Математическое Образование

Журнал Фонда математического
образования и просвещения

Год шестой

№ 3 (22)

Июль-сентябрь 2002 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

№ 3 (22), 2002 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (22), июль – сентябрь 2002 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2002 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 20.11.2002 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 6,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математический анализ, 10 класс (окончание)

А. Л. Городенцев

Публикуем окончание листков по математическому анализу, представляющих собой вторую часть трехлетнего курса анализа для сильных математических классов и предназначенных для 10-го класса. Первая часть курса — листки для 9-го класса — опубликована в журнале «Математическое образование», №2(13), 2000 г. Вторая часть рассчитана на школьников, свободно владеющих материалом первой. Начало листков опубликовано в предыдущем номере журнала.

Листок № 28. Формальные степенные ряды

Определения. Бесконечное выражение $a(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots$, где a_i — числа из некоторого поля $\mathbb{F}$ (у нас $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), а t — переменная, называется *формальным степенным рядом*. По определению, два ряда *равны*, если равны все их соответственные коэффициенты. Совокупность всех формальных степенных рядов с коэффициентами из $\mathbb{F}$ обозначается $\mathbb{F}[[t]]$. Многочлен — это ряд с конечным числом ненулевых коэффициентов, так что $\mathbb{F}[t] \subset \mathbb{F}[[t]]$. Сопоставление рядам $f_1, f_2, \ldots, f_n$ нового ряда g называется *формальной алгебраической операцией*, если каждый коэффициент g вычисляется конечным числом арифметических действий над конечным числом коэффициентов рядов $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Сложение и умножение рядов *являются* формальными операциями, а «вычисление значения ряда при данном числовом значении t» — *нет* (и потому *не определено*).

М28◇1°. Напишите явное выражение для коэффициента при t^n у суммы и у произведения двух рядов через коэффициенты самих этих рядов.

М28◇2°. Для любого конечного множества M положим $C_M(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k\geqslant 0} c_kt^k$, где c_k — это число всех k-элементных подмножеств в M. Для двух непересекающихся конечных множеств A и B выразите $C_{A\cup B}(t)$ и[1] $C_{A\times B}(t)$ через $C_A(t)$ и $C_B(t)$

М28◇3 (деление). Ряд $a(t)$ называется *обратимым*, если существует ряд $a^{-1}(t)$, такой что $a(t)a^{-1}(t) = 1$. Докажите, что $a(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots$ обратим тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$, причём $a^{-1}(t)$ единственен, и его отыскание есть формальная операция.

М28◇4. Найдите n-тый коэффициент ряда:

[1] *произведение* $A \times B$ множеств A и B представляет собой множество всех пар (a, b) с $a \in A$, $b \in B$

а) $(1-t)^{-1}$; **б)** $\left((1-t)^2\right)^{-1}$; **в)** $\left((1-t)^m\right)^{-1}$;

г) $\left((t-1)(t+2)(t-3)\right)^{-1}$; **д)** $\left((t+1)^2(t-2)(t+3)^3\right)^{-1}$;

е) $\left(t^2+t-1\right)^{-1}$; **ж)** $\left(t^2+t+1\right)^{-1}$.

М28◇5° (замена переменного). Является ли формальной алгебраической операцией подстановка вместо t произвольного ряда с нулевым свободным членом?

М28◇6. Подставим $t+\vartheta$ вместо t в ряд $f(t) \in k[[t]]$, сгруппируем результат по степеням ϑ и запишем его в виде $f(t+\vartheta) = \sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t)\cdot\vartheta^k$. Выразите коэффициенты каждого из рядов $f^{(k)}(t)$ через коэффициенты исходного ряда $f(t)$.

Производная. Ряд $f^{(1)}(t)$ из зад. М28◇6 называется *производной* f и иначе обозначается f' или $\frac{d}{dt}f$.

М28◇7. Согласуются ли определения производной для рядов и многочленов, и верно ли, что в зад. М28◇6 $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)' = \frac{d^k}{dt^k}f$?

М28◇8. Докажите, что для любого ряда $f(t) \in k[[t]]$ ряд $f(t_1) - f(t_2) \in k[[t_1, t_2]]$ делится в $k[[t_1, t_2]]$ на $(t_1 - t_2)$, и при подстановке в частное $t_1 = t_2 = t$ получится ряд $f'(t)$.

М28◇9. Пусть $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ и $g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$. Выразите через f, g, f' и g' производные:

а) $(f\pm g)'$; **б)** $\left(\alpha f(t)\right)'$, где $\alpha = \mathrm{const}$; **в)** $\left(t^m f(t)\right)'$;

г) $(f\cdot g)'$; **д)** $\left(\frac{f}{g}\right)'$, при $b_0 \neq 0$; **е)** $\left(f(\alpha t)\right)'$, где $\alpha = \mathrm{const}$;

ж) $\left(f\left(t^m\right)\right)'$; **з)** $\left(f\left(g(t)\right)\right)'$, при $b_0 = 0$.

М28◇10. Вычислите m-тую производную от функции $(1-t)^{-1}$ и сопоставьте это с зад. М28◇4.

М28◇11. Разложите в формальный степенной ряд $(1-t)^{-m}$ с произвольным $m \in \mathbb{N}$.

М28◇12. Сформулируйте и докажите для рядов правило Лейбница и формулу Тейлора из ???

Листок № 28. Формальные экспонента, логарифм и бином

М28$\frac{1}{2}$◇1° (первообразные). Убедитесь, что для любого ряда $f \in k[[t]]$ существует единственный ряд $g \in k[[t]]$ с *нулевым* свободным членом, такой что

$g' = f$ (g называют *первообразным* для f и пишут $g \stackrel{\text{def}}{=} \int f\,dt$). Выразите коэффициенты g через коэффициенты f. Докажите, что:

а) $\int (f \pm g)\,dt = \int f\,dt \pm \int g\,dt$;

б) $\int \lambda f(t)\,dt = \lambda \int f(t)\,dt$, где $\lambda = \text{const}$;

в) $\int f'g\,dt = fg - f_0g_0 - \int fg'\,dt$, где $f_0, g_0 \in k$ суть свободные члены рядов f и g.

М28$\frac{1}{2}$◇2° (логарифм). Ряд $\ln(1+t) \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dt}{1+t}$ называется *логарифмом* $(1+t)$. Вычислите явно все его коэффициенты. Убедитесь, что формальный ряд $\ln(f(t))$ определен для любого формального ряда $f(t)$ с единичным свободным членом. Выразите $(\ln(f))'$ через f и f'.

М28$\frac{1}{2}$◇3. Пусть f и g — произвольные ряды с единичным свободным членом. Какие из перечисленных ниже равенств равносильны друг другу:

а) $f = g$ б) $f' = g'$ в) $f'/f = g'/g$ г) $(\ln f)' = (\ln g)'$ д) $\ln f = \ln g$

М28$\frac{1}{2}$◇4. Является ли *логарифмическая производная* $f \longmapsto \left(\ln(f)\right)'$ биекцией между множеством $N \subset k[[t]]$ рядов с единичным свободным членом и множеством $k[[t]]$ всех рядов?

М28$\frac{1}{2}$◇5° (экспонента). Сколько существует рядов $\exp(t)$ с единичным свободным членом, таких что $\exp'(t) = \exp(t)$? Найдите все коэффициенты такого ряда и вычислите $\ln(\exp(t))$.

М28$\frac{1}{2}$◇6°. Убедитесь, что $\exp(h(t))$ определена для любого ряда $h(t)$ с нулевым свободным членом и вычислите $\exp(\ln(1+t))$.

М28$\frac{1}{2}$◇7. Докажите, что экспоненцирование $N \xrightarrow{\exp} U$ и логарифмирование, т. е. $U \xrightarrow{\ln} N$ суть взаимно обратные биекции между множеством $N \subset k[[t]]$ рядов с нулевым свободным членом и множеством $U \subset k[[t]]$ рядов с единичным свободным членом, причем сложение рядов в N и умножение рядов в U переводятся экспоненцированием и логарифмированием друг в друга, т. е. $\exp(h_1 + h_2) = \exp(h_1)\exp(h_2)$ и $\ln(f_1f_2) = \ln(f_1) + \ln(f_2)$ $\forall\ h_1, h_2 \in N$ и $\forall\ f_1, f_2 \in U$.

М28$\frac{1}{2}$◇8 (бином Ньютона). Для любого $\alpha \in k$ ряд $(1+t)^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(\alpha \ln(1+t)\right)$ называется *биномом* с показателем α. Вычислите коэффициенты бинома явно. Разверните в формальные степенные ряды $\sqrt[3]{1+2t}$ и $1/\sqrt{1-3t}$.

М28$\frac{1}{2}$◇9. Убедитесь, что ряд f^α определен для любых $f \in U$, $\alpha \in k$ и лежит в U. Верно ли, что $f^{\alpha_1}f^{\alpha_2} = f^{\alpha_1+\alpha_2}$ и $(f^{\alpha_1})^{\alpha_2} = f^{\alpha_1\alpha_2}$? Является ли ряд f^{-1} обратным к ряду f?

М28$\frac{1}{2}$◇10. Выразите $(f^\alpha)'$ через α, f и f'.

М28$\frac{1}{2}$◇11 (числа Каталана). При практическом вычислении суммы

$$a_1 \overbrace{+ \cdots +}^{n\ \text{плюсов}} a_{n+1}$$

из $(n+1)$ слагаемых, в ней реально всегда расставляются скобки так, чтобы точно зафиксировать последовательность выполняемых сложений (по одному в каждый момент времени). Количество всевозможных таких расстановок называется n-тым *числом Каталана* c_n. По определению, $c_0 = 1$. Напишите реккурентную формулу, выражающую c_n через $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, проинтерпретируйте её как квадратное уравнение на ряд $c(t) = \sum c_\nu t^\nu$, решите его (в $\mathbb{Q}[[t]]$) и получите явное выражение чисел Каталана через подходящие числа сочетаний.

М28$\frac{1}{2}$◇12*. Сколькими способами можно разрезать выпуклый n-угольник на треугольники по непересекающимся нигде кроме вершин диагоналям?

М28$\frac{1}{2}$◇13. Всегда ли C_{2n}^n делится на $(n+1)$?

Листок № 28. Производящие функции

Метод производящих функций для изучения последовательности $(a_n) \subset k$ сопоставляет ей *производящую функцию* $A(t) = \sum a_n t^n \in k[[t]]$, переформулирует свойства последовательности в виде *функциональных* (алгебраических, дифференциальных, …) соотношений на $A(t)$ и использует для их изучения исчисление формальных степенных рядов.

Реккурентное уравнение k-того порядка — это соотношение

$$y_n = a_1 y_{n-1} + \cdots + a_k y_{n-k},$$

в котором $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — заданные числа (причём $a_k \neq 0$), а (y_n) — неизвестная последовательность. Любой набор из k чисел $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ однозначно продолжается до удовлетворяющей уравнению последовательности (y_n) с начальными значениями $y_\nu = c_\nu$ при $\nu = 0, \ldots, (k-1)$.

М28$\frac{2}{3}$◇1. Положим $Y(t) = \sum\limits_{\nu \geqslant 0} y_\nu t^\nu \in \mathbb{C}[[t]]$, $A(t) = 1 - a_1 t - \cdots - a_k t^{n-k} \in \mathbb{C}[t]$, $B(t) = Y(t)A(t)$. Выясните, является ли ряд $B(t)$ многочленом и выразите его коэффициенты через a_ν и c_ν.

М28$\frac{2}{3}$◇2. Пользуясь предыдущей задачей, найдите $Y(t)$ и «формулу n-того члена» для последовательностей:

а) $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$ с $y_0 = 0$, $y_1 = 1$;

б) $y_n = 4\,(y_{n-1} - y_{n-2})$ с $y_0 = 3$, $y_1 = 1$.

М28$\frac{2}{3}$◇3*. Пусть $x^k - a_1 x^{k-1} - \cdots - a_{k-1}x - a_k = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_N)^{m_s}$, где все $\lambda_j \in \mathbb{C}$ попарно различны. Докажите, что $y_n = \sum\limits_{j=1}^{N} \sum\limits_{i=0}^{m_j} \gamma_{ij} f_{ij}(n)$, где функции $f_{ij}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{i}\lambda_j^n$, а $\gamma_{ij} \in \mathbb{C}$ — некоторые константы, однозначно определяемые k начальными значениями последовательности.

Число разбиений $p(n)$ — это число всевозможных представлений n в виде суммы ненулевых неупорядоченных слагаемых, т. е. число всех n-клеточных диаграмм Юнга.

М28$\frac{2}{3}$◇4. Вычислите $p(n)$ для $n \leqslant 10$.

M28$\frac{2}{3}$◇5. Убедитесь, что в $\mathbb{Q}[[t]]$ корректно определено бесконечное произведение геометрических прогрессий $P(t) \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_{k\geqslant 1}(1-t^k)^{-1}$ и выразите коэффициенты $P(t)$ через числа разбиений.

M28$\frac{2}{3}$◇6. Докажите, что $1/P(t) = \prod\limits_{k\geqslant 1}(1-t^k) = 1 + \sum\limits_{n\geqslant 1}(\widehat{p}_{\text{ч}}(n) - \widehat{p}_{\text{н}}(n)) \cdot t^n$, где $\widehat{p}_{\text{ч}}(n)$ и $\widehat{p}_{\text{н}}(n)$ суть количества n-клеточных диаграмм Юнга, которых длины всех строк различны, а общее число строк чётным и, соответственно, нечётно.

M28$\frac{2}{3}$◇7. Рассмотрим множество $\widehat{Y}_n$ всех n-клеточных диаграмм Юнга, строки которых имеют попарно разную длину. Будем называть *торцом* такой диаграммы её правую верхнюю клетку и все клетки, идущие от неё под углом 45° по диагонали влево вниз. Попробуем задать на $\widehat{Y}_n$ отображение, которое, в зависимости от того, что у диаграммы длинее — торец или нижняя строка, либо отрезает её торец и пририсовывет его новой нижней строкой, либо, наоборот, отрезает нижнюю строку и пририсовывет её новым торцом. Выясните, для каких диаграмм это отображение не определено, и при каких n оно устраивает в $\widehat{Y}_n$ биекцию между диаграммами из чётного и из нечётного числа строк (а с нею — равенство $\widehat{p}_{\text{ч}}(n) = \widehat{p}_{\text{н}}(n)$).

M28$\frac{2}{3}$◇8 (пентагональная теорема Эйлера). Докажите, что

$$1/P(t) = 1 + \sum_{k\geqslant 1}(-1)^k\left(t^{(3k^2-k)/2} + t^{(3k^2+k)/2}\right)$$

и

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - \cdots .$$

M28$\frac{2}{3}$◇9. Является ли $P_m(t) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{n\geqslant 0} p_m(n)\cdot t^n$, где $p_m(n)$ — это число n-клеточных диаграмм Юнга из $\leqslant m$ строк, рациональной функцией от t? Выразите $p_m(n)$ через $p_{m-1}(n)$ и $p_m(n-m)$.

M28$\frac{2}{3}$◇10 (гауссовы биномиальные коэффициенты). Пусть

$$F_n(t) = (1-t)(1-t^2)\cdots(1-t^n).$$

Является ли $G_n^k(t) \overset{\text{def}}{=} F_n(t)/(F_k(t)\cdot F_{n-k}(t))$ многочленом? Вычислите $\lim\limits_{t\to 0} G_n^k(t)$.

M28$\frac{2}{3}$◇11. Выразите через гауссовы биномиальные коэффициенты производящую функцию $P_m^k(t) = \sum\limits_{n\geqslant 0} p_m^k(n)\cdot t^n$ чисел $p_m^k(n)$ n-клеточных диаграмм Юнга высоты $\leqslant m$ и ширины $\leqslant k$.

Листок № 28. Действие $\mathbb{Q}[[d/dx]]$ на $\mathbb{Q}[x]$.

Разностные операторы на кольце многочленов. Для любого формального ряда $F(t) = \sum a_k t^k \in \mathbb{Q}[[t]]$ определим отображение $\widetilde{F} \overset{\text{def}}{=} F(d/dx) : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$, которое сопоставляет многочлену $g \in \mathbb{Q}[x]$ многочлен $\widetilde{F}g \overset{\text{def}}{=} \sum a_k (d/dx)^k g$, где $(d/dx)^k g = g^{(k)}$ — это k-я производная от g. Поскольку $\forall g \in \mathbb{Q}[x]\ \exists n \in \mathbb{N} : g^{(n)} = 0$, сумма справа конечна $\forall g$, и $\widetilde{F}g$ действительно является многочленом. Отображения такого вида называются *разностными операторами* на кольце многочленов.

M28$\frac{3}{4}$◇1° (аппелевы многочлены). Проверьте, что разностные операторы *линейны*,т. е. что $\widetilde{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \widetilde{F}g + \mu \widetilde{F} f\ \forall f, g \in \mathbb{Q}[x]$ и $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, и что действие $\widetilde{F}$ вполне определяется заданием последовательности многочленов $F_n(x) \overset{\text{def}}{=} \widetilde{F}x^n$. Выразите коэффициенты $F_n(x)$ через коэффициеты $F(t)$ и, наоборот, восстановите F по F_n.

M28$\frac{3}{4}$◇2°. Пусть $F(t)G(t) = 1$ в $\mathbb{Q}[[t]]$. Что можно сказать про отображения $\widetilde{F}$ и $\widetilde{G}$?

M28$\frac{3}{4}$◇3 (формула Тейлора). Как действуют на $\mathbb{Q}[x]$ операторы $\exp(d/dt)$ и $\exp(-d/dt)$?

M28$\frac{3}{4}$◇4. Являются ли отображения

$$f(x) \xleftarrow{\ \nabla\ } f(x) - f(x-1) \quad \text{и} \quad f(x) \xleftarrow{\ \Delta\ } f(x+1) - f(x)$$

разностными операторами, и если да, то каким рядам они отвечают?

M28$\frac{3}{4}$◇5. Постройте последовательность многочленов $c_n(x)$, в которой $c_0(x) = 1$, при $n \geqslant 1$ все $c_n(x)$ не имеют свободного члена и удовлетворяют соотношению $\nabla c_n = c_{n-1}$.

M28$\frac{3}{4}$◇6 (целозначные многочлены). Многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами называется *целозначным*, если значение $f(z) \in \mathbb{Z}\ \forall z \in \mathbb{Z}$. Бывают ли целозначные многочлены с нецелыми коэффициентами? Укажите какой-нибудь набор из $(n+1)$ целозначных многочленов $f_0, f_1, \ldots, f_n$, такой что любой целозначный многочлен f степени $\leqslant n$ единственным образом записывается в виде $f = m_0 f_0 + m_1 f_1 + \cdots + m_n f_n$ с $m_i \in \mathbb{Z}$. Существуют ли такие наборы с $\deg f_i = i\ \forall i$ и с $\deg f_i = n\ \forall i$?

M28$\frac{3}{4}$◇7*. Проверьте, что операторы Δ и ∇ из зад. M28$\frac{3}{4}$◇4 строго понижают степени многочленов, и потому для каждого ряда $F \in \mathbb{Q}[[t]]$ определены отображения $F^{\Delta} \overset{\text{def}}{=} F(\Delta) : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$ и $F^{\nabla} \overset{\text{def}}{=} F(\nabla) : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$. Докажите, что множества операторов $\mathbb{Q}[[\Delta]]$, $\mathbb{Q}[[\nabla]]$ и $\mathbb{Q}[[d/dx]]$ совпадают. Разверните d/dx в формальные степенные ряды от Δ и от ∇.

M28$\frac{3}{4}$◇8 (суммирование степеней). Пусть многочлен $s_m(x)$ таков, что

$$1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m = s_m(n)\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Вычислите $\Delta s_m(x)$ и найдите в $\mathbb{Q}[[t]]$ функцию, для которой $s'_m(x)$ является аппелевым многочленом (см. зад. M28$\frac{3}{4}$◇1).

Ряд Тодда и числа и многочлены Бернулли. $B(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{t}{\exp(t)-1} = \sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{b_k}{k!}\, t^k$ называется *рядом Тодда*. Входящие в его коэффициенты числа b_k называются *числами Бернулли*, а его аппелевы многочлены $B_n(x) = \widetilde{B}x^n$ называются *многочленами Бернулли.*

М28$\frac{3}{4}$◇9. Выразите а) b_n через $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ б) B_n через $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$

М28$\frac{3}{4}$◇10. Выразите коэффициенты многочлена $s_m(x)$ из зад. М28$\frac{3}{4}$◇8 через числа Бернулли.

М28$\frac{3}{4}$◇11. Найдите «нечётную составляющую» $B(t) - B(-t)$ и все числа b_{2k+1}.

М28$\frac{3}{4}$◇12. Вычислите первые 11 чисел и многочленов Бернулли и сумму 10-х степеней первых 1000 натуральных чисел[1].

Листок № 29. Производная и дифференциал.

Определения и обозначения. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой ε-окрестности точки x_0. Функция f называется *дифференцируемой* в точке x_0, если $f(x) = f(x_0) + \alpha\cdot(x - x_0) + o(x - x_0)$, где α — некоторая константа, а функция $o(t)$ такова, что $\lim\limits_{t\to 0} o(t)/t = 0$. Говоря неформально, дифференцируемость означает, что с точностью до «бесконечно малой» по сравнению с $(x - x_0)$ функции $o(x - x_0)$ разность $f(x) - f(x_0)$ ведет себя как *линейная однородная функция* $\alpha\cdot(x - x_0)$ от $(x - x_0)$. Коэффициент α называется *производной* функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$, а линейная однородная функция $\alpha(x - x_0)$ от $(x - x_0)$ называется *дифференциалом* функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. Например, функция $y = x$ дифференцируема в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$, её производная $x' \equiv 1$, а дифференциал $dx(x_0) = (x - x_0)$ в каждой точке x_0. Поэтому, допуская известную вольность, производную произвольной дифференцируемой функции $f(x)$ часто помимо f' обозначают через $\dfrac{df}{dx}$.

М29◇1°. Докажите, что для дифференцируемости в точке x_0 функции $f(x)$, определённой в некоторой её окрестности, необходимо и достаточно существование конечного предела

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}\,,$$

причём этот предел, буде он существует, равен $f'(x_0)$.

М29◇2°. Прямая называется *касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $A = (x_0, f(x_0))$, если она является пределом какой-либо последовательности проходящих через A секущих прямых (A, B_n), где $B_n = (x_n, f(x_n))$ и $x_n \to x_0$. Докажите, что если f дифференцируема в x_0, то касательная существует и единственна. Напишите для неё явное уравнение.

М29◇3. На рис. 29.1 изображён график функции $y = f(x)$. Нарисуйте график функции: а) $y = f'(x)$, б) $y = F(x)$, такой что $F(0) = 0$ и $F'(x) = f(x)\ \forall x$.

[1] у Якоба Бернулли, по его собственному признанию, на это ушло «меньше половины четверти часа»

М29◇4°. Всякая ли дифференцируемая в точке x_0 функция непрерывна в точке x_0?

Рис. 29.1. График $y = f(x)$.

М29◇5°. Всякая ли непрерывная в точке x_0 функция, определённая в некоторой её окрестности, дифференцируема в x_0?

М29◇6. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0. Дифференцируемы ли в x_0 функции:
а) $f(x) \pm g(x)$, **б)** $\lambda f(x)$, где $\lambda = \mathrm{const}$, **в)** $f(x)g(x)$; **г)** $f(x)/g(x)$, где $g(x_0) \neq 0$.?
Если да, то выразите их производные в x_0 через $f(x_0)$, $g(x_0)$, $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$.

М29◇7. Пусть $h(x) = f(g(x))$, причём $g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а $f(x)$ дифференцируема в точке $g(x_0)$. Докажите, что $h(x)$ дифференцируема в точке x_0 и выразите $h'(x_0)$ через f, g, f' и g'.

М29◇8. Пусть f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) > 0$. Найдётся ли у точки x_0 такая ε-окрестность, где $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$ и $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$?

М29◇9 (теорема Ферма). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой ε-окрестности U точки x_0, дифференцируема в точке x_0 и $f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall x \in U$. Вычислите $f'(x_0)$.

М29◇10 (теорема Ролля). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема во всех точках (a, b), и $f(a) = f(b)$. Существует ли точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f'(x_0) = 0$?

М29◇11 (теорема Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех точках (a, b). Всегда ли найдётся такая точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f'(x_0) = (f(b) - f(a))/(b - a)$?

М29◇12. Верно ли, что для любой дифференцируемой в некоторой окрестности $[a, b]$ функции f, такой что $f'(a) > 0$, а $f'(b) < 0$, существует $x_0 \in [a, b]$ такое, что $f'(x_0) = 0$?

М29◇13 (теорема Дарбу). Принимает ли производная произвольной дифференцируемой в некоторой окрестности $[a, b]$ функции f все значения, лежащие между $f'(a)$ и $f'(b)$?

Листок № 30. Приложения производных к исследованию функций.

Функции, дифференцируемые на отрезке. Пределы

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{и} \quad \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(если они существуют и конечны) называются *левой* и *правой* производными функции f в точке x_0. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на отрезке* $[a, b]$, если она дифференцируема в каждой точке (a, b) и имеет левую производную в точке b и правую в точке a. Говорят, что функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{C}^k[a,b]$, если сама f и её первые $(k-1)$ производных f', f'', … , $f^{(k-1)}$ дифференцируемы на $[a,b]$, причём k-тая производная $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$ непрерывна на $[a,b]$. Пересечение $\mathscr{C}^\infty[a,b] \overset{\text{def}}{=} \bigcap\limits_{k\geqslant 0} \mathscr{C}^k[a,b]$ называется пространством *бесконечно гладких* функций на $[a,b]$.

М30◇1°. Пусть функции f и g дифференцируемы на $[a,b]$ и $f' \equiv g'$ всюду на $[a,b]$. Верно ли, что разность $f-g$ постоянна на $[a,b]$?

М30◇2. Пусть f дифференцируема на $[a,b]$ и $f'(x) > 0 \;\; \forall\, x \in [a,b]$. Верно ли, что f строго возрастает на $[a,b]$? Что изменится, если заменить неравенство $f'(x) > 0$ на неравенство:

а) $f'(x) \geqslant 0$? **б)** $f'(x) < 0$? **в)** $f'(x) \leqslant 0$?

М30◇3. Пусть f строго убывает на $[a,b]$. Верно ли, что $\forall\, x \in [a,b]$

а) $f'(x) > 0$; **б)** $f'(x) \geqslant 0$?

М30◇4. Что изменится в предыдущей задаче, если:

а) f строго возрастает; **б)** f монотонно неубывает;

в) f монотонно невозрастает.

Локальные экстремумы. Точка x_0 называется точкой *локального максимума* (соотв. *минимума*) функции f, если существует ε-окрестность U точки x_0, такая, что $f(x) < f(x_0)$ (соотв. $f(x) > f(x_0)$) $\forall\, x \in U$. Вкупе, локальные максимумы и минимумы называются *локальными экстремумами* функции f. Точки x, где f дифференцируема и $f'(x) = 0$ называются *стационарными точками* функции f.

М30◇5°. Верно ли, что локальные экстремумы дифференцируемой функции являются её стационарными точками? Верно ли обратное?

М30◇6*. Существует ли

а) какая-нибудь; **б)** непрерывная; **в)** дифференцируемая

функция с непустым множеством локальных максимумов, устроенным так, что в любой окрестности любого локального максимума имеются другие локальные максимумы?

М30◇7. Пусть производная дифференцируемой функции непрерывно возрастает в некоторой окрестности точки x_0, меняя в x_0 знак с минуса на плюс. Являются ли x_0 её локальным минимумом? Есть ли аналогичный критерий для локального максимума?

Направления выпуклости. Функция f называется *строго выпуклой вверх* (соотв. *вниз*) на отрезке $[a,b]$, если $\forall\,[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ график $f(x)$ над (α,β) лежит строго выше (соотв. ниже) отрезка, соединяющего точки $(\alpha, f(\alpha))$ и $(\beta, f(\beta))$. Если f строго выпукла на $[a,b]$ и строго выпукла в другую сторону на $[b,c]$, то точка $b \in [a,c]$ называется *точкой перегиба* графика функции f.

М30◇8. Докажите, что дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция f строго выпукла вверх тогда и только тогда, когда $f'(x)$ убывает на $[a,b]$, и аналогичный критерий выпуклости вниз.

М30◇9. Пусть дважды дифференцируемая на $[a,c]$ функция f имеет перегиб в точке $b \in (a,c)$. Является ли b локальным экстремумом для f'?

M30◇10. Пусть у дважды дифференцируемой на $[a,b]$ функции $f'(x_0)=0$ и
а) $f''(x_0)>0$, б) $f''(x_0)<0$.

Имеет ли f в x_0 локальный экстремум, и если да, то какого типа?

M30◇11 (неравенство Иенсена). Пусть $f''\geqslant 0$ всюду на $[a,b]$. Докажите, что для любых $x_k\in[a,b]$ и $\lambda_k>0$ выполнено неравенство

$$f\Big(\Big(\sum\lambda_k x_k\Big):\Big(\sum\lambda_k\Big)\Big)\leqslant\Big(\sum\lambda_k f(x_k)\Big):\Big(\sum\lambda_k\Big).$$

M30◇12 (неравенство Коши - Буняковского). Докажите, что

$$(x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2)$$

и опишите все случаи, когда имеет место равенство.

M30◇13. Предположим, что функция f всюду дифференцируема на $[0,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=a\in\mathbb{R}$. Верно ли, что график функции f имеет при $x\to+\infty$ асимптоту вида $y=ax+b$?

Листок № 31. Упражнения в дифференцировании

M31◇1°. Вычислите производную от каждой тригонометрической функции.

M31◇2° (теорема об обратной функции). Пусть f дифференцируема на $[a,b]$, $f'>0$ всюду на (a,b), и $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$. Докажите, что f отображает $[a,b]$ на $[\alpha,\beta]$ взаимно однозначно, причём обратная к f функция $g:[\alpha,\beta]\longrightarrow[a,b]$ дифференцируема, и $\forall\gamma\in[\alpha,\beta]$ выразите $g'(\gamma)$ через $f'(g(\gamma))$.

M31◇3°. Продифференцируйте:
а) x^α, $\alpha\in\mathbb{Q}$; б) $\arcsin x$; в) $\arccos x$; г) $\operatorname{arctg}x$.

M31◇4°. Продифференцируйте:

а) $x\sqrt{1-x^2}$; б) $\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$; в) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$;

г) $\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; д) $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$; е) $\sin(\cos^2x)\cdot\cos(\sin^2x)$;

ж) $\arcsin\dfrac{1-x^4}{1+x^4}$

M31◇5°. Вычислите все производные от:
а) $\sin x$; б) $\cos x$; в) $1/x$; г) $\sqrt[m]{1+\alpha x}$.

M31◇6. Вычислите 9-ю производную от:

а) $\prod\limits_{k=1}^{8}(x+k)$; б) $\prod\limits_{k=1}^{9}(x+k)$; в) $\prod\limits_{k=1}^{10}(x+k)$; г) $(1+x)\big/\sqrt{1-x}$;

д) $1\big/(x(x+1))$; е) $1\big/(x^2-1)$; ж*) $1\big/(x^2+1)$; з*) $1\big/(x^2+x+1)$.

M31◇7°. Найдите inf, sup и все локальные экстремумы функций:

а) $|x^2-3\,x+2|$ на $[-10,10]$; б) $\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ на $[0,+\infty)$;

в) $\dfrac{2x}{1+x^2}$ на всём $\mathbb{R}$ и на $[-1,2]$; г) $x\sqrt[3]{x-1}$ на $[-2,5]$.

М31◇8. Верно ли, что:
а) $\sin x > x - x^3/6$ при $x>0$;
б) $\operatorname{tg} x > x + x^3/3$ при $0<x<\pi/4$?

М31◇9°. Найдите кратчайшее расстояние от т. $(7,6)$ до параболы $y=x^2+x+1$.

М31◇10. Соберётся ли, отразившись от параболы $y=ax^2+bx+c$, в одной точке параллельный пучок лучей, падающий на неё по вертикали сверху? Если да, то в какой точке?

М31◇11*. Гипербола представляет собой ГМТ, разность расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 постоянна и равна δ. Докажите, что поток лучей от точечного источника света в F_1, отразившись от гиперболы, предстанет стороннему наблюдателю как поток лучей от точечного источника в F_2 и наоборот.

М31◇12*. Эллипс представляет собой ГМТ, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 постоянна и равна σ. Что произойдёт с отражённым от эллипса потоком лучей от точечного источника света в F_1?

М31◇13°. Найдите на эллипсе $4\,x^2+9\,y^2=36$ точку, касательная в которой составляет вместе с осями координат треугольник максимально возможной площади.

М31◇14°. Сколько перегибов у графика $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$? Лежат ли они на одной прямой?

М31◇15°. Постройте (с полным исследованием[1]) графики:

а) $y=x\operatorname{arctg} x$; б) $y=\dfrac{1-2\,x+4\,x^2}{1-2\,x+2\,x^2}$; в) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$;

д) $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$.

М31◇16°. Под каким углом пересекаются кривые:
а) $y=x^2$ и $x=y^2$; б) $y=\sin x$ и $y=\cos x$?

М31◇17. Точка движется по координатной плоскости по закону $x=x(t)$, $y=y(t)$. Вектор $v(t)=\left(\dfrac{dx}{dt}(t),\dfrac{dy}{dt}(t)\right)$ называется *скоростью* точки. Докажите, что если $v(t)$ существует и непрерывен по t в окрестности t_0 и $\dfrac{dx}{dt}(t_0)\neq 0$, то существует окрестность t_0, где траектория является графиком дифференцируемой функции $y=f(x)$. Выразите $\dfrac{df}{dx}(t)$ через компоненты $v(t)$.

---

[1] т. е. как можно более точным указанием области определения, множества значений, промежутков возрастания - убывания, локальных экстремумов, направлений выпуклости, перегибов и асимптот

Листок № 31. Дополнительные задачи про производные

М31$\frac{1}{2}$◇1. Всегда ли между двумя вещественными корнями многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$ лежит вещественный корень многочлена f'?

М31$\frac{1}{2}$◇2* (теорема Декарта). Обозначим через $N(f)$ число положительных корней многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$, а через $L(f)$ количество перемен знака в последовательности его коэффициентов. Верно ли, что:

а) L и N не меняются от умножения f на $\pm x^m$;

б) $L(f) \equiv N(f) \pmod 2$;

в) $L(f') \leqslant L(f)$;

г) $N(f) \leqslant N(f') + 1$;

д) $L(f(x)) + L((-1)^{\deg f} f(-x)) \leqslant \deg f$;

е) $N(f) \leqslant L(f)$;

ж) $N(f) = L(f)$, если все корни f в поле $\mathbb{C}$ вещественны?

М31$\frac{1}{2}$◇3. Сколько вещественных корней у:
а) $x^3 - 3x^2 - 9x + a$; **б)** $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$?

М31$\frac{1}{2}$◇4 (Правило Лопиталя). Пусть функции f и g определены и дифференцируемы всюду в некоторой окрестности точки x_0 за исключением самой этой точки, и при $x \to x_0$ отношение f/g представляет собой неопределённость вида
а) $0/0$, **б)** ∞/∞.

Докажите, что если $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f'/g'\right)$ существует и равен $p \in \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f/g\right)$ тоже существует и равен p.

М31$\frac{1}{2}$◇5. Остаётся ли правило Лопиталя в силе, если x_0 и/или p равны $\pm\infty$ или ∞?

М31$\frac{1}{2}$◇6. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg} x - 1}{x^2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^2}$.

М31$\frac{1}{2}$◇7 (формула Тейлора - Лагранжа). Докажите, что $\forall\ f \in \mathscr{C}^k[a,b]$ и $\forall\ x,\ x_0 \in [a,b]$

$$f(x) = \frac{1}{k!}\, f^{(k)}(\vartheta)\cdot(x-x_0)^k + \sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{1}{\nu!}\, f^{(\nu)}(x_0)\cdot(x-x_0)^\nu$$

для некоторого ϑ из отрезка с концами в x_0 и x. (Совет: начните с $k = 1,\ 2,\ \ldots$)

М31$\frac{1}{2}$◇8*. Заменяя иррациональности подходящими тейлоровскими разложениями (или как-то ещё) вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$; **б)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$ **г)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$ **д)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$

М31$\frac{1}{2}$◇9. Пусть функция f бесконечно дифференцируема в ε-окрестности U точки x_0, и существует такая константа $c \in \mathbb{R}$, что $|f^{(n)}(x)| < c\ \ \forall x \in U$ и $\forall n \in \mathbb{N}$.

Постройте степенной ряд вида $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k(x-x_0)^k \in \mathbb{R}[[(x-x_0)]]$, который $\forall\, x\in U$ абсолютно сходится к $f(x)$.

М31$\frac{1}{2}$◇10. Найдите в $\mathbb{Q}[[x]]$ два степенных ряда, которые при каждом $x \in \mathbb{R}$ абсолютно сходятся к $\sin(x)$ и к $\cos(x)$ соответственно.

М31$\frac{1}{2}$◇11. Рассмотрим ряды $\sin(z)$ и $\cos(z)$ из предыдущей задачи как элементы из $\mathbb{C}[[z]]$, а также ряд $e^z = \sum z^k/k! \in \mathbb{C}[[z]]$. Будут ли все три ряда абсолютно сходиться при любом $z\in\mathbb{C}$? Докажите *формулу Эйлера*: $\forall\, x,y\in\mathbb{R}\ \ e^{x+iy} = \cos(x) + i\,\sin(y)$ как комплексные числа.

М31$\frac{1}{2}$◇12 (Канторова лесенка). Существует ли монотонно неубывающая сюрьективная непрерывная функция $f : [0\,,1] \longrightarrow [0\,,1]$, у которой всюду за исключением, разве что, нигде не плотного подмножества меры нуль $f'(x)$ существует и равна нулю.

М31$\frac{1}{2}$◇13* (Лейбницева пила). Постройте непрерывную функцию на $[0\,,1]$, не дифференцируюмую ни в одной точке.

М31$\frac{1}{2}$◇14*. Пусть $f'(x) \in \mathbb{R}$ существует $\forall\, x \in [a,b]$. Может ли f' быть всюду разрывна на $[a,b]$?

М31$\frac{1}{2}$◇15*. Функция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема и $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\exists\, n\in\mathbb{N}$, такое что n-тая производная от f обращается в нуль в точке x. Верно ли, что f — многочлен?

Листок № 32. Сходимость рядов[1]

Напоминания о сходящихся рядах. Суммой числового ряда $\sum c_\nu$ (вещественного или комплексного) называется предел его *частичных* сумм $\lim\limits_{n\to\infty}(c_0 + c_1 + \cdots + c_n)$. Если он существует, ряд называется *сходящимся*, если нет — *расходящимся*. Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если все конечные суммы вида $|c_i|+|c_{i+1}|+\cdots+|c_{i+m}|$ ограничены сверху. Сходящийся ряд, который не является абсолютно сходящимся, называется *условно сходящимся*.

М32◇1. Приведите пример какого-нибудь условно сходящегося ряда. Можно ли перемешать его слагаемые так, чтобы

а) сумма изменилась; **б**) ряд перестал сходится.

М32◇2*. Можно ли перемешать слагаемые произвольного условно сходящегося ряда так, чтобы он стал

а) расходиться;

б) сходиться к любому наперёд заданному числу (в т. ч. $\pm\infty$)?

М32◇3. Докажите, что всякий абсолютно сходящийся ряд сходится, причём его сумма не меняется при перемешивании слагаемых.

М32◇4 (критерий Коши). Докажите, что для абсолютной сходимости ряда $\sum c_\nu$ необходимо и достаточно, чтобы

$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, n \in \mathbb{N} : |c_k| + |c_{k+1}| + \cdots + |c_{k+m}| < \varepsilon\ \forall\, k > n$ и $\forall\, m \in \mathbb{N}$.

[1] задачи этого листка можно решать в $\mathbb{R}$, в $\mathbb{C}$, или и там и там

М32◇5. Докажите, что ряд $\sum a_\nu b_\mu$, составленный из всевозможных попарных произведений (всё равно в каком порядке) членов двух абсолютно сходящихся рядов $\sum a_\nu$ и $\sum b_\mu$ абсолютно сходится к произведению сумм рядов-сомножителей.

М32◇6 (признаки Абеля и Дирихле). Сходится ли ряд $\sum\limits_n a_n b_n$, если:

а) ряд $\sum |a_\nu|$ сходится, а числа b_ν ограничены?

б) частичные суммы $a_1 + \cdots + a_n$ ограничены, а b_ν монотонно стремятся к нулю при $\nu \to \infty$?

М32◇7 (признак Коши). Докажите, что ряд $\sum c_\nu$ абсолютно сходится, если существует (вещественное) $q < 1$, такое что $\sqrt[\nu]{|c_\nu|} \leqslant q$ при всех $\nu \gg 0$.

М32◇8 (признак Даламбера). Докажите, что ряд $\sum c_\nu$ абсолютно сходится, если существует (вещественное) $q < 1$, такое что $|c_{\nu+1}/c_\nu| \leqslant q$ при всех $\nu \gg 0$.

М32◇9. Сходятся ли ряды:

$$\text{а) } \sum_{n\geqslant 1} \binom{2n}{n}^{-1}; \quad \text{б) } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}; \quad \text{в) } \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}; \quad \text{г) } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}?$$

М32◇10* (радиус сходимости степенного ряда). Докажите, что ряд $\sum a_n x^n$ абсолютно сходится при любом $|x| < \varrho$ и расходится при любом x с $|x| > \varrho$, где $\varrho \in \mathbb{R}$ — это число, обратное к ТВГ множества[2] предельных точек последовательности $\sqrt[n]{|a_n|}$.

М32◇11*. Сравните радиусы сходимости формального степенного ряда f и его формального производного ряда f'.

М32◇12*. Пусть формальный степенной ряд $f(x) = \sum a_n x^n$ имеет ненулевой радиус сходимости ϱ. Зададимся произвольным числом r, таким что $0 < r < \varrho$. Докажите, что $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, m \in \mathbb{N}$, такое что $\forall\, n > m$ неравенство

$$|f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_n x^n| < \varepsilon$$

выполняется сразу для всех x с $|x| < r$ (это явление называется *равномерной* (по $x < r$) сходимостью).

М32◇13*. Докажите, что сумма степенного ряда с ненулевым радиусом сходимости ϱ является бесконечно дифференцируемой функцией в области $|x| < \varrho$ (подсказка: *равномерно* по x приблизьте $f'(x)$ и $f(x)$ частичными суммами, и одновременно — по формуле для производной как предела приращений — приблизьте частичную сумму производного ряда отношением приращений частичной суммы самого ряда).

М32◇14*. Пусть числа r и R обратны, соответственно, ТВГ и ТНГ предельных точек последовательности $|a_{n+1}/a_n|$. Сходится ли степенной ряд $\sum a_n x^n$ при $|x| < r$ и $|x| > R$? Какие неравенства связывают r, R и радиус сходимости? Бывают ли они строгими?

[2] если это множество неограничено, полагают $\varrho = 0$; число ϱ называется ***радиусом сходимости*** степенного ряда

Листок № 32. Метрические пространства

Метрическое пространство — это множество $\mathscr{M}$, на котором для каждой пары элементов (p,q) задано неотрицательное *расстояние* $\varrho(p,q)=\varrho(q,p)\in\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, обращающееся в нуль тогда и только тогда, когда $p=q$, и удовлетворяющее *неравенству треугольника*: $\varrho(p,q)+\varrho(q,r)\geqslant\varrho(p,r)\ \forall\, p,q,r\in\mathscr{M}$.

М32$\frac{1}{2}$◇1°. Какие из перечисленных ниже множеств с «расстоянием» являются метрическими пространствами:

а) непрерывные функции на отрезке $[a,b]$ с $\varrho(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$;

б) $\mathbb{Q}$ с $\varrho(x,y)=|x-y|$

в*) отрезки числовой прямой с $\varrho\Big([a,b]\,,\,[c,d]\Big)=|a-c|+|b-d|$;

г) $\mathbb{R}^n$ с $\varrho\Big((x_1,\,\dots\,,x_n)\,,\,(y_1,\,\dots\,,y_n)\Big)=\sqrt{\sum(x_i-y_i)^2}$;

д) то же, но $\varrho=\max_i|x_i-y_i|$;

е) ограниченные последовательности $(a_n)\subset\mathbb{R}$ с $\varrho\Big((a_n)\,,\,(b_n)\Big)=\sup_i|a_i-b_i|$;

ж*) $\Big\{(a_n)\subset\mathbb{R}\ |\ \text{ряд } \sum a_i^2 \text{ сходится}\Big\}$ с $\varrho\Big((a_n)\,,\,(b_n)\Big)=\sqrt{\sum(a_n-b_n)^2}$?

Шары и топология. В метрическом пространстве $\mathscr{M}$ для любого вещественного $\varepsilon>0$ подмножество

$$D_\varepsilon(p)=\{x\in\mathscr{M}\ |\ \varrho(p,x)<\varepsilon\}$$

называются *открытым*, а

$$\overline{D}_\varepsilon(p)=\{x\in\mathscr{M}\ |\ \varrho(p,x)\leqslant\varepsilon\}$$

— *замкнутым шаром* радиуса ε с центром p (обязательно продумайте, как устроены шары в пространствах зад. М32$\frac{1}{2}$◇1). Открытый шар $D_\varepsilon(p)$ также называют *ε-окрестностью* точки $p\in\mathscr{M}$. Предельные, внутренние и изолированные точки подмножеств $X\subset\mathscr{M}$, открытые и замкнутые множества, пределы последовательностей $(x_n)\subset\mathscr{M}$, непрерывные функции $\mathscr{M}\longrightarrow\mathbb{R}$ определяются в произвольном метрическом пространстве $\mathscr{M}$ дословно так же, как в $\mathscr{M}=\mathbb{R}$. Например, последовательность элементов $(x_n)\subset\mathscr{M}$ называется *последовательностью Коши*, если $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,n\in\mathbb{N}:\varrho(x_m,x_k)<\varepsilon\ \ \forall\,m,k>n$. Метрическое пространство называется *полным*, если все последовательности Коши имеют в нём пределы.

М32$\frac{1}{2}$◇2°. Может ли иметь предел последовательность, не являющаяся последовательностью Коши? Может ли последовательность Коши иметь несколько пределов?

М32$\frac{1}{2}$◇3. Подмножество $M\subset\mathscr{M}$ называется *ограниченным*, если существуют $C\in\mathbb{R}$ и $m\in\mathscr{M}$, такие что $\varrho(m,x)<C\ \forall\,x\in M$. Всякая ли ограниченная последовательность содержит подпоследовательность Коши:

а) в $\mathbb{R}^n$; **б**) в произвольном метрическом пространстве?

М32$\frac{1}{2}$◇4. Какие из метрических пространств зад. М32$\frac{1}{2}$◇1 полны?

М32$\frac{1}{2}$◇5. Докажите, что пересечение конечных и объединение любых наборов открытых множеств открыто, и аналогичные свойства замкнутых множеств.

Верно ли, что $U \subset \mathscr{M}$ открыто $\iff \mathscr{M} \setminus U$ замкнуто? Открыты ли открытые шары? Замкнуты ли замкнутые?

М32$\frac{1}{2}$◇6 (теорема о вложенных шарах). Равносильна ли полнота метрического пространства тому, что любая последовательность вложенных замкнутых шаров со стремящимися к нулю радиусами имеет в нём непустое пересечение? Всегда ли это пересечение — одна точка?

М32$\frac{1}{2}$◇7 (теорема о неподвижной точке). Отображение $\mathscr{M} \xrightarrow{F} \mathscr{M}$ называется *сжимающим*, если $\exists\ c \in \mathbb{R}\ :\ 0 < c < 1$ и $\varrho(F(x), F(y)) \leqslant c \cdot \varrho(x, y)$ $\forall\ x, y \in \mathscr{M}$. Докажите, что если $\mathscr{M}$ полно, то любое сжимающее отображение F имеет единственную неподвижную точку, причём к ней сходится любая последовательность вида x, $F(x)$, $F(F(x))$, …

М32$\frac{1}{2}$◇8. Пусть $X \subset \mathscr{M}$ удовлетворяет *условию Больцано - Вейерштрасса*: любая последовательность элементов X имеет в X предельную точку. Докажите, что

а) $\forall\ \varepsilon > 0 \quad X$ покрывается конечным множеством шаров радиуса $\leqslant \varepsilon$;

б) $\forall$ открытого покрытия X можно указать $\varepsilon > 0$ так, что всякий шар радиуса $\leqslant \varepsilon$ с центром в X целиком содержится хотя бы в одном из множеств покрытия;

в) в любом покрытии X открытыми множествами содержится конечное подпокрытие.

М32$\frac{1}{2}$◇9 (компактные подмножества $\mathbb{R}^n$). Докажите, что для подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$ (с любой метрикой из зад. М32$\frac{1}{2}$◇1) условие Больцано - Вейерштрасса, условие одновременной ограниченности и замкнутости, и условие наличия в любом открытом покрытии конечного подпокрытия попарно эквивалентны.

Листок № 33. Экспонента и логарифм[1]

М33◇1. Пусть формальный степенной ряд $f(x) = \sum\limits_{k \geqslant 0} a_k x^k$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $f' = f$. Выразите все коэффициенты a_k через a_0.

М33◇2 (экспонента). Докажите, что ряд $e^x \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu \geqslant 0} x^\nu / \nu!$ абсолютно сходится при всех x.

М33◇3. Докажите $\forall\, a, b$ основное экспоненциальное тождество[2]: $\quad e^{a+b} = e^a e^b$.

М33◇4. Для любых положительных ε, $\varrho \in \mathbb{R}$ подберите $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\forall\ k \geqslant n$ неравенство $|1 + x + x^2/2 + \cdots + x^k/k! - e^x| < \varepsilon$ было выполнено *сразу для всех* x с $|x| \leqslant \varrho$.

М33◇5. Вычислите **а)** $\lim\limits_{x \to 0} e^x$; **б)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$; **в*)** [3] $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

М33◇6. Докажите, что функция e^x всюду дифференцируема и вычислите $(e^x)'$.

---

[1]задачи 1 – 5 можно решать в $\mathbb{R}$, в $\mathbb{C}$, или и там и там

[2]подсказка: проверьте сначала, что это тождество выполнено для формальных степенных рядов от a, b, потом докажите, что все ряды абсолютно сходятся и примените зад. М32◇5

[3]ответ: e^x

М33◇7*. Верно ли, что любой ряд $f(x)$ из зад. М33◇1 абсолютно сходится при всех x к всюду дифференцируемой функции? Опишите[4] все дифференцируемые функции на интервале (a, b), удовлетворяющие дифференциальному уравнению $f'(x) = f(x)$ при всех $x \in (a, b)$.

Обозначение. Через $\mathbb{R}^{>0} \subset \mathbb{R}$ мы обозначаем множество всех *положительных* вещественных чисел. Отметим, что оно замкнуто относительно операций умножения и деления.

М33◇8. Докажите, что функция $y = e^x$ является монотонно возрастающей биекцией из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^{>0}$, и постройте её примерный график.

М33◇9*. Любая ли непостоянная непрерывная функция $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{>0}$, удовлетворяющая тождеству $f(a+b) = f(a)f(b)\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$, переводит 0 в 1, всюду дифференцируема и удовлетворяет дифференциальному уравнению $f'(x) = f(x)$? Опишите все такие функции.

М33◇10 (логарифм). Функция $y = \ln x$, обратная к функции $y = e^x$, называется *натуральным логарифмом*[5]. Докажите, что функция $\mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{x \mapsto \ln x} \mathbb{R}$ является монотонно возрастающей всюду дифференцируемой биекцией и удовлетворяет основному логарифмическому тождеству $\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}^{>0}$. Постройте её примерный график и вычислите $\ln'(x)$.

М33◇11 (логарифмическая производная). Выразите $\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)'$ через f и f' и вычислите производную произведения $(1 + 3\,x^2)^3 \cdot (1 - 5\,x^4)^2 \cdot (21 + 7\,x^5)$.

М33◇12*. Любая ли непостоянная непрерывная функция $\mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, удовлетворяющая тождеству $f(ab) = f(a) + f(b)\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}^{>0}$, переводит 1 в 0, взаимно однозначна и всюду дифференцируема? Опишите все такие функции.

М33◇13*. Является ли функция $\mathbb{C} \xrightarrow{z \mapsto e^z} \mathbb{C}$ периодической? Если да, каков период? Найдите множество её значений и укажите в $\mathbb{C}$ какую-нибудь область, взаимно однозначно отображаемую на это множество.

М33◇14* (комплексный логарифм). Пусть $Ln\,(z) \overset{\text{def}}{=} \ln|z| + i\,Arg(z)$ (напомним, что $Arg(z)$ — это *многозначная* функция). Найдите все значения:

а) $Ln\,(-1)$; **б)** $Ln\,(ie)$; **в)** $e^{Ln\,(z)}$, где $z \neq 0$; **г)** $Ln(e^z)$.

М33◇15*. Каков радиус сходимости ϱ у степенного ряда

$$\ln(1+x) = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n+1} x^n / n\,?$$

Докажите, что при вещественных x с $|x| < \varrho$ правая часть и в самом деле абсолютно сходится к $\ln(1+x)$. Что происходит при $x = \pm\varrho$?

---

[4]подсказка: пусть $f' = f$; найдите $(fe^{-x})'$.

[5]иначе говоря, $\ln x$ — это степень, в которую надо возвести число e, чтобы получить x

Листок № 34. Степенные, показательные и логарифмические функции

Определения и обозначения. Для любых $a \in \mathbb{R}^{>0}$ и $b \in \mathbb{R}$ через a^b обозначается действительное число $e^{b \ln a}$. При фиксированном $b \in \mathbb{R}$ функция $x \mapsto x^b$, заданная на подмножестве $\mathbb{R}^{>0} \subset \mathbb{R}$, называется *степенной функцией с показателем* b. При фиксированном $a \in \mathbb{R}^{>0}$ функция $x \mapsto a^x$, заданная на всём $\mathbb{R}$, называется *показательной функцией с основанием* a.

М34◇1. Верно ли, что

а) $a^b a^c = a^{b+c}\ \forall\, a \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall\, b, c \in \mathbb{R}$;
б) $b^a c^a = (bc)^a\ \forall\, a \in \mathbb{R}$ и $\forall\, b, c \in \mathbb{R}^{>0}$;
в) $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}$ и $\forall\, a \in \mathbb{R}^{>0}$;
г) $a^{-b} = (1/a)^b = 1/(a^b)\ \forall\, a \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall\, b \in \mathbb{R}$;
д) $\left(a^b\right)^c = a^{bc}\ \forall\, a \in \mathbb{R}^{>0},\ \forall\, b, c \in \mathbb{R}$?

М34◇2. Каким неравенством связаны при $x \in \mathbb{R}^{>0}$ и $\alpha \in (\,0\,,\,1\,)$ функции:

а) $\ln(1+\alpha x)$ и $\alpha \ln(1+x)$ **б)** $1+\alpha x$ и $(1+x)^\alpha$

М34◇3. Вычислите производную степенной функции $y = x^b$ и постройте её график при разных $b \in \mathbb{R}$. При каких b степенная функция $\mathbb{R}^{>0} \xrightarrow{x \mapsto x^b} \mathbb{R}^{>0}$:

а) взаимно однозначна; **б)** строго монотонна; **в)** выпукла вверх;
г) выпукла вниз; **д)** возрастает; **е)** убывает?

М34◇4. Вычислите производную показательной функции $y = a^x$ и постройте её график при разных $a \in \mathbb{R}^{>0}$. При каких a показательная функция $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto a^x} \mathbb{R}^{>0}$:

а) строго монотонна; **б)** взаимно однозначна; **в)** выпукла вверх;
г) выпукла вниз; **д)** возрастает; **е)** убывает?

М34◇5 (логарифм по произвольному основанию). Докажите, что $\forall\, x \in \mathbb{R}^{>0}$ и любого положительного $c \neq 1$ существует единственное число $y \in \mathbb{R}$, такое что $c^y = x$ (это число называется *логарифмом* x *по основанию* c и обозначается $\log_c x$). Выразите $\log_c x$ через $\ln c$ и $\ln x$, вычислите производную $\log_c' x$ и постройте график функции $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto \log_c x} \mathbb{R}^{>0}$ при разных $c \in \mathbb{R}^{>0}$. При каких c она

а) строго монотонна; **б)** взаимно однозначна; **в)** выпукла вверх;
г) выпукла вниз; **д)** возрастает; **е)** убывает?

М34◇6 (формулы замены основания). При каких a, b, c выполняются равенства $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ и $a^b = c^{b \log_c a}$? Справедливы ли для функций $y = \log_a x$ и $y = a^x$ с произвольным $a \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$ тождества из зад. М33◇3 и зад. М33◇10?

М34◇7. Найдите производные от функций:

а) $e^{\cos^2 x}$; **б)** $x\, e^{x \ln x}$; **в)** $\log_x \left(x^{\ln x}/e^x\right)$; **г)** x^x; **д)** x^{x^x}.

М34◇8. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (e^x/x^m)\ \ \forall\, m \in \mathbb{N}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\ln(x) \,/\, \sqrt[m]{x}\right)\ \forall\, m \in \mathbb{N}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}(x \ln x)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; **д)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; **е)** $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^x-1}$; **з)** $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1/x))^x$.

M34◇9. Постройте (с полным исследованием) графики функций:

а) $x\ln x$; **б)** $e^{-x}\cdot(3x-1)$; **в)** $\dfrac{e^x}{(1+x)}$; **г)** $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$;

д) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; **е)** $\sqrt{1-e^{-x^2}}$; **ж)** $x^{1/x}$; **з)** $(1+x)^{1/x}$.

M34◇10. Какую кривую опишет на плоскости точка, координаты которой меняются по закону:

а) $\begin{cases} x(t)=\dfrac{(e^t+e^{-t})}{2} \\ y(t)=\dfrac{(e^t-e^{-t})}{2} \end{cases}$, **б*)** $\begin{cases} x(t)=\dfrac{(e^{it}+e^{-it})}{2} \\ y(t)=\dfrac{(e^{it}-e^{-it})}{2i} \end{cases}$, где $i=\sqrt{-1}\in\mathbb{C}$?

Введение в вероятностное прогнозирование. Курс лекций и упражнений

И. П. Костенко

Продолжаем публикацию учебного пособия по теории вероятностей. В данном номере публикуются лекции 2, 3 с соответствующими упражнениями. Лекция 1 опубликована в предыдущем номере журнала, лекции 4, 5 предполагается напечатать в следующем номере.

Лекция 2. Расчет вероятностей, когда исходов много

Продолжим решение задач классическим методом по формуле

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\textit{число } m \textit{ исходов, благоприятствующих } A}{\textit{число } n \textit{ всех исходов}}$$

На прошлой лекции мы рассматривали простые задачи, допускающие выписывание всех равновозможных результатов (исходов) опыта. Решение шло в следующем порядке: 1) выписывались **все** исходы и подсчитывалось их число n (знаменатель!); 2) выделялись исходы, благоприятствующие искомому событию A, и подсчитывалось их число m (числитель); 3) вероятность вычислялась делением m на n.

В задачах, где число исходов велико (несколько десятков, сотен или больше), их непосредственный перебор затруднителен и почти невозможен. В этих случаях часто используются две формулы, с помощью которых вычисляют n и m без выписывания вариантов.

Ваша цель в данной лекции — понять смысл формул (1) и (2) (принцип умножения и число сочетаний) и научиться распознавать, когда какая формула применима.

1. "Дерево" исходов

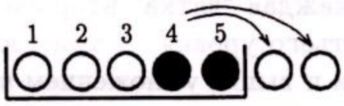

Рис. 1

Начнем со знакомой задачи, которая допускает перебор исходов. Я покажу вам интересный способ организации этого перебора. Его обобщение и приведет нас к первой формуле.

Пример 1. В урне 5 шаров — 3 белых, 2 черных. Опыт состоит в последовательном случайном вынимании двух шаров (рис. 1). Рассчитать вероятность появления двух белых шаров (событие A).

Решение. 1) Пронумеруем мысленно шары и начнем выписывать исходы: (1; 2), (1; 3), (1; 4), ... Вы, наверное, чувствуете, что есть опасность потерять какую-то пару. Чтобы избежать этого, предлагаю вести перебор по схеме, изображенной на рис. 2.

Посмотрите внимательно на "дерево" — здесь каждый исход представлен в виде "ветки": исход (1; 2) — это крайняя левая "ветка", (1; 3) — следующая и т.д. Все исходы разбиваются на 5 групп, в каждой из которых по 4 "ветки", значит, общее их число $n = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \cdot 4 = 20$.

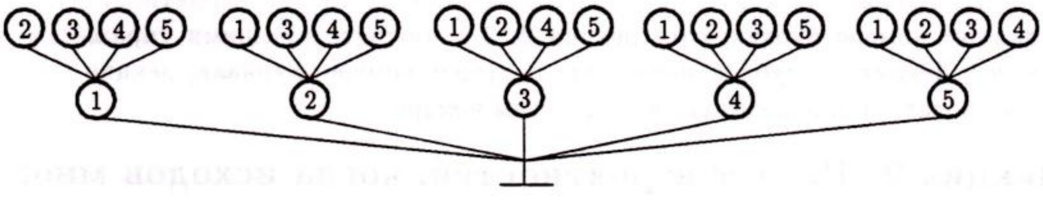

Рис. 2

Заметьте, — число исходов n получается умножением числа "веток" первого уровня (их 5) на число **одинаковых** разветвлений второго уровня (их 4).

2) Исходы, благоприятствующие событию A, изобразим в виде другого "дерева" (рис. 3). Их число $m = 2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2 = 6$.

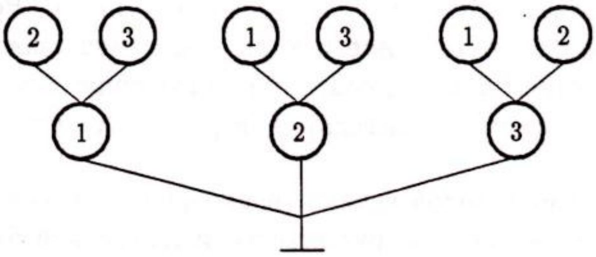

Рис. 3

3) Делим: $\mathbf{P}(A) = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4} = \frac{3}{10}$.

Пример 2. В условиях примера 1 чуть изменим опыт — станем вынимать три шара. Какова вероятность вынуть шары в следующем порядке: первые два белых, третий — черный (событие B)?

Решение. 1) "Дерево" исходов получается из рис. 2 добавлением "веток" третьего уровня. При этом каждая "ветка" второго уровня расщепляется на **одинаковое** число "веток" третьего уровня — три (достройте сами). Общее число исходов подсчитывается, как и выше, умножением $n = 5 \cdot 4 \cdot 3$.

2) Исходы, благоприятствующие событию B получаются добавлением к каждой ветке второго уровня (рис. 3) по две ветки третьего уровня (достройте сами). Их число $m = 3 \cdot 2 \cdot 2$.

3) $\mathbf{P}(B) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{5}$.

Контроль 1. В урне 4 шара — 3 белых и 1 черный. Опыт — вынимание трех шаров. Какова вероятность, что шары появятся в следующем порядке: первый черный, потом два белых (событие C)? Нарисуйте два "дерева" для подсчета n и m.

2. Обобщение: принцип умножения

Итак, имеем метод пересчета исходов опыта с помощью "дерева" исходов. Конечно, этот метод применим не всегда. Опишем общую структуру опытов, для которых пересчет исходов может быть выполнен методом "дерева".

Выше была подчеркнута характерная особенность построенных "деревьев": все "ветки" одного уровня расщеплялись на **одно и то же** число "веток" следующего уровня. Именно это свойство позволило подсчитать число "веток" верхнего уровня (число исходов опыта) умножением числа "веток" первого уровня на число "расщеплений" второго уровня и т.д.

Принцип умножения. *Пусть некоторый опыт состоит из k последовательных этапов. Пусть первый этап допускает n_1 исходов, второй этап, независимо от результата первого, допускает n_2 исходов, ..., k-тый этап допускает n_k исходов. Тогда число n* **всех** *исходов опыта определяется формулой*

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ \dots \ \cdot n_k. \tag{1}$$

Формула (1) доказывается построением "дерева" исходов, аналогичного изображенному на рис. 2. Первый уровень нового "обобщенного дерева" состоит не из пяти, а из n_1 "веток", каждая из которых расщепляется не на четыре, а на n_2 "веток" второго уровня, и т. д.

Имея формулу (1) и зная условия ее применимости, мы можем определять общее число n исходов опыта и число m исходов, благоприятствующих искомому событию, не строя "дерево".

Пример 3. В урне 10 шаров — 5 белых, 3 черных, 2 красных. Опыт — вынимание шести шаров. Какова вероятность, что шары появятся в таком порядке: два белых — три черных — красный (событие D)?

Решение. 1) Подсчитаем число n всех исходов опыта. Учтите — мы будем пересчитывать **все** исходы, все различные "пятерки" шаров, а не те, когда появляются сначала два белых, потом три черных, потом красный.

Структура опыта соответствует принципу умножения, он состоит из шести этапов: первый допускает $n_1 = 10$ вариантов выбора первого шара, второй — $n_2 = 9$ вариантов выбора второго шара (первый шар вынут!), третий этап допускает $n_3 = 8$ вариантов (первые два шара вынуты, в урне осталось восемь шаров), четвертый этап — $n_4 = 7$, пятый этап — $n_5 = 6$, последний, шестой — $n_6 = 5$. Применяя формулу (1), получаем $n = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$. Умножение производить пока не будем, — дальше сами поймете, почему.

2) Подсчитаем число m исходов, благоприятствующих искомому событию D: первый белый шар можно выбрать $m_1 = 5$ различными способами (в урне 5 белых шаров), второй белый — $m_2 = 4$ способами (один белый вынут), третий черный шар — $m_3 = 3$ способами (в урне 3 черных шара), четвертый черный — $m_4 = 2$ способами, пятый черный — $m_5 = 1$ способом (остался один черный шар), последний красный — $m_6 = 2$ способами. Значит, $m = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2$.

3) Искомая вероятность $\mathbf{P}(D) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}$. После очевидных сокращений получаем $\mathbf{P}(D) = \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 7} = \frac{1}{630}$.

Принцип умножения применим не только к задачам с шарами. Он применим, когда опыт повторяется несколько раз.

Пример 4. Игральная кость подбрасывается 4 раза. Какова вероятность, что при первом и при последнем подбрасываниях выпадет "шестерка", а при втором и третьем — не "шестерка" (событие E)?

Решение. $n = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$; $m = 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 = 5^2$; $\mathbf{P}(E) \approx 0,02$.

Контроль 2. Монета подбрасывается 5 раз. Какова вероятность, что герб и решка будут чередоваться?

3. Формула числа сочетаний

В случаях, когда принцип умножения непосредственно не применим, может помочь другая формула (2). Чтобы понять ее, начнем с простых примеров.

Вопрос 1. Сколькими способами можно расположить три одинаковых предмета на четырех местах? Другими словами — сколько имеется способов выбора трех мест из четырех?

На вопрос не трудно ответить, непосредственно перебрав все возможные группы мест: (1,2,3); (1,2,4); (1,3,4); (2,3,4). Ответ: 4 способа.

Вопрос 2. Сколько способов выбора трех мест из пяти?

Здесь перебор сложнее (можно сбиться) — проделайте его сами. Ответ: 10 способов.

Вопрос 3 (обобщенный). Сколько способов выбора l мест из k ($l \leq k$)?

Ответ дает следующая формула (примите ее пока без доказательства):

$$C_k^l = \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot [k-(l-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot l}. \tag{2}$$

Формулу (2) легко запомнить, если заметить две ее "симметрии": 1) в числителе и в знаменателе одинаковое число множителей l (посчитайте их в числителе сами); 2) в числителе они убывают, а в знаменателе — возрастают.

Формулу эту называют *формулой числа сочетаний из k (элементов) по l*. Обозначение C_k^l читается так: "Це из ка по эль" (C есть начальная буква французского слова "combinaison", что значит "сочетание").

Название формулы (2) требует пояснения. Выбор l мест из k мест аналогичен выбору из группы, содержащей k каких-то предметов (элементов) подгруппы, состоящей из l предметов ($l \leq k$). Например, из четырех элементов a, b, c, d можно выбрать следующие подгруппы по три элемента: abc, abd, acd, bcd. Значит, $C_4^3 = 4$. Такие подгруппы, которые одна от другой разнятся, по крайней мере, одним элементом, и называются *сочетаниями*.

Применим формулу (2) к вопросу 1: $l = 3$, $k = 4$, $C_4^3 = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$. Применим к вопросу 2: $l = 3$, $k = 5$, $C_5^3 = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$. Формула позволяет без пересчета быстро отвечать на подобные вопросы, например: сколькими способами можно рассадить в президиуме 7 мужчин и 3 женщины?

$$\text{Ответ: } l = 7,\ k = 10,\ C_{10}^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Можно считать иначе: $l = 3$, $k = 10$, $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ (здесь меньше множителей). Очевидно, $C_{10}^7 = C_{10}^3$ и вообще,

$$C_k^l = C_k^{k-l}. \tag{2'}$$

Формула (2) будет помогать нам в дальнейшем отвечать на вопросы, подобные следующему. В урне много белых и черных шаров, наудачу последовательно вынимаются четыре шара; сколько способов расположения **ровно** трех белых шаров среди четырех вынутых? Это иная форма первого вопроса и ответ дает формула (2): $C_4^3 = 4$.

Контроль 3. Какую из формул (1) или (2) следует применить для ответа на вопросы:

а) телефонная станция обслуживает абонентов, номера которых содержат шесть цифр и начинаются с цифры "3"; сколько абонентов может обслужить станция?

б) колода, содержащая 36 карт, сдается шести игрокам и каждый получает по 6 карт. Сколько возможно разных вариантов сдачи карт одному игроку?

в) сколькими способами можно рассадить на скамейке четырех мальчиков и двух девочек? Укажите все способы. Посчитайте их число непосредственно и двумя формулами, используя (2′).

4. Типовые задачи с шарами

Сейчас я покажу вам образец решения с помощью формул (1) и (2) одного класса задач — они называются урновыми задачами. К ним нередко можно свести другие задачи.

Задача 1. В урне 10 шаров — 3 белых, 7 черных. Опыт состоит в последовательном вынимании четырех шаров. Событие A произойдет, если первыми будут вынуты два белых шара, потом два черных. Событие B произойдет, если появятся два белых и два черных шара в любом порядке. Рассчитать $\mathbf{P}(A)$ и $\mathbf{P}(B)$.

Прежде чем решать задачу, советую сделать рисунок, подобный рис. 1. Наглядность поможет вам правильно рассуждать. Советую всегда делать рисунки при решении урновых задач.

Решение. 1) Подсчитаем число n всех исходов опыта. Напомню, что исходами будут всевозможные "четверки" шаров, различающиеся как номерами шаров, так и их порядком, — например, (1,2,3,4), (1,2,3,5), (5,2,3,1), и т.д. Напомню также, что эти исходы равновозможны — нет причин для того, чтобы какая-то "четверка" шаров появлялась чаще, чем другие.

Применяем принцип умножения. Опыт происходит в четыре этапа (вынимается первый шар, затем второй, третий, четвертый), значит, $k = 4$. Первый этап допускает $n_1 = 10$ результатов (может появиться любой из десяти шаров, лежащих в урне), второй этап — $n_2 = 9$ результатов (один шар вынут, осталось девять), третий — $n_3 = 8$, четвертый — $n_4 = 7$ результатов. Значит, $n = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$. Обратите внимание — при подсчете n мы совершенно "забыли" про события A и B. Это правильно, ведь мы считали **все** исходы, а не те, которые благоприятствуют событиям A или B. Ими займемся далее.

2) Подсчитаем $m_1 = m(A)$ — число исходов, благоприятствующих A. Это те "четверки", которые получаются, если первым вынимается один из трех белых шаров ($n_1 = 3$), вторым — один из оставшихся двух белых ($n_2 = 2$), третьим —

черный шар, их семь ($n_3 = 7$) и последним — один из оставшихся шести черных ($n_4 = 6$). Согласно формуле (1), $m_1 = 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6$.

3) Подсчитаем $m_2 = m(B)$. Здесь не удастся применить принцип умножения так же легко, как для A, ибо нет определенного порядка шаров.

В самом деле, на первом месте может стоять любой из десяти шаров ($n_1 = 10$), на втором — любой из девяти ($n_2 = 9$), на третьем месте выбор зависит от того, какие шары выбраны на первых двух местах: если два белых, то $n_3 = 7$, если два черных, то $n_3 = 3$, если белый и черный, то $n_3 = 8$.

Поступим так: разобьем событие B в сумму событий с определенным порядком появления шаров: $B_{1,2}$ — первые два шара белые, третий и четвертый — черные; $B_{1,3}$ — первый и третий белые; $B_{1,4}$ — первый и четвертый белые и т.д. Событие B появится, если появится одно из введенных событий, т.е. $B = B_{1,2} + B_{1,3} + B_{1,4} + \ldots$. Очевидно, что $m(B) = m(B_{1,2}) + m(B_{1,3}) + m(B_{1,4}) + \ldots$.

Число слагаемых равно числу способов расположения двух белых шаров на четырех местах, т. е. числу сочетаний $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$.

Вычислим каждое слагаемое с помощью принципа умножения. Число исходов, благоприятствующих событию $B_{1,2}$, равно $m(B_{1,2}) = 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6$ (см. проведенное выше вычисление m(A) — ведь $B_{1,2}$=A). Аналогично, $m(B_{1,3}) = 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6$, $m(B_{1,4}) = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 6$, и т.д. У всех слагаемых множители одинаковы, лишь порядок их разный, значит, $m(B) = 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 + 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 6 + \ldots$.

Поскольку число слагаемых равно числу сочетаний C_4^2, то получаем $m(B) = C_4^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 = 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6$.

4) Окончательно считаем вероятности по классической формуле:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{20}; \quad \mathbf{P}(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{3}{10}.$$

Задача 2. Рабочий сделал за смену сто деталей, из которых пять получились с браком. ОТК (отдел технического контроля) берет на проверку десять деталей и если не находит брака, то принимает всю партию (так называемый "выборочный контроль качества"). Каковы шансы рабочего на то, что его работа будет принята? Как вам кажется — велики шансы или малы? Выскажите предположение и проверьте его точным расчетом.

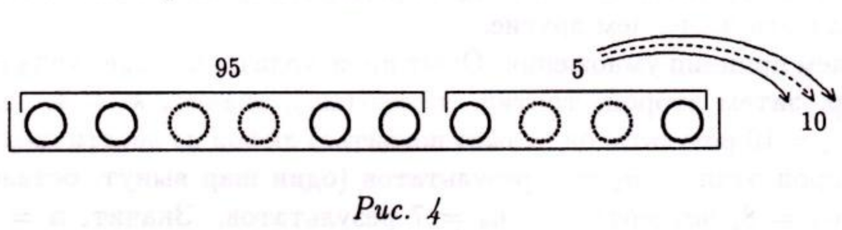

Рис. 4

Решение. Построим урновую модель задачи так: в урне 100 шаров — 95 белых и 5 черных; опыт — вынимание наудачу 10 шаров (без возвращения) (рис. 4); событие A произойдет, если все шары окажутся белыми.

Рассчитаем вероятность $\mathbf{P}(A)$:

1) $n = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91$;

2) $m(A) = 95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91 \cdot 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$;

3)$\mathbf{P}(A) = \dfrac{m(A)}{n} \approx 0,58$. Непосредственное вычисление, конечно, затруднительно — надо пользоваться калькулятором.

Как показал расчет, шансы рабочего не велики и не малы, примерно "пятьдесят на пятьдесят". Вывод — надо работать лучше.

Контроль 4. В урне 15 шаров — 10 белых и 5 черных. Вынимаются последовательно 7 шаров. Событие A произойдет, если появятся сначала четыре белых шара, а потом три черных. Событие B произойдет, если появятся 4 белых и 3 черных шара в любом порядке. Как вам кажется, какое из этих событий будет появляться чаще при повторении опыта? Во сколько раз чаще? Рассчитайте вероятности этих событий.

5. Вероятность хотя бы одного события

Область применения формул (1) и (2) может быть расширена с помощью простой формулы (3). Для этого введем новое понятие.

Определение. Пусть в некотором опыте может произойти или не произойти случайное событие A. Всякий раз, когда в результате опыта событие A не происходит, скажем, что происходит *дополнительное* к A событие $\overline{A}$. Короче, событие $\overline{A}$ состоит в том, что A не происходит.

Как всегда, конкретизируем новое понятие примерами. В урне 5 шаров — 3 белых, 2 черных. Вынимается наудачу один шар. Событие A произойдет, если будет вынут белый шар. Дополнительное событие $\overline{A}$ произойдет, если, согласно определению, **не** будет вынут белый шар, т. е. если будет вынут черный шар (других шаров, кроме белых и черных, в урне нет).

Обратите внимание — событию A благоприятствуют два исхода из пяти, а событию $\overline{A}$ — остальные три исхода. Отсюда термин — *дополнительное* событие.

Будем теперь в тех же условиях вынимать два шара. Событие A произойдет, если появятся два белых шара. Какое событие будет дополнительным к A? Иногда я слышу — "два черных". Не торопитесь. Прочтите внимательно определение. Что значит, событие A **не** произошло? Это значит, что **не** появились два белых шара, т.е. среди двух вынутых шаров или оба черные или один белый, а другой черный. Следовательно, дополнительное событие A состоит в том, что появится **хотя бы один** черный шар.

И в этом примере событию A благоприятствуют $m(A) = 3 \cdot 2 = 6$ исходов, а дополнительному событию $\overline{A}$ — все остальные $n - m = 20 - 6 = 14$ исходов.

Вообще, если в опыте всего n исходов и из них m исходов благоприятствуют событию A, то, согласно определению дополнительного события, остальные $n - m$ исходов благоприятствуют событию $\overline{A}$. Отсюда следует, согласно определению вероятности, что $\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n}$, а $\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{n-m}{n}$. Складывая, получаем $\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n} = 1$. Тем самым, доказана формула

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}}). \tag{3}$$

Формулу (3) иногда называют ***формулой вероятности хотя бы одного события***, потому что она часто применяется для отыскания вероятностей именно таких событий.

Пример 5. В урне 10 шаров — 7 белых, 3 черных. Последовательно вынимаются 3 шара. Какова вероятность, что **хоть один** из появившихся шаров белый (событие A)?

Решение. Согласно формуле (3), достаточно найти вероятность дополнительного события $\overline{A}$.

Когда произойдет $\overline{A}$? Часто мне отвечают: "когда появится хоть один черный". Опять торопливый, формальный ответ, потерявший смысл. Вдумайтесь: если A не произошло, значит **не** появился "хоть один белый", т.е. появились **все** небелые. Итак, $\overline{A}$ произойдет, если появятся три черных шара.

Найдем вероятность $\mathbf{P}(\overline{A})$. Число исходов определим принципом умножения: $n = 10 \cdot 9 \cdot 8$; $m = 3 \cdot 2 \cdot 1$. Вероятность: $\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{120}$.

Применим формулу (3) и окончательно получим: $\mathbf{P}(A) = 1 - \frac{1}{120} = \frac{119}{120}$.

Контроль 5. Игральная кость подбрасывается четыре раза. Какова вероятность того, что хоть один раз появится "шестерка"?

6. Вероятностные модели

Главное, что я хотел сказать вам в этой лекции, я уже сказал. Вы познакомились с тремя формулами, облегчающими расчет вероятностей, и с примерами их применения.

Может быть, эти примеры (шары, урны) казались искусственными? Но я говорил, между прочим, что типовые примеры служат моделями реальных задач и, тем самым, облегчают их решение.

Один пример такой реальной задачи мы рассмотрели. Сейчас давайте разберем еще два интересных примера, связанных с нашей обыденной жизнью. Ведь истинная цель любой научной теории — ее приложение к реальной жизни. Предлагаю пари. Я предсказываю, что в данной студенческой аудитории, где находится 40 человек, есть два студента, у которых совпадают дни рождения (месяц и число).

Согласны ли вы с таким прогнозом? Не кажется ли он вам маловероятным? Ведь дней в году много — 365, а людей в аудитории почти в 9 раз меньше.

Когда я впервые услышал этот прогноз, мне он тоже показался нереальным. Интуиция подсказывала, что вероятность совпадения дней рождения должна быть, по крайней мере, меньше половины. Но после проведения точного расчета я с удивлением убедился, что интуиция может сильно ошибаться. Давайте-ка вместе проведем этот расчет.

Прежде всего, надо точно поставить задачу. Проследите внимательно за формулировкой, которую я сейчас предложу, и вы согласитесь, что она хорошо моделирует нашу ситуацию.

Задача о днях рождения. В урне 365 шаров, на каждом из которых написано число и месяц года (все надписи различные). Опыт состоит в том, что 40 раз вынимают случайным образом шар из урны, записывают число и месяц и **возвращают** его обратно в урну. Нас интересует событие A, которое произойдет, если среди сорока вынутых шаров встретится **хоть одна** пара шаров с одинаковыми надписями. Рассчитать $\mathbf{P}(A)$.

Заметьте — это не проведение опыта сорок раз, а **один** опыт, в результате которого появляются сорок шаров, или сорок дней рождения. Существенно, что один шар может появиться несколько раз.

Решение. Перейдем к дополнительному событию $\overline{A}$ и рассчитаем $\mathbf{P}(A)$, а затем применим формулу (3).

1) Исходами данного опыта будут всевозможные группы из сорока шаров, причем, шары в группах могут повторяться. Опыт удовлетворяет условиям применимости принципа умножения — он проводится в $k = 40$ этапов и каждый этап допускает одно и то же число $n_i = 365$ результатов (не забывайте — шары возвращаются в урну). Применяя формулу (1), получим число **всех** исходов опыта: $n = 365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365 = 365^{40}$.

2) Дополнительное событие $\overline{A}$ происходит, если все сорок появившихся шаров имеют разные надписи. Значит, число вариантов появления первого шара $n_1 = 365$, второго — $n_2 = 364$, третьего — $n_3 = 363, \ldots$, последнего, сорокового — $n_{40} = 326$. Число $m(\overline{A})$ исходов, благоприятствующих событию $\overline{A}$, определяется формулой (1), т.е. $m(\overline{A}) = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 326$.

3) Применяем формулу (3) и вычисляем искомую вероятность

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 326}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365} \approx 0,891.$$

Прогноз. Какую практически ценную информацию несет число 0,891? Вспомните закон устойчивости частот: если повторять опыт много раз, то относительные частоты события A будут неограниченно приближаться к вероятности $\mathbf{P}(A)$. Это значит, что если я буду держать пари в десяти аудиториях, то примерно в девяти выиграю, а в одной проиграю.

Проверить этот прогноз экспериментально затруднительно, но можно. Если каждый из вас (вас — 40 человек!) опросит сорок своих знакомых, мы будем иметь результаты сорока опытов. Наш прогноз: примерно в 36 опытах встретятся одинаковые дни рождения.

Рассмотрим вторую задачу, для которой вероятностный прогноз сделать легче и проверить легче.

Задача о номерах автомашин. Выйдите на автотрассу и запишите номера ста проезжающих мимо автомашин. Сколько номеров будут иметь **ровно** две одинаковые цифры? Предполагается, что числовая часть номера трехзначная.

Конечно, возникает сомнение — а можно ли это предсказать? Ведь результат случаен. Но перед нами не просто случайное, а **массовое** случайное явление. Такие явления как раз и допускают вероятностное прогнозирование. Сделаем модель этого явления.

Вероятностная модель задачи. В урне 10 шаров, пронумерованных цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Опыт состоит в том, что случайным образом вынимаются последовательно три шара (с возвращением!) и записываются их номера. Результатом опыта будет, следовательно, тройка чисел, среди которых могут быть одинаковые. Событие A произойдет, если появятся **ровно** две (не три!) одинаковых цифры, причем, в любом порядке.

Решение. $n = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$; $m(A) = C_3^2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 9 = 3 \cdot 10 \cdot 9 = 270$; $\mathbf{P}(A) = 0,27$.

Прогноз. Из 100 проезжающих автомашин примерно 27 будут иметь на своих номерах ровно две одинаковые цифры.

Предлагаю вам проверить этот прогноз. Я проверял и у меня получилась 31 машина. Значит, относительная частота появления события A в моей серии опытов равна $\mathbf{P}^*(A) = 0,31$ и отличается от вероятности всего лишь на четыре сотых. Хороший прогноз, не правда ли?

Методологическое замечание. Обращаю внимание на один новый принципиальный момент: решая задачу, мы подменили реальную ситуацию ее вероятностной моделью. Тем самым, мы исказили реальную задачу. Вопрос в том, насколько исказили — существенно или нет?

В первой задаче, опираясь на здравый смысл, можно быть уверенным, что отличие нашей модели от реальности не существенно — дни рождения людей, находящихся в аудитории, совершенно случайны и не могут иметь никакой скрытой взаимосвязи.

Во второй задаче ситуация может оказаться сложнее. Насколько случайны номера автомашин? Большинство из них получили свои номера в городской службе — из какого пакета и каким образом распределялись эти номера? Далее, — насколько случайны номера машин, проезжающих в данном месте? Ведь может быть, что они принадлежат одному предприятию и их номера имеют какую-то закономерность, например, начинаются с одной цифры. В этом случае адекватная модель должна строиться как-то иначе.

В конечном счете, правильность составления модели и, следовательно, эффективность вероятностного прогноза проверяется практикой. Но надо знать, что при построении моделей следует соблюдать осторожность и, прежде всего, хорошо разобраться в реальной ситуации.

Контроль 6. Сделайте прогноз: сколько машин из ста будут иметь ровно три одинаковые цифры номера? Проверьте прогноз.

7. Вывод формулы числа сочетаний

В заключение лекции докажем формулу (2). Выше вы научились ею пользоваться для расчета вероятностей. Это хорошо. Это главное. Но будет еще лучше, если вы поймете, как возникла формула, почему она имеет такой вид. Почему числитель формулы есть произведение убывающих чисел? Почему в числителе и знаменателе одинаковое число множителей?

Приучайтесь не к формальному восприятию, а к глубокому пониманию всего, что узнаёте. Если же у вас еще не возникает такого желания, то пропустите этот раздел и переходите к самостоятельному решению задач.

Напомню смысл термина *"сочетания"*. Пусть имеется 4 каких-то предмета (элемента) — обозначим их буквами a, b, c и d. Составим из них различные группы по 3 предмета: abc, abd, acd, bcd. Эти группы и называются *сочетаниями из четырех элементов по три.*

Характерные особенности сочетаний: все они 1) содержат одинаковое число элементов — три; 2) разнятся друг от друга по крайней мере одним элементом.

Еще раз подчеркну: **порядок не учитывается**. Например, abc и bca — одно и то же сочетание, ибо одинаков состав элементов.

Определение. Пусть имеется k предметов a_1, a_2, a_3, ..., a_k — назовем их элементами. Составим из них различные группы, содержащие по l элементов $(l \le k)$ и отличающиеся одна от другой, по крайней мере, одним элементом. Эти группы называются *сочетаниями из k элементов по l.*

Например, сочетаниями будут следующие группы: $\{a_1a_2a_3\dots a_l\}$, $\{a_ka_2a_3\dots a_l\}$, $\{a_ka_{k-1}a_3\dots a_l\}$, : (предполагается, что $l \le k-2$). Здесь первые два сочетания различаются одним элементом, а первое и третье — двумя (какими?).

Если же в каком-то сочетании поменять порядок элементов, то получится то же самое сочетание. К примеру, группы $a_1a_2a_3a_4\dots a_k$ и $a_2a_1a_3a_4\dots a_k$ не различаются составом элементов, они представляют одно и то же сочетание.

Чтобы проверить, правильно ли вы поняли, что такое сочетание, добавьте к трем вышенаписанным группам одно-два новых сочетания.

Вывод формулы (2). 1) Предположим, что в одну строку выписаны все сочетания из k элементов по l (их число C_k^l): $\{a_1a_2a_3\dots a_l\}$, $\{a_ka_2a_3\dots a_l\}$, $\{a_ka_{k-1}a_3\dots a_l\}$, $\{a_ka_2a_{k-1}\dots a_l\}$, ...

Сделаем в каждом из этих сочетаний всевозможные перестановки и запишем их в колонках следующей таблицы:

$a_1a_2a_3\dots a_l$	$a_ka_2a_3\dots a_l$	$a_ka_{k-1}a_3\dots a_l$	...	...
$a_2a_1a_3\dots a_l$	$a_2a_ka_3\dots a_l$	$a_{k-1}a_ka_3\dots a_l$	...	...
$a_3a_1a_2\dots a_k$	$a_ka_ka_2\dots a_l$	$a_3a_ka_{k-1}\dots a_l$	...	...
...	...	...	...	...

Советую вам внимательно проследить за каждой колонкой и добавить в нее по одной своей перестановке. Добавьте также в первую строку таблицы одно свое сочетание и сделайте в нем свои перестановки, записав их в таблицу.

Заметьте — группы, записанные в получившейся таблице, различаются не только элементами, но и порядком. Такие группы называются *размещениями*, их больше, чем сочетаний.

2) Подсчитаем с помощью принципа умножения число всех получившихся размещений. Число это принято обозначать так: A_k^l (здесь A есть начальная буква французского слова "arrangement", что значит "размещение").

Каждое размещение получается в результате последовательного выбора l элементов из данных k элементов: первый элемент можно выбрать k различными способами, второй - - $(k-1)$ способом (первый элемент выбран, осталось на единицу меньше элементов), третий — $(k-2)$ способами и т.д., последний, l-й элемент можно выбрать $[k-(l-1)]$ способами. Формула (1) дает

$$A_k^l = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot [k-(l-1)] \tag{4}$$

Заметьте — в последней скобке из k вычитается не l, а $(l-1)$! Если бы последняя скобка была $(k-1)$, то число всех множителей было бы $l+1$. Но число множителей должно равняться числу "шагов", а их столько, сколько раз мы выбираем элементы, т. е. l.

3) Подсчитаем число строк в таблице размещений. Число строк равно числу P_l перестановок, которые можно сделать в сочетании, содержащем l элементов (здесь P — начальная буква французского слова "permutation", что значит "перестановка").

Применяем принцип умножения. Каждая перестановка получается в результате последовательного выбора l элементов из группы (сочетания), содержащей l элементов, значит,

$$P_l = l \cdot (l-1) \cdot (l-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1. \tag{5}$$

И в этой формуле, как и в формуле (4), число множителей l.

4) Число всех элементов таблицы размещений получается умножением числа ее строк на число колонок, т. е. $A_k^l = P_l \cdot C_k^l$. Отсюда следует знакомая формула

$$C_k^l = \frac{A_k^l}{P_l} = \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot [k-(l-1)]}{l \cdot (l-1) \cdot (l-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}. \tag{6}$$

Ценность доказательства. Теперь признайтесь, не лучше ли вы стали понимать формулу (2)? Доказательство раскрыло вам причину простой дробной структуры формулы, а также смысл числителя (число размещений) и знаменателя (число перестановок). Вместе с тем, стало понятно, почему число множителей числителя и знаменателя одинаковы.

Более того, вы увидели фундаментальность принципа умножения, который лежит в основе всех формул и, следовательно, в основе многих вероятностных расчетов.

Попутно вы узнали, что существуют еще два вида соединений из k элементов — размещения и перестановки, и получили формулы для подсчета их числа. Это новое знание является началом важного раздела математики — комбинаторики, которая, в свою очередь, является частью нового современного направления развития математических наук — дискретной математики, связанного с потребностями вычислительной техники.

Формулы (4) и (5) тоже используются в вероятностных расчетах. В частности, когда вы подсчитывали число всех исходов опыта при вынимании l шаров из урны, содержащей k шаров, вы, в сущности, применяли формулу (4). Если же l из k шаров белые (остальные — не белые), то число исходов, благоприятствующих появлению только белых шаров, подсчитывается по формуле (5).

Контроль 7. Постройте таблицу размещений из четырех элементов по три. Выведите формулу $C_4^3 = \frac{A_4^3}{P_3}$ рассуждениями, аналогичными выводу формулы (6). Приведите пример применения этой формулы.

8. Упражнения

Поупражняйтесь сначала в различении размещений, сочетаний и перестановок. При ответе на следующие вопросы ваша задача понять, что надо считать — размещения, перестановки, или сочетания. Или же следует применить более общий принцип умножения? После этого вычисление идет по соответствующим формулам (4), (5), (6), или (1). Если вы не читали п.7, то выбирайте принцип умножения (1) или формулу числа сочетаний (2).

1. На 4 должности имеется 7 кандидатов. Сколькими способами можно распределить эти должности между кандидатами?

Ответ: A_7^4.

2. Из 7 человек надо выбрать 4 делегата на конференцию. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: C_7^4.

3. На 4 должности имеется 4 кандидата. Сколькими способами можно распределить эти должности между кандидатами?

Отв: P_4.

4. Сколькими способами можно надеть на кольцо 7 ключей?

Ответ: P_6.

5. Из колоды, содержащей 36 карт, вынимается 6 карт. Сколько существует а) различных выборок; б) выборок одной масти?

Ответ: C_{36}^6; $4 \cdot C_9^6$.

6. В спортивных соревнованиях участвуют 36 спортсменов. Различные награды получают 6 победителей. Сколько теоретически возможных вариантов награждения?

Ответ: A_{36}^6.

7. На плоскости отмечены 5 точек так, что никакие три точки не лежат на одной прямой. Через каждую пару точек проведена прямая. Сколько прямых получилось?

Ответ: C_5^2.

8. Сколько прямых линий можно провести через 5 точек, из которых ровно три лежат на одной прямой?

Ответ: $C_5^2 - 2$.

9. В урне 5 занумерованных шаров. Сколько существует вариантов выбора (без возвращения) 2-х шаров а) с учетом их порядка; б) без учета порядка? Составьте таблицу всех вариантов выбора.

Ответ: A_5^2; C_5^2.

10. В условиях предыдущей задачи изменим способ выбора шаров: вынимаем первый шар, записываем его номер, кладем его обратно в урну, перемешиваем шары, вынимаем второй шар и записываем его номер. Результатом этого опыта будет упорядоченная пара чисел, например, $(1;1)$ или (1;2), (3;5), (3;3) и т. д. Такой способ называют выбором **с возвращением**. Ответьте на те же вопросы: сколько существует вариантов выбора 2-х шаров а) с учетом порядка, б) без учета порядка номеров? Составьте таблицы.

Ответ: 5^2; $C_5^2 + 5$.

11. Монета подбрасывается 5 раз. Сколько исходов этого опыта? Сколько исходов благоприятствуют появлению **ровно** одного герба? ровно двух? трех? четырех? пяти гербов? Найдите вероятности всех этих событий.

12. Игральная кость подбрасывается 5 раз. Сколько исходов этого опыта? Сколько исходов благоприятствуют появлению ровно одной "шестерки"? ровно двух? ровно трех? ни одной? хотя бы одной "шестерки"? Найдите вероятности всех этих событий.

Ответ: 6^5; $C_5^1 \cdot 5^4$; $C_5^2 \cdot 5^3$; $C_5^3 \cdot 5^2$; 5^5; $6^5 - 5^5$.

13. В урне 20 шаров — 12 белых, 8 черных. Из нее случайным образом вынимаются последовательно 5 шаров. Событие A произойдет, если все появившиеся шары окажутся белыми, B — первые два белые, остальные черные, C — два белых и три черных в любом порядке, D — хотя бы один белый. Как вам кажется, в каком порядке убывают вероятности этих событий? Рассчитайте их точно и сравните со своим предположением — подвела вас интуиция или нет?

14. В урне 100 шаров — 60 белых, 35 черных, 5 красных. Опыт состоит в последовательном вынимании наудачу десяти шаров. Событие A произойдет, если будут вынуты десять белых шаров, B — первые три белых, потом четыре черных, последние три красных, C — ровно один белый, D — ровно два белых, E — хотя бы один белый. Расположите события в предположительном порядке убывания их вероятностей. Рассчитайте вероятности и сравните со своим предположением. Опять ошиблись? Или нет?

15. Рабочий выточил за смену 10 деталей, из которых одна получилась нестандартной. ОТК берет на контроль три детали и если не обнаруживает брака, то принимает всю партию. Какова вероятность, что партия будет принята? Сколько раз в месяц ОТК отклонит работу, содержащую 10% брака?

16. Бригада сделала за смену 100 изделий, из которых 10 получились с браком. ОТК подвергает проверке 5 изделий и если не обнаруживает брака, то принимает всю партию. Каковы шансы бригады на то, что их работа будет принята? Сколько раз в месяц работа будет отклоняться?

Ответ: 6:10; ≈ 15 раз.

17. Партия из тысячи ламп содержит 5% брака. Если испытанию подвергается пять ламп, то какова вероятность, что среди них не найдется ни одной испорченной? Какова вероятность, что пробная группа будет иметь 40% брака?

18. В лотерее 100 билетов, из них 10 выигрышных. Некто купил 5 билетов. Какова вероятность того, что а) ровно один билет окажется выигрышным; б) ровно два билета выиграют; в) хотя бы один билет выиграет?

19. Составьте формулу для решения предыдущей задачи в общем виде (число билетов n, выигрышных m, куплено k билетов).

Ответ: в) $1 - \dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$.

20. В лотерее из сорока тысяч билетов ценные выигрыши падают на 3 билета, а всего выигрышных 500 билетов. Некто приобрел 100 билетов. Какова вероятность а) ровно одного выигрыша; б) хотя бы одного; в) хотя бы одного ценного выигрыша? Сколько надо купить билетов, чтобы вероятность ценного выигрыша была не менее 0,5?

21. Какова вероятность, что при n бросаниях игральной кости хотя бы один раз выпадет "шестерка"? Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью не меньшей а) 0,5; б) 0,9 хотя бы один раз выпала "шестерка"?

Ответ: $1 - \frac{5^n}{6^n}$; $1 - \frac{5^n}{6^n} \geq 0,5 \Longrightarrow n_1 = 3$; $1 - \frac{5^n}{6^n} \geq 0,9 \Longrightarrow n_2 = 13$.

22. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года.

Ответ: $\dfrac{12!}{12^{12}} \approx 0,00005$.

23. Номер автомашины состоит из трех букв и трех цифр (сначала идут буквы, затем цифры). Какова вероятность, что номер проезжающей машины будет иметь или ровно две одинаковые буквы, или ровно две одинаковые цифры, или то и другое? Какой прогноз можно сделать на основе данного расчета? Как проверить этот прогноз?

24. На шахматную доску ставятся случайным образом две ладьи — одна белого, другая черного цвета. Как вам кажется, что более вероятно: ладьи "бьют" друг друга или не "бьют"? Проведите точный расчет.

Ответ: $\frac{14}{63}$; $1 - \frac{14}{63}$.

25. **Вторая Задача де Мере.**[1] Что происходит чаще при четырех бросаниях игральной кости — появление хотя бы одной "шестерки" или непоявление "шестерки" вообще?

Лекция 3. Расчет вероятностей с помощью теорем сложения и умножения

В этой лекции я познакомлю вас с новым методом вычисления вероятностей и его обоснованием.

Суть метода можно пояснить бытовым примером. Представьте, что надо рассчитать стоимость покупки нескольких вещей (хватит ли денег?). Если вы знаете стоимость каждой вещи, то стоимость всей покупки найдете сложением.

Эта простая идея лежит в основе метода расчета вероятностей сложных событий: мы будем разлагать их на более простые события, вероятности которых известны (или легко вычисляются), а потом — складывать и перемножать эти вероятности.

Начнем с введения новых понятий.

1. Сумма и произведение событий

Определение 1. Пусть в некотором опыте возможны случайные события A и B. *Суммой* событий A и B называется новое событие $C = A + B$, которое состоит в том, что в результате опыта произойдет **или** A, **или** B (или A и B вместе).

Определение 2. *Произведением* событий A и B называется событие $D = A \cdot B$, которое состоит в том, что в результате опыта произойдут **и** A, **и** B вместе.

Пример 1. В урне 10 пронумерованных шаров. Опыт состоит в случайном выборе одного шара (рис. 1). Событие A произойдет, если появится шар с четным номером, B — с номером, делящимся на 3.

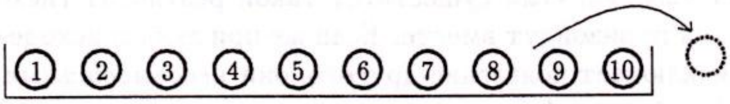

Рис. 1

[1]Одна из задач, которую де Мере поставил перед Блезом Паскалем.

Событие $A + B$ произойдет, если появится шар с одним из номеров 2, 4, 6, 8, 10 или шар с номером 3, 6, 9. Можно сказать иначе: событие $A + B$ произойдет, если будет вынут любой шар, кроме первого, пятого и седьмого.

Событие $A \cdot B$ произойдет только в случае, если будет вынут шар с номером 6. При этом произойдет и $A + B$ (почему?).

Замечание. Поначалу вы можете путать сложение и умножение событий. Запомните вот что: сумма — это "**или**" (или A, или B), а произведение — это "**и**" (и A, и B).

Заметьте также, — сумма событий в некотором смысле "больше" каждого слагаемого, а произведение — "меньше". Так, в нашем примере сумме $A + B$ благоприятствуют семь исходов опыта, а произведению $A \cdot B$ — один исход.

Пример 2. Орудие дважды стреляет в мишень. Событие A_1 произойдет, если цель будет поражена первым выстрелом (при этом результат второго выстрела может быть любым — попадание, промах). Событие A_2 произойдет, если цель окажется пораженной именно вторым выстрелом (результат первого выстрела игнорируется).

Событие $A_1 + A_2$ произойдет, если или первый выстрел попадет в цель, или второй попадет. При этом возможны три взаимоисключающих варианта: 1) первый выстрел попал, а второй промазал (событие $A_1 \cdot \overline{A}_2$); 2) первый попал, второй тоже попал (произошло событие $A_1 \cdot A_2$); 3) первый промазал, а второй попал (событие $\overline{A}_1 \cdot A_2$). Если же оба выстрела промахнулись ($\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2$), то событие $A_1 + A_2$ не происходит, ибо не происходит ни A_1, ни A_2.

Событие $A_1 \cdot A_2$ произойдет только в случае двух попаданий. Заметьте, — при этом произойдет и сумма $A_1 + A_2$. Но обратное не верно: если произошло событие $A_1 + A_2$, то событие $A_1 \cdot A_2$ может произойти, а может и не произойти (почему?).

Контроль 1. В урне 5 шаров — 3 белых, 2 черных. Наудачу вынимаются два шара. Событие A — первым вынут белый шар, B — вторым вынут белый шар. Выпишете все двадцать исходов опыта и подчеркните исходы, благоприятствующие сумме $A + B$ (сколько их?). Сколько исходов благоприятствуют произведению $A \cdot B$? В каких случаях происходит событие $A \cdot \overline{B}$? В каких — $\overline{A} \cdot B$?

2. Совместимые и несовместимые события

В дальнейшем при расчете вероятности суммы событий нам придется различать совместимые и несовместимые события: если слагаемые несовместимые, то расчет идет по одной формуле, если совместимые — по другой.

Напомню определение (лекция 1, п. 5), ограничив его пока только двумя событиями.

Определение 3. Пусть в некотором опыте возможны события A и B. Назовем их *совместимыми*, если существует такой результат (исход) этого опыта, когда оба события произойдут вместе. Если же при любом исходе опыта появление одного из них исключает появление другого, они *несовместимые*.

В примере 1 события A (появление шара с четным номером) и B (появление шара с номером 3, 6 или 9) совместимые, ибо возможен такой результат опыта (появление шара с номером 6), когда происходят события A и B вместе. Если же добавить противоположное событие $\overline{A}$ (появление шара с нечетным номером), то события A и $\overline{A}$ будут несовместимыми, B и $\overline{A}$ — совместимыми.

В примере 2 события A_1 и A_2 совместимые, ибо возможен такой результат опыта (два попадания), когда они происходят вместе. Постарайтесь понять, совместимы ли два более сложных события — $C = A_1 \cdot A_2$ и $D = A_1 \cdot \overline{A}_2$?

Контроль 2. Подбрасываются две игральные кости. Событие A — на первой кости четное число очков, B — сумма очков 11. Совместимы ли они? Какие исходы благоприятствуют событию A, какие — B? Сколько их? Совместимы ли события $A + B$ и $A \cdot B$? Сколько исходов им благоприятствуют?

3. Наводящие соображения к теоремам сложения

Напомню: наша цель — научиться вычислять вероятности сложных событий через вероятности простых. Первая задача на этом пути: как найти вероятность суммы событий, зная вероятности слагаемых? Может быть, сложением? Может быть, справедлива формула $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$? Давайте проверим эту гипотезу с помощью наглядного примера.

Пример 3. На биллиардном столе нарисованы два круга. Опыт — случайное бросание шара на стол. Событие A произойдет, если шар остановится в первом круге, B — во втором. Какова вероятность суммы событий $\mathbf{P}(A + B)$?

Решение. 1) Вероятности в данном случае определяются геометрическим методом, как отношения площадей (лекция 1, п.9). Обозначим через S_1 площадь первого круга, S_2 — площадь второго круга, S — площадь стола, тогда

$$\mathbf{P}(A) = \frac{S_1}{S} \text{ и } \mathbf{P}(B) = \frac{S_2}{S}.$$

2) Вероятность суммы $\mathbf{P}(A + B)$ зависит от того, как расположены круги (пересекаются или нет). Рассмотрим два случая последовательно.

Если круги не пересекаются (рис. 2а), то

$$\mathbf{P}(A + B) = \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

3) Пусть круги пересекаются (рис. 2б).

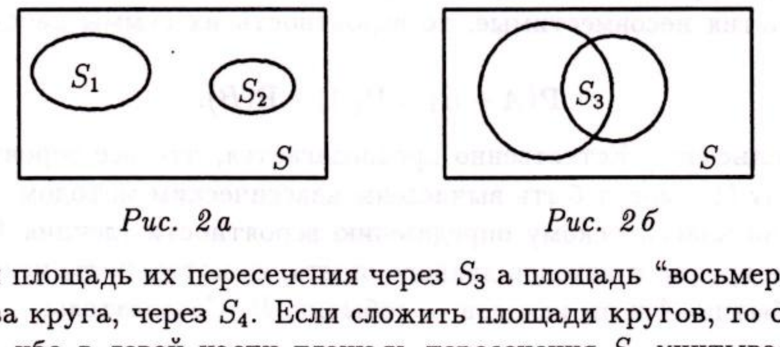

Рис. 2а *Рис. 2б*

Обозначим площадь их пересечения через S_3 а площадь "восьмерки", которую покрывают два круга, через S_4. Если сложить площади кругов, то окажется, что $S_1 + S_2 > S_4$, ибо в левой части площадь пересечения S_3 учитывается дважды. Значит, $S_4 = S_1 + S_2 - S_3$.

Учтем также, что если шар останавливается в пересечении кругов, то происходят оба события — A и B, и значит, происходит событие-произведение $A \cdot B$, вероятность которого есть отношение S_3 к S.

Определяем вероятность суммы:

$$\mathbf{P}(A+B) = \frac{S_4}{S} = \frac{S_1 + S_2 - S_3}{S} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} - \frac{S_3}{S} = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cdot B).$$

Вывод. Рассмотренный пример подкрепляет и **уточняет** нашу гипотезу: если круги не пересекаются (события A и B несовместимые), то вероятность суммы определяется по формуле $\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$; если же круги пересекаются (события A и B совместимые), то $\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cdot B)$.

Примечание. Нетрудно заметить, что подобное рассуждение можно провести для любых геометрических вероятностей.

Контроль 3. "Игла" длины 1 бросается случайным образом на отрезок числовой прямой $[0; 6]$. Событие A — "игла" накрывает середину отрезка, B — накрывает точку 5. Вычислите $\mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$. Что изменится в расчете, если длина иглы 2?

Указание. Сделайте рисунок. Поймите, какова длина пути, по которому "игла" может перемещаться, находясь на отрезке $[0; 6]$ (не 6!). Смоделируйте задачу в терминах геометрической вероятности (лекция 1, п. 9, рис. 3б).

4. Теоремы сложения вероятностей

Чтобы находить вероятности сумм событий с помощью формул, установленных выше, надо убедиться, что они справедливы в общем виде, а не только в отдельных примерах.

Для этого придется провести абстрактные рассуждения в условиях **произвольного** опыта и произвольных событий. Такие рассуждения обычно воспринимаются начинающими с трудом. Но вы должны привыкать к строгим научным рассуждениям, учиться доказательной логике.

Проследите внимательно за доказательствами двух теорем. Они просты. Если же все-таки будет непонятно, то вслед за теоремами я дам пояснение — оно придаст доказательствам наглядность и поможет пониманию.

Теорема 1. Пусть в некотором опыте возможны случайные события A и B. Если эти события несовместимые, то вероятность их суммы рассчитывается по формуле

$$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B). \tag{1}$$

Доказательство. Естественно предполагается, что все вероятности, входящие в формулу (1), могут быть вычислены классическим методом.

1) Согласно классическому определению вероятности (лекция 1, п. 7), существует полная группа n исходов данного опыта, из которых m_1 исходов благоприятствуют событию A и m_2 исходов — событию B. Следовательно,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_1}{n} \text{ и } \mathbf{P}(B) = \frac{m_2}{n}.$$

2) Вычислим $\mathbf{P}(A+B)$. По условию теоремы, события A и B несовместимые, и, согласно определения 3, нет такого исхода, который благоприятствовал бы и событию A и событию B. Значит, подсчитывая исходы, благоприятствующие событию $A+B$, мы должны, согласно определению суммы событий, к m_1 исходам, благоприятствующим событию A, добавить m_2 **других** исходов, благоприятствующих событию B. Следовательно,

$$\mathbf{P}(A+B) = \frac{m_1+m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Теорема 2. Если события A и B совместимые, то вероятность их суммы рассчитывается по формуле

$$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cdot B). \qquad (2)$$

Доказательство. 1) Повторяя дословно первую часть доказательства теоремы 1, получим

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_1}{n} \text{ и } \mathbf{P}(B) = \frac{m_2}{n}.$$

2) Вычисление $\mathbf{P}(A+B)$ изменится, ибо, в силу совместимости событий A и B, есть исходы, благоприятствующие и A, и B, — обозначим их число через m_3 (заметьте — они благоприятствуют событию $A \cdot B$).

Подсчитывая исходы, благоприятствующие сумме $A+B$, придется к m_1 исходам, благоприятствующим событию A, добавлять не m_2 исходов, как в теореме 1, а $m_2 - m_3$ **других** исходов, благоприятствующих событию B, но не благоприятствующих событию A. Следовательно,

$$\mathbf{P}(A+B) = \frac{m_1+m_2-m_3}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m_3}{n} = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cdot B).$$

Пояснение. Если изобразить группу исходов опыта в виде n точек, то несовместимость и совместимость событий A и B можно представить наглядно (рис. 3а, 3б). Эти рисунки помогают лучше понять, как считаются исходы, благоприятствующие сумме $A+B$, в том и другом случае.

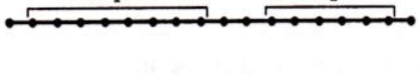

Рис. 3а

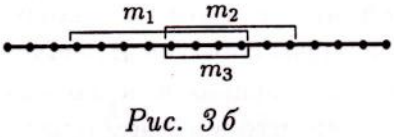

Рис. 3б

Контроль 4. В урне 50 пронумерованных шаров. Опыт состоит в случайном выборе одного шара. Событие A произойдет, если появится шар с четным номером, событие C — с номером, делящимся на 5, D — на 11. Выберите необходимую формулу (1) или (2) и рассчитайте $\mathbf{P}(A+C)$ и $\mathbf{P}(C+D)$.

5. Наводящие соображения к теореме умножения

Возникает вопрос: не справедлива ли для произведения событий теорема, аналогичная теореме 1? Не верна ли для совместимых событий A и B формула $\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$? Давайте проверим ее на примере 3.

Если круги пересекаются (рис. 2б), то событие $A \cdot B$ произойдет в случае, когда шар остановится в пересечении кругов. Геометрическая вероятность этого события есть отношение площади пересечения кругов к площади стола, т. е.

$$\mathbf{P}(A \cdot B) = \frac{S_3}{S}.$$

Преобразуем правую часть, умножив и поделив ее на S_1:

$$\mathbf{P}(A \cdot B) = \frac{S_1}{S} \cdot \frac{S_3}{S_1}.$$

Первый множитель правой части есть геометрическая вероятность события A, т. е. $\mathbf{P}(A)$. Второй множитель тоже напоминает вероятность (отношение площадей): это вероятность того, что шар остановится в пересечении кругов (площадь S_3), при условии, что его бросают не на весь стол, а в первый круг (площадь S_1), — представьте, что круг огорожен так же, как стол. Такого рода вероятность называют *условной вероятностью* и обозначают $\mathbf{P}_A(B)$. С учетом этого обозначения послед: ее равенство принимает вид

$$\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}_A(B).$$

Далее постараемся доказать эту формулу в общем виде. Но предварительно надо ввести новые понятия. Этому посвящены два следующих раздела.

Примечание. Может быть, вы не очень поняли, что такое условная вероятность? Тогда пропустите контрольное упражнение 5. В следующем разделе мы разберем это необычное понятие подробно, вы его поймете и сможете вернуться к выполнению пропущенного контроля.

Контроль 5. В условиях примера 1 найдите $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(A \cdot B)$, после чего определите условную вероятность $\mathbf{P}_A(B)$ и разъясните ее смысл.

6. Условная вероятность

Определение 4. Пусть в некотором опыте возможны события A и B. *Условной вероятностью* события B, *относительно* события A называется вероятность события B, вычисленная в несколько измененном опыте, а именно, при дополнительном условии, что в данном опыте всегда происходит событие A. Обозначение: $\mathbf{P}_A(B)$.[2]

Вернемся к примеру 3. Каков смысл и каково численное значение условной вероятности в этом примере?

Согласно определению 4, сначала нужно понять, в чем состоит измененный опыт. Если при бросании шара на стол всегда происходит событие A, это значит, что шар всегда останавливается в первом круге. Следовательно, измененный

[2]В литературе употребляется и другое обозначение $\mathbf{P}(B|A)$. Оно менее удачное, ибо провоцирует впечатление, будто $B|A$ есть некое новое событие. В то время как изменилось не событие, а смысл вероятности. Поэтому надо изменить обозначение вероятности — вместо обычного символа $\mathbf{P}$ будем использовать для условной вероятности символ $\mathbf{P}_A$.

опыт состоит в том, что шар бросается не на весь стол, а в первый круг (представьте, что он огорожен). Далее: в этом новом опыте событие B произойдет в том случае, когда шар остановится в пересечении кругов. Значит, геометрическая вероятность события B в новом опыте есть отношение площади пересечения кругов к площади первого круга, т.е. $\mathbf{P}_A(B) = \frac{S_3}{S_1}$.

Чтобы лучше понять, как вычисляется условная вероятность, рассмотрим еще один пример.

Вспомните пример 1: опыт состоит в случайном выборе одного шара из урны, где находятся десять пронумерованных шаров. В чем состоит новый, измененный опыт? Если событие A в этом новом опыте всегда происходит, это значит, что при вынимании шара всегда появляется шар с четным номером. Следовательно, измененный опыт состоит в том, что шар вынимается не из десяти, а из пяти шаров с четными номерами (представьте, будто все шары с нечетными номерами исчезли из урны). Далее: в этом новом опыте событие B произойдет в том случае, когда появится шар с номером, делящимся на 3. Среди пяти "четных" шаров только один шар имеет номер, делящийся на 3 — это шар с номером 6. Значит, $\mathbf{P}_A(B) = \frac{1}{5}$.

В дальнейшем нам придется находить еще одну условную вероятность, а именно — вероятность события B при условии, что событие A **не** произошло, а произошло, следовательно, дополнительное событие $\overline{A}$. В нашем примере событие $\overline{A}$ состоит в том, что вынимается "нечетный" шар. Среди пяти "нечетных" шаров **два** шара имеют номер, делящиеся на 3, — это шары с номерами 3 и 9. Значит, $\mathbf{P}_{\overline{A}}(B) = \frac{2}{5}$.

Вывод. При вычислении условной вероятности надо начинать с вопроса: в чем состоит новый, измененный опыт? После того, как новый опыт будет отчетливо понят, идет расчет обычной вероятности именно в условиях **нового** опыта. В этом, конечно, следует поупражняться.

Контроль 6. В урне 20 пронумерованных шаров. Опыт — вынимание наудачу одного шара. Событие A произойдет, если окажется вынутым "четный" шар, B — шар с номером, делящимся на 3. Найти $\mathbf{P}_A(B)$, $\mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$ и $\mathbf{P}(B)$. В чем отличие полученных результатов от аналогичных результатов примера 1?

7. Зависимые и независимые события

Интересно сравнить условную вероятность с безусловной. В предыдущем примере безусловная вероятность $\mathbf{P}(B) = \frac{3}{10}$ (из десяти шаров три шара имеют номер, делящийся на 3). Условные вероятности — $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{5}$ и $\mathbf{P}_{\overline{A}}(B) = \frac{2}{5}$ — уменьшились сравнительно с безусловной.

Но бывает, что они не изменяются, как например, в контроле 6, и это очень важный случай. В дальнейшем вы увидите, как упрощаются формулы в этом случае и как часто он встречается при решении задач. Определим строго это понятие.

Определение 5. Два события A и B называются *независимыми*, если условная вероятность одного из них не меняется в зависимости от того, произошло или не произошло другое, т.е. $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$. В противном случае, если $\mathbf{P}_A(B) \neq \mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$, события называются *зависимыми*.

В примере 1, как мы видели, события A и B оказались зависимыми. В контроле 6 — независимыми. Рассмотрим еще один знакомый пример.

Пример 4. В урне 5 шаров — 3 белых, 2 черных. Опыт состоит в последовательном вынимании двух шаров случайным образом. Событие A_1 произойдет, если первый шар окажется белым, A_2 — если второй шар белый. Зависимые эти события или нет?

Решение. 1) Рассчитаем условную вероятность $\mathbf{P}_{A_1}(A_2)$. Ставим вопрос: в чем состоит новый опыт? Если всегда происходит событие A_1, это значит, что в урне остается не 5, а 4 шара — 2 белых и 2 черных (один белый вынут) и опыт состоит в вынимании одного шара из четырех. Значит, $\mathbf{P}_{A_1}(A_2) = \frac{2}{4}$.

2) Если при первом вынимании появляется черный шар, то в урне остаются 3 белых и 1 черный, — следовательно, $\mathbf{P}_{\overline{A}_1}(A_2) = \frac{3}{4}$. События зависимые.

Между прочим, безусловная вероятность события A_2 (второй шар белый, а первый любой) равна $\mathbf{P}(A_2) = \frac{3}{5}$ (советую вспомнить непосредственный расчет вероятности, выписать все исходы — их 20, и посчитать благоприятствующие событию A_2 исходы — их 12).

Здесь, как и в примере 3, безусловная вероятность не совпадает с обеими условными вероятностями. Причина в том, что события эти зависимые. Если же события независимые, то их условные вероятности не меняют безусловной. Это ценное свойство и позволяет упростить многие формулы. Сформулируем и обоснуем его.

Свойство независимых событий. Если события A и B независимые, то условные вероятности совпадают с безусловной, т. е.

$$\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}_{\overline{A}}(B) = \mathbf{P}(B). \tag{3}$$

Обоснование. Покажем с помощью примера 3 справедливость свойства для геометрических вероятностей.

1) Вычислим все три вероятности (рис. 2б):

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{S_3}{S_1}, \quad \mathbf{P}_{\overline{A}}(B) = \frac{S_2 - S_3}{S - S_1}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{S_2}{S}$$

2) Из условия независимости событий A и B (с учетом определения) следует $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$. Отсюда, учитывая вычисленные выше вероятности, получаем

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{S_2 - S_3}{S - S_1}.$$

3) Преобразуем это равенство так:

$$S_3 \cdot (S - S_1) = S_1 \cdot (S_2 - S_3) \Rightarrow S_3 \cdot S - S_3 \cdot S_1 = S_1 \cdot S_2 - S_1 \cdot S_3 \Rightarrow S_3 \cdot S = S_1 \cdot S_2 \Rightarrow \frac{S_3}{S_1} = \frac{S_2}{S}$$

4) Левая часть последнего равенства есть $\mathbf{P}_A(B)$, а правая — $\mathbf{P}(B)$ (эти вероятности вычислены в первом пункте нашего рассуждения), значит,

$$\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B).$$

5) Объединяя полученное равенство с условием независимости $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$, получаем (3).

Доказательство этого свойства в случае классического определения вероятностей проводится совершенно аналогично:

1) $\mathbf{P}_A(B) = \frac{m_3}{m_1}$, $\mathbf{P}_{\overline{A}}(B) = \frac{m_2 - m_3}{n - m_1}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{m_2}{n}$ (рис. 2б);

2) $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}_{\overline{A}}(B) \Rightarrow \frac{m_3}{m_1} = \frac{m_2 - m_3}{n - m_1} \Rightarrow m_3 \cdot n = m_1 \cdot m_2 \Rightarrow \frac{m_3}{m_1} = \frac{m_2}{n} \Rightarrow$
$\Longrightarrow \mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$.

Как определять независимость событий? Ответ прост — надо вычислить условные вероятности $\mathbf{P}_A(B)$, $\mathbf{P}_{\overline{A}}(B)$ и сравнить их. Однако при решении задач это делают редко, потому что независимость легко усматривается непосредственно. Ну, скажите, — зависит ли вероятность появления герба на одной монетке от того, как упадет другая (при подбрасывании двух монет)? Конечно, не зависит — во всех случаях эта вероятность равна 0,5. А зависит ли вероятность попадания в цель одного орудия от того, попало или нет другое? Тоже, очевидно, не зависит.

В основе независимости событий лежит их **физическая** независимость: множество случайных факторов, приводящих к появлению одного события, и множество факторов, влияющих на другое событие, — разные. Правда, эти факторы могут быть слабо связаны друг с другом, — ведь в природе нет абсолютно независимых явлений. Так, при подбрасывании двух монет на них влияет общий фактор — слабое движение воздуха. Подобными слабыми зависимостями мы вправе пренебречь и считать события практически независимыми. А вот если бы монеты были жестко связаны друг с другом, то этот фактор однозначно определял бы падение одной монеты в зависимости от того, как упала другая. В таком опыте события становятся зависимыми.

Предостережение. Не путайте независимые события с несовместимыми! Вдумайтесь в смысл терминов. Что означает слово "**несовместимые**"? Значит, события невозможно "совместить", они не могут появиться **вместе** в результате опыта. А что значит "**независимые**" ? Зависеть — это значит меняться. События не могут "меняться" — изменяться могут **вероятности** событий после изменения условий опыта.

Контроль 7. Подбрасываются две игральные кости. Событие A происходит, если на первой кости появляется четное число очков, B — если сумма очков 11. Совместимые ли эти события? Зависимые ли? Добавьте событие C — сумма очков 12; зависимые ли события A и C?

Указание: посчитайте принципом умножения число исходов нового, измененного опыта — их 18.

8. Теорема умножения вероятностей

Теорема 3. Пусть в некотором опыте возможны случайные события A и B. Если эти события совместимые, то вероятность их произведения рассчитывается по формуле

$$\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}_A(B). \tag{4}$$

Доказательство. Вычислим вероятности, входящие в формулу.

1) Согласно определению вероятности, существует полная группа, содержащая n исходов опыта, из которых m_1 исходов благоприятствуют событию A, m_2 — событию B, m_3 — событию $A \cdot B$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_1}{n}, \ \mathbf{P}(A \cdot B) = \frac{m_3}{n}.$$

2) Вычислим условную вероятность $\mathbf{P}_A(B)$. Поскольку в новом опыте событие A всегда происходит, то число исходов будет не n, а m_1. Из них событию B благоприятствуют те исходы, которые благоприятствуют $A \cdot B$, — их число m_3 (см. рис. 2б). Значит,

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{m_3}{m_1}.$$

3) Преобразуем найденную ранее вероятность произведения $A \cdot B$, умножив и поделив ее на m_1, и окончательно получим:

$$\mathbf{P}(A \cdot B) = \frac{m_3}{n} = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{m_3}{m_1} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}_A(B).$$

Следствие. Если события A и B совместимые и независимые, то вероятность их произведения равна произведению их вероятностей, т.е.

$$\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B). \tag{5}$$

Доказательство мгновенно вытекает из формул (4) и (3).

Формулу (4) можно использовать для вычисления условной вероятности:

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cdot B)}{\mathbf{P}(A)}. \tag{6}$$

Иногда формулу (6) принимают в качестве самого определения этого понятия, вместо нашего определения 4. При этом, конечно, становится неясным его смысл.

Пример 5. В урне 5 шаров — 3 белых, 2 черных. Опыт — последовательное вынимание двух шаров (без возвращения). Событие A — появление двух белых шаров. Рассчитать $\mathbf{P}(A)$.

Прежде всего заметим, что эту задачу мы уже решали непосредственным подсчетом числа исходов, а также с помощью принципа умножения. Сейчас я покажу вам образец решения с помощью теоремы умножения. Сравните, — какой метод проще?

Решение. 1) Введем два "простых" события: A_1 — первый вынутый шар белый; A_2 — второй шар белый.

2) Представим искомое событие A в виде произведения $A = A_1 \cdot A_2$.

3) Применим теорему умножения:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}_{A_1}(A_2).$$

4) Вычислим вероятности. Очевидно, $\mathbf{P}(A_1) = \frac{3}{5}$. Условная вероятность найдена в примере 4: $\mathbf{P}_{A_1}(A_2) = \frac{2}{4}$.

5) Перемножаем: $\mathbf{P}(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 0,3$.

Пример 6. В условиях предыдущего примера изменим опыт без возвращения шаров на опыт с возвращением. Это значит, что вынимается первый шар, фиксируется его цвет, потом он возвращается обратно в урну, шары перемешиваются, после чего наудачу вынимается второй шар. Вопрос тот же — какова вероятность вынуть два белых шара?

Решение идет точно так же, как и выше, за одним исключением — вместо теоремы умножения применяется следствие, т. к. события A_1 и A_2 независимые. В самом деле, — число шаров при втором вынимании остается то же, что и при первом, а значит вероятность события A_2 не зависит от результата первого вынимания и равна $\mathbf{P}(A_2) = \frac{3}{5}$. Итак,

$$\mathbf{P}(A) = P(A_1 \cdot A_2) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 0,36.$$

Обратите внимание — вероятность чуть увеличилась, сравнительно с предыдущим примером.

Контроль 8. В урне 10 пронумерованных шаров. Опыт состоит в вынимании случайным образом одного шара. Событие A произойдет, если вынутым окажется шар с четным номером, B — с номером, делящимся на 3. Зависимы эти события или нет? Выберите нужную формулу и рассчитайте $\mathbf{P}(A \cdot B)$. Что изменится, если в урне будет 20 шаров?

9. Обобщение теоремы сложения

Выше мы установили теоремы сложения и умножения вероятностей для двух событий. Они легко обобщаются на любое конечное число событий. В результате резко расширяется сфера приложений этих теорем.

Чтобы сформулировать обобщенные теоремы, надо, разумеется, обобщить на несколько событий соответствующие понятия (сумма, произведение, несовместимость и независимость). Условимся обозначать обобщенные определения и теоремы теми же номерами, но со штрихом.

Определение 1$'$. Пусть в некотором опыте возможны k случайных событий — $A_1, A_2, \ldots, A_k$. *Суммой* этих событий называется новое событие $C = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$, которое состоит в том, что в результате опыта произойдет одно из событий (или A_1, или A_2, ..., или A_k, или некоторые из них вместе).

Определение 3$'$. Назовем события $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *несовместимыми*, если при каждом выполнении опыта появление одного из них исключает появление остальных. Если же хотя бы одна пара событий может произойти вместе, — события группы называются *совместимыми*.

Несовместимые события $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ($k \geq 3$) иногда называют *попарно несовместимыми*, подчеркивая тем самым несовместимость **любой пары** этих событий. В случае, когда все события имеют общее пересечение (могут появиться все вместе), их называют *совместимыми в совокупности* (рис. 4д).

Пример 7. На биллиардном столе нарисованы три круга. Шар бросают на стол случайным образом. Событие A_1 произойдет, если шар остановится в первом круге, A_2 — во втором, A_3 — в третьем.

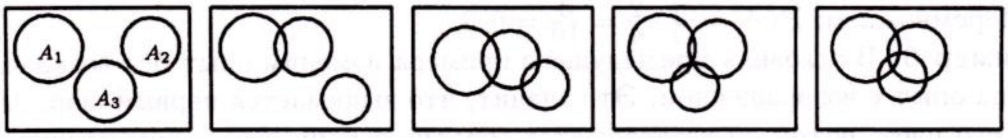

Рис. 4а Рис. 4б Рис. 4в Рис. 4г Рис. 4д

Событие $A_1 + A_2 + A_3$ произойдет, если шар остановится в одном из трех кругов. Если ни одна пара кругов не пересекается (рис. 4а), то данные три события несовместимые. Если хотя бы одна пара или все три круга пересекаются (рис. 4б-д) — совместимые.

Пример 8. В урне 30 пронумерованных шаров. Опыт состоит в случайном выборе одного шара. Событие A_5 произойдет, если появится шар с номером, делящимся на 5, A_7 — с номером, делящимся на 7, A_8 — с номером, делящимся на 8, и A_{10} — с номером 10, 20 или 30.

Событие $A_5 + A_7 + A_8 + A_{10}$ произойдет, если будет вынут шар с одним из номеров — 5, 7, 8, 10, 14, 15, 16, 20, 21, 24, 25, 28, 30 (событию-сумме, следовательно, благоприятствуют 13 исходов опыта). Вместе с тем, эти четыре события совместимые, ибо пара событий A_5 и A_{10} может произойти вместе. Если же взять "тройку" событий A_5, A_7, A_8, они несовместимые.

Теорема 1′. Пусть в некотором опыте возможны случайные события A_1, A_2, ..., A_k. Если эти события несовместимые, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей, т.е. справедлива формула

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + \ \dots\ + A_k) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ \dots\ + \mathbf{P}(A_k) \tag{1′}$$

Доказательство состоит в k-кратном применении теоремы 1. Для трех событий, например, оно заключено в следующей цепочке равенств

$$\mathbf{P}(A_1+A_2+A_3) = \mathbf{P}((A_1+A_2)+A_3) = \mathbf{P}(A_1+A_2)+\mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)+\mathbf{P}(A_3).$$

При этом надо учесть, что из несовместимости событий A_1, A_2 и A_3 следует несовместимость $(A_1 + A_2)$ и (A_3), а также несовместимость A_1 и A_2.

Теорему 2 обобщать не будем, т.к. в случае совместимых событий формула (2) очень усложняется и поэтому практически не применяется. Для интереса приведу вид формулы в случае трех совместимых в совокупности событий (при желании вы можете сами ее обосновать с помощью рис. 4д):

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + A_3) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3) -$$
$$- \mathbf{P}(A_1 \cdot A_2) - \mathbf{P}(A_2 \cdot A_3) - \mathbf{P}(A_1 \cdot A_3) + \mathbf{P}(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3).$$

Контроль 9. В условиях примера 8 определите, совместимы или нет события A_7, A_8, A_{10}, и найдите вероятность их суммы.

10. Обобщение теоремы умножения

Предупреждаю вас, — этот раздел сложнее предыдущих. Можете его пропустить и перейти к решению задач. Но обязательно вернитесь к нему позже. Он нужен для обоснования решений.

Определение $2'$. *Произведением* событий A_1, A_2, ..., A_k называется новое событие $D = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k$, которое состоит в том, что в результате опыта произойдут все эти события вместе (и A_1, и A_2, ..., и A_k).

Заметьте: если несколько событий несовместимые (рис. 4а), то их произведение не существует, — ведь нет такого результата опыта, при котором они происходят все вместе. Если они совместимые (т.е. некоторые пары совместимые), то произведение тоже может не существовать (рис. 4б-г). Произведение существует только в случае совместимых **в совокупности** событий (рис. 4д).

Определение $5'$. События A_1, A_2, ..., A_k называются *независимыми в совокупности*, если каждое из них независимо не только с любым другим событием этой группы, но и с произведением любого числа других событий этой группы. В противном случае события группы **зависимы в совокупности**.

Как определять независимость? Если, к примеру, три события A_1, A_2, A_3 независимые в совокупности, это означает, что а) каждые два из них независимы, т.е. $\mathbf{P}_{A_1}(A_2) = \mathbf{P}_{\bar{A}_1}(A_2)$, $\mathbf{P}_{A_1}(A_3) = \mathbf{P}_{\bar{A}_1}(A_3)$, $\mathbf{P}_{A_2}(A_3) = \mathbf{P}_{\overline{A}_2}(A_3)$, и б) каждое независимо с произведением двух других, т.е. $\mathbf{P}_{A_1A_2}(A_3) = \mathbf{P}_{\overline{A_1A_2}}(A_3)$, $\mathbf{P}_{A_1A_3}(A_2) = \mathbf{P}_{\overline{A_1A_3}}(A_2)$, $\mathbf{P}_{A_2A_3}(A_1) = \mathbf{P}_{\overline{A_2A_3}}(A_1)$. Напомню, — через $\overline{A_1A_2}$ обозначается событие, дополнительное к произведению A_1A_2, и состоящее в том, что не происходят вместе A_1 и A_2.

Чтобы установить независимость в совокупности трех событий, надо, согласно определению $5'$, вычислить 12 условных вероятностей, перечисленных выше. Если выполняются все 6 равенств, то события независимы в совокупности. Если хоть одно равенство не выполняется, события зависимы в совокупности.

Вы, наверное, смущены сложной проверкой независимости. Успокою вас. Зачастую при решении задач очень легко определить эту независимость. Она бывает просто очевидна из условий опыта. Ну, например, три орудия стреляют в мишень, события A_i — попадания i-м орудием, $i = 1, 2, 3$, — очевидно, независимы в совокупности, ибо вероятность попадания или промаха каждого орудия не зависит от результатов других.

Практическое определение зависимости событий, тоже бывает не сложным, ибо уже первые условные вероятности оказываются не равными, — $\mathbf{P}_{A_1}(A_2) \neq \mathbf{P}_{\bar{A}_1}(A_2)$, и других вычислять не надо.

У вас может возникнуть вопрос: зачем такое сложное определение $5'$? Зачем второе требование б) независимости каждого события с **произведением** других? Необходимость этой "добавки" станет вам ясной чуть позже, когда вы увидите доказательство теоремы.

Пример 9. В урне 10 пронумерованных шаров. Опыт состоит в последовательном извлечении наудачу трех шаров. Событие A_1 произойдет, если первый вынутый шар "четный", A_2 — второй "четный", A_3 — третий "четный". Определить, зависимые ли в совокупности эти три события?

Решение. По-видимому, события зависимые, потому что после извлечения первого шара (без возвращения!) изменяется состав шаров и вероятность вынуть следующий белый шар (событие A_2) оказывается зависимой от того, какой шар был вынут ранее. Проверим наше предположение точным расчетом. Вычислим условные вероятности $\mathbf{P}_{A_1}(A_2) = \frac{4}{9}$ и $\mathbf{P}_{\bar{A}_1}(A_2) = \frac{5}{9}$ (объясните, почему они такие?).

Равенство не выполняется, значит, наше предположение справедливо.

Заметьте, — если изменить вынимание шаров без возвращения на вынимание с возвращением, события A_1, A_2, A_3 станут независимыми в совокупности.

Теорема $3'$. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_k$ совместимые в совокупности, то вероятность их произведения рассчитывается по формуле

$$\mathbf{P}(A_1A_2A_3\cdot\ldots\cdot A_k) = \mathbf{P}(A_1)\cdot\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\cdot\mathbf{P}_{A_1A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}_{A_1A_2\ldots A_{k-1}}(A_k). \qquad (4')$$

Доказательство, как и прежде, легко идет методом индукции. Для трех событий оно состоит в двукратном применении теоремы 3:

$$\mathbf{P}(A_1\cdot A_2\cdot A_3) = \mathbf{P}((A_1A_2)A_3) = \mathbf{P}(A_1A_2)\cdot\mathbf{P}_{A_1A_2}(A_3) = \mathbf{P}(A_1)\cdot\mathbf{P}_{A_1}(A_2)\cdot\mathbf{P}_{A_1A_2}(A_3).$$

Следствие. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_k$ совместимые в совокупности и независимые в совокупности, то вероятность их произведения равна произведению их вероятностей, т.е. справедлива формула

$$\mathbf{P}(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_k) = \mathbf{P}(A_1)\cdot\mathbf{P}(A_2)\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}(A_k) \qquad (5')$$

Доказательство следует из определения $5'$ и формулы $(4')$, с учетом того факта, что любая условная вероятность события данной группы совпадает с его безусловной вероятностью (обобщение формулы (3)).

Контроль 10. В урне 10 шаров — 3 белых, 2 черных, 5 красных. Опыт состоит в последовательном вынимании наудачу трех шаров (без возвращения). Событие A_1 произойдет, если первым окажется вынут белый шар, A_2 — вторым черный, A_3 — третьим красный. Совместимые ли в совокупности эти события? Независимы ли в совокупности? Рассчитайте вероятность их произведения. Измените опыт на опыт с возвращением и ответьте на те же вопросы.

11. Методика решения задач

У нас уже были примеры применения теорем 1, 2 и 3 к расчету вероятностей. Примеры были простые и требовали применения только одной из теорем. Но обычно теорема сложения и теорема умножения применяются вместе. Мы и рассмотрим такие примеры в заключение лекции.

Общая схема решения задач следующая:

1) вводим "простые" события;
2) разлагаем искомое событие в сумму и произведение "простых";
3) применяем теоремы сложения и умножения;
4) вычисляем вероятности.

Первый этап обычно подсказывается структурой опыта. Второй труднее — надо понять, как искомое событие строится из "простых". В третьем надо правильно определить, какие теоремы следует применять, т.е. решить — совместимы или несовместимы слагаемые события, зависимы или нет перемножаемые события. Четвертый этап — вычисления.

Начнем с задачи, требующей применения только одной теоремы — теоремы умножения для двух событий. Одновременно вспомним полезную формулу из лекции 1 — формулу вероятности хотя бы одного события.

Задача 1. Два орудия стреляют в цель. Вероятность поражения цели первым орудием 0,8, вторым — 0,3. Событие A произойдет, если оба орудия поразят цель, B — оба промажут, C — первое орудие попадет, а второе промажет, D — первое промажет, а второе попадет, E — хотя бы одно орудие поразит цель. Рассчитать вероятности всех этих событий.

Решение. 1) Вводим "простые" события:

A_1 — первое орудие поразило цель; A_2 — второе поразило цель;

$\overline{A}_1$ — первое орудие промахнулось; $\overline{A}_2$ — второе промахнулось.

2) Согласно определению 2, искомые события представляются в виде произведения "простых" следующим образом:

$$A = A_1 \cdot A_2, \quad B = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2,$$
$$C = A_1 \cdot \overline{A}_2, \quad D = \overline{A}_1 \cdot A_2.$$

3) Перемножаемые события, очевидно, независимы, т.к. вероятность попадания (промаха) одного орудия не зависит от результата выстрела другого. Поэтому применяем формулу (5) и получаем:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1 \cdot A_2) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2),$$
$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = \mathbf{P}(\overline{A}_1) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}_2),$$
$$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A_1 \cdot \overline{A}_2) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}_2),$$
$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(\overline{A}_1 \cdot A_2) = \mathbf{P}(\overline{A}_1) \cdot \mathbf{P}(A_2).$$

4) Вероятности попаданий даны: $\mathbf{P}(A_1) = 0,8$, $\mathbf{P}(A_2) = 0,3$, а вероятности дополнительных событий (промахов) легко определяются: $\mathbf{P}(\overline{A}_1) = 1 - 0,8 = 0,2$, $\mathbf{P}(\overline{A}_2) = 1 - 0,3 = 0,7$. Подставляем их в предыдущие равенства и вычисляем:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24;$$
$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\overline{A}_1) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}_2) = (1 - 0,8) \cdot (1 - 0,3) = 0,2 \cdot 0,7 = 0,14;$$
$$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}_2) = 0,8 \cdot (1 - 0,3) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56;$$
$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(\overline{A}_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) = (1 - 0,8) \cdot 0,3 = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06.$$

5) Вероятность события E определяется по стандартной формуле вероятности хотя бы одного события: $\mathbf{P}(E) = 1 - \mathbf{P}(\overline{E})$ (лекция 2.5, формула (3)). Здесь надо правильно понять, в чем состоит событие $\overline{E}$. Вдумайтесь: если E — хотя бы одно попадание, то дополнительное событие $\overline{E}$ — **ни одного** попадания. Согласны? Тогда $\overline{E} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2$. Вычисляем:

$$\mathbf{P}(E) = 1 - \mathbf{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = 1 - 0,2 \cdot 0,7 = 1 - 0,14 = 0,86.$$

Прогноз. Если провести опыт 100 раз, то два попадания будет, примерно, в четверти опытов, ни одного попадания — в седьмой части опытов. Примерно, в половине опытов первое орудие попадет, а второе промажет. Очень редко будет встречаться случай, когда первое орудие промажет, а второе попадет, — примерно один раз на двадцать опытов. И практически почти гарантировано хотя бы одно попадание — девять раз из десяти.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи не будем конкретизировать вероятности попаданий, а зададим их в общем виде так: $\mathbf{P}(A_1) = p_1$, $\mathbf{P}(A_2) = p_2$. Вычислить вероятность ровно одного попадания.

Решение. Прежде чем начинать решение, надо правильно понять, в чем состоит искомое событие, — обозначим его W_1. Вдумайтесь — что значит "**ровно** одно попадание"? Это значит, что одно орудие (неважно какое!) попало в цель, а другое промахнулось.

1) Вводим те же "простые" события: A_1, A_2, $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$.

2) Ставим вопрос: как представить событие W_1 в виде суммы и произведения "простых"? Еще раз сосредоточимся на искомом событии W_1: что происходит, когда происходит W_1? В этом случае **или** первое орудие попадает в цель, а второе не попадает (происходит, следовательно, событие-произведение $A_1 \cdot \overline{A}_2$) **или** первое орудие не попадает, а второе попадает (происходит событие $\overline{A}_1 \cdot A_2$). "Или — или" — сумма событий. Следовательно,

$$W_1 = A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2.$$

3) Слагаемые события $A_1 \cdot \overline{A}_2$ и $\overline{A}_1 \cdot A_2$, очевидно, несовместимые, — ведь не могут вместе произойти противоположные события A_1 (попадание) и $\overline{A}_1$ (промах). Поэтому применяем первую теорему сложения для несовместимых событий и получаем

$$\mathbf{P}(W_1) = \mathbf{P}(A_1 \cdot \overline{A}_2) + \mathbf{P}(\overline{A}_1 \cdot A_2).$$

К каждому слагаемому применяем следствие теоремы умножения (события A_1 и $\overline{A}_2$, очевидно, независимые, так же как $\overline{A}_1$ и A_2) и получаем

$$\mathbf{P}(W_1) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}_2) + \mathbf{P}(\overline{A}_1) \cdot \mathbf{P}(A_2).$$

4) Вычисляем вероятности: $\mathbf{P}(A_1) = p_1$, $\mathbf{P}(\overline{A}_1) = 1 - p_1$, $\mathbf{P}(A_2) = p_2$, $\mathbf{P}(\overline{A}_2) = 1 - p_2$. Подставляем их в последнее равенство и окончательно получаем

$$\mathbf{P}(W_1) = p_1 \cdot (1 - p_2) + p_2 \cdot (1 - p_1).$$

Задача 3. Три орудия стреляют в цель. Вероятности попаданий — p_1, p_2, p_3. Рассчитать вероятность ровно двух попаданий (событие W_2).

Решение проведем кратко:

1) A_1 — первое орудие попало в цель, A_2— второе попало, A_3 — третье попало;

2) $W_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$;

3) $\mathbf{P}(W_2) = p_1 \cdot p_2 \cdot (1 - p_3) + p_1 \cdot (1 - p_2) \cdot p_3 + (1 - p_1) \cdot p_2 \cdot p_3$.

Когда применяется новый метод? Обратите внимание на особенность рассмотренных задач: известны вероятности "простых" событий, а рассчитываются вероятности "сложных" событий, которые получаются из "простых" операциями сложения и умножения.

Другая особенность: вероятности "простых" событий не могут быть вычислены классическим методом, это — статистические вероятности и они получаются экспериментально. А вот вероятности "сложных" событий рассчитываются новым методом.

Самая существенная особенность этих задач заключена в структуре опыта: его можно разбить на этапы (стреляет первое орудие, второе, и т. д.) так, что вероятности результатов каждого этапа ("простые" события) или известны, или легко рассчитываются.

Новым методом можно решать и задачи, которые допускают непосредственный подсчет числа исходов, — примеры были выше. Сейчас я приведу еще один более сложный пример и вы увидите, что структура опыта здесь тоже допускает разбиение на этапы.

Задача 4. Имеются две урны, в каждой по 5 шаров: в первой 3 белых и 2 черных, во второй — 1 белый и 4 черных. Опыт состоит в том, что из каждой урны вынимается наудачу по одному шару. Событие A произойдет, если оба вынутых шара окажутся белыми, событие B — если шары будут одного цвета. Рассчитать вероятности этих событий.

Решение. 1) Можно представить, что опыт производится в два этапа: сначала вынимается шар из первой урны, затем — из второй. Результаты первого этапа: A_1 — из первой урны вынут белый шар, $\overline{A}_1$ — вынут черный шар. Результаты второго этапа: A_2 — из второй урны вынут белый шар, $\overline{A}_2$ — вынут черный шар. Вероятности этих "простых" событий легко рассчитываются:

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{3}{5},\ \mathbf{P}(\overline{A}_1) = \frac{2}{5},\ \mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{5}, \mathbf{P}(\overline{A}_2) = \frac{4}{5}.$$

2) Искомые события A и B строятся из "простых" следующим образом:

$$A = A_1 \cdot A_2,\ B = A_1 \cdot A_2 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2.$$

3) Очевидно, перемножаемые события независимы, а слагаемые несовместимые, значит,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1 \cdot A_2) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} = 0,24;$$

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1 \cdot A_2 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(\overline{A}_1) \cdot \mathbf{P}(\overline{A}_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{11}{25} = 0,44.$$

Контроль 11. Игральная кость подбрасывается два раза. Событие A произойдет, если первый раз появится четное число очков, второй раз — число очков, делящееся на 3. Событие B произойдет, если в любом порядке появится четное число очков и число очков, делящееся на 3. Рассчитать вероятности этих событий. Обоснуйте каждый шаг решения.

12. Упражнения

Сначала поупражняйтесь в операциях с событиями. Вероятности вычислять не надо.

1. В урне 6 пронумерованных шаров. Опыт состоит в случайном выборе одного шара. Событие A произойдет, если появится шар с четным номером, B — с номером, делящимся на 3. Ответьте на следующие вопросы.

а) В чем состоит событие $A+B$, и какие исходы ему благоприятствуют? Когда произойдет $A \cdot B$?

б) Определите события $\overline{A}$, $\overline{B}$ и перечислите исходы, им благоприятствующие. Какое из них будет происходить чаще? Когда произойдет событие $\overline{A}+\overline{B}$? Когда — $\overline{A} \cdot \overline{B}$? Какое чаще?

в) Определите события $A+\overline{B}$ и $\overline{A}+B$. Какое будет происходить чаще?

г) Из событий A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$ составьте с помощью операций сложения и умножения свои события и определите, какое будет происходить чаще.

2. Подбрасывается игральная кость. Событие A происходит, если появляется число очков, не меньшее трех, B — не большее трех. Когда происходит событие $A+B$, когда — $A \cdot B$? Какое из них достоверное? Чуть измените событие A или B так, чтобы событие $A \cdot B$ стало невозможным. Можно ли подобным образом сделать невозможным событие $A+B$?

3. По мишени производятся последовательно три выстрела. Событие A_i происходит, если i-ый выстрел поразит цель ($i = 1, 2, 3$). Составьте из этих событий с помощью операций сложения и умножения следующие события:

а) A — три попадания, B — три промаха, C — хотя бы одно попадание;

б) D — **ровно** два попадания, E — ровно одно попадание, F — ни одного;

в) G — не менее двух попаданий, H — не более одного;

г) $\overline{A}$ — **не** три попадания; $\overline{D}$ — **не** ровно два попадания.

Ответ: $B = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$; $H = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + B$; $\overline{D} = H + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

4. Монета подбрасывается четыре раза. Событие A_i происходит, если при i-ом подбрасывании появляется герб ($i = 1, 2, 3, 4$). Составьте из этих "простых" событий следующие "сложные" события: A — число гербов и решек одинаково; B — ровно три герба (и одна решка); C — гербов больше, чем решек.

Ответ: $C = B + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$.

Теперь поработайте с понятиями совместимости и независимости.

5. В условиях упражнения 1 добавьте событие C — вынут шар с номером, меньшим четырех. Рассмотрите все пары событий и определите, какие из них совместимые, какие — нет. Совместимы ли три события — A, B, C? Выберите из рисунков 3а-д тот, которому соответствует "тройка" $\{A, B, C\}$. Для каждого другого рисунка составьте свою "тройку" событий, соответствующую этому рисунку.

Ответ: A, B, C — события, совместимые в совокупности.

6. В условиях упражнения 2 определите — совместимые ли события A и B, независимые ли?

Ответ: $\mathbf{P}_A(B) = \frac{1}{3}$; $\mathbf{P}_{\bar{A}}(B) = 1$.

7. Игральная кость подбрасывается два раза. Событие A происходит, если при первом подбрасывании появляется число очков, меньшее трех, событие B — если при втором подбрасывании появляется число очков, большее трех. Совместимые ли эти события? Перечислите все исходы, при которых они появляются вместе. Зависимые ли события A и B? Почему?

8.[3] В урне 4 шара с номерами 110, 101, 011, 000. Опыт состоит в случайном выборе одного шара. Событие A произойдет, если будет вынут шар, у которого первая цифра номера есть 1, событие B — если вторая цифра 1, C — третья 1. Проверьте, что эти события попарно независимы, но зависимы в совокупности.

Ответ: $\mathbf{P}_{A\cdot B}(C) = 0$; $\mathbf{P}_{\overline{A}\cdot B}(C) = \frac{1}{3}$.

9. Подбрасываются две монеты. Событие A происходит, если первая монета падает гербом вверх, B — вторая решкой вверх, C — хотя бы одна монета падает решкой вверх. Какие пары этих событий независимы, какие — зависимы?

Ответ: $\mathbf{P}_A(C) = 0,5$; $\mathbf{P}_{\overline{A}}(C) = 1$.

10. Опыт состоит в том, что одновременно подбрасываются монета и игральная кость. Событие A происходит, если появляется герб, B — четное число очков, C — и герб, и четное число очков. Будут ли эти события попарно независимыми?

В следующих задачах примените теорему умножения — выберите формулу (4), (5), (4′) или (5′), предварительно определив зависимость или независимость событий.

11. В урне 10 шаров — 6 белых и 4 черных. Наудачу последовательно вынимаются два шара. Какова вероятность, что: а) будут вынуты оба белых шара: б) первым белый, потом черный; в) оба черных?

Какими станут эти вероятности, если опыт без возвращения изменить на опыт с возвращением первого шара в урну и последующим выниманием второго шара?

12. В условиях предыдущего упражнения измените опыт — наудачу вынимаются три шара (без возвращения). Рассчитайте вероятность вынуть три белых шара.

Какое событие будет дополнительным к последнему и какова его вероятность? Какова вероятность вынуть три черных шара? Какова вероятность вынуть первым белый шар, потом два черных?

Ответ: $\mathbf{P}(\text{ЧЧЧ}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$.

13. В урне m белых и n черных шаров ($m \geq 2$). Наудачу вынимаются два шара (без возвращения). Какова вероятность, что появятся два белых шара?

Ответ: $\mathbf{P}(\text{ББ}) = \frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$.

Далее используйте формулу вероятности хотя бы одного события и комбинацию теорем сложения и умножения.

14. Партия из 100 изделий, среди которых 5% некачественных, подвергается выборочному контролю. Условием выбраковывания всей партии является наличие хотя бы одного бракованного изделия среди пяти проверяемых. Какова вероятность, что партия будет забракована?

Ответ: 0,23.

---

[3]Этот простой пример придумал академик С.Н. Бернштейн (1880-1968) для того, чтобы показать, что попарная независимость и независимость в совокупности — разные понятия. Хотя во многих случаях они совпадают.

15. Производится три выстрела по мишени. Вероятности попаданий равны соответственно $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,5$, $p_3 = 0,7$. Найти вероятности а) хотя бы одного попадания; б) ровно одного попадания. Сделать прогноз.

Ответ: 0,86; 0,36.

16. В условиях предыдущего упражнения найдите вероятности а) не более одного попадания; б) не менее одного попадания.

Указание. Для случая а) найдите вероятность трех промахов (0 попаданий), затем вероятность ровно одного попадания и сложите их.

17. В условиях упражнения 15 добавляется четвертый выстрел, вероятность попадания для которого $p_4 = 0,5$. Как вы думаете, — увеличатся или уменьшатся те же вероятности? Найдите их.

18. Известна вероятность хотя бы одного попадания в мишень при трех выстрелах — она равна 0,875. Найдите вероятность попадания при одном выстреле (эта вероятность не меняется от выстрела к выстрелу).

Ответ: 0,5.

19. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что за смену выйдет из строя первый станок, равна 0,2, второй — 0,4, третий — 0,1. Какова вероятность того, что а) все станки выйдут из строя; б) ни один не выйдет из строя; в) ровно два выйдут из строя; г) не более двух. (Сначала запишите свое предположение о порядке возрастания вероятностей, а потом проведите точный расчет и сравните с гипотезой).

Ответ: 0,008; 0,432; 0,444; 0,992.

Следующие упражнения введут вас в круг задач, имеющих особую практическую ценность. Это задачи расчета надежности сложных технических систем, в частности, электрических цепей.

20. Электрическая цепь состоит из двух элементов (например, лампочек), соединенных а) последовательно (рис. 5а); б) параллельно (рис. 5б). Надежность каждого элемента (вероятность безотказной работы в течение определенного времени) равна 0,9. Рассчитайте надежность всей цепи. Получите формулы надежности цепи в случаях а) и б) для любой надежности элементов — p_1 и p_2.

Ответ: $p_1\, p_2$; $1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2)$.

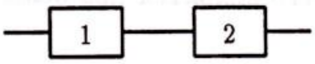

Рис. 5 а

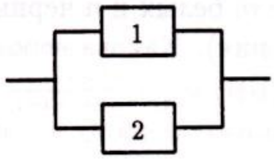

Рис. 5 б

21. Прибор состоит из четырех элементов, надежность которых 0,9. Выход из строя любого элемента приводит к неработоспособности прибора. Какова надежность прибора в целом? Какова должна быть надежность элементов, чтобы надежность прибора была больше, чем 0,9? Составьте формулу для расчета надежности прибора, если надежность его элементов — p_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Указание. Упражнение аналогично предыдущему — вариант а); надежность элементов определяется из неравенства $p^4 > 0,9$.

Ответ: 0,66; $> 0,98$.

22. Надежность прибора можно повысить дублированием каждого его элемента точно таким же элементом. Это значит, что при выходе из строя элемента начинает работать его дублер и система в целом остается работоспособной. Рассчитайте надежность системы из двух элементов, дублирующих друг друга, если надежность каждого элемента 0,9. Насколько повысится надежность прибора в условиях предыдущего упражнения, если к каждому элементу подсоединить такой же дублирующий элемент?

Указание. Система из двух взаимно дублирующих элементов аналогична электрической цепи из двух лампочек, соединенных параллельно (рис. 5б).

Ответ: 0,99; 0,96.

23. Цепи, изображенные на рис. 5, являются элементарными. Из них строятся сложные цепи, надежность которых может быть рассчитана, исходя из надежности элементарных, методом последовательного их укрупнения. Аналогично рассчитывается надежность других технических систем (приборов). Попробуйте сделать это сами для схем, изображенных на рис. 6 и 7, взяв надежность элементов 0,9 или p_i.

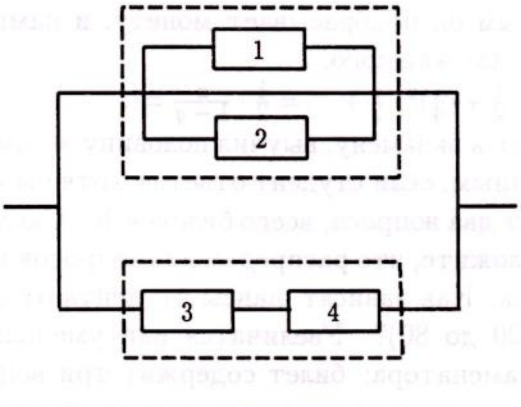

Рис. 6

Указание. Расчет цепи, изображенной на рис. 6, сводится к расчету трех элементарных цепей. Последовательно применяя формулы, полученные в упражнении 20, придем к общей формуле $\mathbf{P} = 1 - [1 - (1-p_1)\cdot(1-p_2)]\cdot(1-p_3p_4)$.

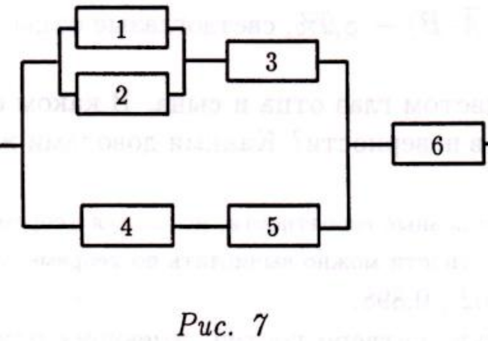

Рис. 7

В заключение — несколько, может быть, более сложных, но интересных задач.

24. Происходит воздушный бой между истребителем и бомбардировщиком. Начинает атаку истребитель и сбивает бомбардировщик с вероятностью 0,2. Если

атака не успешна, бомбардировщик отвечает истребителю и сбивает его с вероятностью 0,3. Если истребитель не сбит, он подходит к бомбардировщику ближе и сбивает его с вероятностью 0,4. Найти вероятности следующих исходов боя: A — сбит бомбардировщик, B — сбит истребитель, C — ни один из самолетов не сбит.

Указание. Введите следующие "простые" события: A_1 — бомбардировщик сбит первым выстрелом, A_2 — вторым выстрелом.

Ответ: 0,424; 0,24; 0,336.

Данная задача дает представление о другом важном классе прикладных задач, моделирующих "бой". Можно увеличивать число участников, усложнять схему боя и аналогично рассчитывать вероятности различных исходов.

25. В урне 3 белых и 4 черных шара. Три игрока один за другим вынимают наудачу шары, не возвращая их в урну. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Каковы шансы игроков?

Указание. $A = A_1 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 \cdot A_4$.

Ответ: $\frac{18}{35}$; $\frac{11}{35}$; $\frac{6}{35}$.

26. Два игрока поочередно подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого первого выпадет герб. Как вы думаете, зависит ли частота выигрыша игрока от того, первым или вторым он подбрасывает монету, и намного ли? Рассчитайте вероятность выигрыша для каждого.

Указание. $p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{4})^2 \cdot \frac{1}{2} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{1-q} =?$.

27. Студент, готовясь к экзамену, выучил половину экзаменационных вопросов. Экзамен считается сданным, если студент ответит хотя бы на один вопрос билета. Каждый билет содержит два вопроса, всего билетов 30. Сколько у студента шансов сдать экзамен? Предположите, что распределение вопросов по билетам случайное и вопросы не повторяются. Как зависят шансы студента от общего числа вопросов (пусть в пределах от 20 до 80)? Увеличатся или уменьшатся его шансы, если изменится тактика экзаменатора: билет содержит три вопроса и положительная оценка ставится в случае ответа на не менее, чем два вопроса?

Ответ: а) примерно три к четырем.

28. По данным переписи населения (1891 г.) Англии и Уэльса установлено: темноглазые отцы и темноглазые сыновья $(A \cdot B)$ составили 5% обследованных лиц, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья $(A \cdot \overline{B})$ — 7,9%, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья $(\overline{A} \cdot B)$ — 8,9%, светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья $(\overline{A} \cdot \overline{B})$ — 78,2%.

Найти связь между цветом глаз отца и сына. В каком случае муж имеет основания подозревать жену в неверности? Какими доводами жена может опровергать его подозрения?

Указание. Вычислите условные вероятности, используя теорему умножения, при этом необходимые безусловные вероятности можно вычислить по теореме сложения.

Ответ: 0,39; 0,61; 0,102 ; 0,898.

29. Уходя с вечеринки, четверо гостей, имеющих одинаковые номера обуви, надевают калоши в темноте. Каждый из них может отличить правую калошу от левой, но не может отличить свою от чужой. Найдите вероятность того, что каждый гость а) наденет свои калоши, б) наденет калоши одной пары.

Ответ: $\frac{1}{(4!)^2}$; $\frac{1}{4!}$.

Игорь Петрович Костенко,
кандидат физ.-мат. наук, доцент,
действительный член Международной
педагогической академии.
email: kost@kubannet.ru

Сравнение множеств

С. А. Кулешов

Предлагаем вашему вниманию небольшое пособие, освещающее два круга вопросов современной математики и доступное для учащихся старших классов средней школы. Исходно пособие представляет собой приложение к книге А. Купиллари «Трудности доказательств. Как преодолеть страх перед математикой», вышедшей в этом году в Москве в издательстве «Техносфера». Автор приложения С. А. Кулешов является переводчиком всей книги с английского языка на русский. Приведем небольшую выдержку из аннотации к книге. «Здесь, в отличие от многочисленных пособий, пылящихся на магазинных полках, не пытаются натаскать абитуриента к вступительным экзаменам. Основная ее цель — показать красоту математики, научить основным приемам доказательств и анализа различных ситуаций. ... читатель знакомится с классификацией математических утверждений и способами их доказательств. Особое внимание обращается на логику и строгость рассуждений». Настоящая публикация осуществлена с разрешения указанного издательства. В этом номере публикуется параграф о сравнении бесконечных множеств. В следующем номере — введение в теорию пределов.

Что такое бесконечность? Казалось бы, вопрос не очень сложен. Все мы привыкли к таким бесспорным фактам, как бесконечность вселенной, бесконечность множества натуральных чисел, бесконечность прямой, и т. д. Однако основные проблемы, с которыми первокурсник сталкивается при изучении высшей математики, связаны именно с понятием бесконечности и бесконечного числа шагов.

Дело в том, что обыденное представление о бесконечности проистекает из этимологии слова: что-то, не имеющее конца. Действительно, упомянутые нами примеры бесконечных множеств четко ассоциируются с таким толкованием этого понятия. Поэтому фраза: «проделано бесконечное число шагов» — малопонятна как первокурснику, так и любому человеку, не задумывавшемуся специально над этим вопросом.

Чтобы не быть голословным, приведу пример любопытной задачи.

Гефест и Гермес затеяли игру. Гефест пишет на доске 10 первых натуральных чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

Гермес, в свою очередь, стирает наименьшее из написанных на доске. Затем Гефест выписывает следующие 10 чисел, а Гермес опять стирает наименьшее из написанных, но только одно число, и так далее ... Гефест за свой ход дописывает очередную десятку натуральных чисел, а Гермес сразу же стирает наименьшее из оставшихся на доске чисел. Сделали бесконечное число шагов ... Сколько чисел останется на доске после окончания игры?

Ответ на этот вопрос настолько невероятен, так трудно поверить в его истинность, несмотря на абсолютно строгое доказательство, что мы его пока приводить не будем, а попробуем угадать, как мог бы размышлять неискушенный в вопросах бесконечности школьник.

За каждый отдельный ход Гефест выписывает в 10 раз больше чисел, чем успевает стереть Гермес. Поэтому было выписано «в 10 раз больше» чисел, чем стерто. Значит, после завершения игры на доске останется бесконечно много чисел.

Возможен и другой ход мысли. После первого хода на доске осталось 9 чисел, после второго — 18, после третьего — 27. Очевидно, что с каждым ходом количество чисел увеличивается на 9. Стало быть в результате бесконечного числа шагов на доске останется много чисел.

Оба рассуждения кажутся очень логичными, согласующимися с общими принципами доказательств, изложенными в этой книге. На первый взгляд придраться тут абсолютно не к чему. Тем не менее, они ошибочны!

Почему?! Дело в том, что мы пытаемся сравнивать бесконечные множества, совершенно не владея предметом, стараясь перенести на них интуицию, выработанную при работе с числами и конечными множествами. Действительно, если следовать первой идее, мы должны умножить бесконечность на 10, а потом отнять ту же самую бесконечность. Что получится в итоге? Уже хочется сказать, что нуль, да вот второе рассуждение не позволяет легко отказаться от найденного решения. Ведь выражение $10 \cdot \infty - \infty$ можно «вычислить» двумя способами:

$$10 \cdot \infty - \infty = \infty - \infty = 0 \quad \text{и} \quad 10 \cdot \infty - \infty = (10-1)\infty = \infty.$$

Возникает законный вопрос: какой же из этих способов правильный? И вообще, как сравнить два бесконечных множества, если нельзя подсчитать количества их элементов? А может быть эти вопросы излишни, а все бесконечные множества имеют одинаковое количество элементов — бесконечность? Это было бы очень странно, ведь как множество целых чисел, так и множество точек на вещественной прямой бесконечны. Однако создается впечатление, что целых чисел все же меньше.

Прежде чем отвечать на поставленные вопросы, представим себе вполне реальную бытовую ситуацию. Допустим, что к нам неожиданно пришло много гостей и мы не понимаем, хватит ли на всех стульев вкруг обеденного стола. Мы, разумеется, знаем сколько стульев у нас есть, а вот гости ... Они постоянно переходят с места на место. Кто-то отправился в ванную мыть руки, кто-то на кухне помогает готовить угощение, кто-то накрывает на стол. Так что пересчитать гостей нет никакой возможности. Что же делать (извечный вопрос русской интеллигенции)? Догадливый хозяин предложит своим друзьям сесть на любой свободный стул. Если после того, как гости рассядутся, окажется, что все сели, вдвоем на одном стуле никто не сидит, под каждым только один стул (а не 2, как иногда случается), да и свободных стульев не осталось, то мы убедимся, что количество стульев и пришедших гостей одинаково.

Видите, даже для сравнения конечных множеств совсем не обязательно пересчитывать их элементы. Чего уж говорить о бесконечных? Не будем экономить на мелочах и введем два новых термина: взаимно-однозначное соответствие и равномощные множества.

Определение. Говорят, что между множествами X и Y задано *взаимно-однозначное соответствие* f, если для каждого элемента $x \in X$ найдется единственный $y \in Y$, такой что $f(x) = y$ и наоборот, любому элементу $y \in Y$ соответствует один и только один $x \in X$, обладающий свойством $f(x) = y$. (Сравните это определение с понятием взаимно-однозначной функции на стр. ??.)

Чтобы лучше почувствовать определение, выделим необходимые и достаточные условия, налагаемые на взаимно-однозначное соответствие, после чего разберем несколько примеров.

Итак, f — взаимно-однозначное соответствие между множествами X и Y, если

1) для каждого $x \in X$ найдется единственный $y \in Y$, такой что $f(x) = y$;

2) из равенства $f(x) = f(x')$ следует, что $x = x'$;

3) для каждого $y \in Y$ найдется $x \in X$, такой что $f(x) = y$.

Пример 1. Билет в вагон поезда дальнего следования выписывается на одно и только одно место. Более того, если поезд идет в Крым во время курортного сезона, то билет выписывается на каждое место в вагоне, причем только один. Таким образом, между местами в вагоне и выписанными билетами устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Пример 2. В любом классном журнале фамилии учеников пронумерованы. Иными словами, каждой фамилии присвоен один номер. Предположим, что в рассматриваемом нами классе учится 30 человек. Тогда можно с уверенностью утверждать, что любое натуральное число от 1 до 30 соответствует какой-то фамилии, причем только одной. Значит между фамилиями учащихся в нашем классе и первыми тридцатью натуральными числами установлено взаимно-однозначное соответствие.

Пример 3. Трем лучшим командам (или спортсменам), участвующим в соревнованиях, присуждаются золотая, серебряная и бронзовая медали. Очевидно, что мы имеем взаимно-однозначное соответствие между наградами и призерами[1].

Пример 4. У каждого жителя Москвы есть имя и фамилия. Является ли соответствие между множествами фамилий и имен взаимно-однозначным? Очевидно, нет, поскольку можно найти много людей с одинаковыми именами, но разными фамилиями. Кроме того, близкие родственники носят одну и ту же фамилию, но имена у них, как правило, разные.

Определение. Если между множествами X и Y можно установить взаимно-однозначное соответствие, то они называются *равномощными*. Для обозначения равномощности множеств X и Y будем писать $X \asymp Y$.

[1] Во время верстки книги олимпиада в Солт-Лейк-Сити показала, что это незыблемое правило соревнований может нарушаться.

Значок «$\asymp$», хоть и похож на знак равенства, говорит лишь о том, что в некотором смысле множества имеют «одинаковое число элементов». В случае конечных множеств, как мы сейчас убедимся, это можно понимать буквально.

Теорема. Конечные множества равномощны в том и только том случае, когда они имеют одинаковое число элементов.

Доказательство. Вы уже научились определять тип утверждений, поэтому излишне говорить, что данное утверждение относится к теоремам равносильности, и поэтому его доказательство состоит из двух частей.

Часть 1. Допустим, что множества X и Y насчитывают по n элементов, т. е.

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}, \qquad Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n\}. \tag{1}$$

В силу определения множеств, повторяющиеся в них элементы считаются равными. Поэтому можно предполагать, что $x_i \neq x_j$ и $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$. Определим соответствие по следующему правилу:

$$f(x_i) = y_i \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тем самым каждому элементу x_i мы ставим в соответствие один и только один элемент y_i. Легко понять, что и каждому y_i ставится в соответствие только один элемент x_i. Значит, f — взаимно-однозначное соответствие, и $X \asymp Y$.

Часть 2. Предположим теперь, что конечные множества X и Y равномощны, т. е. между ними существует взаимно-однозначное соответствие f. Пронумеруем элементы множества X:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\},$$

считая, как обычно, что разным номерам соответствуют разные элементы. Отсюда в частности следует, что множество X имеет n элементов. Пересчитаем элементы множества Y, обозначив $f(x_i)$ через y_i для каждого i из 1, 2, ..., n. Прежде всего заметим, что в списке

$$y_1, \ y_2, \ \ldots, \ y_n$$

присутствуют все элементы множества Y, так как по определению взаимно-однозначного соответствия для любого $y \in Y$ найдется такой $x \in X$, что $f(x) = y$. Единственная опасность ошибочного подсчета может таиться в том, что в этом списке какой-то элемент множества Y написан не один, а большее число раз. Почему, например, не может быть так, что $i \neq j$, но $y_i = y_j$? Предположим, что такое происходит на самом деле. Но тогда

$$f(x_i) = y_i = y_j = f(x_j),$$

т. е. разным x_i и x_j соответствует один и тот же элемент множества Y, что противоречит определению взаимно-однозначного соответствия. Итак, мы пересчитали все элементы из Y, причем каждый только по одному разу. Следовательно, число элементов в Y тоже равно n. ∎

Доказывая теорему о равномощности конечных множеств с одинаковым количеством элементов, мы неявно рассматривали еще одно множество

$$Z = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\},$$

состоящее из первых n натуральных чисел. Более того, выписав элементы X и Y в виде (1), мы фактически установили взаимно-однозначное соответствие между Z и множествами X и Y. Иначе говоря, не заботясь специально, мы доказали, что

$$X \asymp Z \quad \text{и} \quad Z \asymp Y.$$

Похоже на то, что равномощность множеств обладает свойством транзитивности. Докажем это.

Теорема. Пусть множества X, Y и Z удовлетворяют соотношениям $X \asymp Y$ и $Y \asymp Z$. Тогда $X \asymp Z$.

Доказательство. По определению равномощных множеств существуют взаимно-однозначные соответствия: f между X и Y и g между Y и Z. Определим соответствие h между X и Z по правилу

$$h(x) = g(f(x))$$

и покажем, что оно взаимно-однозначно.

Во-первых, h определено для любого $x \in X$, так как этим свойством обладает f, элемент $f(x)$ принадлежит Y и g определено для каждого $y \in Y$. В частности, найдется такой элемент $z \in Z$, что $z = g(f(x)) = h(x)$. Более того, такой z однозначно определяется элементом x.

Во-вторых, равенство $g(f(x)) = g(f(x'))$ влечет соотношение $f(x) = f(x')$ (так как g — взаимно-однозначно). А последнее возможно лишь если $x = x'$.

Наконец, так как g — взаимно-однозначное соответствие, для каждого $z \in Z$ найдется такой $y \in Y$, что $g(y) = z$. Аналогично, существует элемент $x \in X$, для которого $y = f(x)$. Поэтому какой элемент $z \in Z$ ни взять, мы сможем найти такой $x \in X$, что

$$h(x) = g(f(x)) = z.$$

Мы показали, что h удовлетворяет всем свойствам взаимно-однозначного соответствия. Поэтому множества X и Z равномощны. ∎

В некоторых случаях хотелось бы иметь более простой способ проверки соответствия на взаимно-однозначность. Такую возможность предоставляет следующий факт.

Теорема. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ — соответствие между множествами X и Y, определенное на всем множестве X. Оно является взаимно-однозначным тогда и только тогда, когда найдется обратное к нему соответствие $g : Y \longrightarrow X$, т.е. соответствие, удовлетворяющее соотношениям:

$$g(f(x)) = x \quad \text{для любого } x \in X,$$

$$f(g(y)) = y \text{ для любого } y \in Y.$$

Доказательство. Если f — взаимно-однозначное соответствие, то для каждого $y \in Y$ найдется такой $x \in X$, что $f(x) = y$. Причем этот x однозначно определяется элементом y. Чтобы подчеркнуть эту уникальность, обозначим соответствующий элемент множества X через x_y. Положив $g(y) = l = x_y$, мы получим соответствие между множествами Y и X. Покажем, что оно обратно к f. Благодаря выбору элемента x_y, имеем:

$$\text{для любого } y \in Y \quad f(g(y)) = f(x_y) = y.$$

Возьмем теперь произвольный элемент множества X и вычислим $g(f(x))$. Обозначим через z элемент $f(x) \in Y$, т. е. $z = f(x)$. Тогда, очевидно, $x = x_z$, как тот элемент, который соответствием f переводится в z. А по определению g значение этого соответствия на z равно именно $x_z = x$. Собирая информацию вместе, получаем

$$g(f(x)) = g(z) = x_z = x.$$

Итак, мы показали, что взаимно-однозначное соответствие f обязательно обладает обратным. Предположим теперь, что нам дано какое-то соответствие f, обладающее обратным соответствием g, и покажем, что f взаимно-однозначно.

Так как f определено на всем множестве X, то для всякого $x \in X$ найдется такой $y \in Y$, что $f(x) = y$. Предположение о том, что $f(x)$ равно еще какому-то $y' \in Y$, влечет:

$$y' = f(x) = y.$$

Значит, y по x определяется однозначно.

Рассмотрим произвольный $y \in Y$. По предположению существует обратное соответствие g, такое что $f(g(y)) = y$. Следовательно, положив $x = g(y)$, мы укажем такой элемент множества X, для которого $f(x) = y$.

Предположим, наконец, что $f(x) = f(x')$. Применив к равенству соответствие g, получим

$$x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'.$$

Значит, f — взаимно-однозначно. ∎

Освоив на примерах и простых утверждениях понятия взаимно-однозначного соответствия и равномощности, можно приступить к сравнению бесконечных множеств. Первый пример, который мы разберем, почти очевиден. И о нем можно было бы вообще не упоминать. Но бросаться с места в карьер тоже не стоит.

Пример 5. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ равномощно множеству $\mathbb{Z}_-$ целых отрицательных чисел.

Доказательство. Для доказательства упомянутой равномощности достаточно предъявить формулу взаимно-однозначного соответствия, до которой Вы скорее всего уже догадались. Тем не менее, полезно рассказать о поиске такого соответствия, поскольку это пригодится Вам в дальнейшем при решении различного рода задач.

Мы привыкли выписывать целые числа в порядке возрастания. В частности,

$$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Видно, что как множество $\mathbb{Z}_-$, так и $\mathbb{N}$ можно выписать в строчку (условно считая, что бумага у Вас бесконечной ширины). Причем оба списка ограничены с какого-то края ($\mathbb{Z}_-$ справа, а $\mathbb{N}$ слева). Отказавшись от привычки, выпишем отрицательные числа в порядке убывания, а натуральные — строго под ними.

$$\begin{array}{cccccccc} -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \end{array}$$

Сделав это, мы практически указали алгоритм пересчета (нумерации) всех отрицательных целых чисел. Совершенно очевидно, что продолжая заполнять таблицу и дальше, мы присвоим свой уникальный номер каждому целому числу. При этом разные номера (натуральные числа) будут соответствовать разным отрицательным целым и никакой номер пропущен не будет. Это-то и есть взаимно-однозначное соответствие. То есть равномощность наших множеств доказана. Но чтобы удовлетворить педантов, а такие люди, к счастью, встречаются и среди школьников, выпишем формулу, задающую то же самое соответствие:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}_-, \qquad f(n) = -n.$$

Ясно, что f определено на всем множестве $\mathbb{N}$ и обладает обратным соответствием $g : \mathbb{Z}_- \longrightarrow \mathbb{N}$, $g(n) = -n$ (проверьте, что f и g взаимно обратны). Значит, f — действительно взаимно-однозначное соответствие. ■

Как уже отмечалось, в равномощности этих множеств нет ничего удивительного. Перейдем к более содержательному примеру.

Пример 6. Множество натуральных чисел равномощно множеству $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ неотрицательных целых чисел.

Доказательство. Прежде чем приступить к доказательству, отметим, что $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}_{\geq 0}$, поскольку

$$\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n \dots\}.$$

Фактически, мы приводим пример множества, которое равномощно своему подмножеству. Среди конечных множеств таких нет.

Как и в предыдущем случае, для доказательства равномощности $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ достаточно «перенумеровать» элементы $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, т. е. указать алгоритм, следуя которому можно присвоить свой номер каждому неотрицательному целому числу. Оставив поиск алгоритма в качестве упражнения, выпишем формулу соответствия.

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad f(n) = n - 1.$$

Поскольку обратным к нему является соответствие

$$g : \mathbb{Z}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{N},$$

переводящее каждое неотрицательное число m в $m+1$, то f — взаимно-однозначно, а $\mathbb{N} \asymp \mathbb{Z}_{\geq 0}$. ■

Заметим, что мы доказали что-то типа такой формулы:

$$\infty + 1 = \infty.$$

Такая запись не является абсолютно строгой, так как бесконечности, вообще говоря, бывают разные, о чем мы с Вами и ведем беседу. Тем не менее, она полезна в качестве мнемонического правила. Хорошо, а что будет, если мы к бесконечности прибавим любое натуральное число? Как Вы уже понимаете, ровным счетом ничего не изменится. Доказывать мы этого не будем, а оставим в качестве тренировочного упражнения.

Поскольку и дальше мы, как правило, будем сравнивать бесконечные множества с натуральными числами, полезно ввести общепринятый термин.

Определение. Множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел.

Пример 7. Множество $2\mathbb{N}$ четных натуральных чисел счетно.

Доказательство. Нам нужно установить взаимно-однозначное соответствие между множествами $\mathbb{N}$ и $2\mathbb{N}$. Умножив произвольное натуральное число n на 2, мы получим четное число $2n$, т. е. правило $f(n) = 2n$ задает соответствие между $\mathbb{N}$ и $2\mathbb{N}$. Обратным к нему является g, определенное соотношением: $g(m) = \frac{m}{2}$. Так как любое четное число делится на 2, то соответствие g корректно определено. Не составляет труда проверить, что g и f взаимно обратны. Значит, f — взаимно-однозначно, а $2\mathbb{N} \asymp \mathbb{N}$. ■

Вот этот пример уже довольно сильно меняет наше представление о «числе элементов» бесконечного множества. Действительно, мы выбросили из множества $\mathbb{N}$ все нечетные числа, т. е. практически половину (см. упр. 1 на стр. 72), а общее «количество» его элементов при этом не уменьшилось ни на йоту. Таким образом,

$$\frac{1}{2}\infty = \infty.$$

Утверждение доказано абсолютно корректно. Но часто у человека, впервые столкнувшегося с такого рода фактом, остается неудовлетворенность: кажется, что его где-то обманули. Дабы устранить неуверенность, попытаемся объяснить полученный результат по-другому. Выпишем подряд в порядке возрастания все четные натуральные числа

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots$$

Не вызывает сомнений, что мы можем сделать это, не пропустив ни одного четного числа, и не написав никакое из них дважды. Естественно, мы можем поступить так только теоретически, поскольку на процедуру выписывания всех четных чисел не хватит и жизни. Однако математики не обращают на это внимания.

Итак, все четные числа выписаны в строчку. Что же теперь нам мешает присвоить каждому из них свой номер? Да абсолютно ничего. Отметив 2 как первое, 4 — второе, мы можем двигаться от числа к числу, присваивая каждому очередной номер. Процесс, естественно, бесконечен, но нам не нужно заботиться о том, успеем ли мы закончить его к определенному сроку. Важно лишь, что каждое конкретное четное число будет пронумеровано на определенном шаге. Докажем это методом «от противного». Предположим, что завершив процесс, мы пронумеровали не все четные числа. Значит, найдется по крайней мере одно, которому не было присвоено номера. Но как конкретное четное число, оно должно быть чему-то равно. Допустим, обделенным осталось очень большое четное число M. Ввиду его четности можно записать $M = 2N$, где N — какое-то конкретное натуральное число (равное $\frac{M}{2}$). Однако внимательно прочитав описание процесса нумерации еще раз, мы убедимся, что число M будет пронумеровано на N-ом шагу. Следовательно, наше предположение неверно, и в результате будут пронумерованы все четные числа.

Мы еще раз установили взаимно-однозначное соответствие между $\mathbb{N}$ и $2\mathbb{N}$, наполнив конкретным смыслом формулу из доказательства утверждения. Более того, мы этим как бы связали каждое четное число со своим номером теоретической «веревочкой», что видно из следующей диаграммы:

$$\begin{array}{cccccccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \ldots & 2n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n & \ldots \end{array}$$

Иными словами, мы посадили каждое четное число на свой «натуральный стул».

Надеюсь, после такого подробнейшего объяснения у Вас исчезнут все сомнения в истинности доказанного факта, а останется только безмерное удивление. Но это и неплохо, ибо, как сказал Городницкий:

Не страшно потерять
Уменье удивлять.
Страшнее потерять
Уменье удивляться.

Вот теперь можно обсудить решение задачи про Гефеста и Гермеса, с которой мы начали рассказ о сравнении бесконечных множеств.

Предположим, что после завершения игры на доске останутся нестертые числа. Тогда останется хотя бы одно конкретное натуральное число, скажем M. Но как бы медленно Гермес ни стирал числа, он сотрет M ровно на M-ом шаге. Мы получили противоречие с предположением. Поэтому в результате бесконечного числа шагов на доске *не останется ни одного числа*!

После некоторой привычки к сравнению бесконечных множеств ответ к задаче уже не кажется невероятным. Более того, его можно вполне объяснить. Действительно, первоначально создавалось впечатление, что стертых чисел окажется ровно в 10 раз меньше, чем написанных. Но следующий пример показывает, что если счетное множество «разделить на 10», то все равно останется счетное множество.

Пример 8. Множество $10\mathbb{N}$ натуральных чисел, кратных десяти, счетно. То есть оно равномощно множеству всех натуральных чисел.

Доказательство. Доказательство этого утверждения практически ничем не отличается от приведенного в примере 7. Приписав каждому натуральному числу n его произведение с десяткой $10n$, мы установим соответствие между натуральными числами и множеством $10\mathbb{N}$. Обратным к нему служит соответствие, сопоставляющее каждому числу $10n \in 10\mathbb{N}$ его частное от деления на 10. Таким образом, описанное нами соответствие является взаимно-однозначным, что доказывает счетность множества $10\mathbb{N}$. ■

Сформулируем и докажем еще две теоремы о счетных множествах в качестве иллюстрации методов работы с абстрактными множествами. Их доказательство служит подсказкой к решению теоретических упражнений, помещенных в конце этого параграфа.

Теорема. Любое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

Доказательство. Рассмотрим произвольное счетное множество A. Так как все его элементы можно пронумеровать, представим A в виде

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots , a_n, \ldots\},$$

где выписаны все элементы множества A, причем только по одному разу. Более того, любой номер $k \in \mathbb{N}$ приписан какому-то элементу $a_k \in A$.

По условию нам дано какое-то подмножество $B \subset A$. К сожалению, мы не можем столь же явно выписать его элементы, поскольку нам известно только то, что B имеет бесконечное число элементов. Нам же надо указать алгоритм, следуя которому можно будет пересчитать все элементы множества B.

Поступим следующим образом. Возьмем элемент a_1. Если он принадлежит множеству B, обозначим его как b_1, если нет, то оставим его без изменения. Затем посмотрим на a_2. Если $a_1 = b_1$, и a_2 тоже принадлежит множеству B, присвоим ему значок b_2. Если $a_1 \notin B$, но $a_2 \in B$, то положим $b_1 = a_2$. Ну а если ни a_1, ни a_2 не являются элементами подмножества B, оставим все как есть. Как видите, при переходе к каждому следующему элементу множества A процесс все более разветвляется. И таким путем довольно сложно доказать счетность B.

Попытаемся, не меняя сути алгоритма, слегка видоизменить его описание.

Будем просматривать элементы множества A в порядке возрастания их номеров. Как только наткнемся на элемент a_i, принадлежащий множеству B, обозначим его через b_1 и продолжим просмотр. Следующему элементу a_j, который лежит в B, присвоим обозначение b_2 и т. д.

Возникают два вопроса:

а) Все ли элементы множества B мы пронумеруем?

б) Задействуем ли мы каждое натуральное число в качестве номера элемента подмножества B?

На первый вопрос некоторые из Вас ответят отрицательно, мотивируя свой ответ тем, что при пересчете даже просто большого числа элементов можно легко сбиться. Что уж говорить о бесконечном процессе! Однако такое возражение не вполне корректно. Когда мы говорим о математическом переборе, мы считаем, что этим процессом занимается идеальный человек или абсолютно надежная машина, которые в принципе не могут допускать ошибок из-за невнимательности. Поэтому если алгоритм не допускает двойных толкований в каждом отдельном случае и теоретически может быть реализован, то предполагают, что его можно осуществить и на практике. Даже в том случае, когда он состоит из бесконечного числа шагов.

Поскольку про любой элемент a_k множества A можно сказать принадлежит ли он подмножеству B или нет, мы сможем пронумеровать все элементы из B. Более того, так как ошибок допускаться не будет, мы не пропустим ни одного номера и никаким номером не воспользуемся дважды.

Остается лишь одна причина, по которой мы можем не использовать всех натуральных чисел в качестве номеров элементов из B. А именно, нам может не хватить элементов множества B. Предположим, что последнее натуральное число, которым мы пронумеровали элемент из B, равно M. Иными словами, последний обнаруженный нами элемент из B оказался $a_K = b_M$, а все элементы a_i с индексом $i > K$ уже не принадлежат подмножеству B. Очевидно, что в таком случае число элементов в B равно ровно M, что противоречит бесконечности этого подмножества.

Итак, мы показали, что наш алгоритм действительно ведет к пересчету всех элементов из B, т. е. B — счетное множество. ■

Теорема. Объединение двух счетных множеств является счетным.

Доказательство. Пусть A и B — счетные множества. Разберем два случая.
1) $A \cap B = \varnothing$. Выписав элементы множеств в две строчки

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \dots\},$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \dots\},$$

можно указать алгоритм пересчета всех выписанных элементов.

a_1 имеет номер 1;
b_1 имеет номер 2;
....
a_n имеет номер $2n - 1$;
b_n имеет номер $2n$;
....

Таким образом, элементы множества A пронумерованы нечетными натуральными числами, а B — четными. Формализуя алгоритм пересчета, можно сказать, что каждому натуральному числу m мы сопоставляем элемент $f(m) \in A \cup B$, где

$$f(m) = \begin{cases} a_{\frac{m+1}{2}}, & \text{если } m \text{ — нечетное число,} \\ b_{\frac{m}{2}}, & \text{если } m \text{ — четное число.} \end{cases}$$

Не составляет труда проверить, что $f : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup B$ является взаимно-однозначным соответствием, так что $A \cup B$ — счетное множество.

2) Предположим теперь, что $A \cap B \neq \varnothing$. Обозначим через B' подмножество в B, равное $B \setminus (A \cap B)$. Тогда справедливы соотношения:

$$A \cup B' = A \cup B, \qquad A \cap B' = \varnothing.$$

Если B' — конечное множество, то $A \cup B = A \cup B'$ и счетно (см. упр. 2 на стр. 72). Если же B' бесконечно, то оно само счетно ввиду предыдущего примера, и $A \cup B = A \cup B'$ равномощно множеству натуральных чисел по предыдущей части доказательства. ■

В качестве последнего примера счетного множества хочется рассмотреть множество рациональных чисел.

Пример 9. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно.

Доказательство. Проведем доказательство в два этапа. Сначала покажем, что множество $\mathbb{Z}^2$ всех дробей $\frac{m}{n}$ с целыми числителем и знаменателем счетно, а потом реализуем рациональные числа как бесконечное подмножество в $\mathbb{Z}^2$.

Для пересчета элементов множества $\mathbb{Z}^2$ каждую дробь $\frac{m}{n}$ удобнее всего изображать точкой на плоскости с координатами (m, n). Алгоритм пересчета приведен на рис. 1. Он заключается в методичном обходе всех точек с целыми координатами по расширяющейся спирали.

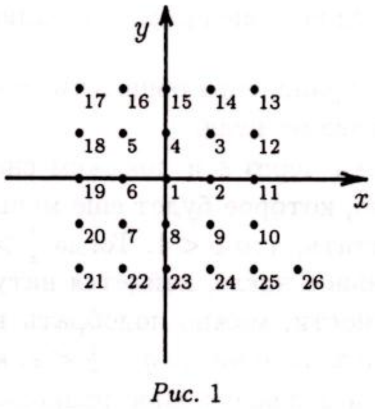

Рис. 1

Нет нужды говорить о том, что следуя алгоритму, мы установим взаимно-однозначное соответствие между множеством $\mathbb{Z}^2$ и натуральными числами, т. е. $\mathbb{Z}^2$ — счетное множество.

Любое рациональное число равно какой-то дроби с целыми показателем и знаменателем. Поэтому его можно отождествить с каким-то элементом из $\mathbb{Z}^2$. К сожалению, рациональному числу соответствует не одна дробь, а бесконечно много. Достаточно посмотреть на следующую цепочку равенств:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \cdots = \frac{n}{2n} = \cdots$$

Но если брать только несократимые дроби, числитель которых — целое число, а знаменатель — натуральное, то мы получим взаимно-однозначное соответствие между такими дробями и рациональными числами. Мы изобразили все дроби на координатной плоскости. Отбросим теперь те из них, вторая координата (знаменатель) которых меньше или равна нулю, а из оставшихся отметим точки с взаимно простыми координатами. Очевидно, множество отмеченных точек совпадет с множеством рациональных чисел. Таким образом мы реализовали рациональные числа как бесконечное подмножество счетного множества. Следовательно, $\mathbb{Q}$ — счетное множество. ∎

Если рациональные числа изображать точками с целыми координатами, то огромность множества $\mathbb{Q}$ как-то теряется и разобранный нами пример не очень впечатляет. А Вы попытайтесь отметить все рациональные точки на вещественной прямой... Это сделать практически невозможно. Если все же постараться и изобразить достаточно много рациональных чисел на отрезке $[0,1]$, то можно увидеть, что наши пометки заняли весь отрезок, хотя, как известно, на нем есть еще и иррациональные числа. Это происходит из-за того, что как бы ни был тонок Ваш карандаш (или ручка), его острие имеет какую-то толщину, пусть и очень маленькую. Поэтому, ставя им точку на отрезке, Вы отмечаете не одно рациональное число, а сразу бесконечно много, как ни парадоксально это звучит. Вы, конечно, можете не поверить такому заявлению. И будете совершенно правы. Любое математическое высказывание (а в идеале не только математическое) необходимо доказывать. Сделаем это.

Пример 10. В отрезке $[\alpha, \beta]$ сколь угодно малой длины, лежащем на вещественной прямой, содержится бесконечно много рациональных чисел.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что данный нам отрезок целиком лежит справа от нуля.

Обозначим длину отрезка через ε и докажем сначала, что найдется положительное рациональное число, которое будет еще меньше. Если $\varepsilon \geq 1$, то $q = \frac{1}{2}$ нас вполне устроит. Будем считать, что $\varepsilon < 1$. Тогда $\frac{1}{\varepsilon} > 1$. С другой стороны, какое бы мы ни взяли положительное число, найдется натуральное число, которое окажется еще больше. В частности, можно подобрать натуральное $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Оно нам позволяет построить рациональное число $q = \frac{1}{n} < \varepsilon$, которое мы искали.

Пусть $p = \frac{q}{3} = \frac{1}{3n}$, тогда положительное рациональное число p удовлетворяет неравенству: $p < \frac{\varepsilon}{3}$. Разберем два возможных случая: $p \geq \alpha$ и $p < \alpha$.

Если $p \geq \alpha$, то как p, так и $2p$ принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$. Действительно, предположение о том, что хотя бы $2p$ вылезет за границы нашего отрезка, приводит к цепочке неравенств:

$$2p > \beta > \beta - \alpha = \varepsilon,$$

что противоречит выбору числа p: $2p < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Таким образом, если $p > \alpha$, на нашем отрезке можно найти по крайней мере два рациональных числа: p и $2p$.

Пусть теперь $p < \alpha$. Так как $3np = 1$, то найдется такое натуральное число k, что $kp \geq \alpha$. Обозначим через k_0 наименьшее из натуральных чисел, обладающих таким свойством, т. е.

$$k_0 p \geq \alpha, \qquad (k_0 - 1)p < \alpha.$$

Покажем, что рациональные числа $k_0 p$ и $(k_0+1)p$ лежат на отрезке $[\alpha, \beta]$. Поскольку

$(k_0+1)p > k_0p > \alpha$, то для этого достаточно проверить, что $(k_0+1)p < \beta$.

$$(k_0-1)p < \alpha \ \Leftrightarrow \ (k_0+1)p < \alpha + 2p < \alpha + \frac{2}{3}\varepsilon < \alpha + (\beta - \alpha) = \beta.$$

Итак, в обоих возможных случаях мы указали два рациональных числа на отрезке $[\alpha, \beta]$. Обозначим их как q_1 и q_2, считая, что $q_1 < q_2$. А теперь осталось самое простое: предъявить бесконечно много рациональных чисел, лежащих между q_1 и q_2.

Для любого натурального k, большего 2, обозначим через q_k рациональное число $q_1 + \frac{q_2-q_1}{3}$. Очевидно, что

$$q_1 < q_k = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{3} < q_1 + (q_2 - q_1) = q_2,$$

т. е. каждое из q_k лежит между q_1 и q_2, а значит, и на отрезке $[\alpha, \beta]$. Осталось заметить, что чисел q_k так же много, как и натуральных, а именно, счетное множество. ■

Мы так долго и скрупулезно занимались счетными множествами, что могло создаться впечатление: других «бесконечностей» нет. Это, конечно же, не так. Просто на счетных множествах гораздо удобнее демонстрировать принципиальные различия между конечными и бесконечными множествами. Приведем пример множества, мощность которого больше мощности натуральных чисел.

Пример 11. Множество вещественных чисел, лежащих на отрезке $[0, 1]$, несчетно.

Доказательство. Мы воспроизведем здесь доказательство, принадлежащее автору теории сравнений множеств, Георгу Кантору. Он воспользовался методом «от противного».

Прежде всего напомним, что любое вещественное число A из рассматриваемого отрезка однозначно представляется бесконечной десятичной дробью

$$A = 0, a_1a_2a_3a_4a_5\ldots,$$

где каждая из a_i — какая-то цифра. Даже 1 записывается как

$$0,99999\ldots = 0,(9) = 1.$$

Можно возразить, что некоторые рациональные числа представляются конечными дробями. Но это не большая помеха. Недостающие разряды можно заполнить нулями. А если Вас это не устраивает, выбросьте их из отрезка. Там все равно останется очень много чисел. Гораздо больше, чем счетное множество.

Итак, предположим, что множество вещественных чисел на $[0, 1]$ все же счетно. То есть, мы как-то смогли их все перенумеровать. В таком случае выпишем их в столбик:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}a_{17}a_{18}\ldots \\ A_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}a_{27}a_{28}\ldots \\ A_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}a_{37}a_{38}\ldots \\ A_4 &= 0, a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}a_{47}a_{48}\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

По нашему предположению в этой бесконечной таблице выписаны все интересующие нас числа. Покажем, что по крайней мере одно мы все-таки пропустили. Казалось бы, подумаешь — одно число. Добавить его, да и дело с концом. Ну хорошо, добавьте. Можете дописать и не одно, а все, что отсутствуют пока в этом списке. Но коль скоро мы предполагаем, что наше множество счетно, то должна быть такая таблица, которая содержит все его элементы. Вот ее-то мы и возьмем, и если все же отыщем неучтенное число, то все отговорки будут уже лишними: придя к противоречию с предположением, мы докажем несчетность точек на единичном отрезке.

Приступим к построению числа $B = 0, b_1b_2b_3b_4\ldots$, которого нет в таблице. Сделаем это с помощью математической индукции. Прежде всего заметим, что какие бы мы цифры ни написали вместо b_i-ых, получится число из $[0,1]$. В качестве первой значащей цифры b_1 возьмем любую, неравную a_{11}. Например, $a_{11}+1$ (если $a_{11} \neq 9$) или $a_{11}-1$ (если $a_{11} = 9$). Несмотря на остальные цифры числа B, можно утверждать, что $B \neq A_1$, так как у них первые же цифры после запятой разные. Предположим теперь, что нам удалось подобрать первые n цифр $b_1, b_2, \ldots, b_n$ так, что вне зависимости от остальных знаков числа B, мы уже имеем неравенства: $B \neq A_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Выберем следующую цифру, руководствуясь правилом:

$$b_{n+1} = \begin{cases} a_{n+1,n+1}+1, & \text{если } a_{n+1,n+1} \neq 9, \\ a_{n+1,n+1}-1, & \text{если } a_{n+1,n+1} = 9. \end{cases}$$

Число A_{n+1} отличается от того, которое мы строим, в $(n+1)$-ом знаке. Стало быть, какие бы мы дальше цифры ни дописали после b_{n+1}, все равно $B \neq A_{n+1}$. Продолжая этот процесс и далее, мы естественно построим число B, принадлежащее единичному отрезку, но не равное ни одному числу из таблицы. ■

Упражнения

1. Покажите, что множество четных натуральных чисел равномощно множеству нечетных натуральных чисел.
2. Покажите, что объединение конечного и счетного множества является счетным.
3. Покажите, что объединение любого конечного числа счетных множеств счетно.
4. Пусть $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_n, \dots$ — бесконечная последовательность счетных множеств. Докажите, что множество A, равное объединению всех A_i-ых, является счетным.
5. Предположим, что четыре непересекающиеся множества A, B, C и D удовлетворяют соотношениям:
$$A \asymp B, \qquad C \asymp D.$$
Покажите, что в таком случае $A \cup C$ равномощно $B \cup D$.
6. Покажите, что в любом бесконечном множестве можно выделить счетное подмножество.
7. Пусть A — бесконечное, а B — конечное множества, причем $A \cap B = \varnothing$. Покажите, что $A \cup B$ равномощно множеству A. Иными словами, от добавления к бесконечному множеству любого конечного числа элементов, его мощность не меняется.

   Указание: выделите в множестве A счетное подмножество C и представьте A как объединение непересекающихся подмножеств: $A' = A \setminus C$ и C. Покажите, что $C' = C \cup B$ счетно и установите взаимно-однозначное соответствие между $A = A' \cup C$ и $A \cup B = A' \cup C'$.
8. Покажите, что множество линейных многочленов с целыми коэффициентами счетно.
9. Докажите, что множество всех многочленов с целыми коэффициентами счетно.
10. Вещественное число называется ***алгебраическим***, если оно является корнем какого-то многочлена с целыми коэффициентами. Покажите, что множество всех алгебраических чисел счетно.
11. Опираясь на предыдущую задачу, повторите результат Кантора, который доказал, что существуют трансцендентные числа, т. е. вещественные числа, которые не алгебраичны. В частности, их нельзя записать, используя целые числа и радикалы всевозможных степеней.
12. Покажите, что любые два отрезка равномощны (здесь и далее мы будем отождествлять отрезки, интервалы, двумерные фигуры и трехмерные тела с множеством точек, из которых они состоят).
13. Покажите, что интервал равномощен прямой.
14. Покажите, что любой интервал равномощен любому отрезку.

15. Покажите, что единичный отрезок равномощен единичным квадрату и кубу.

Указание: вещественному числу $0, a_1a_2a_3\ldots$ сопоставьте точку с координатами (x, y), где

$$x = 0, a_1a_3a_5a_7\ldots a_{2n-1}\ldots,$$

а

$$y = 0, a_2a_4a_6a_8\ldots a_{2n}\ldots.$$

Сергей Алексеевич Кулешов,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Военного
Авиационно-Технического Университета

email: kuleshov@miem.edu.ru

Учащимся и учителям средней школы

О логической структуре математических определений

Тимофеева И. Л.

В статье проведен анализ родо-видовых определений (такие определения составляют подавляющее большинство в курсе математики средней школы) средствами математической логики. По результатам этого анализа даны некоторые рекомендации по выбору логической формы определения.

В методической литературе неоднократно поднимался вопрос о логической структуре определений (см. [1], [2]).

Для выявления логической структуры математических предложений удобно использовать логическую символику. При этом иногда возникают проблемы, обусловленные тем, что аппарат математической логики используется не вполне корректно.

Часто некорректное использование логической символики заключается в нарушении синтаксических правил символического логического языка (языка логики предикатов — ЯЛП), в то время как использование такого языка обязывает учитывать его синтаксис. Так, в результате нарушения синтаксических правил иногда символы кванторов можно увидеть в конце предложения. Часто неправильно расставляются скобки, а ведь именно скобки обеспечивают возможность однозначно прочитать и осмыслить символическую запись. Встречаются и другие недостатки синтаксического характера, но это предмет отдельного разговора.

Наряду с указанными возникают, разумеется, проблемы более серьезного характера. Именно такие, достаточно нетривиальные проблемы возникают при попытке выявить логическую структуру определения с помощью логической символики.

Ограничим круг рассмотрения только так называемыми *определениями через род и видовое отличие*. Примером служит следующее определение: «ромбом называется параллелограмм, две смежные стороны которого равны» или «параллелограмм называется ромбом, если две его смежные стороны стороны равны», а точнее, «параллелограмм называется ромбом в том и только том случае, когда две его смежные стороны равны».

Прежде чем обсуждать логическую структуру определения, уточним, что представляет собой определение (с точки зрения логики).

Сначала отметим, что определение не является высказыванием. Математическое определение представляет собой повествовательное предложение русского математического языка, о котором нет смысла говорить, что оно истинно или ложно. Определение представляет собой некоторое соглашение (договоренность) о том, чтобы объекты из известного множества, удовлетворяющие некоторому условию, называть каким-то новым именем. Другими словами, в определении вводится новый термин. Итак, определение — это некоторая договоренность, соглашение, поэтому нет смысла ставить вопрос о его истинности или ложности. О том, что мы имеем дело именно с определением, свидетельствует наличие слова «называется» или аналогичного по смыслу словосочетания «будем называть» и т. п.

(Иногда одни и те же математические объекты называют по-разному. Например, наряду с термином *действительное число* используется как синоним термин *вещественное число* для тех же самых объектов. Логический термин *тавтология* синонимичен термину *тождественно истинная формула* языка логики высказываний. Иногда, напротив, один и тот же термин разные авторы используют для несовпадающих понятий, т. е. для понятий, имеющих разные объемы. Например, *непрерывная функция* по Д. А. Райкову — это не то же самое, что непрерывная функция по Л. Д. Кудрявцеву. Одним словом, это дело договоренности.)

Теперь поговорим о логической структуре определений (через род и видовое отличие). Как можно выявить логическую структуру математического предложения? Для этого обычно используется так называемый метод формализации — основной метод математической логики. Поясним вкратце, в чем он заключается. В математической логике вводятся (строятся) различные формальные логические языки. Во множестве всех слов в алфавите каждого такого языка выделяется некоторый класс осмысленных слов, называемых *формулами* этого языка. Этот класс точно описывается с помощью жестких синтаксических правил.

Достаточно богатые формальные языки обладают выразительными возможностями, позволяющими всякое математическое предложение записать на этом языке в виде формулы, и обратно, всякую формулу этого языка проинтерпретировать, истолковать, прочитать как некоторое математическое предложение (с переменными или без них). Таким языком является, например, язык логики предикатов или его фрагменты. Переведя математическое предложение на язык формул, т. е. записав его в виде формулы этого языка, можно исследовать структуру этой формулы и, тем самым, структуру самого предложения. Обычно, пользуясь средствами этого языка вне математической логики, говорят просто о записи предложения с помощью логических символов. Очень часто на практике происходит частичная формализация, когда лишь части предложения заменяются какими-то логическими символами, а сами эти символы используются для сокращения записи, т. е. как стенографические. Такое использование логических символов не всегда бывает удачным и оправданным. Другое дело, если логические символы используются с целью выявления логической структуры предложения, т. е. когда это вполне оправдано.

Именно таким образом, с помощью средств логического языка, неоднократно предпринимались попытки исследования логической структуры определений.

Так, В. Г. Болтянский [1], формализуя определения через род и видовое отличие, в качестве универсальной формы символической записи таких определений предлагает следующую форму:

$$(\forall\, x \in M)\ (A(x) \overset{def}{\longleftrightarrow} B(x)), \tag{1}$$

где «принадлежность множеству M является родовым понятием..., предикат $A(x)$ вводит новый термин, а предикат $B(x)$ содержит перечисление видовых отличий».

Заметим, что на самом деле в статье [1] предлагается несколько другая форма, а именно:

$$(\forall\, x \in M) A(x) \overset{def}{\longleftrightarrow} B(x). \tag{1'}$$

Однако синтаксис формального логического языка в данном случае требует заключить эквиваленцию $A(x) \overset{def}{\longleftrightarrow} B(x)$ в скобки, указывающие область действия квантора общности:

$$(\forall\, x \in M)\ (A(x) \overset{def}{\longleftrightarrow} B(x)).$$

При отсутствии этих скобок, согласно общепринятым соглашениям, в форме (1′) квантор общности действует только на $A(x)$, т. е. подразумевается другое расположение скобок:

$$((\forall\, x \in M) A(x)) \overset{def}{\longleftrightarrow} B(x).$$

Автор [1] явно имел в виду другое, а именно то, что выражает запись (1). Даже если автор не придерживается общепринятых соглашений о скобках, их, по-видимому, следует поставить, по крайней мере, во избежание разночтения записи (1′). В дальнейшем будем рассматривать именно запись (1).

Далее, в записи (1) используется так называемый ограниченный квантор, т. е. квантор, ограниченный некоторым условием. В данном случае это условие «$(x \in M)$». В математической логике символическая запись вида $(\forall\, x \in M)P(x)$, где $P(x)$ — предложение с переменной x, т. е. запись с использованием ограниченного квантора, означает в точности следующее:

$$\forall\, x(x \in M \longrightarrow P(x)).$$

Таким образом, в нашем случае с точки зрения математической логики форма (1) понимается следующим образом:

$$\forall x(x \in M \longrightarrow (A(x) \overset{def}{\longleftrightarrow} B(x))). \tag{2}$$

Такая форма записи выявляет следующий нежелательный момент. Запись (2) означает, что если объект x принадлежит множеству M ($x \in M$), то мы договариваемся считать $A(x)$ истинным тогда и только тогда, когда выполняется условие $B(x)$. При этом не исключено, что, если объект x не принадлежит множеству M ($x \notin M$), то, возможно, имеется другая договоренность о том, что $A(x)$ истинно тогда и только тогда, когда выполняется некоторое условие $C(x)$, может быть, отличное от условия $B(x)$, а может быть, совпадающее с ним, т.е.

$$\forall x(x \notin M \longrightarrow (A(x) \overset{def}{\longleftrightarrow} C(x))).$$

Другими словами, форма (1) не исключает возможность еще одной договоренности. А именно, возможна договоренность о том, что среди элементов, не принадлежащих множеству M, также выделяется класс объектов, удовлетворяющих некоторому условию $C(x)$ (может быть, другому, а, может быть, и прежнему), элементам которого дается то же самое имя.

Другой вариант формализации определений предлагает М. Б. Волович [2]:

$$A(x) \overset{def}{\longleftrightarrow} (x \in M) \& B(x). \tag{3'}$$

Для того чтобы сопоставить эту форму с формой (2), вместо формы (3′) рассмотрим следующий вариант, который является замыканием формы (3′) с помощью квантора общности:

$$\forall x (A(x) \overset{def}{\longleftrightarrow} (x \in M) \& B(x)). \tag{3}$$

Итак, попробуем проанализировать и сравнить формы (2) и (3).

Эта форма может быть прочитана следующим образом: «какой бы мы ни взяли объект, будем считать, что $A(x)$ (имеет место) тогда и только тогда, когда x удовлетворяет двум условиям: $x \in M$ и $B(x)$».

Прежде всего отметим, что если опустить буквы *def* над символом $\longleftrightarrow$ в формах (2) и (3), то получим формулы, которые можно рассматривать как формулы языка логики предикатов (среди предикатных символов которого содержится символ $\in$). При этом оказывается (вопреки мнению автора [2]), что эти две формулы логически не равносильны (не эквивалентны) — точнее, что (3) сильнее, чем (2). Обоснуем сказанное. С этой целью покажем, что из следующих двух формул:

$$\forall x (x \in M \longrightarrow (A(x) \longleftrightarrow B(x))) \tag{2a}$$

и

$$\forall x (A(x) \longleftrightarrow (x \in M) \& B(x)) \tag{3a}$$

вторая сильнее первой.

Проведем неформальные рассуждения. С одной стороны, покажем, что из формулы (3а) семантически следует формула (2а). Пусть M — произвольное множество, $A(x)$ и $B(x)$ — произвольные предложения с переменными (предикаты). Покажем, что из истинности (3а) следует истинность (2а). Действительно, при условии, что (3а) истинно, для всякого x из M истинность $A(x)$ влечет, очевидно, истинность $B(x)$, а истинность $B(x)$, в свою очередь, влечет, истинность $A(x)$. С другой стороны, покажем, что формула (3а) не является следствием формулы (2а). Действительно если взять в качестве M множество всех параллелограммов, в качестве $A(x)$ и $B(x)$ — один и тот же предикат «диагонали четырехугольников взаимно перпендикулярны», то предложение, соответствующее (2а), будет истинным, а предложение, соответствующее (3а), — ложным.

Этот же результат можно получить с помощью цепочки равносильных преобразований, выявляющей неравносильность следующих двух формул (а следовательно, и неравносильность их замыканий):

$$x \in M \longrightarrow (A(x) \longleftrightarrow B(x)) \tag{2б}$$

и

$$A(x) \longleftrightarrow (x \in M) \& B(x)) \tag{3б}$$

Сначала преобразуем формулу (2б):

$$\begin{gathered} x \in M \longrightarrow (A(x) \longleftrightarrow B(x)) \equiv \\ x \in M \longrightarrow (A(x) \longrightarrow B(x)) \& (B(x) \longrightarrow A(x)) \equiv \\ (x \in M \longrightarrow (A(x) \longrightarrow (B(x))) \& (x \in M \longrightarrow (B(x) \longrightarrow A(x))) \equiv \\ (A(x) \longrightarrow \underline{(x \in M \longrightarrow B(x))}) \& (x \in M \longrightarrow (B(x) \longrightarrow A(x))). \end{gathered}$$

Теперь преобразуем формулу (3б):

$$\begin{gathered} A(x) \longleftrightarrow (x \in M) \& B(x) \equiv \\ (A(x) \longrightarrow (x \in M) \& B(x)) \& ((x \in M) \& B(x) \longrightarrow A(x)) \equiv \\ (A(x) \longrightarrow \underline{(x \in M) \& B(x)}) \& (x \in M \longrightarrow (B(x) \longrightarrow A(x))). \end{gathered}$$

В результате равносильных преобразований формул (2б) и (3б) получены две формулы, неравносильность которых очевидна, поскольку не равносильны их подчеркнутые подформулы $\underline{x \in M \longrightarrow B(x)}$ и $\underline{(x \in M) \& B(x)}$. Следовательно, не являются равносильными и формулы (2б) и (3б). При этом, поскольку формула $\underline{(x \in M) \& B(x)}$ сильнее, чем формула $\underline{x \in M \longrightarrow B(x)}$, формула (3 б) сильнее, чем формула (2 б).

Этот факт на первый взгляд может показаться неожиданным. Во всяком случае, представляются вполне естественными следующие два вопроса.

1) При каких условиях и в чем проявляется на практике эта неравносильность?

2) Существуют ли доводы в пользу какой-либо одной из этих форм по сравнению с другой?

Прежде всего заметим, что сравниваемые формы (2) и (3) не являются формулами ЯЛП, поскольку в них используется оператор $\stackrel{def}{\longleftrightarrow}$, выходящий за рамки указанного языка. Это вполне естественно, поскольку, как уже отмечалось ранее, определение является не высказыванием, а некоторым соглашением. В связи с этим, оно не может быть записано в виде формулы ЯЛП. Впрочем, формы (2) и (3) можно рассматривать как формулы некоторого метаязыка. Однако мы по-прежнему будем называть их ***формами***. Остановимся еще на одном моменте. Авторы [1] и [2] считают (называют) $A(x)$ и $B(x)$ предикатами. Форма записи (синтаксис) действительно располагает к этому. Однако, по существу, в контексте определения дело обстоит иначе.

Под одноместным предикатом обычно понимают предложение с переменной, которое превращается в высказывание — истинное или ложное, если вместо x подставить какой-либо объект из заданной области. В определении же вводится новый термин. Пока он не введен, мы не можем говорить, истинно или ложно предложение $A(a)$ для того или иного объекта a из этой области. До тех пор, пока мы еще не дали определение ромба, а только находимся в процессе его формулирования, оценить, истинно или ложно предложение «$ABCD$ — ромб» для того или иного конкретного параллелограмма, мы не можем. Формулируя определение, мы как раз и договариваемся предложение $A(x)$ считать истинным при тех и только тех значениях x, которые удовлетворяют указанному известному условию $B(x)$. Вместе с тем $B(x)$ как раз является предикатом.

Таким образом, по-видимому, изначально в контексте определения нельзя предложение с переменной x, записываемое в виде $A(x)$, расценивать как предикат. После того, как определение сформулировано, $A(x)$ выступает как обозначение того предложения с переменной, в котором содержится новый термин (имя) и которое лишь *впоследствии* может рассматриваться как предикат, равносильный предикату $B(x)$. Можно считать, что мы договариваемся об использовании нового имени для старого известного предиката.

Кроме того, стоит обратить внимание на следующий момент. В математической логике под одноместным *предикатом на множестве* E понимают функцию, отображающую множество E во множество $\{\text{И}, \text{Л}\}$: $E \longrightarrow \{\text{И}, \text{Л}\}$. Таким образом, задать предикат — это значит, кроме всего прочего, задать множество E — область определения этой функции. Обычно одноместные предикаты задаются с помощью предложения с переменной и указания области изменения этой переменной. В практике преподавания, в частности, в школе, разумно под одноместным предикатом понимать именно предложение с переменной вместе с указанием области изменения этой переменной, которое становится высказыванием, если переменной придавать то или иное значение из этой области.

Например, «x — четно», где x — натуральное (или целое); «x — параллелограмм», где x — четырехугольник; «x — ромб», где x — параллелограмм и т.п. При этом «$x > 0$, где x — целое» и «$x > 0$, где x —действительное» — различные предикаты.

С учетом сказанного, рассматривая $B(x)$ как предикат, мы обязаны изначально указать область изменения переменной x. В противном случае непонятно, о каком предикате идет речь, т. е. что такое $B(x)$.

В связи с этим в формах (2) и (3) возможны два способа уточнения, касающиеся области изменения переменной x.

При первом уточнении можно считать, что x — переменная по некоторому множеству E, более широкому, чем M. Это, разумеется, необходимо специально оговорить. В этом случае, формулируя определения ромба в соответствии с формой (2), получаем следующее: «Всякий четырехугольник, являющийся параллелограммом, называется ромбом...». Формулируя определения ромба в соответствии с формой (3), получаем: «Всякий четырехугольник будем называть ромбом в том и только том случае, когда он является параллелограммом и...».

В этих формулировках используется, кроме ближайшего родового понятия *параллелограмма*, еще одно более далекое и широкое родовое понятие *четырехугольника*. Поэтому такие формулировки громоздки и далеки от реальной практики формулирования определений.

Далее, именно при рассмотрении переменной x как переменной по более широкому, чем M, множеству, проявляется неравносильность форм (2) и (3). При рассмотрении формы (2) возникает следующая проблема. В этом случае предикат $B(x)$ является предикатом на множестве E, в предложении $A(x)$ переменная x также принимает значения из E, а само определение можно рассматривать, как определение нового предиката $A(x)$ на множестве E. Но в этом случае совершенно ясно, что форма (2) содержит недостаточно информации о том, когда считать $A(x)$ истинным, а когда — ложным, если x не принадлежит M. Действительно, если элемент x множества E принадлежит множеству M ($x \in M$), то ясно, в каких случаях мы договариваемся $A(x)$ считать истинным, а в каких — ложным (а именно, согласно форме (2), $A(x)$ считаем (договариваемся считать) истинным тогда и только тогда, когда $B(x)$ истинно). Если же элемент x множества E не принадлежит множеству M ($x \notin M$), то возникает неясность (неопределенность) по поводу того, для каких x предложению $A(x)$ приписывать значение *истина*, а для каких *ложь*. Возникает она в связи с тем, что в форме (2) рассмотрен только случай, когда $x \in M$, и не рассмотрен случай, когда $x \notin M$. Таким образом, возникающая недоопределенность свидетельствует о том, что форму (2) нельзя рассматривать в этом случае как корректное определение. Требуется доопределить $A(x)$ на всем множестве E.

Поясним сказанное на конкретном примере и с помощью иллюстрации (рис. 1). Пусть M — множество натуральных чисел, а E — множество целых чисел, т. е. более широкое, чем M, множество. Определение четного числа обычно формулируется следующим образом: «Натуральное число называется четным, если оно делится на 2». Более точной является формулировка: «Натуральное число называется четным в том и только в том случае, когда оно делится на 2». Символически это записывается так:

$$\forall x(x \in \mathbb{N} \longrightarrow ((x\text{— }\textit{четно}) \overset{def}{\longleftrightarrow} 2|x)).$$

Если x рассматривать как переменную по множеству целых чисел, то имеем следующую, более точную формулировку, соответствующую форме (2): «Целое число, если оно натуральное, называется четным тогда и только тогда, когда оно делится на 2». Такая формулировка на исключает, что какие-то целые числа, не являющиеся натуральными, также называют четными. Более того, именно так и обстоит дело. Поэтому совершенно ясно, что такое предложение не может служить определением. Неопределенность формально может быть устранена путем добавления второй части: «Если целое x не принадлежит $\mathbb{N}$, то оно также называется четным тогда и только тогда, когда делится 2». Разумеется, эти две части естественным образом можно соединить в одну фразу: «Целое число называется четным, если оно делится на 2». Такое соединение в данном случае возможно, поскольку оба определяющих условия для $x \in M$ и для $x \notin M$ совпадают. Теоретически эти условия могут быть различными.

Рассмотренная ситуация проиллюстрирована на рис. 1 и 2.

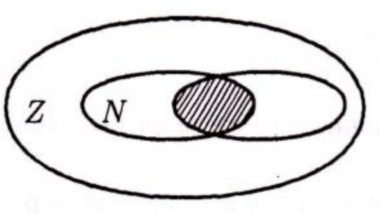

Рис. 1

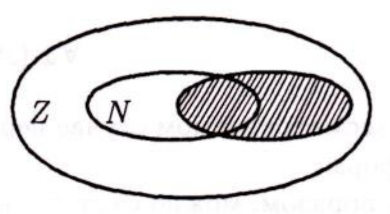

Рис. 2

На рисунках в качестве множества E выступает множество целых чисел $\mathbb{Z}$, в качестве множества M — множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, в качестве предиката $B(x)$ — предикат «x делится на 2». На рис. 1 заштриховано множество натуральных чисел, делящихся на 2. На рис. 2 заштриховано множество целых чисел, делящихся на 2.

Подобные осложнения в случае формы (3) не возникают. Таким образом, если x рассматривать как переменную по множеству более широкому, чем M, то, по-видимому, следует отдать предпочтение форме (3).

Кроме того, заметим, что при рассмотрении x как переменной по более широкому, чем M, множеству, наиболее естественным вариантом доопределения формы (2) является следующий: «если $x \notin M$, считаем $A(x)$ *ложным*». В этом случае форма (2) должна быть заменена на такую форму:

$$\forall x[(x \in M \longrightarrow (A(x) \overset{def}{\longleftrightarrow} B(x)))\&(x \notin M \longrightarrow \neg A(x))]. \tag{4}$$

Можно доказать, что при этом форма (4) равносильна форме (3), что также свидетельствует в пользу последней.

Однако еще раз отметим, что рассмотрение x как переменной по множеству, более широкому, чем M, мало соответствует реальной практике.

Рассмотрим другой вариант уточнения области изменения переменной x. Будем теперь рассматривать x как переменную по множеству M. Именно это, по-видимому, имел в виду автор [1], предлагая запись (1′), явно включая в нее описание области изменения $x : x \in M$. Однако в этом случае можно это условие не включать в саму формальную запись. Действительно, если считать, что x принимает значения из M, то предложение «$x \in M$» принимает значение «истина» для любого допустимого x. Это означает, что форма (2)

$$\forall x(x \in M \longrightarrow (A(x) \overset{def}{\longleftrightarrow} B(x)))$$

равносильна форме

$$\forall x(A(x) \overset{def}{\longleftrightarrow} B(x)). \tag{5}$$

Если взять за ориентир форму (3)

$$\forall x(A(x) \overset{def}{\longleftrightarrow} B(x)\&(x \in M)),$$

то опять должна быть указана область изменения переменной x. В форме (3) такое указание отсутствует вовсе. Если эта область — множество M, то форма (3) эквивалентна все той же форме

$$\forall x\ (A(x) \overset{def}{\longleftrightarrow} B(x)).$$

Итак, в рассматриваемом случае неравносильные прежде формы «перешли» в одну и ту же форму.

Таким образом, можно считать, например, что общая форма определений представляет собой эквиваленцию вида

$$A(x) \xleftrightarrow{def} B(x) \tag{6}$$

вместе с указанием множества M — области изменения переменной x, или же эквиваленцию с квантором общности:

$$\forall\, x\ (A(x) \xleftrightarrow{def} B(x)).$$

Здесь правая часть эквиваленции $B(x)$ представляет собой предикат, известное свойство элементов (объектов) из M. Левая же часть эквиваленции $A(x)$ представляет собой некоторое предложение с переменной, в котором фигурирует новый, вводимый этим определением термин. Само определение представляет собой договоренность о том, что объектам из множества M, удовлетворяющим условию $B(x)$, и только им дается новое имя путем введения нового термина. Другими словами, определение — это договоренность (соглашение) о том, для каких x из M считать $A(x)$ истинным.

Можно считать, что при определении из известного множества M с помощью этого определения выделяется какое-то его подмножество и дается имя элементам этого подмножества. Можно также говорить о том, что определяется какое-то свойство (предикат), например, свойство «быть параллелограммом» на множестве четырехугольников. Аналогичная ситуация возникает, когда определяется некоторое бинарное отношение, например отношение порядка на числовом множестве, отношение параллельности на множестве всех прямых плоскости или пространства и т.п. Тогда вместо указанной формы (5) можно записать аналогичную форму с двумя переменными:

$$\forall\, x\, \forall\, y\ (A(x, y) \xleftrightarrow{def} B(x, y)),$$

где x и y — переменные по некоторому заданному множеству M.

В то же время можно считать формулу

$$\forall x (A(x) \xleftrightarrow{def} B(x))$$

в некотором смысле универсальной, рассматривая x как переменную по множеству M, или M^2, или M^3 и т.д. в зависимости от вместимости определяемого отношения (предиката).

Наконец, можно добавить, что при введении новых предикатных символов в формальных теориях (теориях первого порядка) фактически используются формулы вида $\forall\, x\ (A(x) \longleftrightarrow B(x))$.

Какие же выводы можно сделать в результате проведенного анализа?

Прежде всего, говоря о предикатах, необходимо указывать множества, на которых они задаются. Если под предикатом понимать предложение с переменной (переменными), то необходимо указывать область изменения переменной (переменных). Разумеется, это относится и к формализации математических определений.

При сопоставлении форм (2) и (3), формализующих математические определения через род и видовое отличие, рассмотрены два возможных варианта уточнения области изменения переменной x.

При первом варианте переменная x рассматривается как переменная по некоторому более широкому множеству, чем M. При этом формы (2) и (3) не являются равносильными. В этом случае проявляются некоторые недостатки формы (2), а сама форма (2) требует дополнения (корректировки). В то же время форма (3) в этом случае является корректной, а следовательно, имеет определенное преимущество по сравнению с формой (2).

При другом варианте переменная xрассматривается как переменная по множеству M. В этом случае обе формы (2) и (3) оказываются равносильными более простой форме (5), а, следовательно и равносильными друг другу. Таким образом, в этом случае обе формы, хотя и приемлемы, но имеют некоторые «излишества» и могут быть упрощены.

При рассмотрении переменной, используемой в формализации определения, как переменной по множеству M, желая (по методическим соображениям) явно отразить это в самой записи, можно «обременить» ее условием «$x \in M$». При этом допустимо использовать как форму (2), так и (3).

В любом случае форма (3) имеет определенные преимущества по сравнению с формой (2), поскольку она корректна при обоих вариантах уточнения области изменения переменной. Поэтому, даже если допускать небрежность, не указывая область изменения переменной, это не приводит к осложнениям при обоих вариантах уточнения, если пользоваться формой (3).

Кроме теоретических выводов, обоснованных в данной статье, имеются чисто практические доводы в пользу применения в обучении формы (3), приводимые в работе [2].

Возникает вопрос — можно ли приведенные выше соображения применить в том случае, когда речь идет о содержательных определениях, например, можно ли отдать предпочтение какой-то одной из двух следующих формулировок определений:

а) ромбом называется параллелограмм, две смежные стороны которого равны;

б) параллелограмм называется ромбом, если две его смежные стороны равны.

Первая формулировка соответствует форме (3), а вторая — форме (2). Неформальные соображения аналогичные тем, которые были проведены для сравнения форм (3) и (2), позволяют отдать предпочтение первой из этих двух формулировок, т. е. формулировке (а). Заметим, что при этом не обсуждаются традиции и соображения стилистического характера.

Литература

[1] *В.Г. Болтянский*. Использование логической символики в работе с определениями. МШ, 1973, № 5, с.45-50.

[2] *М.Б. Волович*. Какую работу нужно организовать для успешного усвоения определений?// Наука обучать. / Технология преподавания математике. М.: LINKA-PRESS, 1995. — 280 с.

Тимофеева Ирина Леонидовна,
кандидат педагогических наук,
доцент кафедры математического анализа МПГУ.
e-mail: irina-logika@mail.ru
dbljack@kodak.com

Образовательные инициативы

Задачи Путнамовских олимпиад

А. Ю. Эвнин

В статье содержатся сведения о традиционной олимпиаде студентов США и Канады. В настоящем номере приводятся условия задач за последние 10 лет. Решения задач олимпиады 1996 и 1997 гг., написанные А. Ю. Эвниным, будут опубликованы в следующем номере.

Главным математическим конкурсом студентов США и Канады является William Lowell Putnam Mathematical Competition — Путнамовская олимпиада. 1 декабря 2001 г. она проводилась 62-й раз. В России эта олимпиада малоизвестна. Первая известная нам публикация о ней — статья: Е.М. Бронштейн. *Математические соревнования имени Уильяма Лоуэлла Путнама.*//Математическое просвещение, сер.3, вып. 5, 2001. — С. 192–204.

Приведем дополнительные сведения о Путнамовской олимпиаде, найденные в в Интернете.

Известный американский математик Уильям Путнам опубликовал в 1921 г. в «Гарвардском образовательном журнале» статью, в которой призвал к организации интеллектуальных командных соревнований между студентами различных университетов, будучи убежденным в том, что подобное соперничество чрезвычайно благотворно. Его жена, Элизабет, учредила в 1927 г. (после смерти Путнама) фонд для организации соревнований между высшими учебными заведениями. Первые соревнования проводились между двумя институтами. Современную форму Путнамовская олимпиада приняла в 1938 г., когда ее учредителем стала Математическая Ассоциация Америки.

По традиции олимпиада проводится ежегодно в первую субботу декабря. Олимпиада проходит в течение двух трехчасовых сессий (между ними — двухчасовой перерыв на обед). На сессиях предлагается для решения по 6 задач. Решение каждой задачи оценивается по 10-балльной системе. Победители обычно набирают около 100 очков, а попавшие в сотню лучших — более 40 очков.

Приведем некоторые статистические сведения об олимпиаде 2000 г. В ней участвовало 2818 студентов из 434 колледжей и университетов США и Канады. Победитель набрал 96 очков, а три четверти участников не решили ни одной задачи.

Итоги соревнования между вузами определяются по сумме мест трех лучших участников от каждого вуза (разумеется, чем меньше эта сумма, тем лучше). Призами награждаются члены пяти лучших команд (они получают соответственно по

1000, 800, 600, 400 и 200 долларов), а также математические факультеты их вузов (соответственно 25, 20, 15, 10 и 5 тысяч долларов). Отмечаются денежными премиями и двадцать пять лучших участников (первые пять получают по 2500, следующие десять — по 1000, а занявшие места с 16 по 25 — по 250 долларов). Имеется специальный приз Элизабет Путнам для лучшей девушки-участницы — 1000 долларов. Кроме того, Путнамовский фонд награждает одного из лауреатов премией в 12 тысяч долларов и оплачивает его обучение в Гарвардском университете.

Задачи вместе с решениями публикуются в октябрьском номере журнала American Mothematical Monthly, издающимся Математической Ассоциацией Америки. Кроме того, условия задач Путнамовской олимпиады, начиная с 1987 года, можно найти на странице в Интернете, которую ведет Киран Кедлайя (американский математик родом из Индии). Современные электронные коммуникации создают небывалые ранее возможности для распространения информации и общения людей, объединенных общими интересами. Сложилась следующая интересная традиция. После того, как становятся известными условия задач, в течение нескольких дней большие любители олимпиадных задач ищут их решения, сообщают их посредством электронной почты профессору Дэвиду Русину, который результаты совместного труда вместе с комментариями и обсуждением различных подходов помещает на свою страницу в Интернете

`http://www.math.niu.edu/~rusin/problems-math`.

Среди задач олимпиады встречаются иногда очень простые — уровня нашей районной олимпиады. Приведем примеры таких задач.

88A1. Изобразить на плоскости Oxy фигуру, задаваемую неравенствами $|x| - |y| \le 1$, $|y| \le 1$, и найти ее площадь.

Ответ: 6.

88B1. Доказать, что всякое положительное составное число представимо в виде $xy + yz + zx + 1$, где x, y, z — натуральные числа.

Решение. $ab = (a-1)(b-1) + (a-1) + (b-1) + 1$.

98B1. Найти наименьшее значение функции при $x > 0$

$$y(x) = \frac{(x+1/x)^6 - (x^6 + 1/x^6) - 2}{(x+1/x)^3 + (x^3 + 1/x^3)}.$$

Решение. Преобразовав числитель дроби

$$(x+1/x)^6 - (x^6+1/x^6) - 2 = (x+1/x)^6 - (x^3+1/x^3)^2 =$$
$$= \left((x+1/x)^3 - (x^3+1/x^3)\right)\left((x+1/x)^3 + (x^3+1/x^3)\right),$$

замечаем, что $y(x) = (x+1/x)^3 - (x^3+1/x^3) = 3(x+1/x)$, откуда легко получить

Ответ: 6.

Разумеется, не такие «утешительные» задачи определяют лицо олимпиады. Среди задач, приведенных ниже, читатель может найти очень трудные задачи.

В Южно-Уральском государственном университете, начиная с 1997 г., при проведении различных математических конкурсов регулярно используются материалы Путнамовских олимпиад.

Приведем условия задач за последние десять лет (источник:
`http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/problemdir.html`)
и решения задач олимпиады 1996 и 1997 гг., размещенные также на сайте «Математические олимпиады и олимпиадные задачи»:

`http://www.zaba.ru/cgi-bin/tasks.cgi?tour=national.putnam.`

Условия задач 1992–2001 гг.

1992 год

А-1 Пусть $f: Z \to Z$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) $\forall n \in Z \;\; f(f(n)) = n$;

(ii) $\forall n \in Z \;\; f(f(n+2)+2) = n$;

(iii) $f(0) = 1$.

Доказать, что $f(n) = 1 - n$.

А-2 Пусть $C(\alpha)$ — коэффициент при x^{1992} в ряде Маклорена функции $(1+x)^\alpha$. Вычислить

$$\int_0^1 \left(C(-y-1) \sum_{k=1}^{1992} \frac{1}{y+k} \right) dy.$$

А-3 Для каждого натурального числа m найти все тройки натуральных чисел (n, x, y) такие, что n взаимно просто с m и выполняется равенство

$$(x^2+y^2)^m = (xy)^n.$$

А-4 Пусть $f: R \to R$ — бесконечно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{n^2+1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Вычислить значения производных $f^{(k)}(0), k = 1, 2, 3, \ldots$.

А-5 Для каждого натурального n положим $a_n = 0(1)$, если число единиц в двоичном представлении числа n четно (нечетно). Показать что не существует таких натуральных k и m, для которых

$$a_{k+j} = a_{k+m+j} = a_{k+m+2j}$$

при $0 \le j \le m-1$.

А-6 Какова вероятность того, что тетраэдр с вершинами, равномерно распределенными по поверхности сферы, содержит ее центр?

B-1 Пусть S — множество n различных действительных чисел. Пусть A_S — множество чисел, каждое из которых является средним арифметическим двух различных элементов S. Для каждого $n \geq 2$ определить наименьшее возможное число элементов в A_S.

B-2 Определим $Q(n,k)$ как коэффициент при x^k в разложении $(1+x+x^2+x^3)^n$. Доказать, что

$$Q(n,k) = \sum_{j=0}^{k} C_n^j C_n^{k-2j},$$

где C_a^b — биномиальный коэффициент (при $b > a$ полагаем $C_a^b = 0$).

B-3 Для каждой пары действительных чисел (x,y) последовательность, $(a_n(x,y))_{n\geq 0}$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned} a_0(x,y) &= x, \\ a_{n+1}(x,y) &= \frac{(a_n(x,y))^2 + y^2}{2}, \text{если } n \geq 0. \end{aligned}$$

Найти площадь фигуры, составленной из точек (x,y), для которых последовательность $(a_n(x,y))$ сходится.

B-4 Пусть $p(x)$ — ненулевой многочлен степени меньше 1992, не обращающийся в ноль в точках $0, \pm 1$. Для многочленов $f(x)$ и $g(x)$ выполняется тождество

$$\frac{d^{1992}}{dx^{1992}}\left(\frac{p(x)}{x^3 - x}\right) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Найти наименьшую возможную степень $f(x)$.

B-5 Пусть D_n — значение определителя матрицы размера $(n-1)\times(n-1)$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1 \end{bmatrix}.$$

Ограничено ли множество $\left\{\frac{D_n}{n!}\right\}_{n\geq 2}$?

B-6 Пусть $\mathcal{M}$ — множество вещественных $n \times n$ матриц, удовлетворяющих условиям

(i) $I \in \mathcal{M}$, где I — единичная матрица $n \times n$;

(ii) если $A \in \mathcal{M}$ и $B \in \mathcal{M}$, то либо $AB \in \mathcal{M}$, либо $-AB \in \mathcal{M}$ (но не одновременно);

(iii) если $A \in \mathcal{M}$ и $B \in \mathcal{M}$, то либо $AB = BA$, либо $AB = -BA$;

(iv) если $A \in \mathcal{M}$ и $A \neq I$, то существует такая матрица $B \in \mathcal{M}$, что $AB = -BA$.

Доказать, что $\mathcal{M}$ содержит не более n^2 матриц.

1993 год

А–1 Прямая $y = c$ пересекает кривую $y = 2x - 3x^3$ в первой четверти координатной плоскости. Найти c, при котором равны площади фигур, одна из которых ограничена линиями $x = 0, y = c, y = 2x - 3x^3$, а вторая лежит под кривой $y = 2x - 3x^3$ выше прямой $y = c$ между двумя точками пересечения.

А–2 Пусть $(x_n)_{n \geq 0}$ последовательность ненулевых действительных чисел таких, что $x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1} = 1$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$. Доказать, что существует число a такое, что $x_{n+1} = ax_n - x_{n-1}$ при $n \geq 1$.

А–3 Пусть $\mathcal{P}_n$ — множество всех подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, а $c(n, m)$ — число функций $f : \mathcal{P}_n \to \{1, 2, \ldots, m\}$ таких, что $f(A \cap B) = \min\{f(A), f(B)\}$. Доказать, что

$$c(n, m) = \sum_{j=1}^{m} j^n.$$

А–4 Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{19}$ — натуральные числа, не превосходящие 93, а $y_1, y_2, \ldots, y_{93}$ — натуральные числа, не превосходящие 19. Доказать, что сумма (непустая) некоторых x_i равна сумме некоторых y_j.

А–5 Доказать рациональность числа

$$\int_{-100}^{-10} \left(\frac{x^2 - x}{x^3 - 3x + 1} \right)^2 dx + \int_{\frac{1}{101}}^{\frac{1}{11}} \left(\frac{x^2 - x}{x^3 - 3x + 1} \right)^2 dx + \\ + \int_{\frac{101}{100}}^{\frac{11}{10}} \left(\frac{x^2 - x}{x^3 - 3x + 1} \right)^2 dx.$$

А–6 Бесконечная последовательность двоек и троек

$$2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 2, \ldots$$

обладает тем свойством, что если формировать новую последовательность, записывая в нее количество троек между двумя соседними двойками, то получится такая же последовательность, как исходная. Показать, что существует такое действительное число r, что n-й член последовательности равен 2 тогда и только тогда, когда $n = 1 + [rm]$ для некоторого неотрицательного целого числа m.

B–1 Найти наименьшее натуральное n, обладающее свойством: для любого натурального m, $0 < m < 1993$, существует целое k, для которого

$$\frac{m}{1993} < \frac{k}{n} < \frac{m+1}{1994}.$$

B–2 Двое играют в следующую игру. Между ними случайным образом распределяются числа от 1 до $2n$ (у каждого по n чисел, и все числа разные). По очереди каждый из игроков называет одно из доставшихся ему чисел, причем повторяться нельзя. Игра заканчивается, как только сумма названных чисел станет кратной $2n+1$. Какова вероятность выигрыша первого игрока при правильной игре обоих?

B–3 Два действительных числа x и y равномерно распределены на интервале (0,1). Какова вероятность того, что ближайшее целое к x/y четно? Представить ответ в виде $r + s\pi$, где r и s — рациональные числа.

B–4 Функция $K(x,y)$ положительна и непрерывна на квадрате $[0,1] \times$ $\times [0,1]$, а функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны и непрерывны на отрезке $[0,1]$ Предположим, что при всех $x \in [0,1]$

$$\int_0^1 f(y)K(x,y)\,dy = g(x)$$

и

$$\int_0^1 g(y)K(x,y)\,dy = f(x).$$

Показать, что $f(x) = g(x)$ при $x \in [0,1]$.

B–5 Показать, что не существует четырех точек на плоскости, все попарные расстояния между которыми — нечетные числа.

B–6 Числа x и y, где $x < y$, можно заменить на $2x$ и $y - x$. Пусть первоначально имеется три (не обязательно различных) натуральных числа. Показать, что применяя конечное число раз указанную операцию, можно одно из чисел сделать равным нулю.

1994 год

A–1 Пусть (a_n) — последовательность положительных чисел, и для любого n выполняется неравенство $a_n \le a_{2n} + a_{2n+1}$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

A–2 Найти такое число $m > 0$, для которого равны площади двух фигур, расположенных в первой четверти координатной плоскости и ограниченных линиями: $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, $y = 0$, $y = 2x/3$ и $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, $x = 0$, $y = mx$, соответственно.

A–3 Доказать, что прямоугольный равнобедренный треугольник с катетом 1 не может быть раскрашен в 4 цвета так, что в нем расстояние между любыми двумя точками одного цвета меньше, чем $2 - \sqrt{2}$.

A–4 Пусть A и B — такие матрицы размера 2×2, составленные из целых чисел, что каждая из матриц $A, A+B, A+2B, A+3B, A+4B$ имеет обратную, причем все элементы соответствующих обратных матриц — целые числа. Доказать, что то же верно и для матрицы $A+5B$.

A–5 Пусть (r_n) — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю, а S — множество всех чисел, представимых в виде

$$r_{i_1} + \ldots + r_{i_{1994}},$$

где $i_1 < i_2 < \ldots < i_{1994}$. Доказать, что любой интервал (a, b) содержит подинтервал (c, d), чье пересечение с S пусто.

A–6 Пусть $f_1, \ldots, f_{10}$ — биекции на множестве целых чисел такие, что для любого целого числа n существует последовательность $i_1, \ldots, i_k$, для которой $f_{i_1} \circ \ldots \circ f_{i_k}(0) = n$. Доказать, что если A — непустое конечное множество, то существует по меньшей мере 512 двоичных последовательностей $(e_1, \ldots, e_{10})$ таких, что $f_1^{e_1} \circ \ldots \circ f_{10}^{e_{10}}$ отображает A на A. (Здесь $f^1 = f$, а f^0 — тождественное отображение.)

B–1 Найти все натуральные n, для которых неравенство $|n - m^2| \leq 250$ выполняется ровно при 15 неотрицательных целых m.

B–2 Найти все c, при которых график функции $x^4 + 9x^3 + cx^2 + ax + b$ пересекает некоторую прямую в четырех точках.

B–3 Пусть $f : R \to R^+$, и для всех x выполняется неравенство $f'(x) > f(x)$. Для каких k существует число N такое, что $f(x) > e^{kx}$ при $x > N$?

B–4 Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Обозначим через d_n наибольший общий делитель элементов матрицы $A^n - I$, где I — единичная матрица. Доказать, что $d_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

B–5 Пусть n — фиксированное натуральное число. Для действительного числа α определим $f_\alpha(i) = [\alpha i]$ и обозначим через f^k k-ю итерацию f (т.е. $f^1 = f$ и $f^{k+1} = f \circ f^k$). Доказать, что для некоторого α выполняются соотношения $f_{\alpha^k}(n^2) = f_\alpha^k(n^2) = n^2 - k$ при $k = 1, \ldots, n$.

B–6 Целые числа a, b, c, d удовлетворяют неравенствам $0 \leq a \leq b \leq 99$ и $0 \leq c \leq d \leq 99$. Для произвольного целого i положим $n_i = 101i + 1002^i$. Показать, что если $n_a + n_b \equiv n_c + n_d (\bmod 10100)$, то $a = c$ и $b = d$.

1995 год

A–1 Пусть на множестве S определена коммутативная и ассоциативная операция $*$. Имеется разбиение S на множества T и U (т.е. $T \cup U = S$; $T \cap U = \phi$), обладающее свойством:

$$\forall t_1, t_2, t_3 \in T \quad t_1 * t_2 * t_3 \in T;$$

$$\forall u_1, u_2, u_3 \in U \quad u_1 * u_2 * u_3 \in U.$$

Доказать, что по крайней мере одно из множеств T или U замкнуто относительно операции $*$.

A–2 Выяснить,для каких пар (a, b) положительных действительных чисел сходится несобственный интеграл

$$\int_b^\infty \left(\sqrt{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}-\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}}\right) dx.$$

A–3 Число $d_1 d_2 \dots d_9$ имеет 9 (не обязательно различных) десятичных цифр. Число $e_1 e_2 \dots e_9$ формируется из таких цифр, что замена в исходном числе любой цифры d_i на e_i приводит к числу, кратному 7. Например, если $d_1 d_2 \dots d_9 = 199501996$, то e_6 равно 2 или 9, поскольку числа 199502996 и 199509996 кратны 7 и получаются из исходного числа изменением шестой цифры. Число $f_1 f_2 \dots f_9$ аналогично получается из $e_1 e_2 \dots e_9$. Показать, для любого i число $d_i - f_i$ кратно 7.

A–4 Имеется ожерелье из n бусинок. Каждая бусинка помечена целым числом, а сумма всех чисел равна $n-1$. Доказать, что можно, разрезав ожерелье, получить цепочку с последовательными метками $x_1, x_2, \dots, x_n$ такую, что

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq k-1 \qquad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

A–5 Пусть $x_1, \dots, x_n$ — дифференцируемые (вещественно-значные) функции от переменной t, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n,
\end{aligned}$$

где все коэффициенты $a_{ij} > 0$. Пусть для каждого i $x_i(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Следует ли отсюда, что функции $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно зависимые?

A–6 Предположим, что каждый элемент матрицы размера $3 \times n$ с одинаковой вероятностью принимает значения 1, 2 и 3, после чего элементы каждой строки переставляются по неубыванию. Показать, что для некоторого $n \geq 1995$ вероятность того, что $b = a + 1$ и $c = a + 2$, не менее чем в 4 раза больше вероятности $a = b = c$.

В–1 Для разбиения p множества $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ обозначим через $p(x)$ число элементов в части, содержащей x. Доказать, что для любых двух разбиений p и p' найдутся два различных числа x и y в множестве $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, для которых $p(x)=p(y)$ и $p'(x)=p'(y)$. (*Разбиение* множества S — это набор его непересекающихся подмножеств (частей), объединение которых есть S.)

В–2 Эллипс с полуосями a и b катится без скольжения по кривой $y = c\sin\left(\frac{x}{a}\right)$. Найти зависимость между a, b, c, если известно, что эллипс совершает ровно один оборот при движении по одному периоду синусоиды.

В–3 С каждым натуральным n^2-значным числом свяжем определитель матрицы, строки которой получаются записыванием последовательных цифр числа. Например, при $n=2$ с числом 8617 связываем $\det\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = 50$. Найти, как функцию от n, сумму всех всех определителей, «порожденных» n^2-значными числами. (Первая цифра числа предполагается отличной от 0.)

В–4 Вычислить

$$\sqrt[8]{2207 - \cfrac{1}{2207 - \cfrac{1}{2207-\ldots}}}.$$

Представить ответ в виде $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$, где a, b, c, d — целые числа.

В–5 Имеется четыре кучки камней, в которых соответственно 3, 4, 5 и 6 камней. Двое играют в такую игру. Каждый по очереди берет **или**

a) один камень из некоторой кучки, в которой не менее трех камней, **или**

b) целиком кучку из двух или трех камней.

Выигрывает взявший последнюю кучку. Кто выигрывает при правильной игре?

В–6 Для числа $\alpha >$ определим множество

$$S(\alpha) = \{[n\alpha] \mid n = 1,2,3,\ldots\}.$$

Доказать, что множество натуральных чисел не может быть представлено в виде объединения трех непересекающихся множеств $S(\alpha), S(\beta)$ и $S(\gamma)$.

1996 год

А–1 Найти наименьшее A, при котором для любых двух квадратов общей площади 1 найдется такой прямоугольник площади A, в котором можно разместить без наложения указанные квадраты. Можно считать, что стороны квадратов параллельны сторонам прямоугольника.

А–2 Радиусы двух окружностей соответственно 1 и 3, расстояние между центрами окружностей — 10. Найти геометрическое место середин отрезков, соединяющих точки данных окружностей.

A–3 В школе работает 6 кружков. Каждый из 20 учеников класса может посещать любое количество кружков — от 0 до 6. Верно ли, что обязательно найдутся такие 5 учеников и такие 2 кружка, что все пятеро либо посещают оба кружка, либо не посещают ни один из этих двух кружков?

A–4 Пусть S — множество упорядоченных троек (a,b,c) различных элементов конечного множества A. Выполняются следующие условия:

1. $(a,b,c) \in S \iff (b,c,a) \in S$;
2. $(a,b,c) \in S \iff (c,b,a) \notin S$;
3. $(a,b,c),(c,d,a) \in S \iff (b,c,d),(d,a,b) \in S$.

Доказать, что существует такая функция $g : A \to R$, что из двойного неравенства $g(a) < g(b) < g(c)$ следует: $(a,b,c) \in S$.

A–5 Пусть p — простое число > 3, $k = [2p/3]$. Доказать, что сумма биномиальных коэффициентов $C_p^1 + C_p^2 + \ldots + C_p^k$ делится на p^2.

A6. Пусть $c = const \geq 0$. Опишите множество всех непрерывных функций $f : R \to R$ таких, что $\forall x \in R \;\; f(x) = f(x^2 + c)$.

B–1 Назовем множество *эгоцентричным* (или *э-множеством*), если оно содержит свою мощность (число элементов). (Например, $\{2,3\}, \{2,5\}, \{3,5,8\}$ — э-множества, а $\{3,5\}, \{2,5,8\}$ не являются таковыми). Найти число подмножеств множества $\{1,2,\ldots,n\}$, являющихся *минимальными* э-множествами, т.е. такими эгоцентричными множествами, чьи собственные подмножества — не э - множества. (Пример. $\{2,3\}$ — минимальное э-множество в отличие от $\{1,2\}$).

B–2 Доказать, что для любого натурального числа n

$$\left(\frac{2n-1}{e}\right)^{\frac{2n-1}{2}} < 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) < \left(\frac{2n+1}{e}\right)^{\frac{2n+1}{2}}.$$

B–3 Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Найти как функцию от n ($n > 2$) наибольшее значение выражения

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1.$$

B–4 Для произвольной квадратной матрица A определим $\sin A$ с помощью степенного ряда:

$$\sin A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.$$

Существует ли такая 2×2 матрица A, что

$$\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 1996 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

В–5 Для строки S, состоящей из единиц и нулей, обозначим через $\Delta(S)$ разность числа единиц и нулей. Например, $\Delta(1001001) = -1$. Назовем строку S *сбалансированной*, если для любой подстроки T (последовательных символов) S $-2 \le \Delta(T) \le 2$. Так, строка 1001001 не является сбалансированной, так как содержит подстроку 00100. Найти число сбалансированных строк длины n.

В–6 Пусть $\mathbf{r_1} = (a_1, b_1), \mathbf{r_2} = (a_2, b_2), \ldots, \mathbf{r_n} = (a_n, b_n)$ — радиус-векторы вершин выпуклого многоугольника, внутри которого находится начало координат. Доказать, что существуют такие положительные числа x и y, что

$$x^{a_1}y^{b_1}\mathbf{r_1} + x^{a_2}y^{b_2}\mathbf{r_2} + \ldots x^{a_n}y^{b_n}\mathbf{r_n} = \mathbf{0}.$$

1997 год

А–1 Прямоугольник $HOMF$ имеет стороны $HO = 17$ и $OM = 5$. Для треугольника ABC точка H — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности, M — середина BC, F — основание высоты, проведенной из вершины A. Найти длину BC.

А–2 За круглым столом сидят n игроков. Каждый из них первоначально имеет по одному рублю. Первый игрок передает рубль второму, после чего второй передает два рубля третьему. Затем третий игрок передает рубль четвертому, а четвертый два рубля пятому и т.д. Игроки поочередно передают рубль или два рубля следующему игроку, у которого еще есть деньги; игрок, лишившийся денег, выбывает из игры и покидает стол. Найти бесконечное множество таких n, при которых игра заканчивается тем, что у некоторого игрока оказываются все n рублей.

А–3 Вычислить

$$\int_0^\infty (x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 4} - \frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots)(1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \ldots)dx.$$

А–4 Пусть G — группа с единичным элементом e; $\phi : G \to G$ — функция такая, что

$$\phi(g_1)\phi(g_2)\phi(g_3) = \phi(h_1)\phi(h_2)\phi(h_3),$$

всякий раз, когда $g_1g_2g_3 = e = h_1h_2h_3$. Доказать, что существует такой элемент $a \in G$, что функция $\psi(x) = a\phi(x)$ есть гомоморфизм (т.е. $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ для всех $x, y \in G$).

А–5 Определить, четно или нечетно число упорядоченных n-элементных наборов натуральных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, что

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

A–6 Пусть n — натуральное число, c — действительное число. Последовательность (x_k) определяется соотношениями $x_0 = 0, x_1 = 1$ и

$$x_{k+2} = \frac{cx_{k+1} - (n-k)x_k}{k+1}, \quad k \geq 0.$$

Пусть при фиксированном n число c принимает наибольшее значение, при котором $x_{n+1} = 0$. Выразить x_k через n и k, где $1 \leq k \leq n$.

B–1 Пусть $s(x)$ есть расстояние между числом x и ближайшим к нему целым числом. Для произвольного натурального n вычислить

$$F_n = \sum_{m=1}^{6n-1} \min\left(s(\frac{m}{6n}), s(\frac{m}{3n})\right).$$

B–2 Пусть f — дважды дифференцируемая функция, для которой

$$f''(x) + f(x) = -xg(x)f'(x),$$

где $g(x) \geq 0$ при всех x. Доказать, что функция $f(x)$ ограничена.

B–3 Для каждого натурального n запишем сумму $\sum_{m=1}^{n} 1/m$ в виде p_n/q_n, где p_n и q_n — взаимно простые числа. Найти все n, при которых q_n не делится на 5.

B–4 Пусть $a_{m,n}$ есть коэффициент при x^n в разложениии многочлена $(1 + x + x^2)^m$. Докажите, что для всех целых $k \geq 0$

$$0 \leq \sum_{i=0}^{[\frac{2k}{3}]} (-1)^i a_{k-i,i} \leq 1.$$

B–5 Докажите, что для $n \geq 2$

$$\overbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}^{n\text{ цифр}} \equiv \overbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}^{n-1\text{ цифр}} \pmod{n}.$$

B–6 Разбиение треугольника со сторонами 3, 4, 5 его средними линиями на 4 части имеет диаметр 5/2. Найти наименьший диаметр разбиения этого треугольника на 4 части. (Диаметр разбиения — это точная верхняя грань расстояний между точками из одной части разбиения).

1998 год

A–1 Высота кругового конуса 3, радиус основания 1. Найти ребро куба, вписанного в конус.

A–2 Пусть s — дуга единичной окружности, лежащая целиком в первом квадранте, A — площадь фигуры, ограниченной сверху дугой s и снизу осью Ox, B — площадь фигуры, ограниченной справа дугой s и слева осью Oy. Доказать, что $A + B$ зависит только от длины дуги s, но не от ее положения.

A–3 Пусть функция $f : R \to R$ имеет непрерывную третью производную. Доказать, что в некоторой точке a

$$f(a) \cdot f'(a) \cdot f''(a) \cdot f'''(a) \geq 0.$$

A–4 Положим $A_1 = 0, A_2 = 1$. Для $n > 2$ число A_n получим приписыванием справа к цифрам числа A_{n-1} цифр числа A_{n-2}. Например, $A_3 = A_2A_1 = 10$, $A_4 = A_3A_2 = 101$, $A_5 = A_4A_3 = 10110$ и т.д. Найти все n, при которых число A_n делится на 11.

A–5 Пусть $\mathcal{F}$ — конечное множество открытых кругов из R^2, чье объединение содержит множество $E \subseteq R^2$. Показать, что существует подмножество попарно не пересекающихся кругов $D_1, \ldots, D_n$ из $\mathcal{F}$ таких, что

$$E \subseteq \cup_{j=1}^{n} 3D_j.$$

(Если D — круг с центром в P и радиуса r, то $3D$ — круг с центром в P и радиуса $3r$.)

A–6 Пусть A, B, C — различные точки с целыми координатами из R^2, а S — площадь треугольника ABC. Доказать, что если

$$(AB + BC)^2 < 8S + 1,$$

то A, B, C являются тремя вершинами одного квадрата.

B–1 Найти наименьшее при $x > 0$ значение функции

$$\frac{(x + 1/x)^6 - (x^6 + 1/x^6) - 2}{(x + 1/x)^3 + (x^3 + 1/x^3)}.$$

B–2 Пусть $0 < b < a$. Найти наименьший периметр треугольника, одна из вершин которого (a, b), вторая лежит на оси Ox, а третья — на прямой $y = x$.

B–3 Пусть H — единичная полусфера $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$, C — единичная окружность $\{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$, а P — правильный пятиугольник, вписанный в C. Определить площадь той части поверхности H, которая лежит над P и записать ответ в виде $A \sin\alpha + B \cos\beta$, где A, B, α, β — действительные числа.

B–4 Найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять натуральные числа m и n такие, что

$$\sum_{i=0}^{mn-1} (-1)^{[i/m]+[i/n]} = 0.$$

B–5 Пусть N — натуральное число, десятичная запись которого состоит из 1998 единиц. Найти 1000-ю цифру после запятой числа $\sqrt{N}$.

B-6 Доказать, что для любых целых a, b, c существует такое натуральное число n, что число $\sqrt{n^3 + an^2 + bn + c}$ не целое.

1999 год

A-1 Найти многочлены $f(x), g(x)$ и $h(x)$ такие, что для всех x

$$|f(x)| - |g(x)| + h(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < -1; \\ 3x + 2, & \text{если } -1 \leq x \leq 0; \\ -2x + 2, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

A-2 Доказать, что любой многочлен, принимающий только неотрицательные значения, представим в виде конечной суммы квадратов многочленов.

A-3 Рассмотрим степенной ряд

$$\frac{1}{1 - 2x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Доказать, что для любого целого $n \geq 0$ найдется такое целое число m, что

$$a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_m.$$

A-4 Просуммировать ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 n}{3^m (n 3^m + m 3^n)}.$$

A-5 Доказать существование такой константы C, что для любого многочлена $p(x)$ степени 1999 выполняется неравенство

$$|p(0)| \leq C \int_{-1}^{1} |p(x)|\, dx.$$

A-6 Последовательность (a_n) определяется соотношениями $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 24$ и при $n \geq 4$

$$a_n = \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1} a_{n-2}^2}{a_{n-2} a_{n-3}}.$$

Показать, что для любого n число a_n делится на n.

B-1 В треугольнике ABC угол при вершине C прямой, $\angle BAC = \theta$; точка D выбрана на стороне AB так, что $AC = AD = 1$; точка E выбрана на BC так, что $\angle CDE = \theta$. Перпендикуляр к BC, проведенный через точку E, пересекает AB в точке F. Вычислить $\lim_{\theta \to 0} EF$.

B-2 Пусть $P(x)$ — многочлен степени n такой, что $P(x) = Q(x)P''(x)$, где $Q(x)$ — квадратный многочлен. Показать, что если $P(x)$ имеет не менее двух различных корней, то на самом деле у него n различных корней.

B-3 Пусть $A = \{(x,y) : 0 \le x, y < 1\}$. Для $(x,y) \in A$ положим

$$S(x,y) = \sum_{\frac{1}{2} \le \frac{m}{n} \le 2} x^m y^n,$$

где сумма берется по всем парам (m,n) натуральных чисел, удовлетворяющих указанным неравенствам. Вычислить

$$\lim_{(x,y)\to(1,1),(x,y)\in A} (1-xy^2)(1-x^2y)S(x,y).$$

B-4 Пусть f — такая трижды непрерывно дифференцируемая функция, что $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ положительны при всех x. Предположим также, что всюду на числовой оси выполняется неравенство $f'''(x) \le f(x)$. Показать, что при любом x выполняется неравенство $f'(x) < 2f(x)$.

B-5 Для целого $n \ge 3$ положим $\theta = 2\pi/n$. Вычислить определитель $n \times n$ матрицы $I + A$, где I — единичная матрица, а общий элемент матрицы $A = (a_{ij})$ есть $a_{ij} = \cos(i\theta + j\theta)$.

B-6 Пусть S — конечное множество целых чисел, больших 1. Предположим, что для любого целого n найдется такое $s \in S$, что наибольший общий делитель чисел s и n равен 1 или s. Показать, что существуют такие $s, t \in S$, что их наибольший общий делитель — простое число.

2000 год

A-1 Пусть $A = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ — сумма ряда, составленного из положительных чисел. Найти все значения, которые может принимать сумма ряда $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$.

A-2 Доказать, что существует бесконечно много целых n таких, что каждое из чисел $n, n+1, n+2$ является суммой двух квадратов. (Пример: $0 = 0^2 + 0^2$, $1 = 0^2 + 1^2$, $2 = 1^2 + 1^2$.)

A-3 Восьмиугольник $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ вписан в окружность. Известно, что $P_1P_3P_5P_7$ — квадрат площади 5, а $P_2P_4P_6P_8$ — прямоугольник площади 4. Найти наибольшее возможное значение площади восьмиугольника.

A-4 Доказать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^{\infty} \sin(x)\sin(x^2)\,dx.$$

A-5 Доказать, что среди любых трех точек с целыми координатами, лежащими на окружности радиуса $r > 0$, найдутся две, расстояние между которыми не менее $r^{1/3}$.

A-6 Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Определим последовательность $a_0, a_1, \ldots$ целых чисел соотношениями $a_0 = 0$ и $a_{n+1} = f(a_n)$ при $n \geq 0$. Доказать, что если $a_m = 0$ для некоторого m, то $a_1 = 0$ или $a_2 = 0$.

B-1 Пусть при $1 \leq i \leq N$ числа a_i, b_i, c_i — целые. Предположим что для каждого i хотя бы одно из чисел a_i, b_i, c_i нечетное. Доказать, что существуют целые числа r, s, t такие, что число $ra_i + sb_i + tc_i$ нечетно не менее чем для $4N/7$ значений i, $1 \leq i \leq N$.

B-2 Доказать, что при $n \geq m \geq 1$ число $(m,n)C_n^m$ делится на n. (Здесь (m,n) — наибольший общий делитель m и n.)

B-3 Пусть $f(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i \sin(2\pi i t)$, где a_i действительные числа, и $a_N \neq 0$. Пусть N_k обозначает число нулей (с учетом их кратности) $\frac{d^k f}{dt^k}$ из промежутка $[0,1)$. Доказать, что

$$N_0 \leq N_1 \leq N_2 \leq \cdots \text{ и } \lim_{k\to\infty} N_k = 2N.$$

B-4 Пусть непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет тождеству $f(2x^2-1) = 2xf(x)$. Показать, что $f(x) = 0$ при $-1 \leq x \leq 1$.

B-5 Пусть S_0 — конечное множество натуральных чисел. Определим множества $S_1, S_2, \ldots$ следующим образом: $a \in S_{n+1}$ тогда и только тогда, когда ровно одно из чисел $a-1$ и a входит в S_n. Показать, что существует бесконечно много целых N, для которых

$$S_N = S_0 \cup \{N + a \mid a \in S_0\}.$$

B-6 Пусть множество B состоит из более, чем $2^{n+1}/n$ различных точек с координатами вида $(\pm1, \pm1, \ldots, \pm1)$ в n-мерном евклидовом пространстве, $n \geq 3$. Показать, что некоторые три точки из B являются вершинами равностороннего треугольника.

2001 год

A-1 На множестве S определена бинарная операция $*$, причем для любых $a, b \in S$ выполняется равенство $(a * b) * a = b$. Доказать, что при всех $a, b \in S$ имеет место и равенство $a * (b * a) = b$.

A-2 Независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ принимают значения 0 и 1, причем $X_k = 1$ с вероятностью $1/(2k+1)$. Какова вероятность того, что их сумма принимает нечетное значение? Дать ответ в виде рациональной функции от n.

A-3 Для каждого целого m определим многочлен

$$P_m(x) = x^4 - (2m+4)x^2 + (m-2)^2.$$

Для каких m многочлен $P_m(x)$ представим в виде произведения двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами?

A-4 Треугольник ABC имеет площадь 1. Точки E, F, G лежат, соответственно, на сторонах BC, CA, AB так, что отрезок AE делится пополам отрезком BF в точке R, отрезок BF делится пополам отрезком CG в точке S, а CG делится пополам отрезком AE в точке T. Найти площадь треугольника RST.

A-5 Найти все натуральные a и n, для которых $a^{n+1} - (a+1)^n = 2001$.

A-6 Может ли дуга параболы, лежащая внутри единичного круга, иметь длину больше 4?

B-1 Пусть n — четное натуральное число. Запишем числа $1, 2, \ldots, n^2$ в клетки квадрата $n \times n$ так, что k-я строка есть

$$(k-1)n+1, (k-1)n+2, \ldots, (k-1)n+n.$$

Раскрасим клетки в черный и белый цвет таким образом, чтобы в каждой строке и каждом столбце черных и белых клеток было поровну. Доказать, что для любой такой раскраски суммы чисел на черных и белых клетках равны.

B-2 Решить (в действительных числах) систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} &= (x^2+3y^2)(3x^2+y^2) \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{2y} &= 2(y^4 - x^4). \end{cases}$$

B-3 Для натурального n обозначим через $\langle n \rangle$ ближайшее целое к $\sqrt{n}$. Вычислить

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\langle n \rangle} + 2^{-\langle n \rangle}}{2^n}.$$

B-4 Пусть S есть множество рациональных чисел, не равных $-1, 0, 1$, а $f(x) = x - 1/x$. Верно ли, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(S) = \emptyset?$$

Здесь $f^{(1)} = f$, $f^{(n+1)} = f(f^{(n)})$.

B-5 Пусть $a, b \in (0, 1/2)$, а $g : R \to R$ — непрерывная функция, для которой при всех x справедливо $g(g(x)) = ag(x) + bx$. Доказать, что $g(x) = cx$ для некоторой константы c.

B-6 Пусть (a_n) — возрастающая последовательность положительных чисел, причем $\lim a_n/n = 0$. Существует ли бесконечно много натуральных n таких, что $a_{n-i} + a_{n+i} < 2a_n$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$?

Эвнин Александр Юрьевич,
кандидат педагогических наук,
Южно-Уральский Государственный Университет,
доцент кафедры
прикладной математики.
e-mail: evnin@prima.susu.ac.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, пр-д завода "Серп и Молот", д.3а.

Контактные телефоны: (095) 362-91-70, (095) 362-91-02.

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

Страница Фонда в сети Internet: www.fmop.dnttm.ru

e-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2002 год (включая стоимость пересылки) – 40 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2002 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

С сентября 2002 выходит "Обозрение Z" (обновленная версия) — научно-популярное приложение к журналу "Математическое образование". Условия подписки (адрес, реквизиты, стоимость одного номера) — те же, что и для журнала.

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 35 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 45 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents