Математическое Образование

Журнал Фонда математического
образования и просвещения

Год шестой

№ 4 (23)

Октябрь - декабрь 2002 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

№ 4 (23), 2002 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (23), октябрь – декабрь 2002 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2002 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 20.01.2003 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 8 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Введение в вероятностное прогнозирование. Курс лекций и упражнений (продолжение)

И. П. Костенко

Продолжаем публикацию учебного пособия по теории вероятностей. В данном номере публикуются лекции 4, 5 с соответствующими упражнениями. Лекции 2, 3 опубликованы в предыдущем номере журнала, лекции 6, 7 предполагается напечатать в следующем номере.

Замеченные опечатки в Лекции 1, №2(21)

Стр. 51, 4-я строка снизу. Написано "после опытов"; следует читать "после двадцати опытов".

Стр. 54, 9-я строка сверху. Написано "опыт раз, то примерно раз"; следует читать "опыт 100 раз, то примерно 40 раз".

Лекция 4. Расчет вероятностей в схеме с повторением опытов

Вы, наверное, заметили, что во многих рассмотренных ранее задачах, опыты повторялись, — шары вынимались из урны несколько раз, игральная кость (или монета) подбрасывалась 2-3 раза, орудие стреляло k раз и т.п. Это не случайно. В научной и технической деятельности постоянно приходится проводить многократно повторяющиеся испытания в сходных условиях. Задачи, которые при этом возникают, тоже сходны. Для их решения выработаны общие методы (формулы).

В данной лекции мы рассмотрим простейшую и, вместе с тем, важнейшую схему испытаний, когда один и тот же опыт последовательно повторяется k раз и каждый раз может появиться (или нет) некоторое событие A ("успех") с неизменной вероятностью p.

Этот тип испытаний впервые был исследован в XVII в. знаменитым швейцарцем Я. Бернулли и получил наименование *схемы Бернулли.* Схема эта и результаты ее исследования оказались в дальнейшем исключительно полезными как для развития теории вероятностей, так и для приложений. Вы сможете убедиться в этом сами, изучая данный курс.

Сейчас ваша цель — понять, как из разных конкретных задач возникает обобщенная задача, и как она решается. Решение концентрируется в виде *формулы*

Бернулли. Вы должны понять смысл этой формулы и научиться распознавать, в каких ситуациях ее можно применять.

Расчет по формуле Бернулли становится затруднительным в случаях, когда число опытов k очень велико, или когда вероятность p очень мала. В этих случаях используются другие, приближенные формулы (*Муавра-Лапласа, Пуассона*). Их вы тоже должны уметь применять и знать, когда.

1. Примеры

В конце предыдущей лекции мы решали задачу, где три орудия стреляли в мишень, причем, каждое орудие имело свою вероятность попадания p_i. Схема Бернулли требует, чтобы вероятности не менялись от опыта к опыту. Поэтому немного изменим задачу.

Пример 1. Орудие три раза стреляет в мишень. Вероятность попадания не меняется от выстрела к выстрелу и равна p. Найти вероятность ровно двух попаданий.

Решение. 1) Обозначим искомое событие через W_2 и введем "простые" события A_i $(i = 1, 2, 3)$ — попадание при i-том выстреле. Вероятности этих событий известны и одинаковы — $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_3) = p$.

2) Используя операции сложения и умножения, представим искомое событие так:

$$W_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$$

Поясняю: или первые два выстрела попадают в цель, а третий нет (событие $A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$), или первый и третий выстрелы попадают, второй — нет, или второй и третий попадают, первый — нет.

3) Слагаемые события, очевидно, несовместимые, поэтому применяем первую теорему сложения:

$$\mathbf{P}(W_2) = \mathbf{P}(A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3) + \mathbf{P}(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3) + \mathbf{P}(\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3).$$

4) К каждому слагаемому применяем следствие теоремы умножения (перемножаемые события независимые):

$$\mathbf{P}(W_2) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) \cdot \mathbf{P}(\bar{A}_3) + \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(\bar{A}_2) \cdot \mathbf{P}(A)_3) + \mathbf{P}(\bar{A}_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) \cdot \mathbf{P}(A)_3).$$

5) Подставляем в последнее равенство данные вероятности $\mathbf{P}(A_i) = p$, а также вероятности дополнительных событий (промахов) $\mathbf{P}(\bar{A}_i) = 1 - p$ и окончательно получаем

$$\mathbf{P}(W_2) = p \cdot p \cdot (1 - p) + p \cdot (1 - p) \cdot p + (1 - p) \cdot p \cdot p = 3p^2(1 - p). \qquad (1)$$

Формула (1) позволяет быстро вычислять вероятности при различных конкретных значениях p. Например, при $p = 0,7$ имеем $\mathbf{P}(W_2) = 3 \cdot 0,7^2 \cdot 0,3 \approx 0,44$.

Теперь чуть усложним задачу.

Пример 2. Орудие стреляет в цель 4 раза. Вероятность поражения цели каждый раз неизменна и равна p. Рассчитать вероятность ровно двух попаданий (и при этом, следовательно, двух промахов) — событие W_2.

Решение. 1) Вводим четыре события A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — i-тый выстрел попадает в цель. Их вероятности известны и равны $\mathbf{P}(A_i) = p$.

2) $$W_2 = A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4 + \bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4 + A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4. \quad (2)$$

Вы, конечно, почувствовали, что перебор вариантов расположения попаданий и промахов здесь был затруднителен. Чтобы не потерять какого-то варианта, я расположил слагаемые так: сначала три слагаемых, в которых попадания идут рядом, потом — чередуются с промахами. Всего получилось 6 слагаемых.

3-5) Применяем к каждому слагаемому следствие теоремы умножения:
$\mathbf{P}(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4) = \mathbf{P}(\bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4) = \cdots = p^2(1-p)^2$.
Вероятности всех слагаемых одинаковы, их число — 6, поэтому

$$\mathbf{P}(W_2) = 6p^2(1-p)^2. \quad (3)$$

В частности, если $p = 0,7$, то $\mathbf{P}(W_2) = 6 \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^2 \approx 0,26$. Вероятность двух попаданий при четырех выстрелах уменьшилась почти вдвое, сравнительно с тремя выстрелами.

Помощь формулы сочетаний. Число слагаемых в (2) можно было посчитать с помощью формулы числа сочетаний (лекция 2, п. 3, формула (2)). Каждое слагаемое в (2) соответствует выбору двух позиций (номера попаданий) из четырех: первому слагаемому соответствует сочетание (1, 2), второму — (2, 3) и т.д. Число всех способов выбора определяется формулой

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Используя формулу сочетаний, можно быстро решать задачи с большим числом выстрелов. Например: орудие стреляет 5 раз, вероятность попадания каждый раз равна p; рассчитать вероятность ровно трех попаданий. Рассуждение, аналогичное только что сделанному, приводит к формуле

$$\mathbf{P}(W_3) = C_5^3p^3(1-p)^2, \text{где } C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10. \quad (4)$$

Контроль 1. Орудие стреляет в цель 4 раза. Вероятность попадания каждый раз равна p. Какова вероятность того, что цель будет поражена ровно один раз? (Обязательно проведите подробные рассуждения и получите формулу для расчета). Запишите формулу для случая, когда орудие стреляет 6 раз и нужно определить вероятность ровно четырех попаданий (событие W_4).

2. Обобщение: задача и формула Бернулли

Точно таким же методом, как мы только что решали задачи со стрельбой, можно решать разнообразные задачи, если они имеют сходную структуру. Опишем эту структуру в абстрактных терминах, отвлекаясь от конкретики опытов и событий.

Задача Бернулли. Имеется эксперимент, который состоит в последовательном повторении некоторого опыта k раз. Каждый раз при повторении опыта может появиться или не появиться событие A ("успех" опыта). Вероятность этого события не изменяется от опыта к опыту и равна $\mathbf{P}(A) = p$. Рассчитать вероятность события W_l, которое состоит в том, что в результате эксперимента событие A появится l раз и не появится $k - l$ раз ($l \leq k$).

Решение дает следующая *формула Бернулли*

$$\mathbf{P}(W_l) = C_k^l \cdot p^l \cdot (1-p)^{k-l}, \tag{Б}$$

$$\text{где } C_k^l = \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot [k-(l-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot l}. \tag{C}$$

Формула (Б) обобщает формулы (1), (3), (4). Доказывается она теми же рассуждениями, но в общем виде они приобретают громоздкую форму из-за неопределенности числа опытов k и произвольности числа "успехов" l. Мы проведем доказательство формулы (Б) позже. Сейчас ваша цель — хорошо понять приведенную выше абстрактную формулировку, научиться распознавать Бернуллиевскую структуру в конкретных задачах.

Пример 3. Рассчитать вероятность появления ровно восьми гербов при десятикратном подбрасывании монеты.

Решение. Давайте неторопливо перечитаем формулировку задачи Бернулли и конкретизируем все ее элементы на данном примере.

Эксперимент состоит в подбрасывании монеты 10 раз, т.е. $k = 10$. Опыт, из повторения которого состоит эксперимент, — это **однократное** подбрасывание монеты. Событие A ("успех") — появление герба при однократном подбрасывании монеты, т.е. $A = \Gamma$. Вероятность "успеха" — $\mathbf{P}(A) = p = 0,5$. Искомое событие W_l относится к эксперименту и состоит в появлении герба 8 раз, а решки — 2 раза, т.е. $l = 8$, $k - l = 2$. Следовательно, данная задача имеет Бернуллиевскую структуру и решается непосредственным применением формулы (Б):

$$\mathbf{P}(W_8) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot 0,5^8 \cdot (1-0,5)^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{45}{1024} \approx 0,04.$$

Прогноз: при выполнении эксперимента 100 раз (100 серий, каждая из которых состоит в десятикратном подбрасывании монеты) примерно в 4 сериях герб появится **ровно** 8 раз.

Предостережение. Я замечал, что правильному применению формулы Бернулли нередко мешает вот какое обстоятельство. Начинающему кажется, что задача состоит в том, чтобы ответить на вопрос: сколько раз появится герб? Поэтому он затрудняется определить, чему равно l. Но предсказать, сколько раз появится герб, конечно, нельзя - – это явление случайное. В задаче спрашивается иное: какова вероятность, что герб появится ровно 8 раз, т.е. число $l = 8$ задается самим условием задачи. Правомерны и другие вопросы: какова вероятность того, что герб появится, например, 7 раз ($l = 7$), или 1 раз ($l = 1$), или ни разу ($l = 0$).

Контроль 2. В урне 6 шаров — 4 белых и 2 черных. Опыт состоит в последовательном вынимании трех шаров а) без возвращения, б) с возвращением. В каком случае применима формула Бернулли, в каком не применима? Почему? Рассчитайте вероятность появления трех белых шаров в том и другом случае.

3. Вывод формулы Бернулли

Выше мы установили формулу Бернулли с помощью аналогии — выписали в общем виде формулу (Б), аналогичную формулам (1), (3), (4). Правда, мы оговорили, что в силу сходства структуры задач, обобщенная формула доказывается точно так же, как и конкретные формулы. Сейчас проведем это доказательство.

Учтите, что абстрактные рассуждения могут восприниматься с трудом и быть поначалу "непонятными". Это естественно. Но вы должны учиться таким рассуждениям — это язык науки, это метод установления истинности научных утверждений. Для облегчения понимания советую вам самостоятельно конкретизировать все последующие этапы. Возьмите, к примеру, задачу: какова вероятность появления ровно двух гербов при пятикратном подбрасывании монеты?

Предостережение. Прежде чем начать вывод формулы, обращаю ваше внимание вот на какое обстоятельство. В задаче Бернулли надо различать два **различных** опыта — "простой" и "сложный". "Сложный" опыт состоит в **повторении** "простого" опыта k раз. Чтобы подчеркнуть это различие, мы и условились называть "сложный" опыт **экспериментом**. Соответственно, надо различать и события: событие A относится к "простому" опыту, событие W_l — к эксперименту. Если конкретизировать, то появление герба (Г) — это событие, относящееся к "простому" опыту, состоящему в однократном подбрасывании монеты. Появление двух гербов после пятикратного подбрасывания монеты — событие W_2, относящееся к эксперименту.

Доказательство. 1) Введем следующие события в эксперименте:

A_1 — при первом выполнении "простого" опыта появляется событие A;

A_2 — при втором выполнении "простого" опыта появляется событие A;

. . . . ;

A_l — при l-том выполнении "простого" опыта появляется событие A;

A_{l+1} — при $l+1$-ом выполнении "простого" опыта появляется событие A;

. . . . ;

A_k — при k-том выполнении "простого" опыта появляется событие A.

Вероятности введенных событий одинаковы и равны $\mathbf{P}(A_i) = p$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Это следует из условия задачи, где сказано, что вероятность события A не меняется от опыта к опыту.

Наряду с событиями A_i, будем рассматривать в эксперименте и дополнительные к ним события $\bar{A}_i$, — их вероятности $\mathbf{P}(A_i) = 1 - p$. Напомню, что событие $\bar{A}_i$ произойдет в эксперименте в том случае, если при i-том выполнении "простого" опыта событие A **не** появится.

Конкретизируя сказанное на примере подбрасывания монеты, получим пять событий: A_1 - при первом подбрасывании появляется герб (при остальных — неважно, что), A_2 - при втором подбрасывании появляется герб (при первом, третьем и остальных — неважно, что), ... , A_5 — при последнем подбрасывании появляется герб. Очевидно, $\mathbf{P}(A_i) = 0,5$ и $\mathbf{P}(\bar{A}_i) = 0,5$.

Заметьте, что события A_i совместимые: если, например, событие A появится в эксперименте ровно два раза на четных местах, то в результате этого эксперимента появятся события A_2 и A_4 **вместе** (остальные не появятся) и, следовательно, появится событие- произведение $\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot A_4 \cdot \bar{A}_5$ — его можно записать и в таком обозначении *РГРГР*. Еще раз подчеркиваю — это **одно** событие в эксперименте, а не пять!

2) Теперь мы должны представить искомое событие W_l в виде суммы и произведения введенных выше событий A_i, подобно тому, как это делалось в примерах 1 и 2.

а) Событие W_l может происходить разными способами (A может появляться в разных порядках). Например, результат эксперимента может быть таким: в первых l опытах событие A появилось, в последующих $k-l$ опытах — нет. Используя операцию умножения, представим этот результат так:

$$B_1 = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_l \cdot \bar{A}_{l+1} \cdot \dots \cdot \bar{A}_k. \tag{5}$$

Вот другой результат, при котором появляется W_l:

$$B_2 = \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{l+1} \cdot \bar{A}_{l+2} \cdot \dots \cdot \bar{A}_k. \tag{6}$$

Появление B_2 означает, что в первом опыте событие A не появилось, в следующих появилось подряд l раз, потом не появилось $k-l-1$ раз.

Советую выписать для самопроверки еще один-два способа появления события W_l и конкретизировать их на примере подбрасывания монеты.

б) Обозначим все возможные способы появления события W_l через B_1, B_2, ... , B_s. Событие W_l может произойти в эксперименте только тогда, когда произойдет или B_1, или B_2, ... , или B_s. Значит, согласно определению суммы событий, имеет место представление

$$W_l = B_1 + B_2 + \dots + B_s. \tag{7}$$

3) Для вычисления вероятности $\mathbf{P}(W_l)$ применим к (7) первую теорему сложения. Но предварительно надо проверить несовместимость слагаемых B_i.

Предположим обратное, т.е. что события B_1, B_2, :, B_s совместимые. Значит, согласно определению совместимости (лекция 3, п. 9), возможен такой результат эксперимента, при котором произойдут вместе какие-то два события, — например, B_1 и B_2. Тогда из (5) и (6) следует, что произойдут вместе события A_1 и дополнительное к нему событие $\bar{A}_1$ (т.е. при первом выполнении опыта появится и одновременно не появится событие A). Абсурд. Предположение совместимости ложно. Слагаемые в (7) несовместимые.

Согласно теореме сложения, из (7) следует

$$\mathbf{P}(W_l) = \mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(B_2) + \dots + \mathbf{P}(B_s). \tag{8}$$

4) Вычислим правую часть. Для этого определим слагаемые вероятности в (8) с помощью теоремы умножения.

Вычислим сначала первое слагаемое. Поскольку в (5) перемножаемые события независимы в совокупности (лекция 3, пп. 7, 10), то можно применить следствие теоремы умножения, в результате чего получаем

$$\mathbf{P}(B_l) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(A_l) \cdot \mathbf{P}(\bar{A}_{l+1}) \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(\bar{A}_k) = p^l \cdot (1-p)^{k-l}.$$

Точно так же вычисляются остальные вероятности $\mathbf{P}(B_2)$, $\mathbf{P}(B_3)$, ... , $\mathbf{P}(B_s)$. Все они оказываются одинаковыми (проведите сами вычисление $\mathbf{P}(B_2)$ и конкретизируйте его на примере с монетой). В итоге равенство (8) принимает вид

$$\mathbf{P}(W_l) = p^l(1-p)^{k-l} + p^l(1-p)^{k-l} + \cdots + p^l(1-p)^{k-l}. \tag{9}$$

5) Остается упростить последнее равенство, посчитав число слагаемых s. Их столько же, сколько и в правой части равенства (7).

Каждому событию B_i в (7) сопоставим группу из l чисел — номеров опытов, в которых появляется событие A. Например, событию B_1 соответствует группа $\{1, 2, \ldots, l\}$, событию B_2 — другая группа $\{2, 3, \ldots, l, l+1\}$. Каждая такая группа — это сочетание из k элементов по l (лекция 2, п. 3). Значит, число слагаемых в (9) равно числу C_k^l сочетаний из k по l. Равенство (9) принимает вид

$$\mathbf{P}(W_l) = C_k^l \cdot p^l \cdot (1-p)^{k-l}. \tag{10}$$

Напоминаю, — для лучшего понимания доказательства вам следует самостоятельно конкретизировать каждый этап рассуждения и каждую формулу (5)-(10) на примере.

Контроль 3. Добавьте в доказательство свои два события B_3 и B_4, запишите их в виде произведения событий A_i, подобного (5) и (6). Докажите несовместимость этих событий. Найдите их вероятности и обоснуйте решение.

Указание. Составляя B_3, проследите, чтобы "успех" повторялся **ровно** l раз.

4. Приближенное решение при большом числе опытов (правило Муавра)

При большом числе опытов k вычисление вероятностей по формуле (Б) становится затруднительным, а при очень больших k почти невозможным. Попробуйте, например, найти вероятность двадцати попаданий при ста выстрелах, если вероятность одного попадания 0,15. Придется вычислять следующее выражение

$$\mathbf{P}(W_{20}) = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \cdots \cdot 81}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 20} \cdot (0,15)^{20} \cdot (0,85)^{80}.$$

Возникает необходимость иметь приближенную формулу, заменяющую формулу Бернулли при больших значениях k и l. Эта задача встала перед математиками в начале XVIII века, когда они начали применять вероятностные расчеты к демографическим проблемам. Решил ее Абрахам де Муавр (1667-1754) — француз, всю жизнь проживший в Англии, и потому считающийся английским математиком.

Я покажу вам это решение в виде формального правила. Обоснование (понимание его смысла и причины) оставим для будущего, когда появится необходимый математический инструментарий (лекция 12, п. 4).

Правило Муавра[1]. Пусть вероятность p появления события A в каждом опыте постоянна, а число k повторений опыта достаточно велико (точнее — $k > \dfrac{10}{p}$,

[1] В современной учебной и научной литературе данное правило обычно называют *локальной теоремой Муавра- Лапласа.*

или $k \cdot p > 10$). Тогда вероятность события W_l, состоящего в том, что в k независимых опытах событие A наступит ровно l раз, можно вычислить приближенно по формуле

$$\mathbf{P}(W_l) \approx \frac{1}{\sqrt{kp(1-p)}} \cdot \varphi(\bar{x}), \ \ \bar{x} = \frac{l - kp}{\sqrt{kp(1-p)}}, \tag{M}$$

где функция $\varphi(x)$ определяется так:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{Г}$$

Примечание 1. Формулу (M) будем называть *формулой Муавра*. Точность формулы повышается с ростом k.

Примечание 2. Функция (Г) называется *функцией Гаусса*[2]. Значения функции $\varphi(x)$ для различных значений аргумента $x = \bar{x} \in [0, 4]$ затабулированы — см. приложение 1 в конце курса.

Пример 4. Орудие стреляет в цель 100 раз. Вероятность поражения цели каждый раз одна и та же и равна $p = 0,15$. Определить вероятность ровно двадцати попаданий.

Решение. В данной задаче число опытов k, составляющих эксперимент, равно 100; требуемое число появлений события A (число попаданий) $l = 20$; вероятность $\mathbf{P}(A) = p = 0,15$. Число опытов достаточно велико, поскольку условие $k \cdot p = 100 \cdot 0,15 = 15 > 10$ выполняется. Значит, мы имеем право применить правило Муавра.

1) Вычислим величины, входящие в формулу (M):

$$\sqrt{kp(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0,15 \cdot 0,85} = \sqrt{12,75} \approx 3,571;$$

$$\bar{x} = \frac{l - kp}{\sqrt{kp(1-p)}} \approx \frac{20 - 100 \cdot 0,15}{3,571} = \frac{5}{3,571} \approx 1,400.$$

2) Найдем в таблице приложения 1 значение функции $\varphi(\bar{x}) \approx \varphi(1,4) \approx 0,150$.

3) Подставим найденные выше значения в формулу (M) и вычислим искомую вероятность

$$\mathbf{P}(W_{20}) \approx \frac{1}{3,571} \cdot 0,150 \approx 0,042.$$

Замечу, что вычисления по формуле Бернулли, проведенные с помощью ЭВМ, дают значение искомой вероятности, равное 0,0402. Погрешность, следовательно, меньше, чем 0,002.

Видите, как легко прошли вычисления. Это удалось потому, что главную трудность взяла на себя функция $\varphi(x)$, значения которой математикам пришлось вычислить раз и навсегда и занести в таблицу. В дальнейшем вы увидите, что она будет играть определяющую роль в развитии

[2]Гаусс Карл Фридрих (1777-1855) - величайший немецкий математик, "король математиков". Для его творчества характерна органическая связь теории и практики, широта проблематики, глубина решений, оказавших стимулирующее влияние на все дальнейшее развитие математики.

теории и в статистических расчетах. Сейчас она нужна нам для решения задачи Бернулли. Чтобы уверенно проводить эти расчеты и не допускать ошибок, полезно знать ее свойства.

Свойства функции Гаусса видны из ее графика (рис. 1): она положительная, четная, имеет один экстремум $\varphi(0) = 1/\sqrt{2\pi} \approx 0,4$, две точки перегиба $x_{1,2} = \pm 1$, горизонтальную асимптоту — ось OX, к которой очень быстро приближается.

Свойства эти можно установить, применив известный метод исследования функций с помощью производных. Но сейчас на это отвлекаться не будем, потому что ваша цель — научиться сознательно пользоваться таблицей значений функции $\varphi(x)$.

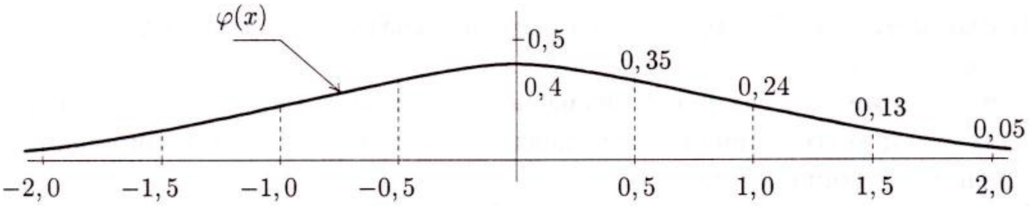


Рис. 1

О таблице. Заметьте, — таблица (приложение 1) составлена для 410 значений аргумента, идущих через одну сотую: $x_0 = 0,00$, $x_1 = 0,01$, $x_2 = 0,02$, $x_3 = 0,03$, ... , $x_{409} = 4,09$. Все эти значения находятся в пределах от 0 до 4,09. Если в расчетах получается аргумент $\bar{x} > 4,09$, то полагаете $\varphi(\bar{x}) = 0$, зная, что такие значения функции $\varphi(\bar{x})$ чрезвычайно малы (график очень быстро приближается к оси OX). К примеру, $\varphi(3) = 0,004$, $\varphi(4) = 0,0001$, $\varphi(5) = 0,0000015$.

Если в расчетах получается отрицательный аргумент x, к примеру, $\bar{x} = -1,32$, то ищите в таблице значение функции Гаусса от положительного аргумента $\varphi(1,32) = 0,16694$ и, пользуясь свойством четности, будете иметь $\varphi(-1,32) = \varphi(1,32) = 0,16694$.

О погрешности. Формула (M) дает приближенное значение вероятности — обозначим ее $\tilde{\mathbf{P}}(W_l)$. В таких случаях наука обязательно ставит вопрос об оценке ошибки, т.е. о величине разности $|\tilde{\mathbf{P}}(W_l) - \mathbf{P}(W_l)|$. Не слишком ли велика эта разность? Не приведет ли использование в статистических расчетах приближенного значения $\tilde{\mathbf{P}}(W_l)$ (вместо точного $\mathbf{P}(W_l)$) к недопустимому искажению истины, к неверным прогнозам?

Вопросы эти всегда сложны и мы, конечно, не будем касаться их строгого решения. Но общее представление о поведении ошибки иметь необходимо. Скажу об этом несколько слов.

Формулируя правило Муавра, я привел в скобках ориентир, разрешающий его применение: число опытов k и вероятность p должны быть такими, чтобы выполнялось неравенство $k \cdot p > 10$. Если, например, $p = 0,1$, то число опытов $k > 100$; если $p = 0,01$, то $k > 1000$. С уменьшением вероятности p формула Муавра дает все более худшие приближения и для компенсации ошибки надо значительно увеличивать число опытов k.

Причину, по которой это происходит, и почему хорошее приближение достигается при условии $k \cdot p > 10$, я смогу вам объяснить в конце курса (лекция 12, п. 4). Тогда же вы поймете, почему функция Гаусса позволяет вычислять Бернуллиевские вероятности, поймете смысл правила Муавра. А пока научитесь правильно его использовать.

Следует знать, что при очень малых p даже значения k, удовлетворяющие неравенству $k \cdot p > 10$, могут не обеспечивать достаточной точности и придется на порядок (если не больше) увеличивать число опытов. Такие задачи часто встречаются на практике. В следующем разделе лекции мы рассмотрим этот случай и выведем для него другую формулу.

Контроль 4. Статистические наблюдения за некоторым производством установили, что на каждые 200 изделий приходится примерно одно бракованное. Заказчик приобретает оптом 10000 изделий. Какова вероятность, что среди них окажется ровно 40 бракованных? Можно ли применить формулу Муавра? Рассчитайте приближенную вероятность события W_{40} и сравните ее с Бернуллиевской $\mathbf{P}(W_{40}) \approx 0,00206$. Велика ли ошибка?

Указание. Ситуация моделируется схемой Бернулли. "Простой" опыт — выпуск одного изделия, эксперимент — выпуск 10000 изделий, т.е. $k = 10000$. Событие A — выпуск бракованного изделия, — определите его статистическую вероятность. Искомое событие W_{40} происходит в том случае, если событие A появляется в эксперименте ровно $l = 40$ раз. Даю вам ориентир для вычислений — $\bar{x} = -1,42$, $\varphi(\bar{x}) \approx 0,1456$.

5. Приближенное решение при очень малых вероятностях

Формула Муавра дает хорошее решение задачи Бернулли, когда $k \cdot p > 10$, т. е. когда вероятность $p > \dfrac{10}{k}$. Если же вероятность p очень мала, а именно, если $p < \dfrac{10}{k}$ (т.е. $k \cdot p < 10$), рекомендуется пользоваться другой формулой.

Правило Пуассона[3]. Пусть вероятность p появления события A в каждом опыте постоянна и очень мала, а число k повторений опыта не слишком велико ($k < \dfrac{10}{p}$, или $k \cdot p < 10$). Тогда вероятность того, что в k независимых опытах событие A наступит ровно l раз, можно вычислить приближенно по формуле

$$\mathbf{P}(W_l) \approx \frac{a^l}{l!} \cdot e^{-a}, \quad a = k \cdot p. \tag{П}$$

Примечание. Формула (П) носит название *формулы Пуассона*. Правая ее часть есть *функция Пуассона*, зависящая от двух параметров — a и l. Значения этой функции для практически возможных значений параметров $0,1 \le a \le 9$ и $4 \le l \le 27$ затабулированы (см. приложение 2).

Пример 5. По цели производится 5000 выстрелов. Вероятность поражения цели каждым выстрелом равна 0,001. Какова вероятность а) всех промахов; б) ровно

[3]Пуассон Симеон Дени (1781-1840) — французский математик, механик и физик, почетный член Петербургской Академии Наук (1826), внес большой вклад в развитие теории вероятностей. Труды по математическому анализу, теории вероятностей, теоретической и небесной механике, теории упругости, математической физике.

одного попадания; в) двух и более попаданий?[4] Прежде чем решать задачу, попробуйте оценить искомые вероятности интуитивно — какая больше и намного ли? Мне кажется, что вторая больше первой, но ненамного, а третья меньше второй, — ведь много попаданий мало вероятны. Интересно, что покажет точный расчет?

Решение. Данная задача вписывается в схему Бернулли. Каждый выстрел — это опыт, попадание в цель — событие A. Опыт повторяется $k = 5000$ раз, при этом вероятность $\mathbf{P}(A) = p = 0,001$ не меняется от опыта к опыту. Требуется рассчитать вероятности событий W_0 (ни одного попадания), W_1 (ровно одно), $W_{l\geq 2}$ (не менее двух).

1) Первую вероятность можно получить, применяя теорему умножения:

$$\mathbf{P}(W_0) = (1-p)^k = 0,999^{5000} =?$$

Вычисления значительно упростятся, если использовать формулу Пуассона. Проверим, можно ли применить ее в условиях нашего примера. Вычислим параметр $a = k \cdot p = 0,001 \cdot 5000 = 5 < 10$. Применить формулу (П) можно,

$$\mathbf{P}(W_0) \approx \frac{5^0}{0!} \cdot e^{-5} = e^{-5} \approx 0,0067.$$

(Значение e^{-5} взято из таблицы значений функции e^{-x} — см. приложение 3).

2) Точное значение второй вероятности дает формула Бернулли:

$$\mathbf{P}(W_1) = C^1_{5000} \cdot 0,001^1 \cdot 0,999^{4999}.$$

Вновь выручает Пуассон:

$$\mathbf{P}(W_1) \approx \frac{5^1}{1!} \cdot e^{-5} = 5e^{-5} \approx 5 \cdot 0,0067 = 0,0335.$$

(Здесь я опять не прибегал к таблице значений функции Пуассона, хотя можно было сразу получить $\mathbf{P}(W_1) \approx 0,0337$ при $a = 5$, $l = 1$ — см. приложение 2).

3) Третья вероятность сводится к первым с помощью теоремы сложения: событие $W = W_0 + W_1 + W_{l\geq 2}$ достоверное, значит, $\mathbf{P}(W) = 1$; в силу несовместимости слагаемых, $\mathbf{P}(W_0) + \mathbf{P}(W_1) + \mathbf{P}(W_{l\geq 2}) = 1$; отсюда

$$\mathbf{P}(W_{l\geq 2}) = 1 - \mathbf{P}(W_0) - \mathbf{P}(W_1) \approx 1 - 0,0067 - 0,0335 = 0,9598.$$

Прогноз. Если произвести 1000 серий обстрелов, то примерно 7 раз не будет ни одного попадания, 34 раза — ровно одно попадание, 960 раз — не менее двух попаданий.

Вот и сравните теперь этот прогноз с нашим предположением: первые две вероятности, конечно, очень малы, но вторая в 5 раз больше первой; третье же событие оказывается практически достоверным.

---

[4] Реальное осуществление условий данного примера имело место в Великую Отечественную войну при попытках сбить самолет выстрелами из винтовок. Вероятность попадания одним выстрелом в уязвимые места самолета (летчик, бензобак и др.) очень мала. Однако если обстрел вело большое подразделение, то самолет нередко оказывался сбитым. В примере предлагается точно рассчитать подобные вероятности.

Контроль 5. Аппаратура состоит из 2000 элементов. Вероятность отказа любого элемента в течение гарантийного срока равна 0,001. Если гарантийный аппарат выходит из строя более двух раз, завод обязуется его заменить. Сделайте прогноз: сколько аппаратов из ста придется заменить? Ответ: 32.

6. Вывод формулы Пуассона

Не любопытно ли вам узнать, почему формула (П), решающая задачу Бернулли, содержит замечательное число e? Откуда возникает это число в вероятностной задаче? Почему некая закономерность природы опять описывается с помощью числа e?

Вспомните — число e появилось перед вами впервые, как странный, иррациональный предел некоторой функции (или последовательности):

$$e = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t.$$

Последнее равенство, согласно смыслу предела, означает, что с ростом t значения $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ неограниченно приближаются к числу e и, следовательно, при достаточно больших t справедливо приближенное равенство

$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \approx e.$$

Подобным образом получается и формула (П): при неограниченном росте числа опытов k значения $\mathbf{P}(W_l)$, которые дает формула Бернулли, приближаются сколь-угодно близко к значению, которое определяется правой частью формулы (П). Вы можете проследить за этим процессом, если заставите себя понять нижеследующие, довольно абстрактные рассуждения.

Теорема Пуассона. Пусть имеется бесконечная последовательность серий опытов, в каждом из которых может появиться или не появиться некоторое событие A, причем его вероятность $\mathbf{P}(A)$ убывает от серии к серии следующим образом:

1-я серия состоит из одного опыта и $\mathbf{P}(A) = p_1 = a$;

2-я серия состоит из двух опытов и $\mathbf{P}(A) = p_2 = a/2$;

3-я серия состоит из трех опытов и $\mathbf{P}(A) = p_3 = a/3$;

. . . .

k-я серия состоит из k опытов и $\mathbf{P}(A) = p_k = a/k$;

. . . .

Пусть l фиксировано, $l \le k$ и W_l — событие в k-й серии, состоящее в том, что событие A появляется в этой серии ровно l раз. Тогда справедливо предельное равенство:

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{P}(W_l) = \frac{a^l}{l!}\cdot e^{-a}, \text{ где } a = p_k\cdot k.$$

Доказательство. 1) Вероятность $\mathbf{P}(W_l)$ определяется точно формулой (Б). Учтем, что в k-той серии $\mathbf{P}(A) = p_k = \frac{a}{k}$, и запишем

$$\mathbf{P}(W_l) = C_k^l\cdot p_k^l\cdot(1-p_k)^{k-l} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdot\dots\cdot(k-l+1)}{l!}\cdot\frac{a^l}{k^l}\cdot\left(1-\frac{a}{k}\right)^k\cdot\left(1-\frac{a}{k}\right)^{-l}.$$

2) Поменяем местами знаменатели первых двух дробей, тогда у первой дроби в числителе и в знаменателе окажется одинаковое число множителей (по l штук) и можно будет разбить ее в произведение l дробей так:

$$\mathbf{P}(W_l) = \frac{k}{k} \cdot \frac{k-2}{k} \cdot \ldots \cdot \frac{k-l+1}{k} \cdot \frac{a^l}{l!} \cdot \left(1-\frac{a}{k}\right)^k \cdot \left(1-\frac{a}{k}\right)^{-l}.$$

3) У первых l множителей произведем почленное деление, получим:

$$\mathbf{P}(W_l) = \left(1-\frac{1}{k}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{k}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{l-l}{k}\right) \cdot \left(\frac{a^l}{l!}\right) \cdot \left(1-\frac{a}{k}\right)^k \cdot \left(1-\frac{a}{k}\right)^{-l}.$$

4) Устремим $k \to \infty$ и перейдем к пределу, используя теорему о пределе произведения и учитывая, что множитель $\left(\frac{a^l}{l!}\right)$ есть константа:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(W_l) = \frac{a^l}{l!} \cdot \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right) \cdot \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{2}{k}\right) \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{l-1}{k}\right) \cdot \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{a}{k}\right)^k \cdot \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{a}{k}\right)^{-1}.$$

5) Поскольку l не меняется, когда $k \to \infty$, то очевидно, что в правой части все пределы, за исключением одного, равны единице, следовательно

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(W_l) = \frac{a^l}{l!} \cdot \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{a}{k}\right)^k = \frac{a^l}{l!} \cdot \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{k}{a}\right)}\right)^{\left(-\frac{k}{a}\right)\cdot(-a)} =$$

$$= \frac{a^l}{l!} \cdot [\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t]^{-a} = \frac{a^l}{l!} \cdot e^{-a}.$$

Примечание. В доказательстве предполагается, что $a < 1$, ибо, по условию теоремы, первая вероятность равна $p_1 = a$. Однако доказательство проходит, если условие $k \cdot p_k = a = const$ выполняется не для всех k, а начиная с некоторого момента $k = k_0$. Поэтому в формуле (П) параметр a может быть и больше единицы. Но не больше десяти, ибо в противном случае формула приводит к значительной ошибке. В сложную проблему оценки ошибки мы не можем вдаваться.

Контроль 6. Измените формулировку теоремы Пуассона так, чтобы $a = 8$.

Указание. Речь о теореме, а не о правиле Пуассона. В теореме первая вероятность $p_1 = a$, что при $a = 8$ не имеет смысла. Вдумайтесь в примечание.

7. Вторая задача

При очень большом числе опытов k задача Бернулли зачастую становится практически не интересной и возникает другая задача. Приведу пример.

Пример 6. Радиоаппаратура состоит из 2000 элементов. Вероятность отказа одного элемента в течение года равна 0,001. Элементы отказывают независимо друг от друга. Какова вероятность того, что в течение года выйдут из строя: а) ровно 3 элемента; б) не менее трех: в) от трех до десяти элементов?

Согласитесь, что производителю более интересны вторые два вопроса, нежели первый, тем более, если в гарантийном обязательстве стоит условие замены аппарата в случаях более двух поломок. Для покупателя тоже не существенно, сколько — ровно шесть или ровно семь поломок должно случиться с его покупкой. Его интересует другой вопрос — редко или часто они происходят? И покупателю, и производителю надо знать степень *надежности* аппаратуры в целом. Это уже другая задача, она может быть решена на основе формулы Бернулли с использованием приближенных формул.

Решение. 1) Первый вопрос приводит к схеме Бернулли: работа каждого элемента аппарата в течение года — это опыт, выход элемента из строя — событие A, вероятность которого $\mathbf{P}(A) = p = 0,001$ одинакова для всех элементов; работу аппарата в течение года можно интерпретировать, как повторение опыта $k = 2000$ раз; нас интересует вероятность события W_3, которое произойдет в серии из 2000 опытов, если за год выйдут из строя ровно три элемента.

Запишем формулу (Б):

$$\mathbf{P}(W_3) = C_{2000}^3 \cdot 0,001^3 \cdot 0,999^{997}.$$

Сложные вычисления придется заменить приближенными. Выясним, какую формулу следует применить — Муавра или Пуассона. Вычисляем параметр $a = k \cdot p = 2000 \cdot 0,001 = 2$, получаем $a = 2 < 10$. Применяем формулу (П), используя таблицу значений функции Пуассона при $a = 2$ и $l = 3$:

$$\mathbf{P}(W_3) \approx \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} \approx 0,1804.$$

2) Вероятность не менее трех отказов — событие $W_{l\geq 3}$ — можно найти так же, как мы нашли третью вероятность в примере 5:

$$\mathbf{P}(W_{l\geq 3}) = 1 - \mathbf{P}(W_0) + \mathbf{P}(W_1) + \mathbf{P}(W_2) \approx 1 - \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} + \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2} + \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2}.$$

Учтите, что $0! = 1$. Заглянув опять в таблицу приложения 2, вычисляем:

$$\mathbf{P}(W_{l\geq 3}) = 1 - 0,1353 - 0,2707 - 0,2707 = 0,3233.$$

3) Вероятность события $W_{3;10}$ (число отказов попадает в промежуток $[3; 10]$) можно вычислить многократным применением формулы Пуассона, используя теорему сложения:

$$\mathbf{P}(W_{3;10}) = \mathbf{P}(W_3) + \mathbf{P}(W_4) + \mathbf{P}(W_5) + \cdots + \mathbf{P}(W_{10}) \approx \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} + \frac{2^4}{4!} \cdot e^{-2} + \cdots + \frac{2^{10}}{10!} \cdot e^{-2}.$$

Проводим вычисления, заглядывая в приложение 2:

$$\mathbf{P}(W_{3;10}) \approx 0,1804 + 0,0902 + 0,0361 + 0,0120 + 0,0037 + 0,0009 + 0,0002 + 0,0000 = 0,3235.$$

Прогноз. Из партии в 1000 проданных аппаратов примерно 180 аппаратов выйдут из строя 3 раза за год, а около 320 аппаратов потребуют ремонта более двух раз. Многовато. Придется повышать надежность комплектующих.

Замечание. Заметьте — в строке вычислений последнее слагаемое равно нулю, это значит, что практически ни один аппарат не сломается более девяти раз. Производитель может изменить свои гарантийные обязательства и заменять аппарат в случае десяти поломок, но тогда, очевидно, его продукцию никто не станет покупать. Придется совершенствовать технологию. И перед руководителем производства возникает задача: какова должна быть надежность элементов, чтобы в течение года пришлось заменять не более, скажем, 5% проданных аппаратов (50 из тысячи). И придется вспоминать теорию вероятностей, которую он плохо изучал в вузе. Если, конечно, он вообще поймет связь производственных проблем с проблемами теории вероятностей и не будет слепо полагаться на рекламу.

Вторая задача Бернулли. Опыт повторяется k раз и каждый раз может появиться или нет событие A с неизменной вероятностью p. Определить вероятность события $W_{\alpha;\beta}$, которое произойдет, если число l появлений события A попадет в заданный промежуток $[\alpha;\beta]$.

Выше поставлена обобщенно задача, которую мы только что решали, когда вычисляли вероятности событий $W_{l\geq 3}$ и $W_{3;10}$ ($W_{l\geq 3}$ в новых обозначениях есть событие $W_{3;2000}$ — число отказов попадает в промежуток $[3;2000]$).

Метод, которым мы решали эту задачу, состоял, в сущности, в многократном применении формулы Бернулли и затем в замене ее приближенной формулой Пуассона. Если $k\cdot p>10$, придется использовать формулу Муавра. В простых задачах, если p не очень мало и $k\cdot p\ll 10$, можно ограничиться формулой Бернулли. Проверьте себя на следующем упражнении.

Контроль 7. Игральная кость подбрасывается 5 раз. Какова вероятность появления а) ровно двух шестерок; б) не менее двух; в) от двух до четырех шестерок? Как вам кажется, увеличится или уменьшится вероятность последнего события $W_{2;4}$, если число подбрасываний довести до 60? Проверьте свое предположение точным расчетом (формула (М)).

Ответ: 0,16; 0,4; 0,19.

8. Правило Муавра-Лапласа

Решение второй задачи Бернулли методом многократного применения формулы (Б) может приводить к очень длинным вычислениям, т.к. если промежуток $[\alpha;\beta]$ длинный, то придется складывать очень много слагаемых. Есть другой метод.

Правило Муавра — Лапласа[5]. Пусть вероятность p появления случайного события A в каждом опыте постоянна, а число k повторений опыта достаточно велико ($k>\frac{10}{p}$, или $k\cdot p>10$). Тогда вероятность события $W_{\alpha;\beta}$, состоящего в том, что после k независимых опытов число l появлений события A попадает в промежуток $[\alpha;\beta]$, можно приближенно вычислить по формуле

$$\mathbf{P}(W_{\alpha;\beta})=\Phi\left(\frac{\beta-kp}{\sqrt{kp(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-kp}{\sqrt{kp(1-p)}}\right), \qquad \text{(М—Л)}$$

$$\text{где } \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad \text{(Л)}$$

[5]Сам Муавр вывел данное правило для частного случая, когда интервал $[\alpha;\beta]$ симметричен относительно kp, т. е. имеет вид $[kp-\delta;\ kp+\delta]$, — в этом случае формула (М—Л) упрощается. Следует иметь в виду, что в научной литературе это правило обычно называют *интегральной теоремой Муавра-Лапласа.*

Примечание. Функцию $\Phi(x)$ называют *функцией Лапласа*[6], она не элементарная, ее значения вычисляются приближенно (см приложение 3).

О функции Лапласа. Обратите внимание на связь функции Лапласа (Л) с функцией Гаусса (Г) — функция $\varphi(x)$ стоит под знаком интеграла, задающего функцию $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt \qquad (Л').$$

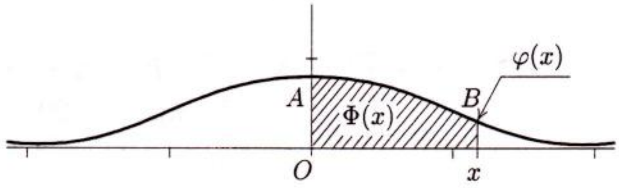


Рис. 2

Интеграл этот — интеграл с переменным верхним пределом. Его геометрическое истолкование — переменная площадь $\Phi(x) = S(x) = S_{OABx}$ (рис. 2): меняется верхний предел x — меняется площадь.

Из геометрического истолкования функции Лапласа почти очевидны ее **свойства**: она нечетная ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$), возрастающая, имеет один перегиб в точке $x = 0$, и две горизонтальные асимптоты — $y = 0,5$ и $y = -0,5$, к которым очень быстро приближается (рис. 3). Свойства эти не трудно установить строго формальными вычислениями с использованием производных и пределов, вы даже можете сделать это сами.

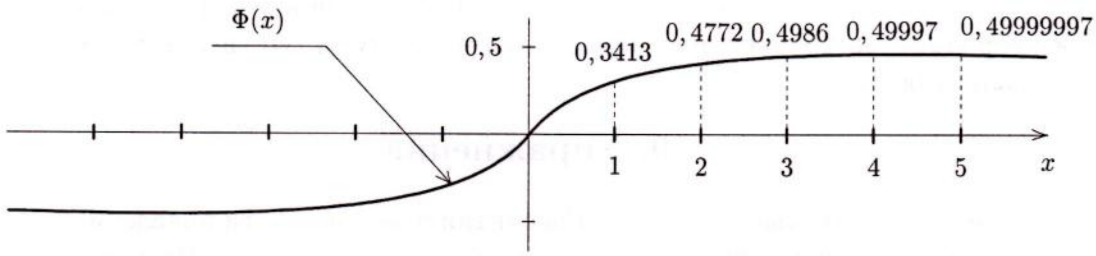


Рис. 3

[6]Лаплас Пьер Симон (1749-1827) — французский астроном, физик, математик, почетный член Петербургской Академии Наук (1802). В связи с занятиями астрономией, он пришел к вопросам теории ошибок наблюдений и развил вероятностные методы их оценки. Автор классических трудов — "Аналитическая теория вероятностей" и "Трактат о небесной механике". Много трудов по дифференциальным уравнениям, математической физике, теории капиллярности, теплоте, акустике, геодезии и др.

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)$ составлена для 410 значений аргумента $x \in [0; 4,09]$ через одну сотую: $x_0 = 0,00$; $x_1 = 0,01$; ... ; $x_{409} = 4,09$. Из свойств функции Φ следует, что при $x > 4$ следует принимать $\Phi(x) = 0,5$, а при $x < 0$ использовать нечетность $\Phi(x) = -\Phi(-x)$. Теперь вы не будете недоумевать, если придется искать и не находить в таблице $\Phi(7)$ или $\Phi(-2)$.

Проиллюстрируем правило (М-Л) в условиях примера 4.

Пример 7. Орудие стреляет в цель 100 раз, вероятность поражения цели каждый раз одна и та же $p = 0,15$. Рассчитать вероятность не более 20 попаданий.

Решение. Перед нами вторая задача Бернулли — надо найти $\mathbf{P}(W_{0;20})$. Применим второе правило Муавра, поскольку $k \cdot p = 15 > 10$.

Вычислим последовательно величины, входящие в формулу (М-Л):

$$kp(1-p) = 15 \cdot 0,85 = 12,75; \qquad \sqrt{kp(1-p)} = \sqrt{12,75} \approx 3,57;$$
$$\frac{\alpha - kp}{\sqrt{kp(1-p)}} \approx \frac{0-15}{3,57} = -\frac{15}{3,57} \approx -4,20; \quad \frac{\beta - kp}{\sqrt{kp(1-p)}} = \frac{20-15}{3,57} = \frac{5}{3,57} \approx 1,40.$$

Находим в приложении 3 значения функции Лапласа: $\Phi(1,40) \approx 0,4192$ и $\Phi(-4,20) = -\Phi(4,20) \approx -0,5$ (заметьте — этого значения в таблице нет, но мы-то знаем, что оно такое!). Подставляем найденные значения в формулу (М-Л) и окончательно получаем:

$$\mathbf{P}(W_{0;20}) \approx \Phi(1,40) - \Phi(4,20) \approx 0,4192 - (-0,5) = 0,9192.$$

Прогноз. Если провести 10 серий, в каждой по 100 выстрелов, то лишь в одной серии можно ожидать более двадцати попаданий, да и то, не всегда.

Итак, более двадцати попаданий будет очень редко. В связи с этим результатом возникает новый, практически важный вопрос: каков промежуток $[0; \beta]$, из которого не будет выходить число l попаданий с практической достоверностью, — например, с вероятностью 0,99 или 0,999? Это обратная задача. Ее мы будем решать в разделе упражнений. Интересен также вопрос: каково наиболее вероятное число попаданий?

Контроль 8. В условиях контрольного упражнения 7, рассчитайте вероятность события $W_{2;4}$ с помощью формулы (М-Л). Оцените ошибку, для чего рассчитайте ту же вероятность трехкратным применением формулы (Б) (вычисления проведите на калькуляторе).

9. Упражнения

1. Монета подбрасывается 3 раза. Рассчитайте вероятности появления: а) ровно одного герба; б) ровно двух гербов; в) не более двух гербов. Расчет проведите двумя способами: а) непосредственно используя теоремы сложения и умножения с обоснованием их применения; б) используя формулу Бернулли с обоснованием применимости схемы Бернулли.

Ответ: 3/8; 3/8; 7/8.

2. Монета подбрасывается 4 раза. Рассчитайте вероятности появления: а) ровно трех гербов; б) не менее трех гербов. Как и в предыдущем упражнении, расчет проведите двумя способами.

3. Монета подбрасывается 30 раз. Рассчитайте вероятности появления: а) ровно 10 гербов; б) от 10 до 20 гербов. Обоснуйте применимость формул.

4. Монета подбрасывается 30 раз. Как вы думаете, — какова вероятность появления а) одинакового числа гербов и решек; б) не одинакового? Проведите точный расчет. Если ваше предположение окажется ошибочным, то поймите — в чем причина ошибки?

5. Игральная кость подбрасывается 3 раза. Какова вероятность появления: а) ровно двух шестерок; б) не менее двух шестерок?

6. Что более вероятно: получить **ровно** две шестерки а) при трех подбрасываниях или б) при шести подбрасываниях игральной кости? Выскажите предположение, оправдайте его и проведите точный расчет. В чем причина вашей ошибки (если, конечно, расчет обнаружит наличие ошибки)?

7. Два равных по силе шахматиста играют несколько партий. Что вероятнее: выиграть одну партию из двух или две партии из четырех? (Ничьи не принимаются во внимание).

8. Что вероятнее в условиях предыдущего упражнения: выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти?

Указание. $1 - [\mathbf{P}_4(0) + \mathbf{P}_4(1)] = 11/16$; $\mathbf{P}_5(3) + \mathbf{P}_5(4) + \mathbf{P}_5(5) = 8/16$.

9. Орудие стреляет в цель 10 раз. Вероятность поражения цели не меняется от выстрела к выстрелу и равна 0,3. Какова вероятность а) ровно двух попаданий; б) не более двух попаданий? (При расчете используйте калькулятор).

10. Сорок орудий производят залп по цели. Вероятность поражения цели каждым орудием одинакова и равна 0,3. Каковы вероятности: а) ровно двух попаданий: б) ровно десяти попаданий; в) от двух до десяти попаданий?

11. Статистические наблюдения выявили следующую закономерность: в каждой тысяче новорожденных примерно 520 мальчиков и 480 девочек. Семья хочет иметь троих детей. Какова вероятность, что у нее будут а) все мальчики; б) два мальчика и одна девочка; в) ровно один мальчик, г) все девочки?

Ответ: 0,14; 0,39; 0,36; 0,11.

12. В условиях предыдущей задачи рассчитайте вероятность того, что среди тысячи новорожденных окажется: а) ровно 480 девочек; б) от 460 до 500 девочек. Предварительно выскажите и обоснуйте свое предположение: какая вероятность будет в первом случае — большая или маленькая? Если предположение не оправдается, объясните причину.

Ответ: а) 0,024.

13. В 1990 г. в Москве родилось 94,5 тыс. детей, из них 48,8 тыс. мальчиков, а в 1997 г. — 67,5 тыс. детей, из них 34,6 тыс. мальчиков. Определите статистическую вероятность рождения мальчика в Москве 90-х годов. На этой основе сделайте прогноз: сколько семей из тысячи трехдетных семей имели а) трех мальчиков; б) двух мальчиков и одну девочку?

14. Вратарь парирует, в среднем, 30% "пенальти" (одиннадцатиметровых ударов). Какова вероятность, что в серии послематчевых "пенальти", состоящей из пяти ударов, вратарь возьмет: а) два мяча; б) не менее двух; в) хотя бы один?

Ответ: 0,309; 0,471; 0,997.

15. Вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Институт приобрел партию из шести телевизоров. Какова вероятность того, что а) половина телевизоров потребует ремонта; б) не менее половины; в) хотя бы один; г) все?

Ответ: 0,08; 0,1; 0,74; 0,000064.

16. В партии очень большого объема содержится 5% некачественных изделий. На контроль берутся 5 изделий (случайная выборка) и партия принимается, если в выборке будет обнаружено не более одного некачественного изделия. Какова вероятность, что партия будет принята?

Отв: 0,972.

17. Вероятность выхода из строя мотора самолета равна 0,05. Самолет может продолжать полет, если работает не менее половины его моторов. На каком самолете безопаснее лететь — на двухмоторном или на трехмоторном?

Ответ: 0,997; 0,992.

18. В урне 5 шаров, из них 3 белых и 2 черных. Эксперимент состоит в том, что из урны вынимается один шар четыре раза подряд, причем, перед каждым следующим выниманием вынутый до этого шар возвращается обратно в урну (выборка с возвращением). Какова вероятность, что в результате эксперимента появится а) равное количество белых и чёрных шаров (в любом порядке); б) не менее двух белых?

Ответ: 0,34; 0,81.

19. В условиях предыдущей задачи измените выборку с возвращением на выборку без возвращения и рассчитайте вероятности тех же событий. Можно ли в этой ситуации применять формулу Бернулли? Почему?

20. Центральная радиостанция поддерживает связь с пятью периферийными станциями. Связь время от времени прерывается из-за атмосферных помех. Можно считать, что разрыв связи с каждой станцией происходит независимо от остальных, в силу отдаленности станций друг от друга. В среднем, из десяти часов работы центральной станции перерыв связи с каждой периферийной станцией длится около двух часов. Рассчитать вероятность того, что в некоторый момент времени будет возможно установить связь а) ровно с тремя станциями; б) не менее чем с тремя; в) со всеми; г) ни с одной.

Указание. Задача реальная и вписывается в схему Бернулли. "Простой" опыт состоит в попытке установления связи с какой-нибудь одной станцией в некоторый момент времени. В этом опыте возможны события: A — связь установлена, $\bar{A}$ — связи нет, причем, $p(A) = 0,8$. Попытку установления связи с другой станцией в этот же момент времени можно рассматривать, как повторение "простого" опыта, ибо условия опыта не меняются — вероятность установления связи с новой станцией та же.

Ответ: 0,2; 0,94; 0,33; 0,00032.

21. Автоматический станок производит детали. Статистическая вероятность появления нестандартной детали равна 0,008. Рассчитать вероятность того, что в партии, содержащей 1000 деталей, окажется нестандартных: а) ровно восемь; б) менее восьми.

Ответ: 0,1396; 0,4530.

22. Цех предприятия выпускает сверла. Статистика показывает, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Рассчитать вероятность того, что в коробке а) не окажется бракованных сверл; б) окажется не более трех бракованных.

23. Некоему покупателю необходимо приобрести 100 качественных сверл. Из опыта он знает, что примерно 2% приобретаемых сверл быстро ломаются. Сколько он должен купить сверл, чтобы быть уверенным с вероятностью не менее 0,9, что среди них будет не менее 100 качественных сверл?

24. Завод имеет 2400 агрегатов, в каждый из которых входит деталь, часто выходящая из строя. Замечено, что на каждом агрегате эта деталь ломается примерно 5 раз в месяц. Отдел снабжения заготовил 400 запасных деталей. Рассчитать вероятность того, что будет обеспечена бесперебойная работа всех агрегатов в течение месяца. Рассчитать, сколько деталей нужно иметь в запасе, чтобы бесперебойная работа была гарантирована с вероятностью 0,9?

25. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6. Найти интервал, который достоверно покроет любое число попаданий, возникающее после 600 выстрелов. (Достоверным принято считать событие, вероятность которого 0,993).

Указание. В подобных задачах обычно ищется симметричный интервал вида $(kp-m;\ kp+m)$ и неизвестным является m.

Ответ: (360-32; 360+32).

26. Планируется эксперимент, состоящий из большого числа независимых опытов. В каждом опыте ожидается появление некоторого события A ("успех") с вероятностью $p = 0,8$. В результате эксперимента необходимо получить не менее 75 "успехов". Сколько повторений опыта k следует планировать, чтобы гарантировать требуемое число "успехов" с вероятностью 0,9?

Указание. Примените правило Муавра-Лапласа к промежутку $[75; k]$, поставив в левую часть этой формулы известную вероятность 0,9; затем замените $\Phi(\sqrt{k}/2)$ (объясните, почему это можно сделать); по таблице приложения 3 найдите аргумент функции Φ, соответствующий значению 0,4; решите полученное уравнение относительно $\sqrt{k}$, получите $\sqrt{k} = 10$, откуда $k = 100$.

27. Игральную кость бросают 80 раз. Найти приближенно границы, в которых число выпадений шестерки будет заключено с вероятностью 0,9973.

Ответ: $(kp - 10;\ kp + 10)$ — от 4 до 23.

28. Монета подбрасывается 100 раз. Рассчитать вероятность того, что число появлений "герба" попадет в промежуток $[45;\ 55]$. Опишите эксперимент, которым можно подтвердить прогноз.

Ответ: $2\Phi(1) = 0,6826$.

29. Монета подбрасывается 100 раз. Найдите промежуток, в который с вероятностью 0,99 попадет число "гербов".

30. На прядильной фабрике каждая работница обслуживает несколько сотен веретен. При вращении веретена пряжа иногда рвется. Руководству необходимо знать, как часто могут происходить обрывы при тех или иных условиях работы (сорт пряжи, скорость веретен и пр.). Рассчитайте вероятность того, что за смену у одной работницы произойдет не более 10 обрывов, если она обслуживает 800 веретен и вероятность обрыва на каждом равна 0,005.

Ответ: 0,9972.

31. Замечено, что при социологических опросах из каждых 10 человек двое могут дать неискренний ответ. Проведено 22500 опросов. Найдите вероятность того, что неискренних ответов не более 10%. Какой процент неискренних ответов можно ожидать с вероятностью 0,9?

32. Театр вмещает 1000 зрителей и имеет два входа, каждый из которых ведет к своему гардеробу. Сколько мест должно быть в каждом гардеробе, чтобы в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в том гардеробе, в который они зашли? Рассмотрите два варианта: а) зрители приходят поодиночке; б) зрители приходят парами. Предположите, что каждый зритель может выбрать тот или иной вход с равными вероятностями.

Ответ: 541; 558.

33. В поселке 2500 жителей. Каждый из них ездит на поезде в город примерно 6 раз в месяц. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся не чаще одного раза в 100 дней? Поезд ходит регулярно один раз в сутки. Предположите, что каждый житель выбирает дни поездки случайным образом, независимо от других.

Ответ: 547.

34. **Проблема Джона Смита**. В 1693 г. некий Джон Смит поставил перед учеными вопрос: одинаковы ли шансы на успех у трех человек, если первому надо получить хотя бы одну шестерку при бросании игральной кости 6 раз, второму — не менее двух шестерок при 12 бросаниях, третьему — не менее трех шестерок при 18 бросаниях. Задача эта была решена великим Ньютоном и малоизвестным Толлетом. Решите ее и вы.

Ответ: 0,6651; 0,6187; 0,5973.

Лекция 5. Дискретные случайные величины (основные понятия)

До сих пор мы занимались решением задачи — определить вероятность случайного события. Основными были понятия события и вероятности. Теперь перейдём на следующую ступень обобщения — будем рассматривать в опыте не отдельные события, а некоторый спектр возможных событий, как единое целое. Естественность и необходимость обобщения станут ясными из примеров.

Цели занятия: 1) освоиться с понятиями случайной величины и дискретной случайной величины, со способом её математического описания; 2) познакомиться с двумя её числовыми характеристиками, понять их смысл. Параллельно повторим все, изученные ранее, методы расчёта вероятностей.

1. Пример, приводящий к случайной величине

Теория вероятностей начиналась с вопросов, которые возникали в практике азартных игр.

Пример 1. Игра состоит в том, что подбрасываются случайным образом две однородные игральные кости и подсчитывается сумма выпавших очков. Предварительно игроки делают денежные взносы — каждый ставит на определённую возможную сумму очков. Угадавший получает весь выигрыш. На какую сумму поставите вы?

Может быть, вы скажете — на любую, ведь любая сумма от 2 до 12 возможна и случайна. И в процессе игры будете ставить на разные суммы. Но вскоре заметите, что одни суммы появляются чаще, другие — реже, и станете ставить на те суммы, которые появляются чаще. Но какая сумма появится чаще всех? Теперь вы вспомните, что частота $\mathbf{P}^*$ появления события может быть предсказана по его вероятности $\mathbf{P}$, а вероятность можно рассчитать до опыта. Давайте и проделаем эти расчёты.

Решение. Нас интересуют вероятности следующих одиннадцати событий:

A_1 — сумма выпавших очков равна 2;
A_2 — сумма выпавших очков равна 3;
. . . .
A_{11} — сумма выпавших очков равна 12.

Согласно классическому методу, надо проделать следующее:

1) выписать полную группу всех исходов опыта и посчитать их число n;

2) посчитать число m_i исходов, благоприятствующих событию A_i;

3) поделить m_i на n.

Элементарными событиями (исходами) данного опыта будут всевозможные комбинации пар очков. Группу всех исходов удобно записать в виде следующей таблицы.

Таблица 1

$1+1$	$2+1$	$3+1$	$4+1$	$5+1$	$6+1$
$1+2$	$2+2$	$3+2$	$4+2$	$5+2$	$6+2$
$1+3$	$2+3$	$3+3$	$4+3$	$5+3$	$6+3$
$1+4$	$2+4$	$3+4$	$4+4$	$5+4$	$6+4$
$1+5$	$2+5$	$3+5$	$4+5$	$5+5$	$6+5$
$1+6$	$2+6$	$3+6$	$4+6$	$5+6$	$6+6$

Из таблицы видно, что число всех исходов $n = 6+6+6+6+6+6 = 6 \cdot 6 = 36$. Число исходов, благоприятствующих событиям A_i, подсчитывается по диагоналям таблицы 1: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $\ldots$, $m_6 = 6$, $m_7 = 5$, $\ldots$, $m_{11} = 1$. После этого вычисляются вероятности:

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{36},\ \mathbf{P}(A_2) = \frac{2}{36},\ \ldots,\ \mathbf{P}(A_6) = \frac{6}{36},\ \mathbf{P}(A_7) = \frac{5}{36},\ \ldots,\ \mathbf{P}(A_{12}) = \frac{1}{36}.$$

Полученные результаты сведём в следующую таблицу:

Таблица 2

Суммы очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятности	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

Итак, на какую сумму вы теперь поставите? Ответ ясен — на 7, всегда только на 7.

Таблица 2 содержит *полную* информацию о всех возможных результатах игры. Поэтому с её помощью можно решать многие другие задачи.

Прогнозы. Ставя на 7, вы будете выигрывать, примерно, шесть раз в тридцати шести партиях (каждую шестую партию). Если же кто-то решит ставить на 12, он будет выигрывать, примерно один раз в тридцати шести партиях, его тактика в шесть раз хуже.

Представьте, что в игре у вас есть двое сообщников. Если вы поставите на 6, 7 и 8, то вероятность выигрыша для вашей компании резко возрастёт. Дополнительный расчёт с помощью теоремы сложения даёт

$$\mathsf{P}(A_5 + A_6 + A_7) = 5/36 + 6/36 + 5/36 = 16/36\,.$$

Примерно в половине партий сумма очков попадает в промежуток $[6; 8]$, и значит, примерно каждый второй выигрыш будет у вас в кармане.

Посмотрите ещё раз на таблицу 2. Вы, конечно, заметили, что вероятности сначала возрастают, потом убывают. Таблица показывает, как вероятности распределяются среди всех возможных значений сумм очков. Поэтому её называют *рядом распределения вероятностей.*

Информацию, заключённую в таблице 2, можно представить в иной, наглядной форме (рис. 1). Вы, конечно, легко разберётесь в том, как построена ломаная на рис. 1. Эта ломаная называется *многоугольником распределения (вероятностей).*

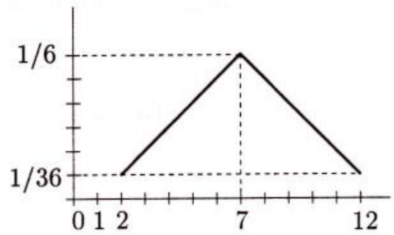


Рис. 1

Вывод. Для решения разнообразных задач полезно знать не только вероятности отдельных событий, а распределение вероятностей на полной группе событий данного опыта.

Рассмотренный пример приведёт нас к понятию *случайной величины*, которому посвящен следующий раздел лекции.

Контроль 1. Несколько студентов, считающих себя знатоками математики (умеют не только складывать, но и вычитать целые числа), решили усложнить игру. Они стали считать не сумму, а разность очков при подбрасывании двух игральных костей. Спрашивается: на какую разность следует делать ставку?

Указание. Введите полную группу событий (перечислите все значения, которые может принимать разность); вычислите вероятности этих значений; составьте ряд распределения и постройте многоугольник распределения. Изменилось ли распределение вероятностей по сравнению с таблицей 2?

2. Понятие случайной величины (с.в.)

Предварительно следует остановиться на понятии *«величина»*. Что это такое?

Под *переменной величиной* (или просто *величиной*) математики понимают «меняющееся количество», которое в каком-либо процессе (опыте) может принимать различные числовые значения.

К примеру, если нагревать замкнутый объём газа, его давление будет расти. Здесь две переменные величины — температура T° и давление P. Эти величины не случайные, ибо каждому значению температуры $t = t_0$ соответствует одно определённое значение давления $p = p_0$. При любом повторении опыта (тот же газ, тот же объём) значению t_0 будет отвечать то же самое значение[7] p_0. Такие величины называют *детерминированными*.

Если результат опыта не предопределён однозначно и может меняться от опыта к опыту, — это признак *случайной* величины. Так было в примере 1.

Вернёмся к этому примеру и обратим внимание, прежде всего, на его отличие от задач, которые решали раньше.

Первое отличие очевидно: раньше мы рассчитывали вероятности отдельных событий, теперь — вероятности событий, образующих некую группу $\{A_1, A_2, \ldots, A_{11}\}$. Свойства группы уточнять пока не будем.

Вторая особенность новой задачи менее заметна. Она состоит в том, что с каждым событием группы связывается, согласно условию задачи, определённое число: с событием A_1 — число $x_1 = 2$, с A_2 — число $x_2 = 3$, и т.д.

Эта связь событий с числами позволяет изменить терминологию и говорить, например, что в результате опыта появилось не событие A_1, а число (значение) $x_1 = 2$, не событие A_2, а число $x_2 = 3$, и т.д. Вспомните — мы так и говорили: в результате подбрасывания двух игральных костей появилась сумма очков, равная двум (или трём, четырём и т.д.).

Значения x_1, x_2, ... меняются от опыта к опыту и представляют собой, следовательно, переменную величину. Значения эти появляются в опыте случайным образом (предсказать заранее и однозначно, какое значение появится, невозможно). Значит, перед нами случайная величина.

Приходим к следующему определению.

Определение 1. *Случайная величина* (кратко — с.в.) — это переменная величина, связанная с конкретным опытом, значения которой определяются случайными исходами этого опыта.

Условимся обозначать с.в. большими буквами из второй половины латинского алфавита — X, Y, Z, T, S, ... (буквами из первой половины алфавита мы обозначали раньше события — A, B, C, ...). Значения с.в. будем обозначать соответствующими малыми буквами — x, y, z, ... Изменим и обозначения событий: если в результате опыта появляется значение с.в. X, равное x_0, то это событие будем

[7]Это утверждение не абсолютно верное. Во-первых, значения t и p определяются в опыте с помощью измерений, которые всегда дают некоторую ошибку. Во-вторых, нельзя повторить опыт совершенно идентично. Однако в силу малости колебаний значений t и p (при повторении опыта) этими колебаниями можно пренебречь.

обозначать так: $(X = x_0)$. Разумеется, допустимы и иные обозначения случайных величин, — в дальнейшем вам встретятся с.в. K_∞, $S_{\min}$, T_M и т.п.

Случайную величину в примере 1 обозначим X_1. Событие A_1 (сумма очков 2) примет теперь иное обозначение $A_1 = (X_1 = 2)$, событие $A_2 = (X_1 = 3)$, и т.д. Случайную величину, возникшую в контроле 1, обозначим Y_1.

Ещё раз обращаю ваше внимание на три характерных особенности с.в., отражённых в определении:

1) каждая с.в. связана с каким-то *опытом*;

2) в результате опыта она может принимать *разные* значения;

3) значения эти *случайны*. Запомните это.

Как возникают с.в.? Случайные величины возникают в процессе решения задач и определяются практическими целями этих задач. Так, в примере 1 с.в. X_1 возникла из условий опыта (сумма очков) и задачи отыскания той суммы, которая при повторении опыта появляется наиболее часто. При изменении условий игры (контроль 1) возникла другая с.в. Y_1 — разность очков.

С одним и тем же опытом могут связываться разные с.в. (X_1 и Y_1 различаются набором значений, а распределения их вероятностей одинаковы).

Рассмотрим пример с другим распределением вероятностей.

Пример 2. Три орудия производят залп по цели. Вероятности поражения цели каждым орудием известны и равны, соответственно, $p_1 = 0,8$, $p_2 = 0,7$, $p_3 = 0,6$. Каково наиболее вероятное число попаданий?

Между прочим, может возникнуть предположение, что поскольку все вероятности больше половины, то наиболее вероятны три попадания. Проверим его точным расчётом.

Решение. Вопрос задачи определяет выбор с.в. X_2 — числа попаданий. У неё четыре возможных значения — 0, 1, 2, 3. Рассчитаем вероятности этих значений с помощью теорем сложения и умножения:

$$\mathbf{P}(X_2 = 0) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 = 0,024;$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_2 = 1) &= p_1 \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) + (1 - p_1) \cdot p_2 \cdot (1 - p_3) + (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot p_3 = \\ &= 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 0,188;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_2 = 2) &= p_1 \cdot p_2 \cdot (1 - p_3) + p_1 \cdot (1 - p_2) \cdot p_3 + (1 - p_1) \cdot p_2 \cdot p_3 = \\ &= 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,6 + 0.2 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,452;\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(X_2 = 3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,336.$$

Прогноз. Наиболее вероятное число попаданий — два (а не три). Вероятность этого события — $0,452$. Ровно двух попаданий можно ожидать примерно в половине залпов, трёх попаданий — в трети залпов.

Полную картину возможных результатов опыта даёт ряд распределения и многоугольник распределения вероятностей с.в. X_2 (табл. 3, рис. 2).

Таблица 3

Число попаданий	0	1	2	3
Вероятности	0,024	0,188	0,452	0,336

Заметьте, — характер распределения вероятностей с.в. X_2 существенно отличен от распределения с.в. X_1 (сравните рис. 1 и 2).

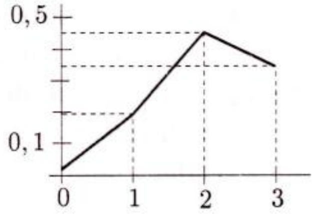


Рис. 2

Вероятность трёх попаданий немного меньше вероятности двух попаданий. Интересно, как должны измениться вероятности p_i, чтобы наибольшей стала $P(X_2 = 3)$? Подумайте.

Контроль 2. Опыт состоит в подбрасывании трёх монет. Как вам кажется, — каково наиболее вероятное число появлений герба? Одинаково ли часто будет появляться чётное число гербов и нечётное? Проведите точный расчёт и ответьте обоснованно. Сделайте прогнозы. Сходно ли распределение вероятностей вашей с.в. с предыдущими распределениями (рис. 1 и 2)?

Указание. Используйте формулу Бернулли.

3. Абстрактные с.в.

Данное выше определение 1 базируется на понятии величины. С современной точки зрения это понятие не достаточно отчётливое. Современные математики используют в качестве базовых понятия «множества» и «соответствия».

Обратимся опять к примеру 1. Мы отмечали, что характерная его особенность — выделено множество событий $\{A_1, A_2, ..., A_{11}\}$ и определено множество чисел $\{2, 3, ..., 12\}$, после чего установлено соответствие между этими множествами $A_i \leftrightarrow i+1$. Но такое соответствие называется в математике функцией.

И получается, что *случайная величина — это функция.* Только в отличие от привычной вам числовой функции эта функция определена не на числовом множестве, а на множестве событий.

Это множество событий не совсем произвольное. Ведь при каждом выполнении опыта должно появиться какое-то значение с.в., значит, группа событий должна быть полной[8]. И ещё, — при выполнении опыта не могут появиться сразу два различных значения с.в., значит, события группы несовместимые[9].

Определение $1'$. *Случайная величина* — это функция на полной группе несовместимых событий некоторого опыта.

[8]Группа событий называется *полной*, если при каждом выполнении опыта обязательно появится одно из событий этой группы (в примере 1 — или появится сумма очков, равная двум, или трём, ..., или двенадцати).

[9]События группы называются *несовместимыми*, если появление одного из них исключает появление других (если появится сумма очков два, то не может одновременно появиться другая сумма — три, четыре, ...).

Как задаётся соответствие между событиями и числами — произвольно или нет? Этот вопрос может возникнуть у вас после прочтения определения $1'$. Ответ: **произвольно**, потому что определение не накладывает никаких ограничений на соответствие.

В предыдущем разделе ставился подобный вопрос: как возникают с.в.? Мы ответили — из условий и целей задачи. Значит, соответствие между событиями и числами при решении конкретной задачи определяется целями этой задачи. Именно поэтому в примере 1 мы ставили в соответствие событиям A_i суммы очков.

Определение $1'$ подчёркивает **абстрактность** понятия случайной величины, — оно отвлекается от условий задачи (но остаётся пока связанной с опытом). Значит, можно выбирать произвольную группу событий (лишь бы она была полной, а события несовместимыми); произвольно можно выбрать и числовое множество; произвольно можно установить однозначное соответствие между событиями и числами. Любая такая математическая конструкция будет теперь называться случайной величиной.

Так, в опыте с подбрасыванием двух игральных костей (пример 1) я могу поставить в соответствие событиям A_i любые числа, например, квадраты сумм очков, или произведение появившихся очков. Такое соответствие может оказаться бесцельным, но тем не менее, оно будет задавать некую с.в. Отметим также, что можно произвольно изменять и группу событий (лишь не нарушая полноты и несовместимости).

Контроль 3. Опыт состоит в подбрасывании трёх монет. Постройте свою абстрактную с.в.: введите какую-то свою группу событий, задайте какое-то числовое множество и установите соответствие между ними.

4. Дискретные и непрерывные с.в.

Сейчас вы должны научиться различать два важных класса случайных величин — дискретные и непрерывные.

Различие между ними увидеть нетрудно — оно во множестве значений. Значения дискретной с.в. отделены друг от друга промежутками, а значения непрерывной с.в. заполняют некоторый промежуток «сплошь». Вы увидите это сейчас на примерах.

Все, до сих пор рассмотренные нами с.в., были дискретными. В примере 1 значения с.в. X_1 (сумма очков) образуют конечную возрастающую последовательность $2 < 3 < ... < 12$. Их можно отделить друг от друга интервалами, не содержащими других значений, как-то: (2, 3), (3, 4), ..., (11, 12), что видно из рис. 3.

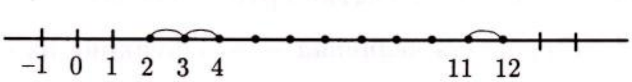


Рис. 3

Приведу два примера непрерывных с.в.

Пример 3. Опыт состоит в том, что орудие стреляет в мишень (один выстрел). Случайная величина S — расстояние от точки разрыва снаряда до цели. Какие значения может принимать эта с.в.?

Почти очевидно, что все возможные значения с.в. S заполняют «сплошь» некоторый промежуток $[0, \bar{s})$, где $\bar{s}$ — максимально возможное отклонение снаряда от цели (рис. 4).

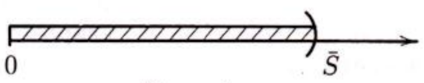


Рис. 4

Поясню. При попадании в цель появляется значение $s = 0$. При повторении опыта будут появляться разные значения s и все они будут лежать в границах между 0 и $\bar{s}$. Существенно, что **любое** значение s, взятое из промежутка $[0, \bar{s})$, является одним из возможных значений с.в. S (снаряд может разорваться на любом расстоянии от цели, не превышающим $\bar{s}$). Т.е. значения с.в. S заполняют промежуток $[0, \bar{s})$ «сплошь».

Примечание 1. Обратите внимание — правый конец промежутка $[0, \bar{s})$ «размыт», его нельзя определить точно.Практически его можно определить приближённо, проведя большую серию опытов (например, сделав 100 выстрелов) и приняв за $\bar{s}$ наибольшее из появившихся значений. Условимся в таких случаях закрывать «размытый» конец промежутка круглой скобкой, что мы и сделали выше — $[0, \bar{s})$.Заметим также, что для решения вопроса — дискретная или непрерывная с.в. перед нами, не нужно знать точное значение $\bar{s}$. Нам надо лишь знать, что значения с.в. заполняют некоторый промежуток «сплошь».

Пример 4. Автоматический станок штампует детали заданного размера l_0. Очевидно, что размер реальной детали есть переменная величина L, значения которой колеблются около l_0 случайным образом. Очевидно также, что значения эти заполняют «сплошь» некоторый малый интервал $(l_0 - \varepsilon;\ l_0 + \varepsilon)$, где ε — максимальное возможное отклонение размера детали от номинала l_0 (рис. 5).

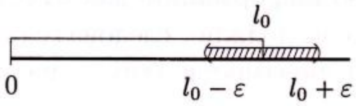


Рис. 5

Возражение. Проведённое мною обоснование непрерывности с.в. L (а также S) может вызвать у вас сомнение. Вы можете возразить так.

Результат измерения детали выражается в каких-то минимальных единицах, доступных измерительному прибору. Например, микрометром можно измерить длину детали с точностью до сотых долей миллиметра.Значит, в этом случае реально может существовать только конечное число значений с.в. L, отделённых друг от друга очень малыми промежутками в 0,01 мм. Следовательно, L — дискретная с.в.

Опровержение. Ваше рассуждение совершенно правильно. Но заключение из него вы делаете не верное. Не L — дискретная с.в., а построенная вами модель реальности есть дискретная с.в. Построенная мною абстрактная модель, теоретически предполагающая абсолютно точное измерение, есть непрерывная с.в.

Дискретные и непрерывные модели. Ваше возражение углубляет понимание и заставляет уточнить постановку вопроса. Для реальной с.в. не корректно спрашивать — какая это величина, дискретная или непрерывная? Надо ставить вопрос иначе — какой с.в. следует моделировать данную реальную ситуацию, дискретной или непрерывной? В дальнейшем, в третьей части курса вы увидите, что непрерывные модели позволяют эффективнее решать многие практические задачи.

В свете сказанного вопрос — дискретна или непрерывна данная с.в.? — будет подразумевать следующее: можно ли моделировать данную реальную ситуацию непрерывной с.в. или только дискретной?

Определение 2. Случайная величина называется *дискретной (д.с.в.)*, если множество всех возможных её значений или конечно, или может быть расположено в виде бесконечно возрастающей (или убывающей) последовательности.

Примечание 2. Если множество значений д.с.в. конечно, они, очевидно, отделимы друг от друга промежутками (пример 1). Если множество значений бесконечно, то отделимость не всегда возможна (например, точки интервала нельзя отделить промежутками, не содержащими других точек). В случае же возрастающей последовательности отделимость очевидна. Пример дискретной с.в. с бесконечным множеством значений будет чуть позже (в 9-м разделе лекции).

Определение 3. Случайная величина называется *непрерывной*[10], если множество её значений заполняет «сплошь» некоторый промежуток (он может быть и неограниченным).

Контроль 4. На автоматической телефонной станции (АТС) фиксируется число вызовов за определённый промежуток времени (например, с 12 до 13 часов), а также длительность каждого разговора. С.в. Y_2 — число вызовов, Y_3 — длительность произвольно взятого разговора. Какая из них дискретная, какая — непрерывная? Каковы множества их значений?

5. Математическое задание дискретной с.в.

В предыдущих двух разделах мы были заняты значениями с.в. и как-то забыли, что эти значения обладают вероятностями, и что распределение этих вероятностей содержит самую важную информацию для ответа на практические вопросы. Математическое описание д.с.в. должно, следовательно, включать, во-первых, все значения с.в., во-вторых, — вероятности этих значений.

Определение 4. *Рядом распределения вероятностей* дискретной с.в. X (или просто *рядом распределения*, кратко — *р.р.*) называется таблица, состоящая из двух строк: в верхней строке перечисляются в порядке возрастания (или убывания) все возможные значения данной д.с.в. — $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots$; в нижней — вероятности появления каждого из этих значений — $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$.

В общем виде ряд распределения д.с.в. X выглядит так:

Таблица 5

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_i	$\ldots$

Если число значений д.с.в. X конечно, таблица понятным образом укорачивается.

Напомню, что р.р. можно представить наглядно *многоугольником распределения*, построив в координатной системе точки $M_i\,(x_i, p_i)$ и соединив их ломаной линией (рис. 1 и 2).

[10]Существуют ещё и *смешанные* с.в., но в нашем курсе они не будут встречаться.

Примечание. Распределение вероятностей непрерывных с.в. не может быть задано таблицей, ибо их значения заполняют «сплошь» некоторый промежуток и поэтому их нельзя записать в виде монотонной бесконечной последовательности. Их нельзя отделить малыми интервалами, не содержащими других значений (любой сколь угодно малый интервальчик, отделяющий два каких-то значения, содержит бесчисленно много других значений). Как вы узнаете в третьей части курса, распределение вероятностей непрерывных с.в. во многих практически значимых случаях задаётся некоторой функцией, которую называют *плотностью распределения.*

Свойство ряда распределения. Взгляните-ка на ряд распределения с.в. X_1 (табл. 2) и просуммируйте вероятности, стоящие в нижней строке: ${}^1\!/_{36} + {}^2\!/_{36} + \ldots + {}^6\!/_{36} + {}^5\!/_{36} + \ldots + {}^1\!/_{36} = {}^{36}\!/_{36} = 1$. В сумме получилась единица. Проделайте то же самое для с.в. X_3 (табл. 3) — опять получите единицу. Так будет всегда. Почему? В силу полноты группы событий, на которых определена с.в. Это видно из доказательства следующей теоремы.

Теорема. Сумма вероятностей всех значений любой дискретной случайной величины равна единице

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_i + \ldots = 1. \tag{1}$$

Доказательство проведём для случая с.в. с конечным числом значений. При этом придётся опираться на определение случайной величины. Но у нас есть два таких определения. Второе вам казалось формальным и искусственным, но именно из-за своей формальности и точности оно и годится для строгих доказательных рассуждений.

Согласно определению $1'$, в опыте, в котором рассматривается данная с.в., задана **полная** группа событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Составим сумму этих событий $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$. Из полноты следует, что при каждом выполнении опыта произойдёт одно из событий A_i, значит, согласно определения суммы событий, произойдёт и событие A. Итак, A — достоверное событие и $\mathbf{P}(A) = 1$.

Согласно тому же определению $1'$, события $A_1, A_2, \ldots, A_k$ несовместимые, значит, применима первая теорема сложения:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots + \mathbf{P}(A_k) = 1.$$

Замечание. В случае, когда д.с.в. имеет бесконечное множество значений, доказательство остаётся таким же, только теорему сложения придётся обобщить и сумма вероятностей превратится в сумму ряда. Попробуйте сделать это сами.

Математическая абстракция. Обратите внимание — ряд распределения содержит всю информацию о д.с.в. и, вместе с тем, он игнорирует конкретику опыта, с которым связана с.в. Получается, что с формально математической точки зрения задать д.с.в. — значит задать только её ряд распределения. Я могу теперь начертить таблицу из двух строк, в первой строке поставлю л ю б ы е числа, во второй — **любые** положительные числа, сумма которых равна единице, и скажу, что я задал случайную величину[11].

[11] Опыт, реализующий написанный «с потолка» ряд распределения, нетрудно построить, используя, например, урну с шарами.

Формальный взгляд на д.с.в., как на таблицу, позволяет развивать абстрактную математическую теорию. В дальнейшем мы будем классифицировать с.в. по сходству их распределений (ценных для практики), изучать углублённо свойства классов и, в конечном счёте, применять теоретические выводы и формулы к решению практических задач. Такова программа почти всех наших следующих занятий. Первый пример подобного исследования будет в конце данной лекции.

Контроль 5. Математическая д.с.в. Y_4 задана следующим р.р.

Таблица 5

Y_4	-1	0	1
p	$p_1 = 1/6$	$p_2 = 3/6$	$p_3 = ?$

Каким должно быть p_3? Постройте опыт, который реализует данную с.в. Y_4. Проверьте выполнение условий определений 1 и $1'$.

Указание. Положите в урну шары и напишите на них значения данной с.в.

6. Среднее значение (математическое ожидание)

Ряд распределения даёт полную информацию о д.с.в., но нередко бывает трудно вычислимым. К примеру, попробуйте рассчитать вероятности различных сумм очков при подбрасывании шести игральных костей (именно столько костей бросали игроки в XVIII в.). Согласитесь, что это не лёгкая и не быстрая работа. Поэтому возникает потребность иметь числовые характеристики с.в. (числа), которые обобщённо отражали бы некоторые существенные особенности распределения вероятностей.

Наука выработала разнообразные такие характеристики (так называемые «моменты»). Из них наиболее важную для практики и часто используемую информацию несут две — математическое ожидание M и дисперсия D. Познакомьтесь с первой. Как всегда, начнём с примера.

Взгляните на табл. 5, поставьте в последней колонке $p_3 = 2/6$ и скажите, — какое число вы бы назвали средним значением с.в. Y_4? Может быть, вы ответите, что из трёх значений (0, 1, -1) средним будет 0. Но учтите вероятности этих значений — что они говорят? Они говорят, что при повторении опыта правое значение $x_3 = 1$ будет появляться чаще левого $x_1 = -1$. Поэтому среднее значение надо сдвинуть вправо от нуля. Это простое соображение приводит к следующему определению и формуле для вычисления среднего значения д.с.в.

Определение 5. *Математическим ожиданием* (кратко — *м.о.*), или *средним значением* д.с.в. X, заданной рядом распределения (табл. 4), называется число M, которое вычисляется по формуле

$$M = M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_i \cdot p_i + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i. \tag{2}$$

Если д.с.в. имеет конечное число значений, то в формуле (2) будет стоять конечная сумма.

Рассчитаем по формуле (2) среднее значение с.в. Y_4:

$$M(Y) = (-1) \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{3}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.$$

Как мы и предполагали, оно сдвинуто вправо от нуля из-за большего «веса» в сумме правого слагаемого, сравнительно с левым.

Замечание. Если значений д.с.в. бесконечно много, то для определения M по формуле (2) надо найти сумму ряда. Вы, может быть, помните, что это весьма не простая задача. Более того, бывают ряды, у которых суммы нет (расходящиеся). Следовательно, не всякая д.с.в. с бесконечным множеством значений имеет среднее значение в смысле определения 5. Приведу пример.

Применим формулу (2) к следующему распределению

X_3	$1!$	$2!$	$3!$	$\dots$	$i!$	$\dots$
p	$1/2$	$1/2^2$	$1/2^3$	$\dots$	$1/2^i$	$\dots$

Формула (2) даёт $M(X_3) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{2^i}$. Получившийся ряд расходится, в чём можно убедиться, применив признак Даламбера, — $\lim \frac{(i+1)! \cdot 2^i}{2^{i+1} \cdot i!} = \lim \frac{i+1}{2} = \infty$.

Следует добавить, что если д.с.в. имеет бесконечно много отрицательных значений и ряд (2) сходится, но не абсолютно, принято считать, что она тоже не имеет математического ожидания.

Вероятностный смысл среднего значения. Теперь надо понять, какую информацию о распределении вероятностей даёт нам число M.

Рассмотрим три с.в., заданные такими распределениями:

Z_1	1	2	3	4
p	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Z_2	1	2	3	4
p	$1/8$	$3/8$	$2/8$	$2/8$

Z_3	1	2	3	4
p	$1/8$	$2/8$	$2/8$	$3/8$

Эти с.в. различаются между собой небольшими изменениями вероятностей — p_4 увеличивается от Z_1 к Z_3.

Вычислим математическое ожидание первой с.в. Z_1:

$$M_1 = M(Z_1) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1+6+9+4}{8} = \frac{20}{8} = 2,5.$$

Вы видите, что M_1 совпало со средним арифметическим («серединой») всех значений с.в. Z_1, которое вычисляется так: $C = \frac{1+2+3+4}{4} = 2,5$ (рис. 6). Это произошло из-за симметрии распределения вероятностей.

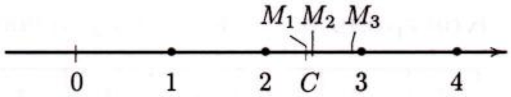


Рис. 6

Вычислим математическое ожидание второй с.в. Z_2:

$$M_2 = M(Z_2) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{2}{8} + 4 \cdot \frac{2}{8} = \frac{1+6+6+8}{8} = \frac{21}{8} = 2,625.$$

Из-за того, что крайняя правая вероятность у с.в. Z_2 увеличилась, сравнительно с Z_1, а левые остались неизменными, её математическое ожидание M_2 сдвинулось вправо от «середины» C (рис. 6).

Для третьей с.в. Z_3:

$$M_3 = M\,(Z_3) = 1\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot\frac{2}{8} + 3\cdot\frac{2}{8} + 4\cdot\frac{3}{8} = \frac{1+4+6+12}{8} = \frac{23}{8} = 2{,}875.$$

M_3 сдвинулось ещё правее (рис. 6). Причина та же — увеличение p_4. В этом случае «правые» вероятности перевешивают «левые»: $p_3 + p_4 = \frac{5}{8} > p_1 + p_2 = \frac{3}{8}$.

Эти простые примеры позволяют почувствовать, как изменяется математическое ожидание с.в. в зависимости от характера распределения «левых« и «правых» вероятностей.

Вывод. Если математическое ожидание M некоторой д.с.в., число значений которой конечно, лежит правее «середины» её значений C, то **зачастую** это означает, что значения, лежащие правее «середины», в целом, более вероятны, нежели «левые». Разница тем больше, чем правее от «середины» лежит M. Заключение понятным образом изменяется, если M лежит левее C.

Предостережение. Сделанный вывод справедлив не всегда. Распределение, не подчиняющееся этому выводу, придумать не трудно (попробуйте придумать на досуге). Однако для распределений, возникающих в практических исследованиях, этот вывод себя оправдывает.

Отметим также, что и сформулирован он не достаточно точно. Точная статистическая формулировка будет в следующей лекции. Там вы узнаете, как приближённо находить M, минуя ряд распределения с.в.

Почему «ожидание»? Для многих, практически важных классов с.в. (с ними вы познакомитесь в дальнейшем), число M указывает ориентировочную область (около M), в которой будут часто появляться значения с.в. при многократном повторении опыта. Чем дальше от M, тем реже появляются значения с.в. (рис. 7). Значит, M — это обобщённое, **ожидаемое** в опыте значение с.в. Вместе с тем, ожидание здесь не психологическое, а условно **математическое**.

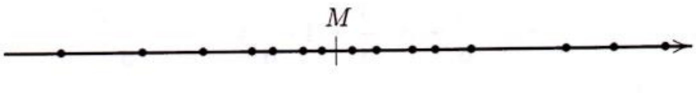


Рис. 7

Контроль 6. С. в. Z_1 и Z_2 заданы следующими распределениями

Y_4	-2	-1	0	1	2
p	$1/10$	$1/10$	$2/10$	$3/10$	$3/10$

Y_5	-2	-1	0	1	2
p	$1/10$	$1/10$	$3/10$	$3/10$	$2/10$

Всмотритесь в распределение вероятностей данных с.в. и сделайте предположение о расположении их м.о. (какое правее?) Вычислите $M\,(Y_4)$ и $M\,(Y_5)$ точно. Оправдалось ли ваше предположение?

7. Степень разбросанности значений (дисперсия)

Начну не с примера, как обычно, а с определения, — потом разберёмся, почему оно такое.

Определение 6. *Дисперсией* дискретной с.в., заданной рядом распределения (табл. 4), называется число D, которое вычисляется по формуле

$$D = D(X) = (x_1 - M)^2 \cdot p_1 + (x_2 - M)^2 \cdot p_2 + ... + (x_i - M)^2 \cdot p_i + ... \qquad (3)$$

Если д.с.в. имеет конечное число значений, формула (3) укорачивается.

Выясним, какую информацию несёт вторая числовая характеристика? Понять это помогут, как всегда, примеры.

Рассмотрим три с.в., заданные простыми распределениями:

Таблица 6а

Z_4	-1	0	1
p	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Таблица 6б

Z_5	-10	0	10
p	$1/3$	$1/3$	$1/3$

Таблица 6в

Z_6	-10	0	10
p	$1/10$	$8/10$	$1/10$

Вы видите, что первые две с.в. различаются только значениями, вторые две — вероятностями. В силу симметрии распределения значений и вероятностей, математические ожидания у всех трёх с.в. одинаковы и равны нулю — $M = 0$. Вычислим дисперсии:

$$D(Z_4) = (-1-0)^2 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + (1-0)^2 \cdot 1/3 = 1/3 + 0 + 1/3 = 2/3;$$

$$D(Z_5) = (-10-0)^2 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + (10-0)^2 \cdot 1/3 = 100 \cdot 1/3 + 0 + 100 \cdot 1/3 = 66\frac{2}{3};$$

$$D(Z_6) = (-10-0)^2 \cdot 1/10 + 0 \cdot 8/10 + (10-0)^2 \cdot 1/10 = 100 \cdot 1/10 + 0 + 100 \cdot 1/10 = 20.$$

Самая большая дисперсия — у второй с.в. Почему? Из вычисления видно, что у неё велики первое и третье слагаемые из-за того, что она имеет далёкие от M значения -10 и 10, вероятности которых не малы. При многократном повторении опыта эти далёкие от M значения будут возникать часто. Можно сказать, что у с.в. Z_4 велика разбросанность значений относительно её математического ожидания.

Третья с.в. Z_6 имеет те же, далёкие от M значения -10 и 10, но появляются они с вероятностями $0,1$, т.е. в три раза реже. Эти вероятности уменьшают первое и третье слагаемые, а значит, и дисперсию почти в три раза. Разбросанность значений у с.в. Z_6 значительно меньше, чем у Z_4.

Первая с.в. имеет самую маленькую дисперсию, потому что все её значения близки к M.

Вывод. Дисперсия с.в. X зависит от двух факторов: 1) насколько далеки от $M(X)$ значения X; 2) насколько велики или малы вероятности далёких значений.

Статистический смысл дисперсии. Величина $D(X)$ характеризует *степень разбросанности* значений с.в. X, появляющихся в результате серии опытов: если значения появляются кучно (вероятности далёких от M значений малы), — разброс мал, дисперсия мала; если же часто появляются значения, далёкие от M, разброс велик, дисперсия большая.

Дисперсия позволяет сравнивать разные с.в. по степени разбросанности (рассеяния) их значений. Слово «дисперсия»и означает «рассеяние».

Сказанное можно проиллюстрировать с помощью рис. 7. На этом рисунке условно изображены точками значения произвольной с.в., появившиеся в результате серии опытов. Видно, что эти значения располагаются, в основном, вблизи M, — значит дисперсия не велика. Если же изменить рисунок так, чтобы все точки немного отодвинулись от M, то дисперсия увеличится.

Другая формула. В заключение выведем другую, более простую формулу дисперсии, облегчающую вычисления. Как всегда, ограничимся с.в. с конечным числом значений.

Преобразуем формулу (3), — раскроем скобки, сделаем группировку и учтём формулы (1) и (2):

$$D(X) = \left(x_1^2 - 2x_1M + M^2\right)p_1 + \left(x_2^2 - 2x_2M + M^2\right)p_2 + \ldots + \left(x_k^2 - 2x_kM + M^2\right)p_k =$$
$$= \left(x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \ldots + x_k^2p_k\right) - 2M\left(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k\right) + M^2\left(p_1 + p_2 + \ldots + p_k\right).$$

В результате формула (3) принимает вид:

$$D(X) = \left(x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \ldots + x_k^2p_k\right) - M^2. \tag{4}$$

Сумма в скобках напоминает формулу (2) — это математическое ожидание другой с.в., значениями которой являются квадраты значений данной с.в., а вероятности те же. Такая с.в. называется *квадратом с.в.* X и обозначается X^2, её ряд распределения таков:

X^2	x_1^2	x_2^2	$\ldots$	x_k^2
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_k

С учётом введённого обозначения с.в.X^2, запишем формулу (4) короче:

$$D(X) = M\left(X^2\right) - M^2 \tag{4'}$$

Совершенно аналогично выводится формула для д.с.в. с бесконечным множеством значений. Группировка ряда допустима, т.к. он знакоположительный и, значит, сходится абсолютно. Проведите этот вывод самостоятельно.

Контроль 7. Вернитесь к с.в. Y_4 и Y_5, заданным в контроле 6. Как вы считаете, — у какой из них дисперсия больше и намного ли? Вычислите точно $D(Y_4)$ и $D(Y_5)$, используя обе формулы — (3) и (4). Подтвердилось ли ваше предположение? Какая формула удобнее для вычислений?

8. Среднее квадратическое отклонение

Формула дисперсии (3) содержит квадраты, которые могут сильно увеличивать число D (сравните $D(Z_4)$ и $D(Z_5)$ в примере предыдущего раздела). Будет удобнее, если мы усредним все дисперсии с помощью операции извлечения квадратного корня.

Определение 7. *Средним квадратическим отклонением* случайной величины X называется число $\sigma(X)$, которое вычисляется как корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{5}$$

Смысл числа σ. Как и дисперсия, σ характеризует степень разбросанности значений с.в.: чем больше $\sigma(X)$, тем больше разброс значений с.в. X. Так, в предыдущем примере

$$D(Z_4) \approx 0,67, \quad D(Z_5) \approx 66,67, \quad D(Z_6) = 20,$$

$$\sigma(Z_4) \approx \sqrt{0.67} \approx 0,82, \quad \sigma(Z_5) \approx \sqrt{66,67} \approx 8,16, \quad \sigma(Z_6) = \sqrt{20} \approx 4,47.$$

Вы видите, что большей дисперсии отвечает большее среднее квадратическое отклонение.

Вместе с тем, значения σ отличаются друг от друга гораздо меньше, нежели значения дисперсий D. Более того, они сравнимы с максимальными отклонениями значений с.в. от математического ожидания. Обсудим эту особенность σ подробнее.

Среднее и максимальное отклонения — сравним их:

$$\begin{aligned} &\sigma(Z_1) \approx 0,82, && \max|Z_1 - M_1| = 1,\\ &\sigma(Z_2) \approx 8,16, && \max|Z_2 - M_2| = 10,\\ &\sigma(Z_3) \approx 4,47, && \max|Z_3 - M_3| = 10. \end{aligned}$$

Вы видите, что все средние отклонения меньше максимальных. Но не намного.

Рис. 8а *Рис. 8б* *Рис. 8в*

Постройте «двухсигмовый» интервал вида $(M - 2\sigma;\ M + 2\sigma)$. Вы видите, что для с.в. Z_1 этот интервал покрывает **все** её значения: $0, 1, -1$ (рис. 8а). То же — для с.в. Z_2 (рис. 8б). Для с.в. Z_3 «двухсигмовый» интервал недостаточен, но «трёхсигмовый» $(M - 3\sigma;\ M + 3\sigma)$ покрывает все значения: $0, 10, -10$ (рис. 8в). На рисунках изображены правые половины интервалов.

Вывод. Мы подметили ценную закономерность, которую в дальнейшем уточним и докажем (так называемое *«правило трёх сигм»*): для многих, возникающих на практике с.в. (как дискретных, так и непрерывных), *«трёхсигмовый» интервал* $(M - 3\sigma;\ M + 3\sigma)$ *покрывает* **почти все** *практически возможные значения с.в.*

В наших примерах это правило выполнялось без «почти». Для непрерывных с.в. некоторые значения могут выходить за пределы трёхсигмового интервала, но вероятность такого события очень мала. Поэтому можно считать, что интервал $(M-3\sigma;\ M+3\sigma)$ указывает область, куда попадают все практически возможные значения с.в.

Контроль 8. В условиях контрольного упражнения 5 вычислите средние квадратические отклонения с.в. X_1 и X_2. Выполняется ли правило двух сигм или правило трёх сигм? Сделайте рисунки.

9. Класс геометрических распределений

В заключение применим то, что узнали, к исследованию одного класса д.с.в. с бесконечным множеством значений.

Задача. Производится ряд независимых опытов с целью получения какого-то результата («успеха»). При каждой попытке (опыте) «успех» достигается с вероятностью p. Спрашивается, — сколько попыток можно ожидать до первого «успеха»?

Пояснение. Задача поставлена обобщённо — опыт не конкретизируется. Это может быть, например, подбрасывание монетки до первого появления герба («успех»). Другой пример — стрельба по цели до первого попадания. Вероятность «успеха» (событие A) тоже может быть любой: $\mathbf{P}(A)=p$. Таким образом, перед нами не одна задача, а целый класс однотипных задач.

Мы должны найти ответ на практический вопрос: сколько безуспешных попыток может пройти до первого «успеха». Очевидно, это зависит от вероятности p — чем она больше, тем быстрее будет достигнут «успех». Но какова количественная оценка числа попыток? Мы понимаем, конечно, что эта оценка не может быть точной — она вероятностная.

Решение. Вопрос задачи подсказывает нам, что для её решения надо ввести случайную величину K_∞ — число попыток <u>до</u> первого «успеха». Среднее значение этой с.в. и будет вероятностной оценкой ожидаемого числа попыток.

Отступление. Прежде чем составлять ряд распределения с.в. K_∞ и вычислять её математическое ожидание, полезно поставить скептический вопрос: а действительно ли K_∞ — случайная величина? Вспомните определение 1 — всякая с.в. характеризуется тремя особенностями: она связана с опытом, её значения меняются и они случайны.

С каким опытом связана с.в. K_∞? С опытом, в котором появляется «успех» или «неуспех»? Нет! С более сложным опытом — с серией данных опытов, повторяющихся <u>до</u> первого «успеха». В результате каждой такой серии появится то или иное значение с.в. K_∞: или «успех» будет достигнут сразу, с первой попытки, и с.в. K_∞ (число попыток «<u>до</u>») примет значение $k=0$; или первое выполнение данного опыта не будет успешным, а второе даст нужный результат, — с.в. K_∞ примет значение $k=1$ (одна попытка <u>до</u> «успеха»); и т. д. Ясно, что невозможно точно и с абсолютной уверенностью предсказать, сколько попыток будет сделано до первого «успеха». Значит, действительно, переменная величина K_∞ — случайная.

Итак, будем составлять ряд распределения с.в. K_∞.

Сколько у неё значений? На первый взгляд, может показаться, что число значений конечное, ибо нельзя, ведь, произвести бесконечное число опытов. Но вдумайтесь, — суть не в том, что число опытов всегда конечно, а в том, что число опытов до первого «успеха» теоретически **неограничено**. Следовательно, с.в. K_∞ может принять любое значение из бесконечного их множества $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ ...;\ m;\ ...\}$.

Найдём вероятности значений с.в. K_∞, используя теорему умножения для независимых событий (A_1 — «успех» в первой попытке, A_2 — во второй, и т. д.):

$$
\begin{aligned}
&p_0 = \mathbf{P}(K=0) = \mathbf{P}(A_1) = p;\\
&p_1 = \mathbf{P}(K=1) = \mathbf{P}\left(\bar{A}_1 \cdot A_2\right) = (1-p)\cdot p;\\
&p_2 = \mathbf{P}(K=2) = \mathbf{P}\left(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3\right) = (1-p)^2\cdot p;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&p_m = \mathbf{P}(K=m) = \mathbf{P}\left(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_{m-1} \cdot A_m\right) = (1-p)^{m-1}\cdot p;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Обратите внимание — вероятности образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1-p$. Становится понятно, почему с.в. K_∞ называют *геометрическим* распределением.

Ряд распределения с.в. K выглядит так:

K_∞	0	1	2	...	m	...
p	p	$(1-p)\cdot p$	$(1-p)^2\cdot p$	...	$(1-p)^m\cdot p$	...

Математическое ожидание с.в. K_∞, вычисляемое по формуле (2), приводит нас к бесконечной сумме:

$$M = 0\cdot p + 1\cdot(1-p)\,p + 2\cdot(1-p)^2\,p + \ldots + m\cdot(1-p)^m\,p + \ldots.$$

Можете мне поверить, что сумма этого ряда определяется формулой:

$$M = \frac{1-p}{p}. \tag{6}$$

Если хотите понять, откуда взялась эта формула, читайте мелкий шрифт.

Вывод формулы (6) . Вынесем общие множители за скобки:

$$M = p(1-p)\left[1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + \ldots + m(1-p)^{m-1} + \ldots\right].$$

Теперь надо просуммировать ряд, стоящий в квадратных скобках. Обратите внимание — если обозначить $1-p=q$, то этот ряд можно рассматривать, как результат почленного дифференцирования ряда-прогрессии:

$$q' + \left(q^2\right)' + \left(q^3\right)' + \ldots + \left(q^m\right)' + \ldots = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + mq^{m-1} + \ldots$$

Значит, сумма ряда, стоящего в квадратных скобках, может быть получена дифференцированием суммы ряда-прогрессии, которая определяется известной формулой $s = \frac{a}{1-q}$, т. е.

$$q + q^2 + q^3 + \ldots + q^m + \ldots = \frac{q}{1-q}.$$

Продифференцируем этот ряд и получим искомую сумму:

$$q' + \left(q^2\right)' + \left(q^3\right)' + ... + \left(q^m\right)' + ... = \left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{q'\,(1-q) - q\,(1-q)'}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Вернёмся к математическому ожиданию и заменим ряд, стоящий в квадратных скобках, его суммой, найденной только-что (учтите $q = 1 - p$):

$$M = p\,(1-p) \cdot \frac{1}{\left[1-(1-p)\right]^2} = \frac{1-p}{p}.$$

Интерпретация и прогнозы. Итак, «ожидаемое» число попыток до первого успеха, определяется формулой (6). Для $p = 0,7$ эта формула даёт $M_{0,7} = 0,43$; для $p = 0,4$ будет $M_{0,4} = 1,5$; для $p = 0,01$ получим $M_{0,01} = 99$. Какую информацию несут эти числа?

Когда мы обсуждали смысл среднего, «ожидаемого» значения M, мы сделали вывод, что это число указывает **ориентировочно** область («около» M), в которой будут часто возникать значения с.в. при повторении опыта. Значит, можно сказать, что при $p = 0,7$ «успех» будет достигнут или сразу, или через одну попытку; при $p = 0,4$ — через одну-две попытки; при $p = 0,01$ потребуется «около» ста попыток. А теперь давайте уточним — что значит «около»?

То, насколько близко к M будут появляться значения с.в., определяется величиной дисперсии D. Подобно тому, как мы вывели формулу (6), можно вывести и формулу дисперсии — она имеет вид:

$$D = \frac{1-p}{p^2}. \tag{7}$$

Посчитаем соответствующие дисперсии:

$$D_{0,7} = 0,61, \quad D_{0,4} = 3,75, \quad D_{0,01} = 9900.$$

Первые две дисперсии не велики, значит, наше предположение, что «успех» будет достигаться за одну-две попытки, подтверждается. Последняя дисперсия очень велика, значит, разбросанность значений около $M_{0,01} = 99$ велика и для достижения «успеха» может потребоваться значительно больше ста попыток. Попробуем уточнить и это.

Вычислим соответствующие средние квадратические отклонения:

$$\sigma_{0,7} = \sqrt{0,61} \approx 0,78, \quad \sigma_{0,4} = \sqrt{3,75} \approx 1,94, \quad \sigma_{0,01} = \sqrt{9900} \approx 100.$$

Составим трёхсигмовые интервалы:

$$(M_{0,7} - 3\sigma;\ M_{0,7} + 3\sigma) \approx (-1,91;\ 2,77)\,; \quad (M_{0,4} - 3\sigma;\ M_{0,4} + 3\sigma) \approx (-4,32;\ 7,32)\,;$$

$$(M_{0,01} - 3\sigma;\ M_{0,01} + 3\sigma) \approx (-201;\ 399)\,.$$

Делаем **выводы-прогнозы:** если $p = 0,7$, то «успех» практически гарантирован за одну-три попытки; если $p = 0,4$, — число попыток не более семи; при очень малых вероятностях «успеха» число попыток резко возрастает — для $p = 0,01$ оно доходит до четырёхсот.

Вывод этот иллюстрирует рис. 9, на котором изображены многоугольники геометрических распределений при $p = 0,7$ и $p = 0,4$, а крестиками на оси OX отмечены соответствующие средние значения $M_{0,7}$ и $M_{0,4}$. Вы видите, как быстро убывают вероятности, — они практически исчезают для значений, больших трёх (для первой с.в.) и для значений, больших семи (для второй).

Вот и оцените ценность числовых характеристик для реального вероятностного прогнозирования. В дальнейшем мы сможем количественно оценивать и вероятности выхода значений с.в. за пределы трёхсигмового интервала — они окажутся очень малыми.

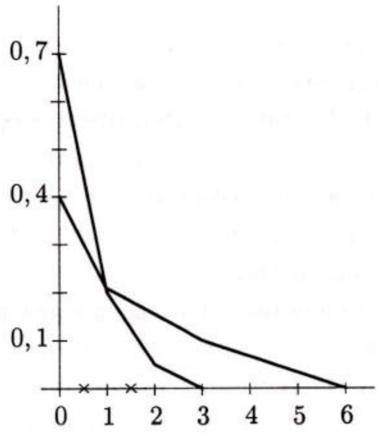


Рис. 9

Контроль 9. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока не появится «шестёрка». Каково математическое ожидание M числа подбрасываний? Какова верхняя граница числа возможных подбрасываний? В каких пределах $(M-\delta; M+\delta)$ можно гарантировать число подбрасываний с вероятностью $0,9$?

Указание. На последний вопрос ответьте с помощью ряда распределения и метода подбора.

10. Упражнения

1. Монета подбрасывается два раза. Каково наиболее вероятное число решек? Введите с.в., составьте ряд распределения и постройте многоугольник распределения. Сделайте прогноз: как часто следует ожидать появления 0, 1, 2 решек при 200 подбрасываниях?

2. Два орудия стреляют в цель. Вероятности поражения цели: $p_1 = 0,6$ и $p_2 = 0,3$. Как вам кажется, что более вероятно — два промаха или два попадания? Введите с.в., составьте ряд распределения и сделайте прогноз для пятидесяти залпов.

3. Четыре орудия стреляют в цель. Вероятности поражения: $p_1 = 0,6$, $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,4$, $p_4 = 0,7$. Как вы думаете, каково наиболее вероятное число промахов? Введите с.в., определите её возможные значения, рассчитайте их вероятности, составьте ряд распределения и постройте многоугольник распределения.

4. Одно орудие стреляет в цель 4 раза. Вероятность попадания каждый раз одинакова и равна $p = 0,9$. Каково наиболее вероятное число попаданий? Сделайте прогноз распределения числа попаданий при ста повторениях опыта (сто серий по четыре выстрела). Как часто будет не менее двух попаданий?

5. Игральная кость подбрасывается 3 раза. Как вам кажется, какова наиболее вероятная сумма очков? Рассчитайте это точно. Подберите интервал, в который примерно раз в трёх партиях попадает сумма очков. Постройте многоугольник распределения суммы очков и сравните его с рис. 1. В чём существенное отличие?

Указание. Число всех исходов найдите принципом умножения — $n = 216$. Число исходов, благоприятствующих определённой сумме очков пересчитайте перебором соответствующих «троек». Например, сумме 9 благоприятствуют следующие «тройки»: $(3+3+3)$, $(3+2+4)$, $(3+1+5)$,

..., всего $m_9 = 25$. Не потеряйте каких-то «троек»! После расчёта всех вероятностей проверьте суммированием, нет ли ошибок.

6. В урне 4 шара, пронумерованных числами 1, 2, 3, 4. Опыт состоит в последовательном вынимании двух шаров, не глядя. Случайная величина X– число шаров с чётными номерами. Каковы возможные значения с.в. X? Проверьте выполнение условий определений 1 и $1'$. Составьте ряд распределения и проверьте выполнение его свойства (1).

Указание. Для вычисления вероятностей используйте следствие теоремы умножения для зависимых событий и теорему сложения. Так, $P(X=1) = 4/6$.

7. В условиях предыдущей задачи придумайте свою с.в. и проверьте, выполняются ли условия определений 1 и $1'$. Рассчитайте её ряд распределения, постройте многоугольник распределения. Сравните распределение вероятностей вашей с.в. с распределением с.в. X из задачи 6. В чём сходство? В чём различие?

8. Имеются две урны и в каждой лежат по три шара, пронумерованных числами $1, 2, 3$. Опыт состоит в вынимании из каждой урны по одному шару случайным образом (результат опыта, следовательно, — тройка шаров, номера которых могут повторяться). С этим опытом связываются две с.в.: X_1 — сумма номеров вынутых шаров, X_2 — произведение номеров. Составьте ряд распределения с.в. X_1 и ряд распределения с.в. X_2. Определите вероятности попадания значений каждой из этих величин в сегмент $[2;5]$, т.е. $P(X_1 \in [2;5])$ и $P(X_2 \in [2;5])$. Попытайтесь найти вероятность одновременного попадания значений той и другой с.в. в сегмент $[2;5]$.

Ответ: вероятности с.в. X_1: $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}$; с.в. X_2: $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}$. $\mathbf{P}\big(X_1 \in [2;5]\big) = \frac{8}{9}$, $\mathbf{P}\big(X_2 \in [2;5]\big) = \frac{5}{9}$, $\mathbf{P}\big(X_1, X_2 \in [2;5]\big) = \frac{5}{9}$.

9. Три стрелка производят залп по цели. Вероятности поражения цели каждым стрелком равны: $p_1 = 0,5$, $p_2 = 0,7$, $p_3 = 0,9$. Случайная величина X — число попаданий. Рассчитайте вероятности всех её значений и определите вероятность не менее двух попаданий — $\mathbf{P}(X \in [2;3])$. Оцените и обоснуйте расположение среднего значения. Вычислите $M(X)$.

Ответ: $P(X \in [2;3]) = 0,8$.

10. В магазин поступила партия из 10 телевизоров, в которой 4 дефектных. Институт решил приобрести 3 телевизора. Как вы думаете, каково наиболее вероятное число дефектных телевизоров в планируемой покупке? Предполагая, что выбор телевизоров при покупке случаен, найдите ожидаемое (математически) число дефектных телевизоров, которые могут оказаться в покупке.

Ответ: $M = 1,2$.

11. При испытаниях качества стрельбы обычно делают три выстрела в мишень. Качество можно оценивать двумя способами: а) средним расстоянием от точек разрыва снаряда до цели; б) числом попаданий. Введите две соответствующих с.в. и определите, — какая из них дискретная, какая непрерывная? Обоснуйте. Какой эксперимент надо провести, чтобы построить ряд распределения введённой вами д.с.в.?

Указание. Подумайте, как экспериментально найти вероятность попадания и далее рассчитать вероятности значений д.с.в.

12. Дан ряд распределения вероятностей некоторой абстрактной д.с.в. X в виде:

X	1	2	3	4	5	6	7
p	p_1	$2p_1$	$2p_1$	$3p_1$	p_1^2	$2p_1^2$	$7p_1^2 + p_1$

Найдите p_1, запишите ряд распределения с числовыми вероятностями и, глядя на него, оцените расположение математического ожидания, величины дисперсии и среднего квадратического отклонения. Вычислите точно M, D и σ. Оправдались ли ваши оценки? Если нет, то в чём причина ошибки? Составьте двух и трёхсигмовые интервалы: $(M - 2\sigma; M + 2\sigma)$, $(M - 3\sigma; M + 3\sigma)$. Покрывают ли они множество всех значений с.в. X?

13. Для определения качества стрелка проведено 100 выстрелов в мишень, при этом 38 выстрелов поразили цель. Составьте распределение вероятностей числа попаданий в серии из трёх выстрелов. Как часто можно ожидать не менее одного попадания? Оцените, и после этого рассчитайте M и σ.

14. Для сравнения качества стрельбы двух стрелков проведён эксперимент, — каждый сделал 100 серий по 3 выстрела. Распределение числа попаданий сведено в таблицы:

X_1	0	1	2	3
k	15	44	36	5

X_2	0	1	2	3
k	12	37	38	13

Какой стрелок лучше стреляет?

Указание. Найдите статистические вероятности, запишите ряды распределения и рассчитайте M и D.

15. Прибор состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность выхода из строя каждого элемента в течение гарантийного срока одинакова и равна $0,1$. Каково ожидаемое (математически) число отказов?

16. Опыт состоит в том, что две игральные кости подбрасываются дважды. Каждый раз обращают внимание, появилось ли чётное число очков на обеих костях. После этого фиксируют, сколько раз появилось чётное число очков на обеих костях, — это число и является значением с.в. в данном опыте. Напишите ряд распределения, оцените расположение M и вычислите M, D и σ.

Ответ: $p_0 = 9/16$, $p_1 = 6/16$, $p_2 = 1/16$.

17. Вероятность попадания в мишень неким стрелком равна $0,8$. Стрелку выдают патроны до тех пор, пока он не промахнётся. Каково наиболее вероятное число выданных патронов? Каково ожидаемое (среднее) число выданных патронов? К какому классу с.в. принадлежит введённая вами с.в.?

Указание. $p_k = 0,8^{k-1} \cdot 0,2$. Если не сможете просуммировать ряд, замените его частичной суммой и найдите M приближённо.

18. Два игрока играют в игру, поочерёдно подбрасывая монету. Выигрывает тот, у кого первого выпадет решка. У кого из них больше шансов выиграть и во сколько раз?

Указание. $\mathbf{P}(B) = 0,5 + 0,5^3 + 0,5^5 + \ldots$. Просуммируйте прогрессию с помощью формулы, указанной в п. 9 данной лекции. Аналогично рассчитайте $\mathbf{P}(A)$.

Игорь Петрович Костенко,
кандидат физ.-мат. наук, доцент,
действительный член Международной
педагогической академии.
email: kost@kubannet.ru

Предел последовательности

С. А. Кулешов

Предлагаем вашему вниманию вторую часть пособия, исходно представляющего собой приложение к книге А. Купиллари «Трудности доказательств. Как преодолеть страх перед математикой», вышедшей в 2002 году в Москве в издательстве «Техносфера». Автор приложения С. А. Кулешов является переводчиком всей книги с английского языка на русский. Публикация осуществлена с разрешения указанного издательства. В предыдущем номере опубликован параграф о сравнении бесконечных множеств. В настоящем номере — введение в теорию пределов.

Познакомившись с бесконечными множествами и приемами работы с ними, можно переходить к самому важному и наименее ясному понятию математического анализа — пределу. Мы не будем изучать пределы функций. Ими достаточно много занимаются на первом курсе любого технического ВУЗа. Беда в том, что не владея в полной мере пределом бесконечной последовательности, освоить предел функции очень тяжело. Да, естественно, большинство студентов в конце концов овладевают способностью вычислять несложные пределы функций. Но как только дело доходит до экзамена, когда требуется доказать тот или иной факт из теории пределов...

Обратимся к истокам проблемы. Еще древние греки легко оперировали с рациональными и простейшими иррациональными числами. А вот предельный переход многих из них заводил в тупик. Истории математики известно, что первый кризис в точной науке возник именно из-за пределов благодаря парадоксам Зенона. Об одном из них мы расскажем.

Предположим, что Ахиллес хочет догнать черепаху. Обозначим расстояние, разделяющее их в начальный момент времени, через u_1. Движение они начинают одновременно. Предполагается, что Ахиллес бегает существенно быстрее, чем ползает черепаха. Очевидно, он довольно быстро ее догонит. Но Зенон приводит рассуждение, которое «убедительно доказывает», что этого никогда не произойдет.

Через какой-то момент времени после старта Ахиллес покроет расстояние u_1, отделявшее первоначально его от черепахи. Но и она не стоит на месте и за это время проползет какое-то расстояние u_2. Значит, в этот момент Ахиллес еще не догнал черепаху. Затем Ахиллес пробежит и расстояние u_2, а черепаха за тот же промежуток времени опять уползет на какое-то расстояние $u_3 > 0$. И так далее... В тот момент, когда Ахиллес пробегает очередной промежуток u_n, черепаха отползает на ненулевое расстояние u_{n+1}. Следовательно, в каждый рассматриваемый момент времени n расстояние между соревнующимися больше нуля. Иными словами, Ахиллес никогда не догонит черепаху.

На это рассуждение можно выдвинуть по крайней мере два возражения. Разберем каждое из них и посмотрим, насколько они состоятельны.

Самое первое, что приходит в головы, это сказать, что рассуждение Зенона неверно, поскольку не вызывает сомнений: Ахиллес черепаху обязательно догонит. Действительно, не вызывает. Зенон и сам это прекрасно понимал, иначе не шла бы речь о парадоксе. Но этот аргумент не указывает на конкретную ошибку в рассуждении античного математика, а всего лишь говорит о том, что оно приводит к неверному ответу. Но вот почему?

Ладно, думаете Вы. Покритикуем само доказательство. Поскольку Ахиллес бежит быстрее черепахи, то расстояние, разделяющее их к каждому следующему моменту, будет постоянно сокращаться, становиться все меньше и меньше. В конце концов оно окажется не больше ступни древнего героя. Так что с практической точки зрения можно считать, что в этот-то момент он ее и догонит.

Это возражение уже более грамотное, но оно, тем не менее, не достигает своей цели. Причин этому две. Первая: мы говорим не о реальных соревнованиях, а о математической проблеме. Поэтому если расстояние между бегунами хоть и мало, но не равно нулю, мы не можем присудить победу в забеге Ахиллесу. Вторая: расстояние между соперниками на самом деле постоянно уменьшается. Да только почему оно станет сколь угодно маленьким? Рассмотрим такую последовательность:

$$u_1 = 1,1; \quad u_2 = 1,01; \quad \dots; \quad u_n = 1,\underbrace{0\dots0}_{n-1}1; \quad \dots$$

Здесь тоже каждый следующий член меньше предыдущего. Однако все они больше 1. Так что и второе возражение не решает нашего парадокса.

А может, сложить все промежутки, которые пробегает Ахиллес, да и дело с концом? Любопытное предложение. А как это сделать? Если бы речь шла о конечном числе слагаемых, то с теоретической точки зрения совершенно не важно, много их или мало. Мы бы нашли результат. Как же вычислить сумму бесконечного числа слагаемых? В общем виде рассуждать о такой операции довольно сложно. Поищем какой-нибудь простой конкретный пример.

Используя ту же мысль, что и в парадоксе Зенона, представим, что мы наблюдаем за двумя муравьями, направляющимися к своей норке (см. рис. 1).

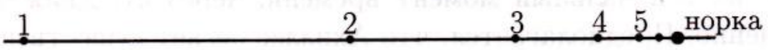


Рис. 1

В нулевой момент времени первый муравей стоит на отметке 1, а второй на отметке 2. Расстояние между ними составляет 1 м. Второму муравью нужно пробежать до норки тоже 1 м, однако скорость первого ровно в два раза выше скорости второго. Ясно, что начав путешествие к норке одновременно, муравьи попадут домой в одно и то же время (более быстрому предстоит пробежать вдвое большее расстояние). Таким образом, мы знаем, что до встречи со своим собратом первому муравью предстоит преодолеть 2 м. Будем теперь рассуждать по схеме, предложенной Зеноном, но при этом постараемся найти сумму бесконечного числа дистанций, которые будет пробегать первый муравей.

Итак, сначала более расторопный бегун, согласно Зенону, добежит до отметки 2, т. е. $u_0 = 1$. За это время второй муравей проползет в два раза меньшее расстояние, т. е. полметра и окажется на отметке 3. Затем первый муравей достигнет отметки 3, преодолев расстояние $u_1 = \frac{1}{2}$, а второй — отметки 4, отстоящей от 3 на расстоянии $u_2 = \frac{1}{4}$. Видно, что в каждый следующий момент как первый, так и второй муравьи будут пробегать ровно половину расстояния, пройденного на предыдущем этапе пробега. Так что сумма, которую нам нужно вычислить, состоит из следующих слагаемых:

$$u_0 = 1,\ u_1 = \frac{1}{2},\ u_2 = \frac{1}{4},\ u_3 = \frac{1}{8},\ \ldots,\ u_n = \frac{1}{2^n},\ \ldots$$

Полезно ввести стандартное обозначение для сумм такого вида.

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_N,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_N + \cdots,$$

где первое обозначение — краткая запись суммы хоть и сколь угодно большого, но конечного числа слагаемых, а второе — специально предназначено для бесконечных сумм. Скажем, что последняя сумма обычно называется числовым рядом, хотя сейчас это и не столь важно.

Как мы уже выяснили, первого муравья отделяют от норки 2 м. Так что искомая бесконечная сумма по идее должна быть тоже равна 2. Итак, нам предстоит доказать равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = 2.$$

Многие из читателей узнали в этой сумме бесконечную геометрическую прогрессию. И если они хорошо помнят школьные формулы, то с помощью легких арифметических действий они уже смогли убедиться в истинности равенства. Все это замечательно. Но формулу тоже ведь надо доказывать. Приведем доказательство (которое обычно показывают в школе) в этом конкретном случае и поразмышляем насколько оно корректно.

Обозначим искомую сумму через x, т. е.

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Разделим обе части этого равенства на 2 и получим

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \\ &= \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots) = \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

Очевидно, что если к обеим частям равенства теперь прибавить 1, то справа будет стоять исходная сумма, которая, как мы предположили, равна числу x. Таким образом мы получаем уравнение:

$$\frac{x}{2}+1=x,$$

откуда $x = 2$. На первый взгляд все вычисления кажутся безупречными. Да и с ответом, полученным другим способом, согласуются. Чего же еще желать? Но если Вы внимательно читали примеры доказательств, в том числе и неверных[1], то смогли убедиться, что точно таким же рассуждением доказывается соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty}3^n = -\frac{1}{2},$$

что абсурдно.

Где же спряталась ошибка? Можете не перепроверять вычисления. Они верны. Загвоздка в том, что как в первом, так и во втором случае мы неявно предполагаем, что бесконечная сумма равна какому-то вещественному числу. А на каком, собственно, основании? Разумеется, любой хороший учитель математики осознает всю трудность суммирования бесконечного числа слагаемых и иногда даже говорит о ней своим ученикам. Но на уроке при теперешней насыщенной программе нелегко объяснить школьникам существо проблемы. Мы же никак не ограничены временем и можем попытаться проникнуть в тайны бесконечных сумм.

Прежде всего поймем, почему во втором примере получается такой странный результат. Покажем, что сумма $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n$ не может быть равна никакому вещественному числу. Для этого сложим первые ее N слагаемых.

$$\sum_{n=0}^{N}3^n = 1+3+3^2+\cdots+3^N.$$

Поскольку здесь мы имеем дело с конечной суммой (может, и большого числа слагаемых), то по свойствам вещественных чисел в результате должно получиться

[1]В книге Купиллари, см. аннотацию.

вещественное число. Обозначим его через S_N. Прибавив к нему 3^{N+1}, мы получим следующую конечную сумму S_{N+1}. Значит,

$$S_N + 3^{N+1} = S_{N+1}.$$

Если же равенство вещественных чисел

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^N = S_N$$

умножить на 3 и к обеим его частям прибавить по 1, то

$$S_{N+1} = 3S_N + 1.$$

Возникла система уравнений на неизвестные S_N и S_{N+1}. Решая ее, находим

$$S_N = \frac{3^{N+1}-1}{2}.$$

Заметим, что $S_{N+1} > S_N + 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} S_{N+1} > S_N + 1 \ &\Leftrightarrow \frac{3^{N+2}-1}{2} > \frac{3^{N+1}-1}{2} + 1 \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3^{N+2} - 1 > 3^{N+1} + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3^{N+1}(3-1) > 2. \end{aligned}$$

Последнее неравенство истинно. Значит, и исходное верно.

Итак, прибавляя каждое следующее слагаемое, мы увеличиваем нашу сумму больше чем на 1. Следовательно, для любого наперед заданного числа M найдется такое N, что $S_N > M$. Осталось только заметить, что прибавляя к S_N еще бесконечное число положительных слагаемых, мы никак не сможем уменьшить результат. Ровно поэтому нет никакого вещественного числа, которому равнялась бы бесконечная сумма степеней тройки.

Проделаем аналогичную процедуру с первым рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Обозначив через a_N сумму первых N слагаемых, найдем

$$a_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n},$$

$$a_{N+1} = a_N + \frac{1}{2^{N+1}}, \quad \frac{1}{2}a_N + 1 = a_{N+1} \ \Rightarrow \ a_N + \frac{1}{2^{N+1}} = \frac{1}{2}a_N + 1,$$

откуда

$$a_N = 2 - \frac{1}{2^N}.$$

Стало быть, на каждом конечном шагу при сложении степеней $\frac{1}{2}$ мы будем получать сумму a_N, не превосходящую 2. Естественно предположить, что и бесконечная сумма не может быть больше 2. С другой стороны, как бы мало мы ни отступили от 2 влево, взяв какое-то вещественное число $b < 2$, найдется такой номер N, что a_N и все последующие конечные суммы будут больше b. Докажем это более аккуратно.

Так как $b < 2$, то разность $2-b = \varepsilon$ положительна. Найдем натуральное число N, удовлетворяющее неравенству:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N = \frac{1}{2^N} < \varepsilon.$$

Так как функция $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ убывает, то последнее равносильно такому:

$$N > \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon. \tag{1}$$

Таким образом, как только натуральное число N удовлетворяет неравенству (1), конечная сумма a_N станет больше b. Более того, очевидно, каждый следующий член нашей последовательности больше предыдущего. Поэтому можно утверждать, что не только a_N превысит b, но и все следующие конечные суммы попадут в интервал $(b, 2)$.

Все больше хочется сказать, что наша бесконечная сумма равна 2. Но, как говорится, обжегшись на молоке, дуешь на воду. Кое-какая неясность все же остается. Сможем ли мы сложить бесконечное число слагаемых? А если все же пренебречь этим опасением, то можно еще усомниться, что получится именно число, а не что-нибудь экзотическое. С возможностью бесконечного суммирования поделать ничего нельзя. Математики, оперируя с бесконечными суммами, физической возможности сложить все эти числа не придают значения, считая, что если можно как-то обосновать, что искомая сумма равна какому-то конкретному вещественному числу, то и дело с концом. К этой мысли придется привыкать постепенно. Но если вдуматься, то ничего особенно странного в этом нет. Вы и сами часто прибегаете к таким ухищрениям. Представьте, что Вам нужно вычислить сумму:

$$S = \underbrace{21 + 21 + 21 + \cdots + 21}_{21}.$$

Вы же не станете по-настоящему складывать все эти слагаемые, а замените сложение умножением: $S = 21 \cdot 21 = 441$.

Вот второе сомнение наиболее существенно. Именно оно не позволяло грекам выйти из кризиса, порожденного парадоксами Зенона. Выход, конечно, есть. Он заключается в предельном переходе, о котором и пойдет речь дальше.

Рассмотрим еще раз нашу бесконечную последовательность конечных сумм:

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{3}{2},\ a_2 = \frac{7}{4},\ \ldots,\ a_n = 2 - \frac{1}{2^n},\ \ldots$$

Как мы уже видели, она возрастает и ограничена, т. е. для любого номера n имеет место неравенство $a_n < a_{n+1} < 2$. Фактически нам нужно приписать такой последовательности какое-то вещественное число. Сделаем это в общем виде.

Пусть нам дана бесконечная последовательность

$$\{b_n\} = b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$$

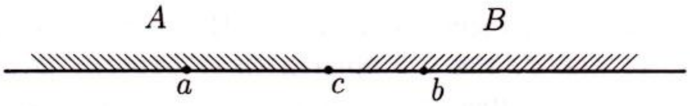


Рис. 2

которая возрастает и ограничена сверху. Последнее условие означает, что найдется такое вещественное число M, что любой член последовательности будет удовлетворять неравенству $b_n < M$. Попытаемся приписать ей определенное вещественное число, к которому приближаются или, еще говорят, стремятся члены последовательности. Сразу скажем, что отталкиваясь от школьного курса математики, абсолютно строго, да так, чтобы еще и понятно было, это сделать невозможно. Нужна дополнительная аксиома вещественных чисел, т. е. интуитивно ясное утверждение, принимаемое на веру, но на которое можно опираться при доказательствах.

Принцип непрерывности. Предположим, что элементы двух подмножеств вещественных чисел A и B обладают следующим свойством: для каждого элемента $a \in A$ и любого $b \in B$ выполнено неравенство

$$a \leq b.$$

Тогда найдется такое вещественное число c, которое лежит строго между этими множествами. Иными словами, для всех пар $a \in A$ и $b \in B$ будет справедливо двойное неравенство:

$$a \leq c \leq b.$$

Принцип сомнений не вызывает, особенно если множества, о которых идет речь, изобразить на рисунке. Сразу отметим, что в нем не говорится о единственности точки c. Да это будет и неправильно. Достаточно рассмотреть

$$A = \{0\}, \qquad B = \{1\},$$

чтобы убедиться, что в качестве точки c может выступать любое вещественное число, принадлежащее отрезку $[0, 1]$. Но при некотором дополнительном условии такая точка c будет только одна.

Усиленный принцип непрерывности. Допустим, что элементы двух подмножеств вещественных чисел A и B обладают следующими свойствами:

– для каждого элемента $a \in A$ и любого $b \in B$ выполнено неравенство $a \leq b$;

– для любого положительного числа ε найдется пара элементов $a \in A$ и $b \in B$, для которой $|b - a| < \varepsilon$.

Тогда существует единственное вещественное число c, лежащее строго между A и B.

Доказательство. О том, что хотя бы одно число c между множествами A и B найдется, говорит принцип непрерывности, который не нуждается в доказательстве. Предположим теперь, что есть еще какое-то число c', удовлетворяющее неравенству

$$a \leq c' \leq b$$

для любой пары элементов из множеств A и B. Поскольку и c удовлетворяет такому неравенству, то как c', так и c принадлежат отрезку $[a, b]$. Следовательно, расстояние между c и c' не превышает расстояния между a и b. Запишем это в терминах модулей:

$$|c - c'| \leq |b - a|.$$

С другой стороны, мы предположили, что $c \neq c'$. Поэтому $\varepsilon_0 = |c - c'| > 0$. Стало быть, какие бы мы элементы $a \in A$ и $b \in B$ ни взяли, отрезок $[a, b]$ будет содержать обе точки c и c' и расстояние $|b - a|$ будет больше ε_0. Полученное противоречие с условием доказывает единственность точки c. ■

Вернемся к возрастающей последовательности и рассмотрим множество A, состоящее из всех вещественных чисел M, которые больше любого члена последовательности $\{b_n\}$.

Лемма 1. *Множество A имеет минимальный элемент, т. е. такое число $M_0 \in A$, которое меньше любого $M \in A$.*

Доказательство. Обозначим через B множество всех элементов последовательности $\{b_n\}$:

$$B = \{b_n |\ n = 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

Ввиду выбора множества A, каждый его элемент больше или равен любому члену последовательности $\{b_n\}$, т. е. элемента множества B. По принципу непрерывности найдется такое число c, что

$$b_k \leq c \leq M \tag{2}$$

для всякого $b_k \in B$ и $M \in A$. В частности, c меньше любого элемента множества A. Покажем, что $M_0 = c$ принадлежит множеству A. Для этого достаточно показать, что любой член последовательности $\{b_n\}$ не превосходит $M_0 = c$. Но это непосредственно следует из неравенства (2). Лемма доказана. ■

Лемма 2. *Число M_0, найденное в предыдущей лемме, обладает следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N $(n > N)$, что все элементы последовательности $\{b_n\}$, номер которых больше N, удовлетворяют неравенству $|b_n - M_0| < \varepsilon$.*

Доказательство. Раскрывая модуль, неравенство из условия можно переписать в виде

$$M_0 - \varepsilon < b_n < M_0 + \varepsilon.$$

Так как M_0 — наименьший элемент множества A, то число $M_0 - \varepsilon < M_0$ уже ему не принадлежит. Поэтому найдется член последовательности b_N, превышающий $M_0 - \varepsilon$ (в противном случае число $(M_0 - \varepsilon) \in A$). Точнее говоря, $M_0 - \varepsilon < b_N$. Последовательность $\{b_n\}$ возрастает. Значит, как только $n > N$, имеем $b_n > b_N > > M_0 - \varepsilon$. С другой стороны, M_0 больше любого члена нашей последовательности. Следовательно, $M_0 + \varepsilon > M_0 > b_n > M_0 - \varepsilon$. Лемма доказана. ■

Следствие 3. *В любом сколь угодно малом интервале (α, β), включающем число M_0, содержится бесконечно много членов последовательности $\{b_n\}$, в то время как вне его находится только конечное число членов.*

Доказательство. Так как $M_0 \in (\alpha, \beta)$, то имеет место строгое неравенство

$$\alpha < M_0 < \beta.$$

Ясно, что найдется такое положительное число ε, что

$$\alpha < M_0 - \varepsilon < M_0 < M_0 + \varepsilon < \beta$$

(см. рис. 3).

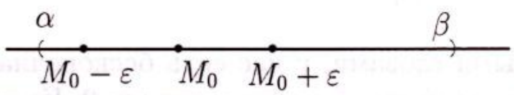


Рис. 3

По предыдущей лемме все элементы b_n, начиная с некоторого номера N, удовлетворяют неравенству

$$|b_n - M_0| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \alpha < M_0 - \varepsilon < b_n < M_0 + \varepsilon < \beta$$

и поэтому принадлежат интервалу (α, β). Заметим, что таких членов действительно бесконечно много: $b_N, b_{N+1}, \ldots, b_K, \ldots$. С другой стороны, вне интервала могут лежать только такие b_n, чей номер меньше N. Значит, их количество не превосходит N, т. е. конечно. ■

Благодаря следствию становится ясно, что после того, как мы отбросим какое-то конечное число членов последовательности, вся она будет помещаться в очень малом интервальчике, окружающем M_0. Можно даже считать, что он настолько мал, что изображается на прямой маленьким пятнышком, очень похожим для нашего глаза на точку. Так что очень естественно приписать нашей последовательности именно число M_0. Такое число принято называть пределом последовательности $\{b_n\}$. Сформулируем точное определение.

Определение. Вещественное число M_0 называется *пределом последовательности* $\{b_n\}$ (не обязательно возрастающей), если для любого положительного ε найдется такое натуральное число $N(\varepsilon)$, зависящее от ε, что все элементы последовательности $\{b_n\}$, номер которых больше $N(\varepsilon)$ $\;(n > N(\varepsilon))$, удовлетворяют неравенству

$$|b_n - M_0| < \varepsilon.$$

При этом пишут:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = M_0.$$

Подводя итог исследованиям возрастающей последовательности, сформулируем доказанную нами теорему.

Теорема 4. *Любая ограниченная возрастающая последовательность имеет предел.*

Вернемся к парадоксу. Мы остановились на желании вычислить бесконечную сумму

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

При этом определили, что для всякого натурального числа N конечная сумма

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^N}$$

равна $a_N = 2 - \frac{1}{2^N}$. Иными словами, у нас есть бесконечная возрастающая последовательность $\{a_N\}$, члены которой не превосходят 2. Кроме того, вычисления на стр. 50 фактически доказывают, что

$$\lim_{N\to\infty} a_N = 2.$$

Поэтому для корректного решения задачи по бесконечному суммированию нам осталось лишь сформулировать следующее определение.

Определение. Рассмотрим бесконечную последовательность $\{u_n\}$ и формальную сумму ее членов

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Говорят, что она равна числу S, если предел последовательности конечных сумм равен S. Более точно,

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} u_n \right) = S.$$

Бесконечные суммы или ряды безусловно служат интересным объектом исследований и обсуждений. Но как Вы уже успели заметить, этот вопрос тесно связан с пределом последовательности и, видимо, вообще со свойствами бесконечных последовательностей. В упражнениях, помещенных в конце этого параграфа, сформулировано несколько задач о рядах. Решая их, Вы лучше познакомитесь с этим предметом. Наша же цель — более подробно обсудить предельный переход. Для этого полезно разобрать какое-то количество примеров и выяснить свойства пределов и бесконечных последовательностей. Начнем с примеров.

Довольно часто в ответ на вопрос, что такое предел последовательности, можно услышать ответ: это такое число, к которому стремятся члены последовательности, но никогда его не достигают. Следующие примеры показывают, что это не так.

Пример 1. Пусть все члены последовательности $\{a_n\}$ равны какому-то одному числу a, т. е.

$$a_0 = a_1 = a_2 \cdots = a_n = \cdots = a$$

(такая последовательность называется постоянной). Тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Доказательство. Если вспомнить, что последовательность, имеющая пределом число L, вся, начиная с некоторого члена, должна располагаться в маленьком интервальчике, охватывающем L, то утверждение примера сомнений не вызовет. Тем не менее его нужно доказать, опираясь на определение.

Возьмем произвольное положительное ε. Нам нужно указать такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что как только $n > N(\varepsilon)$, так

$$|a - a_n| < \varepsilon.$$

Любой член нашей последовательности равен a. Поэтому модуль разности $|a_n - a|$ равен нулю, т. е. меньше ε. Итак, можно утверждать, что искомое натуральное число $N(\varepsilon) = 1$. ■

Пример 2. Рассмотрим последовательность

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ \frac{1}{n}, & \text{если } n = 2k+1. \end{cases}$$

Иными словами, каждый ее член с четным номером равен 0, а с нечетным — некоторой дроби. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу определения предела нам нужно для этого ε найти такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что все члены последовательности с номером $n > N(\varepsilon)$ удовлетворяют неравенству:

$$|a_n - 0| < \varepsilon. \tag{3}$$

Поскольку отнимая нуль от числа мы ничего не меняем, а все члены нашей последовательности неотрицательны, то это неравенство можно переписать как

$$a_n < \varepsilon.$$

Заметим, что если n — четное число, то $a_n = 0$ и неравенство выполнено. Предположим теперь, что n — нечетное число. Тогда $a_n = \frac{1}{n}$ и неравенство приобретает вид:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Значит, как только
$$n > \frac{1}{\varepsilon},$$
мы получаем: $a_n < \varepsilon$. Поэтому в качестве $N(\varepsilon)$, фигурирующего в определении предела, можно взять любое натуральное число, которое больше $\frac{1}{\varepsilon}$. Положим, например,
$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1,$$
где, как обычно, квадратные скобки обозначают целую часть числа, т. е. наибольшее натуральное число, не превосходящее данное.

Убедимся, что наш выбор доказывает утверждение. Пусть $n > N(\varepsilon)$. Если n — четное число, то $a_n = 0$ и неравенство (3) справедливо. Если n — нечетно, то
$$n > N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$
Следовательно,
$$a_n = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$
т. е. неравенство (3) выполнено. ∎

Обратим внимание на очередную трудность, которая мешает овладеть понятием предела. Дело в том, что в определении речь идет о натуральном числе $N(\varepsilon)$, зависящем от ε. Так что создается впечатление, что $N(\varepsilon)$ по ε определяется однозначно. Это, разумеется не так! За разъяснением обратимся к предыдущему примеру. Там мы взяли в качестве $N(\varepsilon)$ некоторое конкретное натуральное число, однозначно определяемое по ε. Но могли выбрать и любое другое натуральное число, бо́льшее $N(\varepsilon)$. Действительно, пусть $K = N(\varepsilon) + 10$ и $n > K$. Тогда номер n все равно будет больше $N(\varepsilon)$ и, стало быть,
$$|a_n - 0| < \varepsilon.$$

Пример 3. Предел последовательности $\left\{a_n = \frac{2n-3}{n+4}\right\}$ равен 2, т. е.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{n+4} = 2.$$

Доказательство. Возьмем произвольное положительное число ε. Чтобы найти $N(\varepsilon)$, нам предстоит решить неравенство:
$$\left|\frac{2n-3}{n+4} - 2\right| < \varepsilon,$$
которое равносильно двойному неравенству:
$$2 - \varepsilon < \frac{2n-3}{n+4} < 2 + \varepsilon.$$

Умножим его на положительное число $n+4$:

$$2(n+4) - \varepsilon(n+4) < 2n - 3 < 2(n+4) + \varepsilon(n+4).$$

Отсюда видно, что исходное неравенство равносильно следующему:

$$-\varepsilon(n+4) < -11 < \varepsilon(n+4).$$

Поскольку произведение $\varepsilon(n+4)$ положительно, то правая часть неравенства справедлива при любом натуральном числе n. Выразим n из его левой части:

$$\begin{aligned} -\varepsilon(n+4) < -11 \ &\Leftrightarrow \varepsilon(n+4) > 11 \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n+4 > \frac{11}{\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow n > \frac{11}{\varepsilon} - 4. \end{aligned}$$

Так как мы пользовались только равносильными преобразованиями неравенства, можно утверждать, что если $n > \frac{11}{\varepsilon} - 4$, то

$$\left|\frac{2n-3}{n+4} - 2\right| < \varepsilon.$$

Значит, в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять любое натуральное число, бо́льшее $\frac{11}{\varepsilon} - 4$, например, $N(\varepsilon) = \left[\frac{11}{\varepsilon} - 4\right] + 1$, где, как обычно, квадратными скобками мы обозначаем целую часть числа. ■

Теперь имеет смысл привести примеры последовательностей, которые не имеют предела (есть и такие).

Пример 4. Последовательность $\{a_n = (-1)^n\}$ предела не имеет.

Доказательство. Прежде чем приступить к формальному изложению доказательства, внимательно посмотрим на данную последовательность. Первые несколько ее членов выглядят следующим образом:

$$a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1,\ a_4 = 1.$$

Иными словами, в ней чередуются 1 и -1. Интуитивно ясно, что такой последовательности нельзя приписать ни одного вещественного числа. Вопрос только в том, как это доказать? Здесь мы сталкиваемся с утверждением, содержащим в своей формулировке частицу «не». Согласно общим принципам доказательств, приведенным в этой книге[2], его следует доказывать методом «от противного».

Итак, предположим, что найдется какое-то вещественное число L, равное пределу этой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = L.$$

[2]См. аннотацию.

По определению предела для любого положительного числа ε найдется такое $N(\varepsilon)$, что как только $n > N(\varepsilon)$, будет выполнено неравенство:

$$L - \varepsilon < (-1)^n < L + \varepsilon.$$

Иными словами, все члены последовательности, номер которых больше $N(\varepsilon)$, попадают в интервал $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. В частности, расстояние между этими членами последовательности не будет превышать 2ε (длины интервала). Однако модуль разности двух соседних членов нашей последовательности постоянен и равен

$$|a_n - a_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = 2.$$

Значит, если $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то расстояние между любыми соседними членами последовательности будет больше, чем 2ε. Полученное противоречие доказывает отсутствие предела у последовательности $\{(-1)^n\}$. ■

Аналогичным рассуждением доказывается следующее утверждение.

Пример. 5. Последовательность $\{a_n = n\}$ не имеет конечного предела. То есть не существует такого вещественного числа L, что

$$\lim_{n\to\infty} n = L.$$

Мы не будем доказывать это утверждение, оставив его проверку в качестве легкого упражнения. Отметим только: в математике принято говорить, что предел такой последовательности равен бесконечности. Попытайтесь сформулировать соответствующее определение.

Перейдем к элементарным свойствам конечных пределов. Если внимательно прочитать определение предела, то можно легко убедиться, что в нем ничего не говорится о единственности предела последовательности. Иными словами, возникает вопрос: может ли быть так, что предел какой-то последовательности равен не одному, а нескольким вещественным числам. Ответ содержится в следующей теореме.

Теорема 5. *Предел последовательности определен однозначно.*

Доказательство. Здесь нужно предположить, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \text{и} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = B$$

и показать: $A = B$.

Если $A \neq B$, то без ограничения общности можно предположить, что $A < B$. В этом случае $\varepsilon = \frac{B-A}{3} > 0$.

Так как A — предел последовательности $\{a_n\}$, то (по определению) найдется такое натуральное число N_A, что все элементы последовательности, номер которых больше N_A, удовлетворяют неравенству:

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

С другой стороны, B — предел той же последовательности. Значит, существует такое число N_B, что как только $n > N_B$, верно неравенство:

$$B - \varepsilon < a_n < B + \varepsilon.$$

Поскольку можно найти сколь угодно большое натуральное число, выберем такое m, что $m > N_A$ и $m > N_B$. Тогда элемент последовательности a_m должен удовлетворять обоим неравенствам:

$$A - \varepsilon < a_m < A + \varepsilon,$$
$$B - \varepsilon < a_m < B + \varepsilon.$$

В геометрических терминах это означает, что точка a_m одновременно принадлежит интервалам $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ и $(B - \varepsilon, B + \varepsilon)$. Однако эти интервалы не пересекаются! Действительно,

$$A + \varepsilon = A + \frac{B - A}{3} < B - \frac{B - A}{3} = B - \varepsilon$$

(см. рис. 4).

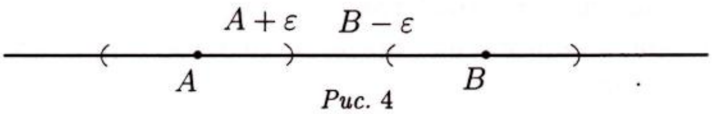


Рис. 4

Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Теорема 6. *Отбросив от бесконечной последовательности $\{a_n\}$ несколько первых членов $(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1})$, получим новую бесконечную последовательность $\{b_n\}$, где $b_0 = a_m$, $b_1 = a_{m+1}$, ..., $b_n = a_{m+n}$, ..., причем если у последовательности $\{a_n\}$ существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A,$$

то у последовательности $\{b_n\}$ тоже существует предел и

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

Доказательство. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Для доказательства теоремы нам достаточно предъявить такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что как только $n > N(\varepsilon)$, выполнено неравенство:

$$|b_n - A| < \varepsilon.$$

По условию $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Значит найдется такое натуральное число $M(\varepsilon)$, что если $k > M(\varepsilon)$, то

$$|a_k - A| < \varepsilon.$$

Осталось вспомнить, что $a_k = b_{k-m}$, т. е. как только $k > M(\varepsilon)$, имеем

$$|b_{k-m} - A| < \varepsilon.$$

Следовательно, положив $N(\varepsilon) = M(\varepsilon) - m$, мы укажем требуемое натуральное число (проверьте!). ■

Теорема 7. *Имеющая предел последовательность ограничена. Иными словами, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то найдется такое число M, что все члены последовательности удовлетворяют неравенству:*

$$|a_n| < M.$$

Доказательство. Здесь имеется в виду, что члены последовательности, которая имеет предел, не могут быть сколь угодно большими. Докажем это. Прежде всего отметим, что это свойство верно для любой конечной последовательности, поскольку в любом конечном множестве можно найти наибольший элемент. Наша трудность заключается в том, что последовательность, о которой идет речь, бесконечна и может не иметь максимального элемента (например $a_n = n$). С другой стороны, нам известно, что последовательность имеет предел A. Поэтому в любом интервале, окружающем A, содержится бесконечно много членов последовательности, а вне его — конечное их число. Это — основная идея, которую можно довести до строго доказательства и не прибегая к формулам (попытайтесь это сделать). Нам же нужно освоить определение предела. Поэтому проведем доказательство, опираясь на «ε-формализм».

Пусть положительное число ε из определения предела равно 1. Тогда найдется такое натуральное число N, что при $n > N$ будет выполняться неравенство

$$|a_n - A| < 1,$$

которое можно переписать в виде:

$$A - 1 < a_n < A + 1.$$

Можно ли утверждать, что $|a_n| < A+1$ при $n > N$? К сожалению, нет: $A + 1$ может быть отрицательным числом. Но в любом случае, отрицательно A или положительно, можно написать:

$$|a_n| < |A| + 1.$$

Этим рассуждением мы показали, что модуль любого члена последовательности, за исключением конечного числа (номер которых не больше N), не превосходит $|A|+1$. Для строгого доказательства теоремы осталось выбрать наибольший элемент из

$$|a_0|,\ |a_1|,\ \ldots,\ |a_N| \text{ и } |A| + 1,$$

который и будет равен искомой константе M. ■

Оставшиеся свойства, которые полезно разобрать, касаются арифметики пределов. Аналогичная тема объясняется и в стандартном курсе математического анализа. Однако на примере предела последовательности она воспринимается легче. Нам потребуется несложная лемма о модуле суммы вещественных чисел.

Лемма 8. *Пусть a и b — вещественные числа. Тогда*

$$|a+b| \le |a| + |b|.$$

Доказательство. Обе части доказываемого неравенства положительны. Поэтому, возведя их в квадрат, мы получим равносильное неравенство:

$$|a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2 \;\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \le a^2 + 2|a||b| + b^2$$
$$\Leftrightarrow 2ab \le 2|a||b|.$$

Последнее неравенство не вызывает сомнений, поскольку модуль его левой части равен правой, а последняя всегда неотрицательна. ■

Теорема 9. *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \text{и} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

Тогда сумма последовательностей $\{a_n + b_n\}$ тоже имеет предел, причем

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо три раза воспользоваться определением предела.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N_a(\varepsilon)$, что неравенство $n > N_a(\varepsilon)$ влечет:

$$|A - a_n| < \varepsilon.$$

С другой стороны, нам известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Значит, можно найти натуральное число $N_b(\varepsilon)$, такое что как только $n > N_b(\varepsilon)$, то

$$|B - b_n| < \varepsilon.$$

Теперь по заданному положительному ε нам необходимо найти такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что если $n > N(\varepsilon)$, то

$$|A + B - (a_n + b_n)| < \varepsilon.$$

Преобразуем левую часть неравенства, воспользовавшись леммой.

$$|A + B - (a_n + b_n)| = |(A - a_n) + (B - b_n)| \le$$
$$\le |(A - a_n)| + |(B - b_n)|.$$

Стало быть, как только $|(A - a_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|(B - b_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$, то нужное нам неравенство будет выполнено. Мы уже знаем, что если $n > N_a(\frac{\varepsilon}{2})$, то имеет место первое из этих неравенств, а при $n > N_b(\frac{\varepsilon}{2})$ — второе. Пусть $N(\varepsilon)$ равно наибольшему из чисел $N_a(\frac{\varepsilon}{2})$ и $N_b(\frac{\varepsilon}{2})$. Тогда для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ одновременно выполняются неравенства:

$$|(A - a_n)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{и} \qquad |(B - b_n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так что при $n > N(\varepsilon)$

$$|A + B - (a_n + b_n)| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. ■

Теорема 10. *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad u \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

Тогда произведение последовательностей $\{a_n b_n\}$ *тоже имеет предел, причем*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = AB.$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы практически ничем не отличается от предыдущего, но опирается на некоторый стандартный прием, с которым Вы сейчас и познакомитесь. Как и раньше, по определению предела для любого положительного ε найдутся такие числа $N_a(\varepsilon)$ и $N_b(\varepsilon)$, что как только номер n больше каждого из них, то

$$|a_n - A| < \varepsilon \qquad \text{и} \qquad |b_n - B| < \varepsilon.$$

И нам хотелось бы модуль разности $|a_n b_n - AB|$ представить как сумму двух модулей, каждый из которых меньше ε. Мы, конечно, можем написать:

$$|a_n b_n - AB| \le |a_n b_n| + |AB|,$$

но это ничего не даст, поскольку нам неизвестны величины слагаемых. Стандартный трюк состоит в том, чтобы прибавить что-то к исследуемой разности, а потом отнять то же самое:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \le \\ &\le |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB| = \\ &= |a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A|. \end{aligned}$$

Ага! Смотрите, что получилось: мы показали, что интересующая нас разность не превосходит суммы произведений модулей. Причем каждое из этих произведений содержит довольно маленький сомножитель: $|b_n - B|$ или $|a_n - A|$.

Так как $|B|$ — число неотрицательное, то дробь $\frac{\varepsilon}{|B|+1}$ — положительна и как только $n > N_a\left(\frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}\right)$, имеет место неравенство:

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B| + 1)}.$$

Таким образом,

$$n > N_a\left(\frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}\right) \quad \Rightarrow \quad |B|\cdot|a_n - A| < |B|\frac{\varepsilon}{2(|B|+1)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если бы теперь удалось показать, что начиная с некоторого номера выполняется и такое неравенство: $|a_n|\cdot|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$, то мы бы все доказали. Воспользуемся теоремой 7 об ограниченности последовательности, имеющей предел (стр. 60). Она говорит, что найдется такое число M, при котором любой член последовательности удовлетворяет неравенству: $|a_n| < M$. Таким образом,

$$|a_n|\cdot|b_n - B| < M\cdot|b_n - B|.$$

Поэтому для всех $n > N_b\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)$ имеет место неравенство:

$$|a_n|\cdot|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Осталось взять в качестве N наибольшее из $N_a\left(\frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}\right)$ и $N_b\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)$. ■

Теорема 11. *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \neq 0$$

и $a_n \neq 0$ для любого номера n. Тогда последовательность $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ ограничена и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{A}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что ввиду условий теоремы все дроби $\frac{1}{a_n}$ и $\frac{1}{A}$ имеют смысл. Для строгого доказательства теоремы надо было бы разобрать две возможности: $A > 0$ и $A < 0$. Но эти ситуации ничем принципиально не отличаются. Мы докажем теорему для случая $A > 0$, оставив другой в качестве тренировочного упражнения.

Итак, пусть $A > 0$. Выбрав в качестве ε в определении предела число $\frac{A}{2}$, мы найдем такой номер N, что как только $n > N$, то

$$\frac{A}{2} = A - \frac{A}{2} < a_n < A + \frac{A}{2} = \frac{3A}{2}.$$

Иными словами, все члены последовательности, начиная с номера N, попадают в интервал, целиком лежащий справа от нуля (см. рис. 5).

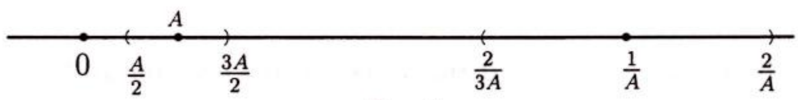


Рис. 5

Тогда обратные к ним числа $\frac{1}{a_n}$ лежат в интервале $\left(\frac{2}{3A}, \frac{2}{A}\right)$. Иными словами, все члены последовательности $\frac{1}{a_n}$, за исключением конечного числа, удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{2}{A}.$$

Значит и для всей последовательности найдется такое число M, что

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < M.$$

Первая часть теоремы доказана: мы убедились, что последовательность $\{\frac{1}{a_n}\}$ ограничена.

Оценим модуль разности:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right|.$$

Приведем к общему знаменателю разность дробей:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right| = \left|\frac{A - a_n}{a_n A}\right| = \left|\frac{1}{a_n}\right|\left|\frac{1}{A}\right||A - a_n|.$$

Так как $\left|\frac{1}{a_n}\right| < M$, получаем оценку:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right| < \frac{M}{|A|} \cdot |A - a_n|.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, для любого наперед выбранного положительного числа ε найдется такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ имеет место неравенство:

$$|A - a_n| < \varepsilon.$$

В частности, при $n > N\left(\varepsilon\frac{|A|}{M}\right)$ получаем:

$$|A - a_n| < \varepsilon\frac{|A|}{M},$$

т. е.

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right| < \frac{M}{|A|} \cdot |A - a_n| < \frac{M}{|A|} \cdot \varepsilon\frac{|A|}{M} = \varepsilon.$$

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ мы указали нужное число $N = N\left(\varepsilon\frac{|A|}{M}\right)$ (см. опр. предела). ■

Мы проделали неплохую работу по доказательству элементарных свойств предела последовательности, опираясь только на определение и простые свойства неравенств. Теперь, используя доказанные факты, можно сравнительно легко получить еще несколько свойств пределов. Докажем только одно из них, оставив обоснование остальных в качестве полезных упражнений.

Теорема 12. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ и последовательность $\{b_n\}$ получена из данной умножением каждого члена на фиксированное вещественное число: $b_n = c\cdot a_n$. Тогда предел последовательности $\{b_n\}$ существует и равен cA. Иными словами, справедлива формула:*

$$\lim_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Доказательство. Стоит воспользоваться утверждением примера 1 на стр. 55 и теоремой 10 (стр. 62). Определим новую последовательность $\{c_n\}$, положив $c_n = c$ для любого номера n. Тогда, согласно примеру 1

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c.$$

Кроме того, последовательность $\{b_n\}$ теперь можно представить как произведение последовательностей $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$

$$b_n = c\cdot a_n = c_n a_n$$

и применить теорему 10, благодаря которой можно утверждать, что

$$\lim_{n\to\infty}(c_n a_n) = \lim_{n\to\infty} c_n\cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c\cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

■

Теорема 13. *Предположим, что*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

Тогда существует предел разности последовательностей, причем

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B.$$

Теорема 14. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, члены последовательности $\{b_n\}$ не обращаются в нуль, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ и $B \neq 0$. Тогда существует предел отношения последовательностей, который вычисляется по формуле*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

В заключение раздела о пределе последовательности имеет смысл внимательнее посмотреть на вещественные числа. Как в этой книге, так и в школе утверждается, что любое вещественное число можно представить в виде десятичной дроби: конечной или бесконечной. Скорее всего Вы привыкли к этой мысли. А вот сможете ли аккуратно обосновать этот факт?..

Конечно, это не самый принципиальный момент в математике. Для ее дальнейшего изучения вовсе не обязательно подробно изучать бесконечные десятичные дроби. Однако на этом примере можно гораздо лучше освоить понятие предельного перехода, столь необходимого для понимания математического анализа.

На первый взгляд фраза «рассмотрим бесконечную десятичную дробь» лишена смысла. Как это можно сделать? И даже если Вам удалось их «рассмотреть», то как с ними работать: складывать, вычитать, делить, умножать? С конечными десятичными дробями мы можем делать все арифметические действия. Если, например, мы их складываем, то пишем дроби одну под другой так, чтобы десятичная запятая находилась под запятой и складываем в столбик как обычные натуральные числа, ставя потом в нужное место десятичную запятую. Можно было бы предложить аналогичный рецепт и для сложения бесконечных десятичных дробей. Да только что при этом делать с переносом разрядов? Ведь складывая натуральные числа (или конечные десятичные дроби), мы вычисляем сумму цифр одинаковых разрядов, начиная с меньшего, и если результат оказывается больше 9, переносим полученное число десятков в следующий разряд. А как быть с бесконечными дробями? У них же нет наименьшего разряда — на то они и бесконечны.

Надо отдавать себе отчет в том, что бесконечные десятичные дроби всего лишь некая абстракция, отражающая отношение порядка на вещественной прямой и позволяющая вычислять конкретное число с любой степенью точности. Действительно, для того чтобы определить наибольшее из чисел e (основание натурального логарифма) и π, нам не нужно знать все их знаки в десятичной записи, а только два:

$$\pi = 3,1 > e = 2,7,$$

хотя они оба иррациональны и записываются бесконечными десятичными дробями.

Как же понимать бесконечные дроби? Как доказать, что любая бесконечная десятичная дробь действительно соответствует какому-то числу. И наоборот, почему любое вещественное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби. На эти и некоторые другие вопросы мы сейчас и ответим.

Для начала рассмотрим такую бесконечную последовательность:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 0,3,\ a_2 = 0,33,\ a_3 = 0,333,\ \ldots,\ a_n = 0,\underbrace{33\ldots3}_{n},\ \ldots$$

Очевидно, что она возрастает и ограничена. Значит, по теореме 4 (стр. 54) существует предел L этой последовательности. Попытаемся его вычислить, представив каждый член последовательности в виде конечной суммы некоторого ряда.

$$a_0 = 0,\ a_1 = 0 + 0,3,\ \ldots,\ a_n = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{3}{10^n},\ \ldots.$$

По определению бесконечной суммы получаем, что

$$L = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}.$$

Мы уже знаем, что L — какое-то вещественное число. Поэтому для его вычисления можем использовать все известные нам свойства вещественных чисел. Умножим равенство на 10:

$$10L = 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}.$$

Так как бесконечная сумма в правой части формулы равна L, получаем уравнение:

$$10L = 3 + L,$$

откуда $L = \frac{1}{3}$. Тем самым мы доказали, что предел последовательности $\{0,\underbrace{33\dots3}_{n}\}$ существует и равен $\frac{1}{3}$. С другой стороны, этот предел можно интерпретировать как бесконечную десятичную дробь, в которой после запятой стоят только тройки. Такая дробь называется периодической и коротко записывается в виде

$$0,333\dots33\dots = 0,(3).$$

Стало быть, мы получили равенство:

$$0,(3) = \frac{1}{3}.$$

Очевидно, что любая конечная десятичная дробь равна определённому рациональному числу:

$$\pm a_1a_2\dots a_k, b_1b_2\dots b_n = \pm a_1a_2\dots a_k \pm \frac{b_1b_2\dots b_n}{10^n}.$$

Покажем, что любая бесконечная, но периодическая дробь тоже равна рациональному числу, т. е. отношению целых чисел. Поскольку противоположное к рациональному числу — рационально, можно предполагать, что исследуемая периодическая дробь

$$a_1a_2\dots a_k, b_1b_2\dots b_n(c_1c_2\dots c_m)$$

положительна. Представим ее в виде суммы

$$a_1a_2\dots a_k, b_1b_2\dots b_n(c_1c_2\dots c_m) = a_1a_2\dots a_k, b_1b_2\dots b_n + \\ + 0,\underbrace{00\dots0}_{n}(c_1c_2\dots c_m).$$

Ее первое слагаемое — рациональное число и, так как сумма рациональных чисел рациональна, для доказательства утверждения достаточно представить дробь $0,\underbrace{00\dots0}_{n}(c_1c_2\dots c_m)$ в виде отношения целых чисел. Обозначим последнюю периодическую дробь через C и умножим ее на 10^n

$$10^nC = 0,(c_1c_2\dots c_m).$$

Далее поступим так же, как с $0,(3)$. А именно, представим число 10^nC в виде бесконечной суммы:

$$10^nC = \frac{c_1c_2\dots c_m}{10^m} + \dots + \frac{c_1c_2\dots c_m}{10^{im}} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_1c_2\dots c_m}{10^{im}}.$$

Очевидно, что последовательность конечных сумм этого ряда возрастает и ограничена (каждая из них меньше 1). Следовательно, она имеет предел. Иными словами, 10^nC — какое-то вещественное число, обладающее всеми их свойствами. В частности,

$$\begin{aligned} 10^m(10^nC) &= c_1c_2\dots c_m + \frac{c_1c_2\dots c_m}{10^m} + \dots + \frac{c_1c_2\dots c_m}{10^{im}} + \dots = \\ &= c_1c_2\dots c_m + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_1c_2\dots c_m}{10^{im}} = \\ &= c_1c_2\dots c_m + 10^nC. \end{aligned}$$

Решая полученное уравнение, убеждаемся, что

$$10^nC = \frac{c_1c_2\dots c_m}{10^m - 1},$$

откуда число

$$C = \frac{c_1c_2\dots c_m}{10^{n+m} - 10^n}$$

рационально.

Для полноты картины важно показать, что любое рациональное число представляется конечной или периодической дробью. При этом, естественно, достаточно проверить этот факт для положительных рациональных чисел. Идея основана на делении с остатком. Рассмотрим произвольное положительное рациональное число $\frac{m}{n}$ и разделим m на n с остатком:

$$m = q_0n + m_1, \qquad 0 \le m_1 < n.$$

Таким образом,

$$\frac{m}{n} = q_0 + \frac{m_1}{n}, \tag{4}$$

где m и m_1 — неотрицательные целые числа, причем дробь $\frac{m_1}{n}$ — правильная, т. е. ее числитель меньше знаменателя. Теперь вспомним алгоритм деления в столбик.

Имея равенство (4), мы начинаем выписывать частное от деления m на n с числа q_0, а после него ставим десятичную запятую (так как $m_1 < n$). Далее умножаем m_1 на 10 и делим число $10m_1$ на n с остатком:

$$10m_1 = q_1n + m_2, \qquad 0 \le m_2 < n.$$

Получив q_1, дописываем его к нашему частному после запятой. И так далее... Умножая очередной остаток m_i на 10, мы делим произведение $10m_i$ на n с остатком

$$10m_i = q_in + m_{i+1}, \qquad 0 \le m_{i+1} < n$$

и приписываем неполное частное q_i к десятичной дроби:

$$\frac{m}{n} = q, q_1 q_2 \ldots q_i \ldots$$

Не исключено, что на каком-то шаге неполное частное q_s будет равно нулю. Тогда в соответствующем месте десятичной дроби появится нуль.

Описав алгоритм, обсудим, как он может закончиться. Самая простая ситуация будет тогда, когда какой-то из остатков m_i будет равен нулю. В этом случае мы получим конечную десятичную дробь. Допустим, что нулевой остаток нам так и не встретится. Заметим, что все получаемые при делении остатки удовлетворяют неравенству:

$$0 \leq m_i < n.$$

Иными словами, мы имеем лишь конечное число возможностей для остатка. С другой стороны, по предположению нулевого остатка мы не найдем, т. е. процесс деления бесконечен. Значит, на каком-то шагу деления мы столкнемся с тем остатком, который нам уже встречался. Предположим, что

$$m_{s+k} = m_s,$$

а все остатки с меньшими номерами — различны. Ясно, что когда мы будем делить $10m_{s+k} = 10m_s$ на n, то опять получим q_s и остаток m_{s+1}, и т. д. Следовательно, в результате деления появится периодическая дробь:

$$\begin{aligned}\frac{m}{n} &= q, q_1 q_2 \ldots q_{s-1}\, q_s q_{s+1} \ldots q_{s+k-1}\, q_s q_{s+1} \ldots q_{s+k-1} \ldots = \\ &= q, q_1 q_2 \ldots q_{s-1} \left(q_s q_{s+1} \ldots q_{s+k-1}\right) \ldots\end{aligned}$$

Итак, мы показали, что как конечные, так и периодические десятичные дроби соответствуют рациональным числам. И наоборот, любое рациональное число записывается как конечная или периодическая десятичная дробь. Осталось разобраться с произвольными бесконечными дробями. Любая такая дробь равна сумме целой и дробной частей. С целой частью разбираться не долго. Это всего-навсего целое число. Так что обратим свой взор на дроби, у которых перед десятичной запятой стоят одни нули.

Рассмотрим бесконечную десятичную дробь

$$0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

Все же не удается избежать этого сакраментального оборота! Но смотреть мы на нее будем как на вполне понятную последовательность рациональных чисел:

$$b_1 = 0, a_1,\ b_2 = 0, a_1 a_2,\ \ldots,\ b_n = 0, a_1 a_2 \ldots a_n,\ \ldots$$

Невооруженным глазом видно, что эта последовательность возрастает и ограничена (каждый ее член меньше 1). Стало быть, по теореме 4 (стр. 54) наша последовательность имеет пределом некоторое вещественное число. Обозначим его через A:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

Вот это-то вещественное число и равно бесконечной десятичной дроби, которую мы рассматриваем. Если вспомнить доказательство теоремы о пределе ограниченной возрастающей последовательности, то можно увидеть, что любое рациональное число $b_n = 0, a_1 a_2 \ldots a_n$ меньше A. Даже практически понятно, что модуль их разности не превышает 10^{-n}:

$$|A - b_n| = 0, \underbrace{0 \ldots 0}_{n} a_{n+1} \ldots$$

Однако стоит посмотреть на бесконечную дробь с другой стороны. Наряду с последовательностью $\{b_n\}$ рассмотрим последовательность $\{c_n\}$, которая строится по следующему правилу:

$$c_1 = b_1 + 0,1, \; c_2 = b_2 + 0,01, \; \ldots, \; c_n = b_n + 10^{-n}, \; \ldots$$

Построенная последовательность, очевидно, тоже возрастает. Но интуитивно ясно, что каждый ее член больше числа A. Докажем это аккуратно.

Из построения последовательности $\{c_n\}$ следует, что для каждого номера n выполнено неравенство:

$$c_n > b_n.$$

Теперь докажем неравенство

$$c_k > b_m$$

с произвольными k и m. Так как при равных k и m неравенство не вызывает сомнений, нужно разобрать две ситуации: $k > m$ и $k < m$.

Пусть, для начала, $k > m$. Тогда $c_m > b_m$, и ввиду возрастания последовательности $\{c_n\}$, получаем: $c_k > c_m$. Значит, $c_k > b_m$.

Предположим теперь, что $k < m$. По определению последовательности $\{b_n\}$

$$\begin{aligned} b_m &= 0, a_1 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_m = \\ &= b_k + a_{k+1} \cdot 10^{-k-1} + a_{k+2} \cdot 10^{-k-2} + \cdots + a_m \cdot 10^{-m} = \\ &= b_k + 10^{-k} \left(a_{k+1} \cdot 10^{-1} + \cdots + a_m \cdot 10^{-m+k} \right) = \\ &= b_k + 10^{-k} \cdot 0, a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{k+m}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$c_k = b_k + 10^{-k}.$$

Осталось проверить, что

$$10^{-k} > 10^{-k} \cdot 0, a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{k+m}.$$

Но это так и есть, поскольку $0, a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{k+m} < 1$.

Итак, каждый член последовательности $\{c_n\}$ больше любого члена последовательности $\{b_n\}$. По принципу непрерывности (стр. 51) найдется такое вещественное число B, которое лежит строго между этими последовательностями, т. е.

$$c_k \geq B \geq b_m.$$

Кроме того, $|c_n - b_n| = 10^{-n}$. Значит, для любого вещественного числа $\varepsilon > 0$ найдется пара элементов c_n и b_n, расстояние между которыми не превосходит ε. Таким образом, примени́м усиленный принцип непрерывности, благодаря которому можно утверждать, что такое число только одно. Теперь нетрудно убедиться, что $B = A$. Иными словами, число, лежащее между этими последовательностями — бесконечная десятичная дробь, которой мы уже так долго занимаемся.

Стоит отметить, что члены последовательности $\{b_n\}$ приближают A с недостатком, а $\{c_n\}$ — с избытком. А теперь совершенно очевидна и ошибка приближения:

$$\delta = |A - b_n| \le |c_n - b_n| = 10^{-n}.$$

Последнее усилие, которое нам предстоит сделать, будет направлено на доказательство того факта, что любое вещественное число (точка числовой прямой) может быть записано с помощью десятичной дроби (скорее всего бесконечной).

Выберем произвольную точку A на вещественной прямой (см. рис. 6). Поскольку, как мы знаем, любое рациональное число представимо в виде десятичной дроби, будем считать, что A — число иррациональное.

Рис. 6

Так как множество целых чисел бесконечно и неограничено, найдется такое целое число N, что

$$N < A < N + 1.$$

Здесь можно поставить знаки строгого неравенства из-за того, что A — иррационально и не может совпадать ни с каким рациональным, в частности целым, числом. Как и раньше, будем строить две последовательности рациональных чисел. Члены одной из них приближают A с недостатком, а другой — с избытком. Пусть

$$b_1 = N, \qquad c_1 = N + 1.$$

Отрезок $[N, N + 1]$, содержащий точку A, разделим на десять равных частей и получим рациональные числа:

$$N + 0,1;\; N + 0,2;\; \ldots,\; N + 0,9;\; N + 1.$$

Ясно, что A попадет в какую-то из частей. Пусть, например,

$$N + 0,a_1 < A < N + 0,a_1 + 0,1,$$

где a_1 — одна из десяти цифр. Положим по определению

$$b_2 = N + 0,a_1, \qquad c_2 = N + 0,a_1 + 0,1.$$

Отрезок $[b_2, c_2]$ опять разобьем на 10 равных частей и выпишем еще 10 рациональных чисел:

$$b_2 + 0,01;\; b_2 + 0,02;\; \ldots;\; b_2 + 0,09;\; c_2.$$

Выберем тот отрезок $[b_2 + 0, 0a_2;\ b_2 + 0, 0a_2 + 0, 01]$, который содержит точку A, и обозначим его концы как

$$b_3 = b_2 + 0, 0a_2; \qquad c_3 = b_2 + 0, 0a_2 + 0, 01.$$

Продолжая указанную процедуру, мы построим бесконечные последовательности: $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$. При этом наша точка A будет лежать строго между ними, т. е. для любой пары членов последовательностей выполнено неравенство:

$$b_n < A < c_k.$$

Еще раз обратим Ваше внимание на то, что можно поставить знак строгого неравенства из-за того, что числа b_n и c_k рациональны, а A нет. Осталось заметить, что к последовательностям применим усиленный принцип непрерывности. Так, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n, что

$$c_n - b_n = 10^{-n} < \varepsilon.$$

Согласно упомянутому признаку, между построенными последовательностями может лежать только одно число — A. С другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ будет выполнено неравенство:

$$10^{-n} < \varepsilon.$$

Достаточно взять $N(\varepsilon) = [\lg \varepsilon] + 1$, где lg — десятичный логарифм, т. е. логарифм по основанию 10. Кроме того, благодаря построению последовательностей $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$, число A лежит на отрезке $[b_n, c_n]$. Поэтому расстояние между A и b_n не превышает длины отрезка. Значит,

$$|b_n - A| < |c_n - b_n| = 10^{-n} < \varepsilon.$$

Но, как мы уже видели, предел последовательности $\{b_n\}$ есть не что иное, как бесконечная десятичная дробь:

$$N + 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots.$$

Таким образом, любое вещественное число представляется бесконечной десятичной дробью. На этой мажорной ноте мы и закончим введение в теорию пределов.

Упражнения

1. Докажите, что конечная сумма геометрической прогрессии со знаменателем q вычисляется по формуле:

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

2. Вычислите сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n,$$

если $0 < q < 1$ и покажите, что она равна бесконечности при $q \geq 1$.

3. Блоха прыгает от Москвы по направлению к Архангельску. За первую секунду она прыгнула на 1 м, за вторую — на $\frac{1}{2}$ м, за третью — на $\frac{1}{3}$ м и т. д. Каждую n-ую секунду блоха делает прыжок величиной $\frac{1}{n}$ м в одном и том же направлении. Предположим, что по пути ее никто не раздавит, она не выбьется из сил и пренебрежем различными препятствиями типа луж и рек. Сможет ли она когда-нибудь добраться до Архангельска?

   Указание: нужно понять, равна ли бесконечная сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

конечному числу или нет.

4. Вычислите сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}\right).$$

5. Вычислите сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right).$$

6. Вычислите сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3^n} + \frac{6}{7^n}\right).$$

7. Опираясь на определение предела, докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n^3} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n^2+3} = 0.$$

8. Докажите эквивалентность утверждений:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - L) = 0$.

9. Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = U$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n = V$. Покажите, что для любых вещественных чисел a и b выполнено равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}(au_n + bv_n) = aU + bV.$$

10. Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = U$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n = V$. Можно ли утверждать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n = UV\,?$$

11. Равна ли какому-то числу бесконечная сумма:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ ?$$

12. Предположим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = U,$$

где U — вещественное число. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Указание: Введите обозначение $U_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n$ и воспользуйтесь следующим наблюдением:

$$U_{N+1} = U_N + u_{N+1}.$$

13. Рассмотрим на вещественной прямой систему вложенных отрезков $\{\Delta_n = [a_n, b_n]\}$, каждый из которых содержится в предыдущем: $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$. Это означает, что последовательность левых концов отрезков возрастает $(a_n \leq a_{n+1})$, а правых — убывает $(b_n \leq b_{n+1})$. Докажите, что найдется хотя бы одна точка c, принадлежащая каждому из отрезков Δ_n. Иными словами,

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n.$$

14. Предположим, что система вложенных отрезков

$$\{\Delta_n = [a_n, b_n]\}$$

удовлетворяет дополнительному условию:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Докажите, что в этом случае существует единственная точка, принадлежащая каждому из отрезков.

15. Приведите пример системы вложенных интервалов

$$\{I_n = (a_n, b_n)\}, \qquad I_n \subset I_{n-1},$$

удовлетворяющей условию:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \varnothing.$$

16. Предположим, что все элементы последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют условию:

$$a_n \leq b_n.$$

Докажите, что если существуют пределы этих последовательностей, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Указание: предположите, что это не так и, опираясь на определение предела, придите к противоречию с неравенством $a_n \leq b_n$.

17. (Лемма о двух милиционерах.) Если все элементы последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ подчиняются неравенству:

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

а пределы последовательностей $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ существуют и равны между собой, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

18. Предположим, что все элементы бесконечной последовательности $\{a_n\}$ принадлежат отрезку $[0, 1]$. Покажите, что найдется по крайней мере одна точка на этом отрезке, что в любом сколь угодно малом интервале, ее содержащем, будет бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$. Можно ли утверждать, что что такая точка только одна?

Указание: разбейте отрезок $\Delta_0 = [0, 1]$ на две равные части $[0, \frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2}, 1]$ и выберите ту из них, в которой содержится бесконечное число членов последовательности (почему такой существует?). Обозначьте его через Δ_1. Используя эту идею, постройте систему вложенных отрезков $\{\Delta_n\}$ и воспользуйтесь задачей 14.

Сергей Алексеевич Кулешов,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Военного
Авиационно-Технического Университета

email: kuleshov@miem.edu.ru

Интеграл и общее среднее образование: проблема и вариант ее решения

Е. В. Гераськина, В. В. Цукерман

Предлагается вариант изложения элементов интегрального исчисления в курсе алгебры и начал анализа средней общеобразовательной школы. Статья может быть полезна ученикам и учителям как общеобразовательных классов, так и классов с углубленным изучением математики.

Интеграл в школе! До сих пор нет единого мнения по вопросу о необходимости включения этой темы в школьный курс математики. В настоящий момент, когда так много говорится о реформе образования, о пересмотре содержания школьного курса ряда предметов, в том числе и математики, необходим серьезный анализ важности, возможности и доступности изучения каждого раздела из школьного курса математики. Этому вопросу в отношении «Интегрального исчисления» посвящена данная статья.

Существует множество различных точек зрения по поводу изучения этой темы в школе, о ее содержании, о способах введения определенного интеграла. Трудности, возникающие при этом, нередко приводят к появлению мнения о нецелесообразности включения темы «Интеграл» в школьный курс математики.

Интеграл в наших школах появился вследствие реформы школьного математического образования, проведенной А. Н. Колмогоровым. Понятие определенного интеграла, наряду с понятиями производной и дифференциальных уравнений, являются важнейшими не только в математическом анализе. Эти понятия обладают еще и огромной общекультурной значимостью. Практическое и мировоззренческое значение определенного интеграла связано с тем, что он является инструментом получения глобальных (суммарных) характеристик неравномерных процессов и объектов со сложной нелинейной зависимостью от параметров (путь в неравномерном движении, площадь криволинейной трапеции, работа непостоянной силы и т.д.). Почему же сейчас часто приходится слышать о ненадобности интегрального исчисления в школе? Не исключено, что дело в кажущейся невозможности сочетания содержательного и доступного изложения темы.

Возможно, что в рамках этой проблемы нужно пересмотреть подход к введению понятия определенного интеграла и к изучению его приложений в средней школе.

Известно, что для непрерывной функции эквивалентны три подхода к понятию определенного интеграла: интеграл как

- единственное разделяющее число множеств нижних и верхних сумм Дарбу;
- предел интегральных сумм;
- разность значений первообразной.

Сочетание (комплекс) этих подходов обеспечивает удобство и эффективность приложений понятия определенного интеграла. Реализовать единство этих подходов для общей непрерывной функции в школе, конечно, невозможно, но *можно доказательно и вполне доступно ознакомить школьников с этим богатством понятия определенного интеграла, если ограничить класс рассматриваемых функций: рассматривать функции, монотонные, имеющие первообразную.* Во многих приложениях достаточно ограничиться такими функциями. Можно доказать, что такие функции являются непрерывными, то есть интеграл вводится для класса функций, более узкого, чем непрерывные. Это позволяет построить достаточно строгую теорию, не преодолевая значительных трудностей. Вместе с тем при этом будет выявлено все то идейное богатство, которое содержит в себе понятие определенного интеграла для общего класса непрерывных функций.

Остальная часть статьи представляет собой вариант изучения темы «Определенный интеграл» в средней школе, изложенный в сжатом виде, без примеров и упражнений.

Задача о работе переменной силы

В качестве исходного пункта напоминается рассматриваемый в школьном курсе физики случай постоянной силы. Сила действует по направлению движения, f — численное значение силы ($f = const$), s — путь. В этом случае работа A вычисляется по формуле:

$$A = f \cdot s.$$

Графически зависимость силы f от координаты x изображается в этом случае прямой, параллельной оси Ox. Если выбран масштаб, при котором единица силы изображается единицей длины, то работа A численно равна площади P заштрихованного прямоугольника (рисунок 1).

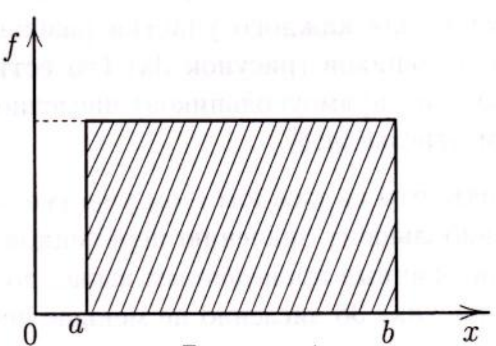


Рисунок 1

Этот графический способ определения работы для постоянной силы позволяет оценить величину работу и для переменной силы. Оценить, а не вычислить, поскольку надо еще дать определение величины работы в этом случае! Пусть зависимость силы f от координаты x изображается графиками на рисунках 2а и 2б (случаи монотонного возрастания и убывания силы). Предполагается, что соглашение о масштабе изображения величины силы сохраняется.

Для определенности рассмотрим случай монотонного возрастания силы. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками деления $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}$ $(a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b)$. Длина i–го участка дробления $[x_{i-1}; x_i]$ обозначается Δx_i, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Если бы на i–ом участке действовала постоянная сила, равная наименьшему значению переменной силы на этом участке, то работа этой постоянной силы на i–ом участке была численно равна площади заштрихованного прямоугольника (рисунок 3а).

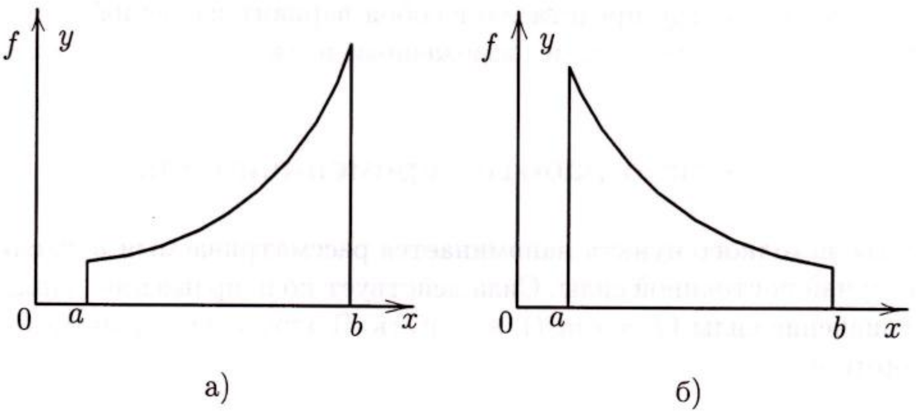


Рисунок 2

Естественно считать, что эта работа не превосходит истинной работы на i–ом участке. То же самое верно для каждого участка разбиения, и потому суммарная площадь всех прямоугольников (рисунок 3а) (то есть площадь ступенчатой фигуры, составленной из этих прямоугольников) численно не превышает работы переменной силы на всем отрезке $[a;b]$.

Затем можно допустить, что на каждом i–ом участке разбиения действует постоянная сила, равная наибольшему значению переменной силы на этом участке, и тогда рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что площадь ступенчатой фигуры на рисунке 3б численно не меньше искомой работы переменной силы на $[a;b]$.

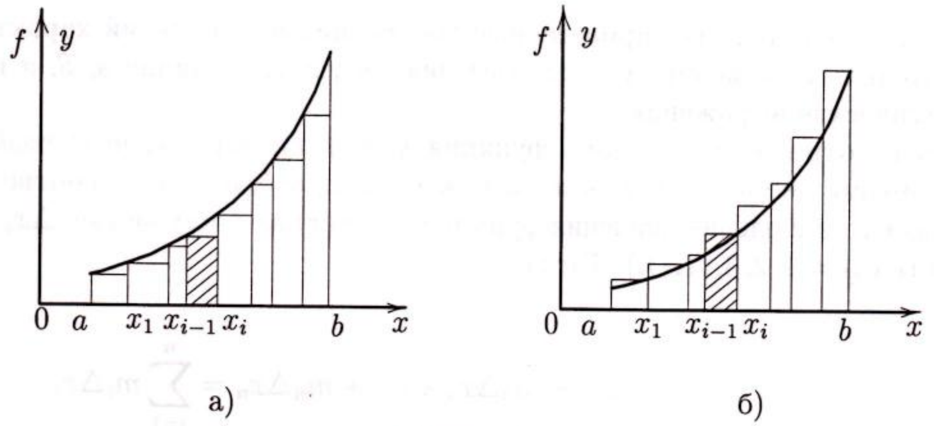


Рисунок 3

Ступенчатые фигуры на рисунках 3а и 3б для краткости можно назвать фигурами «под нижней лесенкой» и «под верхней лесенкой» и обозначить их площади s и S соответственно. Из сказанного следует, что искомая работа A переменной силы должна удовлетворять условию $s \le A \le S$.

Можно подойти к приближенному вычислению работы несколько иначе. Для этого строится ступенчатая фигура таким образом: на каждом участке разбиения по-прежнему сила считается постоянной, а ее значение равным значению переменной силы в некоторой точке этого участка (с координатой, обозначаемой ξ_i) (рисунок 4).

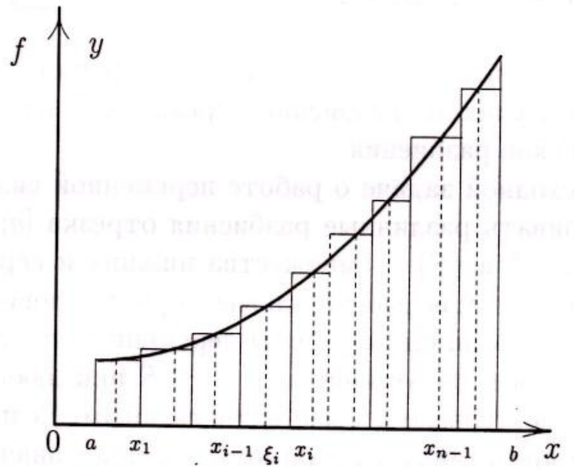


Рисунок 4

Площадь ступенчатой фигуры на рисунке 4 обозначается σ. Далее оценивается степень приближения величины σ к искомой работе. Так как $s \le A \le S$ и $s \le \sigma \le S$ для одного и того же разбиения отрезка $[a; b]$, то

$$|A - \sigma| \le S - s.$$

Таким образом σ можно считать приближенным значением работы с точностью $S - s$.

Далее указывается, что проведенные построения носят общий характер, приводятся принятые в математике определения введенных величин s, S, σ и даются их аналитические выражения.

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана функция $y = f(x)$, отрезок $[a;b]$ разбит на n частей точками деления $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, m_i, M_i — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на i-ом участке, Δx_i — длина i-го участка $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Тогда

$$s = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + m_3\Delta x_3 + \cdots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

$$S = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + M_3\Delta x_3 + \cdots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i.$$

Величины s и S называются *нижней и верхней суммами Дарбу* соответственно. Они вполне определяются заданием разбиения отрезка $[a;b]$ на части. Действительно, для заданной функции указание разбиения определяет все значения Δx_i, m_i, M_i, а следовательно, и суммы s и S.

Подобным же образом выражается сумма σ, здесь величины m_i либо M_i заменяются на $f(\xi_i)$ и, следовательно,

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Сумма σ носит название *интегральной суммы* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Она зависит не только от разбиения отрезка $[a;b]$ на части, но и от выбора точек ξ_i внутри участков разбиения.

Возвращаясь к исходной задаче о работе переменной силы, следует отметить, что можно рассматривать различные разбиения отрезка $[a;b]$. В этом случае появляются множества $\{s\}$ и $\{S\}$ — множества нижних и верхних сумм Дарбу. Но при любом разбиении искомая работа удовлетворяет условию $s \le A \le S$, и потому естественно считать величиной работы переменной силы то значение I (число I), которое удовлетворяло бы условию $s \le I \le S$ при любом разбиении отрезка $[a;b]$, если бы оно существовало и было единственным. Если это имеет место, то интегральная сумма представляет собой приближенное значение работы переменной силы с одновременно определяемой границей погрешности в виде разности значений верхней и нижней сумм Дарбу соответствующего разбиения.

Замечание. На рассмотрение задачи о работе переменной силы достаточно потратить в школе два урока. Цель этого рассмотрения — не окончательное решение вопроса о работе переменной силы, а постановка проблемы отыскания числа, заключенного между всеми нижними и всеми верхними суммами Дарбу, и единственности такого числа. При введении сумм Дарбу и интегральной суммы требования к функции $f(x)$, указанные в начале статьи, не являются необходимыми. Эти требования важны для развития теории, о которой речь пойдет далее.

Задача о площади криволинейной трапеции

Указывается, что речь идет о площади фигур такого типа, как на рисунках 2а и 2б; приводится определение криволинейной трапеции.

Рассмотрение задачи о площади криволинейной трапеции проводится почти дословно так же, как и в задаче о работе переменной силы. Надо лишь заменить слова «искомая работа переменной силы» на «искомая площадь криволинейной трапеции», а «переменная величина силы $f = f(x)$» на «ордината «y» графика функции $y = f(x)$». Можно использовать те же рисунки: 2а, 2б, 3а, 3б, 4. На этих рисунках для такой цели вертикальная координатная ось представлена и как ось Of, и как ось Oy. Естественно, что в силу аналогии с задачей о работе переменной силы, это рассмотрение не вызовет трудностей и отнимет меньше времени.

Здесь, однако, имеет место осложняющее обстоятельство, и по этой причине в качестве первой задачи, ведущей к понятию определенного интеграла, выбрана задача о работе переменной силы, а не традиционно используемая для этой цели задача о площади криволинейной трапеции. Дело в том, что в математике существует общее определение понятия площади плоской фигуры. Целесообразно понятие площади криволинейной трапеции связать с общим понятием площади плоской фигуры.

На рисунке 5 буквой K обозначена криволинейная трапеция, буквами A и B обозначены произвольные многоугольники, соответственно содержащийся в фигуре K и содержащий эту фигуру.

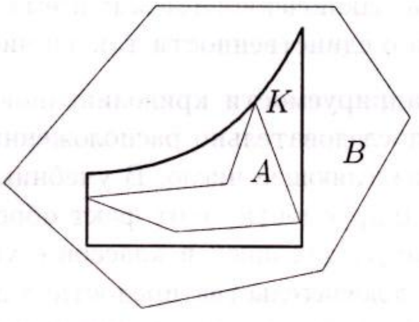


Рисунок 5

Буквами a и b обозначаем площади многоугольников A и B (предполагается известным понятие площади многоугольника). Поскольку многоугольники A и B могут быть выбраны многими способами, то возникают числовые множества $\{a\}$ и $\{b\}$: $\{a\}$ — множество площадей многоугольников, содержащихся в фигуре K, $\{b\}$ — множество площадей многоугольников, содержащих фигуру K. Очевидно, что для любых элементов этих множеств выполняется условие $a \leq b$. Числовые множества с таким свойством будем называть *последовательно расположенными* ($\{a\}$ левее $\{b\}$). Число p, такое что для любых элементов множеств $\{a\}$ и $\{b\}$ выполнено неравенство $a \leq p \leq b$, называют *разделяющим числом* множеств $\{a\}$ и $\{b\}$.

Определение. Если у множеств $\{a\}$ и $\{b\}$ существует единственное разделяющее число p, иначе говоря, если существует единственное число, заключенное между всевозможными площадями многоугольников, содержащихся в фигуре K, и площадями многоугольников, содержащих фигуру K, то фигуру K называют *квадрируемой* (имеющей площадь), а единственное разделяющее число p для этих множеств называют *площадью* фигуры K.

Следующее утверждение требует некоторых усилий для его понимания и усвоения!

В силу геометрической интерпретации сумм Дарбу величины s и S являются частными случаями площадей многоугольников, содержащихся в криволинейной трапеции и содержащих ее. Значит, всякое число, заключенное между всеми элементами множеств $\{a\}$ и $\{b\}$, разделяет также и множества нижних и верхних сумм Дарбу, и *если разделяющее число множеств $\{s\}$ и $\{S\}$ существует и единственно, то это означает, что криволинейная трапеция квадрируема, а само это число является площадью криволинейной трапеции.*

Особенностью приведенного общего определения площади плоской фигуры является то, что оно не связано с выбором системы координат и потому может использовать любое удобное расположение осей координат для проведения вычислений.

Итак, установлено, что существование и единственность разделяющего числа множеств $\{s\}$ и $\{S\}$ означало бы квадрируемость криволинейной трапеции и давало бы значение ее площади в соответствии с общим определением понятия площади плоской фигуры.

Замечание. В школе указанное здесь рассмотрение вопроса о площади криволинейной трапеции могло бы занять 2–3 урока. Оно еще раз показывает важность проблемы отыскания числа, заключенного между всеми нижними и всеми верхними суммами Дарбу, и вопроса о единственности такого числа.

Выше, в вопросе о квадрируемости криволинейной трапеции, неявно использовался тот факт, что у последовательно расположенных множеств $\{a\}$ и $\{b\}$ существует хотя бы одно разделяющее число. В учебниках для высшей школы при рассмотрении теории квадрируемости, этот факт обосновывается. Отмечен он и на странице 17 в учебнике [7] для школ и классов с углубленным изучением математики, но завершение доказательства предоставлено самим учащимся! Существование такого числа есть одно из выражений непрерывности множества действительных чисел. Для последовательно расположенных множеств рациональных чисел: $\{\rho\} = \{\rho|\ \rho > 0,\ \rho^2 < 2\}$ и $\{r\} = \{r|\ r > 0,\ r^2 > 2\}$ среди рациональных чисел разделяющего числа нет. Этот важный вопрос не является темой настоящей статьи и здесь не рассматривается.

Задача о вычислении пути по известному закону изменения мгновенной скорости

Рассматривается прямолинейное движение. Расстояние от двигающегося тела до некоторой фиксированной точки O на траектории в момент времени t обозначается $s(t)$. Точнее, $s(t)$ есть координата двигающейся материальной точки на траектории в момент t. Сам закон движения — функция $s(t)$ — не известен, но, разумеется, функция $s(t)$ существует (движение ведь происходит!). При этом $s(t)$

является по определению мгновенной скорости первообразной для заданной функции $v(t)$ — закона изменения мгновенной скорости: $s'(t) = v(t)$. Связывая положительное направление на траектории с направлением движения, получаем, что $v(t) > 0$.

Особенностью задачи является то, что здесь нет надобности определять, что такое путь l, пройденный за промежуток времени $[t_0; t_1]$. Он просто равен разности координат двигающейся материальной точки в моменты t_1 и t_0, то есть $l = s(t_1) - s(t_0)$. Путь оказался равным разности значений первообразной в моменты t_1 и t_0, но известно, что разность значений первообразной в двух точках не зависит от выбора первообразной, и потому

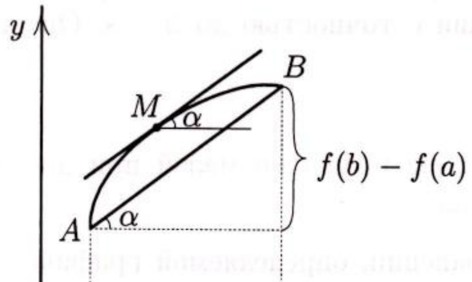
$$l = s(t_1) - s(t_0) = F(t_1) - F(t_0),$$

где $F(t)$ — любая первообразная функции $v(t)$ на отрезке $[t_0; t_1]$.

Замечание. Для изложения этого вопроса в школе достаточно одного урока, но следующий урок целесообразно посвятить задачам на вычисление пути по известному закону изменения мгновенной скорости в простых случаях.

Теория

На рассматриваемые функции накладываются требования, указанные в начале статьи (монотонность и существование первообразной). Предполагается также, что учащиеся при изучении производной познакомились с формулой Лагранжа, хотя бы на основе ее геометрического смысла (рисунок 6); им известна вытекающая из формулы Лагранжа теорема о первообразных (если $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$ на некотором интервале, то $F(x) + C$ — общий вид всех первообразных для $f(x)$ на этом интервале) и следствие теоремы о первообразных: разность значений первообразной в двух точках не зависит от выбора первообразной.



$$F(b) - F(a) = \operatorname{tg}\alpha \cdot (b - a) = \\ = F'(c) \cdot (b - a).$$

$M(c; f(c))$ — точка, в которой касательная параллельна секущей.

Рисунок 6

Пусть $f(x)$ — функция, монотонная на отрезке $[a; b]$. Обозначим через I разность $F(b) - F(a)$ значений первообразной для функции $f(x)$ на этом отрезке. Подчеркнем, что число I не зависит от выбора первообразной $F(x)$.

Докажем, что для любой нижней суммы Дарбу справедливо неравенство: $s \leq I$.

▼ Пусть s отвечает какому-либо разбиению отрезка $[a;b]$. Приращение первообразной на i-м участке разбиения $(i = 1, 2, \dots, n)$ равно $F(x_i) - F(x_{i-1})$. Применим к нему формулу Лагранжа:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)\Delta x_i,$$

где c_i — некоторая внутренняя точка отрезка $[x_{i-1}; x_i]$; Δx_i —длина отрезка $[x_{i-1}; x_i]$.

Так как m_i – наименьшее значение функции f на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, то $m_i \le f(c_i)$, откуда

$$m_i \Delta x_i \le f(c_i)\Delta x_i = F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

Поскольку это неравенство справедливо при любом i $(i = 1, 2, \dots, n)$, то получаем совокупность неравенств:

$$\begin{aligned} m_1\Delta x_1 &\le F(x_1) - F(a); \\ m_2\Delta x_2 &\le F(x_2) - F(x_1); \\ \dots\dots\dots \; &\dots\dots\dots\dots \\ m_n\Delta x_n &\le F(b) - F(x_{n-1}). \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, получим $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le F(b) - F(a)$, то есть $s \le I$. ▲

Совершенно аналогично доказывается, что для любой верхней суммы Дарбу справедливо неравенство $I \le S$.

Следовательно, независимо от разбиений отрезка $[a;b]$, для которых вычислены суммы s и S, имеет место соотношение: $s \le I \le S$.

Выше было показано, что интегральную сумму можно считать приближенным значением площади криволинейной трапеции с точностью до $S - s$. Оценим эту разность.

Теорема. Разность $S - s$ может стать сколь угодно малой при достаточно мелком разбиении рассматриваемого отрезка.

▼Обратимся вновь к криволинейной трапеции, определяемой графиком монотонно возрастающей на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей и построим две ступенчатые фигуры: содержащую трапецию и содержащуюся в трапеции.

Разность $S - s$ для этого разбиения равна сумме площадей заштрихованных прямоугольников.

Сделаем дополнительное построение. Проведем прямую, параллельную оси ординат и не пересекающую отрезок $[a;b]$. К этой прямой как к «стенке» параллельно оси Ox перенесем все заштрихованные прямоугольники (рисунок 7).

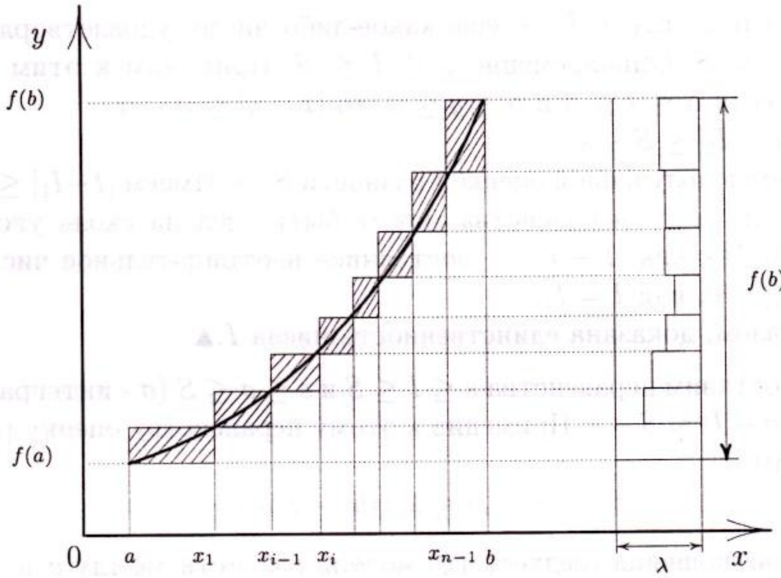


Рисунок 7

Очевидно, что сумма площадей этих прямоугольников не превзойдет площади прямоугольника с основанием $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ и высотой, равной $f(b) - f(a)$. (Если учесть случай монотонного убывания функции, когда $f(b) > f(a)$, то следует поставить знак модуля $|f(b) - f(a)|$).

Таким образом, получена оценка: $S - s \leq \lambda|f(b) - f(a)|$.

Число λ служит мерой измельченности разбиения отрезка.

Данная оценка показывает, что разность $S - s$ становится меньше любого наперед заданного положительного числа, как только λ достаточно мало.▲

Это свойство можно выразить так: разность $S - s$ стремится к нулю при λ, стремящемся к нулю.

Соотношение $S - s \leq \lambda|f(b) - f(a)|$ можно доказать и алгебраически.

▼ Предположим для простоты, что $f(x)$ монотонно возрастает, и рассмотрим разность $S - s$:

$$S - s = \sum_{i-1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i.$$

Так как при любом i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $\Delta x_i \leq \lambda = \max\{\Delta x_i\}$ и $m_i = f(x_{i-1}) \leq$ $\leq M_i = f(x_i)$ на отрезке $[x_{i-1};\, x_i]$ в силу монотонного возрастания функции $f(x)$, то

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \lambda = \lambda \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) =$$

$$= \lambda\big((f(x_1) - f(a)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \cdots + (f(b) - f(x_{n-1}))\big) = \lambda\big(f(b) - f(a)\big).$$

▲

Данное соотношение позволяет показать, что число $I = F(b) - F(a)$, заключенное между суммами Дарбу, единственно.

▼Действительно, пусть I_1 — еще какое-либо число, удовлетворяющее соотношению $s \le I_1 \le S$. Одновременно $s \le I \le S$. Применим к этим неравенствам утверждение: если $\alpha \le x \le \beta$ и $\alpha \le y \le \beta$, то $|x - y| \le \beta - \alpha$.

Получим $|I - I_1| \le S - s$.

Воспользуемся полученной оценкой разности $S - s$. Имеем $|I - I_1| \le \lambda|f(b) - f(a)|$.

Правая часть этого неравенства может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора λ. Так как $|I - I_1|$ — постоянное неотрицательное число, то отсюда следует $|I - I_1| = 0$, или $I = I_1$.

Таким образом, доказана единственность числа I.▲

Теперь сопоставим неравенства $s \le I \le S$ и $s \le \sigma \le S$ (σ - интегральная сумма). Тогда имеем $|\sigma - I| \le S - s$. Применив к этому неравенству оценку разности сумм Дарбу, получим

$$|\sigma - I| \le \lambda|f(b) - f(a)|.$$

Из этого соотношения следует, что модуль разности между σ и I может быть сделан меньше сколь угодно малого положительного числа за счет достаточной малости λ. Данное утверждение есть определение предела интегральных сумм σ при $\lambda \to 0$, то есть $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I$. Таким образом, попутно и, как нам представляется, совершенно доступно введено определение *предела интегральных сумм.*

Сформулируем это определение более подробно. Число I является *пределом интегральных сумм* σ функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ при λ стремящемся к нулю ($\lambda \to 0$), если разность $|\sigma - I|$ можно сделать меньше любого положительного числа за счет достаточной малости величины λ ($\lambda > 0$) независимо ни от разбиения отрезка $[a; b]$ на части, ни от выбора точек ξ_i внутри участков разбиения.

Именно это здесь доказано при указанных предположениях относительно функции $f(x)$, а в роли числа I выступает разность значений первообразной $F(b) - F(a)$.

Итак, показано, что для любой функции $f(x)$, монотонной на отрезке $[a; b]$ и имеющей первообразную $F(x)$ на этом отрезке, верны следующие утверждения.

1) Существует единственное число, заключенное между всеми нижними и верхними суммами Дарбу, равное $I = F(b) - F(a)$.

2) Существует предел интегральных сумм при $\lambda \to 0$, и он равен $I = F(b) - F(a)$.

Полученные результаты формулируются в виде общей теоремы.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$ и имеет первообразную $F(x)$ на этом отрезке. Тогда на отрезке $[a, b]$ значения трех величин:

1. разности значений первообразной функции $f(x) : F(b) - F(a)$;

2. предела интегральных сумм $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$;

3. единственного числа, заключенного между всеми нижними и верхними суммами Дарбу,

совпадают[1].

Определение. *Общее значение трех величин: разности значений первообразной, предела интегральных сумм и единственного числа, разделяющего множества нижних и верхних сумм Дарбу, — есть определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, обозначаемый $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.*

В силу указанной выше теоремы каждую из рассматриваемых трех величин можно принять за определение определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, и все эти три определения оказываются эквивалентными для указанного класса функций.

Формула $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ носит название формулы Ньютона–Лейбница.

Возвращаясь к рассмотренным задачам, можно сделать вывод, что работа переменной силы, площадь криволинейной трапеции и длина пути, пройденного телом за определенное время, есть определенный интеграл, то есть

$$A = \int\limits_a^b f(x)\,dx; \qquad S = \int\limits_a^b f(x)\,dx; \qquad l = \int\limits_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt.$$

Замечание. Для изложения рассматриваемой теории в школе достаточно трех уроков, но следующие несколько уроков целесообразно посвятить отысканию площадей плоских фигур и вычислению работы переменной силы.

Задача о длине кривой

В этой задаче наиболее простым является подход к определению длины кривой и ее вычислению при помощи понятия интегральной суммы и ее предела.

Будем считать, что кривая L задана явным уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$ (рисунок 8). Производная $f'(x)$ предполагается непрерывной (в предположениях этой статьи $f'(x)$ монотонна, а функция $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ имеет первообразную).

[1] На самом деле, теорема верна и в общем случае непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$ и даже (при естественном обобщении понятия первообразной) для ограниченной на $[a,b]$ функции, имеющей конечное число точек разрыва, для которой существует первообразная или обобщенная первообразная соответственно [2]. Доказательное изложение вопроса в этих случаях превышает возможности средней школы.

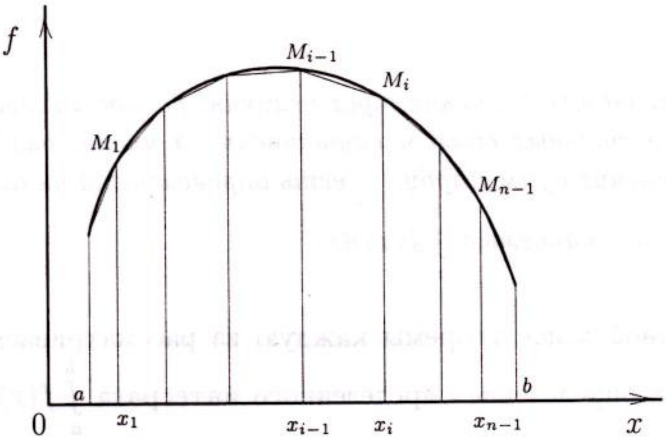


Рисунок 8

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Проведем через каждую точку x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ прямые, перпендикулярные оси абсцисс до пересечения с кривой. Получим точки $A = M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}, M_n = B$. Ломаную $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$ называют вписанной в кривую L. Длина звена ломаной $\Delta l_i = M_{i-1}M_i$ равна

$$\Delta l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

По формуле Лагранжа $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(\xi_i)\Delta x_i$, где ξ_i — некоторая точка, лежащая между x_{i-1} и x_i. Следовательно,

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + [f'(\xi_i)]^2 \Delta x_i^2} = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

Длина всей ломаной выражается в виде

$$l = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i.$$

Из рисунка 8 видно, что при измельчении участков разбиения, при $\lambda \to 0$ $(\lambda = \max\{\Delta x_i\})$ вписанная ломаная «стремится слиться» с кривой L. Тогда естественно назвать длиной s кривой L предел l при $\lambda \to 0$. Разумеется здесь слова «стремится слиться с кривой L» и «предел l при $\lambda \to 0$» надо понимать в наглядно-интуитивном смысле, но поскольку l представляет собой интегральную сумму для функции $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, а предел интегральных сумм при $\lambda \to 0$ определен математически, то в качестве длины кривой естественно принять

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Замечание. Для вывода этой формулы достаточно и одного урока, но следующие 1–2 урока можно посвятить ее использованию.

Метод, примененный в решении задач о работе переменной силы и площади криволинейной трапеции, может быть использован для вывода формул объемов пирамиды и тел вращения (например, конуса и шара). Такой вывод проще, чем тот, который используется в средней школе для этой цели. В статье данный вопрос не затронут, так как ее основной целью была демонстрация возможности доступного изложения теории определенного интеграла, а включение дополнительных приложений для этого не понадобилось.

На основе формулы Ньютона-Лейбница могут быть просто установлены свойства определенного интеграла, формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле. Авторы считают, что включение этих вопросов в программу средней школы не целесообразно, если только это не школы и классы с углубленным изучением математики.

Литература

[1] Цукерман В. В. Понятие разделяющего числа и длина кривой. Проблемы подготовки учителя математики в désinstitutах, сб. трудов МГЗПИ, вып. 45. М.,1975, с. 117-124.

[2] Корешкова Т. А., Цукерман В. В. К введению определенного интеграла. Проблемы подготовки учителя математики в пединститутах. М.,1980, с. 105-117.

[3] Корешкова Т. А. Об интеграле и его приложениях. //Математика в школе, №3/1986, с. 49-53.

[4] Цукерман В. В. О судьбе великого наследия. //Математика в школе, №3/1994, с. 44-45.

[5] Tsuckerman V. Calculus and general secondary education. Proceedings of the NORMA-94 conference in Lahti,1994. Helsinki, 1995, p. 169-173.

[6] Цукерман В. В. Математический анализ и общее среднее образование. //Математика в школе, 1996, с. 33-34.

[7] Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И. Алгебра и математический анализ для 10 класса. М.: Просвещение, 2001.

Гераськина Елена Викторовна,
аспирантка кафедры высшей матаматики
Московского государственного открытого
педагогического университета им. М. А. Шолохова.

Цукерман Виталий Владимирович,
кандидат физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики
Московского государственного открытого
педагогического университета им. М. А. Шолохова.

email: tvoyv@rambler.ru

Неопределенности функций многих переменных (часть I)

В. В. Ивлев

Валерий Васильевич Ивлев — доктор технических наук, профессор Московского государственного открытого педагогического университета им. Шолохова. В предлагаемой статье дается обобщение известного «правила Лопиталя»[1] для функций многих переменных. Любопытно, что хотя этому правилу более трехсот лет, для функций многих переменных такого обобщения нет. Детально рассматривается случай функций двух переменных, формулируются и доказываются основные теоремы для неопределенностей первого и второго порядков вида $\frac{0}{0}$. В дальнейшем предлагается развитие результатов для неопределенностей других видов, обобщение для функций n переменных, построение неопределенностей с заданным пределом в заданной точке. Работа может быть полезна студентам старших курсов, аспирантам и преподавателям физико-математических факультетов педагогических университетов.

I. Введение. Общие положения

При исследовании пределов функций одной и многих переменных возникает так называемая *неопределенность*, когда непосредственная подстановка в функцию координат точки дает результат вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0, ∞^0, 1^∞, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$. Тем не менее предел функции в точке часто существует и его необходимо найти (раскрыть). Отсюда и название проблемы — *раскрытие неопределенностей.* Для вычисления таких пределов используются различные приемы, требующие определенного искусства. Рассмотрим основные из них, на примере функций двух переменных.

1. Использование определения предела

Пример. Найти двойной предел.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = A.$$

▼ [2] Пусть точка M (x,y) стремится к точке $\mathrm{M}_0(0,0)$ произвольным образом и $\rho(M,M_0)=\sqrt{x^2+y^2}$ расстояние между точками M и M_0. Для существования

[1] Г. Лопиталь (1661-1704 г.) — автор первого печатного руководства по дифференциальному исчислению (1696 г.), где и сформулировано в близком к современному виду это правило. Впрочем, Лопиталь использовал рукописи И. Бернулли (с его согласия), в которых впервые упоминается это правило, так что название правила исторически неточно.

[2] Начало примера или доказательства теоремы будем обозначать символом ▼. Конец решения примера или доказательства теоремы — ▲.

предела в точке M_0 необходимо и достаточно, чтобы для заданного $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$ такое, что как только $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, то имеет место $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Положим $\delta = \varepsilon$. Имеем

$$|f(M)| = \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| |y| < |y| < \sqrt{x^2+y^2} = \rho(M, M_0) < \delta = \varepsilon.$$

Отсюда следует, что должно быть $\left|\frac{x^2}{x^2+y^2} - A\right| < \varepsilon$, т. е. $\left|\frac{x^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$, и, следовательно, $A = 0$. ▲

2. Переход к пределу с помощью оценок

Пример. Вычислить двойной предел

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y+2x^2+2y^2}{3(x^2+y^2)}.$$

▼ Имеем
$$\frac{x+y+2(x^2+y^2)}{3(x^2+y^2)} = \frac{2}{3} + \frac{x}{3(x^2+y^2)} + \frac{y}{3(x^2+y^2)}.$$

Если $|x| > N$ и $|y| > N$, то

$$\left|\frac{x}{3(x^2+y^2)}\right| < \frac{1}{3}\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{3N}, \quad \left|\frac{y}{3(x^2+y^2)}\right| < \frac{1}{3}\left|\frac{1}{y}\right| < \frac{1}{3N}.$$

Отсюда $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\frac{2}{3} + \frac{x}{3(x^2+y^2)} + \frac{y}{3(x^2+y^2)}\right) = \lim\limits_{N\to\infty} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3N} + \frac{1}{3N}\right) = \frac{2}{3}$. ▲

3. Использование преобразований

Пример. Найти двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ y\to 2}} f(x,y)$, где

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+x-y}, & \text{при } x \neq y \\ 4, & \text{при } x = y \end{cases}$$

▼ Пусть $x \neq y$. Тогда $f(x,y) = \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x-y+1)} = \frac{x+y}{x-y+1}$. И, следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ y\to 2}} \frac{x+y}{x-y+1} = 4.$$

Так как и при $x = y$ предел равен 4, то окончательно $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ y\to 2}} f(x,y) = 4$. ▲

4. Введение полярных координат

Известно, что если при замене переменных x и y на переменные ρ и φ, где $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, двойной предел не зависит от ρ и φ или однозначно определен, то он существует.

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y+y^2x}{x^2+y^2}$.

$$▼ \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y+y^2x}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho(\cos^2\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi\cos\varphi) = 0. \ ▲$$

Пример 2. Доказать, что функция $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не имеет предела в точке (0,0).

▼ Перейдем к полярным координатам.

$$f(x,y) = \frac{r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \cos 2\varphi.$$

Очевидно, что задавая различные значения φ, получим различные значения предела. Итак, двойной предел не существует. ▲

5. Вычисление предела по направлению и произвольной кривой

Известно, что если значение предела не зависит от направления (прямой) и произвольной кривой, по которой точка (x,y) стремится к предельной точке (x_0, y_0), то предел существует.

Пример. Существует или нет предел функции $f(x,y)$ при $x\to 0, y\to 0$, если

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{при } x\neq 0, y\neq 0 \\ 0, & \text{при } x = y = 0 \end{cases} \ ?$$

▼ Пусть $x\to 0$, а $y = kx$ (движение по прямой). Имеем

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2kx}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0 \quad (k\neq -\infty).$$

Пусть теперь $x\to 0$, $y = kx^2$ (движение по параболе)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2kx^2}{x^4+k^2x^4} = \frac{k^2}{1+k^2}.$$

Отсюда следует, что хотя предел по любому направлению равен нулю, однако предел по параболе зависит от коэффициента k. Следовательно, двойного предела не существует. ▲

6. Вычисление пределов вида[3] 1^∞, 0^∞

Раскрытие неопределенностей вида 1^∞, 0^∞ обычно осуществляется путем предварительного логарифмирования функции и вычисления логарифма искомого предела с последующим потенцированием результата.

Пример. Вычислить двойной предел

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 2}} \left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = A. \tag{1}$$

▼ Имеем неопределенность 1^∞. Логарифмируя (1), имеем

$$\ln A = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 2}} \tfrac{x^2}{x+y} \ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right) = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 2}} \tfrac{x^2}{x+y}\tfrac{1}{x} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 2}} \tfrac{x}{x+y} = 1.$$

Здесь использована эквивалентность бесконечно малых функций:

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x} \text{ при } x\to\infty$$

Итак, $\ln A = 1$. Отсюда $A = e^{\ln A} = e$. ▲

Из приведенных примеров видно, что при вычислении пределов используются различные приемы или их комбинации. Тем не менее, отсутствует аналог правила Лопиталя для функций двух и более переменных.

II. Неопределенности вида $\frac{0}{0}$ для функций двух переменных

Перейдем к рассмотрению основных определений и теорем, обеспечивающих построение правила Лопиталя для неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ функций многих переменных. Начнем с простейшего случая функций двух переменных.

Определение 1. Функция $f(x,y)$ называется бесконечно малой *первого порядка малости*[4] при $(x,y)\to(x_0,y_0)$, если

а) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = 0.$

б) $df(x_0,y_0)\neq 0$, т.е. f'_x и f'_y не равны нулю одновременно в точке (x_0,y_0).

Определение 2. Функция $f(x,y)$ называется бесконечно малой m-го порядка при $(x,y)\to(x_0,y_0)$, если

а) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = 0;$

б) $d^i f(x_0,y_0) = 0$, при $i = 1,\ldots,m-1;$

---

[3] Случаи $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ легко сводятся к случаю $0/0$.

[4] Впредь термин «малости» опускается, так как ясно, о чем идет речь.

c) $d^m f(x_0, y_0) \neq 0$.

Определение 3. Отношение двух функций $f(x, y)$ и $q(x, y)$, которые являются бесконечно малыми *первого порядка* при $(x, y) \to (x_0, y_0)$, называется *неопределенностью первого порядка* и обозначается $\frac{f(x_0,y_0)}{q(x_0,y_0)} = \frac{0}{0}$.

Аналогично определяется неопределенность второго и m-го порядка.

Теорема 1 (неопределенность первого порядка). Пусть:

1) Функции $f(x, y)$ и $q(x, y)$ являются бесконечно малыми первого порядка при $(x, y) \to (x_0, y_0)$;

2) Все частные производные функций $f(x, y)$ и $q(x, y)$ первого порядка конечны и отличны от нуля в точке (x_0, y_0).

Тогда, для существования двойного предела $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{f(x,y)}{q(x,y)} = k$, $k \neq 0$, $k \neq \pm\infty$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$\frac{f'_x(x_0, y_0)}{q'_x(x_0, y_0)} = \frac{f'_y(x_0, y_0)}{q'_y(x_0, y_0)} = k. \tag{2}$$

▼ *Необходимость*. Покажем, что если условие (2) не выполнено, т. е.

$$\frac{f'_x(x_0, y_0)}{q'_x(x_0, y_0)} = k_1, \quad \frac{f'_y(x_0, y_0)}{q'_y(x_0, y_0)} = k_2, \quad k_1 \neq k_2,$$

то двойной предел в точке (x_0, y_0) не существует.

Рассмотрим ряды Тейлора для функций $f(x, y)$ и $q(x, y)$ с центром разложения в конечной точке (x_0, y_0)

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o_1(\Delta \ell), \\ q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= q'_x(x_0, y_0)\Delta x + q'_y(x_0, y_0)\Delta y + o_2(\Delta \ell), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\Delta \ell = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $o_1(\Delta \ell)$, $o_2(\Delta \ell)$ — бесконечно малые функции более высокого порядка, чем $\Delta \ell$.

При переходе к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ функциями $o_1(\Delta \ell)$, $o_2(\Delta \ell)$ по сравнению с Δx и Δy можно пренебречь. Тогда с учетом (3) получим

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{f(x, y_0)}{q(x, y_0)} &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y}{q'_x(x_0, y_0)\Delta x + q'_y(x_0, y_0)\Delta y} = \\ &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{k_1 q'_x(x_0, y_0)\Delta x + k_2 q'_y(x_0, y_0)\Delta y}{q'_x(x_0, y_0)\Delta x + q'_y(x_0, y_0)\Delta y} \end{aligned} \tag{4}$$

В зависимости от траектории, по которой точка (x, y) стремится к точке (x_0, y_0), значение предела может быть различным и, следовательно, двойного предела не существует. Рассмотрим простейший случай, когда точка (x, y) стремится к предельной точке (x_0, y_0) по прямой $\Delta y = r\Delta x$, $r \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x,y)}{q(x,y)} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{k_1 q'_x(x_0,y_0) + r k_2 q'_y(x_0,y_0)}{q'_x(x_0,y_o) + r q'_y(x_0,y_0)} \tag{5}$$

Из (5) следует, что

$$\begin{cases} \text{при } r = 0 \text{ предел равен } k_1, \\ \text{при } r = \pm\infty \text{ предел равен } k_2, \\ \text{при } r = 1,\ q'_x(x_0,y_0) = q'_y(x_0,y_0) \text{ предел равен } \frac{k_2+k_1}{2} \text{ и т.д.} \end{cases}$$

Итак, условие (2) существования предела является необходимым.
Достаточность. Пусть (2) имеет место. Тогда.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{f(x,y)}{q(x,y)} = k \frac{q'_x(x_0,y_0)\Delta x + q'_y(x_0,y_0)\Delta y}{q'_x(x_0,y_0)\Delta x + q'_y(x_0,y_0)\Delta y} = k. \ \blacktriangle$$

Кстати, в условиях теоремы 1 автоматически имеет место:

1. Если двойной предел существует, то существуют и оба повторных и они равны двойному.

2. Если двойной предел отсутствует, т.е. $k_1 \neq k_2$ то повторные пределы различны и равны

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y)}{q(x,y)}\right) = k_1, \quad \lim_{\Delta y \to 0}\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x,y)}{q(x,y)}\right) = k_2.$$

Заметим, что для функций одной переменной $f(x)$ и $q(x)$ правило Лопиталя вообще говоря, является достаточным условием. Другими словами, предел может существовать, а правило Лопиталя не иметь места, ввиду отсутствия производных. Это же относится и к функциям многих переменных. Однако, применительно к условиям теоремы 1, ограничивающих множество допустимых функций, условие (2) одновременно является и необходимым.

Изучим вопросы существования двойного предела в следующих случаях:

1. Точно одна из частных производных равна нулю в точке (x_0, y_0).

2. Точно две *разноименных* частных производных (f'_x и q'_y или f'_y и q'_x) равны нулю в точке (x_0, y_0).

3. Одна из функций ($f(x, y)$ или $q(x, y)$) имеет второй или более высокий порядок малости при $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

4. Обе функции $f(x, y)$ и $q(x, y)$ — второго или выше порядка малости при $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Рассмотрим последовательно указанные ситуации.

п 1. Пусть, например, $f'_x(x_0, y_0) = 0$. Тогда предел по направлению $\Delta y = r\Delta x$ равен

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x,y)}{q(x,y)} = \lim\nolimits_{\Delta x\to 0} \frac{r f'_y(x_0,y_0)}{q'_x(x_0,y_0) + r q'_y(x_0,y_0)}.$$

$$\begin{cases} \text{при } r = 0 \text{ предел равен нулю,} \\ \text{при } r = \infty \text{ предел равен } f'_y(x_0,y_0)/q'_y(x_0,y_0). \end{cases}$$

Вывод: двойной предел не существует. Повторные пределы существуют и различны.

п 2. Пусть, например, $f'_x(x_0, y_0) = q'_y(x_0, y_0) = 0$. Имеем

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x,y)}{q(x,y)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{q'_x(x_0,y_0)\Delta x}.$$

Непосредственно видно, что в силу независимости Δx и Δy двойной предел не существует. Повторные пределы соответственно равны нулю и ∞.

п 3. Пусть, например, $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$. Ясно что функция $f(x, y)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $q(x, y)$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$ и, следовательно, предел их отношения равен нулю.

п 4. В этом случае обе функции являются бесконечно малыми не ниже второго порядка и требуется привлечение частных производных второго и выше порядков.

С учетом изложенного имеет место следующая схема вычисления пределов при неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

1. Вычисляются частные производные первого порядка функций $f(x, y)$ и $q(x, y)$ в точке (x_0, y_0);

2. Если все частные производные отличны от нуля, то строятся отношения

   $$\frac{f'_x(x_0,y_0)}{q'_x(x_0,y_0)} = k_1, \quad \frac{f'_y(x_0,y_0)}{q'_y(x_0,y_0)} = k_2,$$

   При $k_1 = k_2 = k$ двойной и повторные пределы существуют и равны k. При $k_1 \neq k_2$ двойной предел не существует.

3. Если точно одна или две какие либо частные производные равны нулю, то решение принимается в соответствии с п. 1-4.

Пример 1. Вычислить двойной предел, используя обобщенное правило Лопиталя.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{f(x,y)}{q(x,y)} = \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{x^2 + 2xy - 3y^2}{x^3 - y^3}.$$

▼ Имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Вычислим первые частные производные в точке $(1,1)$.

$$f'_x(1,1) = 2x + 2y\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 4,\ f'_y(1,1) = 2x - 6y\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = -4,$$

$$q'_x(1,1) = 3x^2\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 3,\ q'_y(1,1) = -3y^2\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = -3$$

Все частные производные отличны от нуля. Строим отношения одноименных частных производных.

$$\frac{f'_x(1,1)}{q'_x(1,1)} = \frac{4}{3},\quad \frac{f'_y(1,1)}{q'_y(1,1)} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

Видно, что двойной предел существует и равен $\frac{4}{3}$. Таковы же и повторные пределы. ▲

Пример 2. Вычислить предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{f(x,y)}{q(x,y)} = \lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{x-y}{x+y}.$$

▼ Вычислим первые частные производные.

$$f'_x(0,0) = 1,\quad f'_y(0,0) = -1,\quad q'_x(0,0) = 1,\quad q'_y(0,0) = 1.$$

Отношения одноименных частных производных различны.

$$\frac{f'_x(0,0)}{q'_x(0,0)} = 1,\quad \frac{f'_y(0,0)}{q'_y(0,0)} = -1.$$

Двойной предел не существует. Повторные соответственно равны 1 и -1. ▲

III. Неопределенности второго порядка

Перейдем к рассмотрению неопределенностей, когда все первые частные производные функций $f(x,y)$ и $q(x,y)$, а также и сами функции равны нулю в точке (x_0,y_0).

Теорема 2 (неопределенности второго порядка). Пусть

1) функции $f(x,y)$ и $q(x,y)$ определены и дважды дифференцируемы в некоторой окрестности точки (x_0,y_0);

2) функции $f(x,y)$ и $q(x,y)$ являются бесконечно малыми второго порядка при $(x,y)\to(x_0,y_0)$;

3) все вторые частные производные функций $f(x,y)$ и $q(x,y)$ конечны и отличны от нуля.

Тогда для существования двойного предела

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x,y)}{q(x,y)} = k, \qquad k\neq 0, \qquad k\neq\pm\infty$$

необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$\frac{f''_{x^2}(x_0,y_0)}{q''_{x^2}(x_0,y_0)} = \frac{f''_{xy}(x_0,y_0)}{q''_{xy}(x_0,y_0)} = \frac{f''_{y^2}(x_0,y_0)}{q''_{y^2}(x_0,y_0)} = k. \tag{6}$$

▼ Предварительно введем обозначения

$$f''_{x^2}(x_0,y_0) = a_{11}, \quad f''_{xy}(x_0,y_0) = a_{12}, \quad f''_{y^2}(x_0,y_0) = a_{22},$$

$$q''_{x^2}(x_0,y_0) = b_{11}, \quad q''_{xy}(x_0,y_0) = b_{12}, \quad q''_{y^2}(x_0,y_0) = b_{22}$$

Тогда условие (6) примет вид

$$\frac{a_{11}}{b_{11}} = \frac{a_{12}}{b_{12}} = \frac{a_{22}}{b_{22}}. \tag{7}$$

Необходимость. Пусть, по крайней мере, одно из отношений в (7) отлично от другого, например

$$\frac{a_{11}}{b_{11}} = \frac{a_{12}}{b_{12}} = k_1, \quad \text{а} \quad \frac{a_{22}}{b_{22}} = k_2, \quad \text{причем} \quad k_1\neq k_2. \tag{8}$$

Рассмотрим множество направлений, по которым точка (x,y) стремится к точке (x_0,y_0), или иначе $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ по закону $\Delta y = r\Delta x$ при $\Delta x\to 0$.

Используя разложение функций $f(x,y)$ и $q(x,y)$ по формуле Тейлора с точностью до членов второго порядка, а также (8), получим для принятых направлений

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x,y)}{q(x,y)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{k_1 b_{11} + 2rk_1 b_{12} + k_2 r^2 b_{22} + \frac{o_1(\Delta\ell^2)}{\Delta x^2}}{b_{11} + 2rb_{12} + r^2 b_{22} + \frac{o_2(\Delta\ell^2)}{\Delta x^2}}, \tag{9}$$

где $\Delta\ell^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$. Ясно, что

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{o_1(\Delta\ell^2)}{\Delta x^2} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{o_2(\Delta\ell^2)}{\Delta x^2} = 0$$

и эти члены в (9) можно опустить. Из (9) следует, что при $k_1\neq k_2$ различным значениям r соответствуют различные значения предела. Например, при $\mathrm{r}=0$ предел равен k_1, а при $r=\infty$ предел равен k_2. Отсюда следует, что двойной предел не существует и условие (6) или (7) является необходимым.

Достаточность доказывается просто. Пусть (7) имеет место. Положив в (9) $k_1 = k_2 = k$, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)}{q(x,y)} = k. \ ▲$$

Для неопределенностей второго порядка также могут быть рассмотрены варианты, когда отдельные вторые частные производные или их сочетания равны нулю. Читатель, по аналогии с предыдущим, может разобрать их самостоятельно. В частности, пункты п. 1 – п. 4, аналогичные изложенным выше, имеют место и здесь.

Пример 1. Существует ли двойной предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{q(x,y)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

▼ Видно, что первые частные производные

$$a_{11}=0, \quad a_{12}=1, \quad a_{22}=0,$$

$$b_{11}=2, \quad b_{12}=0, \quad b_{22}=2$$

Обе функции имеют второй порядок малости. Отношения одноименных частных производных различны. Отсюда следует, что двойной предел не существует, в соответствии с пунктом, аналогичным пункту 2 предыдущего параграфа. ▲

Пример 2. Вычислить предел

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x+y}{x^2+xy+y^2} \tag{10}$$

▼ В связи с тем, что при $x\to\infty$ и $y\to\infty$ приращения Δx и Δy теряют смысл, используем обратную замену. $\bar{x}=\frac{1}{x}, \bar{y}=\frac{1}{y}$. Тогда предел (10) принимает вид

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{x+y}{x^2+xy+y^2} = \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{\bar{x}^2\bar{y}+\bar{y}^2\bar{x}}{\bar{x}^2+\bar{y}\bar{x}+\bar{y}^2} = \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{(\bar{x},\bar{y})}{(\bar{x},\bar{y})}. \tag{11}$$

Легко видеть, что функция $f(\bar{x},\bar{y})$ в (11) имеет третий порядок малости ($f'''_{\bar{x}\bar{y}^2}(0,0) = f'''_{\bar{y}\bar{x}^2}(0,0)=2\neq 0$), функция $q(\bar{x},\bar{y})$ — второй. Следовательно, предел их отношения равен нулю. ▲

Заметим, что для функций одной переменной правило Лопиталя сохраняет смысл и при $x\to\infty$. Другими словами, предел отношения функций равен отношению производных при $x=\infty$, если последние существуют. В случае функций многих переменных это не всегда верно, и необходима обратная замена.

Литература

[1] Г. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Санкт-Петербург, изд. «Лань», 1997, том 1.

[2] Л. Кудрявцев и др. Сборник задач по математическому анализу, Москва, изд. Наука. Физматлит, 1999 г.

[3] Н. Виленкин и др. Задачник по курсу математического анализа, изд. Просвещение, Москва, 1971 г., т. 2.

[4] В. Ивлев, А. Нижников. Дифференциальное исчисление функций многих переменных, Москва, РИЦ Альфа МГОПУ, 2001 г.

Валерий Васильевич Ивлев,
доктор технических наук,
профессор Московского государственного
открытого университета им. Шолохова.

Образовательные инициативы

Задачи Путнамовских олимпиад

А. Ю. Эвнин

В статье содержатся сведения о традиционной олимпиаде студентов США и Канады. В предыдущем номере опубликованы условия задач олимпиад 1992 – 2001 гг. В настоящем номере приводятся условия задач последней олимпиады 2002 г., а также решения задач олимпиад 1996 и 1997 гг., написанные А. Ю. Эвниным.

Задачи Путнамовской олимпиады. 7 декабря 2002 г.

A-1 Пусть k — фиксированное натуральное число. n-я производная функции $\frac{1}{x^k-1}$ имеет вид $\frac{P_n(x)}{(x^k-1)^{n+1}}$, где $P_n(x)$ — многочлен. Найти $P_n(1)$.

A-2 Доказать, что из любых пяти точек на сфере некоторые четыре лежат на замкнутой полусфере.

A-3 Пусть $n \geq 2$, а T_n — количество непустых подмножеств S множества $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ с тем свойством, что среднее арифметическое значение элементов S есть целое число. Доказать, что число $T_n - n$ чётно.

A-4 Двое по очереди вписывают числа в определитель размера 3×3. Первый игрок вписывает единицы, а второй — нули (таким образом, по окончании игры определитель будет состоять из пяти единиц и четырёх нулей). Второй игрок хочет, чтобы определитель был равен нулю. Сможет ли первый игрок ему помешать?

A-5 Определим последовательность (a_n) следующим образом: $a_0 = 1$, а при $n \geq 0$ $a_{2n+1} = a_n$ и $a_{2n+2} = a_n + a_{n+1}$. Доказать, что любое положительное рациональное число встретится в множестве

$$\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n} : n \geq 1\right\} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \dots\right\}.$$

A-6 Пусть натуральное число $b \geq 2$. Положим $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ и $f(n) = nf(d)$ при $n \geq 3$, где d есть количество цифр записи числа n в системе счисления с основанием b. Выяснить, для каких значений b сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}.$$

B-1 Шанилла О'Кил бросает мяч по баскетбольному кольцу. Она попадает первый раз, промахивается второй, а при каждом последующем броске вероятность попадания равна доле попаданий в предыдущих бросках. С какой вероятностью она попадёт ровно 50 раз в первых 100 бросках?

B-2 Имеется выпуклый многогранник с не менее чем пятью гранями, в каждой вершине которого сходится ровно три ребра. Двое играют в следующую игру: каждый по очереди пишет своё имя на одной из свободных граней. Побеждает тот, кто первым напишет своё имя на трёх гранях, имеющих общую вершину. Доказать, что первый игрок имеет выигрышную стратегию. Привести пример невыпуклого многогранника, для которого второй игрок имеет ничейную стратегию.

B-3 Доказать, что для любого натурального $n > 1$ выполняется двойное неравенство

$$\frac{1}{2ne} < \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{ne}.$$

B-4 Загадано натуральное число n от 1 до 2002 (включительно). Ваша цель — угадать n за нечётное число попыток. Попытка состоит в том, что вы каждый раз называете натуральное число. После каждой попытки вам сообщают, угадано ли число n, больше оно или меньше названного вами числа. Называемое число не должно быть заведомо неверным, то есть должно попадать в промежуток, определяемый предыдущими попытками. Найти стратегию, позволяющую выиграть с вероятностью, большей чем 2/3.

B-5 *Палиндром по базе b* — это натуральное число, чья запись в b-ичной системе счисления читается одинаково слева направо и справа налево; например, 2002 — палиндром по базе 10. Заметим, что число 200, не являясь палиндромом по базе 10, будет палиндромом по базе 9 (запись: 242) и по базе 7 (запись 404). Доказать, что существует число, являющееся палиндромом из трёх цифр по базе b по меньшей мере для 2002 различных значений b.

B-6 Пусть p — простое число. Доказать, что определитель матрицы

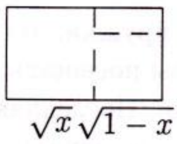
$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x^p & y^p & z^p \\ x^{p^2} & y^{p^2} & z^{p^2} \end{pmatrix}$$

сравним по модулю p с произведением многочленов вида $ax+by+cz$, где a, b, c — целые числа. (Мы говорим, что два целочисленных многочлена сравнимы по модулю p, если сравнимы по модулю p их соответствующие коэффициенты).

Решения задач 1996 года

А–1 Найти наименьшее A, при котором для любых двух квадратов общей площади 1 найдется такой прямоугольник площади A, в котором можно разместить без наложения указанные квадраты. Можно считать, что стороны квадратов параллельны сторонам прямоугольника.

Решение. Пусть площади квадратов x и $1-x$. Можно считать, что $x \geq 1/2$. Прямоугольник наименьшей площади, содержащий оба квадрата, имеет вид:



Его площадь $S(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) = x + \sqrt{x - x^2}$. Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $S(x)$ на промежутке $[1/2, 1]$.

$$S'(x) = 1 + \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} = 0 \iff 2\sqrt{x-x^2} = 2x - 1.$$

Решая соответствующее уравнение, находим критическую точку функции $S(x)$: $x_0 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Значение $S(x_0)$ удобно вычислить так:

$$S(x_0) = x_0 + \frac{2x_0 - 1}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Замечая, что $S(1/2) = S(1) = 1 < S(x_0)$, получаем
Ответ: $A = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

А–2 Радиусы двух окружностей соответственно 1 и 3, расстояние между центрами окружностей — 10. Найти геометрическое место середин отрезков, соединяющих точки данных окружностей.

Решение. Введем на плоскости систему координат так, чтобы центры окружностей лежали на оси абсцисс симметрично относительно начала координат. Параметрические уравнения окружностей будут иметь вид: $x_1 = -5 + \cos t_1, y_1 = \sin t_1$ и $x_2 = 5 + 3\cos t_2, y_2 = \sin t_2$ соответственно. Для точки (x, y), являющейся серединой отрезка, соединяющего точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), имеем: $(x, y) = \frac{1}{2}(\cos t_1 + 3\cos t_2, \sin t_1 + 3\sin t_2)$. Если зафиксировать t_2, то с изменением t_1 от 0 до 2π точка (x, y) будет описывать окружность радиуса $1/2$. При изменении t_2 от 0 до 2π центр указанной окружности $(3/2\cos t_2, 3/2\sin t_2)$ в свою очередь будет двигаться по окружности радиуса $3/2$ с центром в начале координат; окружность радиуса $1/2$ будет при этом "заметать" кольцо с внутренним радиусом $3/2 - 1/2 = 1$ и внешним радиусом $3/2 + 1/2 = 2$.

Ответ: Геометрическое место точек представляет собой кольцо, центр которого есть середина отрезка, соединяющего центры окружностей, а внутренний и внешний радиусы равны соответственно 1 и 2.

А–3 В школе работает 6 кружков. Каждый из 20 учеников класса может посещать любое количество кружков — от 0 до 6. Верно ли, что обязательно найдутся такие 5 учеников и такие 2 кружка, что все пятеро либо посещают оба кружка, либо не посещают ни один из этих двух кружков?

Ответ: Нет. Заметим, что $C_6^3 = 20$. Пусть каждый ученик посещает ровно три кружка, причем у каждого набор кружков отличен от других. (В силу сделанного замечания это возможно.) Тогда и наборы непосещаемых кружков также будут разными у разных учеников. Если бы некоторые 5 человек посещали одновременно какие-нибудь два кружка, тогда из оставшихся четырех кружков по крайней мере один пришлось бы посещать одновременно двум (принцип Дирихле), что приводит к противоречию. Последняя фраза останется справедливой, если в ней перед словами «посещали», «посещать» поставить частицу «не».

А–4 Пусть S — множество упорядоченных троек (a, b, c) различных элементов конечного множества A. Выполняются следующие условия:

1. $(a, b, c) \in S \iff (b, c, a) \in S$;
2. $(a, b, c) \in S \iff (c, b, a) \notin S$;
3. $(a, b, c), (c, d, a) \in S \iff (b, c, d), (d, a, b) \in S$.

Доказать, что существует такая функция $g : A \to R$, что из двойного неравенства $g(a) < g(b) < g(c)$ следует: $(a, b, c) \in S$.

Решение. Пусть в множестве A n элементов. Из 2) следует, что ровно половина всех упорядоченных троек (различных) элементов A входит в S. Зафиксируем некоторый элемент $w \in A$ и на множестве $A \setminus \{w\}$ введем отношение ρ: $x\rho y \iff (w, x, y) \in S$. Легко видеть, что оно антисимметрично: если $x\rho y$, то неверно, что $y\rho x$.Докажем, что данное отношение транзитивно. Пусть $x\rho y$ и $y\rho z$. Тогда $(w, x, y) \in S$ и $(w, y, z) \in S$. В силу 1) и $(y, z, w) \in S$. В силу 2) S принадлежат и тройки $(x, y, z), (z, w, x)$. Опять применяя 1), получим, что $(w, x, z) \in S$, т.е. $x\rho z$, что и требовалось доказать. Обозначим через k_i количество элементов x из множества $A \setminus \{w\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ таких, что $a_i\rho x$. Если $a_i\rho a_j$, то из-за транзитивности и антисимметричности $k_i > k_j$. (Действительно, с одной стороны, $a_i\rho a_j, a_j\rho x \Rightarrow a_i\rho x$ — этим обеспечивается нестрогое неравенство; с другой стороны неверно, что $a_j\rho a_i$). Нетрудно видеть, что верно и обратное: если $k_i > k_j$, то $a_i\rho a_j$ (по закону контрапозиции). Положим $g(a_i) = n - 1 - k_i$, $g(w) = n$. Покажем, что функция g обладает требуемыми свойствами. Если $g(a) < g(b)$, то $a\rho b$, или $(w, a, b) \in S$. Если $c = w$, то из того, что $(c, a, b) \in S$ в силу 2) следует: $(a, b, c) \in S$. Если же $c \neq w$, то из $g(b) < g(c)$ получаем: $(w, b, c) \in S$, стало быть, $(b, c, w) \in S$. Поскольку при этом и $(w, a, b) \in S$, то в силу 3) $(a, b, c) \in S$.

А–5 Пусть p — простое число, большее 3, $k = [2p/3]$. Доказать, что сумма биномиальных коэффициентов $C_p^1 + C_p^2 + \ldots + C_p^k$ делится на p^2.

Решение. Отметим сначала, что каждое слагаемое делится на p ($C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}$ — целое число; числитель дроби кратен p, а знаменатель — нет (так как p — простое число)). Доказываемое утверждение равносильно делимости на p суммы $\sum_{i=1}^{k} k!\frac{C_p^i}{p}$. Проведем сравнение по модулю p:

$$\frac{k!C_p^i}{p} = \frac{k!}{i}\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-i+1)}{(i-1)!} \equiv \frac{(-1)^{i-1}k!}{i}(mod\ p).$$

Итак, задача сводится к проверке того, что

$$k!(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}) \vdots p.$$

По условию p не делится на 3. Рассмотрим два возможных случая.
1) $p = 3m+1$. Здесь m — четное число (иначе p делилось бы на 2). Тогда $k = [\frac{6m+2}{3}] = 2m$. Имеем:

$$(2m)!(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2m}) = (2m)!(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2m}-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{m}) =$$

$$= (2m)!(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{2m}) = \sum_{j=1}^{m/2}(2m)!(\frac{1}{m+j}+\frac{1}{2m+1-j}) =$$

$$= (3m+1)\sum_{j=1}^{m/2}\frac{(2m)!}{(m+j)(2m+1-j)} \vdots 3m+1 = p.$$

2) $p = 3m+2$. Здесь m — нечетное число (иначе p делилось бы на 2). Тогда $k = [\frac{6m+4}{3}] = 2m+1$. Имеем:

$$k!(1-\frac{1}{2}+\ldots-\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m+1}) = k!(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2m+1}-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{m}) =$$

$$= (2m+1)!(\frac{1}{m+1}+\ldots+\frac{1}{2m+1}) = \sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}}(2m+1)!(\frac{1}{m+j}+\frac{1}{2m+2-j}) =$$

$$= (3m+2)\sum_{j=1}^{\frac{m+1}{2}}\frac{(2m+1)!}{(m+j)(2m+2-j)} \vdots 3m+2 = p.$$

А–6 Пусть $c = const \geq 0$. Опишите множество всех непрерывных функций $f : R \to R$ таких, что $\forall x \in R\ f(x) = f(x^2+c)$.

Решение. По условию f — четная функция и $f(0) = f(c)$. В дальнейшем будем считать, что **все рассматриваемые переменные, константы, последовательности являются неотрицательными**. Рассмотрим последовательность $x_0 = x, x_n = x_{n-1}^2+c$ $(n \in N)$, во всех точках которой функция f должна принимать одно и то же значение. Если эта последовательность имеет конечный предел a, то для определения a имеем (с помощью перехода к пределу в рекуррентном соотношении) уравнение: $a = a^2+c$, у которого нет решений при $c > \frac{1}{4}$; единственное решение $a = \frac{1}{2}$ при $c = \frac{1}{4}$ и два решения $a_1 = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$ и $a_2 = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$ при $0 < c < \frac{1}{4}$. В зависимости от значений c рассмотрим различные случаи.

1. При $c > \frac{1}{4}$ для любого x имеем $x^2 + c > x$, поэтому последовательность (x_n) возрастающая и, так как у нее нет конечного предела, $\lim x_n = +\infty$. Пусть $x_0 = 0$, тогда $x_1 = c$, а отображение $x \to x^2 + c$ переводит отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ в отрезок $[x_i, x_{i+1}]$. На промежутке $[0, c]$ зададим функцию f произвольным образом, лишь бы функция была непрерывна на нем и $f(0) = f(c)$. Тогда соотношением $f(x) = f(x^2 + c)$ функция последовательно задается на отрезках $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots$ — на всей положительной полуоси, а в силу четности и на всей числовой прямой. Нетрудно видеть, что построенная функция удовлетворяет условию задачи; в то же время произвольная функция, удовлетворяющая условию задачи, имеет указанный вид.

2. Если $c = 0$, то для произвольного $x > 0$ и любого натурального n имеем:

$$f(x) = f(x^{1/2}) = f(x^{1/4}) = \ldots = f(x^{\frac{1}{2^n}}).$$

   В силу непрерывности $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(0)$. Привлекая свойство четности, получаем: $f(x) = const$.

3. Если $0 < c < \frac{1}{4}$, то

   - при $x_n \le a_1$ имеем $x_n^2 - x_n + c \ge 0$, откуда $x_{n+1} = x_n^2 + c \ge x_n$; кроме того: $0 \le x_n \le a_1 \Rightarrow x_{n+1} = x_n^2 + c \le a_1^2 + c = a_1$. Таким образом, если $x_0 = x \le a_1$, то последовательность (x_n) возрастает, ограничена сверху числом a_1 и имеет его своим пределом (по теореме Вейерштрасса предел существует; с другой стороны он не равен a_2, так как $\forall n \;\; x_n \le a_1 < a_2$). Итак, для $x_0 = x \le a_1$ (переходя к пределу по n в тождестве $f(x) = f(x_0) = f(x_n)$ и используя непрерывность f) получаем: $f(x) = f(a_1)$.
   - при $a_1 < x_n < a_2$ имеем $x_n^2 - x_n + c < 0$, откуда $x_{n+1} = x_n^2 + c < x_n$; кроме того: $x_n > a_1 \Rightarrow x_{n+1} = x_n^2 + c > a_1^2 + c = a_1$. Таким образом, если $a_1 < x_0 < a_2$, то последовательность (x_n) убывает, ограничена снизу числом a_1 и имеет его своим пределом (предел существует и он не равен a_2, так как $\forall n \;\; x_n \le x_0 < a_2$). Итак, для $a_1 < x_0 = x < a_2$ с помощью предельного перехода вновь получаем: $f(x) = f(a_1)$.
   - при $x = x_0 \ge a_2$ рассмотрим последовательность $x_{n+1} = \sqrt{x_n - c}$ (для функции f из условия задачи $\forall n \in N \;\; f(x_n) = f(x_0)$. Имеем: при $x_n \ge a_2$ $x_n^2 - x_n + c > 0$, откуда $x_{n+1} = \sqrt{x_n - c} < x_n$; кроме того: $x_n \ge a_2 \Rightarrow x_n - c \ge a_2 - c = a_2^2$, т.е. $x_{n+1} = \sqrt{x_n - c} \ge a_2$. Таким образом, если $x_0 \ge a_2$, то последовательность (x_n) убывает, ограничена снизу числом a_2 и имеет его своим пределом (предел существует и не равен a_1, так как $\forall n \;\; x_n \ge a_2 > a_1$). Итак, для $x = x_0 \ge a_2$ (переходя к пределу по n в тождестве $f(x) = f(x_0) = f(x_n)$) получаем: $f(x) = f(a_2)$.

Мы доказали, что искомая функция является постоянной на множествах $[0, a_1]$, (a_1, a_2), $[a_2, +\infty)$. Из непрерывности и четности следует, что $f(x) = const$. Очевидно, что (любая) постоянная функция удовлетворяет условию задачи.

4. Если $c = \frac{1}{4}$, то повторив рассуждения предыдущего пункта (для $x \leq \leq a_1 = a$ и $x \geq a_2 = a$), снова получим, что искомая функция постоянна на $[0, a]$ и $[a, +\infty)$, т.е. на положительной полуоси и, в силу четности, на всей числовой прямой.

Ответ: При $0 \leq c \leq \frac{1}{4}$ $f(x) = const$. При $c > \frac{1}{4}$ функция f задается произвольным образом на отрезке $[0, c]$ так, чтобы она была непрерывна на нем и $f(0) = f(c)$; после этого с помощью своего функционального уравнения функция будет однозначно задана на всей числовой прямой и будет удовлетворять условию задачи.

B–1 Назовем множество *эгоцентричным* (или *э-множеством*), если оно содержит свою мощность (число элементов). (Например, $\{2,3\}$, $\{2,5\}$, $\{3,5,8\}$ — э-множества, а $\{3,5\}$, $\{2,5,8\}$ не являются таковыми). Найти число подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, являющихся *минимальными* э-множествами (или *мэ-множествами*), т.е. такими эгоцентричными множествами, чьи собственные подмножества — не э-множества. (Пример. $\{2,3\}$ — мэ-множество в отличие от $\{1,2\}$).

Решение. Обозначим число искомых подмножеств f_n. Выпишем минимальные э-множества при $n \leq 6$:

$$\{1\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4,5\}, \{3,4,6\}, \{3,5,6\}.$$

Прямой подсчет показывает: $f_1 = f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8$. Возникает предположение, что для любого натурального n
$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Убедимся в этом.

Разобьем все мэ-подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n+2\}$ на два класса: множеств, содержащих число $n+2$, и множеств, не содержащих это число. Всякое множество из второго класса является мэ-подмножеством множества $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, поэтому во втором классе f_{n+1} множеств.

Заметим, что в минимальном э-множестве, содержащем k элементов, не могут присутствовать числа меньше k (из-за минимальности), и так как множество — эгоцентрично, то число k — его элемент. Легко проверить, что верно и обратное: произвольное k-элементное множество с минимальным элементом k будет мэ-множеством.

Возьмем теперь произвольное множество из первого класса (пусть k — число его элементов; ясно, что $k > 2$), удалим в нем элемент $n+2$, а все остальные элементы уменьшим на единицу. Получим $k-1$-элементное множество с минимальным элементом $k-1$ — это мэ-множество, причем максимальный элемент его не превосходит n. Установлено взаимно однозначное соответствие между множествами из первого класса и мэ-подмножествами множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Таким образом, первый класс содержит f_n множеств. Соотношение $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ доказано.
Ответ: f_n — n-е число Фибоначчи.

Замечание. Из чисел $1, 2, \ldots, n$ можно составить C_{n-k}^{k-1} k-элементных минимальных э-множеств (к числу k нужно добавить еще $k-1$ чисел, бо́льших k). Поэтому

$$f_n = C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} C_{n-k-1}^k.$$

В результате решения задачи получено интересное комбинаторное тождество: суммы элементов, стоящих на определенных прямых треугольника Паскаля, равны числам Фибоначчи. Это свойство известно давно: см. Н. Н .Воробьев, *Числа Фибоначчи*, М.:Наука, 1978 (с.20–21).

В–2 Доказать, что для любого натурального числа n

$$\left(\frac{2n-1}{e}\right)^{\frac{2n-1}{2}} < 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1) < \left(\frac{2n+1}{e}\right)^{\frac{2n+1}{2}}.$$

Решение. Логарифмированием получим неравенство, равносильное доказываемому:

$$(\frac{2n-1}{2})(\ln(2n-1)-1) < \sum_{k=1}^{n}\ln(2k-1) < (\frac{2n+1}{2})(\ln(2n+1)-1).$$

Для его доказательства достаточно оценить площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y=0$, $x=1$, $x=n+1$ и кривой $y=\ln(2x-1)$, с помощью «входящей» и «выходящей» ступенчатых фигур:

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(2k-1) > \int_1^n \ln(2x-1)dx = \frac{2n-1}{2}(\ln(2n-1)-1)+\frac{1}{2};$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(2k-1) < \int_2^{n+1} \ln(2x-1)dx = \frac{2n+1}{2}(\ln(2n+1)-1)-3(\ln 3-1).$$

В–3 Пусть $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}=\{1,2,\ldots,n\}$. Найти как функцию от n ($n\geq 2$) наибольшее значение выражения

$$S_n = x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1.$$

Решение. Можно считать, что числа $x_1,x_2,\ldots,x_n$ расположены по кругу и S_n — сумма попарных произведений *соседних* чисел.

Докажем по индукции следующее утверждение: если S_n максимально, то число n стоит между числами $n-1$ и $n-2$. *База индукции* ($n=3$) очевидна. *Индукционный шаг.* Пусть утверждение справедливо при $n=k$. Если число $k+1$ вставляется между числами a и b, то сумма попарных произведений изменяется так:

$$\Delta_k = S_{k+1}-S_k = (k+1)(a+b)-ab.$$

При фиксированном a величина $\Delta_k=(k+1)a+b(k+1-a)$ тем больше, чем больше b. Аналогично при фиксированном b величина Δ_k увеличивается с ростом a. Поэтому

$$\Delta_k \leq (k+1)(k+(k-1))-k(k-1) = k^2+2k-1.$$

По предположению индукции если S_k максимально, то числа k и $k-1$ стоят рядом. Если $k+1$ вставить между этими числами, то получим максимальное значение $\Delta_k=k^2+2k-1$, а заодно и $S_{k+1}=S_k+\Delta_k$, что и требовалось доказать.

Теперь легко найти S_n. $S_2 = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 4$. При $n > 2$

$$S_n = S_2 + \sum_{k=2}^{n-1}\Delta_k = S_2 + \sum_{k=3}^{n}\Delta_{k-1} = 4 + \sum_{k=3}^{n}(k^2-2) = 4 - 2(n-2) + \sum_{k=3}^{n}k^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}k^2 - 2n + 3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2n + 3 = \frac{2n^3+3n^2-11n+18}{6}.$$

Ответ: $S_n = \frac{2n^3+3n^2-11n+18}{6}$.

B–4 Для произвольной квадратной матрицы A определим $\sin A$ с помощью степенного ряда:

$$\sin A = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}A^{2n+1}.$$

Существует ли такая 2×2 матрица A, что

$$\sin A = \begin{pmatrix}1 & 1996\\ 0 & 1\end{pmatrix}?$$

Решение. Определив с помощью степенного ряда $\cos A$:

$$\cos A = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}A^{2n},$$

нетрудно доказать, что для произвольной квадратной матрицы A

$$\sin^2 A + \cos^2 A = I,$$

где I — единичная матрица соответствующей размерности. Если бы существовала матрица A, о которой говорится в условии задачи, то для нее выполнялись бы следующие равенства: $\sin^2 A = \begin{pmatrix}1 & 3992\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\cos^2 A = \begin{pmatrix}0 & -3992\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Покажем, что не существует такой матрицы $B = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, что $B^2 = \begin{pmatrix}0 & t\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, где $t \neq 0$. Действительно, из системы уравнений

$$\begin{cases} a^2 + bc &= 0,\\ b(a+d) &= t,\\ c(a+d) &= 0,\\ d^2 + bc &= 0.\end{cases}$$

последовательно получаем: $|a| = |d|$, $a + d \neq 0$, $c = 0$, $d = 0$, $a = 0$, приходя к противоречию. Таким образом, ответ к задаче будет отрицательным даже при замене числа 1996 на любое ненулевое число.

B–5 Для строки S, состоящей из единиц и нулей, обозначим через $\Delta(S)$ разность числа единиц и нулей. Например, $\Delta(1001001) = -1$. Назовем строку S *сбалансированной*, если для любой подстроки T (последовательных символов) S $-2 \le \Delta(T) \le 2$. Так, строка 1001001 не является сбалансированной, так как содержит подстроку 00100. Найти число сбалансированных строк длины n.

Решение. Во-первых, из условия следует, что (сбалансированная) строка не содержит трех одинаковых подряд идущих символов. Во-вторых, если в строке встретилось подряд две единицы, то следующим повторяющимся символом может быть только ноль (и наоборот); при этом четность номеров позиций первых из пар повторяющихся символов будет одинаковой. Поэтому всякая сбалансированная строка полностью задается следующими условиями:

- первый символ;
- номера позиций первых элементов пар повторяющихся символов (это числа одной четности).

Количество способов выбрать нечетные номера совпадает с числом непустых подмножеств множества $\{1, 3, 5, \dots\} \subset \{1, 2, \dots, n-1\}$. Поскольку данное множество содержит $[n/2]$ чисел, то в нем $2^{[n/2]}-1$ непустых подмножеств. Аналогично подсчитывается количество способов выбрать четные номера: $2^{[\frac{n-1}{2}]}-1$. Если учесть случай отсутствия пар повторяющихся символов, то получим, что количество способов выбрать места для расположения пар одинаковых символов равно $2^{[\frac{n}{2}]}+2^{[\frac{n-1}{2}]}-1$.
Ответ: Число сбалансированных строк длины n равно

$$2(2^{[\frac{n}{2}]}+2^{[\frac{n-1}{2}]}-1).$$

В–6 Пусть $\mathbf{r_1} = (a_1, b_1), \mathbf{r_2} = (a_2, b_2), \dots, \mathbf{r_n} = (a_n, b_n)$ — радиус-векторы вершин выпуклого многоугольника, внутри которого находится начало координат. Доказать, что существуют такие положительные числа x и y, что

$$x^{a_1}y^{b_1}\mathbf{r_1} + x^{a_2}y^{b_2}\mathbf{r_2} + \dots x^{a_n}y^{b_n}\mathbf{r_n} = \mathbf{0}.$$

Решение. Введя в качестве новых переменных натуральные логарифмы от старых и обозначая их по-прежнему x и y, переформулируем задачу так: *Доказать, что существуют такие числа x и y (не обязательно положительные), что* $\sum_{i=1}^n e^{a_i x+b_i y}\mathbf{r_i} = \mathbf{0}$. Нетрудно видеть, что последнее уравнение определяет стационарную точку функции $f(x,y) = \sum_{i=1}^n e^{a_i x+b_i y}$. Заметим, что $a_i x + b_i y = \mathbf{r_i}\cdot\mathbf{r}$ (скалярное произведение векторов), где $\mathbf{r} = (x, y)$. Пусть $(r_i, \varphi_i), (r, \varphi)$— полярные координаты точек (a_i, b_i) $(i = 1, \dots, n)$ и (x, y) соответственно; $\rho = \min\{r_i\}$. Упорядочим векторы $\mathbf{r_i}$ по возрастанию полярного угла φ_i; наибольший угол между соседними векторами обозначим θ; ввиду условия задачи $\theta < \pi$. Для любого вектора r найдется такой вектор r_i, что $\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r_i}) \le \theta/2 < \pi/2$. Введя обозначение: $p = \rho\cos\theta/2$, скалярное произведение этих векторов оценим снизу: $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r_i} \ge rp$. Отсюда вытекает равномерная оценка для функции f:

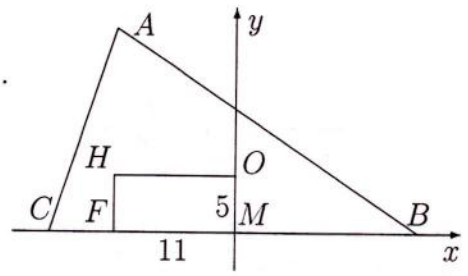
$$f(x,y) > \max_i e^{\mathbf{r_i}\cdot\mathbf{r}} \ge e^{pr}.$$

Поэтому во всех точках окружности достаточно большого радиуса с центром в начале координат функция будет принимать значения, большие любого наперед заданного числа, в том числе n. Так как функция f непрерывна и $f(0,0) = n$, отсюда следует, что в некоторой внутренней точке круга указанного радиуса f достигает минимума; из дифференцируемости f вытекает, что точка минимума является стационарной точкой данной функции. Задача решена.

Решения задач 1997 года

А–1 Прямоугольник $HOMF$ имеет стороны $HO = 11$ и $OM = 5$. Для треугольника ABC точка H — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности, M — середина BC, F — основание высоты, проведенной из вершины A. Найти длину BC.

Решение. По условию сторона BC содержит точки M и F; поэтому точка A лежит на прямой HF. Введем систему координат так, как показано на рисунке.



Точки будут иметь координаты: $M(0,0)$, $O(0,5)$, $H(-11,5)$, $B(x,0)$, $C(-x,0)$, $A(-11,y)$. Из условий $OA^2 = OB^2$ и $BH \perp AC$ получим соответственно $x^2 + 5^2 = 11^2 + (y-5)^2$ и $(-x-11)(-x+11) + 5 \cdot (-y) = 0$. Решая полученную систему, найдем $y = 15$ и $x = 14$.

Ответ: 28.

А–2 За круглым столом сидят n игроков. Каждый из них первоначально имеет по одному рублю. Первый игрок передает рубль второму, после чего второй передает два рубля третьему. Затем третий игрок передает рубль четвертому, а четвертый два рубля пятому и т.д. Игроки поочередно передают рубль или два рубля следующему игроку, у которого еще есть деньги; игрок, лишившийся денег, выбывает из игры и покидает стол. Найти бесконечное множество таких n, при которых игра заканчивается тем, что у некоторого игрока оказываются все n рублей.

Решение. После первого круга (т.е. в тот момент, когда n-й игрок уже отдал свои рубли, а следующий по кругу игрок еще не получил) из игры выбывают первый игрок и все игроки с четными номерами, а у оставшихся будет по два рубля. Заметим, что игра сводится к поочередному увеличению или уменьшению количества рублей у игроков на единицу. Поэтому *если за столом в течение нескольких кругов игры сидит неизменное* **четное** *число игроков, то после каждого круга у одних и тех же игроков количество денег увеличивается, равно как у всех оставшихся уменьшается.* В частности, если за столом осталось двое, то через число кругов, равное количеству рублей у того игрока, который каждый раз, получая рубль, отдает два, игра закончится полной победой его партнера.

Если $n = 2^k + 1$ или $n = 2^k + 2$, то после первого круга за столом останется 2^{k-1} игроков, и у каждого будет по 2 рубля. После еще двух кругов число игроков вдвое уменьшится, а у оставшихся будет по 4 рубля. Следующее изменение числа игроков произойдет еще через 4 круга и т.д. Пока игра не кончится, после каждого очередного круга за столом будет сидеть четное число игроков, причем у всех игроков, занимающих четные места, одинаковое число денег; поровну денег будет и у всех игроков, занимающих нечетные места. Поэтому всякое изменение числа игроков (после некоторого круга игры; исключение — первый круг) является уменьшением вдвое. В конце концов за столом останется один победитель с n рублями (общее количество денег во время игры не меняется).

Замечание. Нетрудно показать, что при n, отличном от $n = 2^k+1$ и $n = 2^k+2$, игра никогда не кончится.

А–3 Вычислить

$$\int_0^\infty (x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 4} - \frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots)(1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \ldots)\,dx.$$

Решение. В первой паре скобок записано разложение в ряд Маклорена функции $xe^{-x^2/2}$. Почленно интегрируя и учитывая, что $\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n!$, получим

$$\int_0^\infty xe^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n}}{n!^2 2^{2n}}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{x^{2n}}{n!^2 2^{2n}}\,d(x^2/2) = \left[t = \frac{x^2}{2}\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \int_o^\infty e^{-t}\frac{t^n}{n!^2 2^n}\,dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n! 2^n} = \sqrt{e}.$$

А–4 Пусть G — группа с единичным элементом e; $\phi:\ G \to G$ — функция такая, что

$$\phi(g_1)\phi(g_2)\phi(g_3) = \phi(h_1)\phi(h_2)\phi(h_3),$$

всякий раз, когда $g_1g_2g_3 = e = h_1h_2h_3$. Доказать, что существует такой элемент $a \in G$, что функция $\psi(x) = a\phi(x)$ есть гомоморфизм (т.е. $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ для всех $x, y \in G$).

Доказательство. Если $a\phi(x)$ — гомоморфизм, то $a\phi(xy) = a\phi(x)a\phi(y)$, или

$$\phi(xy) = a\phi(x)a\phi(y). \tag{1}$$

Положив в (1) $x = y = e$, получим $\phi(e) = \phi(e)a\phi(e)$, откуда $a = \phi^{-1}(e)$. Обозначим $b = \phi(e)$. Задача теперь сводится к доказательству того, что $\phi(xy) = \phi(x)b^{-1}\phi(y)$.

Заметим сначала, что $exx^{-1} = e = eee$, откуда

$$\forall x\ \ \phi(x)\phi(x^{-1}) = b^2 \qquad (2).$$

Очевидна перестановочность элементов $\phi(x)$ и $\phi(x^{-1})$.

Поскольку $x^{-1}\cdot xy \cdot y^{-1} = e = eee$, имеем

$$\phi(x^{-1})\phi(xy)\phi(y^{-1}) = b^3. \tag{3}$$

Умножив обе части равенства (3) слева на $\phi(x)$, справа на $\phi(y)$ и применив свойство (2), получим $b^2\phi(xy)b^2 = \phi(x)b^3\phi(y)$, вследствие чего
$\phi(xy) = b^{-2}\phi(x)b^3\phi(y)b^{-2}$, или

$$\phi(xy) = b^{-2}\phi(x)b^2 \cdot b^{-1} \cdot b^2\phi(y)b^{-2}. \tag{4}$$

Теперь для доказательства утверждения задачи достаточно убедиться, что

$$b^{-2}\phi(x)b^2 = \phi(x); \quad b^2\phi(y)b^{-2} = \phi(y). \tag{5}$$

Действительно, $b^2 = \phi(x^{-1})\phi(x)$, $b^{-2} = (\phi(x)\phi(x^{-1}))^{-1}$ и $b^{-2}\phi(x)b^2 = (\phi(x)\phi(x^{-1}))^{-1}\phi(x)\phi(x^{-1})\phi(x) = \phi(x)$. Аналогично доказывается второе соотношение (5). Итак, из соотношений (4), (5) следует: $\phi(xy) = \phi(x)b^{-1}\phi(y)$, что и требовалось доказать.

А–5 Для $n = 10$ определить, четно или нечетно число упорядоченных n-элементных наборов натуральных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, что

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 1. \tag{1}$$

Решение. Возьмем произвольное решение уравнения (1) — набор натуральных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Пусть в этом наборе встречается k различных чисел: $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_k$ раз $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$. Тогда среди решений (1) имеется $P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ перестановок указанного набора. На четность общего количества решений влияют только такие наборы, число перестановок которых нечетно. Нетрудно показать, что число $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ делится на любой биномиальный коэффициент $C_n^{n_i}$, где $i = 1, \ldots, k$, $n = n_1 + \ldots + n_k$. В условии задачи $n = 10$. Из чисел C_{10}^i $(i = 1, \ldots, 10)$ нечетными являются только числа $C_{10}^2 = C_{10}^8$ и C_{10}^{10}. С учетом того, что число $P(2, 2, 2, 2, 2)$ является четным (это легко проверить), рассмотрению подлежат лишь следующие варианты.

- $n_1 = 10$. В этом случае уравнение (1) имеет единственное решение: $(1, 1, \ldots, 1)$.
- $n_1 = 8, n_2 = 2$. Уравнение принимает вид

$$\frac{8}{x} + \frac{2}{y} = 1, \tag{2}$$

где x и y — не равные друг другу натуральные числа.

Выразив из уравнения (2) переменную x через переменную y, получим

$$x = \frac{8y}{y-2} = 8 + \frac{16}{y-2},$$

откуда следует, что $y - 2$ является делителем 16. Имеем следующие решения (при условии $x \neq y$): $(x, y) = (24, 3), (16, 4), (12, 6), (9, 18)$. Каждое из четырех решений (2) порождает $C_{10}^2 = 45$ решений уравнения (1).

Ответ: Число решений в натуральных числах уравнения (1) при $n = 10$ нечетно.

А–6 Пусть n — натуральное число, c — действительное число. Последовательность (x_k) определяется соотношениями $x_0 = 0, x_1 = 1$ и

$$x_{k+2} = \frac{cx_{k+1} - (n-k)x_k}{k+1}, \quad k \geq 0. \qquad (*)$$

Пусть при фиксированном n число c принимает наибольшее значение, при котором $x_{n+1} = 0$. Выразить x_k через n и k, где $1 \leq k \leq n$.

Решение. Перепишем соотношение $(*)$ в виде

$$(n-k)x_k + (k+1)x_{k+2} = cx_{k+1}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

С учетом условий $x_0 = x_n = 0, \ x_1 = 1$ получим матричное уравнение $Ax = cx$, где A — трехдиагональная матрица, x — вектор-столбец:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ n-1 & 0 & 2 & & & & \\ & n-2 & 0 & 3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 3 & 0 & n-2 & \\ & & & & 2 & 0 & n-1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Теперь задача сводится к нахождению наибольшего (вещественного) собственного значения матрицы A и к определению отвечающего ему собственного вектора (с условием $x_1 = 1$). Для локализации спектра матрицы используем круги Гершгорина. Поскольку главная диагональ матрицы состоит из нулей, а сумма модулей всех внедиагональных элементов каждого столбца равна $(n-1)$, заключаем, что собственные значения матрицы A расположены в круге (комплексной плоскости) радиуса $(n-1)$ и с центром в нуле. Легко проверить, что число $(n-1)$ является собственным значением матрицы A и, значит, является искомым. Переходим к нахождению собственного вектора. Имеем: $x_1 = 1, \ x_2 = n-1; \ x_3 = = \frac{(n-1)x_2 - (n-1)x_1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = C_{n-1}^2$. Далее индукцией по k легко доказать, что для $k = 1, 2, \ldots, n$ выполняется равенство $x_k = C_{n-1}^{k-1}$.

В–1 Пусть $s(x)$ есть расстояние между числом x и ближайшим к нему целым числом. Для произвольного натурального n вычислить

$$F_n = \sum_{m=1}^{6n-1} \min\left(s(\frac{m}{6n}), s(\frac{m}{3n})\right).$$

Решение. Обозначим $a_{n,m} = \min\left(s(\frac{m}{6n}), s(\frac{m}{3n})\right)$.

Пусть $1 \leq m \leq 2n$. В этом случае $s(\frac{m}{6n}) = \frac{m}{6n} \leq \frac{1}{3}$, в то же время $\frac{m}{3n} \geq \frac{m}{6n}$ и $1 - \frac{m}{3n} \geq \frac{1}{3}$ — значит, $a_{n,m} = \frac{m}{6n}$.

Если $2n < m \leq 3n$, выполняются неравенства $\frac{1}{3} < \frac{m}{6n} \leq \frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3} < \frac{m}{3n} \leq 1$, из которых следует, что $s(\frac{m}{3n}) < \frac{1}{3} < s(\frac{m}{6n})$ и $a_{n,m} = s(\frac{m}{3n}) = 1 - \frac{m}{3n}$.

Заметим также, что

$$a_{n,6n-m} = \min\left(s(\frac{6n-m}{6n}), s(\frac{6n-m}{3n})\right) = \min\left(s(\frac{m}{6n}), s(\frac{m}{3n})\right) = a_{n,m}.$$

Осталось просуммировать:

$$F_n = 2\left(\sum_{m=1}^{2n}\frac{m}{6n} + \sum_{m=2n+1}^{3n}(1-\frac{m}{3n})\right) = 2(\frac{(2n+1)n}{6n} + n - \frac{(5n+1)n}{3n\cdot 2}) = n.$$

B–2 Пусть f — дважды дифференцируемая функция, для которой

$$f''(x) + f(x) = -xg(x)f'(x),$$

где $g(x) \geq 0$ при всех x. Доказать, что функция $f(x)$ ограничена.

Доказательство. Умножим обе части уравнения на $2f'(x)$, после чего проинтегрируем их на промежутке от 0 до t:

$$(f'(t))^2 - (f'(0))^2 + (f(t))^2 - (f(0))^2 = -2\int_0^t xg(x)(y'(x))^2dx. \qquad (*)$$

Поскольку подынтегральная функция в полученном интеграле в силу условия задачи имеет тот же знак, что и переменная t, для любого t правая часть $(*)$ неположительна. Значит,

$$\forall t \quad f^2(t) \leq f^2(0) + f'^2(0),$$

что и говорит об ограниченности функции f.

B–3 Для каждого натурального n запишем сумму $\sum_{m=1}^{n} 1/m$ в виде α_n/β_n, где α_n и β_n — взаимно простые числа. Найти все n, при которых β_n не делится на 5.

Решение. Если натуральное число n представимо в виде $n = 5^a k$, где a — неотрицательное целое число, k — натуральное число, не кратное 5, будем говорить, что n имеет *ранг* a. Условимся также, что рациональное число $\frac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые числа, имеет *порядок* a, если знаменатель q имеет ранг a. Задача, таким образом, состоит в нахождении всех n, для которых число $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ имеет нулевой порядок.

1^o. Сумма рациональных чисел разного порядка имеет наибольший из этих порядков.

Действительно, пусть $a > b$, p_1, p_2, q_1, q_2 — числа, не делящиеся на 5; тогда $\frac{p_1}{5^a q_1} + \frac{p_2}{5^b q_2} = \frac{p_1 q_2 + 5^{a-b} p_2 q_1}{5^a q_1 q_2}$ — числитель полученной дроби не делится на 5, а знаменатель имеет ранг a.

2^o. Проследим за тем, как меняется порядок при сложении величин, обратных последовательным числам одного ранга.

$\frac{1}{5^a}\left(\frac{1}{5k+1}+\frac{1}{5k+2}\right)=\frac{1}{5^a}\frac{10k+3}{(5s+1)(5k+2)}$ — порядок не меняется;

$\frac{1}{5^a}\left(\frac{1}{5k+1}+\frac{1}{5k+2}+\frac{1}{5k+3}\right)=\frac{1}{5^a}\frac{5t+1}{(5k+1)(5k+2)(5k+3)}$ — порядок не меняется;

$\frac{1}{5^a}\left(\frac{1}{5k+1}+\frac{1}{5k+2}+\frac{1}{5k+3}+\frac{1}{5k+4}\right)=\frac{5^2(2k+1)}{5^a}\frac{5(2k^2+2)+2}{(5k+1)(5k+2)(5k+3)}$ — порядок уменьшается.

3^o. Решим задачу для $n\le 124$.

В силу 1^o при переходе от $\frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}}$ к $\frac{\alpha_n}{\beta_n}=\frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}}+\frac{1}{n}$ порядок дроби может измениться лишь при n, кратном 5. Отметим, что

- при $n\le 4$ число β_n не делится на 5;
- при $5\le n\le 19$ число β_n делится на 5 (так как числа $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}(1+$ $+\frac{1}{2})$, $\frac{1}{5}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$ имеют порядок 1, а остальные слагаемые суммы $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ имеют нулевой порядок);
- при $20\le n\le 24$ число β_n не делится на 5 (так как $\frac{1}{5}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})=\frac{5}{12}$, а остальные слагаемые вновь нулевого порядка);
- при $25\le n\le 99$ число β_n делится на 5 (так как числа $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{25}(1+\frac{1}{2})$, $\frac{1}{25}(1+$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$ имеют порядок 2, а остальные слагаемые суммы $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ имеют меньший порядок);
- при $100\le n\le 104$ число β_n не делится на 5 (так как и при сложении дробей порядка 2
$$\frac{1}{25}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})=\frac{1}{12},$$
и при сложении дробей порядка 1
$$\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{3}\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{5k+i}=\sum_{k=0}^{3}\frac{5(2k+1)(5(2k^2+2)+2)}{(5k+1)(5k+2)(5k+3)(5k+4)}$$
получаются числа нулевого порядка);
- при $105\le n\le 119$ число β_n делится на 5;
- при $120\le n\le 124$ число β_n не делится на 5 (рассуждения в последних двух случаях аналогичны предыдущим).

4^o. Пусть $n\ge 125$, a — наибольший ранг чисел от 1 до n, $r\cdot 5^a$ — наибольшее число такого ранга. Ясно, что $a\ge 3$, а число r равно 1, 2, 3 или 4. Соотношения из пункта 2^o показывают, что при $r<4$ число $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ будет иметь порядок a. Пусть теперь $r=4$. Тогда сумма дробей порядка a имеет порядок $a-2$:
$$\frac{1}{5^a}\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{i}=\frac{1}{5^{a-2}\cdot 12}.$$

Сумма дробей порядка $a-1$ имеет порядок $a-1$ или $\le a-3$; в первом из этих случаев число $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ имеет порядок $a-1$ (в силу 1^o); будем поэтому считать, что имеет место второй случай.

Пусть $(5k+s)5^{a-2}$ — наибольшее число ранга $a-2$, не превосходящее n. При этом $s=1,2,3$ или 4. Отметим, что сумма $\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{5i+j}$ имеет порядок меньше $a-2$. Осталось найти порядок суммы $\frac{1}{5^{a-2}}(\frac{1}{12}+\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{5k+j})$. С помощью соотношений из пункта 2^o непосредственно проверяется, что для любого s эта сумма имеет порядок $a-2$.

Итак, при $n\geq 125$ дробь $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ имеет ненулевой порядок.

Ответ: β_n не делится на 5 только при
$n=1,\ldots,4,20,\ldots,24,100,\ldots,104,120,\ldots,124$.

B–4 Пусть $a_{m,n}$ есть коэффициент при x^n в разложениии многочлена $(1+x+x^2)^m$. Докажите, что для всех целых $k\geq 0$

$$0\leq b_k=\sum_{i=0}^{[\frac{2k}{3}]}(-1)^i a_{k-i,i}\leq 1.$$

Решение. Полагая $a_{m,i}=0$ при $i<0$ и $i>2m$, запишем очевидное рекуррентное соотношение

$$a_{m+1,n}=a_{m,n}+a_{m,n-1}+a_{m,n-2}.$$

Заметим, что числа $a_{k-i,i}$ отличны от нуля лишь при $2(k-i)\geq i$, то есть когда $0\leq i\leq\frac{2k}{3}$. Поэтому с учетом принятого соглашения во всех последующих выкладках будем считать, что индекс суммирования меняется от 0 до $+\infty$.

Получим рекуррентную формулу для последовательности b_m:

$$b_{m+1}=\sum_i(-1)^i a_{m+1-i,i}=\sum_i(-1)^i(a_{m-i,i}+a_{m-i,i-1}+a_{m-i,i-2})=$$

$$\sum_i(-1)^i a_{m-i,i}-\sum_j(-1)^j a_{(m-1)-j,j}+\sum_k(-1)^k a_{(m-2)-k,k}=b_m-b_{m-1}+b_{m+2}.$$

Непосредственные вычисления дают: $b_0=1$, $b_1=1$, $b_2=0$, $b_3=0$, $b_4=1$, $b_5=1$, $b_6=0$, $b_7=0$, $b_8=1$. С помощью найденного рекуррентного соотношения по индукции легко доказать, что $b_{m+4}=b_m\ \forall m\geq 0$. Таким образом последовательность периодична и ее члены принимают только два значения: 0 и 1. Это доказывает утверждение задачи.

B–5 Докажите, что для $n\geq 2$

$$\overbrace{2^{2^{\cdots^2}}}^{n\text{ цифр}}\equiv\overbrace{2^{2^{\cdots^2}}}^{n-1\text{ цифр}}\pmod n.$$

Решение. Обозначим $a_n=\overbrace{2^{2^{\cdots^2}}}^{n\text{ цифр}}$ и $b_n=a_n-a_{n-1}$. Докажем сначала, что в последовательности (b_n) каждый член (начиная с b_3) делится на предыдущий (значит, и на все предыдущие). Действительно, $b_2=2^2-2=2$; $b_3=a_3-a_2\ \vdots\ 2=b_2$. Предположим, что $b_{k+1}\ \vdots\ b_k$. Тогда

$$b_{k+2}=a_{k+2}-a_{k+1}=2^{a_{k+1}}-2^{a_k}=2^{a_k}(2^{a_{k+1}-a_k}-1)=2^{a_k}(2^{b_{k+1}}-1).$$

Поскольку последовательность (a_k) возрастающая, $2^{a_k} \vdots 2^{a_{k-1}}$. Так как (по предположению индукции) $b_{k+1} \vdots b_k$, имеем также $2^{b_{k+1}} - 1 \vdots 2^{b_k} - 1$. Таким образом, $b_{k+2} \vdots 2^{a_{k-1}}(2^{b_k} - 1) = b_{k+1}$.

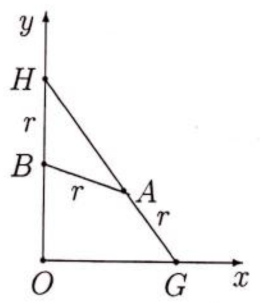
Перейдем к непосредственному доказательству утверждения задачи. Оно также проводится методом математической индукции. База индукции очевидна ($b_2 = 2$). Пусть теперь для любого $k < n$ выполняется $b_k \vdots k$.

Представим число n в виде $n = 2^s t$, где t — нечетное число. Легко проверить, что при $n \geq 3$ имеет место неравенство $a_{n-2} > n$. Отсюда $b_n \vdots 2^{a_{n-2}} \vdots 2^n \vdots 2^s$. Теперь осталось доказать, что $2^{b_{n-1}} - 1 \vdots t$.

Применим теорему Эйлера. Заметим, что $\varphi(n) = \varphi(2^s) \cdot \varphi(t) = 2^{s-1}\varphi(t)$, где φ — функция Эйлера. Поэтому $\varphi(t) \leq \varphi(n) \leq n - 1$. Для любого $k \leq n - 1$ имеем $b_{n-1} \vdots b_k \vdots k$. В частности, $b_{n-1} \vdots \varphi(t)$. Отсюда следует, что $2^{b_{n-1}} - 1 \vdots 2^{\varphi(t)} - 1$. В силу теоремы Эйлера $2^{\varphi(t)} - 1 \vdots t$. Из последних двух соотношений и вытекает, что $2^{b_{n-1}} - 1 \vdots t$. Таким образом, $b_n \vdots n$.

В–6 Разбиение треугольника со сторонами длиной 3, 4, 5 его средними линиями на 4 части имеет диаметр 5/2. Найти наименьший диаметр разбиения этого треугольника на 4 части. (Диаметр разбиения — это точная верхняя грань расстояний между точками из одной части разбиения).

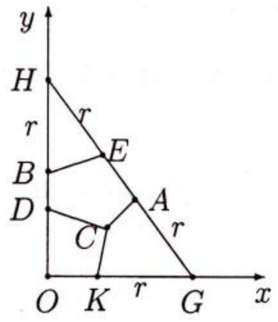
Решение. Возьмем на отрезке OH точку B, а на отрезке HG точку A так, чтобы $HB = BA = AG$. Введем систему координат так, как показано на рисунке.



Пусть $HB = r$. Тогда точки будут иметь следующие координаты: $B(0; 4-r)$, $A(\frac{3}{5}(5-r), \frac{4}{5}r)$. Условие $AB^2 = r^2$ дает уравнение $\frac{9}{25}(5-r)^2 + (4 - \frac{9}{5}r)^2 = r^2$, один из корней которого $r = 5$ является посторонним (так как $r < 4$), а второй равен $\frac{25}{13}$.

Легко проверить, что для точек O, G, H, A, B расстояние между любыми двумя из них не меньше $r = \frac{25}{13}$. Так как при любом разбиении треугольника OGH на четыре части в одну из них попадет две из указанных пяти точек, диаметр разбиения не меньше r.

Приведем пример разбиения диаметра r. Пусть $E \in HG, EH = r$; $K \in OG, KG = r$; $D \in OH, KD = r$; точка C находится на расстоянии r от точек O и G. Тогда треугольник HBE, четырехугольники $OKCD$, $KGAC$ и пятиугольник $CAEBD$ образуют требуемое разбиение.



Для того, чтобы доказать это, заметим, что диаметр многоугольника есть расстояние между некоторыми его вершинами. Несложно определить координаты точек: $C(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{979}}{26})$, $K(\frac{14}{13};0)$, $D(0;\sqrt{\frac{33}{13}})$, $A(\frac{24}{13};\frac{20}{13})$, $B(0;\frac{27}{13})$, $E(\frac{15}{13};\frac{32}{13})$,
а затем проверить, что диаметр каждой из четырех частей разбиения равен $r=\frac{25}{13}$.

Ответ: Наименьший диаметр разбиения на четыре части треугольника со сторонами длиной 3, 4, 5 равен $\frac{25}{13}$.

Эвнин Александр Юрьевич,
кандидат педагогических наук,
доцент кафедры
прикладной математики
Южно-Уральского Государственного Университета.

email: evnin@prima.susu.ac.ru

О деятельности Фонда математического образования и просвещения

От редакции

Краткая информация о Фонде

Фонд математического образования и просвещения (ФМОП) создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Поддержка образовательных инициатив

С 1996 г. ФМОП оказывает организационно-издательскую поддержку популярному многопредметному соревнованию московских школьников — Турниру им. М.В. Ломоносова. В частности, при участии ФМОП издавались отчеты о Турнирах.

Начиная с 1996 г., ФМОП оказывает организационную, материальную и издательскую поддержку международному математическому Турниру Городов, в частности помощь в проведении традиционных Летних Конференций Турнира Городов. В издаваемом Фондом журнале "Математическое образование" регулярно публикуются сообщения о Турнире и условия задач.

В 1997-1999 гг. ФМОП осуществлял поддержку совместного проекта московского Независимого Методологического Университета, Экспериментальной общеобразовательной гуманитарно-методологической школы №1314 г. Москвы "Проектный Колледж" и Управления образования Советского района Ханты-Мансийского автономного округа Тюменской области, направленного на освоение задачной формы организации учебного процесса. В частности, при участии Фонда были изданы сборник работ учителей Советского района, принимавших участие в проекте, а также информациоонно-методическое издание "Разработка и внедрение деятельностного содержания образования на экспериментальных площадках", посвященное 10-летию Проектного Колледжа.

Начиная с 2001/2002 учебного года ФМОП поддерживает методическую работу в математических классах экспериментальной школы №179 г. Москвы, в частности обеспечивает учащихся этих классов экспериментальными учебными материалами.

Издательская деятельность

ФМОП осуществляет ряд издательских проектов. В частности, Фондом были изданы следующие книги и учебные пособия:

- Л. С. Понтрягин. Принцип максимума. 1998 г.
- Л. С. Понтрягин. Жизнеописание. 1998 г.
- И. Р. Шафаревич. Избранные главы алгебры (учебное пособие для школьников). 2000 г.
- Труды семинара МИРАН по алгебре под руководством И. Р. Шафаревича, выпуски 1, 2; 1998 и 2000 гг.

При участии Фонда совместно с издательством "Регулярная и хаотическая динамика", г. Ижевск, были изданы учебные пособия:

- Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? 2001 г.
- Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 2001 г.

Журнал "Математическое образование" и научно-популярное приложение "Обозрение Z"

ФМОП является учредителем возрожденного журнала "Математическое образование", выходившего ранее в России в 1912 – 1917 гг. и в Советском Союзе в 1928 – 1930 гг. Журнал выходит ежеквартально с апреля 1997 г. С сентября 2000 г. выходит "Обозрение Z" — научно-популярное приложение к журналу "Математическое образование".

Благотворительная деятельность

Как уже отмечалось, ФМОП оказывает материальную поддержку российским образовательным учреждениям и организациям. Кроме того, Фондом приобретались учебные пособия для учащихся школ №179 и №1314 г. Москвы, а также для учащихся Православной гимназии Свято-Алексеевской пустыни Переславского района Ярославской области. Фонд неоднократно предоставлял книги и журналы для награждения участников различных математических соревнований и конференций.

Содержание журнала “Математическое образование” за 2001 – 2002 гг.

№ 1 (16), январь – март 2001 г.

№ 2 (17), апрель – июнь 2001 г.

№ 3 (18), июль – сентябрь 2001 г.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, пр-д завода "Серп и Молот", д.3а.

Контактные телефоны: (095) 362-91-70, (095) 362-91-02.

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

e-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2002 год (включая стоимость пересылки) – 40 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2002 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

С сентября 2000 выходит "Обозрение Z" — научно-популярное приложение к журналу "Математическое образование". Условия подписки (адрес, реквизиты, стоимость одного номера) — те же, что и для журнала.

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 35 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 45 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents