Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год пятый

№ 2 (21)

Апрель-июнь 2002 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

№ 2 (21), 2002 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (21), апрель – июнь 2002 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2002 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 20.09.2002 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 8 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Учебное пособие в журнале

Методическое пособие по алгебре (окончание)

А. Н. Земляков

Продолжаем публикацию учебных материалов ФМШ № 18 (ныне СУНЦ) при МГУ. В этом номере мы печатаем окончание пособия по алгебре, на основе которого поводились занятия в летней школе ФМШ в 1975 году.

Тема 3. Подгруппы и комбинаторика

Оглавление

Лекция 3. Группы и подгруппы

1. Общее определение группы

Произвольное множество G с определенной на нем **операцией** «$\circ$» (т. е. законом, по которому каждым двум элементам $a, b \in G$ ставится в соответствие некий вполне определенный третий элемент $c = a \circ b$ того же множества — результат операции) называется группой $(G, \circ)$, если операция «$\circ$» удовлетворяет т. н. **«аксиомам группы»**:

(A) — ассоциативность — $\forall a, b, c \in G \; a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$,

(H) — существование **нейтрального элемента** e —

$$\exists e \in G \quad \forall a \in G \quad a \circ e = e \circ a = a,$$

(O) — обратимость любого элемента (существование **обратного элемента**) — $\forall a \in G \quad \exists b = a^{-1} \in G \quad a \circ b = b \circ a = e.$

(K) — коммутативность — если $\forall a, b \in G \; a \circ b = b \circ a$, то группа $(G, \circ)$ называется **коммутативной** (или **абелевой**).

Примеры. 1. $(S_n, \circ)$ — группа подстановок ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

2. $(G_\Phi, \circ)$ — группа самосовмещений данной фигуры Φ ($e = E$).

3. $(\mathbb{Z}, +)$ — группа целых чисел по сложению; здесь $e = 0$, $a^{-1} = -a$.

4. $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ — группа отличных от 0 действительных чисел по умножению; здесь $e = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Группы из конечного числа элементов называют **конечными.** Число элементов конечной группы G называется **порядком** группы и обозначается $[G]$. Например, $[S_n] = n!$, $[G_K] = 24$.

2. Отступление. Порядки элементов

Теорема. Если группа G конечна, то

$$\forall a \in G \;\; \exists m \in \mathbb{N} \;\; a^m = e.$$

Доказательство. Пусть $[G] = N$, $a \in G$. Рассмотрим элементы

$$a, a^2, a^3, \ldots, a^N, a^{N+1} \in G$$

Поскольку в G всего N различных элементов, в выписанной строчке встречаются равные элементы: $a^k = a^{k+m}$ для некоторых k и $m > 0$. Но тогда $(a^k)^{-1} \circ a^k = (a^k)^{-1} \circ a^{k+m}$, или $e = (a^k)^{-1} \circ (a^k \circ a^m)$, откуда $a^m = e$, и теорема доказана.

Замечание. Для бесконечных групп утверждение теоремы, вообще говоря, неверно. Например, в группе $G = (R^*, \cdot)$ $(-1)^2 = 1$ но $2^m \neq 1$, каково бы ни было $m \in \mathbb{N}$.

Определение. Порядком m_a элемента a группы G называется минимальное из чисел $m \in \mathbb{N}$ таких, что $a^m = e$. Если же таких чисел m нет, то говорят, что a имеет бесконечный порядок: $m_a = \infty$.

3. Общее определение подгруппы

Определение. Подмножество H элементов группы $G = (G, \circ)$ называется **подгруппой** группы G, если выполнены т. н. **«аксиомы подгруппы»**:

$$\begin{array}{llcl} (\text{ПГ } 1) & \forall a, b \in G \quad a, b \in H & \Longrightarrow & a \circ b \in H, \\ (\text{ПГ } 2) & \quad \forall a \in G \quad\ \ a \in H & \Longrightarrow & a^{-1} \in H. \end{array}$$

(Эти свойства H называются *замкнутостью* H по отношению к операции «$\circ$» и к взятию обратного элемента.)

Заметим, что из (ПГ 1) следует, что «$\circ$» будет операцией и на H (т. е. $\forall a, b \in H$ $\exists a \circ b \in H$), причем из аксиом группы для G и из свойств (ПГ) вытекают аксиомы (А), (Н) и (О) для $(H, \circ)$; в частности, в подгруппе H обязан содержаться нейтральный элемент e — как это доказать? Таким образом, подгруппа H группы G сама по себе тоже является группой.

В каждой группе есть по крайней мере 2 подгруппы — вся группа и только нейтральный элемент (т. н. *тривиальные* подгруппы). Одна из важнейших задач теории групп — отыскание всех подгрупп данной группы. Основные примеры нетривиальных подгрупп будут сейчас приведены.

Замечание. Если группа G конечна, то для того, чтобы проверить, что $H \subset G$ — подгруппа, достаточно установить справедливость (ПГ 1). Действительно, из (ПГ 1) следует (ПГ 2): если $m = m_a$ — порядок a, то $a \circ a^{m-1} = a^m = e \Longrightarrow a^{-1} = a^{m-1} \in H$.

4. Порожденные группы

Если $\{a_1, \ldots, a_k\}$ — произвольный набор элементов группы то, очевидно, всевозможные произведения элементов a_i и a_j^{-1} в любом порядке и количестве, образуют подгруппу в G. Она обозначается $H(a_1, \ldots, a_k)$ и называется **подгруппой, порожденной элементами** $a_1, \ldots, a_k$. Сами же эти элементы называются **образующими подгруппы** $H(a_1, \ldots, a_k)$. В случае, когда группа G конечна, в этом определении $H(a_1, \ldots, a_k)$ достаточно рассматривать только произведения элементов a_i без a_j^{-1}. Почему?

Пример 1. Подгруппы, порожденные одним элементом, т. е. $H = H(a)$, называются **циклическими**.

Если порядок a конечен — $m_a < \infty$ — то $H(a)$ состоит из m_a элементов:

$$H(a) = \{e = a^{m_a}, a, a^2, \ldots, a^{m_a - 1}\}.$$

Если $m_a = \infty$, то группа $H(a)$ бесконечна:

$$H(a) = \{e,\, a,\, a^{-1},\, a^2,\, a^{-2},\, a^3,\, a^{-3}, \dots\}.$$

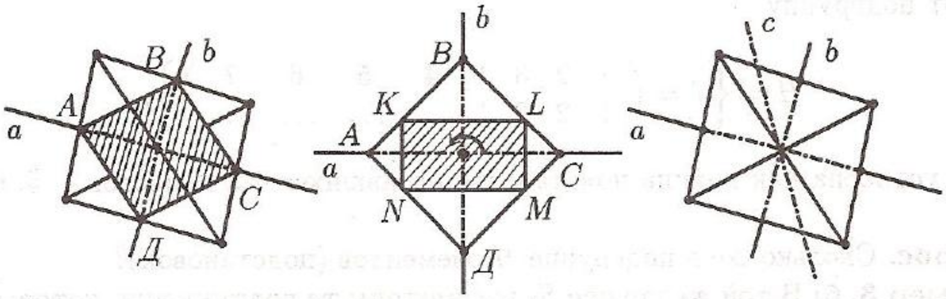
В частных случаях получаем:

а) для группы $G = (\mathbb{Z}, +)$ $H(a) = \{0,\, a,\, 2a,\, 3a, \dots;\, -a,\, -2a, \dots\}$ — бесконечная в обе стороны арифметическая прогрессия;

б) для группы $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$ $H(a) = \{1,\, a,\, a^2,\, a^3, \dots;\, \frac{1}{a},\, \frac{1}{a^2}, \dots\}$ — бесконечная в обе стороны геометрическая прогрессия.

Пример 2. Пусть a и b — указанные на левом рисунке повороты из группы тетраэдра G_T. Найдем в G_T подгруппу $H = H(a, b)$.

Самосовмещения a и b переводят в себя квадрат $ABCD$, поэтому $H \subset G_{ABCD}$ (т. е. H содержится в группе самосовмещений этого квадрата). Далее, видим, что на самом деле a и b



переводят в себя даже вписанный в квадрат $ABCD$ прямоугольник $KLMN$, поэтому $H \subset G_{KLMN}$. Наконец, заметим, что в группе прямоугольника G_{KLMN} четыре самосовмещения — a, b, e и c, где c — поворот около центра прямоугольника на $180°$; очевидно, $c = a \circ b$; следовательно,

$$H = G_{KLMN} = \{e,\, a,\, b,\, c\}.$$

Соответствующие оси в тетраэдре — это изображенные справа 3 оси второго порядка.

Использованный нами прием (отыскание сохраняющихся «подфигур» или «структур») часто помогает находить порожденные подгруппы (и не только в группах самосовмещений).

5. Сохраняющие подгруппы

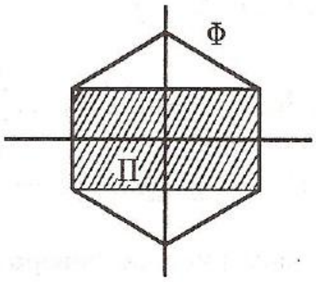
Если G — группа каких-то преобразований какого-то объекта, а $\mathcal{P}$ — нечто, связанное с этим объектом (свойство, величина, фигура и т.д.), то множество тех преобразований $f \in G$, которые сохраняют $\mathcal{P}$, очевидно, образует подгруппу $H_{\mathcal{P}}$ группы G. Такие **«сохраняющие» подгруппы** играют очень важную роль как в математике, так и в физике. (Физики называют такие подгруппы «группами симметрий».)

Пример 1. Если в фигуру Φ вписана фигура Φ', то можно рассмотреть подгруппу самосовмещений Φ, сохраняющих «подфигуру» Φ':

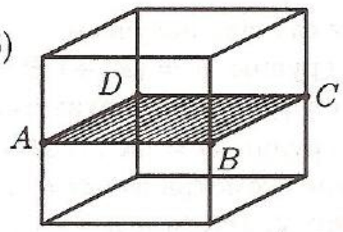
$$H_{\Phi'} = \{f \in G_\Phi | f(\Phi') = \Phi'\}.$$

Например,

а)



б)



G_{Π} — подгруппа $G_{\Phi} = G_6$; G_{ABCD} — подгруппа G_K.

Пример 2. а) Рассмотрим в группе подстановок S_7 те подстановки f, которые «сохраняют» символы 1, 2 и 3, т. е. $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$. Эти подстановки образуют подгруппу

$$H = \left\{ f = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \right\},$$

которая устроена как группа подстановок оставшихся 4-х символов 4, 5, 6, 7, т. е. как S_4.

Вопрос. Сколько же в подгруппе H элементов (подстановок)?

Пример 3. б) В той же группе S_7 рассмотрим те подстановки, которые сохраняют *подмножество* символов $\{1, 2, 3\}$, т. е. f, т.ч. $\{f(1), f(2), f(3)\} = \{1, 2, 3\}$. Конечно, тогда подмножество $\{4, 5, 6, 7\}$, тоже сохраняется. Указанные подстановки образуют в S_7 подгруппу

$$H = \left\{ f = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \right\}.$$

Вопрос. Сколько в этой подгруппе элементов?

Пример 4. Рассмотрим следующий многочлен от n переменных:

$$P_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)(x_2 - x_3) \dots (x_{n-1} - x_n).$$

Каждая подстановка

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in S_n$$

может быть проинтерпретирована как подстановка переменных x_t

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_{a_1} & x_{a_2} & \dots & x_{a_n} \end{pmatrix}.$$

Сделав такую подстановку в многочлене P_n, мы получим новый многочлен:

$$P_n(x_{a_1}, \dots, x_{a_n}) = (x_{a_1} - x_{a_2})(x_{a_1} - x_{a_3}) \dots (x_{a_{n-1}} - x_{a_n})$$

Обозначим его aP_n. Очевидно, сомножители в aP_n ровно те же самые, что и в P_n, разве что отличаются знаком.

Следовательно,

$$aP_n = \pm P_n$$

Теперь можно рассмотреть подгруппу группы S_n, состоящую из подстановок a, *сохраняющих многочлен* P_n:

$$H = \{a \in S_n | aP_n = P_n\}$$

Такие подстановки называются **четными**, а остальные (т. е. такие, что $aP_n = -P_n$) — **нечетными**. Группа четных постановок $H \subset S_n$ называется **знакопеременной группой** и обозначается A_n — она играет фундаментальную роль в т. н. теории Галуа, занимающейся разрешимостью уравнений в радикалах.

Вопрос. Образуют ли нечетные подстановки подгруппу?

6. Подгруппа игры в 15

Игра в 15 заключается в том, чтобы какое-нибудь заданное расположение фишек с номерами от 1 до 15 в коробке 4×4 клетки загнать в стандартное (см. рис.) Классический вопрос Сэма Лойда — можно ли поменять местами 14 и 15?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

«стандартное расположение»

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

«расположение Лойда»

Естественно решать задачу «наоборот» и выяснить, какие расположения можно получить из стандартного. Назовем такие расположения *допустимыми.* Каждому допустимому расположению отвечает **такая** подстановка из S_{15}: если фишку k мы загнали в то место, где при стандартном расположении стояла фишка a_k, то подстановка переводит k в a_k. Например, преобразованию

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

9	10	2	11
5	1	8	12
13	3	7	6
15	4	14	

соответствует подстановка

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 6 & 3 & 10 & 14 & 5 & 12 & 11 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Вопрос Лойда можно сформулировать так: *является ли подстановка*

$$f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & \ldots & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & \ldots & 12 & 13 & 15 & 14 \end{pmatrix}$$

допустимой или нет?

Очевидно, *допустимые подстановки* образуют подгруппу H_{15} в группе S_{15}: если f и g допустимы, то и $g \circ f$ допустима — $g \circ f$ получится, если сначала мы погоняем фишки способом f, а полученный результат затем перегоним способом g!

Задача Лойда. Верно ли, что $f_0 \in H_{15}$?

Занятие 7. Образующие и подгруппы в S_n

Порция 1

1^У. Выяснить, будет ли постановка

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

четной или нечетной?

[Выписать многочлены $P_5(x_1, \ldots, x_5)$ и $aP_5(x_1, \ldots, x_5)$ и подсчитать число изменений знаков.

Вопрос: нельзя ли найти число изменений знаков побыстрее — не выписывая aP_5?

Ответ. Сомножитель $x_k - x_l$ заменяется на $x_{a_k} - x_{a_l}$ и в aP_5 по сравнению с P_5 будет изменение знака, если $a_k > a_l$ (по условию же $k < l$). Пары $< k, l >$ такие, что $k < l$ и $a_k > a_l$ называются **беспорядками** подстановки a. Четность числа беспорядков в подстановке a и определяет четность или нечетность подстановки a. На графе подстановки a беспорядки соответствуют точкам пересечения стрелок, т.ч. и по точкам пересечения можно определить четность a.]

2^У. Композиция двух четных подстановок, очевидно, четна. Что можно сказать про композицию двух нечетных подстановок? про композицию четной и нечетной подстановок?

3. Доказать, что число четных подстановок равно числу нечетных подстановок. [Для этого установите биективное соответствие между четными и нечетными подстановками.]

4. Выяснить, какую четность имеют следующие подстановки из S_n:

а) $(i, i+1)$ — так называемая **транспозиция** (перестановка) **соседних символов** i и $i+1$ (остальные символы остаются на своем месте);

б) $i, i+k$ — **транспозиция** каких-то двух символов i и $i+k$ (остальные символы на месте);

в) $(1, 2, 3)$ — **циклическая перестановка** 3-х элементов 1, 2, 3 ($1 \longrightarrow 2$, $2 \longrightarrow 3$, $3 \longrightarrow 1$, остальные на месте);

г) (1, 2, 3, 4) — циклическая перестановка 4-х элементов;

д) (1, 2, 3, 4, 5) — цикл из 5 элементов $(1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1)$;

е) $(1, 2, 3, \ldots, n)$ — цикл из n элементов.

Порция 2

5. Доказать, что группа подстановок S_n порождается

а) всеми транспозициями (в количестве ? штук ?);

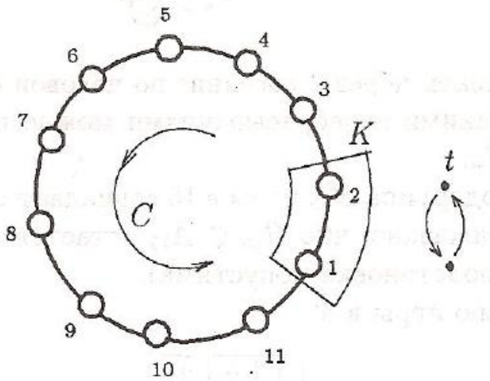
б) транспозициями только соседних элементов (из $n - 1$);

в) всего двумя подстановками — одной транспозицией $t = (1, 2)$ и циклической подстановкой $c = (1, 2, 3, \ldots, n)$.

[**Интерпретация.** Последнее утверждение задачи можно переформулировать так. По кругу стоят фишки от 1 до n. Разрешается их циклически переставлять (по кругу); кроме того, фишки, попавшие в «коробочку» K, можно переставлять друг с другом. Тогда из стандартного расположения фишек

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ 1$$

можно получить любое другое расположение.]



6. Пусть подстановка $a \in S_n$ представлена в виде

$$a = t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_k$$

композиции k транспозиций t_j. Доказать, что если k четно, то подстановка a четна, а если k нечетно, то и a нечетна. [Однозначно ли представление подстановки в виде композиции транспозиций?]

7. Доказать, что подгруппа H_{15} игры в 15 состоит только из четных подстановок: $H_{15} \subset A_{15}$.

[**Указание.** Удобно ввести символ 16, которой ставится вместо пустого места в коробке. Допустимые подстановки тогда можно считать подстановками из S_{16} вида

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 14 & 15 & | & 16 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & | & 16 \end{pmatrix}$$

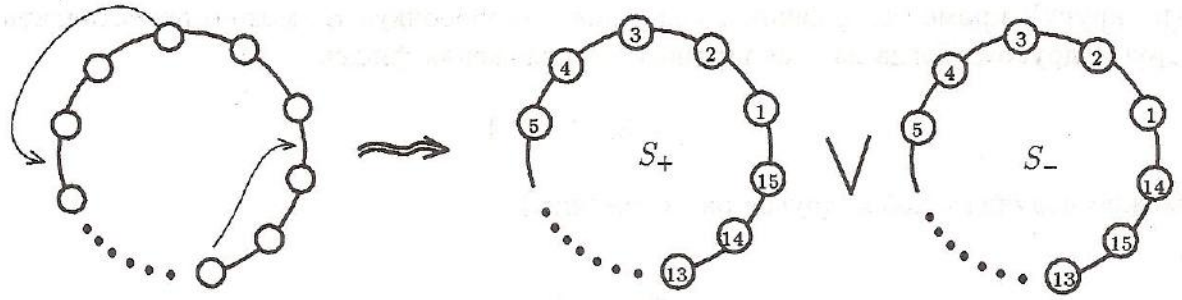
(пустое место в итоге передвижений всегда возвращается в правый нижний угол, т. е. $16 \to 16$). Наконец, заметим, что любая допустимая подстановка представляется в виде композиции стандартных подстановок из S_{16} — когда какая-то фишка передвигается на пустое место.]

Замечание. Из задачи 7 следует неразрешимость задачи Лойда, ибо лойдовская подстановка есть транспозиция $f_0 = (14,\ 15)$, и $f_0 \notin H_{15}$!

Порция 3

8. Доказать, что знакопеременная группа A_{15} порождается двумя подстановками — циклами $(1,\ 2,\ 3)$ и $(1,\ 2,\ \ldots,\ 15)$.

Указание. Усмотреть, что это утверждение эквивалентно следующему. Пусть фишки от 1 до 15 стоят по кругу. Любую фишку



разрешается перебрасывать через 2 соседние по часовой стрелке. Тогда любое исходное расположение такими перебрасываниями можно перевести в одно из двух стандартных, S_+ или S_-.

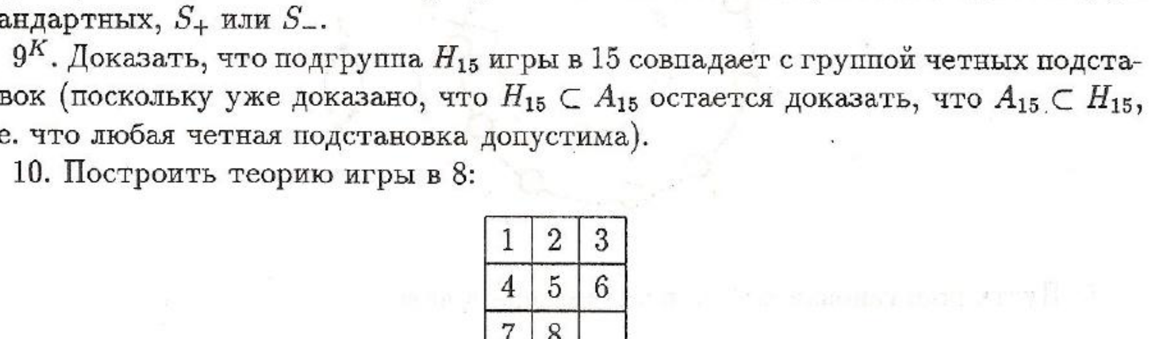
9^K. Доказать, что подгруппа H_{15} игры в 15 совпадает с группой четных подстановок (поскольку уже доказано, что $H_{15} \subset A_{15}$ остается доказать, что $A_{15} \subset H_{15}$, т. е. что любая четная подстановка допустима).

10. Построить теорию игры в 8:

1	2	3
4	5	6
7	8	

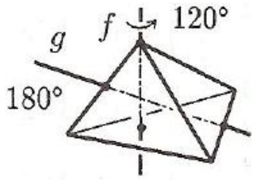
— аналогичную развитой нами теории игры в 15.

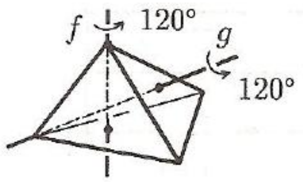
11. Найти в группе куба G_K подгруппы $H = H(f,\ g)$, порожденные следующими поворотами:



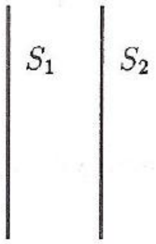
12. Указать в группе куба G_K подгруппы, сохраняющие какие-нибудь «подфигуры» в кубе и имеющие порядки 2, 3, 4, 6, 8, 12. Указать несколько подгрупп порядков 4 и 8, имеющих существенно различное строение (например, разные наборы порядков элементов).

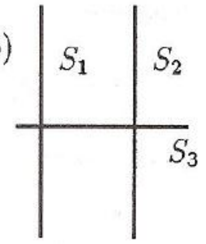
13. Найти в группе тетраэдра G_T подгруппы $H = H(f, g)$, порожденные такими поворотами:

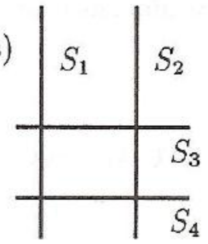
а) 

б) 

14. Найти подгруппы группы самосовмещений всей плоскости, порожденные симметриями относительно таких прямых:

а) 

б) 

в) 

15. Доказать, что в произвольной группе $(G, \circ)$

а) нейтральный элемент e единствен: если e_1 и e_2 оба нейтральные, то $e_1 = e_2$;

б) $\forall a \in G$ существует только один обратный элемент $b = a^{-1}$: если b_1 и b_2 — оба обратные к a, то $b_1 = b_2$.

Лекция 4. Представления групп подстановками

1. Определение и примеры представлений

Определение. *Представлением конечной группы* $G, \circ$ *подстановками* из n элементов называется инъективное отображение

$$T : G \longrightarrow S_n; \ \ a \mapsto T_a,$$

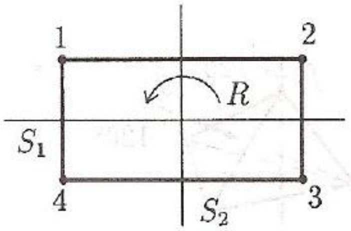
при котором каждому элементу $a \in G$ ставится в соответствие подстановка $T_a \in S_n$, причем так, что композиции элементов $a \circ b$ отвечает композиция соответствующих подстановок $T_a \circ T_b$, т. е.

$$(\Pi) \quad \forall a, b \in G \ \ T : a \circ b \ \mapsto \ T_a \circ T_b \text{ (или } T_{a \circ b} = T_a \circ T_b)$$

Примеры. Представления групп самосовмещений.

1. Пусть $G = G_{\Pi}$ — группа прямоугольника, $G = \{E, R, S_1, S_2\}$

Пример 1. А) Обозначим вершины через 1, 2, 3, 4, и самосовмещению $f \in G$ поставим в соответствие производимую им подстановку T_f этих вершин:

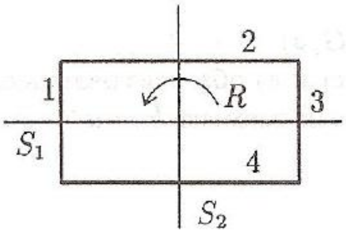


$$E \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4) = e = T_E,$$
$$R \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,\,3)(2,\,4) = T_R,$$
$$S_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,\,4)(2,\,3) = T_{S_1},$$
$$S_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1,\,2)(3,\,4) = T_{S_2}.$$

Свойство (П) очевидно из определений композиции (самосовмещений и подстановок). Таким образом, имеем представление

$$T\,:\,G_{\Pi} \longrightarrow S_4.$$

Пример 1. Б) Нумерация сторон прямоугольника дает уже другое представление $\widetilde{T}\,:\,G_{\Pi} \longrightarrow S_4$:



$$E \mapsto \quad e = \widetilde{T}_E,$$
$$R \mapsto \quad (1,\,3)(2,\,4) = \widetilde{T}_R,$$
$$S_1 \mapsto \quad (2,\,4) = \widetilde{T}_{S_1},$$
$$S_2 \mapsto \quad (1,\,3) = \widetilde{T}_{S_2}.$$

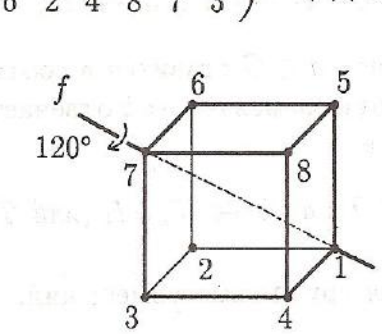
Пример 2. Пусть $G = G_K$ — группа куба. Можно указать три «самых естественных» представления группы G_K:

а) «реберное» — $T^{\text{р}}\,:\,G_K \longrightarrow S_{12}$ — строится нумерацией ребер куба;

б) «вершинное» — $T^{\text{в}}\,:\,G_K \longrightarrow S_8$ — нумеруются вершины;

в) «граневое» — $T^{\Gamma}\,:\,G_K \longrightarrow S_6$ строится по граням. Например, повороту f (см. рис.) в вершинном представлении отвечает подстановка

$$T_f^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2,\,5,\,4)(3,\,6,\,8)(7).$$



Нетрудно видеть, что любое представление $T : G \longrightarrow S_n$ обладает такими свойствами:

(1) $T : e_G \longrightarrow e_{S_n}$ $(T_e = e)$,

(2) $T : a^{-1} \longrightarrow (T_a)^{-1}$ $(T_{a^{-1}} = T_a^{-1})$.

Отсюда видно, что для данного представления $T : G \longrightarrow S_n$ множество подстановок из S_n вида T_a, где $a \in G$, образует *подгруппу* H_T группы S_n:

$$H_T = \{T_a \,|\, a \in G\}$$

Таким образом, с помощью представлений можно строить разнообразные подгруппы групп подстановок.

Теория представлений групп (в чуть более общем виде) играет фундаментальную роль в квантовой физике.

2. Теорема Кэли

Теорема. Любая конечная группа G имеет хотя бы одно представление.

Доказательство. Пусть N — порядок группы G. Перенумеруем все элементы группы G:

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots,\, a_N \tag{1}$$

Возьмем какой-нибудь из этих элементов a и рассмотрим произведения

$$a \circ a_1,\, a \circ a_2,\, a \circ a_3,\, \ldots,\, a \circ a_N \tag{2}$$

Заметим, что все элементы $a \circ a_i$ различны:

$$\text{если } \; a \circ a_i = a \circ a_j, \text{ то } \; a_i = a_j.$$

Следовательно, в строчке (2) стоят те же элементы, что и в строчке (1), только, быть может, в другом порядке, и таблица

$$T_a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_N \\ a \circ a_1 & a \circ a_2 & \ldots & a \circ a_N \end{pmatrix}$$

задает подстановку T_a элементов $a_1, \ldots, a_N$, а именно, $T_a(a_j) = a \circ a_j$. Легко видеть, что $T_{a \circ b} = T_a \circ T_b$:

$$T_{a \circ b}(a_i) = (a \circ b) \circ a_i = a \circ (b \circ a_i) = T_a(T_b(a_i)) = (T_a \circ T_b)(a_i).$$

Тем самым построено представление

$$T : G \longrightarrow S_N : a \longrightarrow T_a,$$

и теорема доказана.

Эта теорема и построенное **представление** носят имя **Кэли**, а подстановки

$$T_a = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & x & \ldots & a_N \\ a \circ a_1 & \ldots & a \circ x & \ldots & a \circ a_N \end{pmatrix} \in S_N$$

называются **подстановками Кэли.**

3. Теорема Лагранжа

Попробуем разложить подстановку Кэли T_a группы G из N элементов на циклы. Ясно, что начинающийся с элемента $a_K = x$ цикл выглядит так:

$$x \longrightarrow a \circ x \longrightarrow a \circ (a \circ x) = a^2 \circ x \longrightarrow \cdots \longrightarrow a^{m-2} \circ x \longrightarrow a^{m-1} \circ x \longrightarrow a^m \circ x = x$$

Он заканчивается через m шагов, где m — порядок элемента $a \in G$. Таким образом, каждый цикл подстановки T_a состоит ровно из $m = m_a$ элементов. N элементов группы G разбиваются на некоторое число k циклов по m элементов в каждом, поэтому $N = k \cdot m$, и тем самым доказана так называемая

Малая теорема Лагранжа. Порядок конечной группы G делится на порядок любого элемента этой группы:

$$\forall\, a \in G \;\; [G] \,\vdots\, m_a \;\; (\text{«}\vdots\text{» — знак «делится на»}).$$

Пример.Если G — группа порядка 17 и a — любой отличный от e элемент G, то $17 \,\vdots\, m_a$ откуда $m_a = 17$ и

$$H(a) = \{e,\, a,\, a^2,\, \ldots,\, a^{16}\} = G \quad (a^{17} = e).$$

4. Циклические группы

Определение. Группа G называется **циклической**, если G порождена одним каким-нибудь своим элементом a:

$$\exists\, a \in G \quad G = H(a).$$

Для любого n можно рассмотреть циклическую группу порядка n:

$$Z_n = \{e,\, a,\, a^2,\, \ldots,\, a^{n-1}\}, \quad a^n = e.$$

Геометрическая реализация группы Z_n — группа G_n^+ поворотов правильного n-угольника: $a = R^{2\pi/n}$ — поворот на угол $\dfrac{2\pi}{n}$.

В некотором смысле циклические группы — простейшие из всех групп. Все они коммутативны, и умножение в Z_n устроено как «сложение по модулю n»:

$a^x \circ a^y = a^r$, где r — остаток от деления $x + y$ на n.

Теорема 1. Если группа G имеет простой порядок p, то она циклическая и порождается любым своим элементом $a \neq e$:

$$a \neq e \Longrightarrow G = H(a) = \{e,\, a,\, a^2, \ldots,\, a^{p-1}\} = Z_p.$$

Доказательство. Если $a \neq e$, то $m_a = p$, т.к. p простое и по Малой теореме Лагранжа $p \vdots m_a$. Следовательно,

$$H(a) = \{e,\, a,\, a^2, \ldots,\, a^{p-1}\} = G, \;\; \text{ч.т.д.}$$

Теорема 2. Любая подгруппа H группы G простого порядка p совпадает с одной из двух тривиальных подгрупп:

$$\text{либо } H = \{e\}, \quad \text{либо } H = G.$$

Доказательство. Если $H \neq \{e\}$, то в H есть элемент $a \neq e$. Но тогда H содержит $H(a)$, а раз по теореме 1 $H(a) \supset G$, $H \supset G \Longrightarrow$ подгруппа H совпадает со всей группой G. Теорема доказана.

5. Число групп данного порядка

Для составных n существуют и не циклические группы порядка n. Выпишем таблицу групп малых порядков.

$n = 1$	группы:	$\{e\}$	число разных групп	$= 1$
$n = 2$		Z_2		$= 1$
$n = 3$		$Z_3 = G_\Delta^+$		$= 1$
$n = 4$		Z_4, G_Π		$\geqslant 2 (= 2)$
$n = 5$		Z_5		$= 1$
$n = 6$		$Z_6 = G_6^+$, $G_3 = G_\Delta$		$\geqslant 2 (= 2)$
$n = 7$		Z_7		$= 1$
$n = 8$		Z_8, G_4		$\geqslant 2 (= 5!)$
$n = 12$		Z_{12}, G_6, G_T		$\geqslant 3 (= 5!)$

Группы Z_{12}, G_6, G_T в последней строке таблицы отличны друг от друга своим устройством (говорят «не изоморфные»):

в Z_{12} есть элемент порядка 12;

в G_6 нет элементов порядка 12, но есть элемент порядка 6 — поворот $R^{2\pi/6}$;

в G_T (в группе тетраэдра) нет элементов порядков 6 или 12 (порядки ее элементов суть 1, 2 и 3).

Можно поставить вопрос: сколько существует различных (*не изоморфных* друг другу) групп данного порядка n? При простых n ответ нам известен — ровно одна группа. В общем случае это весьма сложная задача.

Занятие 8. Подгруппы и раскраски

Порция 1

1. Найти порядки всех элементов и перечислить все образующие в группах Z_4, Z_5, Z_6, Z_8.

2. Перечислить все подгруппы групп Z_4, Z_6, Z_8.

3. Доказать, что в группе куба G_T нет подгрупп порядков 5 и 7.

Порция 2

Рассмотрим раскраски p вершин правильного p-угольника в 2 цвета. На сей раз две раскраски x и y будем считать эквивалентными (неразличимыми), если некоторый поворот R из групп поворотов G_p^+ p-угольника переводит раскраску x и y:

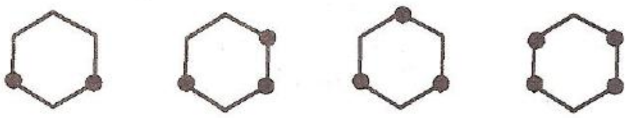
$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists R \in G_p^+ \;\; R(x) = y$$

Число раскрасок закрепленного p-угольника, очевидно, равно $F_2^p = 2^p$. Среди этих раскрасок есть две *монотонные* раскраски (белая и черная), а среди остальных $2^p - 2$ раскрасок имеются эквивалентные друг другу, и не столь понятно, как считать данные.

Заметим, что для данной закрепленной раскраски x эквивалентные x раскраски получаются из x поворотами $R_k \in G_p^+$, $\;R_k = R_0^k$.

4. Найти число закрепленных раскрасок, эквивалентных нарисованным

а) $(p = 4)$ 

б) $(p = 6)$ 

в) $(p = 5)$ 

5. Пусть p — простое число, x — какая-то монотонная раскраска вершин правильного p-угольника в n цветов. Доказать, что все получаемые из x поворотами p-угольника $R_k \in G_p^+$ закрепленные раскраски отличны друг от друга: среди раскрасок

$$R_1(x),\; R_2(x), \ldots,\; R_p(x) = E(x) = x, \text{ где } R_k = R_0^{k\cdot\frac{2\pi}{p}}, \text{ нет совпадающих.}$$

Указание. В случае простого p подгруппа H группы G_p^+, ***сохраняющая раскраску*** x, есть либо $\{e\}$, либо G_p^+!

6. Найти число $K = K_n^p$ различных раскрасок вершин правильного p-угольника в n цветов, если p — простое. (При раскрашивании не обязательно использовать все цвета.)

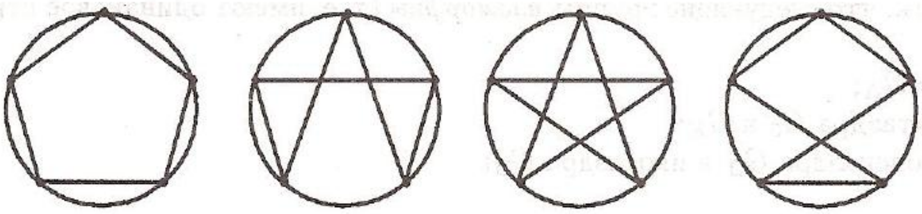
Комментарий после решения. Из формулы для $K = K_n^p$ следует так называемая

Малая теорема Ферма. Если p — простое, то для любого $n \in N$ число $n^p - n$ делится на p.

(При $p = 2$ или 3 очевидно арифметическое ее доказательство (какое?), но почему это так при $p = 5$ — неясно!)

Порция 3

7. Окружность разделена точками $A_1, A_2, \dots, A_p$ на p равных частей, p — простое. Найти число различимых p-звенных замкнутых ломаных вида $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, \dots, A_{i_p}, A_{i_1}$ с p *разными* вершинами в точках A_i. (Две ломаные считаются неразличимыми, если одна получается из другой поворотом.)

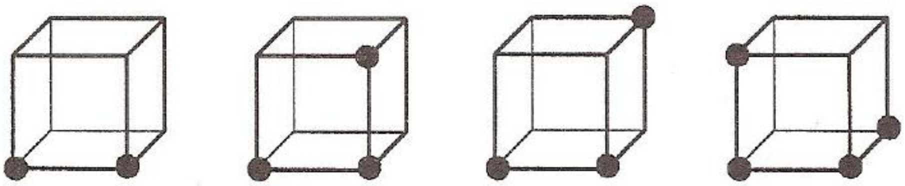


$(p = 5)$

? …

8. Сколькими различимыми способами можно покрасить в 2 цвета а) грани, б) вершины, в) ребра куба?

Раскраски вершин



9. Элементы a и b группы G, связанные соотношением вида $b = c \circ a \circ c^{-1}$, где c — некоторый третий элемент группы G, называются **сопряженными**. Доказать, что сопряженные элементы имеют равные порядки.

10. Доказать, что сопряженные подстановки a и $b \in S_n$ имеют одинаковые типы (т. е. разлагаются на циклы одной и той же длины).

11. Доказать, что если повороты f и g из группы G_Φ самосовмещений некоторой фигуры Φ сопряжены друг другу, т. е. $g = h \circ f \circ h^{-1}$, то g — поворот на тот же угол, что и f, причем ось g получается из оси f поворотом $h \in G_\Phi$.

12. Указать геометрическое представление группы куба G_K в группу подстановок из 4-х элементов S_4.

[**Комментарий**. Поскольку $[G_K] = 24 = [S_4]$, отсюда будет следовать, что группы G_k и S_4 устроены «совершенно одинаково» — **изоморфны**!]

13. Доказать, что при вершинном (или граневом) представлении T группы тетраэдра G_T в группу подстановок S_4 в этой группе подстановок получается подгруппа четных подстановок A_4, т. е. $H_T = A_4$.

14. Доказать, **теорему Лагранжа**: если H — любая подгруппа конечной группы G, то порядок G делится на порядок H.

[**Указание.** Построить, как при выводе Малой теоремы Лагранжа, разбиение группы G на подмножества, в каждом из которых было бы столько же элементов, сколько в H.]

15^K. Перечислить все возможные порядки подгрупп группы куба G_K и группы тетраэдра G_T. Указать хотя бы по одной группе перечисленных порядков. (Здесь есть одно **исключение**: докажите, что в группе G_T нет подгрупп порядка 6.)

$16^Д$. Решите предыдущую задачу для группы додекаэдра.

$17^Д$. Доказать, что следующие группы различны, не изоморфны друг другу:

а) S_4, G_{12}, Z_{24};

б) S_5, G_{60}.

$18^Д$. Указать группу порядка 8, отличную и от Z_8, и от G_4.

$19^Д$. Доказать, что следующие группы *изоморфны* (т. е. имеют одинаковое строение):

а) S_3 и $G_3 = G_\Delta$;

б) группа октаэдра G_0 и G_K;

в) группы додекаэдра $G_Д$ и икосаэдра $G_И$;

г) $G_И$ и A_5.

$20^Д$. В некоторой группе G все элементы имеют порядок 2. Доказать, что G коммутативна.

Подготовка к контрольным №№1–3 и к зачетной контрольной работе

Перечень ПОНЯТИЙ, которые нужно знать, ТЕОРЕМ и ФОРМУЛ, которые нужно уметь доказывать, ЗАДАЧ, которые нужно уметь решать, ВОПРОСОВ, на которые нужно уметь отвечать.

1. Число C_n всех подмножеств множества из n элементов.
2. Число P_k перестановок из k элементов.
3. Функции: инъективные, сюръективные, биективные. Примеры.
4. Число F_n^m всех функций «m» в «n».
5. Число A_n^m инъективных функций «m» в «n» (размещений).
6. Число k-элементных подмножеств множества из n элементов.
7. Формула Ньютона (бином).
8. Рекуррентное соотношение для C_n^k и треугольник Паскаля.
9. Число $C_n^{k_1,\dots,k_r}$ разбиений множества из n элементов на r подмножеств.
10. Композиция функций. Композиция биекций. Ассоциативность композиции.
11. Тождественное отображение. Обратное отображение.
12. Эквивалентность множеств. Примеры. Свойства эквивалентности.
13. Счетные множества и их свойства.
14. Счетность множества рациональных чисел.
15. Несчетность промежутка $[0,1[$ и множества $\mathbb{R}$.
16. Парадокс Рассела и теорема Кантора.
17. Группы самосовмещений фигур G_Φ: прямоугольника, правильных n-угольников, куба, тетраэдра (порядки групп и их элементы).
18. Группы подстановок из n элементов S_n: определение и свойства.
19. Некоммутативность групп G_Φ и S_n (примеры).
20. Общая схема решения уравнений $a \circ x = b$ и $x \circ a = b$.
21. Разложение подстановок на циклы. Тип и порядок.
22. Число $S_n^{k_1,\dots,k_r}$ подстановок данного типа. Число подстановок данного порядка (примеры).
23. Число различных раскрасок m элементов фигуры в n различных цветов.
24. Абстрактное определение группы. Примеры. Единственность нейтрального и обратного элементов .
25. Теорема о существовании конечного порядка элемента a.
26. Абстрактное определение подгруппы. Примеры и общие свойства.
27. Циклические и порожденные подгруппы. Примеры.
28. Сохраняющие подгруппы в G_Φ и S_n. Примеры.
29. Образующие в группах. Две образующие в G_Δ и G_n.
30. Две образующие в группе S_n.
31. Четность подстановок. Знакопеременная группа $A_n \subset S_n$ и ее порядок.
32. Вычисление четности подстановок через беспорядки и через транспозиции.
33. Две образующие в группе A_{15}.
34. Подгруппа $H_{15} \subset S_{15}$ игры в 15. Теорема: $H_{15} = A_{15}$.

35. Представления групп подстановками: определение и примеры.
36. Теорема Кэли и представление Кэли.
37. Малая теорема Лагранжа (о порядках группы и элемента).
38. Циклические группы (определение). Группы простого порядка (описание групп и их подгрупп).
39. Задача о раскраске вершин правильного p-угольника в n цветов (при простом p) и Малая теорема Ферма.
40. Теорема Лагранжа о порядках группы и подгруппы.
41. Список подгрупп группы куба.
42. Список подгрупп группы тетраэдра.
43. Представление группы куба в S_4.
44. Сопряженные элементы группы и их свойства.
45. Неизоморфные группы порядков 4, 6, 8, 12, 24.

Список литературы для дополнительного чтения

1. Н. Я. Виленкин, Популярная комбинаторика, М., "Наука", 1975.
2. Р. Курант и Г. Роббинс, Что такое математика, М., "Просвещение", 1967. (Глава II, §4).
3. М. Кац, С. Улам, Математика и логика. Ретроспектива и перспективы, М., "Мир", 1971. (Глава I, §13).
4. Г. С. М. Кокстер, Введение в геометрию, М., "Наука", 1966. (Главы 2, 10, 15).
5. И. Гроссман, В. Магнус, Группы и их графы, М., "Мир", 1971.
6. Л. А. Калужнин, В. И. Сушанский, Преобразования и перестановки, М., "Наука", 1979.
7. Факультативный курс: Избранные вопросы математики (7-8 классы), М., "Просвещение", 1978. (Глава "Симметрия").
8. П. С. Александров, Введение в теорию групп, М., "Наука", 1980.

Условия контрольных работ

Контрольная работа №1. Комбинаторика и функции

1. Сколько различных слов можно составить из ровно тех же букв (в том же количестве), что и в слове

| I вар | М А Т Е М А Т И К А ?

| II вар | А Б Р А К А Д А Б Р А ?

2. Сколькими способами компанию из 10 человек $\{a_1, \ldots, a_{10}\}$ можно усадить:

| I вар | а) за один круглый 11-местный стол ?

б) за два круглых стола — на 4 и на 6 мест?

| II вар | а) за круглый 10-местный стол, но так, чтобы a_1 и a_2 сидели рядом ?

б) за два круглых стола — на 7 и на 3 места?

3. Даны два множества:

| I вар | $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_5\}$

| II вар | $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{12}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_4\}$

а) Сколько всего существует функций $A \longrightarrow B$?

б) Сколько из них принимает ровно 2 значения из множества B?

в) Сколько существует функций $A \longrightarrow B$, принимающих каждое значение из множества B одинаковое число раз?

4. Сколько среди чисел 1, 2, 3, ... , 10 000 имеется таких

| I вар | которые не делятся ни на 2, ни на 7?

| II вар | которые делятся на 3 или на 5 (хотя бы на одно)?

5. Привести примеры:

а) инъективного, но не сюръективного отображения

| I вар | $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$;

| II вар | $f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$;

б) сюръективного, но не инъективного отображения

| I вар | $g : 2\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$;

| II вар | $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$;

($2\mathbb{N}$ — обозначение для множества четных натуральных чисел).

Контрольная работа №2

1. В группе S_n найти число подстановок порядка m:

| I вар | $n = 19$, $m = 35$.

| II вар | $n = 13$, $m = 15$.

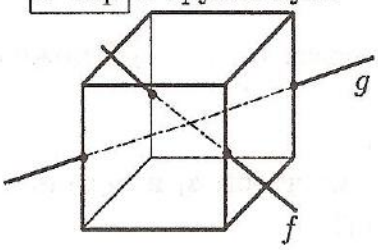
2. Найти число различных раскрасок

I вар вершин куба в 7 цветов, так, чтобы какие-то две противоположные вершины были окрашены одним цветом, причем все 7 цветов должны быть использованы.

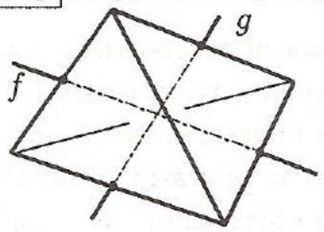
II вар граней куба в 5 цветов так, чтобы какие-то две противолежащие грани были окрашены одним цветом, причем все 5 цветов должны быть использованы.

3. Самосовмещения f и g из группы G_Φ — это повороты на 180° относительно указанных на рисунке осей:

I вар в группе куба



II вар в группе тетраэдра



Найти композицию $h = g \circ f$, т. е. указать ее ось и угол. Найти подгруппу группы G_Φ, порожденную элементами f g (указать все ее элементы, и отдельно — их число).

4. Найти две подстановки a и b

I вар в группе S_4, имеющие порядок 3 и такие, что порядок их композиции $c = a \circ b$ равен 2.

II вар в группе S_5, имеющие порядок 3 и такие, что порядок их композиции $c = a \circ b$ равен 5.

Контрольная работа №3. Группы и подгруппы

1. Найти все значения n, при которых подстановка $a \in S_{3n}$ является четной:

I вар

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \ldots & 3n \\ 1 & 4 & 7 & \ldots & 3n & 2 & 5 & \ldots & 3n-1 & 1 & 4 & \ldots & 3n \end{pmatrix}$$

II вар

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \ldots & 3n \\ 3 & 6 & 9 & \ldots & 3n & 2 & 5 & \ldots & 3n-1 & 1 & 4 & \ldots & 3n-2 \end{pmatrix}$$

2. Перечислить все подгруппы в группе

I вар $G = Z_{18}$.

II вар $G = Z_{12}$.

3. Указать (описать способ построения) подгруппы:

I вар

а) порядка 10 в группе S_9,
б) порядка 24 в группе S_9,
в) порядка 120 в группе S_9,
г) порядка 10 в группе S_6,

II вар

а) порядка 10 в группе S_7,
б) порядка 24 в группе S_7,
в) порядка 120 в группе S_7,
г) порядка 14 в группе S_8.

Зачетная контрольная работа

1. Найти в группе S_{10} подстановку

I вар

$$x = a^{1976}, \quad \text{если} \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

II вар

$$x = a^{1977}, \quad \text{если} \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. В классе m девочек и n мальчиков,

I вар $m = 7$, $n = 17$.

II вар $m = 5$, $n = 18$.

а) Сколькими способами этот класс можно разбить на две группы

I вар $A = \{3$ девочки $+10$ мальчиков$\}$ и $B = \{4$ д. $+ 7$ м.$\}$?

II вар $A = \{3$ девочки $+10$ мальчиков$\}$ и $B = \{2$ д. $+ 8$ м.$\}$?

б) Сколькими способами из этого класса можно выделить команду, в которой наличествовала бы по крайней мере одна девочка?

3. Имеется 10 красок. Сколькими способами можно покрасить

I вар 8 вершин

II вар 6 граней

куба разными цветами, если способы, получающиеся друг из друга самосовмещениями, считаются одинаковыми?

4. Даны три множества:
$A = \{a_1, \ldots, a_6\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_5\}$ и $C = \{c_1, \ldots, c_4\}$
Функции $f_0 : A \longrightarrow B$, $g_0 : B \longrightarrow C$ и $h_0 : A \longrightarrow C$ заданы своими таблицами —

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_2 & b_2 & b_3 & b_4 & b_4 & a_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_3 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ c_3 & c_3 & c_4 & c_3 & c_3 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Найти все функции

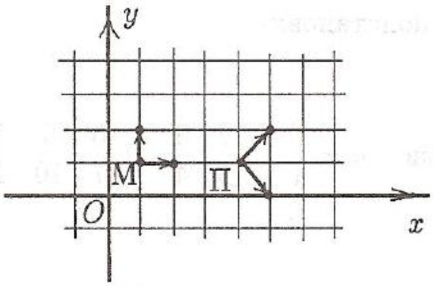
I вар $g : B \longrightarrow C$ такие, что $g \circ f_0 = h_0$.

II вар $f : A \longrightarrow B$ такие, что $g_0 \circ f = h_0$.

5. По листу бумаги в клетку ползает

I вар муха, которая за 1 сек передвигается на 1 клетку вправо и вверх.

II вар паук, который за 1 сек передвигается на 1 клетку по диагонали — вправо вверх и вниз.



а) Указать, в какие точки плоскости может попасть насекомое за 17 сек движения.

б) Найти число различных путей, по которым оно может добраться из точки $O = (0,\ 0)$ в точку A с координатами

I вар (10, 7).

II вар (17, 5).

6. В группе G_n самосовмещений правильного n-угольника найти подгруппы, порожденные следующими парами элементов

I вар в G_{10} подгруппы $H\left(R^{72^\circ}, R^{180^\circ}\right)$ и $H\left(R^{288^\circ}, S\right)$,

II вар в G_8 подгруппы $H\left(R^{90^\circ}, R^{225^\circ}\right)$ и $H\left(R^{135^\circ}, S\right)$,

— где S — симметрия n-угольника относительно оси, проведенной через две противолежащие вершины.

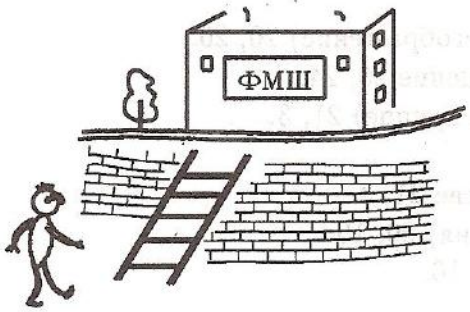
7. m ступенек лесенки окрашиваются в n цветов:

I вар $m = 9$, $n = 3$.

II вар $m = 8$, $n = 4$.

а) Сколькими способами можно раскрасить лесенку, если два способа, получающиеся друг из друга переворачиванием лесенки, считаются одинаковыми?

б) Сколькими способами можно раскрасить закрепленную у стенки лесенку, если соседние ступеньки закрашивать разными цветами?



Алфавитный указатель

(первое число обозначает номер журнала, второе (одно или более) — страницу (страницы) в этом номере)

Александр Николаевич Земляков,
кандидат педагогических наук,
ведущий научный сотрудник
лаборатории дифференциации образования
Института общего среднего образования
Российской академии образования (ИОСО РАО).

E-mail: zemmm@yandex.ru

Математический анализ, 10 класс

А. Л. Городенцев

Предлагаемые вниманию читателя листки по математическому анализу представляют собой вторую часть трехлетнего курса анализа для сильных математических классов и предназначены для 10-го класса. Первая часть курса — листки для 9-го класса — опубликована в журнале "Математическое образование", №2(13), 2000 г. Вторая часть рассчитана на школьников, свободно владеющих материалом первой. В настоящем номере публикуется первая половина листков для 10-го класса. Вторая половина будет опубликована в следующем номере.

Введение

Содержание курса примерно соответствует программе "Матшкольник", см. за исключением того, что изучение в школе последнего раздела этой программы — линейной алгебры, — по крайней мере, в том виде, как она там представлена, на мой взгляд, нереально и бессмысленно (на мехмате на это уходит семестр, включающий 4 часа лекций и 4 часа упражнений в неделю). Вместо этого мы уделяем подчеркнуто много внимания двум основным идеям собственно анализа: разложению функций (в том числе комплексных) в ряды и предельным переходам и пополнениям (в том числе в функциональных пространствах).

Благодарности Я пользуюсь случаем еще раз поблагодарить Рину Анно, Сережу Дориченко, Митю Михалина, Женю Смирнова и Костю Трушкина, без участия которых этого курса не было бы.

Листок № 21. Повторение: топология числовой прямой

М21◇1. Имеется последовательность отрезков, каждый из которых содержится в предыдущем, и длина отрезков стремится к нулю. Докажите, что пересечение всех этих отрезков непусто и состоит из одной точки.

М21◇2. Докажите, что любое покрытие отрезка интервалами содержит конечное подпокрытие.

М21◇3. Докажите, что любая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

М21◇4. Докажите, что две последовательности вещественных чисел (a_n) и (b_n) тогда и только тогда сходятся к общему конечному пределу, когда $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\, n \in \mathbb{N} : \forall\ k, m > n\ |a_k - b_m| < \varepsilon$.

Открытые и замкнутые множества. Для любого вещественного $\varepsilon > 0$ интервал

$$D_\varepsilon(p) \stackrel{\text{def}}{=} (p-\varepsilon, p+\varepsilon) = \{\, x\in\mathbb{R} : |x-p| < \varepsilon \,\} = \{\, x\in\mathbb{R} : p-\varepsilon < x < p+\varepsilon \,\}$$

называется ε-окрестностью точки $p \in \mathbb{R}$. Точка $a \in M$ называется *изолированной* точкой множества $M \subset \mathbb{R}$, если у неё есть ε-окрестность, не содержащая никаких других точек M, кроме a. Множество называется *дискретным*, если все его точки — изолированные. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *внутренней* точкой множества $M \subset \mathbb{R}$, если у неё есть ε-окрестность, целиком содержащаяся в M. Множество называется *открытым*, если все его точки — внутренние. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если *любая* её ε-окрестность содержит какую-нибудь точку $x \in M$, отличную от a. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки (в частности, если их у него вообще нет). Пустое множество, по определению, считается и открытым, и замкнутым. Непустые ограниченные замкнутые множества называются *компактами*.

М21◇5. Можно ли представить отрезок в виде объединения двух его собственных[1]

а) открытых,

б) замкнутых

подмножеств?

М21◇6. Докажите, что множество $Z \subset \mathbb{R}$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R} \setminus Z = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \notin Z \,\}$ открыто. Перечислите все одновременно открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{R}$.

М21◇7. Докажите, что произвольное открытое множество на прямой представляет собой объединение не более, чем счетного, набора попарно непересекающихся интервалов (a_i, b_i), где $a_i < b_i$ $a_i \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

М21◇8. Докажите, что объединение двух замкнутых множеств и пересечение любого набора замкнутых множеств являются замкнутыми множествами. Сформулируйте и докажите соответствующие факты об открытых множествах.

М21◇9. Существует ли множество, множество всех предельных которого есть:

а) $\varnothing$; б) одна точка; в) две точки;

г) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$; д) $\{1/k \mid k \in \mathbb{N}\}$?

М21◇10. Может ли бесконечное ограниченное множество не иметь предельных точек?

М21◇11. Существуют ли на прямой бесконечные дискретные компакты?

М21◇12. Какие из перечисленных далее свойств непустого подмножества $Z \subset \mathbb{R}$ эквивалентны друг другу:

а) Z компакт;

б) Z ограничено и замкнуто;

в) любое покрытие Z открытыми множествами содержит конечное подпокрытие;

г) любая последовательность элементов Z содержит подпоследовательность, которая имеет предел, принадлежащий Z.

[1] $S \subset M$ называется *собственным* подмножеством, если $S \neq \varnothing$ и $S \neq M$.

Листок № 22. Предел функции

Предел функции. Пусть функция f определена на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ является его предельной точкой. Число p называется *пределом* функции f при $x \to x_0$ (обозначение: $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать число $\delta > 0$ так, чтобы в каждой отличной от x_0 точке $x \in D_\delta(x_0) \cap X$ значение $f(x)$ принадлежало бы $D_\varepsilon(p)$. Более формально:

$$p = \lim_{x \to x_0} f(x) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \ \forall x \in X \quad \Big(x \neq x_0 \quad \& \quad |x - x_0| < \delta \Big) \Rightarrow |f(x) - p| < \varepsilon$$

М22◇1°. Верно ли, что $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ тогда и только тогда, когда для любой сходящейся к x_0 последовательности $(a_n) \subset X$ последовательность $b_n = f(a_n)$ сходится к p? Если да, объясните, почему, если нет, скажите, что надо исправить, чтобы получилась верная теорема.

М22◇2. Вычислите (с явным отысканием δ по ε) :

а) $\lim\limits_{x \to 3} 4x$; б) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{x-1}$; в) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^k - 1}{x - 1}$, $k \in \mathbb{N}$;

г) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{-k} - 1}{x - 1}$, $k \in \mathbb{N}$; д) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$; е) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{1/3} - 1}{x - 1}$.

М22◇3°. Пусть функции f, g обе определены на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ является его предельной точкой, и существуют

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = p \qquad \text{и} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = q.$$

Сформулируйте и докажите теоремы о пределах (при $x \to x_0$) функций:

а) $cf(x)$, где c – константа; б) $f(x) \pm g(x)$;

в) $f(x) \cdot g(x)$; г) $f(x) / g(x)$.

М22◇4. Пусть функция $y = g(x)$ определена на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ является его предельной точкой, существует $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$, и этот y_0 является предельной точкой для некоего множества $Y \supset g(X)$, на котором задана другая функция $z = f(y)$ с $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = z_0$. Верно ли, что $z_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f\big(g(x)\big)$? Если да, объясните, почему, если нет, скажите, что надо исправить, чтобы получилась верная теорема.

М22◇5°. Дайте формальное определение тому, что $f(x) \to p$ при x, стремящемся к x_0 *слева* или *справа* (обозначения: $x \to x_0 - 0$ или $x \nearrow x_0$, и соответственно, $x \to x_0 + 0$ или $x \searrow x_0$).

М22◇6°. Дайте формальное определение тому, то $f(x) \to p$ при $x \to \infty$, а также при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, (в каждом из случаев: $x \to x_0$):

а) $p \in \mathbb{R}$, б) $p = \infty$, в) $p = +\infty$, г) $p = -\infty$,

М22◇7. Пусть $f(x) \to \infty$ при $x \to 0$. Можно ли что-то сказать про $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{f\left(1/x\right)}$?

М22◇8. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$, где $m, n \in \mathbb{N}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{(x+5)(x-7)} - x\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}} - \dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$;

е) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x\right)$; ж) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

Асимптоты. Прямая, заданная уравнением $y = ax + b$, называется (*наклонной*) *асимптотой*[1] графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (соотв. при $x \to -\infty$), если $f(x)$ определена при всех $x \gg 0$ (соотв. $x \ll 0$) и $|ax + b - f(x)| \to 0$ при $x \to +\infty$ (соотв. $x \to -\infty$). Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* при x, стремящемся к x_0 слева (соотв. справа), если $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \infty$ (соотв. $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = \infty$).

М22◇9. Нарисуйте (с точным указанием всех асимптот) графики функций:

а) $x + 1/x$; б) $x^2 + 1/x$; в) $\dfrac{x+3}{2-x}$;

г) $\sqrt{x(1+x)}$; д) $\dfrac{x^2-4x+3}{x+1}$; е) $\dfrac{(x+1)(x-2)(x+3)}{x^2+1}$.

М22◇10*. Нарисуйте траекторию точки, координаты которой зависят от времени $t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ по закону:

а) $x = t + 1/t$, $y = t^2 + 1/t$; б) $x = t^2/(t-1)$, $y = t/(t^2-1)$.

Листок № 23. Непрерывные функции

Определения. Пусть функция $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ определена на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$, и $x_0 \in X$ является предельной точкой этого множества. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, т. е. если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in X \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Функция $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ называется *непрерывной* на данном множестве, если она определена и непрерывна в каждой точке этого множества.

[1] асимптоты с $a = 0$ называются так же *горизонтальными*.

M23◇1. Проверьте (с явным отысканием δ по ε в каждой точке), что функции $y = 5\,x^2$ и $y = \sqrt[3]{x}/2$ непрерывны во всех точках числовой прямой.

M23◇2. Верно ли, что f непрерывна в $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда для любой сходящейся к x_0 последовательности (a_n) выполнено равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$?

M23◇3. Сформулируйте на ε–δ языке то, что функция f разрывна в точке x_0.

M23◇4. Существует ли функция $[0\,,1] \xrightarrow{f} [0\,,1]$ которая

а) разрывна во всех точках;

б) непрерывна в единственной точке $x_0 = 1/2$;

в) то же, но монотонно неубывает;

г) непрерывна во всех точках $1/k$ с $k \in \mathbb{N}$ и только в них;

M23◇5*. Существует ли функция непрерывная во всех иррациональных точках и разрывная во всех рациональных?

M23◇6. Пусть функция $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ непрерывна в $x_0 \in X$ и $f(x_0) \neq 0$. Всегда ли у точки x_0 есть такая ε-окрестность D, что функция $y = 1/f(x)$ определена всюду в $D \cap X$ и тоже непрерывна в точке x_0?

M23◇7 (инерция знака). Докажите, что в предыдущей задаче окрестность D можно подобрать так, чтобы функция $f(x)$ имела во всех точках $D \cap X$ тот же знак, что и $f(x_0)$.

M23◇8. Сформулируйте и докажите теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного двух непрерывных функций.

M23◇9. Функция $y = \Big(f(x)\Big)^2$ непрерывна на $[0\,,1]$. Может ли при этом функция $y = f(x)$ быть разрывна:

а) всюду; б) всюду, кроме одной точки; в) ровно в одной точке?

M23◇10 (топологическое определение непрерывности). Докажите, что функция $U \xrightarrow{f} V$ между двумя открытыми множествами $U, V \subset \mathbb{R}$ всюду непрерывна тогда и только тогда, когда полный прообраз

$$f^{-1}(W) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in U \mid f(u) \in W\}$$

любого открытого подмножества $W \subset V$ открыт.

M23◇11. Верно ли, что всюду непрерывная функция $U \xrightarrow{f} V$ между двумя открытыми множествами $U, V \subset \mathbb{R}$ переводит компактные подмножества $K \subset U$ в компактные?

M23◇12 (свойства непрерывных функций на отрезке). Пусть функция f определена и непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$. Верно ли, что множество значений $f([a, b])$:

а) ограничено; б) содержит свои твг и тнг; в) является отрезком;

г) $\forall\, \alpha, \beta \in [a, b]$ оно содержит все числа c, лежащие между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$.

M23◇13. Докажите, что уравнение $f(x) = 0$, где f — любой многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами, всегда имеет действительное решение.

М23◇14. Математический маятник представляет собой точечный груз массы m подвешенный в однородном вертикальном поле тяжести на конце невесомого абсолютно твёрдого отрезка, способного без трения вращаться в фиксированной вертикальной плоскости вокруг другого своего конца. Маятник без толчка отпускают из положения, составляющего с горизонталью угол α_0. Через 5 мин он оказался с горизонталью под углом α_1. Является ли α_1 непрерывной функцией от α_0 и можно ли подобрать α_0 так, чтобы $\alpha_1 = 60°$?

Листок № 23. Геометрические эффекты и топологические патологии

М23$\frac{1}{2}$◇1 (волосоида). Нарисуйте график какой-нибудь ограниченной и непрерывной всюду, кроме нуля, функции $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, такой что ни один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)$ не существует.

М23$\frac{1}{2}$◇2 (разрывы монотонных функций). Пусть функция f определена всюду на отрезке $[a, b]$ и монотонно неубывает на нём. Верно ли, что

а) $\forall c \in (a, b)$ существуют (и конечны) оба односторонних предела $\lim\limits_{x\searrow c} f(x)$ и $\lim\limits_{x\nearrow c} f(x)$;

б) множество точек разрыва функции f на $[a, b]$ не более, чем счётно?

М23$\frac{1}{2}$◇3 (непрерывность выпуклых функций). Функция f называется *выпуклой вверх* (соотв. *вниз*) на интервале I, если она определена всюду на I и для любого отрезка $[a, b] \subset I$ график f над интервалом (a, b) лежит строго выше (соотв. строго ниже) отрезка, соединяющего точку $(a, f(a))$ с точкой $(b, f(b))$. Верно ли, что выпуклость (в любую сторону) влечёт непрерывность?

О «редкости» и «малости». Подмножество $M \subset [a, b]$ называется *всюду плотным*, если любой интервал $I \subset [a, b]$ содержит бесконечно много точек из M. Подмножество $M \subset [a, b]$ называется *нигде не плотным*, если в любом интервале $I \subset [a, b]$ можно указать подинтервал $J \subset I$, не содержащий точек из M. Про подмножество $M \subset [a, b]$, которое можно покрыть не более чем счётной системой интервалов, суммарная длина которых сколь угодно мала, говорят, что оно имеет *меру нуль*.

М23$\frac{1}{2}$◇4. Имеет ли меру нуль множество:

а) рациональных б) иррациональных чисел?

М23$\frac{1}{2}$◇5. Будет ли канторово множество

а) нигде не плотным б) множеством меры нуль?

М23$\frac{1}{2}$◇6. Можно ли представить отрезок в виде объединения счётного набора его

а) подмножеств меры нуль? б) нигде не плотных подмножеств?

М23$\frac{1}{2}$◇7. Можно ли представить множество иррациональных чисел на $[0, 1]$ в виде объединения счётного набора замкнутых множеств?

М23$\frac{1}{2}$◇8. Докажите, что множество точек непрерывности произвольной функции является пересечением счётного набора открытых множеств.

M23$\frac{1}{2}$◇9. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных?

M23$\frac{1}{2}$◇10. Существует ли непрерывная функция $[0,1] \xrightarrow{f} [0,1]$, график которой *всюду плотен*[1] в единичном квадрате?

M23$\frac{1}{2}$◇11* (канторова лесенка). Существует ли непрерывная монотонно неубывающая функция $[0,1] \xrightarrow{f} [0,1]$, которая сюрьективно отображает канторово множество на $[0,1]$?

M23$\frac{1}{2}$◇12* (кривая Пеано). Существует ли сюрьективное и *непрерывное*[2] отображение единичного отрезка $[0,1] \subset \mathbb{R}^1$ на единичный квадрат

$$[0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2\,?$$

M23$\frac{1}{2}$◇13*. Существует ли *непрерывная в обе стороны* биекция[3] между отрезком и квадратом?

M23$\frac{1}{2}$◇14* (универсальное замкнутое множество). Существует ли замкнутое подмножество единичного квадрата, среди сечений которого прямыми, параллельными оси OX, встречаются все замкнутые подмножества единичного отрезка?

Листок № 24. Длина окружности и площадь круга

(в этом листке запрещено использование тригонометрии)

M24◇1. У какого из выпуклых многоугольников $M_1 \subset M_2$ меньше площадь и периметр?

Терминология и обозначения. Разбиение p данной дуги AB на данной окружности с центром O — это набор точек $p = \{P_0, P_1, \dots, P_n\} \subset AB$, расположенных на дуге так, что $P_0 = A$, $P_n = B$, и при всех $i = 1, 2, \dots, (n-1)$ точка P_i лежит строго между P_{i-1} и P_{i+1}. Ломаная $P_0P_1P_2\dots P_n$ называется *вписанной ломаной* разбиения p, её длина обозначается через $\ell(p)$, а длина самой длиной её стороны — через $\lambda(p)$. Аналогично, многоугольник $OP_0P_1P_2\dots P_n$ называется *вписанным многоугольником* разбиения p, а его площадь обозначается $S(p)$.

M24◇2. $\forall$ разбиений p_1, p_2 постройте разбиение p, содержащее как p_1, так и p_2, и докажите, что множества значений $\ell(p)$ и $S(p)$ при всевозможных p ограничены сверху.

Определения. $\ell(AB) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_p \ell(p)$ называется *длиной дуги*, а $S(AOB) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_p S(p)$ — *площадью сектора*.

[1] это означает, что любой непустой открытый квадратик пересекается с графиком.

[2] отображение $[0,1] \xrightarrow{\varphi} [0,1]\times[0,1]$ непрерывно, если $\forall x_0 \in [0,1]\,,\ \forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta > 0:$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(x), \varphi(x_0)| < \varepsilon$.

[3] непрерывные в обе стороны биекции называются *гомеоморфизмами*.

M24◇3°. Пусть $AC = AB \cup BC$, и $AB \cap BC = B$. Выразите $\ell(AC)$ и $S(AOC)$ через $\ell(AB)$, $\ell(BC)$, $S(AOB)$ и $S(BOC)$.

M24◇4°. Докажите, что отношение $\ell(AB)$ к радиусу и к длине полуокружности, а также отношение $S(AOB)$ к квадрату радиуса, зависят только от величины угла AOB, но не от радиуса окружности и положения дуги на ней.

M24◇5*. Покажите, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, такое что для всякого разбиения p с $\lambda(p) < \delta$ обе погрешности $|\ell(AB) - \ell(p)|$ и $|S(AOB) - S(p)|$ не превышают ε.

M24◇6. Выразите площадь сектора через длину дуги и радиус.

Радианная мера угла показывает, какую часть составляет этот угол от развёрнутого угла π. Точнее, длина полуокружности единичного радиуса обозначается через π, и если отношение длины дуги AB к длине полуокружности того же радиуса равно ϑ, то говорят, что дуга AB (и центральный угол AOB) составляют $\vartheta\pi$ радиан. Подчеркнём, что $\vartheta\pi \in \mathbb{R}$.

M24◇7 (архимедово вычисление числа π). Пусть p_n — это разбиение полуокружности радиуса 1 на 2^n равных дуг, и $\lambda_n \overset{\text{def}}{=} \lambda(p_n)$, $\ell_n \overset{\text{def}}{=} \ell(p_n)$, $S_n \overset{\text{def}}{=} S(p_n)$. Выразите λ_n, ℓ_n и S_n через λ_{n-1} и представьте λ_n как

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2}}}}}$$

(сколько тут радикалов?). Используя только четыре арифметических действия и извлечение квадратных корней[1], вычислите число π с точностью до 2-го знака после запятой.

Универсальное накрытие единичной окружности числовой прямой. Сопоставим каждому числу $t \in \mathbb{R}$ точку на единичной окружности $S^1 \overset{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, получающуюся откладыванием от точки $(1,0)$ дуги длины $|t|$ по ЧС, если $t < 0$, и против ЧС, если $t > 0$. Иначе говоря, числовая прямая $\mathbb{R}^1$, ориентированная также, как ось OY, приставляется своим нулём $0 \in \mathbb{R}^1$ к точке $(1,0) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$ и затем наматывается на S^1, как нерастяжимая нитка на катушку. При этом числа $t \in \mathbb{R}$, отличающиеся на целое число оборотов (т. е. на целые кратные 2π), переходят в одну и ту же точку окружности. Набор чисел $t \in \mathbb{R}$, переходящих в данную точку $P \in S^1$, называется *аргументом* точки P (или *многозначным ориентированным углом* луча OP с осью OX); обозначение: $Arg(P)$.

M24◇8. В какой четверти лежат точки с аргументами $57\pi/4$ и 2000 ?

M24◇9. Напишите формулу, описывающую все $t \in \mathbb{R}$, переходящие при универсальном накрытии в точки $(x,y) \in S^1$, у которых

а) $x = 1/2$; б) $y = -1$; в) $x = -\sqrt{2}/2$;

г) $y = 1/\sqrt{3}$; д) $y < 0$ и $x > 0$; е) $y \in \left[-1/2, \sqrt{2}/2\right]$;

ж) $x \in \left[-\sqrt{3}/2, 1/2\right]$; з) $x \in \left[-\sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2\right]$ и $y \in \left[-1/2, 1/2\right]$.

---

[1] можете, по немощи своей, использовать тут машинку, которой, однако, у Архимеда не было.

Листок № 25. Тригонометрия

Тригонометрические функции. Пусть число $t \in \mathbb{R}$ переходит при универсальном накрытии $\mathbb{R} \twoheadrightarrow S^1$ в точку с координатами (x, y) на единичной окружности. Эти координаты обозначаются через $\cos t \overset{\text{def}}{=} x$ и $\sin t \overset{\text{def}}{=} y$ и называются *косинусом* и *синусом* числа $t \in \mathbb{R}$. Эти две функции, а также $\operatorname{tg} t \overset{\text{def}}{=} \sin t / \cos t$, $\operatorname{ctg} t \overset{\text{def}}{=} \cos t / \sin t$, $\sec t \overset{\text{def}}{=} 1/\cos t$ и $\operatorname{cosec} t \overset{\text{def}}{=} 1/\sin t$ обычно називат *тригонометрическими* функциями действительного числа t. Прямо из определений вытекают *основные тригонометрические тождества*: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, $\operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t - 1$, $\operatorname{ctg}^2 t = \operatorname{cosec}^2 t - 1$.

М25◇1°. Найдите области определения и постройте графики всех тригонометрических функций, исследуйте их на периодичность и чётность.

М25◇2° (формулы приведения). Представьте в виде тригонометрической функции от аргумента t синус, косинус и тангенс от

а) $-t$; б) $(\pm t \pm \pi)$; в) $(\pm t \pm \frac{\pi}{2})$.

М25◇3. Положительны или отрицательны числа $\sin(-10)$ и $\cos(100)$?

М25◇4. Найдите все $\vartheta \in \mathbb{R}$, для которых:

а) $\cos\vartheta = 0$; б) $\sin\vartheta = -1$; в) $\sin\vartheta > \sqrt{2}/2$; г) $\sin\vartheta \leqslant 1/2$;
д) $-\sqrt{3}/2 \leqslant \cos\vartheta < 1/2$; е) $|\operatorname{tg}\vartheta| < 1$; ж) $\sin\vartheta < \cos\vartheta$;
з) $\operatorname{tg}\vartheta \geqslant \operatorname{ctg}\vartheta$.

М25◇5. При каком c прямая $ax + by = c$ касается единичной окружности? Найдите максимальное и минимальное значения функции $a\cos t + b\sin t$ с заданными $a, b \in \mathbb{R}$.

М25◇6. Всегда ли $|\sin\vartheta + \cos\vartheta| \leqslant \sqrt{2}$? При каких ϑ выполнено равенство?

Обратные тригонометрические функции: число $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$ называется *арксинусом* (соотв. *арктангенсом*) числа x, если $\sin\vartheta = x$ (соотв. $\operatorname{tg}\vartheta = x$); число $\vartheta \in [0, \pi]$, такое что $\cos\vartheta = x$, называется *арккосинусом* числа x. Обозначения: $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\arccos x$.

М25◇7°. Для каждой из трёх обратных тригонометрических функций запомните множество значений, укажите область определения и постройте график. Найдите $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} x$.

М25◇8°. Найдите: а) $\arcsin\cos 2000$; б) $\cos\operatorname{arctg} 2000$; в) $\cos\arcsin x$.

М25◇9 (сдвиг по фазе). Всякая ли линейная комбинация $a\cos t + b\sin t$ с фиксированными $a, b \in \mathbb{R}$ представляется в виде $\alpha\cos(t + \varphi)$ с подходящими *амплитудой* α и *фазой* φ?

М25◇10 (рациональная параметризация окружности). Пусть проекция единичной окружности из точки $(-1, 0)$ на прямую $x = 1$ переводит точку (x, y) в точку $(1, 2t)$. Выразите x и y в виде рациональных функций от t и найдите пределы этих функций при $t \to \pm\infty$. Верно ли, что эти функции задают взаимно однозначное отображение между рациональными точками прямой $x = 1$ и отличными от $(-1, 0)$ точками единичной окружности, обе координаты которых рациональны?

М25◇11. Пользуясь зад. М25◇10, выразите $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$ через $\operatorname{tg}(x/2)$.

М25◇12 (пифагоро́вы тройки). Пользуясь зад. М25◇10, напишите функции $a(p,q)$, $b(p,q)$ и $c(p,q)$ при подстановке в которые произвольных целых чисел p, q будут получаться все возможные целые решения уравнения Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$ и только они.

М25◇13. Какими неравенствами связаны x, $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ при $0 < x < \pi/2$?

М25◇14. Докажите, что все

а) тригонометрические;

б) обратные тригонометрические

функции[1] непрерывны всюду на своей области определения.

М25◇15. Вычислите: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$, е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 5x}$, ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\operatorname{arctg} x}{1-\cos x}$, з) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos x}{x\sin(2x)}$.

Листок № 26. Комплексные числа

Комплексное число — это точка z на плоскости $\mathbb{C}$ с фиксированной системой прямоугольных координат XoY, единичные базисные векторы которой обозначаются $\{\vec{1}, \vec{i}\}$ (см. рис. 26.1). С каждым $z \in \mathbb{C}$ свяжем пару координат (x, y) и радиус-вектор $\vec{oz} = x \cdot \vec{1} + y \cdot \vec{i}$, что обычно записывают просто как $z = x + iy$. Действительные числа $Re\, z \stackrel{\text{def}}{=} x$, $Im\, z \stackrel{\text{def}}{=} y$ и $|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2+y^2}$ называются *вещественной частью*, *мнимой частью* и *модулем* комплексного числа z. Многозначный ориентированный угол[1] луча oz с осью oX называется *аргументом* z и обозначается $Arg\, z$. Комплексные числа можно *складывать* и *перемножать*. По определению, при сложении комплексных чисел их радиус-векторы складываюся (по правилу параллелограмма), а при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются (так что умножение на фиксированное комплексное число $a : \mathbb{C} \xrightarrow{z \mapsto az} \mathbb{C}$ есть *поворотная гомотетия* на угол $\operatorname{Arg}(a)$ с центром o и коэффициентом $|a|$).

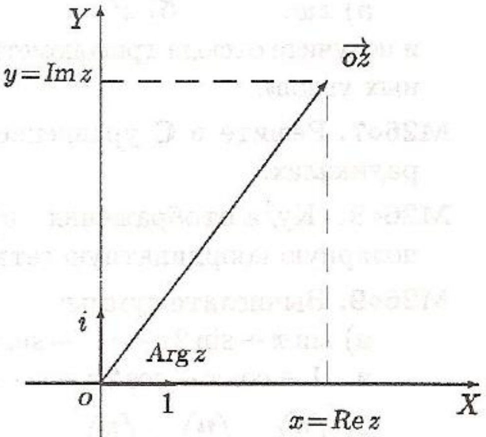


Рис. 26.1. Комплексное число.

М26◇1°. Найдите[2]

[1]совет: начните с синуса.

[1]напомним (см. **Листок № 24**), что с точностью до любого целого числа оборотов он равен ориентированной длине дуги, которую надо пройти по единичной окружности от луча $[oX)$ до луча $[oz)$, т. е. $Arg\, z = \{\varphi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, где φ — это радианная мера ориентированного угла $\widehat{xoz}$, а k — любое целое число.

[2]в этом листке «найдите z» означает «нарисуйте и вычислите $Re\, z$, $Im\, z$, $|z|$ и $Arg\, z$».

а) i^2; б) i^3; в) $1/i - 1$; г) $(1+i)^5/(1-i)^3$;

д) $\left(\sqrt{3}+i/1-i\right)^{30}$; е) $\left(i-\sqrt{3}/i-1\right)^{90}$;

ж) все z с $z^4=-1$; з) все z с $z^3=-i$.

М26◇2° **(сопряжение).** $\overline{z} \overset{\text{def}}{=} x - iy$ называется *сопряжённым* к $z = x - iy$; проверьте, что сопряжение перестановочно со сложением и умножением и выразите $1/z$ через $\overline{z}$ и $|z|$.

М26◇3°. Проверьте, что комплексные числа составляют *поле*[3], в которое поле $\mathbb{R}$ с сохранением операций вкладывается в качестве числовой прямой (oX). Вычислите действительную и мнимую части чисел $1/z$, $z+w$ и zw, если $z = x_1 + iy_1$, $w = x_2 + iy_2$.

М26◇4. Найдите:

а°) $(5+i)(7-6i)/(3+i)$; б) $(1+it)/(1-it)$ с $t\in\mathbb{R}$.

М26◇5°. Решите уравнения:

а) $z^2+(2i-7)z+(13-i)=0$ б) $(z+i)^3+(z-i)^3=0$ в) $\overline{z}=z^3$

М26◇6°. Пусть $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $w=\cos\beta+i\sin\beta$. Вычислите геометрически и путём раскрытия скобок действительную и мнимую части чисел

а) zw; б) z^2; в) z^3; г) z^4

и получите отсюда тригонометрические формулы «сложения аргуметов» и «кратных углов».

М26◇7. Решите в $\mathbb{C}$ уравнение $z^5=1$ и вычислите $\cos\left(2\pi/5\right)$ и $\sin\left(2\pi/5\right)$ в радикалах.

М26◇8. Куда отображения а) $z\longmapsto z^2$ б) $z\longmapsto 1/z$ переводят декартову и полярную координатную сетки, окружность $|z+i|=1$ и кошечку с рис. 26.2?

М26◇9. Вычислите суммы:

а) $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$
и $1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$;

б) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots$;

в) $\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\cdots$;

г) $\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\cdots$;

д) $2\sin x+3\sin 2x+\cdots+n\sin(n-1)x$
и $1+2\cos x+3\cos 2x+\cdots+n\cos(n-1)x$;

е) $1+2\zeta+3\zeta^2+\cdots+n\zeta^{n-1}$,
где $\zeta=\cos\left(2\pi/n\right)+i\sin\left(2\pi/n\right)$.

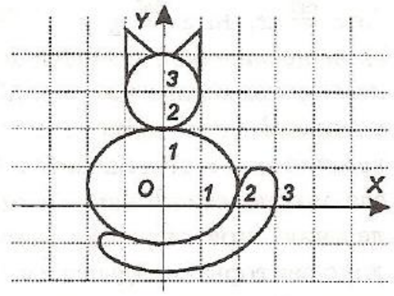


Рис. 26.2. Кривая $\Phi(x,y)=0$.

[3] т. е. что сложение и умножение подчиняются переместительному, сочетательному и распределительному законам, а уравнения $a+z=b$ и $cz=d$ при любых заданных a, b, d и $c\neq 0$ единственным образом разрешимы относительно z.

М26◇10. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ вычислите сумму и произведение s-тых степеней всех комплексных корней уравнения $z^n = 1$ при $s = 1, 2, 3 \ldots$.

Листок № 26. Кольца и поля

(памятка грядущим Властелинам Колец и Царицам Полей)

Коммутативное кольцо с единицей — это множество с двумя операциями: *сложением* $(a, b) \longmapsto a + b$ и *умножением* $(a, b) \longmapsto a \cdot b = ab$, которые подчиняюся следующим трём наборам аксиом.

1) Аксиомы сложения

   а) коммутативность (переместительный закон): $a + b = b + a \quad \forall a, b$;

   б) ассоциативность (сочетательный закон): $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c$;

   в) существование нейтрального элемента (нуля): $\exists\, 0 \,:\, a + 0 = a \quad \forall a$;

   г) существование противоположного: $\forall\, a \quad \exists\, (-a) \,:\, a + (-a) = 0$.

2) Аксиомы умножения

   а) коммутативность: $ab = ba \quad \forall a, b$;

   б) ассоциативность: $a(bc) = (ab)c \quad \forall a, b, c$;

   в) существование единицы: $\exists\, 1 \,:\, a \cdot 1 = a \quad \forall a$.

3) Аксиома дистрибутивности (распределительный закон): $a(b + c) = ab + ac \quad \forall a, b, c$.

Поле — это коммутативное кольцо с единицей, в котором $\forall\, a \neq 0 \quad \exists a^{-1} \,:\, a \cdot a^{-1} = 1$ (аксиома существования обратного) и $0 \neq 1$ (аксиома нетривиальности). Вторая аксиома запрещает называть полем *тривиальное кольцо* $K = \{0\}$, а первая говорит, что всякий ненулевой элемент поля *обратим*. В произвольном кольце допускаются необратимые элементы и даже *делители нуля* — элементы $a \neq 0$, такие что $ab = 0$ для некоторого $b \neq 0$.

М26$\frac{1}{2}$◇1. Может ли делитель нуля или сам нуль быть обратим в каком-либо кольце?

Примеры полей: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (вычеты по *простому* модулю p).

Примеры колец: $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (вычеты по модулю n); $C[0, 1]$ (непрерывные функции на отрезке); $K[x]$ (многочлены с коэффициентами из любого коммутативного кольца K с единицей); $\mathbb{Q}[x]/f\mathbb{Q}[x]$ (вычеты по модулю $f \in \mathbb{Q}[x]$, называемые также *алгебраическими числами* вида $a_0\vartheta^m + a_1\vartheta^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\vartheta + a_m$ с $f(\vartheta) = 0$, $m < \deg f$, $a_i \in \mathbb{Q}$ и обозначаемое в таком контексте через $\mathbb{Q}[\vartheta]$ с $f(\vartheta) = 0$; например,

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{\alpha + \beta\sqrt{2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2)\mathbb{Q}[x]$$

или

$$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}] = \{\alpha + \beta\sqrt[3]{5} + \gamma\sqrt[3]{25} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}[x]/(x^3 - 5)\mathbb{Q}[x]).$$

М26$\frac{1}{2}$◇2. Верно ли, что кольцо вычетов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ является полем тогда и только тогда, когда n просто?

M26$\frac{1}{2}$◇3. Верно ли, что кольцо алгебраических чисел $\mathbb{Q}[\vartheta]$ с $f(\vartheta) = 0$ является полем тогда и только тогда, когда f неприводим над $\mathbb{Q}$?

M26$\frac{1}{2}$◇4. Верно ли, что в любом поле:

а) нуль единственен; б) единица единственна;

в) $(-a)$ однозначно определяется по a;

г) a^{-1} однозначно определяется по a;

д) $a \cdot 0 = 0\ \forall a$; е) $(-1) \cdot a = (-a)\ \forall a$; ж) $ab = ac$ и $a \neq 0 \Rightarrow b = c$?

M26$\frac{1}{2}$◇5. Какие свойства из зад. M26$\frac{1}{2}$◇4 выполнены

а) в любом коммутативном кольце с 1?

б) в кольце без делителей нуля?

Вычитание и деление. В любом кольце есть *вычитание*: $(a, b) \longmapsto a - b \stackrel{\text{def}}{=} a + (-b)$, а если b обратим, то и *деление*: $(a, b) \longmapsto a/b \stackrel{\text{def}}{=} ab^{-1}$.

M26$\frac{1}{2}$◇6. Можно ли определить $a - b$ как единственный элемент, дающий a в сумме с b?

Листок № 27. Многочлены

Обозначения. Всюду в этом листке через k обозначается любое из *полей* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, а через $k[x]$ — *кольцо* многочленов от переменной x с коэффициентами в поле k. Многочлен f называется *неприводимым*, если $f \neq gh$ с $\deg g, \deg h < \deg f$. Многочлен со старшим коэффициентом 1 называется *приведённым*. Если $f(x) = (x - \alpha)^m g(x)$ и $g(\alpha) \neq 0$, то α называется *m-кратным корнем* f.

M27◇1°. Может ли неприводимый многочлен из $\mathbb{Q}[x]$ быть приводимым в $\mathbb{R}[x]$ или $\mathbb{C}[x]$?

M27◇2°. Докажите, что для любых двух многочленов $f, g \in k[x]$ существуют единственные многочлены $q, r \in k[x]$, такие что $f = g \cdot q + r$ и либо $\deg r < \deg g$ либо $r = 0$.

M27◇3°. Докажите, что для любого набора многочленов $f_1, f_2, \dots, f_n$ существует единственный приведённый многочлен НОД$(f_1, f_2, \dots, f_n)$, который делит все f_i и делится на любой другой общий делитель всех f_i. Сформулируйте и докажите аналогичное о НОК$(f_1, f_2, \dots, f_n)$, а также, что НОД$(f_1, f_2, \dots, f_n) = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \dots + g_n f_n$ с подходящими $g_i \in k[x]$.

M27◇4°. Сформулируйте и докажите алгоритм Евклида вычисления НОД(f, g) и опробуйте его, представив НОД$(x^5 - 1, x^4 + x^2 + 1)$ в виде

$$f(x)(x^5 - 1) + g(x)(x^4 + x^2 + 1).$$

M27◇5°. Пусть НОД$(f, g) = 1$. Верно ли, что f делит gh, только когда f делит h, и что если h делится на f и на g, то h делится и на fg?

M27◇6. Найдите все $f \in \mathbb{Q}[x]$ с остатком $1 + x$, $1 + x^3$, $1 + x^5$ от деления на $1 + x^2$, $1 + x^4$, $1 + x^8$.

M27◇7. Найдите остаток от деления x^{2000} на:

а) $(x-\alpha)$, где $\alpha \in k$; б) x^2+x+1; в) x^2+x-1.

М27◇8. Пусть $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ неприводимы и $\deg f \neq \deg g$. Могут ли они иметь общий корень в $\mathbb{C}$?

М27◇9. Могут ли два различных многочлена степеней, меньших n, принимать одинаковые значения в n точках? Сколько корней может быть у многочлена степени n?

М27◇10. Пусть числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k$ попарно различны. Напишите многочлен $f(x)$ степени n с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, равный 1 при $x=\alpha_0$. Много ли таких многочленов?

М27◇11. Подставим в многочлен $f \in k[x]$ вместо x сумму $x+t$, раскроем все скобки и сгруппируем результат по степеням t следующим образом:

$$f(x+t) = f^{(0)}(x) + f^{(1)}(x) \cdot t + g(x,t) \cdot t^2.$$

Выразите коэффициенты $f^{(0)}(x)$ и $f^{(1)}(x)$ через коэффициенты $f(x)$.

Производная. Многочлен $f^{(1)}$ из зад. М27◇11 называется *производной* от f и по-другому обозначается $f'(x)$ или $\frac{d}{dx}f$. Положим, далее, $f^{(2)} = f'' \stackrel{\text{def}}{=} (f')' = \frac{d^2}{dx^2}f$, и вообще,

$$f^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \left(f^{(k-1)}\right)' = \frac{d^k}{dx^k}f.$$

М27◇12. Обозначим через $\Delta_f(t_1, t_2)$ тангенс угла наклона прямой, пересекающей график многочлена f в точках с абсциссами t_1 и t_2, выраженный в виде *многочлена* от t_1, t_2. Докажите, что такое выражение действительно имеется и что $\Delta_f(x,x) = f'(x)$.

М27◇13. Выразите через $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ и $g'(x)$ производные:

а) $(f \pm g)'$; б) $(\alpha g)'$, $\alpha \in k$; в) $(x^m f)'$; г) $(f \cdot g)'$;

д) $\left(f/g\right)'$, если $f/g \in k[x]$; е) $(f^m)'$; ж) $(f(x^m))'$;

з) $(f(g(x)))'$.

М27◇14 (правило Лейбница и формула Тейлора). Докажите тождества:

а) $(fg)^{(k)} = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$; б) $f(x+y) = \sum\limits_{m=0}^{\deg f} \frac{1}{m!} f^{(m)}(x)\, y^m$.

М27◇15. Будет ли m-кратный корень многочлена f корнем f', и если да, то какой кратности?

М27◇16. Найдите все (комплексные) кратные корни

$$x^7 + 7x^5 - 36x^4 + 15x^3 - 216x^2 + 9x - 324.$$

М27◇17. Может ли неприводимый многочлен $f \in \mathbb{Q}[x]$ иметь кратный комплексный корень?

М27◇18 (формулы Виета). Каков коэффициент при x^k у

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)?$$

М27◇19. Можно ли линейной заменой переменного в $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$ уничтожить

а) член с x^{n-1}; б) два члена с x^{n-1} и с x^{n-2}?

М27◇20 (дискриминант). В зад. М27◇18 число $D_f \stackrel{\text{def}}{=} a_0^{2n-2}\prod\limits_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$ называется *дискриминантом* f. Выразите дискриминанты

а) x^2+px+q, б*) x^3+px+q

через p и q.

Листок № 27. Корни многочленов

М27$\frac{1}{2}$◇1. Разложите x^8+128 в произведение вещественных квадратных трёхчленов.

М27$\frac{1}{2}$◇2. Пусть $z=x+iy\in\mathbb{C}$ является корнем $f\in\mathbb{R}[x]$. Будет ли $\overline{z}=x-iy$ корнем f?

М27$\frac{1}{2}$◇3. Верно ли, что у любого кубического многочлена $f\in\mathbb{R}[x]$ есть либо три вещественных (возможно, кратных) корня, либо ровно один вещественный и два невещественных комплексно сопряжённых корня. Как различить эти случаи глядя на D_f?

М27$\frac{1}{2}$◇4°. Пусть $\mathbb{F}$ — любое поле, $x^2-d\in\mathbb{F}[x]$ неприводим над $\mathbb{F}$, и $\mathbb{F}(d)=\{\alpha+\beta\sqrt{d}\mid\alpha,\beta\in\mathbb{F}\}$ — *квадратичное расширение* поля $\mathbb{F}$, как в листке $17\frac{2}{3}$. Будет ли $\mathbb{F}(d)$ полем?

М27$\frac{1}{2}$◇5. Пусть в зад. М27$\frac{1}{2}$◇4 некий кубический $f\in\mathbb{F}[x]$ имеет в $\mathbb{F}(d)$ корень $a+b\sqrt{d}$. Верно ли, что:

а) $a-b\sqrt{d}$ тоже корень f; б) f приводим над $\mathbb{F}$; в) у f есть корень в $\mathbb{F}$?

М27$\frac{1}{2}$◇6. Докажите, что кубический многочлен с целыми коэффициентами, который имеет корень, выражающийся через 1 конечным числом сложений, умножений, вычитаний, делений и извлечений квадратных корней, имеет и рациональный корень.

М27$\frac{1}{2}$◇7*. Есть ли угол, не разбивающийся циркулем и линейкой на три равных части?

М27$\frac{1}{2}$◇8*. Можно ли циркулем и линейкой построить правильный семиугольник?

М27$\frac{1}{2}$◇9 (решение кубического уравнения в тригонометрических функциях). Пользуясь формулой для косинуса тройного угла, выразите корни многочлена $4x^3-3x-a$ с $a\in\mathbb{R}$ и $|a|\leqslant 1$ через тригонометрические функции. При каких условиях на дискриминант и коэффициенты многочлен x^3+px+q можно подходящей заменой $x\mapsto\alpha x$ сделать пропорциональным многочлену $4x^3-3x-a$ с $a\in\mathbb{R}$ и $|a|\leqslant 1$?

М27$\frac{1}{2}$◇10. Решите уравнения: а) $x^3-3x+1=0$, б*) $x^3+x^2-2x-1=0$.

М27$\frac{1}{2}$◇11 (решение кубического уравнения методом Кардано). Придумайте квадратное уравнение, корни z_1, z_2 которого таковы, что $\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}$ является корнем кубического трёхчлена $f(x) = x^3 + px + q$. Какой знак должен быть у D_f, чтобы числа z_1, z_2 оказались:

а) вещественны и различны; б) комплексно сопряжены?

М27$\frac{1}{2}$◇12. Найдите вещественные корни многочленов:

а) $x^3 - x + 1$; б*) $x^3 + 2x^2 + x + 1$.

М27$\frac{1}{2}$◇13. Вычислите в радикалах: а) $\cos(\pi/9)$, б) $\cos(\pi/12)$, в*) $\cos(\pi/7)$.

Топология поля $\mathbb{C}$. Под ε-окрестностью числа $z_0 \in \mathbb{C}$ мы понимаем

$$D_\varepsilon(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\},$$

т. е. открытый круг радиуса ε с центром в z_0. Пределы комплексных последовательностей и функций, непрерывность функций $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, предельные и изолированные точки комплексных множеств, открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{C}$ и т. п. определяются дословно так же, как в $\mathbb{R}$.

М27$\frac{1}{2}$◇14°. Сформулируйте и докажите теоремы о пределе суммы и произведения двух сходящихся комплексных последовательностей. Верно ли, что $z_n = x_n + iy_n \to z_0 = x_0 + iy_0$ в $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда $x_n \to x_0$ и $y_n \to y_0$ в $\mathbb{R}$?

М27$\frac{1}{2}$◇15. Пусть $f \in \mathbb{C}[x]$ — произвольный многочлен, отличный от константы. Верно ли, что:

а) $\forall$ замкнутого круга $D \subset \mathbb{C}$ $\exists\, z_1, z_2 \in D$: $|f(z_1)| = \inf_D |f(z)|$ и $|f(z_2)| = \sup_D |f(z)|$;

б) $|f(z)| \to \infty$ при $z \to \infty$; в) $\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$: $|f(z_0)| = \inf_{\mathbb{C}} |f(z)|$?

М27$\frac{1}{2}$◇16 (лемма Даламбера). Для любого $f \in \mathbb{C}[x]$, такого что $f(z_0) \neq 0$, найдите вблизи z_0 точку z, где $|f(z)| < |f(z_0)|$ (подсказка: запишите $f(x)$ по возрастанию степеней $(x - z_0)$ как $f(x) = f(z_0) + a_m(x-z_0)^m + a_{m+1}(x-z_0)^{m+1} + \cdots$, где m — младшая из степеней с $a_m \neq 0$, возьмите $\vartheta \in \mathbb{C}$ так, чтобы $a_m\vartheta^m = -f(z_0)$, и ищите z в виде $z_0 + t\vartheta$ с $t \in \mathbb{R}$).

М27$\frac{1}{2}$◇17* (алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{C}$). Докажите, что любой многочлен степени n из $\mathbb{C}[x]$ имеет (с учётом кратностей) ровно n комплексных корней.

М27$\frac{1}{2}$◇18. Опишите все неприводимые многочлены в $\mathbb{C}[x]$ и в $\mathbb{R}[x]$.

Городенцев Алексей Львович,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Института Теоретической и Экспериментальной Физики (Москва).

e-mail gorod@mccme.ru, gorod@gate.itep.ru

Введение в вероятностное прогнозирование. Курс лекций и упражнений

И. П. Костенко

УДК 519.21 ББК 22.171

Начинаем публикацию учебного пособия по теории вероятностей, предназначенного, по замыслу автора, для самого широкого круга читателей, хотя и ориентированного, в основном, на студентов технических специальностей. Автор пособия Игорь Петрович Костенко знаком читателям нашего журнала по публикации в №3(18), 2001 г. Пособие опирается на ряд педагогических принципов, которые подробно разъяснены в предисловии. При ссылке на формулу указывается номер лекции и номер формулы в данной лекции.

Предисловие

Современные учебные курсы математики составляются под сильным влиянием научной Системы, т. е. под влиянием абстрактной логической Формы, в которую пакуются Знания. Характерные особенности курсов: дедуктивная организация содержания ("от общего к частному"), формальная строгость определений и доказательств, "логическая завершённость".

Эти качества сильно затрудняют понимание предмета и даже делают его невозможным, потому что вступают в неодолимое для новичка противоречие с психологическими закономерностями восприятия и осмысления нового.

Нормальный, естественный процесс человеческого познания всегда идёт "от конкретного к абстрактному", от примеров к постепенным обобщениям. Так идёт процесс научного познания. Так должен идти и нормальный, правильный процесс обучения. Если же Процесс подменяется Итогом, Познание умерщвляется.

В этой книге я стремился организовать **процесс** познания Ученика, максимально помочь и облегчить ему Труд Познания, сделать этот всегда не лёгкий труд посильным и, может быть, даже увлекательным. Такова педагогическая Цель книги.

Насколько удалось достичь этой цели, пусть судит уважаемый и любимый мною Читатель. Передо мной всегда стоял обобщённый образ Учащегося, сконцентрировавший взгляды, жесты, реплики, серьёзные или весёлые лица, разочарование или радость тысяч студентов, прошедших в течение более тридцати лет преподавания.

Профессионал-педагог, надеюсь, будет снисходителен к замеченным несовершенствам, понимая огромную сложность и длительность труда создания учебной книги, полезной Ученику, а не автору. Труд этот длиною в жизнь.

Для Педагога скажу несколько слов о методических принципах.

Абстракции не могут быть поняты, если не наполнены конкретным и образным содержанием. Основная причина непонимания математики учащимися — отсутствие или недостаток в их опыте необходимой конкретики, примеров и образов(!), оживляющих математические абстракции (понятия, теоремы, формально-логические рассуждения).

Отсюда первый и фундаментальный принцип: изложение должно начинаться с примеров и развиваться во взаимодействии конкретного и абстрактного — через анализ примеров и **постепенные** обобщения к точным формальным определениям и утверждениям. *Принцип органического взаимодействия теории и практики.* Именно так, в частности, вводится понятие классической вероятности в первой лекции.

Второе необходимое условие понимания — активность учащегося. Он сам должен добиваться понимания. Обязанность учителя — постоянно стимулировать познавательную активность ученика и давать ему "пищу". Методические средства для решения этой педагогической задачи — насыщение изложения **посильными** элементами проблемности и контрольные задания в конце каждого раздела лекции. Цель — самопроверка понимания и его коррекция. Я старался так составлять эти задания, чтобы они чуть-чуть выходили за пределы изложенного. Чуть-чуть! *Стимуляция самостоятельных* **д е й с т в и й** *учащегося* — второй принцип.

Итак, путь выбран — через конкретику и самостоятельные действия учащегося. И перед учителем встаёт очередная педагогическая задача: как облегчить ученику этот путь?

В психологии установлено, что главным фактором, определяющим способность человека выполнять любую умственную работу, является степень его психической перегрузки в этой работе. Следовательно, учитель, желающий действительно помочь ученику, должен структурировать материал на *цельные* и *неперегруженные* учебные порции, а внутри каждой такой порции очень подробно излагать материал. **Структурирование материала** — третий принцип, *подробность изложения* — четвёртый.

Общая структура курса проста — три цельных взаимосвязанных части:

1. Расчёт вероятностей (лекции 1-4);

2. Дискретные случайные величины с элементами математической статистики (лекции 5-8);

3. Непрерывные случайные величины с элементами статистики (лекции 9-13).

Каждая лекция состоит из небольших разделов, имеющих чёткую учебную цель, достижение которой проверяется контрольными заданиями.

Принцип подробности не так тривиален, как может казаться. Его нарушение — одна из основных причин непонимания. Степень подробности изложения определяется практикой, длительными наблюдениями за ошибками и затруднениями учащихся.

Следует отметить, что реализация отмеченных выше принципов затрагивает проблему отбора материала. Приходится довольно жёстко препарировать традиционное содержание, отбрасывая много привычного, что на поверку оказывается второстепенным, загромождает текст, мешает читателю сосредоточиться на главном.

Поясню теперь особенности содержания.

Книга посвящена последнему разделу общеинженерного курса высшей математики, который в министерских программах называется: "Теория вероятностей и математическая статистика". Эта дисциплина особенно актуальна для приложений в самых различных сферах — от техники и физики до экономики и социологии. И она особенно трудна для преподавания и усвоения, потому что требует нового мышления — не однозначно детерминированного, как в классической математике, а вероятностного.

Поскольку главная задача книги — "ориентировка на понимание" (Н. Лузин), я старался отобрать минимально необходимый материал, который бы составлял, тем не менее, целостную научно-педагогическую систему и был бы фундаментом для дальнейшего самостоятельного расширения знаний. В результате, вне этой системы оказались многомерные случайные величины, функции случайных величин и, что может показаться неожиданным, формулы полной вероятности, Байеса, интегральная функция распределения.

Опытный преподаватель, конечно, обратит внимание на то, что статистика не выделяется в отдельный раздел. Она органически вплетается в теорию случайных величин. Это новое и принципиальное методическое решение — следствие руководящего принципа. Ведь только от практики, только статистически можно мотивировать введение числовых характеристик, сделать понятным их смысл и практическую ценность. Смысл фундаментального понятия плотности распределения непрерывной случайной величины также не может быть понят без обращения к статистике, к процессу предельного перехода от статистической плотности к теоретической.

Таким образом, приоритет конкретики и смыслов делает книгу не "теорией вероятностей", а "введением" и не только в теорию, а в практику использования теории. Отсюда и название — "Введение в вероятностное прогнозирование".

Органическую (а не дополнительную) часть книги составляют задачи. Каждая лекция завершается немалым количеством упражнений-задач, тесно связанных с изложенным материалом. Их подбор и расположение не случайны, цель — прояснение и углубление понимания всего, изложенного в лекции. Я старался искать задачи интересные, "жизненные" и с реальным прикладным содержанием. Часть их взята из литературы, список которой приведён в конце курса, часть — составлена независимо. Ответы даются не ко всем задачам — это полезно для воспитания уверенности в собственном мышлении.

В тексте использован мелкий шрифт для более глубокого или детального изложения, которое при первом чтении можно пропустить. Можно и вообще не читать без ущерба для понимания. Прочтут его читатели, стремящиеся к углублённому пониманию. Петитом набраны некоторые доказательства, выводы формул, пояснения, дополнительные сведения и обсуждения.

В интересах удобства ориентировки читателя нумерация определений, теорем, формул не сквозная, а своя в каждой лекции. Если возникает необходимость сослаться на формулу из другой лекции, указывается номер лекции.

В конце книги приведён список литературы, использованной при работе над данным курсом. Разумеется, он не исчерпывает всех книг, оказавших то или иное влияние. Здесь хочу с признательностью выделить трёх авторов: Е. С. Вентцель, Б. В. Гнеденко и американский педагог из далёкого прошлого Торнтон Фрай. Они поддержали, прояснили и укрепили мысли, к которым приводило меня практическое преподавание теории вероятностей.

Е. С. Вентцель ещё в 70-х гг. настойчиво утверждала идеи, которые я попытался реализовать: "учиться теории вероятностей непосредственно в ходе её практических приложений"; "Теория вероятностей и математическая статистика едины, их нельзя разобщать. Статистические идеи должны пронизывать курс с самого начала." (Сборник научно-методических статей по математике. 1978. Вып. 8).

Б. В. Гнеденко одобрил мои первые педагогические статьи и, смею думать, благословил мои педагогические усилия в 1980 г. во время учёбы на ФПК МГУ.

Т. Фрай показал огромную педагогическую ценность живого, неформального, ориентированного на реальность изложения математики. Оцените, к примеру, следующий его пассаж (8, с. 80).

"Иногда содержание той или иной теоремы становится гораздо яснее, если мы, отбросив математическую щепетильность, сформулируем эту теорему на самом обывательском языке. Кажется, в данный момент мы имеем дело именно с таким случаем. Поэтому я приведу ещё следующую формулировку:

Если вероятность некоторого события равна p, то при бесконечно большом числе испытаний относительная частота наверно будет равна p."

Думаю, такая формулировка вызовет восторг любого ученика и легкий шок у абстрактного преподавателя математики.

Книга Thornton C. Fry "Probability and its engineering uses" (заметьте — не "теория вероятностей", а просто "вероятность") была издана в Нью-Йорке в 1928 г. и переведена на русский язык А. Я. Хинчиным в 1934 г. с очень лестным предисловием. Оценка Хинчина дорогого стоит, ибо он сам был замечательным педагогом. Вообще, старые учебные книги полезно читать и изучать сегодня, — ведь тогда, в 20-30-х годах, ещё сохранялась педагогическая культура и не была утрачена связь преподавания математики с жизнью.

Последний вопрос, на который должно ответить предисловие: для какой категории читателей предназначается данный курс?

Из вышеизложенного ясно, что курс создавался для использования в учебном процессе на самых разных специальностях технического вуза и ориентирован на реального современного студента. Но, думается, что неформальное изложение и установка на понимание позволяют использовать его гораздо более широкому кругу читателей, начинающих изучение вероятностей, — от школьника до инженера. Даже студенту педагогического вуза он может быть полезен, как пример (удачный или нет — покажет время) методической проработки абстрактного математического материала, как пример перевода научной системы в педагогическую. В этом качестве он может заинтересовать и преподавателя, озабоченного тем же вопросом, который мучил меня долгие годы: почему учащиеся плохо понимают математику?

Если этот скромный труд поможет какому-то учащемуся изменить его отношение к математике или где-то повлияет на преподавание, я буду счастлив. С благодарностью приму любую заинтересованную критику, советы и профессиональные замечания.

Автор 8 февраля 2002 г.

Краснодар

Лекция 1. Понятие вероятности

Введение. Что мы будем изучать?

Мы будем изучать теорию вероятностей. Это наука, которая умеет предсказывать будущее. Но не любое будущее и не абсолютно точно. Поясню.

Представьте, что вы подбросили монетку. Можно ли было заранее предугадать, какой стороной вверх она упадёт, —гербом или решкой? Вы ответите, что нельзя. Ну, а если бросить монетку с небольшой высоты и плашмя? Вы запротестуете, — не такой способ подбрасывания имелся в виду. А какой? Например, сложим ладони коробочкой, потрясём в ней монетку, чтобы она переворачивалась, и, разведя ладони, бросим её на широкий стол или в коробку. Конечно, при таких условиях результат можно угадать лишь случайно. Почему?

Вдумаемся, какие факторы влияют на результат? Их очень много: исходное положение монетки, величина и направление меняющихся сил, положение монетки в момент падения, неровность и упругость стола в точках соприкосновения его с монеткой, изменение движения воздуха и пр. и пр. Очевидно, что невозможно определить все эти факторы и однозначно рассчитать результат.

Другой пример — выстрел в мишень. Попробуйте сами перечислить несколько случайных факторов, которые влияют на траекторию полёта пули, а значит, и на результат (попадание — промах).

Подобные явления называют *случайными явлениями*. Точный прогноз здесь невозможен в принципе. Однако, если такое явление повторяется достаточно много раз (тогда оно называется *массовым случайным явлением*), кое-что предсказать становится возможно. Что же?

Представьте теперь, что монетка подбрасывается 100 раз подряд. Сколько раз появится герб, сколько — решка? Я знаю, что вы ответите: примерно по 50 раз. Вот вам и прогноз, который вы сами делаете. На каком основании? Очевидно, вы понимаете, что нет каких-то особых факторов, которые влияли бы больше (или меньше) на появление герба, нежели на появление решки. Оба эти результата «равноправны», равновероятны. И ваша интуиция делает вывод: если увеличивать число подбрасываний, то доли гербов и решек должны всё более и более уравновешиваться. Советую провести этот эксперимент и убедиться, что прогноз подтверждается практикой.

Обращаю внимание на качество прогноза — «*примерно по* 50 раз». Прогноз не абсолютно точный! Если, например, 20 студентов проделают этот эксперимент, то у каждого число гербов будет своё, но у большинства — близкое к 50. Заметьте, — могут быть и значительные отклонения от 50, но очень редко.

Давайте теперь чуть усложним опыт: представьте, что сто раз подбрасываются *две* монетки. Сможете ли вы предсказать, сколько раз появится пара гербов? Думаю, затруднитесь. Для ответа надо провести некое рассуждение. Как? Этому научит вас теория вероятностей. И очень скоро.

Я начал с предельно простых примеров. Изучая теорию вероятностей, вы познакомитесь со многими сложными и практически ценными примерами. Приведу один. Как рассчитать надёжность сложного технического устройства? Другими словами — как часто можно ожидать выхода из строя этого устройства за определённый период эксплуатации? Важность вопроса для конструктора и для эксплуатационника не нуждается в доказательствах. Без теории вероятностей им не обойтись!

Подведём итог. Что же изучает теория вероятностей? Она изучает реальные явления, которые обладают двумя свойствами: *случайностью* и *массовостью*. Массовость означает, что явление может повторяться достаточно много раз без существенного изменения условий. Случайность означает — результаты зависят от множества случайных причин и каждый раз могут меняться. Прогноз, который позволяет делать знание теории вероятностей, выглядит так: при многократном повторении явления некоторый результат появится примерно в $K\%$ случаев.

Подчеркну ещё раз: теория вероятностей применима не ко всем случайным явлениям, а только к массовым. Она не станет отвечать на вопросы типа: какова вероятность, что одна футбольная команда выиграет матч у другой? Или: какова вероятность, что в ближайшие четверть века будет найдено эффективное средство, побеждающее рак? Футбольный матч и развитие науки можно рассматривать как случайные явления — команда может выиграть или проиграть, лекарство может быть найдено или нет. Но эти явления не обладают свойством массовости. Футбольные матчи, конечно, можно повторять, но при этом будут существенно меняться условия, влияющие на результат. Ситуация. отражённая во втором вопросе, вообще уникальна, неповторима. Тем не менее, людям хочется делать прогнозы и в подобных случаях. А раз хочется, они их делают. Следует отчётливо понимать, что такие прогнозы субъективны и не имеют отношения к науке, — зачастую жизнь смеётся над ними.

Ну, что? Поняли вы, что такое теория вероятностей? Думаю, не очень. Это естественно, — чтобы узнать, что такое грейпфрут, надо съесть грейпфрут. Чтобы узнать, что такое теория вероятностей, недо её изучить. Изучение не быстрое и не лёгкое, но увлекательное и полезное. Желаю вам настойчивости.

А я постараюсь облегчить ваш труд подробными разъяснениями, конкретными примерами, предостережениями от ошибок и пр. Обратите особое внимание на контрольные упражнения в конце каждого раздела лекции — они помогут проверить понимание и придадут вам уверенности. Учтите — иногда, чтобы найти ответ, придётся перечитать раздел и глубже его понять.

Итак, за работу!

1. Терминология: опыт, событие

Объектом наших рассмотрений будет массовое случайное явление. Условимся называть его кратко опытом, а результаты — событиями. Уточняю.

Определение 1. *Опытом* назовём процедуру вместе с *основными условиями* её осуществления, удовлетворяющую двум требованиям: 1) процедура может быть повторена достаточно большое число раз (в принципе, не ограниченное) без изменения основных условий; 2) результаты процедуры при её повторении могут меняться под действием множества *случайных условий*.

Определение 2. *Случайными событиями*, или кратко — *событиями*, в некотором опыте будем называть всевозможные результаты этого опыта.

Условимся обозначать события большими латинскими буквами A, B, C,.... Когда их много, будем пользоваться индексами $A_1, A_2, ..., A_k$. Допустимы и другие обозначения, если они удобны в конкретной ситуации.

Пример 1. Рассмотрим опыт, который состоит в подбрасывании монетки. Это — процедура, основными условиями которой является определённая монетка и определённый способ её подбрасывания (не плашмя!). Ясно, что оба условия определения 1 выполняются. В этом опыте возможны два разных результата — событие $\textit{Г}$ — монета падает гербом вверх, P — решкой.

Основные и случайные условия опыта. Обращаю внимание: конкретная монета, с помощью которой производится опыт, включается в *основные* условия опыта. Вы скажете: а разве не всё равно, какой монеткой пользоваться? Но представьте неоднородную монету, у которой одна сторона тяжелее другой, например, решка тяжелее герба. Если много раз повторять опыт с такой монетой, то герб будет появляться чаще решки. Значит, степень однородности монеты *существенно* влияет на результат и, следовательно, относится к *основным* условиям опыта. Опыт с однородной и опыт с неоднородной монетой — два разных опыта.

Коробочка же, в которой будем трясти монетку (она не должна быть слишком плоской), относится к *случайным* условиям опыта, ибо ею определяется множество факторов, которые не могут существенно повлиять на частоту появления $\textit{Г}$ или P.

Термин «опыт» несёт обобщённый смысл. В определении 1 не говорится, в чём состоит процедура, — указаны лишь два требования к ней. Поэтому термин «опыт» можно будет применять к разнообразным конкретным ситуациям, если только выполняются указанные два требования.

Например, выстрел из орудия — опыт, попадание или промах — события. Изготовление детали на автоматическом станке — опыт, брак или не брак — события. Подбрасывание игральной кости — опыт, появление определённого числа очков — событие.

В добавление к определению 2 следует сказать ещё о двух видах событий: *достоверные события* — происходят при любом выполнении данного опыта, и *невозможные события* — не происходят. В примере 1 достоверным будет событие — появляется или герб, или решка, невозможным — ни герб, ни решка.

Контроль 1. Монета подбрасывается два раза. Можно ли назвать эту процедуру опытом? Почему? Если «да», то в чём состоят основные условия опыта? Назовите несколько событий и обозначьте их. Приведите примеры достоверного и невозможного событий. Как думаете, сколько всего событий в этом опыте?

2. Закон устойчивости частот

Наша главная цель в этой лекции — научиться делать прогнозы в простых ситуациях. Для этого надо будет дать точное определение вероятности события и поупражняться в её вычислении.

Но предварительно следует остановиться на интересном законе природы, который позволяет делать вероятностные прогнозы. Если бы этого закона не было, теории вероятностей тоже не было бы.

Эксперимент. Выясним, как часто можно ожидать появления двух гербов при многократном подбрасывании двух монет?

Возьмите две монетки, например, пятачок и гривенник, потрясите их в коробочке и бросьте на широкий стол или в открытую коробку — чтобы не закатывались. Запишите результат этого единичного *опыта*, например, $ГР$ — первая монетка упала гербом вверх, вторая — решкой. Далее, повторите этот опыт $k = 100$ раз и полученные 100 результатов запишите в таблицу 1 (результаты первых десяти опытов записываются в колонку № 1, вторых десяти — в колонку № 2 и т. д.).

Таблица 1

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$ГР$	$РР$	...							
2	$\underline{ГГ}$	$РГ$								
3	$ГР$	$\underline{ГГ}$								
4	$РГ$	$РР$								
5	$РГ$	$ГР$								
6	$\underline{ГГ}$	$ГР$								
7	$РР$	$РГ$								
8	$ГР$	$\underline{ГГ}$								
9	$\underline{ГГ}$	$РР$								
10	$\underline{ГГ}$	$ГР$								

Таблица представляет результат эксперимента, так называемый *первичный статистический материал*, подлежащий обработке для выявления скрытой в нём закономерности. Проследим, как часто появляется $ГГ$ с ростом числа опытов k.

Посчитайте, сколько раз у вас появилось два герба в первой серии из $k' = 10$ опытов, получите число l' (у меня вышло $l' = 4$). Запишите его во вторую строку таблицы 2. Вычислите отношение $\mathbf{P}^*_{10} = \frac{l'}{10}$ (у меня $\mathbf{P}^*_{10} = 0,4$) — его называют относительной частотой или просто *частотой* — и запишите в нижнюю строку таблицы. Аналогично посчитайте l'' и $\mathbf{P}^*_{20} = \frac{l''}{20}$ и запишите в соответствующие строки (l'' — число двойных гербов после опытов — они подчёркнуты в первых двух колонках). И т. д.

У меня после проведения эксперимента и обработки его результатов вышло вот что:

Таблица 2

k	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
l	4	6	11	14	16	20	23	25	27	29
$\mathbf{P}^*_k = \frac{l}{k}$	$\mathbf{P}^*_{10} = 0,4$	$\mathbf{P}^*_{20} = 0,3$	$0,37$	$0,35$	$0,32$	$0,33$	$0,33$	$0,31$	$0,31$	$0,29$

Проследим за изменением частот (третья строка) и сделаем выводы.

Во-первых, все частоты «близки» (расположены в промежутке между $0,29$ и $0,4$), точнее — отличаются друг от друга менее чем на $0,12$. Во-вторых, с ростом числа опытов они всё меньше отличаются друг от друга: к примеру, в первой половине опытов максимальная разность частот $0,1$, во второй — $0,04$.

А теперь наберитесь терпения и проведите опыт 500 раз (не пугайтесь! — попросите своих друзей провести опыт по 100 раз, соберите результаты и вы будете иметь 500 опытов)[1]. Так же, как и выше, рассчитайте частоты появления $ГГ$ после 110 , 120 , ... , 500 опытов и запишите их в таблицу 2, соответственно продолжив её[2]. Получится новая таблица, состоящая из пяти экземпляров, подобных таблице 2, записанных друг под другом.

Проследите, как и выше, за изменением частот — вы заметите *главную закономерность: частоты приближаются к числу* $0,25$. Это — закон природы: кто бы ни проводил описанный эксперимент, частоты события $ГГ$ будут приближаться к тому же числу $0,25$. Число это называется *вероятностью* события $ГГ$. Его смысл: с ростом числа опытов пара гербов появится примерно в 25% опытов.

Совет. Настоятельно советую вам проделать-таки этот простой, хотя и требующий времени эксперимент. Сохраните результаты своего эксперимента — в дальнейшем на этом примере вы сможете конкретизировать многие новые понятия и, тем самым, лучше усвоить их. Знайте, что статистические закономерности проявляются отчётливо лишь на *очень большом* числе опытов. Полезно убедиться в этом лично хотя бы один раз в жизни.

Подмеченная в нашем эксперименте закономерность характерна для всех массовых случайных явлений. Сформулируем её в общем виде.

Определение 3. Пусть в некотором опыте возможно случайное событие A. Пусть этот опыт повторен k раз (проведён эксперимент) и в результате событие A появилось l раз и не появилось $k-l$ раз. *Относительной частотой* (или просто *частотой*) события A в данной серии опытов назовём число

$$\mathbf{P}^* = \frac{l}{k}. \tag{1}$$

Закон устойчивости частот. С ростом числа повторений опыта относительные частоты события A неограниченно приближаются к некоторому числу $\mathbf{P}(A)$.

[1]Можно ускорить эксперимент, если трясти в коробочке не две, а сразу штук двадцать монет.

[2]Вычисления облегчит калькулятор.

Условимся называть такое приближение *сходимостью по вероятности* и записывать так

$$\mathbf{P}^*(A) \xrightarrow{p} \mathbf{P}(A). \tag{2}$$

Примечание. Сходимость по вероятности отличается от математической сходимости, ибо она связана с реальным экспериментом, в результате которого получается всегда конечная последовательность частот. Подробнее и глубже обсудим это различие позднее.

Надеюсь, вы понимаете, что мы не вывели закон устойчивости из одного примера. Примером мы лишь проиллюстрировали его. Выведен он из огромного множества примеров на протяжении долгой истории, в частности, — из практики азартных игр. В дальнейшем у вас будет возможность проверить его на других примерах.

Контроль 2. Представьте ящик (его принято называть урной), в котором находятся 5 одинаковых по массе и размеру шаров — 3 белых и 2 чёрных. Опыт состоит в том, что после перемешивания, не глядя (наудачу) вынимается один шар. Событие A произойдёт, если появится белый шар. Как надлежит проверять закон устойчивости частот? Опишите чётко последовательность своих действий.

3. Элементарный расчёт вероятностей

Слово «вероятность» нередко используется в обыденной жизни. Например, говорят, что вероятность сдать экзамен у одного студента больше, чем у другого. Ясно, что такая оценка субъективна — разные люди будут оценивать степень вероятности по разному. Так, сам студент нередко уверен, что он знает предмет, а преподаватель, тем не менее, ставит ему «двойку».

Научное понятие, в отличие от обиходного, должно быть точным и объективным, — должно формулироваться так, чтобы все понимали его одинаково. Давайте внесём ясность в понятие «вероятность события». Сделаем это с помощью примеров, постепенно уточняя формулировку. Точное определение будет дано позже.

Пример 2. Рассмотрим простейший, знакомый вам опыт, — подбрасывание монеты. Как бы вы ответили на вопрос: чему равна вероятность появления герба (событие Γ)? Другими словами, — каким числом разумно оценить *степень ожидания* герба?

Думаю, ход вашей мысли будет примерно таким. Есть два возможных результата опыта — появление герба и появление решки. Два равноправных шанса — Γ и P. За появление герба есть один шанс из двух. Значит, имеет смысл сказать, что вероятность появления герба равна $1/2$. Так же, как и вероятность появления решки. Условимся обозначать вероятность буквой $\mathbf{P}$ и писать[3] $\mathbf{P}(\Gamma) = \mathbf{P}(P) = 1/2$.

[3]Обозначение $\mathbf{P}$ исторически возникло от латинского слова «probabilitas» (вероятность). В XVII веке, когда учёные начали решать вероятностные задачи, научные книги писались на латыни.

Полученное значение вероятности согласуется с экспериментальным фактом: если подбрасывать монету много раз, то примерно в половине опытов будет появляться герб, в половине — решка. Эти результаты «равноправны» или, как теперь можем сказать, равновероятны.

Пример 3. Опыт состоит в том, что из урны, в которой находятся 5 одинаковых перенумерованных шаров (1,2,3,4,5), вынимается наудачу один шар. Какова вероятность, что появится шар с чётным номером (событие A)?

Очевидно, $\mathbf{P}(A) = 2/5$: всего возможны пять результатов опыта и только в двух появится событие A. Прогноз: если повторять опыт раз, то примерно раз появится чётный шар и 60 раз — нечётный.

Замечание. Правильно ли вы понимаете, что значит «повторить опыт много раз»? Можно ли повторить его 100 раз, если в урне всего 5 шаров? Вспомните — при повторении опыта основные условия не должны меняться, т. е. число шаров должно оставаться неизменным. Процедура повторения опыта должна быть следующей: вынули шар, записали его номер, бросили обратно в урну; вторично вынули случайным образом из пяти шаров один шар, записали номер, вернули его в урну и т. д.

Итак, вероятность события A — это число, которое мы вычисляли так: 1) подсчитали количество всех результатов опыта — n; 2) выделили те результаты, при которых происходит событие A, — их число m; 3) составили отношение m/n.

Смысл вероятности: она указывает *долю* тех результатов повторяющегося опыта, при которых происходит событие A.

Контроль 3. Однородная игральная кость подбрасывается случайным образом. Какова вероятность появления A — чётного числа очков, B — числа очков, меньшего трёх? Сколько раз прогнозируете появление этих событий при повторении опыта 300 раз?

4. Равновероятные события

Правило расчёта вероятностей, выведенное выше, необходимо уточнить. Формальное его применение нередко приводит к ошибкам. Характерную ошибку вы сейчас, вероятно, сделаете сами.

Пример 4. Опыт — подбрасывание двух монет. Какие возможны результаты этого опыта? Каковы их вероятности?

Начинающие обычно рассуждают так. Возможны три результата: A — два герба; B — две решки; C — герб и решка. Значит, вероятности этих событий одинаковы и равны 1/3. Вот и ошибка — её обнаруживает практика.

Ваш расчёт не согласуется с экспериментом: если проводить опыт много раз, то, как вы видели, частоты события A будут приближаться не к 1/3, а к 1/4. Если, к тому же, подсчитать число опытов, в которых появляются «герб и решка» (событие C), то их окажется почти вдвое больше, чем опытов с результатом «два герба» (событие A). Значит, эти события *не равновероятны*.

Практика помогает нам понять ошибку в расчёте и углубить понимание вероятности. *Правильный расчёт должен начинаться не просто с перебора всех результатов опыта, а с перебора равновозможных результатов.* И теперь мы должны изменить группу результатов нашего опыта, чтобы все они стали «равноправными», точнее — равновероятными.

Исправим ошибку. Результат C (герб и решка) надо разбить на два: $ГР$ — первая монета падает гербом вверх, а вторая решкой; $РГ$ — наоборот. Мы должны различать два этих результата, — они разные. Получаем всего не три, а четыре возможных результата: $ГГ$, $РР$, $ГР$, и $РГ$.

Равновероятность этих результатов подтверждается экспериментом. Но если бы даже мы не знали, что скажет эксперимент, ответ нетрудно предугадать, — ведь нет факторов, отдающих предпочтение какому-то из четырёх результатов. «Четвёрка» эта обладает своеобразной симметрией.

Верное решение: $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(ГГ) = 1/4$; $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(РР) = 1/4$; $\mathbf{P}(C) = 2/4$; Согласование с экспериментом восстановлено.

У вас, наверное, возник вопрос: какие события следует считать равновозможными? *Как определять равновероятность?* Ответ даёт эксперимент.

Определение 4. Если с ростом числа опытов частоты событий A и B уравниваются, то их следует считать *равновероятными* (*равновозможными*).

При теоретическом расчёте вероятности нередко можно обойтись без эксперимента, — равновозможность событий некоторой группы бывает легко усмотреть из соображений симметрии результатов опыта. Так было в примерах 2 и 3. В контрольном упражнении 3 очевидны шесть равновозможных результатов — появление одного очка, двух, трёх, ... , шести очков.

Замечание. Между прочим, здесь можно составить группу равновозможных результатов иначе, например, так: $\{A, \overline{A}\}$, где событие A состоит в появлении чётного числа очков, $\overline{A}$ — нечётного. С помощью такой группы можно рассчитать $\mathbf{P}(A) = 1/2$, однако нельзя найти вероятность появления числа очков, меньшего трёх. Придётся воспользоваться первой группой, — получится $\mathbf{P}(B) = 2/6 = 1/3$.

Контроль 4. Опыт — подбрасывание трёх монет. Какова вероятность события A — все три монеты падают гербом вверх; события B — две монеты падают гербом вверх, одна решкой. Проведите два решения — неверное и верное, подобно тому, как сделано в примере 4.

5. Несовместимые и совместимые события

Мы выяснили важное требование, которому должна удовлетворять группа результатов опыта, построенная для расчёта вероятности, — равновозможность этих результатов. Есть ещё два требования, — они неосознанно предполагались нами в предыдущих примерах, — полнота группы и несовместимость событий. Эти понятия надо тоже чётко определить, чтобы включить в точное определение вероятности.

Определение 5. Пусть в некотором опыте выделена группа событий

$$\{A_1, A_2, ..., A_k\}.$$

Будем говорить, что эти события *несовместимые*, если они *исключают друг друга*. В противном случае события *совместимые*.

Другими словами, если при любом выполнении опыта в результате не могут появиться сразу два каких-нибудь события этой группы, то события несовместимые. Если же существует такой результат опыта, при котором появятся вместе два или более событий группы, то события совместимые — они *не* исключают друг друга.

В примере 2 два события P и Γ, очевидно, исключают друг друга: если при подбрасывании монетка упала гербом вверх, то не решкой же.

В примере 3 события A и $\overline{A}$ тоже несовместимы, — нельзя вынуть из урны одновременно чётный и нечётный шар. Если же в паре с событием A рассмотреть другое событие, например, B — вынут шар с номером, меньшим, чем 3, то A и B будут совместимыми. Действительно, если при выполнении опыта окажется вынутым шар с номером 2, то этот шар будет одновременно и чётным, и номер его меньше 3. Значит, в результате этого опыта появятся *сразу* два события — A и B.

В примере 4 группа $\{A, B, C\}$ составлена из несовместимых событий, так же как и группа $\{\Gamma\Gamma,\ PP,\ \Gamma P,\ P\Gamma\}$. Рассмотрим здесь два более сложных события: D — в результате подбрасывания двух монет хотя бы одна из них падает гербом вверх; E — хотя бы одна падает решкой вверх. Событие D появится, если опыт даст один из трёх результатов, — запишем это так $D = \Gamma\Gamma + \Gamma P + P\Gamma$. Аналогично, $E = PP + \Gamma P + P\Gamma$. Следовательно, есть два результата опыта, в которых появляются вместе события D и E — они совместимые.

Следующий пример поможет вам представить наглядно свойства совместимости и несовместимости событий.

Пример 5. На биллиардном столе нарисованы три круга. Шар бросают на стол случайным образом. Если шар останавливается в первом круге, скажем, что произошло событие A, если во втором, — B, если в третьем, — C. События $\{A, B, C\}$ несовместимые, при условии, что круги не пересекаются (рис. 1а). В тех случаях, когда некоторые круги пересекаются, события совместимые (рис. 1б-в).

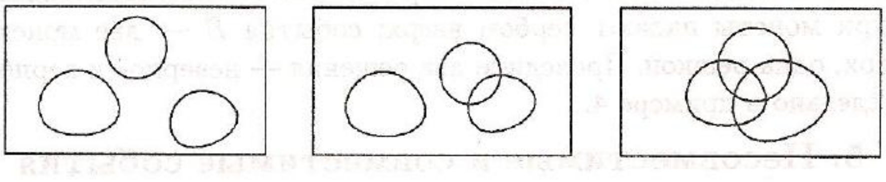


Рис. 1а *Рис.* 1б *Рис.* 1в

Контроль 5. В урне десять одинаковых шаров, перенумерованных цифрами 1, 2, 3, ... , 10. Опыт состоит в вынимании одного шара наудачу. Событие A произойдёт, если появится шар с чётным номером, B — с номером, делящимся на 3, C — с номером, делящимся на 5. Какие пары этих событий совместимые, какие нет? Объясните. Равновероятны ли эти события? Составьте группу несовместимых и равновероятных событий.

6. Полные и неполные группы событий

Правило расчёта вероятностей (см. п. 3) начиналось с построения группы «всех результатов опыта». Затем мы уточнили эту фразу — результаты должны быть равновероятными и несовместимыми. Сейчас уточним, как понимать слово «всех»? Дело в том, что «все» результаты опыта не нужны для расчёта. Нужны те результаты, которые делают группу полной.

Определение 6. Пусть в некотором опыте выделена группа событий

$$\{A_1, A_2, ..., A_k\}.$$

Эта группа называется *полной*, если при любом выполнении опыта произойдёт хотя бы одно из событий группы. В противном случае группа *не полная*.

В примере 2 группа $\{Г, Р\}$ — полная. Более того, она состоит из равновероятных и несовместимых событий.

В примере 3 группа $\{A, \bar{A}\}$ полная, события группы несовместимые, но не равновероятные. Группа $\{A, B\}$, где B состоит в появлении шара с номером, меньшим, чем 3, не полная, потому что если результатом опыта будет шар с номером 3 или 5, то не произойдёт ни событие A, ни B. Эту группу можно дополнить, например, событием C — появление шара с номером 3 или 5. Группа $\{A, B, C\}$ — полная, события группы не равновероятные и совместимые. По такой группе нельзя рассчитывать вероятности.

В примере 4 группа $\{D, E\}$ — полная, события равновозможные, но совместимые — она не годится для расчёта вероятностей. Группа $\{ГГ, РР, ГР\}$ — не полная. Группа $\{ГГ, РР, ГР, РГ\}$ — полная, состоит из равновозможных и несовместимых событий — её мы и использовали для вычисления вероятностей.

Контроль 6. В условиях контрольного упражнения 5 определите, будет ли группа $\{A, B, C\}$ полной? Объясните, почему? Если нет, дополните её. Можно ли по новой, дополненной группе рассчитывать вероятности? Постройте две новые группы, удовлетворяющие всем трём требованиям расчёта вероятностей. Можно ли с помощью ваших групп определить вероятность события F — вынут шар с номером, делящимся на 4?

7. Классическая вероятность

Для точной формулировки определения вероятности осталось ввести один термин.

Определение 7. Пусть в некотором опыте возможны события A и B. Будем говорить, что событие A *благоприятствует* событию B, если всякий раз, когда в результате выполнения опыта появится событие A, вместе с ним обязательно появится и B.

Заметьте, события A и B не обязательно идентичны, — B может появиться в опыте и тогда, когда A не появилось. Так, в примере 4 событию D (хоть один герб) благоприятствуют три события группы $\{ГГ, РР, ГР, РГ\}$, а второе не благоприятствует.

И вот мы подошли к центральному пункту лекции. Определение вероятности, которое вы сейчас услышите, было осознано математиками в конце XVII века. В печати оно появилось в 1713 году в трактате знаменитого швейцарца Якоба Бернулли «Ars conjectandi» (Искусство предположений), изданном на латыни. Конечно, излагалось оно тогда иным языком[4]. С тех пор данное определение стало фундаментом всего дальнейшего развития теории вероятностей. Его ценность проверена временем. Поэтому оно называется классическим.

Определение 8. Пусть в опыте возможно событие A. *Вероятностью* этого события называется число $\mathbf{P}(A)$, которое рассчитывается так:

1) строится полная группа *исходов*[5] (равновозможных и несовместимых событий) опыта и подсчитывается их число n;

2) из построенной группы выбираются те события, которые благоприятствуют событию A, и подсчитывается их число m;

3) составляется отношение
$$\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n} \tag{3}$$

Примечание. Сравните определение 8 с правилом расчёта вероятностей, которое вывели в (1.3). Обратите внимание: вместо группы «всех результатов опыта» мы теперь употребили иное выражение — «полная группа исходов опыта». Понимаете ли вы различие и необходимость этого различия? Поясню.

В примере 4 (подбрасывание двух монет) полная группа исходов состоит из четырёх событий $\{ГГ, РР, ГР, РГ\}$. Но эти события не исчерпывают *всех* «результатов» опыта. Группа исходов не содержит, например, такого результата — $D = ГГ + ГР + РГ$ (хоть один герб) или $E = РР + РГ + ГР$. Очевидно, можно составить подобным образом много других результатов — $F = ГГ + РР$ (монеты падают одинаково) и др. Вы видите — «все» результаты не нужны для расчёта вероятностей, нужны особые результаты — *исходы опыта*. Иногда их называют *элементарными событиями* — из них с помощью операции сложения строятся все другие события, которые называют составными. Но об этом позже.

Заметим также, что под фразой «все результаты опыта» мы с самого начала понимали неявно именно полную группу несовместимых событий. Однако не предполагали их равновозможными. Согласитесь, что проведённый анализ сделал для нас понятие вероятности более ясным, точным и объективным.

Из формулы (3) следует, что вероятность — это рациональное число, заключённое между нулём и единицей (ведь всегда $m \le n$). Вероятность невозможного события равна 0, достоверного — 1. Следовательно
$$0 \le \mathbf{P}(A) \le 1, \qquad \forall A. \tag{4}$$
Между прочим, если в будущем, при решении задач вы получите в ответе значение вероятности больше единицы, знайте, что вы сделали ошибку. Запомните это крепко!

[4] Случаи, благоприятствующие событию A, назывались плодовитыми, другие — бесплодными.

[5] Вместо термина "исходы" употребляют также термины "случаи", "шансы".

Смысл вероятности $\mathbf{P}(A)$: *это то самое число, к которому неограниченно приближаются относительные частоты $\mathbf{P}^*(A)$ при многократном повторении опыта* (см. закон устойчивости частот — (1.2)).

Многочисленные доказательства этой закономерности даёт историческая практика. Мы убедились в его справедливости при подбрасывании двух монет:

$$\mathbf{P}^*(ГГ) \xrightarrow{p} \mathbf{P}(ГГ) = 1/4$$

(см. расчёт вероятности в примере 4 и вашу статистику в п. 2).

Замечание. При аксиоматическом построении теории вероятностей (понятие об этом я постараюсь дать вам позже), данная закономерность составляет содержание строго доказываемой теоремы Бернулли. Логический анализ позволяет развить эту теорему и открыть ряд других закономерностей. Все они объединены общим названием *закона больших чисел*. Содержательное представление о нём вы получите в конце курса.

Из факта стабилизации частот и приближения их к вероятности, следует, что число $\mathbf{P}(A)$ обладает прогностической силой: зная $\mathbf{P}(A)$, можно предсказать, какой будет доля опытов, в которых появится событие A при многократном повторении этих опытов. *Вероятность $\mathbf{P}(A)$ есть правильная дробь, которая как раз и равна доле этих опытов.*

Теперь обратим внимание на *недостаток* классического определения. Оно, в сущности, не определяет понятие вероятности, а даёт программу вычисления её значений в опытах, допускающих построение конечной группы элементарных исходов. Программа расчёта очень проста — в этом её большая ценность. Но круг опытов, где эта программа работает, не слишком широк, как увидите далее, — это, конечно, недостаток.

Что касается самого понятия вероятности, его точного определения сегодня в науке нет. Оно относится к числу «первичных» понятий математики, которые не могут быть определены формально. Можно дать описательное определение: *вероятность — это число, которое оценивает степень ожидаемости появления того или иного события в некотором опыте.* В абстрактной математической теории вероятность — число, которое удовлетворяет некоторым аксиомам.

Контроль 7. В условиях примера 4 рассчитайте вероятность события D (хоть один герб). Проверьте выполнение всех условий определения 8 при вашем расчёте. Обратитесь к вашей статистике (п. 2) и проверьте, приближается ли частота события D к вашей вероятности?

8. Статистическая вероятность

Я уже сказал вам, что классическое определение ограничено. Вот опыт, где классическая программа расчёта вероятности не работает.

Пример 6. Стрелок производит выстрел в мишень. Как рассчитать вероятность попадания?

Если идти классическим путём, надо начать с группы результатов опыта. Их всего два: выстрел попал в мишень (событие A) и не попал (событие $\overline{A}$). Эти события, вообще говоря, не равновозможны и поэтому группа $\{A, \overline{A}\}$ не пригодна для вычисления $\mathbf{P}(A)$. Никакую иную группу исходов составить в данном опыте нельзя. Значит, определение 8 не применимо.

Вместе с тем, очевидно, что говорить о вероятности попадания имеет смысл — лучший стрелок имеет больше шансов поразить цель, нежели худший, он чаще попадает. Обратимся к экспериментальному методу.

Перед нами опыт, который может повторяться много раз без изменения основных условий. Следовательно, согласно закону устойчивости частот, $\mathbf{P}^*(A) \xrightarrow{p} \mathbf{P}(A)$ и за вероятность можно взять частоту при достаточно большом числе опытов. Это обычно и делается на практике.

Определение 9. *Статистической вероятностью* события A в некотором опыте называют относительную частоту $\mathbf{P}^*(A)$ появления этого события в эксперименте, состоящем из достаточно большого числа повторений опыта:

$$\mathbf{P}^*(A) \approx \mathbf{P}(A). \tag{4}$$

Примечание. Статистическая вероятность — это *приближённая* вероятность. Возникает вопрос: а можно ли быть уверенным, что вычисленная таким образом вероятность окажется достаточно близка к истинной? Возникает задача оценки ошибки. Это задача математической статистики и в дальнейшем вы узнаете, как она решается. Здесь же я проиллюстрирую характер ответа на примере.

Вы знаете, что при подбрасывании монетки точная вероятность появления герба равна $1/2$. Какую ошибку мы сделаем, если заменим её статистической вероятностью после 1000 опытов? Ответ: ошибка будет меньше, чем 0,05. Этот ответ получен теоретически (как? — узнаете в конце курса) и является прогнозом: можно быть практически уверенным, что после 1000 подбрасываний число выпавших гербов не выйдет за пределы интервала $(450 \div 550)$.

Однако ответ этот сопровождается оговоркой: прогноз сделан с вероятностью 0,997. Что это значит? Вот что: если проводить подобные эксперименты 1000 раз, то лишь около трёх раз число гербов может выйти за пределы указанного интервала.

Статистический метод тоже имеет свои недостатки — он весьма трудоёмкий, а нередко и практически не реализуемый. Но этот метод лежит в основе многих теоретических расчётов. Так, если определена статистическая вероятность поражения цели одним выстрелом, то далее можно теоретически рассчитать, например, вероятность двух, трёх (или хотя бы одного) попаданий при трёх выстрелах и пр. Этому вы вскоре научитесь.

Контроль 8. Определите статистическую вероятность появления двух гербов при подбрасывании двух монет, используя свой статистический материал. Какая получилась ошибка? Что означает фраза «вероятность данной ошибки не превосходит 0,95»?

9. Геометрическая вероятность

Существует ещё один метод определения вероятности — геометрический. Он прост и его полезно знать. В инженерной практике он используется редко. Суть этого метода хорошо иллюстрируется примером 5.

Напомню. Опыт состоит в случайном бросании шара на биллиардный стол, где нарисован круг (рис. 1а). Если шар останавливается в круге, то происходит событие A. Рассчитать вероятность $\mathbf{P}(A)$.

Попробуем применить классический метод. Из характера опыта (случайное бросание) следует, что шар может остановиться в любой точке стола и ни одна точка не имеет предпочтения. Значит, исходом опыта следует считать попадание шара в произвольную точку стола. Таких событий бесчисленно много — их невозможно пересчитать. Формула (1.3) не работает.

Можно, конечно, рассчитать вероятность приближённо, применив экспериментальный метод. Однако в данной ситуации возможен простой расчёт. Вероятность есть отношение шансов, которое можно выразить, как отношение площадей

$$\mathbf{P}(A) = \frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{стола}}}. \tag{5}$$

Примечание 1. Заметьте — формула (5) может дать иррациональное значение вероятности, в то время, как классическая формула (3) всегда даёт рациональное.

Примечание 2. Геометрический метод можно рассматривать как предел классического. Если разбить стол на большое число n мелких равных прямоугольников (квадратиков), то получим полную группу исходов $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$, где E_i — событие, состоящее в том, что шар останавливается в i-м прямоугольнике. За исходы, благоприятствующие событию A, можно считать те, которые пересекаются с данным кругом, — их число m. Получаем приближённое значение вероятности m/n. Увеличивая неограниченно n и переходя к пределу, получим точное значение, совпадающее с (5).

Обобщение. Если стол превращается в какую-то плоскую область площади S, а круг — в другую внутреннюю область площади σ (рис. 2) и «точка» случайно брошена в область S, то вероятность того, что она попадёт в меньшую область σ, определяется геометрическим методом по формуле

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\sigma}{S}. \tag{6}$$

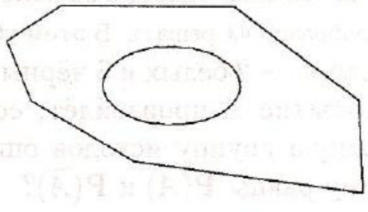


Рис. 2

Легко понять, что аналогичные формулы получаются в случаях областей, лежащих на линиях, поверхностях, или в трёхмерном пространстве. Думаю, вы без труда сделаете это в следующем упражнении.

Контроль 9. На отрезке [0, 4] числовой прямой случайным образом выбирается число. Какова вероятность, что число окажется ближе к середине отрезка, чем к его краю?

10. Упражнения

1. В урне 20 перенумерованных шаров. Опыт — вынимание одного шара наудачу. Что вероятнее — вынуть шар с номером, делящимся на 3, или на 4?

2. Колода, содержащая 36 карт, тщательно тасуется и затем снимается одна карта. Какова вероятность, что будет вынута

а) карта красной масти; б) бубновой масти; в) фигура; г) туз; д) дама пик?

3. Опыт — подбрасывание двух монет. Составьте полную группу исходов. Проверьте полноту группы, равновозможность и несовместимость событий группы. Рассчитайте вероятности событий: C — монеты падают по-разному (одна гербом вверх, другая — решкой); D — хотя бы одна монета падает гербом вверх; E — ни одна монета не падает гербом вверх.

Ответ: 1/2; 3/4; 1/4.

4. Проведите статистический эксперимент, подбрасывая две монеты 100 раз, и зафиксируйте результаты каждого подбрасывания. Рассчитайте относительные частоты появления события D после 10 подбрасываний, после 20-ти, ... после 100. Происходит ли стабилизация частот? (Сравните колебания частот в первой половине эксперимента и во второй). Какова статистическая вероятность события D? Какова ошибка?

5. Опыт — подбрасывание трёх монет (или, что то же, одна монета подбрасывается три раза[6]). Рассчитайте вероятности событий: A — появляются три герба; B — ровно два герба (т. е. два герба и решка в любом порядке); C – ровно один герб; D — ни одного герба.

Ответ: 1/8; 3/8; 3/8; 1/8.

6. Из букв слов «мама» и «дама» отбираются наудачу по одной букве. Назовите несколько разных результатов этого опыта. Будут ли они равновозможными? Составьте полную группу исходов. Событие A — выбраны одинаковые буквы; какие исходы ему благоприятствуют? Найдите $\mathbf{P}(A)$.

Ответ: 3/8.

Перейдём ко второму кругу задач, так называемым, «урновым» задачам. Они кажутся искусственными и практически бесполезными, однако с их помощью можно моделировать многие реальные задачи, а значит, единообразно их решать. В этом убедитесь чуть позже.

7. В урне 5 одинаковых шаров — 2 белых и 3 чёрных. Опыт состоит в случайном вынимании одного шара. Событие A произойдёт, если будет вынут белый шар, $\overline{A}$ — чёрный. Составьте полную группу исходов опыта (не забудьте проверить, равновероятны ли они?). Чему равны $\mathbf{P}(A)$ и $\mathbf{P}(\overline{A})$?

Указание. Перенумеруйте мысленно все шары.

Ответ: 2/5; 3/5.

8. В условиях предыдущей задачи изменим опыт — станем вынимать последовательно два шара. Событие A произойдёт, если будут вынуты два белых шара, B — два чёрных, C — белый и чёрный (в любом порядке). Составляют ли эти события полную группу? Несовместимы ли они? Равновозможны ли? Как правильно составить полную группу исходов? Рассчитайте вероятности данных событий.

Указание. Исходом опыта будет любая упорядоченная пара шаров: (1, 2), (1, 3), ... , (1, 5); (2, 1), (2, 3), ... , (2, 5); ... , (5, 1), (5, 2), ... , (5, 4). Для пересчёта удобно расположить эти пары в виде таблицы, содержащей 4 строки и 5 колонок.

---

[6]Поймите правильно — это *один* опыт, а не три, его результатом будет «тройка», например, $ГГГ$, или $РГР$, как и при одновременном подбрасывании трёх монет.

Ответ: 1/10; 3/10; 6/10.

9. В урне четыре шара — два белых и два чёрных. Опыт состоит в одновременном вынимании двух шаров наудачу. Событие A произойдёт, если появятся шары одного цвета, B — разных цветов. Как вы думаете, какое из этих событий должно чаще происходить при повторении опыта? Или вам кажется, что они будут происходить одинаково часто? Что подсказывает интуиция? Запишите предположение, потом проведите точный расчёт. Подвела вас интуиция или нет?

Указание. Опыт с одновременным выниманием двух шаров равносилен опыту с последовательным выниманием — мы можем, например, считать первым шар, вынутый правой рукой, вторым — левой.

Ответ: 1/3; 2/3.

10. В урне три шара — два белых, один чёрный. Опыт состоит в случайном выборе двух шаров. Какова вероятность выбрать шары разных цветов — событие A, хотя бы один белый — B, два чёрных — C?

Ответ: 2/3; 1; 0.

11. Имеются три урны, в каждой по три одинаковых перенумерованных шара. Опыт состоит в том, что из каждой урны извлекаются наудачу по одному шару. Что будет исходом опыта? Сколько исходов? Какова вероятность, что появятся три одинаковых номера; ровно два одинаковых; все номера разные?

Ответ: 1/9; 6/9; 2/9.

Следующие задачи советую переформулировать в терминах урн с шарами. После этого решение окажется знакомым.

12. Рабочий выточил за смену шесть деталей, из которых одна получилась неудачной. ОТК берёт на проверку две детали и если не обнаруживает среди них брака, то принимает всю партию. Каковы шансы рабочего за то, что его партия деталей будет принята ОТК?

Ответ: 2/3.

13. Шесть человек, среди которых две женщины и четыре мужчины, разыгрывают случайным образом два приза. Какова вероятность, что

а) оба приза достанутся женщинам;

б) только одна из женщин получит приз;

в) ни одна не получит?

Ответ: 2/30; 16/30; 12/30.

14. Из пяти супружеских пар отбирают случайным образом двух человек. Какова вероятность, что будут выбраны

а) не супруги; б) супруги; в) мужчина и женщина; г) две женщины?

Какие из этих событий совместимые? Составляют ли эти четыре события полную группу? Если нет — дополните. Сделайте прогноз: сколько раз следует ожидать выбор супругов, если повторять опыт 100 раз?

Указание. Задачу можно моделировать по-разному, например, так: в урне 10 шаров — 5 белых, 5 чёрных; белые шары перенумерованы цифрами от 1 до 5, чёрные тоже; после перемешивания вынимаются два шара. Число исходов, с учётом порядка вынимания шаров, $n = 10 \cdot 9 = 90$.

Ответ: 16/18; 2/18; 5/18; 4/18; около 11.

15. Опыт — подбрасывание неправильной (не однородной) игральной кости. Например, если одна из граней тяжелее других. Как определить вероятность появления «шестёрки»?

16. Многократное подбрасывание несимметричной игральной кости показало, что частота выпадения «шестёрки» на 5% превышает частоту появления каждой из прилегающих граней, а частота «единицы» (грань, противоположная «шестёрке») на 10% меньше каждой из них. Какова вероятность появления

а) «шестёрки», б) нечётного числа очков?

17. В прямоугольнике размера 3×4 расположен круг радиуса $r = 1$. В прямоугольник вбрасывается случайным образом «точка». Какова вероятность, что «точка» попадёт в круг?

18. В круг вписан квадрат. Какова вероятность, что «точка», брошенная случайным образом в круг, не попадёт в квадрат? Оцените эту вероятность сначала «на глазок», потом проведите точный расчёт.

19. Однородная проволока растягивается за концы и рвётся. Какова вероятность, что она разорвётся в точке, лежащей ближе к краям, чем к центру? ближе к правому краю, чем к центру?

20. Опыт состоит в том, что игральная кость подбрасывается дважды. Событие A произойдёт, если появятся две «шестёрки», B — ровно одна, C — хотя бы одна. В чём состоят противоположные события: $\overline{A}$ (не произойдёт A), $\overline{B}$, $\overline{C}$? Найдите вероятности всех событий.

Ответ: 1/36; 10/36; 25/36; $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

21. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Полученные кубики ссыпаны в урну и тщательно перемешаны. Опыт состоит в извлечении из урны кубика случайным образом. Какова вероятность вынуть кубик, у которого: а) две окрашенные грани; б) ровно две; в) три (продолжите сами)?

Ответ: 0,104; 0,096; 0,008.

22. Спутник Земли движется по орбите, которая заключена между 60° северной и 60° южной широты. Он может упасть случайным образом в любую точку поверхности Земли между указанными параллелями. Найти вероятность того, что спутник упадёт выше 30° северной широты.

Указание. Найдите в справочниках формулу для вычисления площади шарового пояса.

Ответ: $\frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0,2113$.

23. Как вы думаете, каких букв (литер) больше в ячейках наборщика типографии — «а» или «о»? Во сколько раз больше? Или одинаково? Подумайте немного и запишите своё предположение. Потом проведите расчёт.

Указание. Попробуйте сначала применить классический метод (в чём состоит опыт? группа исходов? что мешает?). Потом рассчитайте статистические вероятности $\mathbf{P}^*(«a»)$ и $\mathbf{P}^*(«o»)$.

Ответ: 0,075; 0,110.

24. *Задача о хитрой сестрёнке.* Брат и сестра умеют и любят водить папину машину. Чтобы решить, кому вести машину, они обычно подбрасывают монету.

Сестра хочет управлять машиной чаще и предлагает брату: «Давай, ты будешь подбрасывать одну монету, а я две; если у меня окажется больше гербов, то я и поведу машину». Обманула ли сестра брата?

Ответ: Нет, шансы остались равными.

25. *Задача о девичьем гадании.* Когда-то в деревнях России бытовало гадание. Девушка зажимала в руке шесть травинок так, чтобы концы травинок торчали сверху и снизу, а подруга связывала эти травинки парами — сверху, потом — снизу. Если получалось одно кольцо, это означало, что девушка выйдет замуж в текущем году. Рассчитайте вероятность удачи. Попробуйте найти формулу вероятности появления кольца для $2n$ травинок.

26. *Задача о разделе ставки.* (Задача шевалье де Мере[7].) Два игрока набирают очки случайным образом. Выигрывает ставку тот, кто первым наберёт три очка. Игра прервана, когда один игрок набрал одно очко, а другой — два очка. Как надлежит справедливо распределить выигрыш? Вы считаете, — «один к двум»? Подумайте, — что значит «справедливо»?

Указание: Рассмотрите два следующих возможных тура игры и все варианты к концу второго тура.

Ответ: 1 : 3.

Игорь Петрович Костенко,
кандидат физ.-мат. наук, доцент,
действительный член Международной
педагогической академии.
email: kost@kubannet.ru

[7]Французский дворянин — игрок де Мере поставил перед математиками XVII в. интересные задачи, стимулировавшие становление теории вероятностей.

Невероятные совпадения и задача Морозова–Фоменко об исторических складках

Ю. А. Неретин

В статье Ю. А. Неретина исследуется вероятностная задача, возникающая в различных приложениях, в частности, при изучении независимости списков длительности правлений для различных династий. Последний вопрос приобрел в последнее время особую актуальность в связи с активной деятельностью группы новой хронологии, возглавляемой академиком А. Т. Фоменко. Пятый параграф статьи может служить кратким введением в основные понятия теории вероятностей.

Время от времени встречается следующий полуматематический вопрос: допустим, что совпали два числа или два набора чисел, у которых нет видимых причин быть совпадающими. Могло ли это произойти случайно, или из их совпадения вытекают неожиданные следствия? В заметке эта задача обсуждается на примере теории исторических складок (она же «теория новых хронологий»), которая сейчас довольно модна и которой посвящена заметная часть издаваемой у нас исторической литературы.

§1 Задача Морозова

Существует идея, что в нашем понимании истории и исторической хронологии есть глобальная ошибка, и что какая-то древняя эпоха (или страна) в изложении историков раздвоилась и ошибочно воспринимается нами теперь как две разные эпохи (или страны). В цели данной заметки входит обсуждение не самих этих теорий, а числовой мистики, используемой для их обоснования.

Предлагается следующий способ обнаружения исторических наложений. Допустим, что есть две династии, скажем из 15 королей (султанов, императоров и пр.) каждая, такие, что время правления j-го короля одной династии совпадает со временем правления j-го короля другой династии (для всех j). Такое совпадение не может быть случайным, а потому мы имеем право утверждать, что династии на самом деле совпадали и раздвоились лишь в представлении историков. Явные различия в биографиях соответствующих королей мы игнорируем, потому что летописцы и историки неточны, да и тенденциозны[1].

[1] В частности, предлагается игнорировать разницу в именах, странах, вероисповеданиях и т. п. Предлагается также не обращать внимания на возраст, в котором правители вступили на царство и степень родства правителей.

Как к этому относиться? Вопрос праздный, потому что ни одного такого совпадения не обнаружено.

Однако в 20-ых годах 20-го века известный революционер-народник Н. А. Морозов предложил 3 пары «династий», которые, по его мнению, были подозрительно похожи. В середине 70-ых годов нескольких московских математиков (М. М. Постников, А. Т. Фоменко, А. С. Мищенко, Е. Н. Никишин и др.) заинтересовал вопрос о том, имеют ли списки Морозова какую-либо доказательную силу. Позднее этот вопрос разрабатывался главным образом академиком РАН А. Т. Фоменко и некоторыми его учениками.

Цель данной заметки — не полемика со школой Фоменко[2], а независимое (отрицательное) решение этой забавной и простой математической задачи. Никакого отношения к истории эта заметка не имеет, списки правителей для нас — лишь предмет статистической обработки.

Итак, в книге А. Т. Фоменко [1] на стр. 156–172 содержится 13 параллельных таблиц. Чтобы не быть голословными, приведем первую из них. Слева — Каролинги, справа — правители Римской Империи. Подозревается (а точнее, утверждается на основании «близости» продолжительностей правлений), что левый список идентичен правому, т. е. эпоха Карла Великого и эпоха великого переселения народов совпадают.

Таблица 1

1)	Пипин Геристальский	681–714 (33)	1) Констанций	324–361 (37)
2)	Карл Мартелл	721–741 (20)	2) Феодосий	379–395 (16)
3)	Пипин Короткий	754–768 (14)	3) Аркадий	395–408 (13)
4)	Карл Великий	768–814 (46)	4) Феодосий младший	408–450 (42)
5)	Карломан	768–771 (4) или 772	5) Константин	407–411 (4)
6)	Людовик I	814–833 (19)	6) Лев I	457–474 (17)
7)	Лотарь	840–855 (15)	7) Зенон	474–491 (17)
8)	Карл Плешивый	840–875 (35)	8) Теодорих	493–526 (33)
9)	Людовик Германский	843–875 (32)	9) Анастасий	491–518 (27)
10)	Людовик II	855–875 (20)	10) Одоакр	476–493 (17)
11)	Карл Толстый	880–888 (8)	11) Юстин	518–527 (9)

Длительности правлений здесь совпадают не точно, разности между ними равны соответственно

$$4,\quad 4,\quad 1,\quad 4,\quad 0,\quad 2,\quad 2,\quad 2,\quad 5,\quad 3,\quad 1. \qquad (1.1)$$

При выписывании как левой колонки, так и правой, была проявлена определенная гибкость. Мы не ставим под сомнение ее правомерность, но, для понимания задачи, все же обсудим правую (для определенности) колонку[3].

[2]См. по этому поводу интересную статью [2].
[3]Левая колонка частично разобрана в [2].

$1A^*$. Восемь из упомянутых лиц — императоры Римской Империи. Поздняя Римская Империя 284–476 обычно имела 2–4 признаваемых друг другом императоров. В «Истории» Гиббона за рассматриваемое время (324–527) перечислен 31 император.

$1B^*$. Упомянутый Константин обычно числился по списку «узурпаторов». За обсуждаемое время были по крайней мере еще 4 «узурпатора», не менее достойных оказаться в Таблице 1, чем Константин.

$1C^*$. Упомянутые Одоакр и Теодорих Римской Империей не правили и императорского титула себе не присваивали. Это короли «варварского» государства в Италии. По-видимому, они проходят по списку «фактических правителей», см. ниже п. 4.2. В обсуждаемое время можно насчитать с десяток лиц, могуществом не уступавших императорам.

Итак из $13+5+10=46$ человек выбрано 11, что, как известно, можно сделать

$$C_{46}^{11}=\frac{46!}{11!\,35!}\simeq 1,3\cdot 10^{10} \tag{1.2}$$

способами[4].

Не следует думать, что наши 11 человек упомянуты ввиду их особой значимости. Обсуждаемая эпоха Римской Империи представлена в книге [1] не только в вышеприведенной Таблице 1, но и в Таблицах 2, 8, 9, 10. В них за 324–527 годы в общей сложности упоминается в качестве римских правителей 24 императора, 3 «узурпатора», 4 «фактических правителя», а также три вполне посторонних лица (см. ниже п. 4.3), всего 34 человека; еще несколько императоров в [1] на стр. 196.

2^*. Между соседними правлениями присутствуют промежутки в 18 и 7 лет.

3^*. Номера 8–10 переставлены.

4^*. У некоторых правителей могли бы быть указаны даты правления[5].

Так или иначе, историки-профессионалы не склонны считать Таблицу 1 неотразимым доводом. Правы ли они?

Дальнейшая структура данной заметки следующая.

В §§ 2–3 мы решаем задачу Морозова. Наш текст в этих параграфах рассчитан или на читателя, чуть-чуть знакомого с простейшими понятиями теории вероятностей, или на читателя, не желающего вникать в детали.

Так как возможен промежуточный вариант (например, если читатель «знал, но забыл»), в конце статьи, в § 5, мы обсуждаем необходимые понятия, такие как вероятностное пространство, независимые события, случайные величины. Этот же параграф содержит решение части задач, предлагаемых в статье; задачи, к которым дается решение, помечены знаком °.

[4] А даты 324–527 можно было бы заменить на любые другие, как и число 11.

[5] Для полноты я должен отметить деталь, которая не используется в нашей дальнейшей аргументации. Даты правления Констанция 324–361 можно найти лишь в литературе по «новой хронологии», общепринятые же даты 337–361 (24 года правления), либо (годы единовластного правления) 353–361 (8 лет). Почему время единовластного правления Константина Великого (324–337) включено в правление его сына Констанция (род. около 323), в [1], к сожалению, не сообщается. В других таблицах А. Т. Фоменко почему-то использует для Константина и Констанция общепринятые даты правления.

Наша цель — лишь решение задачи Морозова и использование ее как повода к обсуждению задачи о случайных совпадениях и некоторых простейших понятий теории вероятностей.

Однако наши результаты отличны от результатов [1], и поэтому мы должны указать ошибку в соответствующем разделе книги [1]. Это делается в §4. Наш довод, сформулированный в этом параграфе, является чисто логическим. Его проверка не требует от читателя ни знакомства с историей, ни знакомства с математикой.

§2 Численный эксперимент

2.1. Критерий сходства. Давайте (для начала) рассмотрим следующую (волевую) модель. Для определённости мы будем работать с династиями из 15 человек. Правление длиннее 36 лет встречаются довольно редко. Предположим, для простоты, что продолжительность правления меняется от 1 до 36 лет, и что все возможности равновероятны. Давайте считать, что продолжительность правления $(k+1)$-го правителя не зависит от продолжительности правления k-го, $(k-1)$-го и т. д. правителей.

«Династии» правителей ставится в соответствие последовательность продолжительностей правления ее членов. Таким образом, множество всех теоретически возможных «династий» превращается в множество всевозможных последовательностей длины 15

$$\overline{\mathrm{a}} = (a_1, a_2, \dots, a_{15}), \tag{2.1}$$

состоящих из натуральных чисел, меньших или равных 36. Мы, допуская вольность речи, будем называть все такие наборы чисел «династиями»; общее число «династий», очевидно, равно $36^{15} \simeq 2,2 \cdot 10^{23}$.

Обозначим множество всех целых чисел между 1 и 36 через S, а множество всех 15-членных династий, т. е. векторов (2.1) — через S^{15}.

Далее введем (тоже волевым образом) следующий критерий сходства династий.

Критерий 1. Две точки $\overline{\mathrm{a}}, \overline{\mathrm{b}} \in S^{15}$ *близки*, если $|a_j - b_j| \leqslant 3$ для всех j.

На первый взгляд кажется, что мы позволяем себе слишком много: например разрешаем, чтобы все координаты отличались на 3, что не лучше набора (1.1). Вероятность того, что это случится с двумя наугад взятыми «близкими» точками, однако, не велика: она не превосходит $(2/7)^{15} < 10^{-8}$.

Задача 2.1°. Убедитесь в этом.

Фиксируем $\overline{\mathrm{a}}$ и рассмотрим всевозможные близкие точки $\overline{\mathrm{b}}$. Тогда среднее количество мест j, где отклонение $|a_j - b_j|$ достигает 3, очевидно, равно $15 \cdot \frac{2}{7} \simeq 4,3$ (на самом деле чуть меньше; почему?). Примерно в $\frac{3}{7} \cdot 15 \simeq 6,4$ местах ошибка не превосходит 1. Поэтому при нашем Критерии 1 близость понимается жестче, чем в образцовом примере (Таблица 1).

Нас интересует, насколько велика вероятность того, что среди некоторого набора династий встретятся близкие в смысле этого критерия. По поводу того, что означает в данном случае слово «вероятность», см. комментарии ниже в п. 5.2.

2.2. Игра в отрезки. Пусть $a \in S$. Через $I_3(a)$ мы обозначим множество всех $\overline{b} \in S$, таких, что $|a-b| \leqslant 3$. Мы скажем, что два числа $a, b \in S$ *близки*, если $|a-b| \leqslant 3$.

Задача 2.2°. Найдите число пар $a, b \in S$, таких, что a, b близки.

Ответ: $4+5+6+7+7+\ldots(30 \text{ раз})\cdots+7+6+5+4 = 36\cdot 7-12$.

Число всевозможных пар (a, b) равно 36^2, поэтому вероятность того, что a и b близки, равна

$$\delta = (36\cdot 7-12)/36^2 = 1/5,4. \tag{2.2}$$

Задача 2.3. Найдите среднее количество точек в множестве $I_3(a)$ по всем $a \in S$ (Ответ: $36\cdot\delta = 6\frac{2}{3}$).

Задача 2.4°. Возьмем случайно $a, b \in S$.

a) Какая вероятность того, что $I_3(a)$ и$I_3(b)$ не пересекаются? (Ответ: $\simeq 0.67$)

b) Найти среднее число точек в пересечении отрезков $I_3(a)$ и $I_3(b)$.

Ответ: $(4^2+5^2+6^2+7^2+\ldots(30 \text{ раз})\cdots+7^2+6^2+5^2+4^2)/36^2 \simeq 1.25$

2.3. Кубики. Пусть $\overline{a} \in S^{15}$. *Кубиком* $K_3(\overline{a})$ мы назовем множество всех $\overline{b} \in S^{15}$ таких, что $|a_j - b_j| \leqslant 3$ для всех j.

Представим себе на минуту, что мы рассматриваем трехчленные «династии». Тогда каждая «династия» задается набором чисел (a_1, a_2, a_3). Такой набор чисел можно рассматривать как точку куба

$$1 \leqslant x \leqslant 36; \quad 1 \leqslant y \leqslant 36; \quad 1 \leqslant z \leqslant 36$$

с целыми координатами (x, y, z). Условие

$$|x-a_1| \leqslant 3; \quad |y-a_2| \leqslant 3; \quad |z-a_3| \leqslant 3$$

задает куб с ребром 6 с центром в (a_1, a_2, a_3). Картинка, которая нам нужна, в сущности точно такая же, только 15-мерная. По поводу всего, что будет говориться в следующих трех пунктах, удобно представлять себе соответствующую трехмерную картинку.

Вернемся к нашей задаче. Вычислим, сколько точек $\overline{b} \in S^{15}$ лежит в кубике $K_3(\overline{a})$. Если выполнено условие $4 \leqslant a_j \leqslant 32$ для всех j (т. е. кубик «не вылезает» за пределы S^{15}), то, очевидно, ответ: 7^{15}. Координат однако 15, и вполне может случиться, что наше условие не выполнено (кстати, какая вероятность его выполнения?).

Среднее число точек из S на ребре кубика K_3, как мы видели, равно $36\cdot\delta$. Поэтому среднее число точек из S^{15} в кубике равно $(6\frac{2}{3})^{15}$.

Можно это же сказать иначе. Возьмем случайно точки $\overline{a}, \overline{b} \in S^{15}$. Фиксируем j. Вероятность того, что $b_j \in I_3(a_j)$, равна δ. Поэтому вероятность того, что $\overline{b} \in K_3(\overline{a})$, равна

$$\varepsilon = \delta^{15} = \frac{1}{5.4^{15}} \simeq 10^{-11}. \tag{2.3}$$

Задача 2.5°. Вычислите непосредственно среднее число точек в кубике и убедитесь, что наш ответ — точный.

Задача 2.6°. Какое среднее число точек в пересечении двух наугад взятых кубиков $K_3(\overline{\text{a}})$, $K_3(\overline{\text{b}})$? (Ответ: $\simeq 1.25^{15} \simeq 28.5$.)

2.4. Игра в кубики. Пусть теперь в S^{15} наугад брошено N точек $\overline{\text{a}}^1$, $\overline{\text{a}}^2, \dots, \overline{\text{a}}^N$. Попытаемся понять, какая вероятность того, что среди этих точек не будет ни одной пары точек, близких в смысле Критерия 1. Будем бросать точки по очереди. Вероятность того, что $\overline{\text{a}}^2$ не попадает в $K_3(\overline{\text{a}}^1)$, равна $1-\varepsilon$. Вероятность того, что $\overline{\text{a}}^3$ не попадёт в $K_3(\overline{\text{a}}^1)$ и $K_3(\overline{\text{a}}^2)$, равна $1-2\varepsilon$ и т. д. Вероятность того, что $\overline{\text{a}}^{k+1}$ не содержится в $K_3(\overline{\text{a}}^1), \dots, K_3(\overline{\text{a}}^k)$, равна $1-k\varepsilon$. Поэтому вероятность того, что близких точек среди $\overline{\text{a}}^1, \dots, \overline{\text{a}}^N$ не окажется, равна

$$P = (1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)(1-3\varepsilon)\cdots(1-(N-1)\varepsilon). \tag{2.4}$$

2.5. Оценка произведения. Очевидно,

$$\ln(P) = \ln(1-\varepsilon) + \ln(1-2\varepsilon) + \dots + \ln(1-(N-1)\varepsilon). \tag{2.5}$$

Используя формулу $\ln(1+x) \simeq x$, мы преобразуем $\ln P$ к виду

$$\ln P \simeq -(\varepsilon + 2\varepsilon + \dots + (N-1)\varepsilon) \simeq -\frac{1}{2}N^2\varepsilon. \tag{2.6}$$

Итак,

$$P \simeq \exp(-\frac{1}{2}N^2\varepsilon).$$

2.6. Опасная черта. Допустим, что при выбранном N, вероятность того, что по крайней мере две династии оказались близки, достигла $1/10$, (т. е. $P = 9/10$). Тогда, найдя две близкие династии, мы уже не можем сделать никаких достоверных выводов[6]. Если $P = 9/10$, то

$$\frac{1}{2}N^2\varepsilon \simeq 1/10,$$

или при нашем значении ε, равном (2.3), случайная близость каких-то двух точек из нашего набора становится вполне вероятной при числе династий, равном

$$N = 140\,000. \tag{2.7}$$

Задача 2.7°. Правомерно ли мы отбросили квадратичное слагаемое в Тейлоровском разложении $\ln(1+x)$?

Задача 2.8°. В нашем рассуждении мы пренебрегали тем, что кубики могут пересекаться. Были ли мы правы?

[6]Мы не в состоянии сделать даже правдоподобного предположения, потому что есть дополнительная степень свободы — возможность выбора модели и соответственно сознательной или бессознательной подгонки модели под ответ.

2.7. Сколько династий было на белом свете? Попытаемся грубо оценить это число снизу. Я выписал для себя следующие списки правителей (здесь они из экономии места не приводятся, но их легко воспроизвести, исторические ссылки см. в конце заметки).

А. Древнерусские князья (862–1132): 17 человек
Б. Великие князья Киевские (1132–1236): 20 человек
В. Великие князья Владимирские (1238–1363): 16 человек
Г. Великие князья Московские и Владимирские (1363–1461): 4 человека
Д. Цари и императоры (1461–1917): 26 человек
Е. Генсеки (1917–1985): 6 человек
Ж. Президенты (1985–1999): 2 человека.

Итого от Рюрика до Ельцина — 93 человека.

Для понимания задачи важно подчеркнуть, что список содержит некоторую неопределенность. Например, в часть Д, при желании, можно включить, а можно и не включать следующих лиц или группы лиц:

— Иван Молодой, Елена Глинская*, Боярское правление 1538–47, Симеон Хасбулатович, далее ряд участников смуты [Фёдор Годунов, Лжедмитрий I*, Василий Шуйский*, Вор Тушинский (он же Лжедмитрий II), Семибоярщина, Владислав Сигизмундович, Вор Псковский (он же Лжедмитрий III Сидорка), Маринка с Ворёнком (Иваном Лжедмириевичем), триумвират Минин–Пожарский–Трубецкой], далее Филарет Романов*, Софья*, Иван V, Верховники 1729, Иван VI* Антонович.

Лишь отмеченных звездочкой я включил в свой список 26 царей. Разумеется в некоторых из этих сомнительных случаях читатель может иметь другое мнение[7].

Далее, по крайней мере у 36 из 93 правителей можно указать разные даты правления[8].

Теперь считаем династии.

1. Из 93-звенной цепочки можно вырезать 93-14=79 отрезков по 15 звеньев.

2. Российская династия А–Б–В–Г–Д–Е–Ж вполне возможна, но не бесспорна. Отрезок Б с равным правом можно заменить на 6 Владимиро-Суздальских князей того же времени. Итого 34 новых династии.

3. Авторов книг по истории, однако, обычно интересует третий вариант: часть отрезка В заменяется на 5 московских князей Даниловичей. Еще 32 династии.

4. Список Б может быть продолжен князьями Киевскими же. Это дает лишь 8 династий.

Итого более 150 честных династий самого высокого уровня.

Задача 2.9°. Укажите возможные точки переклейки династий в Таблице 1.

Обработка списка Галицко-Волынских князей (990–1340) по той же методике дает 32 династии и т. д. Остановимся. Понятно, что по Русскому государству 300 «династий» легко набирается.

[7] Вряд ли кому-нибудь захочется включить в список русских царей вора Сидорку. Однако, если читатель попробует сформулировать критерий, отличающий царя от не царя, то наш Сидорка при внимательном рассмотрении вполне может оказаться в царях (в смысле этого критерия).

[8] У Ельцина Б.Н. возможна ошибка лишь в один год (1990-99 или 1991-99). А вот Рюрик Ростиславич правил в Киеве в 1172-1211 с 7 (!) перерывами.

Насколько надо умножить 300, чтобы получить общемировое число династий? В любом случае, коэффициент больше 20.

Далее, допустим, что 15-звенная династия содержит правителя с «плавающими» датами царствования. Тогда из нее изготовляется два набора чисел, т. е. вектора из S^{15} (вопрос: когда соответствующие им кубики не пересекаются?). Если же таких правителя оказалось два, то династия учетверяется, если три — то увосьмеряется и т. д. Не проявляя большого энтузиазма, мы легко утроим уже достигнутое число династий[9].

Итого 18 000 реальных династий. Дотянем ли мы до 140 000, — вопрос скользкий, и, может, не очень интересный.

Обращаю внимание, что число 18 000 достигается не за счет какой-то эквилибристики, а за счет естественной неопределенности входных данных.

2.8. Восстановление прав Карла Великого.

Задача 2.10. Заменим в наших рассуждениях 2.1–2.6 параметр 15 на 11 (см. Таблицу 1). Что произойдет с N?

Ответ. Оно поделится на $5,4^2 \simeq 29$, т. е. $N \simeq 4800$.

Мы видим, что для реальных 11-звенных династий $\overline{\text{a}}$, $\overline{\text{b}}$ вполне возможно случайное возникновение примерно такой ошибки (с точностью до порядка координат)

$$|a_j - b_j| = 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3.$$

При этом не нужно ни переставлять, ни пропускать, ни объединять (см. п. 4.2) правителей, ни даже честно подгонять даты правления.

Задача 2.11. Заменим в рассуждениях пп. 2.1–2.6 условие близости $|a_j - b_j| \leqslant 3$ на $|a_j - b_j| \leqslant 4$ (а это примерно соответствует ошибки в (1.1)). Чему станет равно N?

Ответ: $\delta \simeq 1/4,26$; $N \simeq 1300$.

Задача 2.12. При каких N можно быть уверенным, что близкие династии наверняка будут?

2.9. Укороченный вариант рассуждения. Приведём рассуждение не строгое, но объясняющее, что же произошло. Во-первых, наша вероятность случайной близости двух династий $\varepsilon = 10^{-8}$ (в случае 11-звенных династий) не так уж мала. Конечно, если фиксировать династию (в том смысле, что фиксируется список имен и даты правления), то надежды найти близкую династию немного.

Рассматривая же N династий, мы стремимся найти хотя бы одну близкую пару. Но пар всего $N(N-1)/2$. Если число пар становится сравнимым с $1/\varepsilon$, естественно ожидать возникновения случайной близости.

При составлении параллельных таблиц типа Таблицы 1 А. Т. Фоменко разрешает следующие приемы (подробнее см. § 4):

— пропуск правителей из списка,

— перестановки соседних правителей,

[9] Читатель может оценить коэффициент экспериментально на примере династии А–Ж.

— введение понятия «фактического правителя»(который заменяет в списке титульного монарха),

— объединение двух правлений в одно.

Более того, первые три приема были вполне использованы в Таблице 1.

Мы убедились, что сходство, лучшее, чем (1.1), может возникнуть случайно само собой, без (!) применения четырех только что упомянутых приемов. Подчеркнем, что мы никак не использовали в нашей аргументации не такое уж маленькое число, указанное в формуле (1.2).

Отдельный человек может ошибаться, увлекаться или иметь самые неожиданные мотивы для своих действий. Разумеется также, что в самом по себе вопросе о степени обоснованности исторической хронологии нет ничего крамольного.

Вызывает однако удивление, что люди с математическим образованием и профессиональные математики в течении 15 лет (1980–95) благожелательно относились к работе, математическая ошибочность которой вполне очевидна. Долгожданная реакция гуманитариев началась, и, как легко можно было предсказать, она, в определенной степени, направлена против математиков вообще. Остается лишь надеяться, что гуманитарии проявят бóльшее благоразумие, чем математики.

§3 Более тонкие задачи и перестраховка

Задача о случайной близости, однако, заслуживает более подробного обсуждения, и работа [1] даёт к этому хороший повод. В частности, в [1] предлагается рассматривать династии лишь длины 15, и сам автор [1] временами это делает. Как мы видели, при переходе от 11 к 15 число династий, при котором возможно возникновение случайной близости в смысле Критерия 1, резко возрастает. Вопрос в том, можно ли нарезать из реальных списков правителей 140 000 «династий» является скользким и, самое главное, очень скучным.

3.1. Влияние дополнительной ошибки. Введём новый критерий сходства династий.

Критерий 2. Две точки $\overline{\mathrm{a}}, \overline{\mathrm{b}} \in S^{15}$ близки, если точка $\overline{\text{Б}}$ может быть получена из $\overline{\mathrm{a}}$ изменением любого набора координат не более чем на три, и перестановкой двух пар соседних координат a_j с a_{j+1}, и a_k с a_{k+1} (положим для определённости все числа j, $i+1$, k, $k+1$ различными).

Пусть $\overline{\mathrm{a}}$ — некоторая династия. Вычислим количество допустимых пар перестановок (транспозиций). Первая транспозиция может быть сделана в 14 местах, вторая — как минимум в 11 (за исключением первой и двух соседних мест). Итого пар — по крайней мере 77.

Таким образом, из одной династии получилось 77, но тут возникает небольшая загвоздка. Соответствующие 77 кубиков могут пересекаться. Давайте допускать перестановки a_j и a_{j+1} лишь в местах, где $I_3(a_i)$ и $I_3(a_{j+1})$ не пересекаются (т.е. $|a_j - a_{j+1}| \geqslant 7$). Число кубиков станет несколько меньше, но они уже точно не будут пересекаться. В силу Задачи 2.4.а, число таких пар примерно $7 \cdot 0.67^2 \simeq 34$. Итак, число кубиков выросло в 34 раза, а поэтому опасная граница N (см. (2.6)) уменьшится в $\sqrt{34} \simeq 6$ раз и станет равной примерно 24000.

Таким образом, разрешение двух «малых» ошибок почти свело на нет положительный эффект от удлинения рассматриваемых династий от 11 до 15 человек.

Читатель возможно не удовлетворен, что мы чуть-чуть не дотянули до 18 000 (т. е. до реального числа династий), но большой разницы уже нет, тем более, что во всех существенных местах мы занижали оценки не в нашу пользу.

Задача 3.1. Что случится, если мы разрешим сделать какие-нибудь (любые) две ошибки типа перестановки правителя и слияния двух правлений в одно (см. ниже п. 4.2)?

3.2. Параметры модели. Число 36 лишь кажется параметром нашей модели § 2, действительно же важно число ε (см. (2.3), т. е. вероятность случайной близости точек $\overline{\mathrm{a}}, \overline{\mathrm{b}} \in S^{15}$. Лишь оно используется при игре в кубики.

Критерии близости тоже почти ни причем. Они лишь участвуют в определении числа ε.

Теперь мы можем подойти к задаче более серьёзно.

3.3. Неравномерное распределение. Допустим, что продолжительности правлений могут быть любыми в пределах 100 лет, и пусть вероятность того, что правление имело длительность k, равна p_k, где $k = 1, 2, 3, \ldots, 100$; естественно, $\sum p_k = 1$. Допустим также, что продолжительность j-го правления не зависит от продолжительностей предыдущих правлений; если бы это было не так (а, кажется, это правда чуть-чуть не так), то вероятность случайных совпадений бы увеличилась.

Вероятность того, что две точки $a, b \in S$ удовлетворяют неравенству $|a-b| \leqslant 3$, равна

$$\delta = \sum_{1 \leqslant i \leqslant 100,\ 1 \leqslant j \leqslant 100,\ |i-j| \leqslant 3} p_i p_j. \tag{3.1}$$

Далее мы повторяем игру в кубики.

Величина δ может быть вычислена экспериментально. Для династии А–Ж, по моим вычислениям, вероятность длин правлений различных правителей примерно $\delta = 1/4{,}66$, что в случае 15-членных династий уменьшает N (см. (2.6)) примерно в 3 раза.

3.4. Перестраховка. Математическая часть наших рассуждений закончена, но вопрос о судьбах Рима, быть может, кажется читателю не вполне ясным. В этом деле от δ многое зависит, а величина $\delta = 1/4{,}66$ найдена по слишком малой статистике.

Легко, однако, надежно оценить δ снизу. Правления длиннее 45 лет уже точно почти не встречаются, а в большинстве встречающихся случаев они естественно расщепляются на регенство и правление. Чтобы уменьшить вероятность случайных совпадений, возьмем равномерное распределение вероятностей $p_j = 1/45$ (т.е. мы просто заменили 36 на 45), что даст $\delta \simeq 1/6{,}7$ (и это значение заведомо занижено!). Тогда N (в случае 15-членных династий) подскакивает в 5 раз.

Вероятность случайной близости по Критерию 1 для 15-звенных династий вроде бы становится малой. Начинает даже казаться (я не буду упорствовать в этом месте), что она мала по Критерию 2. Но ... мы пока не трогали *главную неопределенность в понятии «династии» — неопределенность списка правителей.*

Если читателю еще не надоело, он может развлечься самостоятельно. Впрочем и $\delta = 1/5,4$, по-видимому, занижено.

3.5. Вывод из сказанного выше очевиден. Разумеется, есть совпадения, которые могли бы произойти случайно, и есть — те, которые не могли бы. Но **пары похожих «династий», указанные Н. А. Морозовым и А. Т. Фоменко, вполне могут возникнуть случайно. Поэтому никаких логических следствий из их сходства извлечь нельзя**[10].

§4 Игра в императоров

4.0. В своей фундаментальной работе [1] об исторических складках А. Т. Фоменко опубликовал положительное решение задачи Морозова. Оно основано на довольно замысловатом компьютерном алгоритме, излагаемом на стр. 115–117, 141 книги [1]. К сожалению, никакого логического обоснования этого Алгоритма (из которого далее извлекаются столь глобальные следствия) в книге не приводится, не обсуждается и то, к каким результатам могли бы привести иные (в частности более простые) алгоритмы. Читателю же, пожелавшему проверить результаты работы Алгоритма экспериментально (хотя, что значит проверить?), пришлось бы — этого требует Алгоритм — ввести в качестве входных данных список всех правителей всех времен и народов; т. е. понадобилось бы набрать на клавиатуре компьютера текст размером с объёмистую книгу[11].

Мы утверждаем, что работа [1] ошибочна (во всяком случае в той части, которая базируется на теории «династического параллелизма»). Как найти ошибку в алгоритме Фоменко: мы имеем обширный текст [1], в котором аргументация основана на сборе огромных внешних данных и трудно контролируемой компьютерной обработке. Тем не менее, *можно ли указать фатальную ошибку в тексте, исходя из самого текста*?

Приводимый ниже довод довольно прост и, по-существу, требует лишь внимательного прочтения таблиц 1–13 книги [1] (стр. 156–172) и указанных в них дат. С точки зрения формальной логики достаточно прочтения одной (любой) из этих таблиц. Но чтобы быть уверенным, что не произошло случайной ошибки или опечатки, лучше посмотреть их все или хотя бы несколько.

4.1. За что зацепиться? Рассмотрим 11-звенные династии и Критерий близости из пункта 2.1. По перестраховочным подсчётам п. 3.4, мы имеем $\delta = 1/6.7$, а поэтому вероятность случайной близости двух точек более чем $6,7^{-11} \simeq 1,2\cdot 10^{-9}$. При сравнении этого числа с выражением (1.2) естественно возникает

[10] В частности, нет никаких оснований думать, что «параллелизмы» А. Т. Фоменко отражают какие-то неизвестные нам исторические закономерности.

[11] Это сделано автором [2]. Разумеется, оппоненты могут оспаривать, например, полноту использованного им списка правителей (правда, такого рода доводы обоюдоостры). В [2], однако, экспериментально обнаружены неожиданно патологические свойства Алгоритма. Любой желающий может сопоставить наблюдения из [2] с самим Алгоритмом.

следующий вопрос:

Задача 4.1°. Дана произвольная династия $\bar{a}$. Можно ли ее приблизить поддинастией из римских правителей?

Ответ: нет.

Хотя ответ и отрицателен (см. решение), угрожающее число (1.2) никуда не девается. Ясно, что автор [1] стоит перед следующим выбором (который a priory безнадёжен):

— если разрешить выбрасывать правителей из списка произвольным образом, то алгоритм станет даже внешне неправдоподобным, а количество пар «тождественных династий» (вроде Таблицы 1), возникающих при его прогонке, будет (по самым скромным оценкам) исчисляться тысячами.

— если запретить произвольный «просев» правителей, то Таблицу 1 нельзя оправдать.

По-видимому, простейший способ найти ошибку в Алгоритме — это выяснить, как А. Т. Фоменко решает данный вопрос. Его решение, в своем роде, красиво.

4.2. Декларированные свойства Алгоритма А. Т. Фоменко. Итак, на стр. 115–117, 141 книги [1] приводится Алгоритм, при прогонке которого на компьютере, как утверждается, должны получиться все пары «раздвоившихся» династий.

В объявленные цели Алгоритма входит моделирование следующих типов ошибок

— {1} небольшая ошибка в измерении времени правления;
— {2} перестановка соседних правителей;
— {3} объединение двух правлений в одно.

Коль скоро нам предлагаются такие правила игры, давайте с ними безропотно согласимся. Насколько они соответствуют решаемой задаче — вопрос другой. Он обсуждается ниже в 5.17.

Кроме того, разрешается

— {4} замена титульного правителя на «фактического правителя», иными словами, на какое-либо достаточно могущественное лицо.

Задача 4.2°. Попытайтесь написать «фактических правителей»и даты их правления для временных отрезков Д–Ж русской истории из п. 2.7.

Наконец, не считаются за ошибки следующие преобразования

— {5} выбор одной из возможных продолжительностей данного правления;
— {6} пропуск произвольного набора правителей.

«Компьютер» выбирает и то, и другое по своей воле. Пропуск правителя, очевидно очень опасен (или полезен, в зависимости от вкуса), но на стр. 117 и 141 делается возможная оговорка: *«При «просеве» правителей не должен образовываться промежуток между правлениями больше года»*

Задача 4.3°. Может ли Таблица 1 возникнуть как результат работы Алгоритма?

Здесь нет возможности обсуждать, насколько алгоритм А. Т. Фоменко моделирует ошибки {1}–{3}.

4.3. Неудовлетворительность алгоритма. А. Т. Фоменко сумел найти несколько десятков пар династий, которые показались ему «тождественными». Наиболее важные из них указаны в таблицах 1–13 на стр. 156–172.

Удивительным образом оказывается, что *ни одна из этих таблиц не может быть получена как результат работы описанного в книге Алгоритма.* А именно, во всех случаях присутствуют следующие ошибки в списке правителей, которые не могут быть сделаны Алгоритмом.

— {7} пробелы между соседними правлениями (в явном виде до 24 лет);

— {8} замена произвольного набора правителей на слова «Смута», «Анархия» (до 29 лет), «Вставка» (до 78 лет) и др.

— {9} пополнение списка правителей произвольными лицами с произвольными датами правления.

Напомним, что {7} запрещено, {8} Алгоритмом не предусматривается, а идея ввести в список Римских правителей Алариха (378–403)[12], богослова Василия Великого (333-378, это примерно совпадает с датами его жизни) и ересиарха Ария едва ли принадлежит компьютеру.

В действительности, преобразования {7}, {8} снимают почти любые ограничения на пропуски правителей. Преобразование {9} позволяет находить соответствие правителей в безвыходных ситуациях (т. е. по существу равносильно пропуску правителя; действительно, вычёркивая из таблицы Василия Великого, мы должны будем вычеркнуть и его «эквивалент»).

Для полноты, мы указываем максимальные пробелы между соседними правлениями (иногда замаскированные), которые *не могут быть итогом работы Алгоритма*, в Таблицах 1–13. Они составляют соответственно [далее в квадратных скобках указаны номера строк, в которых находятся эти пробелы]:

1°: 18 лет [1–2], **2°**: 42 года [5], **3°**: 11 лет [1–3],
4°: 42 года [4][13], **5°**: 19 лет [9–10], **6°**: 4 года [12–13],
7°: 8 лет [14–15], **8°**: 43 или 59 лет [1–3], **9°**: 4 года [7],
10°: 76 лет [12], **11°**: 28 лет [10 слева], **12°**: 53 или 59 лет [8–11],
13°: 53 года [9-10].

Читатель работы [1], однако, может не утруждать себя задачей вычисления трёхзначных и четырёхзначных дат, на рис. 16.7–16.11 книги [1] эти пробелы изображены вполне наглядно.

4.4. Не декларированные преобразования. Цель, сформулированная в п. 4.0, вполне достигнута нами в п. 4.3. Забавно, однако, что в Таблицах 1 – 13 встречается также ряд иных преобразований списка правителей, не входящих в разрешенные {1}–{6}.

– {10} Раздвоение правителя[14];

---

[12] Кстати, неожиданно не только присутствие Алариха в списке, но и эти даты.

[14] В таблице 9 Валент сначала соответствует Клавдию, а потом Нерону; там же два Иовиана, один из них назван Смутой (псевдоним раскрывает сам А.Т.Фоменко на стр. 206. А вот Септимий Север раздвоен дважды (в Таблицах 4 и 9), один ее дубль объединен с Каракаллой, а другой – с Каракаллой и Коммодом. Но последнее может быть истолковано как гибкий вариант преобразования {3}.

– {11} Слияние трех и более правителей в одного;

– {12} Перестановки несоседних правителей, а также перестановки групп правителей[15];

– {13} Нетривиальные преобразования[16]

4.5. Выводы. Я повторю основное наблюдение, сделанное в этом параграфе. Из сказанного в этом параграфе никак не следует, хорош Алгоритм А. Т. Фоменко сам по себе или плох. Из сказанного также никак не следует, хороши ли преобразования {1}–{13} с точки зрения изучения истории. Мы лишь утверждаем, что *ни одна из Таблиц Фоменко не может появиться как результат работы его же Алгоритма.*

Итак, А. Т. Фоменко не смог найти алгоритма, который оправдывал бы найденные им самим «тождества династий». Это ничего не доказывает, но зато хорошо согласуется с нашими выводами. С работой [2] наши выводы тоже хорошо согласуются.

§5 Решения задач и комментарии

— Каждый четвертый человек является китайцем, а каждый пятый — индийцем. Поэтому каждый двадцатый является и китайцем, и индийцем одновременно.

— Какая вероятность встретить динозавра на Невском проспекте?
— Одна вторая: либо встретишь, либо нет.

Из фольклора

5.1. Решение Задачи 2.1 (об углах кубика). Мы должны оценить число точек $\overline{\mathrm{b}} \in K_3(\overline{\mathrm{a}})$, таких что $|a_j - b_j| = 3$ для всех j.

Если $4 \leqslant a_j \leqslant 32$, то число возможных значений b_j, таких что $|a_j - b_j| \leqslant 3$, равно 7. Из них в точности на 3 отстоят ровно 2 точки. Таким образом, вероятность того, что $|a_j - b_j| = 3$, в этом случае равна 2/7.

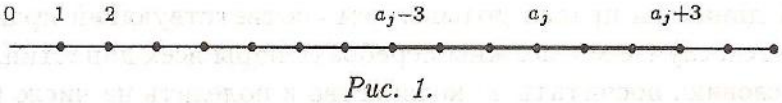


Рис. 1.

Если a_j близко к одному из концов промежутка [1; 36], то число близких значений b_j будет 6, или 5, или 4, но из этих b_j лишь одно число будет отстоять точно на расстояние 3.

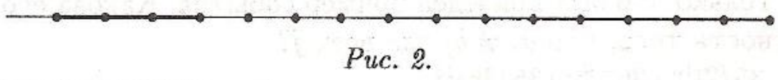


Рис. 2.

[15]Например, 170-летний отрезок библейской истории переставлен с 65-летним.

[16]Пример (Таблица 9). Октавиан Август 44-27 до н.э. = Константину Великому 306-324, а Октавиан Август 27 до н.э.-14 н.э. = Константину Великому 306-337. Этот замечательный "параллелизм, доходящий до тождества", подробно и правдоподобно обсуждается далее на стр. 201-204.

Вероятности того, что для b_j, близкого к a_j, выполнено

$$|a_j - b_j| = 3, \tag{5.1}$$

будут соответственно 1/6, 1/5, 1/4. Все эти числа меньше 2/7. Поэтому вероятность того, что (5.1) выполнено для всех j, меньше $(2/7)^{15}$.

5.2. О понятии вероятности. Мы начнем обсуждение этого понятия с того конкретного случая, который рассматривается в § 2.

Мы считаем, что все династии, т. е. точки в S^{15}, равновероятны. Допустим, что мы сделали высказывание об одной династии. Например: «длительность правления каждого следующего правителя не меньше, чем у предыдущего». Какова вероятность этого *события*? Мы должны посчитать все точки в S^{15}, удовлетворяющие этому условию[17]. Далее, полученное число точек делится на 36^{15}. Эти слова можно считать определением вероятности в нашем конкретном случае.

Итак, *событием* в S^{15} мы назовем произвольное подмножество $A \subset S^{15}$, а его *вероятностью* — число точек в A, делённое на 36^{15}.

Задача 5.1. Какая вероятность того, что правители правили больше 18 лет? Какая вероятность того, что ровно один правитель правил ровно 23 года? Какая вероятность того, что любые два правителя правили разное число лет (т. е. $a_i \neq a_j$ для всех i, j)?

Ответ: соответственно 2^{-15}, $15 \cdot 35^{14} \cdot 36^{-15}$, $\frac{36!}{21!} \cdot 36^{-15}$.

Это же определение применимо к совсем простому случаю — к множеству S, состоящему из чисел 1, 2, 3, ..., 36. Вероятность подмножества $A \subset S$ равна числу точек в A, делённому на 36.

Также мы можем говорить о парах точек (a, b), где $a, b \in S$ (мы считаем пары (a, b) и (b, a) различными). Обозначим множество таких пар через S^2. Общее число точек в S^2 равно 36^2. Если мы имеем некоторое подмножество $B \subset S^2$, то его вероятность есть число точек множества B, делённое на 36^2. В задачах 2.2 и 2.4 мы играем с подмножествами множества S^2.

Можно сделать высказывание и о двух династиях. Например, «каждый правитель первой династии правил дольше, чем соответствующий правитель второй династии». В этом случае мы должны перебрать пары всех династий, удовлетворяющих этому условию, посчитать их количество и поделить на число $(36^{15})^2$ (т.е. на общее число пар династий).

Опять-таки, *событием* является подмножество A в множестве пар $(\overline{\mathrm{a}}, \overline{\mathrm{b}})$, где $\overline{\mathrm{a}}, \overline{\mathrm{b}} \in S^{15}$, а его вероятность, по определению, равна числу точек в A, делённому на 36^{30}.

Задача 5.2. Только что был приведён пример события. Какова его вероятность? Какова вероятность того, что $a_j \neq b_j$ для всех j?

Ответ: $[36 \cdot 35/2]^{15} \cdot 36^{-30}$; $(35/36)^{15}$.

---

[17]Кстати, это приятная и допускающая простой ответ задача, хотя и вполне бессмысленная с точки зрения истории. Я не уверен, что другие обсуждаемые нами задачи с этой точки зрения более разумны.

Можно сделать высказывание и о N династиях. Формализация этого следующая. Рассмотрим множество R всех наборов

$$(\overline{\mathrm{a}}^{(1)}, \overline{\mathrm{a}}^{(2)}, \dots, \overline{\mathrm{a}}^{(N)}), \qquad \text{где } \overline{\mathrm{a}}^{(k)} \in S^{15}.$$

Общее число точек этого множества, очевидно 36^{15N}. *Событием* мы называем произвольное подмножество A в R. *Вероятность события* — число точек в A, делённое на 36^{15N}.

Все вычисления нашего § 2 состоят в подсчёте числа точек в различных подмножествах только что описанных множеств. Когда мы не можем найти число точек точно, мы оцениваем его.

Отметим следующую полезную и почти очевидную лемму.

Задача 5.3. Обозначим через Q множество, состоящее из всевозможных пар династий $(\overline{\mathrm{a}}, \overline{\mathrm{b}})$. Пусть A, B — события (подмножества) в S^{15}. Рассмотрим подмножество C в Q, состоящее из пар $(\overline{\mathrm{a}}, \overline{\mathrm{b}})$, таких что $\overline{\mathrm{a}} \in A$, $\overline{\mathrm{b}} \in B$. Тогда

$$\{\text{вероятность } C\} = \{\text{вероятность } A\} \cdot \{\text{вероятность } B\}. \tag{5.2}$$

Здесь уместно вспомнить фундаментальное в теории вероятностей понятие независимых событий. А именно, два события A, B называются ***независимыми***, если вероятность $A \cap B$ равна произведению вероятностей A и B.

Мы вернёмся к этому понятию чуть ниже.

5.3. Решение задачи 2.2 (о близких числах). Выписанные в ответе к задаче слагаемые соответствуют числу возможных значений b для $a = 1, 2, 3, \dots, 36$; см. Рис. 1–2.

5.4. Решение задачи 2.4.а (о непересекающихся отрезках). Нам нужно посчитать число пар точек (a, b) на отрезке $[1, 36]$, таких что $|a - b| \geqslant 7$. Если $a = 1$, то для b есть $36 - 7 = 29$ возможностей. Если $a = 2$, то будет $36 - 8 = 28$ возможностей, и т. д. Поэтому мы должны посчитать сумму

$$29 + 28 + \dots + 24 + 23 + 23 + \dots + 23 + 23 + 24 + 25 + \dots + 29$$

и поделить её на 36^2.

5.5. Решение задачи 2.4.б (о пересечении отрезков). Надо вычислить сумму

$$\sum_{1 \leqslant a \leqslant 36,\, 1 \leqslant b \leqslant 36} \Big\{\text{число точек в } I_3(a) \cap I_3(b)\Big\}.$$

Иными словами мы должны найти количество троек (a, b, z), таких что $|a - z| \leqslant 3$, $|b - z| \leqslant 3$, и все числа a, b, z лежат между 1 и 36. Нашу сумму удобно преобразовать к виду

$$\sum_{1 \leqslant z \leqslant 36} \Big\{\text{число пар } (a, b), \text{ таких что } |a - z| \leqslant 3,\ |b - z| \leqslant 3\Big\} =$$

$$= \sum_{1\leqslant z\leqslant 36} \Big\{ \text{число точек в } I_3(z) \Big\}^2 .$$

5.6. Решение задачи 2.5 (о среднем числе точек в кубике). Рассмотрим кубик с центром $\overline{\mathrm{a}} = (a_1, \dots, a_{15})$. Обозначим через $\varkappa(b)$ число точек в отрезке $I_3(b)$. В этих обозначениях число точек в кубике $K_3(\overline{\mathrm{a}})$ равно $\varkappa(a_1)\varkappa(a_2)\dots\varkappa(a_{15})$. Поэтому мы должны вычислить сумму по всем кубикам

$$\sum_{\overline{\mathrm{a}}} \varkappa(a_1)\varkappa(a_2)\dots\varkappa(a_{15}) = \sum_{1\leqslant a_1\leqslant 36,\dots,1\leqslant a_{15}\leqslant 36} \varkappa(a_1)\varkappa(a_2)\dots\varkappa(a_{15}).$$

Убедитесь, что это выражение есть в точности то, что получится при раскрывании скобок из

$$\underbrace{(\varkappa(1) + \dots + \varkappa(36))\dots(\varkappa(1) + \dots + \varkappa(36))}_{15 \text{ раз}}.$$

Теперь всё свелось к задаче 2.3.

В п. 5.10 мы приведём решение той же задачи, требующее меньшего умственного напряжения.

5.7. Аксиоматика Колмогорова. Вероятностные пространства и независимые события. Перейдем к формальному определению простейших понятий теории вероятностей (мы приводим эти определения в минимально возможной общности).

Конечным вероятностным пространством R, согласно Колмогорову, называется конечное множество $R = \{r_1, r_2, \dots\}$, точкам которого приписаны неотрицательные числа (вероятности)[18] $p_1, p_2, \dots$, причем

$$p_1 + p_2 + \dots = 1 \tag{5.3}$$

Событием называется произвольное подмножество в R, *вероятность* $p(A)$ *события* A — сумма вероятностей всех входящих в него точек.

Примеры вероятностных пространств были приведены в п. 5.2.

Это простое определение, вместе с еще несколькими, почти столь же простыми, выводит понятие вероятности из предмета туманного философствования в предмет точных рассуждений.

Конечно, остается вопрос о том, откуда взять числа $p_1, p_2, \dots$. Это вопрос отдельный, ответ на него иногда можно понять из смысла задачи, иногда можно найти экспериментально.

Если вероятности всех точек равны, то мы говорим, что вероятность распределена *равномерно*.

Задача 5.4. Пусть множества A, B не пересекаются. Тогда

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

[18] Мы везде (независимо от пространства) обозначаем вероятность буквой p (от слова «probability»).

Далее, пусть R, Q – вероятностные пространства. Рассмотрим их произведение $R \times Q$, т.е. множество точек вида (x, y), где $x \in R$, $y \in Q$. Тогда объявляем $R \times Q$ вероятностным пространством, положив, что вероятность точки (x, y) равна $p(x)p(y)$.

Задача 5.5. Убедитесь, что сумма вероятностей точек пространства $R \times Q$ равна 1.

Если мы имеем три вероятностных пространства, R, Q, T, мы определяем их произведение
$$R \times Q \times T = (R \times Q) \times T.$$
Приятнее сказать, что вероятность точки (x, y, z), где $x \in R$, $y \in Q$, $z \in T$, равна $p(x)p(y)p(z)$. Точно так же определяется произведение любого конечного числа вероятностных пространств.

Пример. Пространство S^{15} из п. 5.2 является произведением 15 штук одинаковых пространств S из того же пункта. Введенное там же пространство R — произведение N копий пространства S^{15}.

Два события $A, B \subset R$ называются *независимыми*, если
$$p(A \cap B) = p(A)p(B).$$
Пример независимых событий приведен в задаче 5.3, а пример зависимых — в самом начале данного параграфа.

Задача 5.6. Пусть A — событие в R, а B — событие в Q. Положим $A' = A \times Q$ (т.е. возьмём множество всех точек (a, y), где $a \in A$, $y \in Q$). Положим $B' = R \times B$. Покажите, что
$$p(A' \cap B') = p(A')p(B') = p(A)p(B),$$
т.е. события A', B' независимы.

Набор событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$ называется *независимым*, если для любого его поднабора A_m, A_n, … , A_l выполнено
$$p(A_m \cap A_n \cap \cdots \cap A_l) = p(A_m)p(A_n) \ldots p(A_l).$$

Пример. Рассмотрим пространство всех пар точек $(\overline{\mathrm{a}}, \overline{\mathrm{b}})$ в S^{15}. В силу задачи 5.6, события $|a_1 - b_1| \leqslant 3$, $|a_2 - b_2| \leqslant 3$, … , независимы. Это даёт решение задачи 2.4.б (впрочем, здесь введенная терминология не дала ничего нового).

5.8. Влияние неравномерности распределения на вероятность случайных совпадений. В качестве модельного примера мы обсудим следующую задачу.

В комнате сидят N случайно выбранных людей. Какова вероятность того, что среди них есть два человека с совпадающими днями рождения?

Предположим сначала, что мы имеем равномерное распределение вероятностей.

Будем искать вероятность того, что дни их рождений попарно различны. Вероятность того, что день рождения второго человека отличен от дня рождения первого[19], равна $\frac{364}{365}$. Вероятность того, что день рождения третьего человека отличен от дня рождения первого и второго, равна $\frac{364\cdot363}{365\cdot365}$. Повторяя это рассуждение, мы получаем, что вероятность того, что все дни рождения различны, равна

$$\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{365-N+1}{365}. \tag{5.4}$$

Разумеется, это лишь упрощённый вариант нашей игры в кубики из п. 2.4.

Рассмотрим более общую задачу. Пусть вероятность того, что человек родился в j-ый день года равна p_j. Кажется интуитивно ясным, что в этом случае вероятность случайного совпадения дней рождения может только увеличиться по сравнению с (5.4). Убедимся аккуратно, что действительно так.

Нашим вероятностным пространством Ω является пространство последовательностей

$$(u_1,\ldots,u_N), \tag{5.5}$$

где $u_j = 1,2,3,\ldots,365$ — номера дней в году. Вероятность точки (5.5) равна произведению чисел p с соответствующими номерами.

$$p_{u_1}p_{u_2}\ldots p_{u_N}.$$

То, что все дни рождения различны, означает, что различны все числа в наборе (5.5). Поэтому вероятность того, что все дни рождения различны, равна

$$\sum p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_N},$$

где суммирование ведётся по всем наборам попарно различных номеров $i_1,\ldots,i_N$, меньших 366. Собирая слагаемые, отличающиеся лишь порядком сомножителей, перепишем эту сумму в виде

$$N!\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_N} p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_N}. \tag{5.6}$$

Теорема. *Величина* (5.6) *достигает своего максимума, если*

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_{365},$$

причем этот максимум равен (5.4).

В качестве образца для доказательства, приведем вывод известного неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$(x_1x_2\ldots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n),$$

где x_j — неотрицательные числа; равенство достигается лишь когда все числа равны.

[19] Допустим, для простоты, что в году 365 дней.

Рассмотрим функцию $f(x) = x_1 x_2 \dots x_n$ на множестве всех наборов $(x_1, \dots, x_n)$ неотрицательных чисел, удовлетворяющих условию $x_1 + x_2 + \dots + x_n = c$, где c фиксировано. Допустим, что $\widetilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ — точка максимума этой функции (почему точка максимума существует?). Допустим, например, что $a_1 \neq a_2$. Рассмотрим новую точку $\widetilde{b}$, которая получается из $\widetilde{a}$ заменой a_1, a_2 на пару одинаковых чисел $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$, $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. Тогда $f(a) = a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ заменится на

$$f(b) = \frac{(a_1 + a_2)^2}{4} a_3 a_4 \dots$$

Очевидно, $f(\widetilde{b}) > f(\widetilde{a})$, и, следовательно, a — не точка максимума.

Задача 5.7. Докажите нашу теорему тем же способом.

5.9. Аксиоматика Колмогорова. Независимые случайные величины. *Случайной величиной* называется числовая функция на вероятностном пространстве. Иными словами, каждой точке вероятностного пространства ставится в соответствие число.

Пример. В качестве пространства рассмотрим множество всех жителей Саратова, положив все точки равновероятными. В качестве примера функции можно рассмотреть возраст человека (а также рост, вес, количество букв в фамилии, число зубов, число голов и т. д.).

Средним значением или *математическим ожиданием* $\mathcal{M}(f)$ случайной величины f на пространстве R называется следующая сумма по всем точкам пространства R

$$\mathcal{M}(f) = \sum f(r_j) p(r_j).$$

Если вероятности всех точек равны между собой, то среднее — это просто среднее арифметическое значений функции во всех точках пространства R. В только что приведенном примере с городом Саратовым в качестве среднего мы получим средний возраст жителя, средний рост и т. д.

Пример. Рассмотрим вероятностное пространство S^{15}. В качестве случайной величины $f(\overline{a})$ рассмотрим число точек в кубике $K_3(\overline{a})$. Её среднее было вычислено в п. 5.6.

Задача 5.8. Покажите, что

$$\mathcal{M}(f + g) = \mathcal{M}(f) + \mathcal{M}(g). \tag{5.7}$$

Следующее понятие не сразу становится прозрачным, оно однако очень важно. Две случайные величины f, g на одном и том же пространстве R называются *независимыми*, если для любых числе u, v их прообразы $f^{-1}(u)$, $g^{-1}(v)$ являются независимыми событиями (разумеется, если, скажем, f не принимает значения u, то это условие выполнено автоматически).

Задача 5.9°. Какие из пар вышеупомянутых случайных величин, связанных с городом Саратовым, независимы?

Теорема. *Пусть f, g — независимые случайные величины. Тогда*
$$\mathcal{M}(fg) = \mathcal{M}(f)\mathcal{M}(g). \tag{5.8}$$

Доказательство. Пусть A — подмножество в нашем вероятностном пространстве R. Через $I_A(r)$ мы обозначим так называемую индикаторную функцию множества A:

$$I_A(r) = \begin{cases} 1, & \text{если } r \in A \\ 0, & \text{если } r \notin A \end{cases} \tag{5.9}$$

Задача 5.10. Чему равно $\mathcal{M}(I_A)$?

Пусть f принимает значения u_1, u_2, … . Через A_i мы обозначим прообраз u_i относительно f. Аналогично, для любого значения v_j функции g обозначим через B_j его прообраз относительно функции g.

По определению независимых случайных величин, событие A_i независимо с B_j для любых i, j.

Теперь замечаем, что
$$f(r) = \sum_i u_i I_{A_i}(r); \qquad g(r) = \sum_j v_j I_{B_j}(r).$$

Задача 5.11. Завершите доказательство теоремы.

Пусть f_1, f_2, … f_k — случайные величины, определенные на одном и том же пространстве. Они называются независимыми, если для любых чисел $u_1, \dots, u_k$ их прообразы $f_1^{-1}(u_1)$, $f_2^{-1}(u_2)$, … , $f_k^{-1}(u_k)$ независимы.

Для независимых случайных величин выполнено
$$\mathcal{M}(f_1 f_2 \dots f_k) = \mathcal{M}(f_1)\mathcal{M}(f_2)\dots\mathcal{M}(f_k). \tag{5.10}$$

5.10. Еще раз решение задачи 2.5 (о среднем числе точек в кубике).

В качестве вероятностного пространства берем S^{15}. В качестве случайной величины берем число $V(\overline{\mathrm{a}})$ точек в кубике $K(\overline{\mathrm{a}})$
$$V(\overline{\mathrm{a}}) = \prod_{j=1}^{15} \Big\{ \text{число точек в } I_3(a_j) \Big\}.$$

По формуле (5.10) получаем, что её среднее есть произведение средних от случайных величин
$$\varphi_j(a) = \Big\{ \text{число точек в } I_3(a_j) \Big\}.$$

Среднее от φ_j было вычислено в задаче 2.3.

Кажется, это решение уже более предпочтительно, чем приведенное нами в 5.6. В следующем пункте то же обстоятельство проявляется более ярко.

5.11. Решение задачи 2.6 (о пересечении двух кубиков). Рассмотрим пространство $S^{15} \times S^{15}$. Число $\Phi(\overline{\mathrm{a}}, \overline{\mathrm{b}})$ точек пересечения кубиков $K(\overline{\mathrm{a}}) \cap K(\overline{\mathrm{b}})$ есть случайная величина на этом пространстве, причем

$$\Phi(\overline{\mathrm{a}}, \overline{\mathrm{b}}) = \prod_{j=1}^{15} \Big\{ \text{число точек в } I_3(a_j) \cap I_3(b_j) \Big\}.$$

Мы видим, что наша случайная величина является произведением случайных величин. Далее, сомножители независимы (подумайте почему); применяя формулу (5.10), мы получаем желаемый результат.

5.12. Условные средние. Рассмотрим подмножество A в вероятностном пространстве R. Допустим, что вероятность A отлична от нуля. Тогда множество A можно превратить в вероятностное пространство, положив по определению, что для любого $B \subset A$ выполнено

$$\widetilde{p}(B) = \frac{p(B)}{p(A)}.$$

Если f — случайная величина на R, то мы определяем её среднее по множеству A как

$$\frac{1}{p(A)} \sum_{r \in A} f(r) p(r).$$

Разумеется, это совпадает со средним случайной величины f по пространству A.

5.13. Решение задачи 2.7 (оценка логарифма). Напомним (см. курс Фихтенгольца или любой другой начальный учебник по анализу), что при $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots. \tag{5.11}$$

В частности,

$$\ln(1+x) \leqslant x$$

(это требует определённых размышлений при $x > 0$, у нас, однако, $x < 0$ и все слагаемые суммы (5.11) отрицательны). Поэтому, отбрасывая младшие слагаемые в разложении логарифма, мы лишь завышаем выражение (2.4), и тем самым занижаем вероятность случайного совпадения.

Задача 5.12. Насколько мы ее занижаем?

Ответ. При наших значениях N, ε поправка в (2.5) будет лишь в шестом знаке после запятой, т. е. в нашем случае формула (2.5) на самом деле является точным равенством с любой разумной точки зрения.

5.14. Решение задачи 2.8 (о несущественности пересечения кубиков). Вроде понятно, что это так. Среднее число точек в кубике — около 10^{11}, а среднее число точек в пересечении двух кубиков — 28,5. Всего же у нас есть только

140 000 кубиков, поэтому пересечения j-ого кубика $K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)$ со всевозможными другими кубиками составляет лишь малую часть его «объёма». Ниже мы «оформляем» это соображение.

В качестве вероятностного пространства Ω^l возьмем произведение l штук пространства S^{15}. Его точками являются всевозможные наборы

$$\omega = (\overline{\mathbf{a}}^1, \ldots, \overline{\mathbf{a}}^l) \tag{5.12}$$

из 15-членных династий $\overline{\mathbf{a}}^j$. Мы будем рассматривать всевозможные $l = 1, 2, \ldots, N$, где $N = 140000$.

Обозначим через $\Xi^l \subset \Omega^l$ множество всевозможных наборов династий $\omega = (\overline{\mathbf{a}}^1, \ldots, \overline{\mathbf{a}}^l)$, таких что никакие две династии $\overline{\mathbf{a}}^i$, $\overline{\mathbf{a}}^j$ не являются близкими. *Наша цель — найти верхнюю оценку для вероятности* $p(\Xi^N)$. Это автоматически даст нижнюю оценку для вероятности случайной близости.

Введём ещё одно обозначение: для произвольного множества A мы обозначим через $\#[A]$ число элементов в этом множестве.

Лемма.

$$\#[\Xi^{l+1}] = \sum_{\omega=(\overline{\mathbf{a}}^1,\ldots,\overline{\mathbf{a}}^l)\in\Xi^l} \left\{ \begin{matrix} \text{числа точек из } S^{15}\text{, не лежащих в объ-} \\ \text{единении кубиков } K_3(\overline{\mathbf{a}}^1), \ldots, K_3(\overline{\mathbf{a}}^l) \end{matrix} \right\} \tag{5.13}$$

Это равенство выражает в точности следующее. Пусть у нас есть точка ω из Ξ^l, т. е. набор из l кубиков с далекими друг от друга центрами. Если мы хотим поставить $(l+1)$-й кубик, то его центр должен быть «далёким» от центров предыдущих кубиков, т. е. он должен лежать вне кубиков $K_3(\overline{\mathbf{a}}^1), \ldots, K_3(\overline{\mathbf{a}}^l)$.

На языке вероятности равенство (5.13) переписывается в виде

$$p(\Xi^{l+1}) = p(\Xi^l) \cdot \left[1 - 36^{-15} \cdot \left\{ \text{среднее по } \Xi^l \text{ от } \#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^1) \cup \cdots \cup K_3(\overline{\mathbf{a}}^l)] \right\}\right]. \tag{5.14}$$

(убедитесь в этом).

Итак задача свелась к вопросу о числе точек в объединении большого числа кубиков.

Прежде всего напомним *формулу включения–исключения*, выражающую число точек в объединении произвольных конечных множеств $B_1, \ldots B_l$:

$$\#[B_1 \cup \cdots \cup B_l] = \sum_j \#[B_j] - \sum_{i<j} \#[B_i \cap B_j] + \\ + \sum_{i<j<k} \#[B_i \cap B_j \cap B_k] - \cdots - (-1)^l \#[B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_l].$$

Это полезная точная формула (а её вывод — хорошая задача). Нам же будет достаточно следующего, более простого утверждения.

Задача 5.13. Выведите неравенство

$$\#[B_1 \cup \cdots \cup B_l] \geqslant \sum_j \#[B_j] - \sum_{i<j} \#[B_i \cap B_j].$$

Так как наша цель — верхняя оценка вероятностей $p(\Xi^l)$, мы можем заменить выражение в (5.14) в фигурных скобках на меньшую величину

$$\Big\{\text{среднее по } \Xi^l \text{ от } \sum_{1\leqslant j\leqslant l} \#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)] - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant l} \#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^i)\cap K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)]\Big\}. \tag{5.15}$$

Очень легко вычислить среднее от той же величины, но по всему пространству Ω_l, т. е.

$$\Big\{\text{среднее по } \Omega^l \text{ от } \sum_{1\leqslant j\leqslant l} \#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)] - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant l} \#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^i)\cap K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)]\Big\}. \tag{5.16}$$

Действительно, среднее от суммы равно сумме средних (см. формулу (5.7)), а среднее от каждого слагаемого нам известно (задачи 2.5 и 2.6). Поэтому среднее от (5.16) равно

$$l\cdot\left(6\tfrac{2}{3}\right)^{15} - \frac{l(l-1)}{2}\cdot 28.5. \tag{5.17}$$

Если бы могли просто заменить (5.15) на (5.16), то все было бы прекрасно. Мы бы получили

$$\begin{aligned} p(\Xi^N) &= \prod_{l=1}^{N}\Big(1 - 36^{-15}\Big[l\left(6\tfrac{2}{3}\right)^{15} - \frac{l(l-1)}{2}\cdot 28.5\Big]\Big) = \\ &= \prod_{l=1}^{N}\Big(1 - l\cdot 5.4^{-15} + 36^{-15}\cdot\frac{l(l-1)}{2}\cdot 28.5\Big) \simeq \prod_{l=1}^{N}\Big(1 - l\cdot 5.4^{-15}\Big). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Последнее выражение в этой цепочке равенств — это в точности произведение (2.4), которое предлагалось в качестве $p(\Xi^N)$ в пункте 2.4. Что касается приближённого равенства в этой цепочке, то оно с любой разумной точки зрения точно (поправка легко оценивается с помощью логарифмирования и оказывается вполне ничтожной).

Осталось сравнить среднее (5.15) и (5.16).

Сейчас мы проверим два высказывания:

А)

$$\Big\{\text{среднее по } \Xi^l \text{ от } \sum_{1\leqslant i<j\leqslant l} \#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^i)\cap K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)]\Big\} <$$

$$< \Big\{\text{среднее по } \Omega^l \text{ от } \sum_{1\leqslant i<j\leqslant l} \#[K_3(\overline{\mathbf{a}}^i)\cap K_3(\overline{\mathbf{a}}^j)]\Big\}. \tag{5.19}$$

(т. е. поправка происходит в благоприятную с точки зрения наших целей сторону).

Б) Если величина

$$\Big\{\text{среднее по } \Xi^l \text{ от } \sum_{1\leqslant j\leqslant l} \#[K_3(\overline{\mathrm{a}}^j)]\Big\} - \Big\{\text{среднее по } \Omega^l \text{ от } \sum_{1\leqslant j\leqslant l} \#[K_3(\overline{\mathrm{a}}^j)]\Big\} \qquad (5.20)$$

и положительна, то она все же очень мала́.

Начнём обсуждения Высказывания А).

Прежде всего, объясним, почему оно правдоподобно. Допустим, что точки $\overline{\mathrm{a}}^i$ и $\overline{\mathrm{a}}^j$ близки. Тогда

$$\#[K_3(\overline{\mathrm{a}}^i) \cap K_3(\overline{\mathrm{a}}^i)] \geqslant 4^{15} \simeq 10^9 \qquad (5.21)$$

(поймите, почему это так), в то время как среднее число точек в пересечении двух случайно взятых кубиков — всего лишь 28, 5.

Более того, фиксируем, например, кубик $K_3(\overline{\mathrm{a}}^1)$ и будем произвольно менять другие кубики. Тогда среднее число точек пересечения $K_3(\overline{\mathrm{a}}^1)$ со всеми остальными кубиками, вместе взятыми (т. е. с $\sum_{j\geqslant 2} \#(K_3(\overline{\mathrm{a}}_1) \cap K_3(\overline{\mathrm{a}}^j))$ равно

$$(l-1)\cdot 28,5$$

Выбирая l самым большим из возможных, т. е. $l = N = 140000$, мы получаем величину порядка $4\cdot 10^7$, что заметно меньше, чем (5.21).

Поэтому, выбрасывая из Ω^l точки, не лежащие в Ξ^l, мы выбрасываем точки, где пересечения кубиков очень большие, а потому уменьшаем среднее от

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant l} \#[K_3(\overline{\mathrm{a}}^i) \cap K_3(\overline{\mathrm{a}}^j)]. \qquad (5.22)$$

Доказательство Высказывания А). Пусть утверждение доказано для Ξ^l. докажем его для Ξ^{l+1}. Добавим к набору кубиков $(\overline{\mathrm{a}}^1, \dots, \overline{\mathrm{a}}^l) \in \Xi^l$ произвольный кубик $K_3(\overline{\mathrm{a}}^{l+1})$. Тогда величина (5.22) увеличивается на

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant l} \#[K_3(\overline{\mathrm{a}}^{l+1}) \cap K_3(\overline{\mathrm{a}}^j)]. \qquad (5.23)$$

Среднее от этой добавки равно $28,5\cdot l$.

Если же точка $\overline{\mathrm{a}}^{l+1}$ лежит близко к одной из ранее выбранных точек $\overline{\mathrm{a}}^\alpha$, то уже одно единственное слагаемое $\#[K_3(\overline{\mathrm{a}}^{l+1}) \cap K_3(\overline{\mathrm{a}}^\alpha)]$ будет больше среднего значения $28,5\cdot l$ (а тем самым, все выражение (5.23) будет и подавно больше этого среднего). Поэтому, убирая из рассмотрения эту точку $\overline{\mathrm{a}}^{l+1}$, мы уменьшаем среднее значение добавки (5.23).

Проверка Высказывания Б). Здесь все просто.

Фиксируем точку $(\overline{\mathrm{a}}^1, \dots, \overline{\mathrm{a}}^l) \in \Xi^l$. Обозначим через U объединение всех кубиков K_3 с центрами в точках $\overline{\mathrm{a}}^j$. Нам нужно оценить

$$\Big\{\text{среднее от } \#K_3(\overline{\mathrm{b}}) \text{ по всем точкам } \overline{\mathrm{b}} \notin U\Big\}. \qquad (5.24)$$

Мы же знаем

$$\Big\{\text{среднее от } \#K_3(\overline{\text{Ъ}}) \text{ по всем точкам } \overline{\text{Ъ}} \in S^{15}\Big\} = (6\tfrac{2}{3})^{15}. \qquad (5.25)$$

Множество $U \subset S^{15}$ является очень маленьким — оно заполняет (даже при $l = N$) не более $1/(5 \cdot 140000)$ от всего пространства S^{15}, т. е. порядка $0,0001$ процента (только эта информация о множестве U будет для нас существенна).

Самое большое возможное значение функции $\#K_3(\overline{\text{Ъ}})$ равно 7^{15}, что всего лишь в $1,78$ раза больше среднего её значения по всему S^{15}. Самое меньшее мыслимое значение величины (5.24) может быть достигнуто, если функция $\#K_3(\overline{\text{Ъ}})$ равна максимуму (т. е. 7^{15}) на всем множестве U. Понятно, что это наименьшее мыслимое значение лишь на ничтожную долю процента отличается от (5.25).

Итак, получается, что приближённое равенство (5.18) для $p(\Xi^l)$ выполнено с очень большой степенью точности (поправка не ранее, чем в пятой значащей цифре). На этом мы завершаем игру в 15-мерные кубики.

5.15. К задаче 2.9 (точки переклейки династий в Таблице 1). Ограничимся левой колонкой. В качестве основателя династии мог бы быть назван также Карл Мартелл (откуда слово «Каролинги») или Пипин Короткий (первый обладатель королевского титула среди Каролингов).

Далее, номера 1–2 не были королями, и они могли бы быть заменены на последних франкских королей — Меровингов.

Наконец, около 843 года Империя Каролингов распадается на страны, которые можно условно назвать Францией и Германией, и на плохо выразимую в современных терминах Хлотарингию. С этого места «династию» можно было бы продолжить любой из трёх ветвей. Они же в Таблице идут вперемежку (и, конечно же, с пропусками).

Дата обрыва «династии» 888 г. тоже вполне произвольна.

5.16. Решение задачи 4.1 (об аппроксимации произвольных монархов римскими императорами). Римская Империя не была наследственной монархией, и в ней маловато длительных правлений; в частности, с 44 г. до н. э. до 396 г. н. э. было лишь два правления $\geqslant 25$ лет, а именно, Константин (31 год) и Август (56 лет); последнего (из-за необычайной продолжительности правления) вообще трудно с кем-либо отождествить, см., однако, выше сноску 16. Поэтому у нас возникнут сложности, если мы попытаемся аппроксимировать римскими императорами, например, династию, которая начинается с двух 33-летних правлений.

Способ, которым А. Т. Фоменко преодолевает данное препятствие и находит «эквиваленты» длинным правлениям, ясен из следующего пункта.

5.17. Лирическое отступление о правилах игры. К п. 4.2. При применении математики к реальным задачам никогда не вредно обсудить разумность используемой модели.

На первый взгляд, может показаться, что преобразование {3} (слияние правителей) осмысленно, действительно,

$$\text{Пётр} + \text{Софья} = \text{Пётр I}, \ \text{т. е. } 35 + 7 = 42. \qquad (5.26)$$

Но ведь 42 и без того было бы учтено как «вариант правления» Петра (на добросовестность А. Т. Фоменко в этом месте можно положиться). Поэтому для моделирования реальных ошибок преобразование $\{3\}$ не нужно.

Зато, соглашаясь с преобразованием $\{3\}$, мы получаем законное право ввести в список русских царей (в качестве «малой поправки») одного-двух из следующих чудо-юд:

$$\text{Софья} + \text{Пётр} = 7 + 42 = 49$$

$$\begin{array}{lll} \text{Фёдор} + \text{Софья}, & \text{Фёдор} + \text{Пётр}, & \text{Фёдор} + \text{Иван V}, \\ \text{Иван V} + \text{Пётр}, & \text{Иван V} + \text{Софья}, & \text{Пётр} + \text{Екатерина}; \end{array} \tag{5.27}$$

отметим, что у Ивана можно указать два «варианта правления», а у Петра — три, в итоге у одного лишь гибридного Петроивана можно предложить 5 различных продолжительностей правления.

Это ещё не всё. Операция суммирования понимается гибко. Например (как показывает печальная судьба Септимия Севера, сноска 14), при суммировании мы можем сохранить отдельные слагаемые. Например, пара [Фёдор, Софья] может быть преобразована не только в Софьефёдора, но и в пары

$$\begin{array}{ll} [\text{Софья}, \text{Софьефёдор}], & [\text{Фёдор}, \text{Софьефёдор}], \\ [\text{Софьефёдор}, \text{Софья}], & [\text{Софьефёдор}, \text{Фёдор}]. \end{array}$$

И конечно, мир не сошёлся клином на Фёдоре, Петре, Иване и сестре их Софье. Рассматривая список Ф–Ж русских правителей, мы должны быть «не предвзятыми» и добросовестно включить в рассмотрение две сотни кентавров типа Горбоельцина, Николо-Ленина, Александра Двутретьего и Иванодмитрия Краснодонского.

Главное значение преобразования $\{3\}$ — решение проблемы поиска соответствий для длинных правлений (см. выше п. 5.16).

Теперь о преобразовании $\{2\}$ (перестановка правителей). Конечно, в списках русских царей пара Софья Алексеевна и Иван V Алексеевич могут идти и в том, и в другом порядке. Но такой вопрос может возникнуть лишь в случае соправлений (регентств) или раскола государства. Допустимая (да и то с оговорками) с исторической точки зрения форма преобразования $\{2\}$:

— Если промежуток правления одного правителя содержится в промежутке правления другого, то их можно писать в любом порядке.

В этом случае естественного порядка правителей просто нет, и правильней было бы (с математической точки зрения) его и не придумывать. Просто членов «династии» не всегда можно естественным образом занумеровать, что и следовало бы учесть в математической модели[20].

А откуда берётся уверенность, что летописцы вообще склонны систематически путать (изменять по злому умыслу? по идеологическим соображениям?) порядок правителей, А. Т. Фоменко, к сожалению, не сообщает.

[20]Замечу, что модель, основанная на линейном упорядочении правителей, не применима в случае Римской империи, когда множество императоров имеет лишь естественное частичное упорядочение.

Так что статистическая модель, основанная на преобразованиях {2}–{3}, выглядит не обоснованной и не бесспорной. Несмотря на это, давайте примем предлагаемые правила игры. Наш основной контрдовод из §4 от этого ничуть не пострадает.

5.18. К задаче 4.2 (о невидимых правителях). Привожу случайный набор примеров для образца:

Овчина-Телепнин, Адашев, Малюта, Юрьев, Жолкевский, Заруцкий, Минин, Морозов, Ордын-Нащокин, Матвеев, Голицын, Нарышкин, Меньшиков, Бирон, Орлов, Потёмкин, Зубов, Аракчеев, Суслов, Яковлев, ...

Совершенно непонятно, кого из них правильно включать в список, а кого нет. В итоге достаточно чёткий список высших правителей расплывается во что-то аморфное.

Конечно, математическая статистика — объективная наука. Но её результаты могут претендовать на объективность лишь при объективности входных данных. При любом сборе статистики нужна чёткая (и точно сформулированная) методика, и составление методики — отдельная (и, возможно, не простая) задача. Вводя «фактических» правителей в список монархов, мы теряем возможность работать с объективными данными.

Приведём пример, когда статистическая ошибка возникает во вполне безобидной ситуации.

Задача 5.14. Студент Иванов ездит из пединститута на 103 автобусе, а студент Петров — на 130-ом. Садятся они на одной остановке. Иванов утверждает, что 103-и автобусы — полные, а 130-е — пустые. Петров же утверждает точно противоположное. Предложите правдоподобное объяснение.

5.19. Решение задачи 4.3 (о Таблице 1). Разумеется нет. В левой части присутствуют пробелы между соседними правлениями в 7, 13, 7, 5 лет, а в правой части 18, 7. Все упомянутые числа больше 1.

5.20. Решение задачи 5.9 (про город Саратов). Число голов независимо с любой другой из случайных величин.

Рост, вес и число зубов зависимы между собой (при весе < 5 кг зубов у жителя города Саратова явно маловато).

Вес (рост и число зубов), как будто, можно считать не зависимым от числа букв в фамилии (по-видимому, это верно с довольно большой точностью).

5.21. Решение задачи 5.13 (про логарифм). Воспользуйтесь формулой Тейлора с каким-либо приглянувшимся Вам остаточным членом. Легко провести оценку и непосредственно, исходя из (5.11).

5.22. Решение задачи 5.14 (про автобусы). Представим себе, что упомянутым студентам удаётся точно считать число пассажиров в увиденных ими автобусах. Человек, наблюдающий чужой автобус, будет примерно оценивать среднее арифметическое числа пассажиров

$$\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n). \tag{5.28}$$

Что касается своего автобуса, то человек обычно (если получается) садится в первый подошедший автобус. Вероятность попасть в j-ый по счёту автобус примерно пропорциональна промежутку времени между $(j-1)$-ым и j-ым автобусом. Но и число пассажиров в автобусе пропорционально этому временному промежутку. Следовательно, фактически наблюдается величина

$$\frac{x_1^2+\dots+x_n^2}{x_1+\dots+x_n}. \tag{5.29}$$

Задача 5.15. Покажите, что (5.28) меньше или равно (5.29). Равенство достигается лишь когда все x_j равны между собой.

Указание: воспользуйтесь методом п. 5.8 или неравенством между средним арифметическим и средним квадратическим.

Так что спор скорее всего имеет причиной не психологию человека, огорченного долгим ожиданием, а разницу в методиках сбора статистики.

Исторические ссылки.

1) В нашей основной аргументации (§§2–3, 5) исторические сведения, как таковые, почти не используются, для нас существенны лишь длины списков правителей, но для определения длин нужны и сами списки.

Интересующие нас списки русских князей в готовом виде можно найти в энциклопедии «Отечественная история», т. 1–2 (Изд-во Бол. Росс. Энциклопедия, 1944, 1996), статьи Древнерусское государство, Владимирское великое княжество, Владимиро-Волынское княжество, Галицкое княжество, Галицко-Волынское княжество, Киевское княжество.

Списки русских президентов, генсеков, царей общеизвестны.

2) В §1 и §4 мы ссылаемся на список Римских императоров (правителей), этот список в ортодоксальной истории вполне стандартен. Все императоры (а также основные узурпаторы и наиболее могущественные министры) упоминаются, например, в «Истории упадка и разрушения великой Римской Империи» Гиббона. Готовые списки есть в «Британской энциклопедии» в статьях «Roman republic and empire» и «Byzantic empire». Там же легко найти списки Каролингов («Carolings»).

А. Т. Фоменко в основном оперирует с этим стандартным списком и стандартными датами (потому что этот список и должен быть входными данными для Алгоритма). Конечно, внимательный читатель может найти в его таблицах ряд неожиданных (неортодоксальных) дат, неожиданных комментариев и т. п., но это отдельный вопрос, который бы втянул бы нас в обсуждение истории; *с точки зрения нашей аргументации это безразлично*. Несоответствие между Алгоритмом Фоменко и его таблицами видно из самих таблиц в том виде, в котором они предъявлены; наш тезис о наличии временных лакун хорошо проиллюстрирован в книге [1] на рис. 16.7–16.11.

3) Идея «исторического параллелизма» с точки зрения историка обсуждается в [3].

Литература.

[1] Фоменко А. Т., Методы статистического анализа нарративных текстов и приложения к хронологии, Изд-во Московского университета, 1990.

[2] Городецкий М. Л. Коренная математическая ошибка в математико-статистических методах Фоменко, в «АнтиФоменко», Сборник Русского исторического общества 3(151), Москва, Русская панарама, 2000; 124–129.

[3] Kugler F. X., Im Bannkreis Babels, 1910.

Дорогой Ире с любовью

Об умножении точек относительно треугольника и о среднегеометрическом между обобщенными сопряжениями в треугольнике

А. Мякишев

В статье рассматриваются операции умножения точек и извлечения корня из точки относительно данного треугольника, использующие барицентрические координаты, а также объясняется геометрический смысл этих операций. На этой основе строится семейство преобразований — сопряжений относительно точек, — обобщающих такие классические преобразования, как изогональное и изотомическое сопряжения. Наконец, указывается способ конструирования преобразования, являющегося средним геометрическим двух произвольных сопряжений.

1. Умножение точек относительно треугольника

Пусть на плоскости зафиксирован некоторый треугольник ABC. Следуя [1], определим *умножение точек относительно треугольника* ABC следующим образом:

> Если точка P_1 имеет относительно треугольника ABC барицентрические координаты (x_1, y_1, z_1), а P_2 — (x_2, y_2, z_2), то их произведением $P_1 * P_2$ назовем точку P с координатами $(x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2, z_1 \cdot z_2)$.

Очевидно, что эта операция задает структуру абелевой группы на множестве точек плоскости, причем единицей группы является центр тяжести $M = (1,1,1)$ исходного треугольника, а операция взятия обратного элемента совпадает с *изотомическим сопряжением* данной точки. (К сожалению, не проходит в данной ситуации покоординатное *сложение*, поскольку нулевая тройка — запрещенный объект в геометрии масс).

Для того, чтобы построить изотомический образ P_m некоторой точки P, напомним, следует отметить точки пересечения прямых, проходящих через вершины треугольника и точку P со сторонами (или их продолжениями) треугольника (такие точки в дальнейшем будем называть *следами* точки P), а затем сделать симметрию этих точек относительно середин соответствующих сторон, после чего соединить полученные точки с соответствующими вершинами треугольника. Несложно показать, что новая тройка прямых будет пересекаться в некоторой точке P_m, которую и назовем изотомическим образом точки P: $F_m(P) = P_m$.

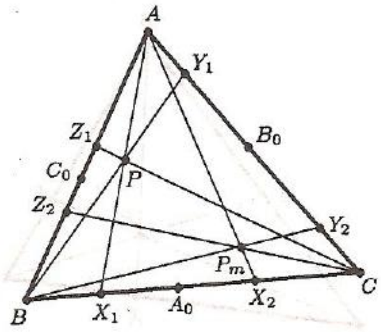


Рис. 01. Изотомическое сопряжение

Также можно показать, что если $P = (x, y, z)$, то $P_m = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$.

Поскольку ясно, что любой точке, лежащей на стороне треугольника (или ее продолжении) изотомическое сопряжение ставит в соответствие противоположную вершину, то для таких точек нарушается однозначность взятия обратного элемента. Поэтому, вводя операцию умножения, мы исключаем такие точки из рассмотрения.

Далее нам понадобится понятие *изогонального сопряжения* — напомним и его. Здесь нужно делать симметрию прямых, проходящих через вершины треугольника и точку P относительно соответствующих биссектрис: $F_l(P) = P_l = \left(\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z}\right)$, где, как обычно, a — длина стороны BC и т.д.

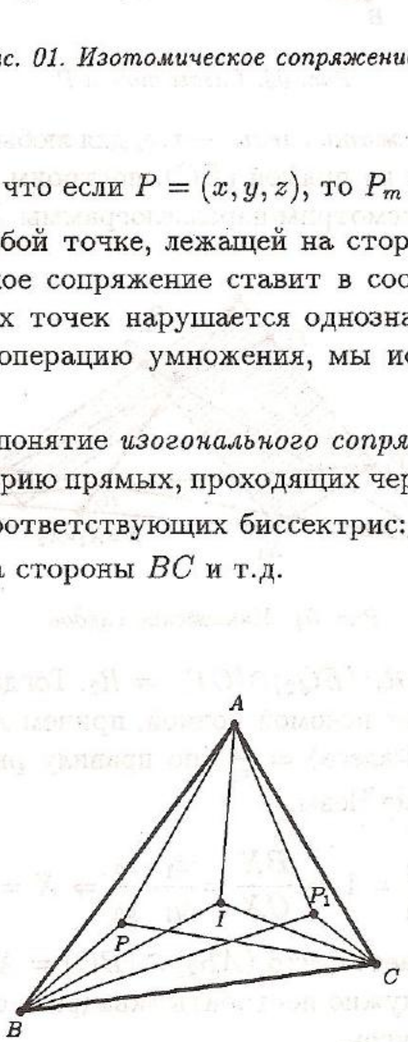


Рис. 02. Изогональное сопряжение

Теперь вернемся к **умножению** и попробуем выявить его **геометрический смысл.** Очевидно, что если X, Y, Z — следы некоторой точки P с координатами (x, y, z), то $X = (0, y, z)$; $Y = (x, 0, z)$; $Z = (x, y, 0)$. В силу теоремы Чевы, конечно, верно и обратное утверждение: если точки на сторонах треугольника (или их продолжениях) имеют такие координаты, то прямые AX, BY, CZ пересекаются в точке P с координатами (x, y, z).

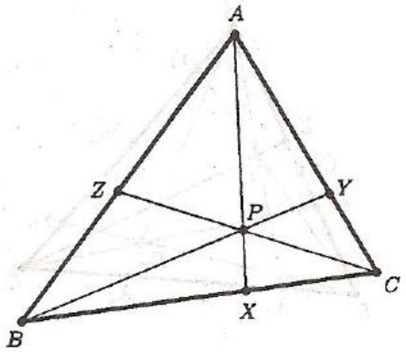


Рис. 03. Следы точки P

Сначала научимся *умножать следы* — т. е, для любых двух точек $X_1 = (0, y_1, z_1)$ и $X_2 = (0, y_2, z_2)$, лежащих на прямой (BC), построим точку $X = (0, y_1 \cdot y_2, z_1 \cdot z_2)$ $(X \in (BC))$. Для этого рассмотрим параллелограммы $X_1Q_1AP_1$ и $X_2Q_2AP_2$.

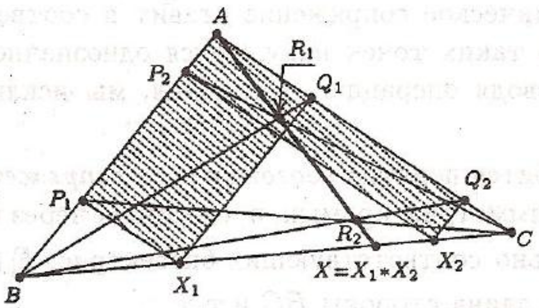


Рис. 04. Умножение следов

Пусть $(BQ_1)\cap(CP_2) = R_1; (BQ_2)\cap(CP_1) = R_2$. Тогда, оказывается, пересечение $X = (BC) \cap (R_1R_2)$ и будет искомой точкой, причем $A \in (R_1R_2)$. Действительно, $\frac{CQ_1}{AQ_1} = \frac{CX_1}{BX_1}$ (по теореме Фалеса) $= \frac{y_1}{z_1}$ (по правилу рычага). Аналогично, $\frac{AP_2}{BP_2} = \frac{CX_2}{BX_2} = \frac{y_2}{z_2}$. Тогда, по теореме Чевы,

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CQ_1}{AQ_1} \cdot \frac{AP_2}{BP_2} = 1 \Rightarrow \frac{BX}{CX} = \frac{z_1 \cdot z_2}{y_1 \cdot y_2} \Rightarrow X = (0, y_1 \cdot y_2, z_1 \cdot z_2).$$

Точно так же доказывается, что $(AR_2) \cap (BC) = X$. Заметим, что если точки X_1 и X_2 совпадают (т.е. нужно построить «квадрат» следа), то параллелограммы также совпадут друг с другом:

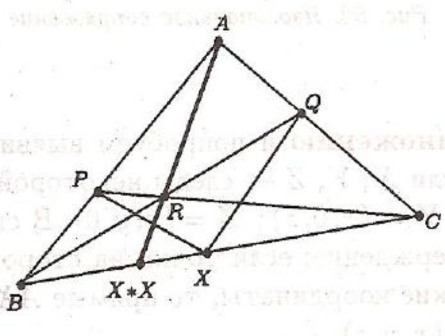


Рис. 05. Случай совпадения следов

Построение произведения: Пусть теперь имеются две точки $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на сторонах треугольника (или их продолжениях), а $X_1 = (0, y_1, z_1)$, $X_2 = (0, y_2, z_2)$, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 — следы этих точек. Построим произведение следов: $X = X_1 * X_2 = (0, y_1y_2, z_1z_2)$ и аналогично $Y = Y_1 * Y_2$; $Z = Z_1 * Z_2$.

Тогда, конечно, прямые AX, BY, CZ пересекутся в точке

$$P = (x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2) = P_1 * P_2.$$

2. Умножение и деление кривых на точки

Под результатом умножения точки T на кривую Γ ($T * \Gamma$) мы будем понимать множество точек $\{ T * X \mid X \in \Gamma \}$. (Деление вводится аналогично.) Здесь можно получить немало забавных соотношений.

Пример. Как известно, *описанным эллипсом Штейнера* E_c называют описанный около треугольника эллипс, имеющий наименьшую площадь среди всех описанных эллипсов, и его уравнение имеет вид $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ — см. [4]. (Отметим, что из этого уравнения сразу следует, что точки, лежащие на этом эллипсе при *изотомическом* сопряжении переходят в *бесконечно-удаленные*, поскольку сумма координат их образов становится равной нулю — геометрически это означает, что тройка «изотомических» прямых будет параллельна) Известно также, что *описанная окружность* задается уравнением $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = 0$ (и на ней лежат точки, которые переходят в *бесконечно-удаленные* при *изогональном* сопряжении), а координаты *точки Лемуана* (изогонально сопряженной центру тяжести) равны $L = (a^2, b^2, c^2)$. Проверим, что $L * \mathrm{E}_c = \Omega$ — т.е. описанный эллипс Штейнера, умноженный на точку Лемуана, дает описанную окружность. В самом деле, пусть точка (x, y, z) лежит на эллипсе Штейнера, тогда

$$\frac{a^2}{(a^2x)} + \frac{b^2}{(b^2y)} + \frac{c^2}{(c^2z)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0,$$

т.е. точка (a^2x, b^2y, c^2z) лежит на описанной окружности.

Точно так же можно показать, что произведение *вписанной окружности на точку Нагеля* (образованную пересечением прямых, соединяющих вершины с им противоположными точками касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника) равняется *вписанному эллипсу Штейнера* (имеющему наибольшую площадь среди всех вписанных в треугольник эллипсов) — см. [3], где приведено еще множество примеров.

Упражнение. Покажите, что *в результате умножения точки на прямую снова получается прямая.*

3. Извлечение квадратного корня из точки

И здесь, как и в пункте 1, мы, в основном, будем следовать работе [1].

Итак, пусть $P = (x, y, z)$ — внутренняя точка треугольника, т.е. имеющая положительные координаты. Построим точку $Q = (\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z})$, так что

$$Q * Q = Q^2 = P \Leftrightarrow Q = \sqrt{P}.$$

Для этого, очевидно, достаточно построить на стороне BC точку X_1, обладающую свойством $\frac{BX_1^2}{CX_1^2} = \frac{BX}{CX}$, где X — след точки P на стороне BC (поскольку, построив затем аналогичные точки Y_1, Z_1 получим искомую точку Q как пересечение прямых AX_1, BY_1, CZ_1). *Построим полуокружность на BC, как на диаметре, из точки X восстановим перпендикуляр до пересечения с полуокружностью в точке H, а затем проведем биссектрису прямого угла BHC. Пересечение биссектрисы со стороной BC и есть нужная нам точка X_1.*

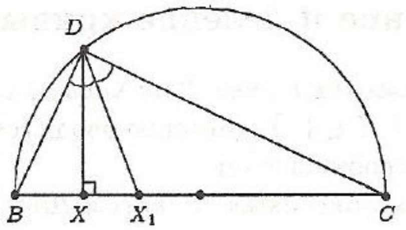


Рис. 06. Извлечение корня из точки

Действительно, по свойству биссектрисы,

$$\frac{BX_1}{CX_1} = \frac{BH}{CH} \Rightarrow \frac{BX_1^2}{CX_1^2} = \frac{BH}{CH} \cdot \frac{BH}{CH}.$$

Имеем также две пары подобных треугольников:

$$\Delta BHC \sim \Delta BXH \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{BX}{HX}; \qquad \Delta BHC \sim \Delta HXC \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{HX}{CX}.$$

Осталось подставить последние два равенства в первое.

Пример. Чтобы построить точку $\sqrt{I} = \left(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}\right)$, где I — центр вписанной в треугольник окружности, нужно рассмотреть в описанной выше конструкции в качестве X, Y, Z следы биссектрис, т.е. их основания, и применить указанную процедуру.

4. Обобщенное сопряжение — сопряжение относительно точки

Сопряжением в планиметрии принято называть преобразование плоскости F со свойством $F \circ F = F^2 = E$ (где E — тождественное преобразование), т. е. $\forall Z \quad F(F(Z)) = Z$. К таковым относятся, к примеру, симметрии относительно прямых и точек, инверсия, а также изогональное и изотомическое сопряжения.

Используя операцию умножения точек, можно построить целое семейство сопряжений, зависящих от точки, и включающее в себя изогональное и изотомическое сопряжение как частный случай. Определение следующее:

Сопряжением относительно точки $T = (x_0, y_0, z_0)$ (S_T-сопряжением) назовем преобразование плоскости, которое точку $P = (x, y, z)$ переводит в точку $P_T = S_T(P) = \left(\frac{x_0}{x}, \frac{y_0}{y}, \frac{z_0}{z}\right)$.

Ясно, что для любой точки T имеем $S_T^2 = E$, а также и то, что *изотомическое сопряжение является сопряжением относительно центра тяжести* M, *а изогональное — относительно точки Лемуана* L. В принципе, пользуясь геометрическим смыслом умножения, мы без труда сможем построить S_T-образ произвольной точки P. Для этого достаточно построить сначала изотомический образ точки P, а потом точку $T * P_m$. Но можно строить T-сопряженные точки и более изощренным и нетривиальным способом, используя особую роль точки T во всей конструкции. Опишем один из таких способов, указанный в [2].

Построение T-сопряженного образа произвольной точки P.

1 Строим $R = H_M^{-2}(T)$ — образ исходной точки при гомотетии с центром в точке пересечения медиан и коэффициентом -2, т.е. точки T, M, R лежат на одной прямой, причем $\frac{TM}{RM} = \frac{1}{2}$.

2 Строим точку $Z = R_m$ — изотомический образ точки R.

3 Основной шаг :

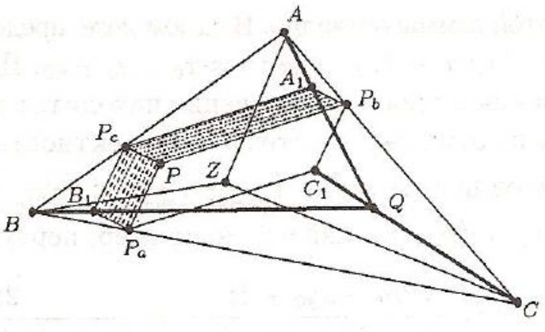


Рис. 07. Сопряжение относительно точки

Проводя прямые, проходящие через P и параллельные чевианам точки Z; строим три параллелограмма, как показано на рисунке, а затем соединяем вершины треугольника с соответствующими вершинами параллелограммов.

Эти прямые пересекаются в T-образе точки P: $Q = S_T(P)$.

Чтобы обосновать это построение, сформулируем две леммы.

Лемма 1. Пусть точка Z имеет координаты (p, q, r), а точка P — (x, y, z). Построим параллелограммы, как это сделано на рисунке 07. Тогда прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекутся в точке

$$Q = \left(\frac{p(q+r)}{x}; \frac{q(p+r)}{y}; \frac{r(p+q)}{z} \right).$$

Здесь можно предложить чисто аналитическое доказательство — достаточно лишь аккуратно использовать следующие известные формулы и свойства (см. [4]):

— *уравнение прямой, проходящей через две точки.* Если $D = (x_1, y_1, z_1)$; $E = (x_2, y_2, z_2)$, то коэффициенты прямой $px + qy + rz = 0$ находятся из соотношений $p = z_2y_1 - z_1y_2$; $q = z_1x_2 - z_2x_1$; $r = x_1y_2 - x_2y_1$.

— *точка пересечения двух прямых.* Если уравнения прямых $p_1x + q_1y + r_1z = 0$; $p_2x + q_2y + r_2z = 0$, то точка их пересечения имеет координаты

$$(r_2q_1 - r_1q_2, r_1p_2 - r_2p_1, p_1q_2 - p_2q_1).$$

— *уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.* Если точка имеет координаты (x_0, y_0, z_0), а прямая задана уравнением $px + qy + rz = 0$, то коэффициенты искомой прямой имеют вид

$$p_1 = z_0(p-r) - y_0(q-p); \quad q_1 = x_0(q-p) - z_0(r-q); \quad r_1 = y_0(r-q) - x_0(p-r).$$

— *условие конкуррентности трех прямых.* Три прямые пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда определитель, составленный из их коэффициентов, равен нулю.

Лемма 2. Пусть $T = (x_0, y_0, z_0)$. Тогда

$$R = H_M^{-2}(T) = (y_0 + z_0 - x_0; z_0 + x_0 - y_0; x_0 + y_0 - z_0).$$

Доказательство этой леммы очевидно. В самом деле, представим $T = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$ и $R = (m - 2x_0; m - 2y_0; m - 2z_0)$, где $m = x_0 + y_0 + z_0$. Центр масс такой системы есть точка пересечения медиан, а отношение находится из правила рычага.

Посмотрим, как из этих лемм вытекает корректность нашего построения. После первых двух шагов получим $Z = \left(\frac{1}{m-2x_0}; \frac{1}{m-2y_0}; \frac{1}{m-2z_0}\right)$. Подставив эти координаты в Лемму 1 вместо (p, q, r), найдем, например, первую координату точки Q:

$$q + r = \frac{2m - 2y_0 - 2z_0}{(m-2y_0)(m-2z_0)} = \frac{2x_0}{(m-2y_0)(m-2z_0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p(q+r)}{x} = \frac{2}{(m-2x_0)(m-2y_0)(m-2z_0)} \cdot \frac{x_0}{x}$$

и т. д. — воспользуемся затем однородностью, сократив на общий множитель.

Пример 1 — *другой способ построения изогонального сопряжения.* Пользуясь барицентрическими координатами, легко проверить, что точки H_m (антиортоцентр — точка, изотомически сопряженная центру тяжести), M, L (точка Лемуана) лежат на одной прямой, причем $H_mM : LM = 2 : 1$.

Отсюда следует, что в описанной выше конструкции в качестве точки Z нужно выбрать ортоцентр H, а затем строить параллелограммы со сторонами, параллельными соответствующим высотам.

Пример 2 — *сопряжение относительно центра вписанной окружности I.* Так как $NM : IM = 2 : 1$ и точка, изотомически сопряженная точке Нагеля N, есть точка Жергонна G, то, чтобы построить S_I-сопряжение, следует брать параллелограммы со сторонами, параллельными прямым, соединяющим соответствующие вершины с точками касания вписанной окружности.

Упражнение: опишите сопряжение относительно центра описанной окружности O. (Здесь нужно вспомнить о прямой Эйлера).

5. Среднее геометрическое между обобщенными сопряжениями

В [5] было построено некоторое проективное (переводящее любую прямую на проективной плоскости в прямую) преобразование F_c, названное автором *изоциркулярным*, которое оказалось *средним геометрическим* между *изогональным и изотомическим преобразованиеми*, в том смысле, что $F_c \circ F_c = F_m \circ F_l$, причем если $Z = (x, y, z)$, то $F_c(Z) = \left(\frac{x}{a}; \frac{y}{b}; \frac{z}{c}\right)$.

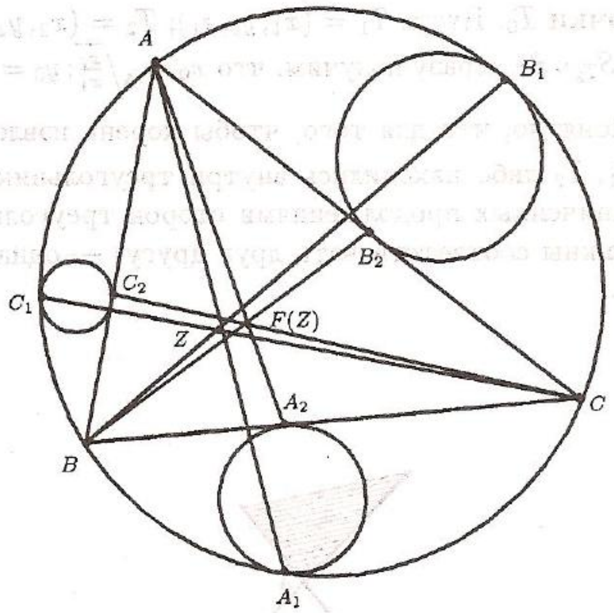


Рис. 08. Изоциркулярное преобразование — среднее геометрическое между изогональным и изотомическим

$Z_c = F_c(Z),\ F_c^2 = F_m \circ F_l \Leftrightarrow \forall\, Z\ F_c(F_c(Z)) = F_l(F_m(Z))$

В случае внешней исходной точки надо также рассматривать окружности, касающиеся описанной *извне*.

В предыдущем пункте мы ввели в рассмотрения обобщенные (или T-) сопряжения. Теперь возникает естественное желание построить среднее между ними. Дадим следующее определение.

Определение обобщенного среднего.

Пусть S_{T_1} и S_{T_2} — два обобщенных сопряжения. Обобщенным или G_{T_0}-средним между ними назовем проективное преобразование вида

$$(x, y, z) \to (x_0 \cdot x, y_0 \cdot y, z_0 \cdot z),$$

где $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$, если $G_{T_0} \circ G_{T_0} = S_{T_2} \circ S_{T_1}$ (оно зависит от порядка сомножителей в правой части: для $S_{T_1} \circ S_{T_2}$ $T_0' = \frac{1}{T_0} = T_{0m}$ — точка, изотомически сопряженная к T_0).

Ясно, что изоциркулярное преобразование является частным случаем обобщенного при $T_0 = I_m = \left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}\right)$ — так называемый *центр антибиссектрис*.

Геометрический смысл обобщенного среднего. По определению, $G_{T_0}(P) = T_0 * P$, и геометрический смысл умножения точек нам известен. Из определения также следует, что G_{T_0}-среднее можно рассматривать как композицию изотомического сопряжения F_m ($= S_M$ в новых обозначениях) и обобщенного S_{T_0} сопряжения: $G_{T_0} = S_{T_0} \circ S_M$. Геометрический смысл обобщенного сопряжения был выявлен в предыдущем параграфе. Нам остается только суметь найти и построить точку T_0 по заданным точкам T_1, T_2.

Построение точки T_0. Пусть $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$; $T_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Используя равенство $G_{T_0} \circ G_{T_0} = S_{T_2} \circ S_{T_1}$, сразу получим, что $x_0 = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$; $y_0 = \sqrt{\frac{y_2}{y_1}}$; $z_0 = \sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$ или, иначе, $T_0 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$. Понятно, что для того, чтобы корень извлекался, необходимо, чтобы обе точки T_1, T_2 либо находились внутри треугольника, либо в одной из трех областей, ограниченных продолжениями сторон треугольника (отрицательные координаты должны соответствовать друг другу) — одна из таких областей показана на Рис. 09.

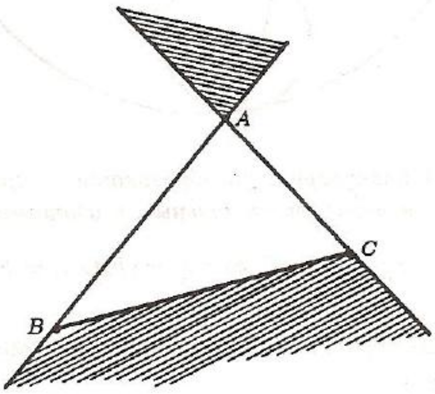


Рис. 09. Одна из областей, для которых существует обобщенное среднее

Пример. Для пары сопряжений, задаваемых точками $T_1 = I = (a, b, c)$ (сопряжение относительно центра вписанной окружности) и $T_2 = L = (a^2, b^2, c^2)$ (изогональное сопряжение) их средним будет обобщенное среднее относительно точки $T_0 = \sqrt{I}$. Такое же среднее будет и для пары $T_1 = M = (1, 1, 1)$ (изотомическое сопряжение) и $T_2 = I = (a, b, c)$

Еще один пример. Рассмотрим теперь сопряжение относительно точки *Жергонна*

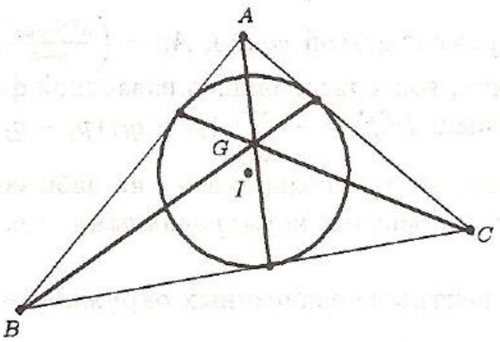


Рис. 10. Точка Жергонна

$G = T_1 = \left(\frac{1}{p-a}; \frac{1}{p-b}; \frac{1}{p-c}\right)$, где p — полупериметр и относительно точки Аполлония $Ap = T_2$.

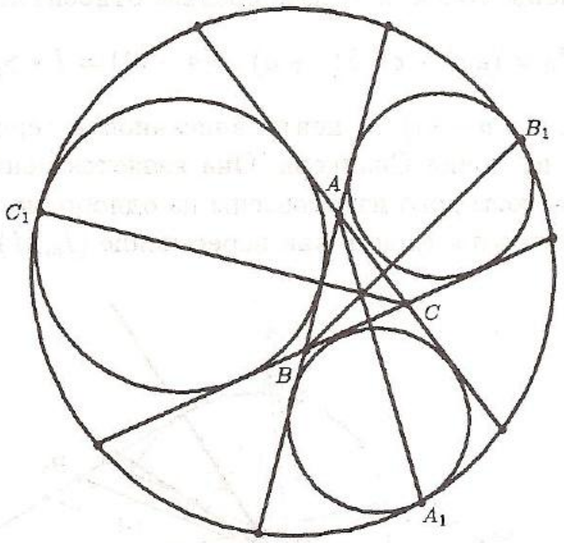


Рис. 11. Точка Аполлония

Построим окружность, касающуюся внутренним образом трех вневписанных окружностей. Точка Аполлония — это точка пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с противолежащими им точками касания. То, что эти прямые пересекаются, следует из теоремы о том, что произведение двух гомотетий есть снова гомотетия, центр которой лежит на прямой, проходящей через центры сомножителей.

Действительно, гомотетию, переводящую *вписанную* в треугольник окружность в *окружность Аполлония для вневписанных окружностей* (с положительным коэффициентом) можно представить, например, как гомотетию, переводящую вписанную окружность во вневписанную (с центром в A), умноженную на гомотетию, переводящую эту вневписанную окружность в окружность Аполлония с центром в точке их касания A_1. Значит, рассматриваемый центр гомотетии лежит на прямой AA_1. Аналогично показывается, что он лежит и на двух других прямых — т.е. этот центр и является точкой Аполлония.

В [4] приводятся координаты этой точки: $Ap = \left(\frac{a^2(b+c)^2}{p-a}; \frac{b^2(c+a)^2}{p-b}; \frac{c^2(a+b)^2}{p-c}\right)$. (Вероятно, их можно вычислить, воспользовавшись известной формулой для вычисления расстояния между точками: $PQ^2 = -\sum\limits_{1i<j3} (p_i - q_i)(p_j - q_j) A_iA_j^2$, где A_iA_j — длины соответствующих сторон треугольника — не забывая при этом, что в этой формуле координаты точек берутся *нормированными*, т.е. с единичной суммарной массой.

В качестве P берем центры вневписанных окружностей — так,

$$I_a = \left(-\frac{a}{2(p-a)}; \frac{b}{2(p-b)}; \frac{c}{p-c}\right),$$

а Q задает нормированные (и неизвестные) координаты центра окружности Аполлония. В левых частях уравнений возникают выражения типа $(R - r_a)^2$, где R — радиус этой окружности.

Тогда для нашей пары точек получаем среднее относительно точки

$$T_0 = (a(b+c); b(c+a); c(a+b)) = I * S,$$

где $S = ((b+c); (c+a); (a+b))$ — центр вписанной в серединный треугольник окружности, или, иначе, точка Спайкера. Она является центром тяжести полого треугольника, стороны которого изготовлены из однородного материала.

Точку T_0 также можно построить как пересечение (I_mM) и (IL) — Рис. 12.

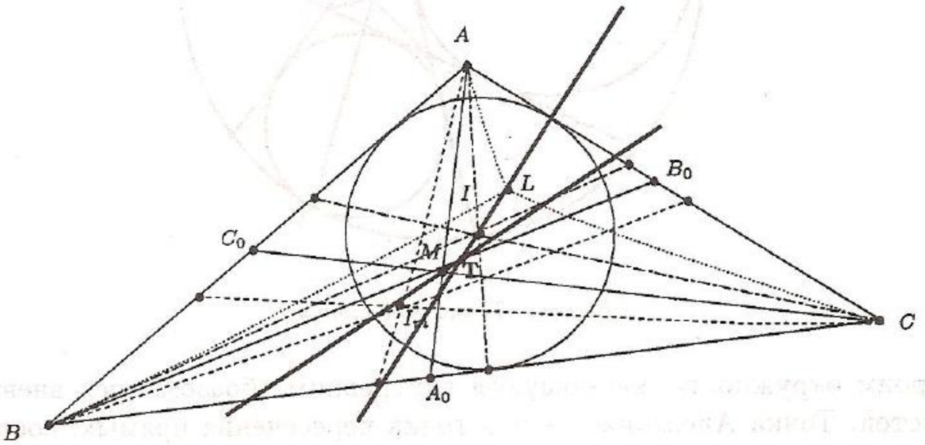


Рис. 12. Произведение T центра вписанной окружности на точку Спайкера (центр окружности, вписанной в серединный треугольник) — как пересечение двух прямых

Показать, что получается именно эта точка, можно — выписав уравнения соответствующих прямых и найдя координаты точки пересечения.

Литература.

[1] P.Yiu, The uses of homogeneous barycentric coordinates in plane Euclidian geometry, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 31(2000) 569–578.

[2] K. Dean, F. van Lamoen, Geometric Construction of Reciprocal Conjugations, Forum Geometricorum, 1(2001) 115–120.

[3] C. Kimberling, Myltiplying and Dividing Curves by Points, Forum Geometricorum, 1(2001) 99–105.

[4] C. Kimberling, Triangle Centers and Central Triangles, Winnipeg, Canada, 1998.

[5] А. Мякишев, О некоторых преобразованиях, связанных с треугольником, Математическое образование, 1(8), (1999) 2–24.

Мякишев Алексей Геннадьевич
email: alex_geom@mtu-net.ru

Учебно-исследовательский семинар «Распределение первых значащих цифр»

А. И. Щетников, А. В. Щетникова

В статье описан опыт специально организованных занятий со старшеклассниками по математическому моделированию реальности. Рассмотрена задача о распределении первых значащих цифр в числовых данных, встречающихся в информационно-справочных изданиях. Основное внимание уделено творческим результатам работы: какие экспериментальные данные получены, какие теоретические гипотезы выдвинуты учащимися, какие математические знания можно привлечь для их обоснования и т.п. Подчеркнем, что в этой творческой математической работе участвовали ученики не специализированных математических, а общеобразовательных школ.

Введение

Настоящая работа продолжает цикл исследований и разработок в области методики преподавания математики, связанных с проработкой содержания общего математического образования школьников и адекватных этому содержанию форм ([3], [4]). В своей работе мы исходим из того положения, что математика будет восприниматься учащимися как действительно осмысленная дисциплина, если они увидят, каким образом создаются математические понятия, и если у них будет воспитано умение математически исследовать явления реального мира.

В качестве формы такого осмысленного освоения математики могут использоваться учебно-познавательные семинары по математике для старшеклассников [5]. Участники этих семинаров, как правило, не учатся в специализированных школах и классах. Для большинства из них интерес к математике является скорее частью общего широкого интереса к миру природы и человеческой деятельности, нежели стремлением к профессиональной специализации, предполагающей владение математикой (хотя одно не исключает другое). Для работы с такими школьниками нужны задачи, которые были бы общепонятными по формулировке и богатыми по содержанию; эти задачи должны допускать простые и в то же время разнообразные подходы к их решению.

Задача, которая обсуждалась на семинарах, прошедших 22–24.03.2002 в Центре образования города Междуреченска Кемеровской области, а затем 11–13.04.2002 в школе № 42 города Кемерово, является на наш взгляд одной из самых удачных в отношении этих критериев. Школьникам было предложено развернуть исследование эмпирического закона, которому подчиняется распределение первых значащих цифр в разнообразных массивах числовых данных. Эта статистическая закономерность была впервые обнаружена в 1881 г. Саймоном Ньюкомбом [9] и затем переоткрыта в 1938 г. Фрэнком Бенфордом [6], по имени которого её принято называть; согласно легенде, оба автора заметили, что в таблицах логарифмов, которыми они пользовались, особенно много следов чтения хранили первые страницы книги — те, на которых помещались логарифмы чисел, начинающихся с единицы. Объяснению и моделированию закона Бенфорда посвящён ряд публикаций в научной и научно-популярной литературе (см. обзоры [1], [8], [11], [12]; обширная библиография приведена в [7]). В последние годы закон Бенфорда стал превращаться из математического курьёза в инструмент для исследований; наиболее известно предложение Марка Негрини применять закон Бенфорда в качестве детектора лжи при аудиторских проверках [10].

Первый день

Постановка задачи. Откроем энциклопедический словарь на произвольной странице, а затем станем перебирать подряд все числа, которые нам встретятся в словарных статьях, и будем смотреть, на какую значащую цифру они начинаются. Как вы думаете, какая первая цифра будет попадаться чаще всего? Нетрудно догадаться, что это будет цифра «1»: ведь значительная доля чисел в словаре — это чьи-то годы жизни, а большинство тех, о ком упоминает словарь, жили в одна тысяча каком-то году. Ну а если мы условимся пропускать даты? Нам будут встречаться данные о населении городов, площадях островов и стран, хозяйственные показатели и разные другие величины. Как теперь распределятся числа по их первым значащим цифрам? Будет ли их поровну, или на одни цифры будет начинаться больше чисел, чем на другие?

Подготовка массива числовых данных. В качестве источника использовались тома Большой советской энциклопедии и Детской энциклопедии, несколько общих и специализированных энциклопедических словарей, справочная часть атласа мира. За 1 час работы коллектив в 40 человек может обработать массив в 25–30 тысяч чисел. На рис. 1 показано распределение первых цифр в суммарном массиве в 53270 чисел, обработанном участниками семинаров в Междуреченске и Кемерово.

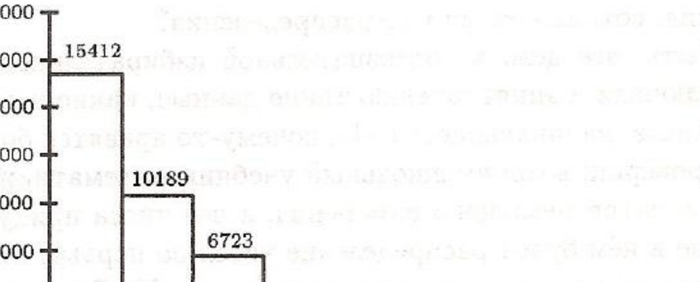


Рис. 1

Исходные вопросы. После того, как все данные были сведены в один массив, участники семинара в общей дискуссии наметили основные темы дальнейшей работы. Во-первых, нужно объяснить, почему больше всего чисел начинается на цифру «1» и меньше всего на цифру «9»; во-вторых, желательно установить математическую формулу, описывающую зависимость количества чисел от первой цифры. Затем, работая в группах по 6–8 человек, школьники искали ответы на эти вопросы.

Второй день

Второй день начался с общего заседания, на котором обсуждались результаты групповой работы. Затем итоги общего заседания были обсуждены по группам, и каждый участник семинара выделил то направление дальнейших исследований, которым он хотел бы заняться. День завершился разделением участников по новым группам в соответствии с выбранными направлениями. Ниже рассмотрены версии, выдвинутые группами на общем заседании.

А. Было предложено несколько вариантов объяснения обнаруженной зависимости.

(1) То, что такую большую долю первых цифр составляют единицы, можно попытаться объяснить тем, что многие числа в энциклопедии приведены в сильно округлённом виде («Этим горам 10 млн. лет»). Но это никак не объясняет, почему так много начальных двоек и троек.

(2) Счёт всегда начинается с единицы. И в каждом списке порядковых числительных (крестовые походы — с первого по восьмой, симфонии Чайковского — с первой по шестую, и т. п.) обязательно будут встречаться номер «1». Двоек будет меньше (например, в России был император Павел I, и не было Павла II), троек будет ещё меньше, и т. д. Эту гипотезу можно проверять на распределении номеров домов в случайно выбранных почтовых адресах. Впрочем, следует заметить, что большая часть данных в энциклопедии — это не порядковые, а количественные числительные.

(3) Имеет ли какое-то отношение к делу наша десятичная система счисления? Если взять наш массив данных и пересчитать эти данные в какую-нибудь другую систему счисления, сохранится ли вид распределения?

(4) Может быть, всё дело в подсознательной избирательности человеческого мозга? Люди включали в энциклопедию такие данные, какие им больше нравятся. Возможно, что числа, начинающиеся с «1», почему-то нравятся больше. Идея экспериментальной проверки: возьмём школьный учебник математики, где нет никаких величин — результатов реального измерения, а все числа придуманы автором, и посмотрим, какое в нём будет распределение чисел по первым цифрам.

(5) Чем больше нечто, тем оно реже встречается. На Земле мало крупных животных, много мелких. Мало больших рек, много ручьёв. На одну реку длиной от 900 до 1000 км придётся, быть может, десяток рек длиной от 100 до 200 км. Описанное положение дел можно в некоторых случаях объяснить конкуренцией, возникающей вокруг ограниченного ресурса. К примеру, рассмотрим следующее

модельное распределение стран по площади. Примем площадь всей суши за единицу. Пусть имеется одна страна с площадью 1/2. На остатке суши располагается одна страна с площадью 1/4, на остатке — ещё одна страна с площадью 1/8, и т. д. Какое при этом получается распределение первых цифр, можно проверить в вычислительном эксперименте. Конечно, принятая модель выглядит слишком примитивной; но её можно видоизменить так, чтобы она была ближе к реальности.

(6) Многие процессы развития сначала идут медленно, а потом всё быстрее и быстрее. К примеру, пусть в каком-нибудь посёлке живёт 10 тысяч человек. Пока он разрастётся до 20 тысяч, пройдёт довольно много времени, и всё это время первая цифра количества его жителей будет «1». Рост от 20 до 30 тысяч жителей потребует меньше времени, от 30 до 40 тысяч — ещё меньше времени, и т. д. Когда город достигнет 100 тысяч жителей, начнётся новый виток развития: снова много времени потребуется, чтобы он разросся до 200 тысяч, меньше — от 200 до 300 тысяч, ещё меньше — от 300 до 400 тысяч, и т. д. Если мы посмотрим одновременно на разные города, то окажется, что значительная их часть будет находиться на первом этапе очередного витка развития с первой цифрой «1», меньшая — на следующем этапе с первой цифрой «2», и т. д.

(7) Очень важный пример — таблица фундаментальных физических величин в физическом энциклопедическом словаре. Видно даже без подсчёта, что очень много чисел начинается в ней со значащей единицы. Все они приводятся с несколькими значащими цифрами. Стало быть, округление здесь ни при чём. Ничего здесь не объяснишь и избирательностью мозга. Кроме того, попавшие в таблицу величины совершенно разнородны: подряд идут скорость света, число Авогадро, масса протона, заряд электрона, магнетон Бора, постоянная Больцмана и т. п. Поэтому здесь не проходит ни объяснение с тем, что «больших величин мало, маленьких много», ни объяснение, основанное на идее экспоненциального роста.

Б. Какая математическая формула хорошо подходит для описания получившегося распределения? Школьникам известны две основные зависимости с похожим графиком: это геометрическая прогрессия и обратная пропорциональность (график — гипербола). В геометрической прогрессии должно быть выполнено равенство $F(n+1) : F(n) = \mathrm{const}$, а у рассматриваемого распределения это отношение заметно убывает от первых цифр к последним. Рассмотрим теперь предположение о том, что точки лежат на гиперболе $nF(n) = \mathrm{const}$. Для проверки построим таблицу произведений $nF(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F(n)$	15412	10189	6723	5012	4925	3380	2926	2662	2041
$nF(n)$	15412	20378	20169	20048	24625	20280	20482	21296	18369

Среднее арифметическое $nF(n)$ равно 20118. По сравнению с этим средним значением сильно «завалены» цифры «1» и «9»; кроме того, наблюдается явный избыток пятёрок. Завал цифры «9» можно объяснить округлением девяток до десяток. Этой же причиной объясняется и избыток пятёрок: в часто встречающихся выражениях типа «сила тока увеличивается в 5–10 раз» число «5» является результатом приближённой оценки, замещающим и четвёрку, и шестёрку. Но чем объяснить завал единиц, ведь их тогда должно быть ещё больше? Похоже на то, что искомая функция ведёт себя как гипербола при больших n, но заметно отличается от неё при малых n.

В. Когда каждый участник строил график для своего массива данных (содержавшего в среднем 700 чисел), на этом графике зачастую имелись довольно сильные отклонения от монотонно и всё более полого убывающей функции (шестёрок могло быть меньше, чем семёрок, и т. п.). В массивах, построенных по группам, эти отклонения сглаживались. А когда мы свели вместе данные всех групп, график сгладился еще сильнее. Правдоподобно предположить, что, если бы мы обработали в 100 раз больше чисел, график имел бы еще более гладкий вид. И именно для предельной сглаженной функции нам и надо искать математическую формулу.

Если существует формула, описывающая сглаженную функцию $F(x)$, то по этой формуле можно вычислить значения $F(n)$ для $n > 9$. Но какой смысл можно приписать этим значениям в рамках нашей задачи? Кажется правдоподобным предположение о том, что $F(10)$ — это количество чисел рассмотренной выборки, начинающихся с «10», $F(11)$ — это количество чисел, начинающихся с «11», и т. д. Но тогда получается, что должны выполняться соотношения

$$F(10) + \cdots + F(19) = F(1),$$
$$F(20) + \cdots + F(29) = F(2),$$
$$\ldots$$
$$F(90) + \cdots + F(99) = F(9).$$

Можно выписать и другие соотношения такой же природы, например

$$F(100) + \cdots + F(109) = F(10).$$

Для экспериментальной проверки представляет интерес распределение чисел по вторым цифрам после первой единицы. В частности, можно проверить предсказание о том, что если $F(n)$ ведёт себя как гипербола при больших n, то значение $F(10)$ должно быть примерно в 2 раза больше $F(20)$, и т. п.

Г. Возьмём две различные единицы длины A и B. Поскольку в мире нет никаких «привилегированных» длин, шансы произвольно взятой длине попасть в интервал $[A, 2A]$ из соображений отсутствия достаточного основания должны быть равны шансам попасть в интервал $[B, 2B]$. Ещё лучше будет рассматривать объединения интервалов $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} [10^n \cdot A, 10^n \cdot 2A]$ и $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} [10^n \cdot B, 10^n \cdot 2B]$.

Положим теперь $B = 2A$. Получается, что шансы произвольной длине попасть в интервалы $[A, 2A]$ и $[2A, 4A]$ равны между собой. Для мерки A результаты измерений длин, попавших в первый интервал, начинаются с цифры «1»; результаты измерений длин, попавших во второй интервал, начинаются с цифр «2» и «3». Отсюда следует, что с единицы должно начинаться столько же чисел, сколько с двойки и тройки, вместе взятых. Аналогичным образом выводятся ещё три соотношения, которым должна удовлетворять функция $F(n)$:

$$F(1) = F(2) + F(3); \tag{1}$$
$$F(2) = F(4) + F(5); \tag{2}$$
$$F(3) = F(6) + F(7); \tag{3}$$
$$F(4) = F(8) + F(9). \tag{4}$$

Из соотношений (1)–(4) можно вывести разнообразные следствия. К примеру, сложив почленно первые две, либо первые три, либо все четыре формулы, мы получим

$$F(1)=F(3)+F(4)+F(5)=F(3)+F(4)+F(5)+F(6) = F(5)+F(6)+F(7)+F(8)+F(9).$$

Этим соотношениям может быть дана простая интерпретация: все числа, которые начинались с «1», при увеличении мерки в 3 раза будут начинаться с цифр «3», «4», «5»; при увеличении мерки в 4 раза — с цифр «4», «5», «6», «7», при увеличении мерки в 5 раз — с цифр «5», «6», «7», «8», «9».

Сразу же можно проверить, насколько хорошо формулы (1)–(4) описывают наше распределение:

$$\begin{aligned} &F(1) = 15412, && F(2) + F(3) = 16912\ (+10\%);\\ &F(2) = 10189, && F(4) + F(5) = 9937\ (-2,5\%);\\ &F(3) = 6723, && F(6) + F(7) = 6306\ (-6\%);\\ &F(4) = 5012, && F(8) + F(9) = 4703\ (-6\%). \end{aligned}$$

Ещё одно важное следствие соотношений (1)–(4) состоит в том, что если искомая функция $F(n)$ удовлетворяет этим соотношениям, то она не является обратно пропорциональной зависимостью. Ведь в случае обратной пропорциональности $F(2) = F(1)/2$, $F(3) = F(1)/3$; но тогда $F(2) + F(3) \neq F(1)$.

Третий день

А. Экспериментальная группа номер 1 исследовала, что произойдёт с распределением первых цифр при переводе результатов в восьмеричную систему счисления. Была обработана выборка в 700 чисел. Распределение в целом сохранило тот же самый вид, оказавшись инвариантным по отношению к выбору основания системы счисления. **Б.** Экспериментальная группа № 2 исследовала распределение вторых цифр после единицы, стоящей на первом месте. Была обработана выборка в 3786 чисел. Полученное распределение (рис. 2) хорошо совпадало с теоретическим предсказанием, за исключением очень сильно завышенного сочетания начальных цифр «10». По-видимому, группа нарушила договорённость брать только такие данные, которые заведомо не округлялись до первой значащей цифры (пример данных, приведённых с недостаточной точностью: «В Португалии в 1982 г. производилось 10 млн. гектолитров вина»).

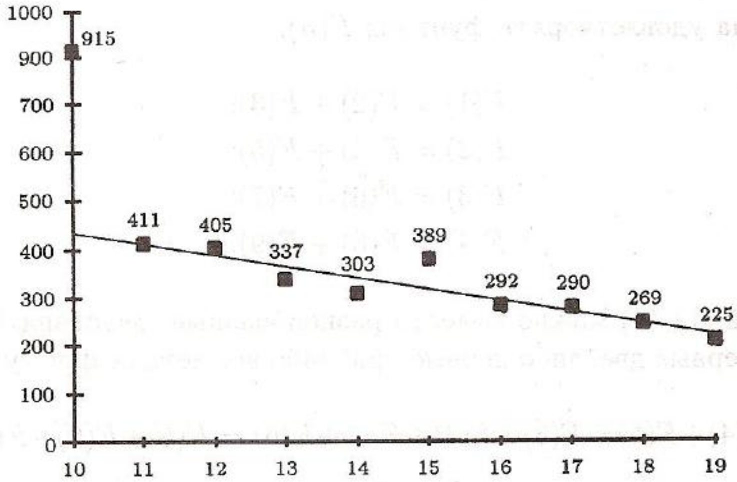


Рис. 2

Прямая $P(x) = 639 - 21x$, проведённая методом наименьших квадратов для точек с n от 11 до 19, даёт значения $P(10) = 429$, $P(20) = 219$, что неплохо согласуется с предсказанием $P(20) \approx P(10)/2$.

В. Теоретическая группа № 1 пыталась установить явный вид функции $F(n)$, удовлетворяющей соотношениям (1)–(4). Рассмотрим переменную величину $G(t)$, растущую по показательному закону. Время, за которое $G(t)$ возрастает от 1 до 10, примем за единицу времени; тогда $G(t) = 10^t$. Разделим интервал $[0, 1]$ на отрезки, внутри которых значения $G(t)$ заключены между последовательными целыми числами. Их границами служат точки $\lg 1 = 0$, $\lg 2$, $\lg 3$, ..., $\lg 9$, $\lg 10 = 1$ (рис. 3).

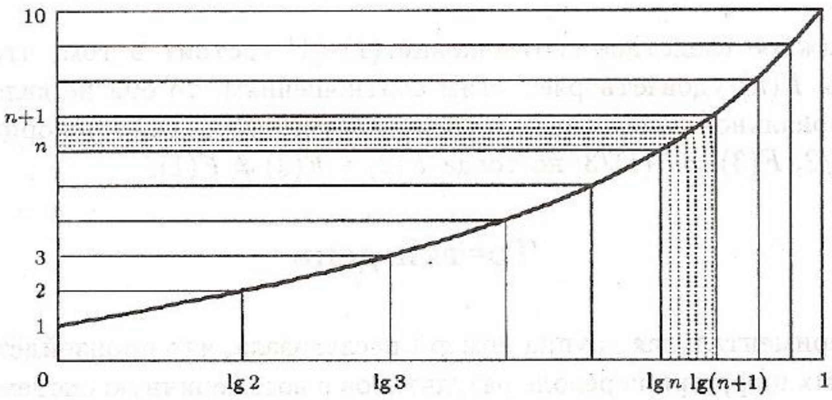


Рис. 3

Когда $G(t)$ нарастёт до 10, примем эту десятку за новую единицу измерения, а текущее время — за новое начало отсчёта; при этом процесс нарастания $G(t)$ в следующем разряде от новой единицы до новой десятки каждый раз будет описываться одной и той же формулой. Вероятность обнаружить величину G в таком состоянии, что её первая цифра равна «n», равна длине n-ого отрезка:

$$F(n) = \lg(n+1) - \lg(n) = \lg\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right). \qquad (5)$$

Значения $F(n)$, вычисленные по формуле (5), приведены в таблице:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F(n)$	0,301	0,176	0,125	0,097	0,079	0,067	0,058	0,051	0,046

Для сравнения изобразим на одном графике как исходные экспериментальные данные, так и результаты, предсказываемые теорией (рис. 4).

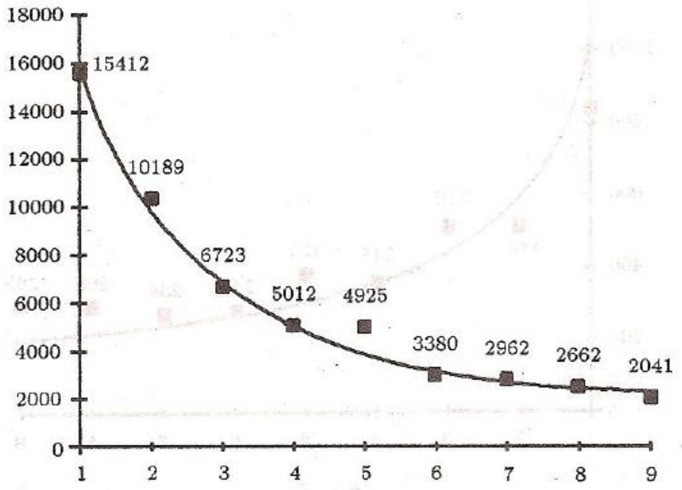


Рис. 4

Г. Ближайшее следствие рассуждений предыдущего пункта состоит в том, что формулой (5) описывается распределение первых цифр последовательных степеней любого числа a, десятичный логарифм которого иррационален, например, степеней двойки:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 1,\ 3,\ 6,\ 1,\ 2,\ 5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots$$

Геометрической прогрессии значений $G(t)$ со знаменателем a будет соответствовать арифметическая прогрессия значений t с разностью $\lg a$. Если замкнуть отрезок $[0, 1]$ в окружность, последовательность отложенных на этой окружности в одном направлении точек с постоянной иррациональной разностью распределится по окружности равномерно [1]. Строгое доказательство этой теоремы, данное Г. Вейлем, довольно сложно, но легко понять еёсправедливость, построив достаточно большое число точек.

Д. Экспериментальная группа № 3 исследовала «влияние человеческого мозга на распределение первых цифр». С этой целью были взяты несколько разных учебников математики за 6–8 классы (Междуреченск) и 2–3 классы (Кемерово), написанных разными авторами. Ясно, что числа в таком учебнике не являются результатами каких-то реальных измерений, но выдуманы авторами по их прихоти. Результаты, полученные на семинаре в Кемерово (обработан массив в 3458 чисел), и их сравнение с теоретическим распределением (5) приведены на рис. 5.

Здесь сохраняется тенденция «больше всего единиц, и меньше всего девяток», хотя и не в столь выраженном виде, как это было с числами из энциклопедии. Как можно объяснить это явление? Предположим, что когда автор учебника хочет написать какое-нибудь двузначное число, он подсознательно выбирает с равной вероятностью, будет ли оно «небольшим», «средним» или «большим». Если «небольшими» являются числа от 10 до 25, «средними» — от 26 до 55, а «большими» — от 56 до 99, то получится нечто похожее на наши экспериментальные данные. Можно сказать, что «небольшие» числа обладают для нас большей «степенью индивидуальности», и поэтому каждое из них имеет в человеческом сознании больший «удельный вес».

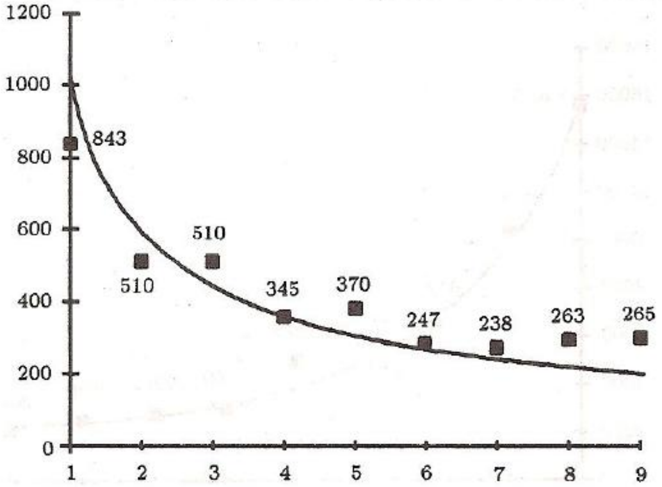


Рис. 5

Заметные отклонения от теоретической зависимости (5) можно объяснить тем, что автор учебника действует отчасти сознательно, подбирая «удобные» числа. Чтобы рассмотреть явление случайного выбора в чистом виде, был проведён опрос, в ходе которого респондентам (не знавшим о цели опроса) предлагалось назвать несколько чисел. Было опрошено 65 человек, назвавших 385 чисел. Результаты опроса и их сравнение с теоретической зависимостью (5) приведены на рис. 6. Завышенное число девяток можно объяснить «повышением внимания» к завершающим числам периода.

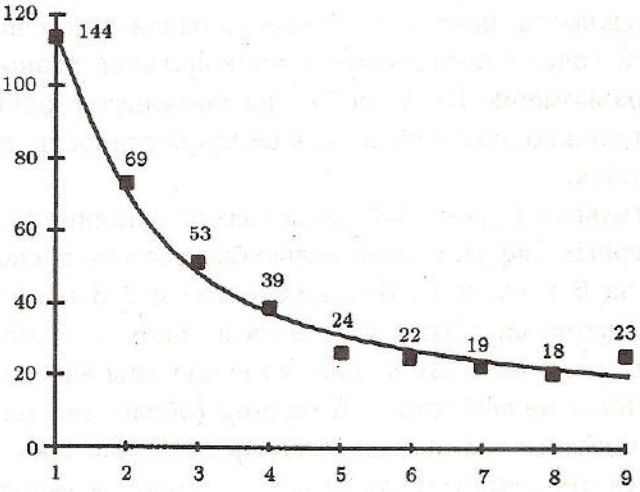


Рис. 6

Е. Теоретическая группа №2 рассматривала и обсчитывала модель речного бассейна. Пусть имеется одна река, длину которой мы примем за единицу. От этой реки отходит N_1 притоков первого уровня длиной $a < 1$. От этих притоков в совокупности отходит N_2 притоков второго уровня длиной a^2. От этих притоков в совокупности отходит N_3 притоков третьего уровня длиной a^3. И т. д.

Сначала был рассмотрен простейший вариант $N_k = 1$. Тем самым задача свелась к исследованию распределения первых цифр у степеней различных чисел a, (при этом можно брать $1 < a < 100$). Были экспериментально проверены последовательные степени чисел 2, 3, 5, 7 (при обсчете на компьютере проверялся массив в 32000 элементов). При этом было обнаружено исключительно хорошее соответствие получившегося распределения с распределением (5). (Объяснение этого факта приведено выше в пункте **Г.**)

Затем были рассмотрены ещё два варианта этой модели: $N_k = (k+1)$ и $N_k = (k+1)^2$. В обоих случаях итоговое распределение также было очень близко к распределению (5).

Ж. Интересно посмотреть, как ведут себя первые цифры других числовых последовательностей, к примеру, $x_n = n!$ или $x_n = a^{2^n}$.

Для последней последовательности был проведён вычислительный эксперимент, в результате которого выяснилось, что распределение первых цифр здесь также стремится к предельному распределению (5), но этот процесс сходится гораздо медленнее. Поведение первых цифр этой последовательности обсуждалось в лекции, прочитанной перед междуреченскими школьниками, пожелавшими продолжить работу над задачей о распределении первых цифр за рамками семинара (см. приложение 1).

Заключение

В заключительном слове участникам семинара была рассказана притча, о которой нам недавно напомнил А. В. Боровских (см. также статью [2]).

Ученик пожаловался учителю: «Как же так, я учусь и учусь, а так многого не знаю?» Учитель ответил: «Это так, но мое незнание гораздо больше твоего». Ученик спросил, как это может быть, а учитель нарисовал круг и сказал: «Внутри этого круга находится то, что человек знает; снаружи — то, чего он не знает. А граница круга — это *наше знание о том, чего мы ещё не знаем*. Круг твоего знания невелик — поэтому мала и его граница. А у меня знаний больше, но и граница тем самым больше — я больше тебя знаю о том, чего я не знаю».

Изучая распределение чисел по первым цифрам, мы выдвинули ряд предположений о том, как и почему происходит их убывание от единицы к девятке, и проверили некоторые из этих предположений экспериментально. Мы даже подобрали математическую формулу, неплохо описывающую это распределение, и в какой-тот мере сумели обосновать её. Мы выяснили, что именно такое распределение имеют первые цифры степеней различных чисел. Но при этом мы до сих пор не знаем причины, по которой именно это распределение реализуется для величин реального мира (или всё-таки правильнее будет говорить — для данных из энциклопедии?) Ещё было бы очень полезно выяснить, для каких массивов числовых данных закономерность (5) не выполняется, и объяснить, почему. На смену прежним вопросам пришли другие. Можно сказать, круг нашего незнания расширился...

Приложение 1

Будем исследовать распределение первых цифр числовой последовательности, заданной формулой $x_n = a^{2^n}$, или, что то же самое, рекуррентной формулой $x_{n+1} = x_n^2$ с начальным условием $x_1 = a$ (достаточно считать, что $1 \le a < 10$).

Мы уже знаем, что в задаче о распределении первых цифр удобно сделать замену $p_n = \{\lg x_n\}$ (фигурными скобками здесь обозначено взятие дробной части числа). И если точки последовательности p_n будут равномерно распределены по интервалу $[0, 1)$, то тогда первые значащие цифры последовательности x_n будут иметь логарифмическое распределение (5).

Отображению $x_{n+1} = x_n^2$ соответствует отображение

$$p_{n+1} = \begin{cases} 2p_n, & \text{если } p_n < 1/2 \\ 2p_n - 1, & \text{если } p_n \ge 1/2 \end{cases} \tag{6}$$

В случае $p_n \ge 1/2$ удобно сделать замену $q_n = 1 - p_n$, тогда будет $q_{n+1} = 2q_n$.

Траектория отображения (6) в общем виде напоминает игру в волейбол на площадке, ограниченной точками 0 и 1, и разделённой на два поля сеткой 1/2. Пусть начальная точка траектории отстоит на расстояние $a < 1/2$ от точки 0. Следующие точки траектории будут отстоять от точки 0 на расстояния $2a$, $4a$, ... , составляющие геометрическую прогрессию со знаменателем 2, до тех пор, пока «мяч не перелетит через сетку» и не окажется на расстоянии b от точки 1. Следующие точки траектории будут отстоять от точки 1 на расстояния $2b$, $4b$, ... , составляющие геометрическую прогрессию со знаменателем 2, до тех пор, пока «мяч вновь не перелетит через сетку» и не окажется на расстоянии c от точки 0 (рис. 7). И так далее.

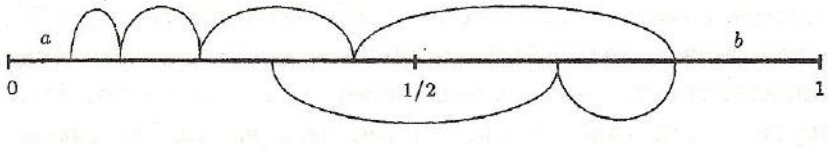
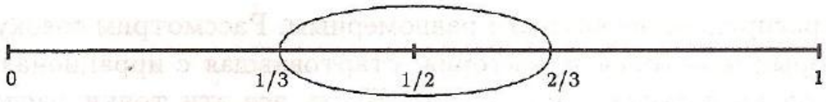


Рис. 7

Отображение (6) имеет единственную неподвижную точку 0–1 (концы отрезка сливаются при замыкании этого отрезка в кольцо, поэтому мы говорим об одной, а не о двух неподвижных точках). Траектории, начинающиеся в рациональных точках с нечётными знаменателями, являются замкнутыми циклами. На рис. 8, а изображён цикл из двух точек 1/3 и 2/3; на рис. 8, б изображены два цикла, образованные рациональными точками со знаменателем 7. Траектории, начинающиеся в рациональных точках с чётными знаменателями, за n шагов выходят на неподвижную точку (если знаменатель имеет вид 2^n) или цикл (если знаменатель имеет вид $2^n m$, где m — нечётно).



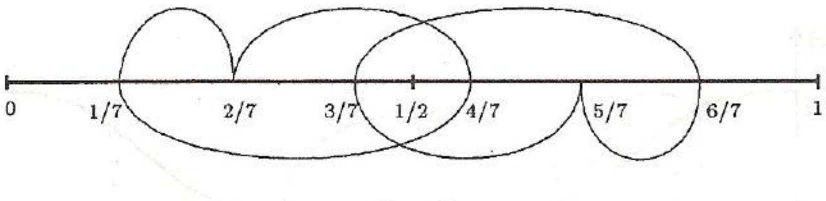


Рис. 8

Отметим тот факт, что все замкнутые циклы отображения (6), включая неподвижную точку, являются экспоненциально неустойчивыми. К примеру, рассмотрим траекторию, начальная точка которой отстоит от точки $1/3$ на расстояние Δ. Далее эта траектория пройдёт по точкам

$$(1/3+\Delta) \to (2/3+2\Delta) \to (1/3+4\Delta) \to (2/3+8\Delta) \to (1/3+16\Delta) \to \cdots,$$

причём её удаление от точек цикла с каждым шагом растёт в геометрической прогрессии со знаменателем 2 (рис. 9).

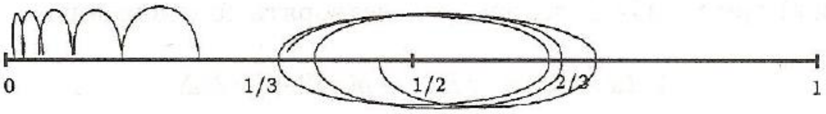


Рис. 9

Поведение траектории, начинающейся в произвольной иррациональной точке, можно качественно описать следующим образом. Траектория постоянно попадает в близкую окрестность какого-нибудь цикла с не слишком большим знаменателем, — но тут же экспоненциально «раскручивается» с этого цикла, попадает в окрестность другого цикла и вновь «раскручивается» с него, и так её «бросает» от одного цикла к другому. В численном счёте хорошо просматриваются ситуации, когда траектория попадает в близкую окрестность неподвижной точки 0–1; можно заметить также «прокручивания» траектории вблизи стационарного цикла, образованного точками $1/3$ и $2/3$.

Зададимся теперь вопросом, приводит ли отображение (6) при иррациональной начальной точке к равномерному распределению точек траектории по интервалу $[0, 1)$. Численный счёт показывает, что выход на стационар действительно происходит, но этот процесс идёт относительно медленно по сравнению с аналогичным процессом для степеней двойки.

Дадим не совсем строгое доказательство того факта, что если отображение (6) при $n \to \infty$ даёт стационарное распределение точек траектории по интервалу

$[0, 1)$, то это распределение является равномерным. Рассмотрим совокупность всех точек, в которых некоторая траектория, стартовавшая с иррациональной точки, побывала за очень большое число шагов. Пусть все эти точки распределены по интервалу $[0, 1)$ с плотностью $\rho(x)$. На следующем шаге каждая из этих точек перейдёт в другую точку интервала $[0, 1)$ согласно (6), и при этом совокупность образов даст новое распределение плотности $\rho_+(x)$. Но поскольку мы предполагаем, что распределение $\rho(x)$ является стационарным, тем самым будет $\rho_+(x) = \rho(x)$.

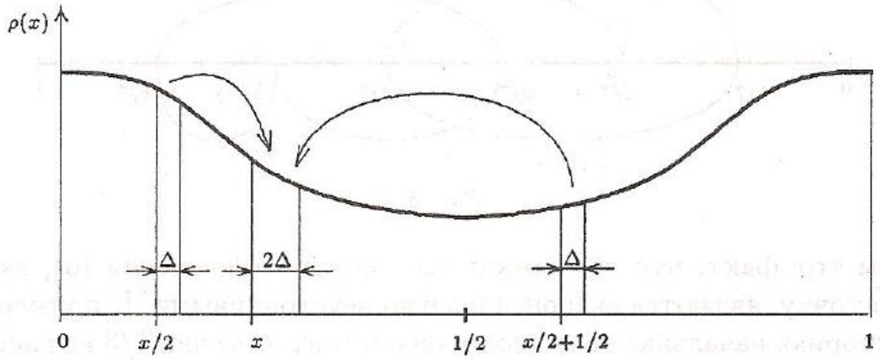


Рис. 10

Заметим теперь, что прообразами точек из интервала $[x, x + 2\Delta]$ являются все точки из интервалов $[x/2, x/2 + \Delta]$ и $[x/2 + 1/2, x/2 + 1/2 + \Delta]$ (рис. 10). Поэтому площадь криволинейной трапеции над интервалом $[x, x+2\Delta]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций над интервалами $[x/2, x/2+\Delta]$ и $[x/2+1/2, x/2+1/2+\Delta]$. Тем самым $\rho(x)$ при малых Δ должно удовлетворять соотношению

$$2\rho(x)\Delta = \rho(x/2)\Delta + \rho(x/2 + 1/2)\Delta,$$

что даёт функциональное уравнение

$$2\rho(x) = \rho(x/2) + \rho(x/2 + 1/2).$$

Непрерывные решения этого уравнения имеют вид $\rho(x) = \mathrm{const}$. Но тем самым первые цифры чисел, образующих последовательность $x_n = a^{2^n}$, будут иметь логарифмическое распределение (5).

Приложение 2

При объяснении эмпирического закона Бенфорда было выдвинуто предположение о том, что на каждый десятичный разряд шкалы величин приходится одно и то же число однородных объектов. Согласно этому предположению, на Земле должно быть одним и тем же число поселений с населением от 10^0 до 10^1, от 10^1 до 10^2, от 10^2 до 10^3, от 10^3 до 10^4, от 10^4 до 10^5, от 10^5 до 10^6, от 10^6 до 10^7 человек. Нетрудно понять, что это предположение слишком далеко от реальности. Поэтому нужно видоизменить предложенное объяснение закона Бенфорда таким образом, чтобы оно лучше соответствовало реальному положению вещей.

С этой целью рассмотрим распределение 198 стран по численности населения. На рис. 11 каждый десятичный разряд разделён на три равные части, заключённые между границами 1, $10^{1/3} = 2,154$, $10^{2/3} = 4,642$, 10. Рассматривая получившуюся гистограмму, мы видим, что ширина колокола функции распределения, внутрь которой попадает 50% стран, составляет один порядок шкалы.

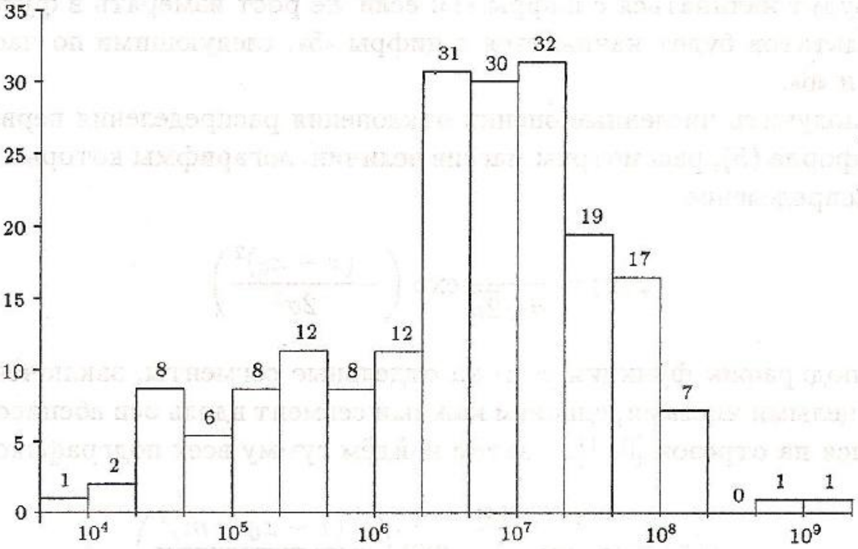


Рис. 11

Приведённая ниже таблица отражает распределение численности населения по первым цифрам внутри каждого десятичного разряда. Избыток пятёрок в итоговом распределении по отношению к теоретически предсказанному результату обусловлен странами с численностью от 5 до 6 млн. человек, на которые приходится максимум функции распределения, отнесённой к логарифмической шкале.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Сумма
10^4	2	4	1	3	1	2	2	1		16
10^5	8	7	2	4	2	2	1	2	1	29
10^6	11	11	12	9	13	3	4	6	4	73
10^7	29	15	5	4	5	4	4	1	1	68
10^8	6	2							1	9
10^9	1									1
Сумма	57	39	20	20	21	11	11	10	7	196
%	29,2	19,9	10,2	10,2	10,8	5,6	5,6	5,1	3,6	
% (теор.)	30,1	17,6	12,5	9,7	7,9	6,7	5,8	5,1	4,6	

Теперь можно сформулировать основное условие, которому должны удовлетворять однородные величины реального мира, чтобы распределение их первых цифр было близко к логарифмическому закону Бенфорда. Это условие состоит в том, что ширина колокола функции их распределения по логарифмической шкале должна быть не менее одного порядка. Пример массива величин, не удовлетворяющего этому требованию, представляет собой рост взрослых людей, заключённый по большей части между 150 и 190 см. Если рост измерять в метрах, почти все результаты будут начинаться с цифры «1»; если же рост измерять в футах, большая часть результатов будет начинаться с цифры «5», следующими по частоте будут цифры «4» и «6».

Чтобы получить численные оценки отклонения распределения первых цифр от закона Бенфорда (5), рассмотрим массив величин, логарифмы которых имеют нормальное распределение

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Разрежем подграфик функции $\varphi(x)$ на отдельные сегменты, заключённые между соседними целыми числами, сдвинем каждый сегмент вдоль оси абсцисс так, чтобы он наложился на отрезок $[0,\ 1]$, а затем найдём сумму всех подграфиков:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-x_0-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Определённая таким образом функция $\rho(x)$ является периодической с периодом 1. Разложим её в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[x_0 - 1/2,\ x0 + 1/2]$:

$$\rho(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-2(\pi n\sigma)^2)\cos(2\pi n(x-x_0)).$$

При $\sigma = 0,2$ амплитуда второй гармоники примерно в 10 раз меньше амплитуды первой гармоники, поэтому при $\sigma > 0,2$ для численных оценок можно пользоваться приближённой формулой

$$\rho(x) = 1 + 2\exp(-2(\pi\sigma)^2)\cos(2\pi(x-x_0)).$$

Функция $\rho(x)$ на отрезке $[0,\ 1]$ достигает своего максимума в точке $\{x_0\}$, минимума в точке $\{x_0 + 1/2\}$. Поэтому распределение первых цифр рассматриваемого массива будет завышено по сравнению с распределением (5) в $1 + 2\exp(-2(\pi\sigma)^2)$ раз в цифре, ближайшей к $10^{\{x_0\}}$, и занижено в $1 - 2\exp(-2(\pi\sigma)^2)$ раз в цифре, ближайшей к «противоположной» цифре $10^{\{x_0+1/2\}}$.

Благодарности. Мы благодарим всех участников наших семинаров за интересную и плодотворную работу.

Литература

[1] Арнольд В. И. *«Жёсткие» и «мягкие» модели в математике.* М., 2000.

[2] Боровских А. В. *Круг незнания.* Поиск, № 10–11, 15 марта, 2002, с. 8.

[3] Щетников А. И. *Материалы к проектированию курса геометрии для средней школы.* Математическое образование, 2000, № 3(14), с. 35-42.

[4] Щетников А. И. Щетникова А. В. *Преподавание математики в историческом контексте.* Математическое образование, 2001, № 3(18), с. 60-68.

[5] Щетников А. И. Щетникова А. В. *Учебный семинар «Как решать незнакомую задачу».* Труды конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения А. А. Ляпунова. Новосибирск, ОИИ СО РАН, 2001, с. 773-780.

http://www.ict.nsc.ru/ws/Lyap2001/2309/

[6] Benford F. *The law of anomalous numbers.* Proc. Amer. Phil. Soc., 78, 1938, p. 551-572.

[7] Dominguez M. P., Burguillo J. D. A. El primer digito significativo. *Epsilon. Revista del S.A.E.M. Thales*, № 45, 15(3), 1999, p. 339-351.

http://www.cs.us.es/ perer/publicac/epsilon45.pdf

[8] Hill T. P. *The first digit phenomenon.* American Scientist, 86, 1998, p. 358-363.

[9] Newcomb S. *Note on the frequency of the use of digits in natural numbers.* Amer. J. Math. 4, 1881, p. 39-40.

[10] Nigrini M. J. *Digital analysis using Benford's Law: tests statistics for auditors.* Global Audit Publications, 2000.

[11] Raimi R. A. *The peculiar distribution of first digits.* Scientific American, 221, Dec. 1969, p. 109-119.

[12] Scott P. D., Fasli M. *Benford's Law: an empirical investigation and a novel explanation.* CSM Technical Report 1349, University of Essex, 2001.

http://cswww.essex.ac.uk/technical-reports/2001/CSM-349.pdf

Щетников Андрей Иванович,
научный консультант "Центра образования",
г. Междуреченск.
e-mail: schetnikov@yandex.ru

Щетникова Анастасия Васильевна,
учитель математики и информатики,
г. Новосибирск.
e-mail: nastya_contact@mail.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, пр-д завода "Серп и Молот", д.3а.

Контактные телефоны: (095) 362-91-70, (095) 362-91-02.

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

Страница Фонда в сети Internet: www.fmop.dnttm.ru

e-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2002 год (включая стоимость пересылки) – 40 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2002 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

С сентября 2000 выходит "Обозрение Z" — научно-популярное приложение к журналу "Математическое образование". Условия подписки (адрес, реквизиты, стоимость одного номера) — те же, что и для журнала.

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 35 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 45 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents