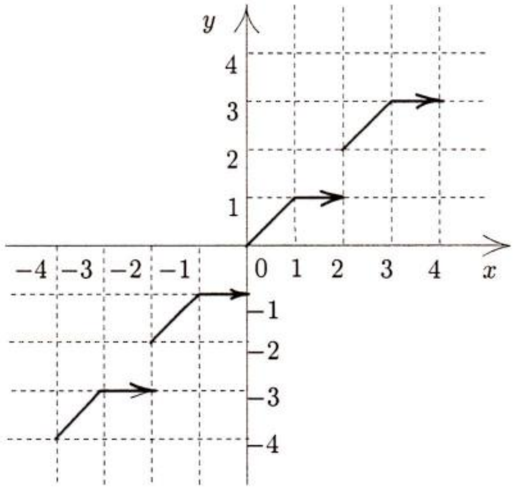


Рис. 1

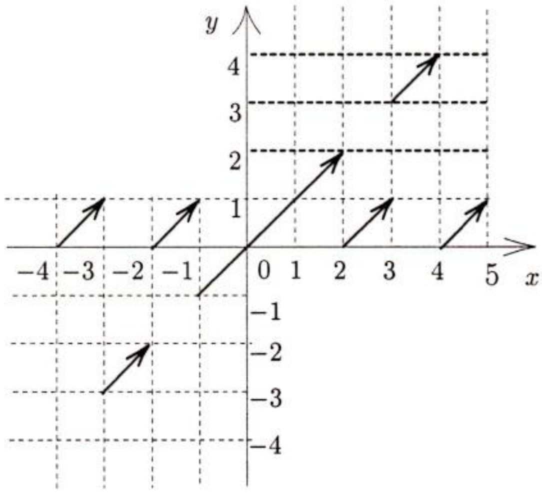


Рис. 2

Простейшие уравнения, содержащие $[x]$ или $\{x\}$, можно решить непосредственно по определению или используя графики функций, входящих в эти уравнения. Например:

Если $x=[x]$, то тогда $x-[x]=0$ или $\{x\}=0$, то есть $x\in\mathbf{Z}$.

Если $x=\{x\}$, то тогда $x-\{x\}=0$ или $[x]=0$, то есть $x\in[0,1)$.

Если $[x]=\{x\}$, то так как $\{x\}\in[0,1)$ для всех x, то $x=0$.

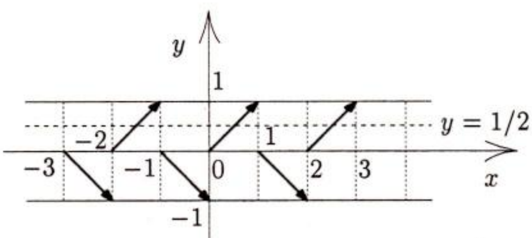
Однако некоторые уравнения, возможно, проще решить графически. Покажем это на следующих двух примерах.

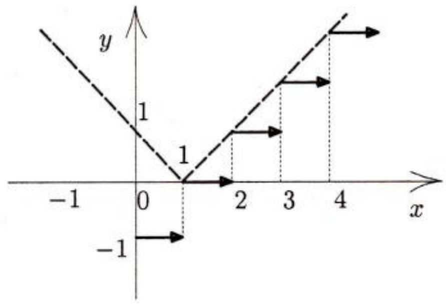
Задача 3. *Решить уравнение* $(-1)^{[x]}\{x\}=\frac{1}{2}$.

Решение. Построим графики функций $y=(-1)^{[x]}\{x\}$, $y=\frac{1}{2}$ и найдем общие точки пересечения.

Как и при построении графика в задаче 1, нетрудно видеть, что, в случае $y=(-1)^{[x]}\{x\}$, для $[x]=2n$, $n\in\mathbf{Z}$, то есть $2n\le x<2n+1$, а для $[x]=2n+1$, $n\in\mathbf{Z}$, то есть $2n+1\le x<2n+2$, $y=-\{x\}$.

Ответ: $x\in\{2n+\frac{1}{2}:n\in\mathbf{Z}\}$.





Задача 4. *Решить уравнение* $|x-1| = [x] - 1$.

Решение. Построим графики функций $y = |x-1|$, $y = [x]-1$ и найдем абсциссы точек пересечения.

Для $y = |x-1|$ модуль функции $x-1$ равен

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{для } x \geq 1, \\ 1-x, & \text{для } x < 1, \end{cases} \quad \text{а график функции } y = [x]-1$$

получается из графика $y = [x]$ со сдвигом по оси y на -1.

Ответ: $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Некоторые элементарные неравенства, содержащие $[x]$ и $\{x\}$ можно решить не прибегая к геометрическим иллюстрациям. Очевидно, что $\{x\} < [x]$, если $1 \leq x$, и $[x] \leq \{x\}$, если $x < 1$.

То же можно сказать и о простейших "нелинейных" уравнениях. Например, если $[x^2] = x$, то тогда x — целое число и, следовательно, x^2 — целое и $[x^2] = x^2$. Уравнение $[x^2] = x$ свелось к уравнению $x^2 = x$ или $x(x-1) = 0$ для целых x. Поэтому, $x = 0$ и $x = 1$ являются искомыми решениями.

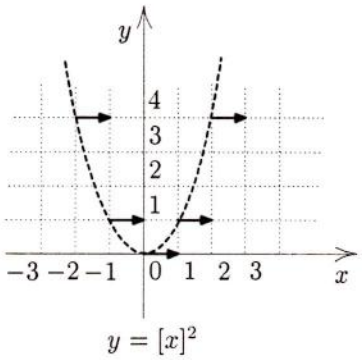
Для решения графическим методом более сложных функциональных уравнений и неравенств, содержащих функции $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$, можно воспользоваться следующими двумя замечаниями (см. подробности в книге [8]).

Замечание 3. *Общий метод построения графиков функций вида* $y = f([x])$ *и* $y = f(\{x\})$ *состоит в разбиении оси* x *по целочисленным точкам на интервалы длины 1, на которых легко "раскрыть"* $[\cdot]$ *и* $\{\cdot\}$ *от аргументах.*

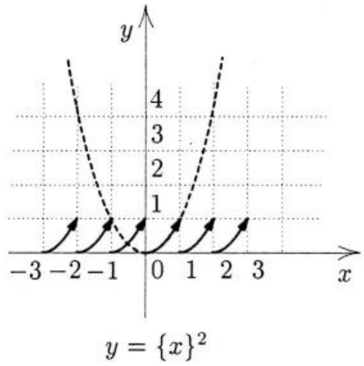
Для построения графика функции $y = f([x])$, проводят прямые $x = n$, $n \in \mathbf{Z}$, и находят точки пересечения этих прямых с графиком $y = f(x)$, то есть точки $(n, f(n))$ для $n \in \mathbf{Z}$, которые принадлежат искомому графику. Из определения функции $[x]$ следует, что для $[x] = n$, то есть в полосе $n \leq x < n+1$, функция $y = f([x])$ имеет вид $y = f(n)$.

Поскольку функция $y = f(\{x\})$ периодическая с периодом 1 и для $x \in [0, 1)$ справедливо равенство $f(\{x\}) = f(x)$ (см. Замечание 2), то для построения графика $y = f(\{x\})$ с помощью графика $y = f(x)$, достаточно построить последний только на $[0, 1)$ и затем продолжить его, учитывая свойство периодичности функции $y = f(\{x\})$, так как $f(\{x + l\}) = f(\{x\})$.

Например, для функции $f(x) = x^2$ графики функций $y = [x]^2$ и $y = \{x\}^2$ имеют вид:



$y = [x]^2$



$y = \{x\}^2$

Задача 5. *Решить графически уравнение* $\{x\}^2 = x^2$.

Решение уравнения непосредственно следует из графика функции $y = \{x\}^2$.

Ответ: $x \in \{-\frac{1}{2}\} \cup [0, 1)$.

Задача 6. *Решить графически неравенство* $[x]^2 > \{x\}^2$.

Решение неравенства можно получить используя графики функций $y = [x]^2$ и $y = \{x\}^2$.

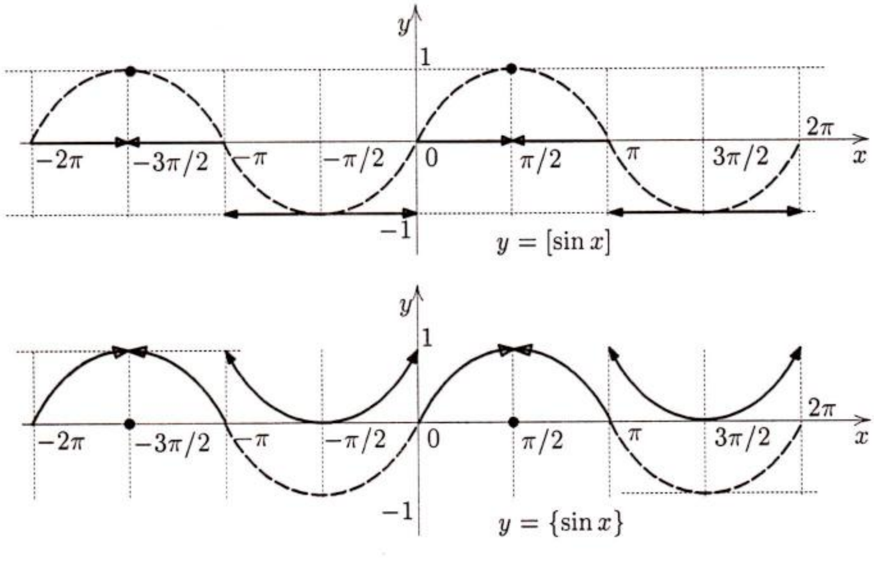
Ответ: $x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$.

Замечание 4. *Общий метод построения графиков функций вида* $y = [f(x)]$ *и* $y = \{f(x)\}$ *состоит в разбиении оси* y *по целочисленным точкам на интервалы длины 1, на которых легко "раскрыть"* $[\cdot]$ *и* $\{\cdot\}$ *от функции* $f(x)$.

Для построения графика функции $y = [f(x)]$, используя известный график функции $y = f(x)$, проводят прямые $y = n$, $n \in \mathbf{Z}$, и находят точки пересечения этих прямых с графиком $y = f(x)$, то есть точки $(f^{-1}(n), n)$ для $n \in \mathbf{Z}$, где $f^{-1}(n) = \{x : \ f(x) = n\}$, которые принадлежат искомому графику. Из определения функции $y = [f(x)]$ следует, что на множестве $\{x : \ n \leq f(x) < n + l\}$ имеем $y = n$.

Для построения графика функции $y = \{f(x)\}$ заметим, что поскольку $0 \leq \{f(x)\} < l$, то соответственно все значения функции $y = \{f(x)\}$ лежат в полосе $0 \leq y < 1$. Поэтому, по определению функции $y = \{f(x)\}$, на множествах $\{x : n \leq f(x) < n + l\}$, $n \in \mathbf{Z}$, где $[f(x)] = n$, справедливо равенство $y = f(x) - n$.

Например, для функции $f(x) = \sin x$ графики функций $y = [\sin x]$ и $y = \{\sin x\}$ имеют вид:



Задача 7. *Решить графически уравнение* $\{\sin x\} = \sin x$.

Поскольку равенство $\{\sin x\} = \sin x$ эквивалентно равенству $[\sin x] = 0$, то для решения можно использовать как график функции $y = \{\sin x\}$, так и график для функции $y = [\sin x]$.

Ответ: $x \in [2\pi k, \ \frac{\pi}{2} + 2\pi k) \cup (\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbf{Z}$.

Задача 8. *Решить графически неравенство* $[\sin x] > \{\sin x\}$.

Для решения этого неравенства можно непосредственно воспользоваться графиками функций $y = [\sin x]$ и $y = \{\sin x\}$.

Ответ: $x \in \{\frac{\pi}{2} + 2\pi k : \ k \in \mathbf{Z}\}$.

В "Началах" Евклида, ученика знаменитого философа Платона, дано наглядное определение линии, которым пользовались почти полторы тысячи лет. Историческое значение "Начал", подытоживших все предшествующие достижения греческих математиков состоит, в попытке логического построения геометрии, хотя с современных позиций предложенную Евклидом аксиоматику нельзя считать полной. Линию на плоскости он определял как *длину без ширины*. Однако это определение использует такие неопределенные понятия как длина и ширина. Только в XVII веке французский математик и философ Рене Декарт (1596—1650) впервые дал сравнительно строгое и довольно общее определение линии. Декарт определил линию на плоскости как *множество точек* $(x, \ y)$ *плоскости, удовлетворяющих уравнению* $F(x, \ y) = 0$, где F — функция двух переменных (см. подробности в статье профессора А.В. Кужеля [9]).

Замечание 5. *Определению Декарта могут удовлетворять такие множества точек плоскости, которые, вообще говоря, не являются линиями в смысле Евклида.*

Это можно продемонстрировать, используя функцию $[\cdot]$. Например, пусть $F(x, y) = [x]\, y$. Тогда из уравнения $F(x, \ y) = 0$ или $[x]\, y = 0$ следует, что $[x] = 0$ или $y = 0$.

Поэтому, соответствующее множество точек есть объединение двух множеств $A \cup B$, где $A = \{(x, y) : x \in [1, 0), \ y \in \mathbf{R}\}$ и $B = \{(x, 0) : \ x \in \mathbf{R}\}$ (см. Рис.3).

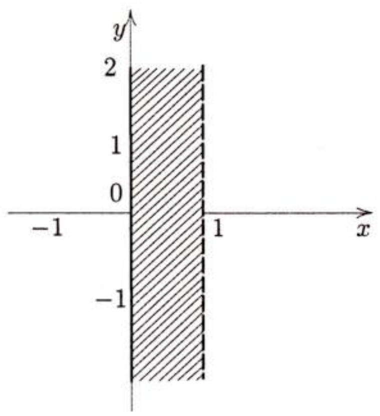


Рис.3

Не вдаваясь в историю вопроса, отметим только, что французский математик Камил Жордан (1838—1922) предложил параметрическое определение плоской линии, образующей некоторое подмножество кривых Декарта, широко используемое в анализе. Однако наиболее полным и строгим определением плоской линии является определение, предложенное немецким математиком Георгом Кантором, создателем теории множеств. Он определял плоскую линию как *континуум, не имеющий внутренних точек.*

Рассмотрим наконец несколько красивых примеров на построение геометрического места точек с использованием целой части числа.

Задача 9. *Найти множество точек плоскости, удовлетворяющих равенству* $[y] = [x]$.

Решение. Так как $[y]$ и $[x]$ целые равные числа, то они одного знака, и если $[y] = [x] = n$, $n \in \mathbf{Z}$, то $y \in [n,\ n+1)$ и $y \in [n,\ n+1)$. Поэтому, множество точек, удовлетворяющих равенству $[y] = [x] = n$ следующий вид: $\{(x,\ y) : n \leq x < n+1, n \leq y < n+1\}$.

Геометрическое место точек, удовлетворяющих равенству $[y] = [x]$ см. на Рис.4.

Задача 10. *Найти множество точек плоскости, удовлетворяющих равенству* $|[y]| = |[x]|$.

Решение. Если целые числа $[y]$ и $[x]$ одного знака, то соответствующее множество точек $(x,\ y)$ из I-й и III-й четверти описано в задаче 9.

Пусть теперь целые числа $[y]$ и $[x]$ разного знака, то есть точки $(x,\ y)$ из II и IV четверти. Например, $[y] = k$ и $[x] = -k$ для $k = 1, 2, \ldots$ тогда для точек (x, y), удовлетворяющих равенству $|[y]| = |[x]|$ справедливы неравенства $k \leq k+1$ и $-k \leq< -k+1$. Аналогично, если $[x] = k$ и $[y] = -k$, то тогда $k \leq x < k+l$ и $-k \leq y < -k+l$.

Геометрическое место точек, удовлетворяющих равенству $|[y]| = |[x]|$ см. на Рис.5.

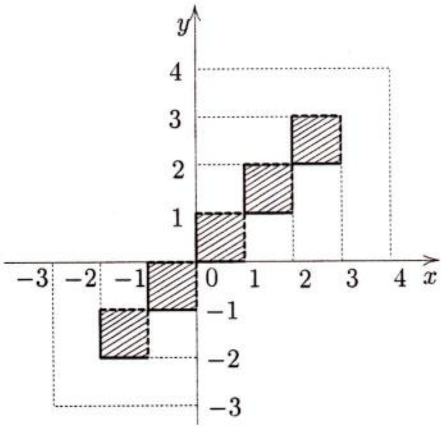


Рис. 4

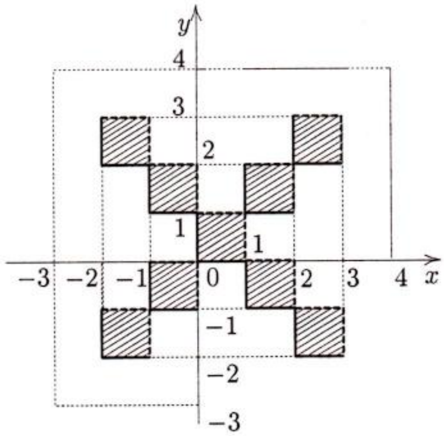


Рис. 5

Хотя математическому способу познания и аналитическому созерцанию многое доступно, все же его возможности ограничены при объяснении наших индивидуальных действий и поступков. *Логическая мысль*, считал Павел Флоренский, *бессильна постичь личность* как конкретное, т.е. "индивидуальное бытие", оно не уловимо для рассудка [6, с.381]. Лишь *на рассудочно-образном* пути математического способа мышления, считал он, можно приблизиться к постижению личности. Математика была нужна Флоренскому прежде всего для выработки собственного подхода к миропониманию. Однако авторитетный специалист, доктор физико-математических наук С.С.Хоружий, автор книги "Миросозерцание Флоренского" (1974, не опубликовано), отмечая склонность Флоренского к научному стилю мышления, считает его попытки внедрять математические понятия в философскую проблематику не представляющими интереса. Даже крупнейший московский математик, академик Н.Н.Лузин (1883—1950), находившийся в дружеских отношениях с П.А.Флоренским, утверждал, что его работы не имеют большой цены в области математики. Отчасти это объясняется тем, что вопросы, интересовавшие Флоренского, были связаны не с математической практикой, а определялись его философскими интересами, поэтому математическими их можно назвать только условно. Я казался "ученым", будучи внутри "магом", говорил о себе Флоренский. И тем не менее, именно математика была для Павла Флоренского ключом к такому мировоззрению, для которого не было ничего настолько неважного, чем не надо было бы заниматься.

Надежды придать абстрактной математике строгое формальное обоснование были частично развеяны знаменитой теоремой Геделя о неполноте. Однако, по мнению известного французского математика, лауреата Филдсовской премии Рене Тома, не похоже на то, чтобы математики в своей профессиональной деятельности сильно страдали в такой ситуации. В хорошей педагогике новые математические объекты для пропедевтики вводятся, как правило, практически, поэтому истинная проблема преподавания математики, считает профессор Р.Том, не в уровне строгости, а в проблеме *построения смысла и онтологического оправдания* новых математических объектов. В этом отношении, естественность геометрии, допускающей "психологическую вспышку синтаксиса без принесения в жертву смысла", проявляется в том, что "геометрический дух присутствует почти всюду в бесконечном теле математики" [10, с.93]. В книге "*Мнимости в геометрии*" (1922) священник Павел Флоренский обсуждает даже возможность познания объектов, традиционное взаимодействие с которыми вообще невозможно.

Основное наше достоинство состоит в способности и умении хорошо мыслить. Именно познавательная деятельность дает нам веру и знание. Своими работами выдающийся русский мыслитель Павел Александрович Флоренский пытался показать, что возможный путь к пониманию глубин и духовных богатств мира состоит в синтезе различных сфер человеческой деятельности, в том числе — математики, философии и естествознания. Не случайно именно математика и поэзия были наиболее сильными увлечениями теоретика русского символизма Андрея Белого, однажды сказавшего:

В строфах — рифмы, в рифмах — мысли
Созидают бытие:
Смысли, сформулируй, счисли, —
Стань во царствие твое.

Литература

1. Нейман Дж. Математик // Природа. — 1983, №2. — с.88-95.

2. Демидов С.С. О математике в творчестве П.А. Флоренского // Методологический анализ закономерностей развития математики. — М.: ВИНИТИ, 1989. — с.72-83.

3. Еровенко В.А., Михайлова Н.В. Философия прерывности Н.В. Бугаева и математические импровизации в терминах целой и дробной части числа // Матэматыка: праблемы выкладання. — 2000, №3. — с.67-84. (На русском языке опубликовано в журнале "Математическое образование", №4(19), 2001 г., с. 26-37 — *прим. ред.*).

4. Флоренский П.А. Введение к диссертации "Идея прерывности как элемент миросозерцания" // Историко-математические исследования. — 1986, вып. 30. — с.159-177.

5. Мороз В.В. Взаимосвязь философии и математики в творчестве П.А. Флоренского // Вестник Московского университета. Сер.7. Философия. — 1997, №3. — с.26-43.

6. Шапошников В.А. Тема бесконечности в творчестве П.А.Флоренского // Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты. — М.: Янус-К, 1997. — с.362—386.

7. Столин А.В. Комплексные упражнения по математике с решениями. — Харьков: Рубикон, 1995. — 240с.

8. Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И. Графики функций: Справочник. — Киев: Наукова думка, 1979. — 320с.

9. Кужель А.В. Современное понятие линии // Математика сегодня' 87. — Киев: Вища школа, 1987. — с.8—24.

10. Том Р. Современная математика — существует ли она? // Математика в школе — 1973, №1. — с.89—93.

Еровенко Валерий Александрович,
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
общей математики и информатики
Белорусского государственного университета.

E-mail: erovenko@bsu.by

Михайлова Наталия Викторовна,
ассистент кафедры математики
Минского государственного высшего
радиотехнического колледжа.

Задачи международного математического Турнира Городов

Продолжаем публикацию материалов, относящихся к международному математическому Турниру Городов. В настоящем номере мы публикуем условия задач 22, 23 и 24-го Турниров. В скобках после номера задачи указано количество баллов, которым оценивается полностью верное решение задачи. Итог для участника Турнира подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются. Публикация сделана на основе материалов сайта *www.mccme.ru*

22-й Турнир Городов

Осенний тур

8-9 кл., тренировочный вариант 22 октября 2000 г.

Задача 1.(3)
В клетках таблицы 4×4 записаны числа так, что сумма соседей у каждого числа равна 1 (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону). Найдите сумму всех чисел таблицы.

Р. Г. Женодаров

Задача 2.(3)
Дано: $ABCD$ — параллелограмм, M — середина стороны CD, H — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую AM. Докажите, что треугольник ВСН — равнобедренный.

М. А. Волчкевич

Задача 3.(2+4)
а)(2) На доске выписано 100 различных чисел. Докажите, что среди них можно выбрать 8 чисел так, чтобы их среднее арифметическое не представлялось в виде среднего арифметического никаких 9 из выписанных на доске чисел.

б)(4) На доске выписано 100 целых чисел. Известно, что для любых восьми из этих чисел найдутся такие девять из этих чисел, что среднее арифметическое этих восьми чисел равно среднему арифметическому этих девяти чисел. Докажите, что все числа равны.

А. В. Шаповалов

Задача 4.(5)

Известно, что в наборе из 32 одинаковых по виду монет есть две фальшивые монеты, которые отличаются от остальных по весу (настоящие монеты равны по весу друг другу, и фальшивые монеты также равны по весу друг другу). Как разделить все монеты на две равные по весу кучки, сделав не более 4 взвешиваний на чашечных весах без гирь?

А. В. Шаповалов

10-11 кл., тренировочный вариант 22 октября 2000 г.

Задача 1.(3)

Треугольник ABC вписан в окружность. Через точку A проведены хорды, пересекающие сторону BC в точках K и L и дугу BC в точках M и N. Докажите, что если вокруг четырехугольника $KLNM$ можно описать окружность, то треугольник ABC — равнобедренный.

В. С. Жгун

Задача 2.(3)

Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ad - bc > 1$. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b, c, d не делится на $ad - bc$.

А. В. Спивак

Задача 3.(4)

В каждой боковой грани пятиугольной призмы есть угол f (среди углов этой грани). Найдите все возможные значения f.

А. В. Шаповалов

Задача 4.(3+2)

Известно, что в наборе из

а)(3) 32

б)(2) 22 одинаковых по виду монет есть две фальшивые монеты, которые отличаются от остальных по весу (настоящие монеты равны по весу друг другу, и фальшивые монеты также равны по весу друг другу). Как разделить все монеты на две равные по весу кучки, сделав не более 4 взвешиваний на чашечных весах без гирь?

А. В. Шаповалов

8-9 кл., основной вариант 29 октября 2000 г.

Задача 1.(3)

Дана таблица $n \times n$, в каждой клетке записано число, причем все числа в таблице различны. В каждой строке отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных столбцах. Затем в каждом столбце отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных строках. Докажите, что оба раза отметили одни и те же числа.

В. А. Клепцын

Задача 2.(3)

Между двумя параллельными прямыми расположили окружность радиуса 1, касающуюся обеих прямых, и равнобедренный треугольник, основание которого лежит на одной из прямых, а вершина — на другой. Известно, что треугольник и окружность имеют ровно одну общую точку, и что эта точка лежит на вписанной окружности треугольника. Найдите радиус вписанной окружности треугольника.

Р. К. Гордин

Задача 3.(4)

Натуральные числа a, b, c, d таковы, что наименьшее общее кратное этих чисел равно $a+b+c+d$. Докажите, что $abcd$ делится на 3 или на 5 (или на то и другое).

В. А. Сендеров

Задача 4.(4)

Рассматривается шахматная доска 8×8, клетки которой пока не окрашены. Сколькими способами можно раскрасить доску в черный и белый цвета так, чтобы черных клеток было 31 и никакие две черные клетки не имели общей стороны? (Укажите число способов и докажите, что учтены все способы; два способа раскраски считаются различными, если найдется клетка, которая при одном из этих способах раскраски белая, а при другом — черная).

Р. Г. Женодаров

Задача 5.(6)

На правой чаше чашечных весов лежит груз 11111 г. Весовщик последовательно раскладывает по чашам гири, первая из которых имеет массу 1 г, а каждая последующая вдвое тяжелее предыдущей. В какой-то момент весы оказались в равновесии. На какую чашу поставлена гиря 16 г?

А. В. Калинин

Задача 6.(7)

В весеннем туре турнира городов 2000 года старшеклассникам страны N было предложено 6 задач. Каждую задачу решило ровно 1000 школьников, но никакие два школьника не решили вместе все 6 задач. Каково наименьшее возможное число старшеклассников страны N, принявших участие в весеннем туре? (Назовите это число, покажите, что при названном Вами числе участников условие задачи может быть выполнено, и что при меньшем числе участников оно не выполнимо.)

Р. Г. Женодаров

Задача 7.(8)

У первоклассника имеется сто карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 100, а также большой запас знаков "+" и "=". Какое наибольшее число верных равенств он может составить? (Каждая карточка используется не более одного раза, в каждом равенстве может быть только один знак "=", переворачивать карточки и прикладывать их для получения новых чисел нельзя.)

Р. Г. Женодаров

10-11 кл., основной вариант 29 октября 2000 г.

Задача 1.(3)

Натуральные числа a, b, c, d таковы, что наименьшее общее кратное этих чисел равно $a+b+c+d$. Докажите, что $abcd$ делится на 3 или на 5 (или на то и другое).

В. А. Сендеров

Задача 2.(4)

Для какого наибольшего n можно выбрать на поверхности куба n точек так, чтобы не все они лежали в одной грани куба и при этом были вершинами правильного (плоского) n-угольника?

А. В. Шаповалов

Задача 3.(4)

Длины сторон треугольника ABC равны a, b и c ($AB = c, BC = a, CA = b$ и $a < b < c$). На лучах BC и AC отмечены соответственно точки B_1 и A_1 такие, что $BB_1 = AA_1 = c$. На лучах CA и BA отмечены соответственно точки C_2 и B_2 такие, что $CC_2 = BB_2 = a$. Найти отношение отрезка A_1B_1 к отрезку C_2B_2.

Р. Г. Женодаров

Задача 4.(3+4)

Пусть целые ненулевые числа a_1, a_2, ..., a_n таковы, что равенство

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x}}}} = x$$

выполнено при всех значениях x, входящих в область определения дроби, стоящей в левой части.

а)(3) Докажите, что число n четно.

б)(4) При каком наименьшем n такие числа существуют?

М. Б. Скопенков

Задача 5.(6)

Клетки доски $m \times n$ покрашены в два цвета. Известно, что на какую бы клетку ни поставить ладью, она будет бить больше клеток не того цвета, на котором стоит (клетка под ладьей тоже считается побитой). Докажите, что на каждой вертикали и каждой горизонтали клеток обоих цветов поровну.

А. В. Шаповалов

Задача 5.(5+5+5)

а)(5) Несколько черных квадратов со стороной 1 см прибиты к белой плоскости одним гвоздем толщины 0.1 см. Образовалась многоугольная черная фигура. Может ли периметр этой фигуры быть больше, чем 1 км ? (Гвоздь не задевает границ квадратов.)

б)(5) Та же задача, но гвоздь имеет толщину 0 (то есть точка).

в)(5) Несколько черных квадратов со стороной 1 лежат на белой плоскости, образуя многоугольную черную фигуру (возможно, состоящую из нескольких кусков и имеющую дырки). Может ли отношение периметра этой фигуры к ее площади быть больше 100000 ?

(Венгерский фольклор)

Весенний тур

8-9 классы, тренировочный вариант, 25 февраля 2001 г.

Задача 1.(3)

Натуральное число n разрешается заменить на число ab, если $a + b = n$ и числа a и b натуральные. Можно ли с помощью таких замен получить из числа 22 число 2001?

В. А. Клепцын

Задача 2.(4)

В треугольнике одна из средних линий больше одной из медиан. Докажите, что этот треугольник тупоугольный.

А. В. Шаповалов

Задача 3.(4)

В магазин завезли 20 кг сыра, за ним выстроилась очередь. Отпустив сыр очередному покупателю, продавщица безошибочно подсчитывает средний вес покупки по всему проданному сыру и сообщает, на сколько человек хватит оставшегося сыра, если все будут покупать именно по этому среднему весу. Могла ли продавщица после каждого из первых 10 покупателей сообщать, что сыра хватит еще ровно на 10 человек? Если да, то сколько сыра осталось в магазине после первых 10 покупателей? (Средний вес покупки — это общий вес проданного сыра, деленный на число купивших.)

И. Г. Рыбников

Задача 4.(2+3)

а)(2) На столе лежат 5 одинаковых бумажных треугольников. Каждый разрешается сдвигать в любом направлении не поворачивая. Верно ли, что всегда любой из этих треугольников можно накрыть четырьмя другими?

б)(3) На столе лежат 5 одинаковых равносторонних бумажных треугольников. Каждый разрешается сдвигать в любом направлении не поворачивая. Докажите, что любой из этих треугольников можно накрыть четырьмя другими.

А. В. Шаповалов

Задача 5.(5)

На доске размером 15×15 клеток расставили 15 ладей, не бьющих друг друга. Затем каждую ладью передвинули ходом коня. Докажите, что теперь какие-то 2 ладьи будут бить друг друга.

С. Л. Берлов

10-11 кл., тренировочный вариант 25 февраля 2001 г.

Задача 1.(3)

Автобус, едущий по маршруту длиной 100 км, снабжен компьютером, показывающим прогноз времени, остающегося до прибытия в конечный пункт. Это время рассчитывается исходя из предположения, что средняя скорость автобуса на оставшемся участке маршрута будет такой же, как и на уже пройденной его части. Спустя 40 минут после начала движения ожидаемое время до прибытия составляло 1 час и оставалось таким же еще в течение пяти часов. Могло ли такое быть? Если да, то сколько километров проехал автобус к окончанию этих пяти часов? (Средняя скорость автобуса на участке маршрута — это длина участка, деленная на время, за которое этот участок пройден.)

И. Г. Рыбников

Задача 2.(4)

Десятичная запись натурального числа a состоит из n цифр, а десятичная запись числа a^3 состоит из m цифр. Может ли $n+m$ равняться 2001?

Г. А. Гальперин

Задача 3.(4)

В треугольнике ABC точка X лежит на стороне AB, а точка Y - на стороне BC. Отрезки AY и CX пересекаются в точке Z. Известно, что $AY = YC$ и $AB = ZC$. Докажите, что точки B, X, Z и Y лежат на одной окружности.

Р. Г. Женодаров

Задача 4.(5)

Двое играют на доске 3×100 клеток: кладут по очереди на свободные клетки доминошки 1×2. Первый игрок кладет доминошки, направленные вдоль доски, второй - в поперечном направлении. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из играющих может обеспечить себе победу (как бы ни играл его противник), и как ему следует играть?

В. В. Трушков

Задача 5.(5)

На поверхности правильного тетраэдра с ребром 1 см отмечены 9 точек. Докажите, что среди этих точек найдутся две, расстояние между которыми (в пространстве) не превосходит 0,5 см.

В. В. Произволов

8-9 кл., основной вариант 4 марта 2001 г.

Задача 1.(3)

В некоторой стране есть 10 процентов работников, чья зарплата составляет 90 процентов всей зарплаты, выплачиваемой в этой стране. Может ли так быть, что в каждом из регионов, на которые делится эта страна, зарплата любых 10 процентов работников составляет не более 11 процентов от всей зарплаты, выплачиваемой в этом регионе?

М. Н. Вялый

Задача 2.(5)

Есть три кучки камней: в первой 51 камень, во второй — 49, а в третьей — 5. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

В. А. Клепцын

Задача 3.(5)

Внутри угла с вершиной M отмечена точка A. Из этой точки выпустили шар, который отразился от одной стороны угла в точке B, затем от другой стороны в точке C и вернулся в A ("угол падения" равен "углу отражения"). Докажите, что центр O окружности, описанной около треугольника BCM, лежит на прямой AM. (Шар считайте точкой.)

А. А. Заславский, И. Ф. Шарыгин

Задача 4.(5)

На доске нарисовали выпуклый многоугольник. В нем провели несколько диагоналей, не пересекающихся внутри него, так что он оказался разбит на треугольники. Затем возле каждой вершины записали число треугольников, примыкающих к этой вершине, после чего все диагонали стерли. Можно ли по оставшимся возле вершин числам восстановить стертые диагонали?

С. А. Зайцев

Задача 5.(3+4)

а)(3) На две клетки шахматной доски выставляются черная и белая фишки. Разрешается по очереди передвигать их, каждым ходом сдвигая очередную фишку на любое свободное соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли на доске в результате таких ходов встретиться все возможные позиции расположения этих двух фишек, причем ровно по одному разу?

б)(4) А если разрешается сдвигать фишки в любом порядке (не обязательно по очереди)?

А. В. Шаповалов

Задача 6.(7)

Высоты треугольника ABC — AH_A, BH_B, CH_C. Докажите, что треугольник с вершинами в ортоцентрах (точках пересечения высот) треугольников AH_BH_C, BH_AH_C, CH_AH_B равен треугольнику $H_AH_BH_C$.

А. В. Акопян

Задача 7.(2+3+3)

Леша задумал двузначное число (от 10 до 99). Гриша пытается его отгадать, называя двузначные числа. Если Гриша правильно называет число, или же одну цифру называет правильно, а в другой ошибается не более чем на единицу, то Леша отвечает "тепло"; в остальных случаях Леша отвечает "холодно". (Например, если задумано число 65, то назвав 65, 64, 66, 55 или 75, Гриша услышит в ответ "тепло", а в остальных случаях услышит "холодно".)

а)(2) Покажите, что нет способа, при котором Гриша гарантированно узнает число, истратив 18 попыток.

б)(3) Придумайте способ, при котором Гриша гарантированно узнает число, истратив 24 попытки (какое бы число ни задумал Леша).

в)(3) А за 22 попытки получится?

Фольклор (коллектив авторов)

10-11 кл., основной вариант 4 марта 2001 г.

Задача 1.(3)

Найдите хотя бы один такой многочлен $P(x)$ степени 2001, что при всех x выполнено равенство $P(x) + P(1-x) = 1$.

Фольклор

Задача 2.(5)

При подведении итогов учебного года выяснилось, что в любой группе из не менее чем 5 учеников 80 процентов двоек, полученных этими учениками в течение года, поставлены не более чем 20 процентам учеников из этой группы. Докажите, что по крайней мере три четверти всех двоек получил один ученик.

М. Н. Вялый

Задача 3.(5)

Высоты треугольника ABC — AH_A, BH_B, CH_C. Докажите, что треугольник с вершинами в ортоцентрах (точках пересечения высот) треугольников AH_BH_C, BH_AH_C, CH_AH_B равен треугольнику $H_AH_BH_C$.

А. В. Акопян

Задача 4.(5)

Даны две таблицы A и B, в каждой m строк и n столбцов. В каждой клетке каждой таблицы записано одно из чисел 0 или 1, причем в строках таблиц числа не убывают (при движении по строке слева направо), и в столбцах таблиц числа не убывают (при движении по столбцу сверху вниз). Известно, что при любом k от 1 до m сумма чисел в верхних k строках таблицы A не меньше суммы чисел в верхних k строках таблицы B. Известно также, что всего в таблице A столько же единиц, сколько в таблице B. Докажите, что при любом l от 1 до n сумма чисел в левых l столбцах таблицы A не больше суммы чисел в левых l столбцах таблицы B.

А. Я. Канель-Белов

Задача 5.(4+4)

Участники шахматного турнира сыграли друг с другом по одной партии. Для каждого участника было подсчитано число набранных им очков (за победу 1 очко, за ничью 1/2 очка, за поражение 0 очков).

а)(4) Может ли у каждого участника сумма очков тех, у кого он выиграл, быть больше суммы очков тех, кому он проиграл?

б)(4) Может ли у каждого участника сумма очков тех, у кого он выиграл, быть меньше суммы очков тех, кому он проиграл?

А. К. Толпыго

Задача 6.(8)

Докажите, что найдутся такие 2001 выпуклых многогранников в пространстве, что никакие три из них не имеют общих точек, а любые два касаются друг друга (то есть имеют хотя бы одну граничную точку, но не имеют общих внутренних точек).

А. Я. Канель-Белов

Задача 7.(4+4)

По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). Ход состоит в том, что из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки.

а)(4) Пусть на каждом следующем ходу разрешается брать шарики из той коробочки, в которую был положен последний шарик на предыдущем ходу. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

б)(4) Пусть теперь на каждом ходу разрешается брать шарики из любой коробочки. Верно ли, что за несколько ходов из любого начального расположения шариков по коробочкам можно получить любое другое?

В. М. Гуровиц

Двадцать третий Турнир Городов

Осенний тур

8-9 кл., тренировочный вариант, 21 октября 2001 г.

Задача 1.(4)

В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC на боковой стороне AB дана точка K. Через точку A провели прямую l, параллельную прямой KC, а через точку B провели прямую m, параллельную прямой KD. Докажите, что точка пересечения прямых l и m лежит на боковой стороне CD.

В. О. Бугаенко

Задача 2.(4)

Слава перемножил первые n натуральных чисел, а Валера перемножил первые m четных натуральных чисел (n и m больше 1). В результате у них получилось одно и то же число. Докажите, что хотя бы один из мальчиков ошибся.

В. А. Сендеров

Задача 3.(4)

В Колиной коллекции есть четыре царские золотые пятирублевые монеты. Коле сказали, что какие-то две из них фальшивые. Коля хочет проверить (доказать или опровергнуть), что среди монет есть ровно две фальшивые. Удастся ли ему это сделать с помощью двух взвешиваний на двухчашечных весах без гирь? (Фальшивые монеты одинаковы по весу, настоящие тоже одинаковы повесу, но фальшивые легче настоящих.)

Н. Н. Константинов

Задача 4.(4)

По прямой в одном направлении на некотором расстоянии друг от друга движутся 5 одинаковых шариков, а навстречу им движутся 5 других таких же шариков. Скорости всех шариков одинаковы. При столкновении любых двух шариков они разлетаются в противоположные стороны с той же скоростью, с какой двигались до столкновения. Сколько всего столкновений произойдет между шариками?

А. Николаев

Задача 5.(4)

На плоскости отмечены несколько (больше трех) точек. Известно, что если выкинуть любую точку, то оставшиеся будут симметричны относительно какой-нибудь прямой. Верно ли, что все множество точек тоже симметрично относительно какой-нибудь прямой?

А. В. Шаповалов

10-11 кл., тренировочный вариант, 21 октября 2001 г.

Задача 1.(4)

Высотой пятиугольника назовем отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины на противоположную сторону. Медианой пятиугольника назовем отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны. Известно, что длины всех высот и всех медиан некоторого пятиугольника равны одному и тому же числу. Докажите, что этот пятиугольник правильный (то есть с равными сторонами и равными углами).

Р. Г. Женодаров

Задача 2.(4)

Существуют 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа (например, $1001! + 2$, $1001! + 3$, ... , $1001! + 1001$). А существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?

Г. А. Гальперин

Задача 3.(4)

По прямой в одном направлении на некотором расстоянии друг от друга движутся 5 одинаковых шариков, а навстречу им движутся 5 других таких же шариков. Скорости всех шариков одинаковы. При столкновении любых двух шариков они разлетаются в противоположные стороны с той же скоростью, с какой двигались до столкновения. Сколько всего столкновений произойдет между шариками?

А. Николаев

Задача 4.(4)

На квадратном торте расположены треугольные шоколадки, которые не соприкасаются между собой. Всегда ли можно разрезать торт на выпуклые многоугольники так, чтобы каждый многоугольник содержал ровно одну шоколадку — не меньше и не больше? (Торт считайте плоским квадратом. Фигура называется выпуклой, если она вместе с любыми двумя своими точками содержит соединяющий их отрезок.)

А. Я. Канель-Белов

Задача 5.(4)

В левом нижнем углу шахматной доски, а также на соседнем сверху поле и на соседнем справа поле стоит по белой ладье. Разрешается делать ходы по обычным правилам, однако после любого хода каждая ладья должна быть под защитой какой-нибудь другой ладьи. Можно ли за несколько ходов переставить эти три ладьи так, чтобы каждая попала на поле, симметричное исходному относительно диагонали, соединяющей правый нижний и левый верхний углы доски?

А. В. Шаповалов

8-9 кл., основной вариант, 28 октября 2001 г.

Задача 1.(4)

Существуют ли такие натуральные числа $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{100}$, что НОД$(a_1, a_2) >$ НОД$(a_2, a_3) > \ldots >$ НОД(a_{99}, a_{100})? (НОД(a, b) - это наибольший общий делитель чисел a и b, то есть наибольшее натуральное число, на которое делятся и a и b.)

А. В. Шаповалов

Задача 2.(5)

N красных и N синих точек, строго чередуясь, разделили окружность на $2N$ дуг так, что любые две смежные из них имеют различную длину. При этом длины каждой из этих дуг равны одному из трех чисел: a, b или c. Докажите, что N-угольник с красными вершинами и N-угольник с синими вершинами имеют равные периметры и равные площади.

В. В. Произволов

Задача 3.(5)

Дана таблица $(n-2) \times n$, $n > 2$, в каждой клетке которой записано целое число от 1 до n, причем в каждой строке все числа различны и в каждом столбце все числа различны. Докажите, что эту таблицу можно дополнить до квадрата $n \times n$, записав в каждую новую клетку какое-нибудь целое число от 1 до n так, чтобы по-прежнему в каждой строке и в каждом столбце числа были различны.

С. Михайлов

Задача 4.(5)

Правильный $(2n+1)$-угольник разбили диагоналями на $2n-1$ треугольник. Докажите, что среди них по крайней мере три равнобедренных.

Р. Г. Женодаров

Задача 5.(6)

Саша выставляет на пустую шахматную доску ладьи: первую — куда захочет, а каждую следующую ставит так, чтобы она побила нечетное число ранее выставленных ладей. Какое наибольшее число ладей он сможет так выставить? (Как обычно, ладьи бьют друг друга по вертикали и горизонтали и только если между ними нет других ладей).

А. В. Шаповалов

Задача 6.(8)

В строке записано несколько чисел. Каждую секунду робот выбирает какую-либо пару рядом стоящих чисел, в которой левое число больше правого, меняет их местами и при этом умножает оба числа на 2. Докажите, что через некоторое время сделать очередную такую операцию будет невозможно.

А. В. Шаповалов

Задача 7.(8)

Известно, что число 2^{333} имеет 101 цифру и начинается с 1. Сколько чисел в ряду 2, 4, 8, 16, ... , 2^{333} начинается с 4 ?

Г. А. Гальперин

10-11 кл., основной вариант, 28 октября 2001 г.

Задача 1.(4)

На плоскости даны три красные точки, три синие точки и еще точка O. Известно, что точка O лежит и внутри треугольника с красными вершинами, и внутри треугольника с синими вершинами, причем расстояние от O до любой красной точки меньше расстояния от O до любой синей точки. Могут ли все красные и все синие точки лежать на одной и той же окружности?

П. А. Кожевников

Задача 2.(5)

Существуют ли такие натуральные числа $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100}$, что $\text{НОК}(a_1, a_2) > \text{НОК}(a_2, a_3) > \dots > \text{НОК}(a_{99}, a_{100})$? ($\text{НОК}(a, b)$ — это наименьшее общее кратное чисел a и b, то есть наименьшее натуральное число, которое делится и на a и на b.)

А. В. Шаповалов

Задача 3.(6)

Клетки шахматной доски занумерованы числами от 1 до 64 так, что соседние номера стоят в соседних (по стороне) клетках. Какова наименьшая возможная сумма номеров на диагонали?

А. В. Шаповалов

Задача 4.(6)

Пусть $F_1, F_2, F_3, \dots$ — последовательность выпуклых четырехугольников, где F_{k+1} (при $k = 1, 2, 3, \dots$) получается так: F_k разрезают по диагонали, одну из частей переворачивают и склеивают по линии разреза с другой частью. Какое наибольшее количество различных четырехугольников может содержать эта последовательность? (Различными считаются многоугольники, которые нельзя совместить движением.)

И. Токарева

Задача 5.(7)

В бесконечной арифметической прогрессии все числа натуральны. В каждом члене удалось подчеркнуть одну или несколько подряд идущих цифр так, что в первом члене оказалась подчеркнута цифра 1, во втором — 2, и так далее (для любого натурального n в n-ом члене подчеркнутые цифры образовали число n). Докажите, что разность прогрессии — это степень числа 10.

А. В. Шаповалов

Задача 6.(7)

В ряд стоят 23 коробочки с шариками, причем для любого числа n от 1 до 23 есть коробочка, в которой ровно n шариков. За одну операцию можно переложить в любую коробочку еще столько же шариков, сколько в ней уже есть, из какой-нибудь другой коробочки, в которой шариков больше. Всегда ли можно такими операциями добиться, чтобы в первой коробочке оказался 1 шарик, во второй — 2 шарика, и так далее, в 23-й — 23 шарика?

Р. Г. Женодаров

Задача 7.(3+6)

На координатной плоскости расположили треугольник так, что его сдвиги на векторы с целочисленными координатами не перекрываются.

а)(3) Может ли площадь такого треугольника быть больше 1/2 ?

б)(6) Найдите наибольшую возможную площадь такого треугольника.

Е. Черепанов

Весенний тур

8-9 кл., тренировочный вариант, 24 февраля 2002 г.

Задача 1.(4)

Имеется много одинаковых прямоугольных картонок размером $a \times b$ см, где a и b — целые числа, причем a меньше b. Известно, что из таких картонок можно сложить и прямоугольник 49×51 см, и прямоугольник 99×101 см. Можно ли по этим данным однозначно определить a и b?

С. А. Дориченко

Задача 2.(5)

Можно ли разрезать какой-нибудь треугольник на четыре выпуклые фигуры: треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник?

А. А. Заславский

Задача 3.(5)

Для натуральных чисел x и y число x^2+xy+y^2 в десятичной записи оканчивается нулем. Докажите, что оно оканчивается хотя бы двумя нулями.

В. В. Произволов

Задача 4.(5)

Стороны AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$ касаются некоторой окружности в точках K, L, M и N соответственно, S - точка пересечения отрезков KM и LN. Известно, что вокруг четырехугольника $SKBL$ можно описать окружность. Докажите, что вокруг четырехугольника SNDM также можно описать окружность.

А. Акопян

Задача 5.(3+3)

а)(3) Есть 128 монет двух различных весов, монет каждого веса поровну. Как на чашечных весах без гирь гарантированно найти две монеты разного веса не более чем за 7 взвешиваний?

б)(3) Есть восемь монет двух различных весов, монет каждого веса поровну. Как на чашечных весах без гирь гарантированно найти две монеты разного веса за два взвешивания?

А. В. Шаповалов

10-11 кл., тренировочный вариант, 24 февраля 2002 г.

Задача 1.(4)
Для натуральных чисел x и y число x^2+xy+y^2 в десятичной записи оканчивается нулем. Докажите, что оно оканчивается хотя бы двумя нулями.

В. В. Произволов

Задача 2(5)
Из бумаги вырезали два одинаковых треугольника ABC и $A'B'C'$ и положили их на стол, перевернув при этом один из треугольников. Докажите, что середины отрезков AA', BB' и CC' лежат на одной прямой.

В. О. Бугаенко

Задача 3.(5)
Есть 6 кусков сыра разного веса. Известно, что можно разложить сыр на две кучки по три куска так, чтобы кучки весили поровну. Как можно сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь, если про любые два куска на глаз видно, какой весит больше?

А. В. Шаповалов

Задача 4.(5)
Сколькими способами можно расставить числа от 1 до 100 в прямоугольнике 2×50 так, чтобы любые два числа, различающиеся на 1, всегда попадали бы в клетки с общей стороной?

А. В. Шаповалов

Задача 5.(6)
Существует ли правильная треугольная призма, которую можно оклеить (без наложений) различными равносторонними треугольниками? (Разрешается перегибать треугольники через ребра призмы.)

Л. А. Емельянов

Пояснения к задаче 5 тренировочного варианта для старших классов. Ребра правильной призмы перпендикулярны к ее основаниям, которые являются правильными треугольниками. Обклеиваются все грани призмы, включая основания. Треугольники, используемые для обклеивания, должны быть все равносторонними и отличающимися друг от друга по размерам. Заклеена должна быть вся поверхность призмы в один слой без налегания треугольников, в то время как границы треугольников могут соприкасаться. Каждый треугольник должен быть использован целиком, так что никакая его часть не должна висеть в воздухе.

8-9 кл., основной вариант, 3 марта 2002 г.

Задача 1.(4)
Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите неравенство:
$a^3 + b^3 + 3abc > c^3$.

В. А. Сендеров

Задача 2.(4)
На клетчатой доске размером 23×23 клетки стоят 4 фишки: в левом нижнем

и в правом верхнем углах доски — по белой фишке, а в левом верхнем и в правом нижнем углах — по черной. Белые и черные фишки ходят по очереди, начинают белые. Каждым ходом одна из фишек сдвигается на любую соседнюю (по стороне) свободную клетку. Белые фишки стремятся попасть в две соседние по стороне клетки. Могут ли черные им помешать?

Е. Зинин, П. Кожевников

Задача 3.(6)

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E и F являются серединами сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE, AF и EF делят четырехугольник на 4 треугольника, площади которых равны (в каком-то порядке) последовательным натуральным числам. Каково наибольшее возможное значение площади треугольника ABD?

С. Шестаков

Задача 4.(7)

В ряд расположили n лампочек и зажгли некоторые из них. Каждую минуту после этого все лампочки, горевшие на прошлой минуте, гаснут, а те негоревшие лампочки, которые на прошлой минуте соседствовали ровно с одной горящей лампочкой, загораются. При каких n можно так зажечь некоторые лампочки вначале, чтобы потом в любой момент нашлась хотя бы одна горящая лампочка?

А. Горбачев

Задача 5.(7)

Остроугольный треугольник разрезали прямолинейным разрезом на две (не обязательно треугольные) части, затем одну из этих частей — опять на две части, и так далее: на каждом шагу выбирали любую одну из уже имеющихся частей и разрезали ее (по прямой) на две. Через несколько шагов оказалось, что исходный треугольник распался на несколько треугольников. Могут ли все они быть тупоугольными?

Г. Гальперин

Задача 6.(7)

В возрастающей бесконечной последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2002-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в этой последовательности каждое число, начиная с некоторого места, равно сумме всех предыдущих чисел.

А. В. Шаповалов

Задача 7.(8)

С цепочкой домино, сложенной по обычным правилам, разрешается проделывать такую операцию: выбирается кусок из нескольких подряд доминошек с одинаковыми очками на концах куска, переворачивается целиком и вставляется на то же место. Докажите, что если у двух цепочек, сложенных из двух одинаковых комплектов домино, значения очков на концах совпадают, то разрешенными операциями можно сделать порядок следования доминошек во второй цепочке таким же, как в первой.

А. В. Шаповалов

10-11 кл., основной вариант, 3 марта 2002 г.

Задача 1.(4)

Тангенсы углов некоторого треугольника — целые числа. Найдите эти тангенсы.

А. А. Заславский

Задача 2.(4)

Верно ли, что на графике функции $y = x^3$ можно отметить такую точку A, а на графике функции $y = x^3 + |x| + 1$ — такую точку B, что расстояние AB не превысит $1/100$?

А. Спивак, А. Хачатурян

Задача 3.(5)

В возрастающей бесконечной последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2002-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в этой последовательности каждое число, начиная с некоторого места, равно сумме всех предыдущих чисел.

А. В. Шаповалов

Задача 4.(5)

Компания зрителей купила все билеты в один ряд, но села туда наугад, причем каждый оказался не на своем месте. Билетер может поменять местами любых двух соседей, сидящих не на своих местах, и так много раз (но не может пересаживать зрителя, уже попавшего на свое место). Верно ли, что при любой начальной рассадке билетер может действовать так, чтобы все расселись по своим местам?

А. В. Шаповалов

Задача 5.(6)

Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC; O_A, O_B, O_C — центры вписанных окружностей треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 соответственно; T_A, T_B, T_C — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, CA, AB соответственно. Докажите, что все стороны шестиугольника $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ равны.

Л. А. Емельянов

Задача 6.(7)

Колоду из 52 карт разложили в виде прямоугольника 13×4. Известно, что если две карты лежат рядом по вертикали или горизонтали, то они одной масти либо одного достоинства. Докажите, что в каждом горизонтальном ряду (из 13 карт) все карты одной масти.

А. В. Шаповалов

Задача 7.(8)

Существуют ли такие иррациональные числа a и b, что $a > 1$, $b > 1$, и $[am]$ отлично от $[bn]$ при любых натуральных числах m и n? ($[x]$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превышающее x.)

В. А. Сендеров, А. В. Спивак

Двадцать четвертый Турнир Городов

Осенний тур

8-9 кл., тренировочный вариант, 20 октября 2002 г.

Задача 1.(4)

В выпуклом 2002-угольнике провели несколько диагоналей, не пересекающихся внутри 2002-угольника. В результате 2002-угольник разделился на 2000 треугольников. Могло ли случиться, что ровно у половины этих треугольников все стороны являются диагоналями этого 2002-угольника?

Р. Г. Женодаров

Задача 2.(5)

Саша и Маша загадали по натуральному числу и сказали их Васе. Вася написал на одном листе бумаги сумму загаданных чисел, а на другом — их произведение, после чего один из листов спрятал, а другой (на нём оказалось написано число 2002) показал Саше и Маше. Увидев это число, Саша сказал, что не знает, какое число загадала Маша. Услышав это, Маша сказала, что не знает, какое число загадал Саша. Какое число загадала Маша?

Д. Кириенко

Задача 3.(1+2+2)

а)(1) В классе была дана контрольная. Известно, что по крайней мере две трети задач этой контрольной оказались трудными: каждую такую задачу не решили по крайней мере две трети школьников. Известно также, что по крайней мере две трети школьников класса написали контрольную хорошо: каждый такой школьник решил по крайней мере две трети задач контрольной. Могло ли такое быть?

б)(2) Изменится ли ответ в этой задаче, если заменить везде в её условии две трети на три четверти?

в)(2) Изменится ли ответ в этой задаче, если заменить везде в её условии две трети на семь десятых?

А. Шень

Задача 4.(5)

На столе лежат 2002 карточки с числами 1, 2, 3,... , 2002. Двое играющих берут по одной карточке по очереди. После того, как будут взяты все карточки, выигравшим считается тот, у кого больше последняя цифра суммы чисел на взятых карточках. Выясните, кто из играющих может всегда выигрывать независимо от игры противника, и объясните, как он должен при этом играть.

М. А. Шаповалов

Задача 5.(5)

Дан некоторый угол и точка A внутри угла. Можно ли провести через точку A три прямые так, чтобы на каждой из сторон угла одна из точек пересечения этих прямых со стороной лежала посредине между двумя другими точками пересечения прямых с этой же стороной?

А. В. Шаповалов

10-11 кл., тренировочный вариант, 20 октября 2002 г.

Задача 1.(4)

Саша и Маша загадали по натуральному числу и сказали их Васе. Вася написал на одном листе бумаги сумму загаданных чисел, а на другом – их произведение, после чего один из листов спрятал, а другой (на нем оказалось написано число 2002) показал Саше и Маше. Увидев это число, Саша сказал, что не знает, какое число загадала Маша. Услышав это, Маша сказала, что не знает, какое число загадал Саша. Какое число загадала Маша?

Д. Кириенко

Задача 2.(1+1+2)

а)(1) В классе была дана контрольная. Известно, что по крайней мере две трети задач этой контрольной оказались трудными: каждую такую задачу не решили по крайней мере две трети школьников. Известно также, что по крайней мере две трети школьников класса написали контрольную хорошо: каждый такой школьник решил по крайней мере две трети задач контрольной. Могло ли такое быть?

б)(1) Изменится ли ответ в этой задаче, если заменить везде в ее условии две трети на три четверти?

в)(2) Изменится ли ответ в этой задаче, если заменить везде в ее условии две трети на семь десятых?

А. Шень

Задача 3.(5)

Несколько прямых, никакие две из которых не параллельны, разрезают плоскость на части. Внутри одной из этих частей отметили точку А. Докажите, что точка, лежащая с А по разные стороны от всех данных прямых, существует тогда и только тогда, когда часть, содержащая А, неограничена.

А. А. Заславский

Задача 4.(5)

Пусть x, y, z — любые числа из интервала $(0;\pi/2)$. Докажите неравенство

$$\frac{x\cos(x)+y\cos(y)+z\cos(z)}{x+y+z}\le\frac{\cos(x)+\cos(y)+\cos(z)}{3}.$$

В. Колосов

Задача 5.(5)

В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдется четное число.

А. В. Шаповалов

8-9 кл., основной вариант, 27 октября 2002 г.

Задача 1.(4)

В банке работают 2002 сотрудника. Все сотрудники пришли на юбилей, и их рассадили за один круглый стол. Известно, что зарплаты сидящих рядом различаются на 2 или 3 доллара. Какой наибольшей может быть разница двух зарплат сотрудников этого банка, если известно, что все зарплаты сотрудников различны?

Р. Г. Женодаров

Задача 2.(5)

Все виды растений России были занумерованы подряд числами от 2 до 20000 (числа идут без пропусков и повторений). Для каждой пары видов растений запомнили наибольший общий делитель их номеров, а сами номера были забыты (в результате сбоя компьютера). Можно ли для каждого вида растений восстановить его номер?

А. В. Шаповалов

Задача 3.(6)

Вершины 50-угольника делят окружность на 50 дуг, длины которых — 1, 2, 3, ..., 50 в некотором порядке. Известно, что каждая пара "противоположных" дуг (соответствующих противоположным сторонам 50-угольника) отличается по длине на 25. Докажите, что у 50-угольника найдутся две параллельные стороны.

В. В. Произволов

Задача 4.(6)

Внутри треугольника ABC взята точка P так, что угол ABP равен углу ACP, а угол CBP равен углу CAP. Докажите, что P — точка пересечения высот треугольника ABC.

Р. Г. Женодаров

Задача 5.(7)

Выпуклый N-угольник разбит диагоналями на треугольники (при этом диагонали не пересекаются внутри многоугольника). Треугольники раскрашены в черный и белый цвета так, что любые два треугольника с общей стороной раскрашены в разные цвета. Для каждого N найдите максимум разности количества белых и количества черных треугольников.

Р. Г. Женодаров

Задача 6.(9)

Имеется много карточек, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до n. Известно, что сумма чисел на всех карточках равна $k \cdot (n!)$, где k — целое число. Докажите, что карточки можно разложить на k групп так, чтобы в каждой группе сумма чисел, записанных на карточках, равнялась $n!$.

В. Доценко

Задача 7.(5)

а)(5) Электрическая схема имеет вид решетки 3×3: всего в схеме 16 узлов (вершины квадратиков решетки), которые соединены проводами (стороны квадратиков решетки). Возможно, часть проводов перегорела. За одно измерение можно выбрать любую пару узлов схемы и проверить, проходит ли между ними ток (то есть, проверить, существует ли цепочка неперегоревших проводов, соединяющая эти узлы). В действительности схема такова, что ток проходит от любого узла к любому. За какое наименьшее число измерений всегда можно в этом удостовериться?

б)(5) Тот же вопрос для схемы, которая имеет вид решетки 5×5 (всего 36 узлов).

А. В. Шаповалов

10-11 кл., основной вариант, 27 октября 2002 г.

Задача 1.(4)

Все виды растений России были занумерованы подряд числами от 2 до 20000 (числа идут без пропусков и повторений). Для каждой пары видов растений запомнили наибольший общий делитель их номеров, а сами номера были забыты (в результате сбоя компьютера). Можно ли для каждого вида растений восстановить его номер?

А. В. Шаповалов

Задача 2.(6)

Некоторый куб рассекли плоскостью так, что в сечении получился пятиугольник. Докажите, что длина одной из сторон этого пятиугольника отличается от 1 метра по крайней мере на 20 сантиметров.

Г. А. Гальперин

Задача 3.(6)

Выпуклый N-угольник разбит диагоналями на треугольники (при этом диагонали не пересекаются внутри многоугольника). Треугольники раскрашены в черный и белый цвета так, что любые два треугольника с общей стороной раскрашены в разные цвета. Для каждого N найдите максимум разности количества белых и количества черных треугольников.

Р. Г. Женодаров

Задача 4.(8)

Имеется много карточек, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до n. Известно, что сумма чисел на всех карточках равна $k \cdot (n!)$, где k — целое число. Докажите, что карточки можно разложить на k групп так, чтобы в каждой группе сумма чисел, записанных на карточках, равнялась $n!$.

В. Доценко

Задача 5.(4+4)

Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, вторично пересекающая первую и вторую окружности в точках K и M соответственно. Прямая PQ касается первой окружности в точке Q и параллельна прямой AM, а прямая PR касается второй окружности в точке R и параллельна прямой AK. Точки Q и R лежат по разные стороны от прямой KM. Докажите, что

а)(4) точка A принадлежит прямой QR;

б)(4) точка P принадлежит прямой KM.

В. Ю. Протасов

Задача 6.(8)

Рассмотрим последовательность, первые два члена которой равны 1 и 2 соответственно, а каждый следующий член — это наименьшее натуральное число, которое еще не встретилось в последовательности, и которое не взаимно просто с предыдущим членом последовательности. Докажите, что каждое натуральное число входит в эту последовательность.

J. C. Lagarias, E. M. Rains, N. J. A. Sloane

Задача 7.(4+5)

а)(4) Электрическая схема имеет вид решетки 3×3: всего в схеме 16 узлов (вершины квадратиков решетки), которые соединены проводами (стороны квадратиков решетки). Возможно, часть проводов перегорела. За одно измерение можно выбрать любую пару узлов схемы и проверить, проходит ли между ними ток (то есть, проверить, существует ли цепочка неперегоревших проводов, соединяющая эти узлы). В действительности схема такова, что ток проходит от любого узла к любому. За какое наименьшее число измерений всегда можно в этом удостовериться?

б)(5) Тот же вопрос для схемы, которая имеет вид решетки 7×7 (всего 64 узла).

А. В. Шаповалов

Весенний тур

8-9 кл., тренировочный вариант, 23 февраля 2003 г.

Задача 1.(4)

2003 доллара разложили по кошелькам, а кошельки разложили по карманам. Известно, что всего кошельков больше, чем долларов в любом кармане. Верно ли, что карманов больше, чем долларов в каком-нибудь кошельке? (Класть кошельки один в другой не разрешается.)

Задача 2. (4)

Двое играющих по очереди красят стороны n-угольника. Первый может покрасить сторону, которая граничит с 0 или 2 покрашенными сторонами, второй — сторону, которая граничит с одной покрашенной стороной. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. При каких n второй может выиграть независимо от игры первого?

Задача 3. (4)

На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяты точки K и L соответственно, так что $AK + LC = KL$. Из середины M отрезка KL провели прямую, параллельную BC, и эта прямая пересекла сторону AC в точке N. Найдите величину угла KNL.

Задача 4. (5)

В последовательности натуральных чисел каждое число, кроме первого, получается прибавлением к предыдущему самой большой его цифры. Какое наибольшее количество подряд идущих чисел последовательности могли быть нечетными?

Задача 5. (5)

Можно ли замостить доску 2003×2003 доминошками 1×2, которые разрешается располагать только горизонтально, и прямоугольниками 1×3, которые разрешается располагать только вертикально? (Две стороны доски условно считаются горизонтальными, а две другие — вертикальными.)

10-11 кл., тренировочный вариант, 23 февраля 2003 г.

Задача 1. (3)

2003 доллара разложили по кошелькам, а кошельки разложили по карманам. Известно, что всего кошельков больше, чем долларов в любом кармане. Верно ли, что карманов больше, чем долларов в каком-нибудь кошельке? (Класть кошельки один в другой не разрешается.)

Задача 2. (3)

Имеется 100 палочек, из которых можно сложить 100-угольник. Может ли случиться, что ни из какого меньшего числа этих палочек нельзя сложить многоугольник?

Задача 3. (4)

В треугольнике ABC взяли точку M так, что что радиусы описанных окружностей треугольников AMC, BMC и BMA не меньше радиуса описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что все 4 радиуса равны.

Задача 4. (5)

Сто номерков выложили в ряд в порядке возрастания: 00, 01, 02, 03,..., 99. Затем номерки переставили так, что каждый следующий номерок стал получаться из предыдущего увеличением или уменьшением ровно одной из цифр на 1 (например, после 29 может идти 19, 39 или 28, а 30 или 20 — не может). Какое наибольшее число номерков могли остаться на своих местах?

Задача 5. (5)

Дан картонный прямоугольник со сторонами a см и b см, где $b/2 < a < b$. Докажите, что его можно разрезать на три куска, из которых можно сложить квадрат.

8-9 кл., основной вариант, 2 марта 2003 г.

Задача 1. (4)

Вася пишет на доске квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми положительными коэффициентами a, b, c. После этого Петя, если хочет, может заменить один или два знака "+" на "$-$". Если у получившегося уравнения оба корня целые, то выигрывает Вася, если же корней нет или хотя бы один из них нецелый — Петя. Может ли Вася подобрать коэффициенты уравнения так, чтобы наверняка выиграть у Пети?

Задача 2. (4)

Дан треугольник ABC. В нем R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, a — длина наибольшей стороны, h — длина наименьшей высоты. Докажите, что $R/r > a/h$.

Задача 3. (4+3)

В турнире каждая из 15 команд сыграла с каждой другой ровно один раз.

а) (4) Докажите, что хотя бы в одной игре встретились команды, которые перед этой игрой участвовали в сумме в нечетном числе игр этого турнира.

б) (3) Могла ли такая игра быть единственной?

Задача 4. (7)

Есть шоколадка в форме правильного треугольника со стороной n, разделенная бороздками на маленькие равные треугольнички со стороной 1 (каждая сторона разделена на n равных частей, точки деления на каждой паре сторон соединены линиями, параллельными третьей стороне). Играют двое. За ход можно отломать от шоколадки треугольный кусок (вдоль какой-нибудь бороздки), съесть его и передать остаток соседу. Тот, кто получит последний кусок — треугольничек со стороной 1, — победитель. Тот, кто не может сделать ход, досрочно проигрывает. Для каждого n выясните, кто из играющих (начинающий или его соперник) может играть так, чтобы всегда выигрывать (независимо от игры другого)?

Задача 5. (7)

Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?

Задача 6. (7)

Трапеция с основаниями AD и BC описана вокруг окружности, E — точка пересечения ее диагоналей. Докажите, что угол AED не может быть острым.

10-11 кл., основной вариант, 2 марта 2003 г.

Задача 1. (4)

Дана треугольная пирамида $ABCD$. В ней R — радиус описанной сферы, r — радиус вписанной сферы, a — длина наибольшего ребра, h — длина наименьшей высоты (на какую-то грань). Докажите, что $R/r > a/h$.

Задача 2. (5)

Дан многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами. Бесконечная последовательность различных натуральных чисел a_1, a_2, a_3, ... такова, что $P(a_1) = 0$, $P(a_2) = a_1$, $P(a_3) = a_2$, и т.д.. Какую степень может иметь $P(x)$?

Задача 3. (5)

Можно ли поверхность куба оклеить без пропусков и наложений тремя треугольниками?

Задача 4. (6)

В окружность вписан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Пусть K — середина дуги BC, не содержащей точки A; N — середина отрезка AC; M — точка пересечения луча KN с окружностью. В точках A и C проведены касательные к окружности, которые пересекаются в точке E. Докажите, что угол EMK прямой.

Задача 5. (6)

Боря задумал целое число, большее 100. Кира называет целое число d, большее 1. Если борино число делится на d, то Кира выиграла, иначе Боря вычитает из своего числа d, и игра продолжается. Называть числа, уже названные ранее, Кире запрещается. Когда борино число станет отрицательным, Кира проигрывает. Может ли Кира действовать так, чтобы наверняка выиграть у Бори?

Задача 6. (7)

В каждой клетке таблицы размером 4×4 стоит знак "+" или "−". Разрешено одновременно менять знаки на противоположные в любой клетке и во всех клетках, имеющих с ней общую сторону. Сколько разных таблиц можно получить, многократно применяя такие операции?

Задача 7. (8)

Внутри квадрата отметили несколько точек и соединили их отрезками между собой и с вершинами квадрата так, чтобы отрезки не пересекались друг с другом (нигде кроме концов). В результате квадрат разделился на треугольники, так что все отмеченные точки оказались в вершинах треугольников, и ни одна не попала на стороны треугольников. Для каждой отмеченной точки и для каждой вершины квадрата подсчитали число проведенных из нее отрезков. Могло ли так случиться, что все эти числа оказались четными?

Геометрические задачи школьной математики: прошлое, настоящее и будущее

Джордж Малати

В статье рассказано о некоторых тенденциях, которые стали господствовать в западном школьном математическом образовании, начиная с 60-х годов XX века, и привели к разрыву традиции систематического изучения евклидовой геометрии. Автор анализирует сложившуюся ситуацию, обосновывает ценность сохранения указанной традиции, а также подчеркивает важность евклидовой геометрии как основы разработки компьютерных образовательных технологий.

0. Почему надо решать задачи?

Из истории мы видим, что решение задач всегда составляло существенную часть математической деятельности. Сама математика возникла посредством решения задач, на этом же пути были построены математические структуры. Отсюда понятно, почему при изучении и преподавании математики, как формальном, так и неформальном, так много внимания уделяется решению задач.

1. Геометрические задачи в прошлом

До конца 50-х годов XX века евклидовой геометрии отводилась особая роль при обучении как решению математических задач, так и пониманию сущности математики. Биографии многих выдающихся математиков показывают, что их любовь к математике имела источником решение задач евклидовой геометрии; к ним относится и Альберт Эйнштейн (French 1979, 53). До 60-х годов XX века некоторые работники математического образования интересовались использованием традиционной структуры решения задач евклидовой геометрии («Дано; Доказать; Доказательство») для обучения решению алгебраических и текстовых арифметических задач. В этой структуре решения геометрической задачи они видели образец мыслительного процесса решения любой математической задачи.

В 60-е и 70-е годы XX века в результате внедрения бурбакистской линейной алгебры в старшие классы средней школы евклидова геометрия начала исчезать из программ средней школы, кроме того сократилось обучение геометрии в целом (Malaty, 1998). Интерес учителей математики к развитию у детей способностей решать задачи был в эти годы прерван из-за того, что они были вовлечены в другую деятельность — по внедрению "новой математики" в школу. Формальная структура "новой математики" не являлась средой, подходящей для развития способностей детей к решению задач. Геометрия преобразований, которую некоторые специалисты называли "геометрией движений", делает больший акцент на понятии движения, чем это было в традиционной евклидовой геометрии. Это могло бы быть хорошим дополнением к геометрическому образованию, но никак не заменой евклидовой геометрии. При решении геометрической задачи более естественно сначала искать, статически, соотношения между элементами фигуры, чем искать подходящее движение, помогающее решить задачу. Поиск подходящего преобразования сам по себе востребует знания из курса евклидовой геометрии.

Во время господства преподавания геометрии преобразований некоторые демонстрируемые учителями решения выглядели очень красивыми, однако у учащихся оставалось ощущение, что такие решения лежат за пределами их способностей и появляются в виде своего рода трюков. Кроме того, не было отчетливо объяснено, что геометрия преобразований еще не есть неевклидова геометрия; она построена на базе фактов евклидовой геометрии.

2. Геометрические задачи в настоящее время

В предыдущем разделе мы вкратце описали ситуацию с геометрическими задачами в прошлом. Обсудим более подробно современное положение.

2.1. От "обратно к основам" к "решению задач"

В начале 80-х годов распространилось движение "обратно к основам". Здесь "обратно" не означает возврат к обучению евклидовой геометрии, к написанию геометрических пособий или к введению регулярных уроков геометрии в расписание. А слово "основы" не означает математических структур вроде структуры евклидовой геометрии. Это движение делает упор на укрепление арифметических навыков. Тем самым вычисление периметров, площадей и объемов, составлявшее скромную часть традиционной геометрии, становится главной целью обучения геометрии. Правила вычислений предлагались обычно в готовом виде, а не являлись результатом решения соответствующих задач и проведения доказательств.

Учителям не пришлось по душе механическое обучение по системе "обратно к основам". Они понимали, что решение задач является существенной частью изучения, преподавания и построения математики. К 1985 году возник новый лозунг "решение задач", отражающий новое движение, идущее на смену движению "обратно к основам".

2.2. От головоломок к задачам из задачников

В первой половине 80-х годов нередко можно было встретить специалистов, обменивавшихся с коллегами интересными головоломками в кулуарах конференций. Вот пример такой головоломки, которую мне предложили на одной из конференций.

Спички изображают рюмку, внутри которой находится камень (кружок). Переложить две спички так, чтобы камень оказался снаружи.

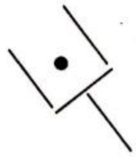


Рис. 1

Это, конечно, неплохая головоломка для развлечения на фуршете, но с течением времени подобные головоломки стали использоваться для обучения математике в классе, и даже проникать в сборники математических задач.

Для решения подобных головоломок нужно некоторое пространственное воображение, а также элементарные навыки логического рассуждения, однако вряд ли возможно признать их геометрическими задачами. Они не имеют отношения к систематическому изучению математики на определенном уровне. В устной форме их можно было бы предлагать даже неграмотным.

2.3. От трюков к простой евклидовой геометрии

Решение некоторых головоломок предполагает знание специальных приемов, найти которые достаточно трудно даже профессиональным математикам. В качестве примера приведу две головоломки со спичками. В одной из них предлагается сложить 4 правильных треугольника из 6 спичек.

Рис. 2

Во второй 4 спички сложены в форме креста и требуется переложить только одну спичку, чтобы получился квадрат (Рис. 2). (4 спички были придвинуты друг к другу гораздо ближе, чем изображено на рисунке).

Рисунок 3 относится к другому типу головоломок, которые распространились во второй половине 80-х годов. Эти головоломки также не заменяют освоения геометрии на некотором определенном уровне (Pehkonen 1992), но все же имеют определенное отношение к геометрии, и именно к евклидовой геометрии.

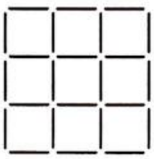


Рис. 3

В этой головоломке требуется убрать 4 спички так, чтобы осталось 5 квадратов и ничего больше.

Спички не образуют квадратов в геометрическом смысле этого слова, однако его можно употреблять в той же мере, в какой спички являются представлениями геометрических отрезков. Использование спичек приводит к некоторым другим типам движений, отличающихся от "движений" геометрии преобразований, тем не менее эти головоломки со спичками можно решать статическим способом при помощи бумаги и карандаша, изображая отрезки вместо спичек. Такой статический способ дает возможность анализировать фигуру лучше, чем при использовании настоящих спичек. Причина в том, что вся фигура остается обозримой в каждый момент. Это помогает учащимся рефлектировать свои попытки. Головоломки такого типа могут помочь в формировании геометрического мышления, но их явно недостаточно для построения программы школьной геометрии.

2.4. Компьютеры и геометрические задачи

В начале 60-х годов учителя математики начали проявлять интерес к использованию компьютеров при обучении математике. В компьютерах они увидели многообещающие возможности для создания программируемых инструкций (Varga 1971, 31). Развитие компьютерных технологий и широкое распространение компьютеров в конце 80-х – начале 90-х годов стимулировало математиков и преподавателей математики двигаться в другом направлении, особенно при обучении геометрии.

В это время преподаватели заинтересовались использованием таких пакетов программного обеспечения, как Cabri-Geometrie (Cabri-Géomètre), Geometer's SketchPad (GSP), Cinderella.

При использовании любого из этих пакетов учащиеся могли нарисовать, например, треугольник, высоты треугольника и увидеть, что все три высоты пересекаются в одной и только одной точке. Этот пакет дает возможность проверить обнаруженное свойство для самых различных исходных конфигураций. В упомянутом выше примере учащиеся могут двигать любую вершину треугольника, искажая его любым способом, и убеждаться, что в любом случае все три высоты пересекаются в одной и только одной точке. Поэтому эти пакеты называют пакетами динамической геометрии.

2.4.1. Анализ ситуации

Отметим следующий важный момент: описанный выше тип исследования конфигурации не является доказательством чего-либо. Программное обеспечение позволяет за короткое время рассмотреть очень много конкретных конфигураций, чего нельзя было бы сделать при помощи карандаша и бумаги. Динамические возможности программного обеспечения представляют собой мощное средство индуктивного исследования, но не позволяют ничего доказать. Это хорошо известно математикам и преподавателям математики, которые взаимодействовали с программистами при создании такого программного обеспечения, отражающего евклидов мир. В начале, когда был разработан пакет Cabri-géomètre, целью использования этого пакета была создать у учащихся мотивацию для поиска доказательств. Со временем опыт работы показал, что произошло прямо противоположное: компьютеры убедили учащихся, что тот или иной результат верен для любой конкретной конфигурации, и учащиеся потеряли мотивацию к поиску доказательств (Malaty, 1998).

Сами математики, которые участвовали в разработке описанного выше программного обеспечения, могут доказывать теоремы евклидовой геометрии, именно поэтому они могут принимать участие в разработке пакетов, соответствующих евклидову миру. Вопрос в том, откуда появятся такие математики в будущем, если новые поколения школьников учатся быть только пользователями такого программного обеспечения?

Несмотря на заявления некоторых преподавателей, что основанное на компьютерных технологиях обучение достаточно конструктивно, часто учителя вынуждены дополнять его логическими способами исследования, т.е. обеспечивать детей необходимыми приемами. Такое, например, происходит в случае, когда учитель просит детей увеличить изображение на экране и убедиться, что некоторая фигура является четырехугольником, а не треугольником, как это могло показаться до увеличения. Основная задача в этом случае — ответить на вопрос “почему?”. Почему фигура не могла быть треугольником? В математике мы не можем удовлетвориться ответом, основанным на ощущениях, требуется рассуждение.

Есть также менее значительные проблемы, связанные со сложностью использования геометрического программного обеспечения. Их можно заметить даже на презентациях и конференциях.

Применение компьютеров делает специалистов по обучению математике более прогрессивными в глазах родителей, а также доставляет им определенное удовольствие. Однако не это является нашей профессиональной целью, нам надо стремиться к развитию и усовершенствованию программного обеспечения и использования компьютеров. При этом одна из целей относительно геометрических задач остается неизменной — развитие способностей учащихся к использованию геометрических структур при решении задач на доказательство.

2.4.2. Некоторые подробности

В упомянутом выше примере с высотами треугольника ученику надо только давать команды в соответствующем меню, чтобы нарисовать треугольник и его высоты. Учащийся должен помнить функцию каждой команды, в противном случае ему надо обратиться за помощью к учителю. Если многие учащиеся обращаются за помощью, работа на уроке идет медленно. Поэтому учитель разъясняет, как работать с меню, либо в начале урока, либо после очередного шага, либо предлагает письменную инструкцию. После этого ученикам остается только правильно обращаться с мышью.

Само программное обеспечение создает изображения благодаря знаниям его разработчиков. Учащийся наблюдает в готовом виде, что все высоты пересекаются в одной и только одной точке. Это может оказаться для ученика волнующим наблюдением, вроде наблюдения за чудом, но это совершенно не означает, что он понимает, почему так происходит.

Если треугольник тупоугольный, две высоты, а также точка пересечения оказываются вне треугольника. Учащийся может наблюдать такой случай, но не понимает, почему так происходит. Он также не понимает, почему в случае остроугольного треугольника все высоты и точка пересечения оказываются внутри треугольника. Если учащийся не может ответить на вопрос "почему", мы не можем сказать, что обучение математике на верном пути.

3. Некоторые другие современные попытки

С начала 60-х готов в обучении геометрии произошли различные изменения. Сегодня в разных странах существуют попытки вернуть евклидову геометрию в школы. В некоторых из этих стран предпринимаются также попытки написать новые учебники по геометрии, и именно по евклидовой геометрии. В некоторых других странах, например, Венгрии, России, Чешской республике, евклидова геометрия всегда была основой геометрического образования. Здесь следует отметить отличие, сложившееся в математическом образовании с 60-х годов между "восточными" и "западными" странами (Malaty 1998). Финляндия, например, является одной из северных стран, которые начали радикальные изменения в математическом образовании в 60-е годы, и теперь пытаются вернуть евклидову геометрию.

3.1. Пример

В Финляндии в 1993 году впервые были опубликованы учебники именно по геометрии. Это учебники для старших классов средней школы.

На рис. 4 показана одна из задач, которая появляется в начале одного из этих учебников (Jäppinen, Kupiainen, Räsänen 2001, 14).

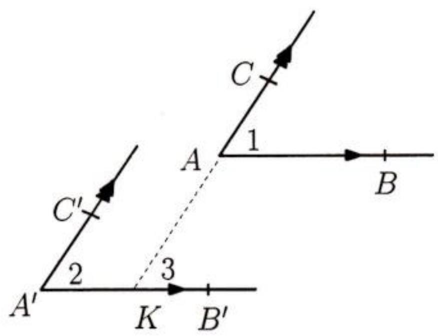


Рис. 4

Я немного изменил оригинальный рисунок из учебника, добавив обозначения семи точек на рисунке, а также изменив обозначения углов с α, β, γ на 1, 2, 3.

В учебнике объясняется, что углы α и γ имеют одинаковую величину, и это кратко доказано, затем замечается, что аналогично углы γ и β имеют одинаковую величину, следовательно, углы α и β имеют одинаковую величину.

До 60-х годов, до начала движения "новая математика" эта задача входила в учебник для младших классов средней школы (Väisälä 1961, 20). В этом более раннем учебнике доказательство было изложено похожим образом, однако обоснование того, что величины соответственных углов равны, опиралось на теорему, которая была обсуждена в учебнике выше.

3.2. Анализ ситуации

Итак, изложенная в предыдущем пункте задача возвращается в школу после 40-летнего отсутствия, причем для более старших и при этом только для продвинутых учащихся. Упомянутый выше учебник предназначен для тех учащихся, которые выбрали для изучения больше часов математики, чем остальные.

На самом деле эта задача относится к простым, которые следует предлагать всем учащимся, причем не старше 13 лет. Кроме того, полезно внести предлагаемые ниже уточнения.

Когда для учащихся младшего возраста мы вводим обозначения углов цифрами, они могут сосредоточиться на количестве рассматриваемых углов (3), при этом обозначения 1, 2, 3 играют роль порядковых чисел. Полезно было бы записать доказательство в следующем виде:

$$\hat{1} = \hat{3} - \mathbf{I} \quad (\textbf{Theorem})$$

$$\hat{3} = \hat{2} - \mathbf{II} \quad (\textbf{Theorem})$$

$$\mathbf{I\&II} \Rightarrow$$

$$\hat{1} = \hat{2} \qquad\qquad \textbf{Q.E.D.}$$

При помощи такого способа записи мы можем использовать геометрический материал для понимания транзитивности отношения равенства. В рамках движения “новая математика” транзитивности пытались научить при формальном изучении отношений.

Этот пример показывает, что мы теряем, если не обучаем евклидовой геометрии. Евклидова геометрия нужна не только для изучения декартовой геометрии, тригонометрии и анализа, она предлагает также способ визуализации алгебраических отношений. Дедуктивное мышление было развито при работе с евклидовой геометрией со времен Фалеса (примерно 624 - 548 до н.э.), поэтому пифагорейцы могли работать элегантным геометрическим способом с алгебраическими отношениями. Этот фрагмент истории математики нужен современным учащимся, чтобы увидеть этот элегантный способ мышления; на его основе можно глубже понимать и ценить математику, включая и алгебраическое мышление.

С геометрической точки зрения, лучше не показывать сразу отрезок АК, изображенный на рис. 4. Дети сами должны дойти до идеи провести этот отрезок. Мы также должны предлагать им находить новые варианты и новые решения. Например, если учащиеся предлагают провести отрезок АК как продолжение луча АВ, где К - точка пересечения с лучом $A'C'$, мы должны оценить эту версию, которая, возможно, поможет решить в будущем другие задачи. Следует также побуждать использовать аналогию рассуждений в других версиях. Могут быть найдены другие решения. Следующий способ решения иллюстрирует нам другое свойство равенств.

$\hat{1} = \hat{2} - \mathbf{I}$ **(Theorem)**

$\hat{3} = \hat{4} - \mathbf{II}$ **(Theorem)**

$\mathbf{I\&II} \Rightarrow$

$\hat{1} + \hat{3} = \hat{2} + \hat{4}$

$\Rightarrow C\hat{A}B = C'\hat{A}'B'$ **Q.E.D.**

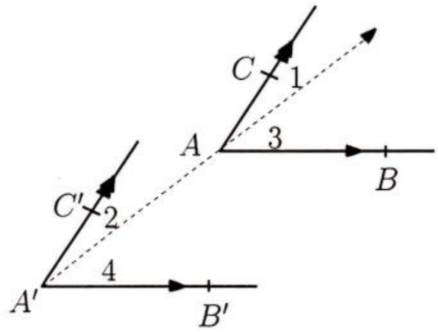


Рис. 5

3.3. Вариация решений

Задача, которая обсуждалась выше, — довольно простая. Доказать равенство углов САВ $= C'A'B'$ можно также в рамках геометрии преобразований при помощи простого сдвига. Достаточно также применения одного из простых движений, изучаемых в евклидовой геометрии. Здесь под движением я понимаю наложение одной фигуры на другую. При обучении решению задач следует побуждать детей искать разные решения. Вариация решений позволяет детям накапливать опыт и увеличивает их возможности перед лицом новых задач.

4. Геометрические задачи в будущем

В такой стране, как Финляндия, где школы хорошо оснащены компьютерами, интерес к преподаванию традиционной евклидовой геометрии постоянно растет. Это может означать, что изменения, которые претерпело преподавание геометрии за последние 40 лет, были лишь случайными колебаниями. Для мирового геометрического образования ведущую роль могут сыграть преподаватели из "восточных стран". С одной стороны, они сохранили непрерывный опыт обучения систематической евклидовой геометрии, с другой стороны, некоторые из них проявляют интерес к разработке и использованию программного обеспечения в обучении геометрии. Несмотря на то, что этот интерес был стимулирован знакомством с деятельностью "западных стран" в этой области, использование программного обеспечения в "восточных странах" носит совсем другой характер, благодаря культуре математического образования в этих странах. Там решение задач посредством доказательств — главное, чему обучают в средней школе. По этой причине интерес к использованию в "восточных странах" программного обеспечения и компьютеров может привести к желаемым усовершенствованиям самого программного обеспечения.

4.1. Перемены и будущее

Там, где евклидова геометрия была основной частью школьной математики в течение сотен лет, за последние сорок лет произошли различные изменения в геометрическом образовании. В настоящее время, после различных пертурбаций математического образования, евклидова геометрия возвращается. Один из факторов, благоприятствующих возвращению евклидовой геометрии, — интерес к компьютерным технологиям обучения. Школьный геометрический программный продукт имеет своим содержанием евклидову геометрию. Общей тенденцией в переменах обучения геометрии является бо́льшее применение движений. Движения изучаются в геометрии преобразований, движения применяются в головоломках типа головоломок со спичками, движения широко используются в геометрическом программном продукте. В средней школе необходимо изучать элементы геометрии преобразований, время от времени мы можем предлагать школьникам головоломки, и мы должны развивать использование в школе геометрического программного продукта. Мы не должны путать применение компьютера для исследования множества частных случаев с применением для решения задач. Только решение задачи посредством доказательства может считаться удовлетворяющим требованиям средней школы. Динамические возможности программного продукта могут помогать в исследовании новых задач, но не могут подменять их решения. Наша цель как специалистов по обучению математике — не избегать доказательств, наоборот, наша задача — развивать методы и техники так, чтобы построение доказательств стало возможной и вдохновляющей работой для нынешнего и будущих поколений учеников.

В заключение я предлагаю читателю вспомнить, что надо знать из курса геометрии, чтобы решить следующую задачу: "Разделить данный отрезок на три равные части при помощи циркуля и линейки без делений".

Литература

Boyer. C., 1985, *A History of Mathematics* (New Jersey: Princeton University Press).

Jäppinen, P., Kupiainen, A. and Räsänen, M., 2001, *Calculus.* Lukion pitkä matematiikka. Geometria, analyyttinen geometria, trigonometria ja vektorit (Helsinki: Otava).

French, A., 1979, Einstein – A condenced biography. In: *Einstein. A Centenary Volume*, pp. 53-64 (London: Heinemann Educational Books Ltd.).

Malaty, G., 1998, *Eastern and Western mathematical education: Unity, Diversity and Problems.* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 3, pp.421-436.

Pehkonen, E., 1992. Using Problem Fields as a Method of Change, *The Mathematics Educator*, **3**, Number 1, pp. 3-6.

Varga, T., 1971, General introduction. In: *Teaching School Mathematics*, pp. 11-33 (Paris: Unesco)

Väisälä, K., 1961, *Keskikoulun matematiikka* (Porvoo: WSOY).

Перевод с английского: В. М. Имайкин

Малати Джордж,
профессор университета Йоенсуу, Финляндия

E-mail: george.malaty@joensuu.fi

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, пр-д завода "Серп и Молот", д.3а.

Контактные телефоны: (095) 362-91-70, (095) 362-91-02.

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

E-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2003 год (включая стоимость пересылки) – 45 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2003 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

С сентября 2000 выходит "Обозрение Z" — научно-популярное приложение к журналу "Математическое образование". Условия подписки (адрес, реквизиты, стоимость одного номера) — те же, что и для журнала.

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 35 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 45 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents