ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцать седьмой

№ 4 (108)

октябрь - декабрь 2023 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 4 (108), 2024 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2024 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 17.01.2024 г.
Стиль верстки разработан С.А. Кулешовым.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (108), октябрь – декабрь 2023 г.

Содержание

Память

К столетию И. Р. Шафаревича

А. О. Ремизов

Статья представляет собой подборку цитат из разных работ великого математика и мыслителя Игоря Ростиславовича Шафаревича, посвященных настоящему и будущему математики и науки в целом, с небольшими комментариями.

В этом году исполнилось сто лет со дня рождения великого русского математика и мыслителя Игоря Ростиславовича Шафаревича. Мое первое (заочное) знакомство с И. Р. состоялось лет тридцать назад, когда в журнале «Новый мир» вышла статья «Две дороги — к одному обрыву». И хотя основная мысль автора была мною в то время фактически не понята, насколько это не вязалось с информационным потоком, лившемся, как сейчас говорят, «из каждого утюга», сам текст поразил красотой и логической стройностью и воспринимался как прекрасное художественное произведение. Если бы кто-нибудь сказал тогда, что мне предстоит стать соавтором И. Р., пусть и в учебнике по математике [1], я воспринял бы это как шутку вроде того, чтобы стать соавтором «Войны и мира». Однако жизнь оказалась полной сюрпризов: мне выпало счастье общаться с И. Р. на протяжении десятка лет, и это общение — одно из самых ярких впечатлений моей жизни. К сожалению, это живое впечатление трудно передать на бумаге, поэтому я решил остановиться на одном вопросе, который, на мой взгляд, представляет большой интерес.

В некоторых работах И. Р. встречаются размышления о математике и о науке в целом. Здесь мы имеем дело с очень редким явлением – это взгляд на математику величайшего математика, но взгляд не «изнутри», а «снаружи». Как известно, И. Р. был очарован математикой еще в школьные годы, затем окончил экстерном механико-математический факультет в возрасте 17 лет, получил свои первые научные результаты и через шесть лет стал профессором[1]. Конечно, все это подразумевает глубочайшее погружение в математику и в той или иной степени отстранение от реалий окружающего мира. Человек, ставший на такой путь, часто впадает в соблазн считать свою науку самодостаточной ценностью, а окружающий мир – всего лишь питательной средой. Однако И. Р. не впадает в соблазн жить в «башне из слоновой кости». Подобно Толстому, размышлявшему «чем люди живы», он задается вопросом о существовании «внешнего смысла» науки и предлагает свой ответ, естественным образом связанный с его размышлениями о будущем России, да и всего человечества. Мне кажется, что эти мысли актуальными как полвека назад, когда они были высказаны, так и сегодня. Именно о них я хотел бы поговорить. Приведенные ниже цитаты из нескольких работ И. Р. Шафаревича не только проливают свет на причины происходящего на наших глазах упадка науки, но и предлагают если не выход из него, то, во всяком случае, путь, на котором выход может быть найден.

[1]Мне запомнился следующий эпизод. Однажды я задал И. Р. вопрос, где можно прочитать что-нибудь по поводу одной старой математической теории Альфреда Клебша. После недолгого размышления он назвал книгу «Высшая геометрия» Феликса Кляйна и добавил, что читал ее будучи школьником, и она произвела на него большое впечатление. «*У меня в то время дома лежали две чужие книги, которые я читал одновременно: «Высшая геометрия» и «Три мушкетера» Дюма. И я сам удивлялся, что все время читаю первую, а том Дюма лежит открытым на одной и той же странице*» – добавил он.

1. Минуты роковые

Много лет читая работы И. Р. на разные темы, я не уставал поражаться широте круга затрагиваемых им вопросов и тем. Постепенно становилось очевидно, что все они в той или иной степени направлены к одной цели — понять судьбу человечества и, в первую очередь, России и русского народа. Не случайно то, что одна из первых работ называется «Есть ли у России будущее?» (1974), а одна из последних, подводящая итог его многолетним размышлениям, — «Будущее России» (2005). В них автор, по его собственным словам, пытается заглянуть «под крышку кастрюли, в которой варится наше будущее». Поиски ответов на эти вопросы привели И. Р. к анализу многих, на первый взгляд, посторонних, вопросов, от империи инков и Античности до французской революции и роли протестантизма в создании современной технологической цивилизации.

Мне кажется нужным сказать несколько слов о том фоне, на котором проходили эти размышления.

По прошествии войн, потрясших мир в середине XX века, произошло падение или значительное ослабление тоталитарных режимов в Европе и СССР, что сделало будущее не столь фатально предопределенным, как было раньше. Однако вместо долгожданного отдыха человечество оказалось перед угрозой новых глобальных катастроф: ядерной войны, лавинообразного роста населения и голода, уничтожения природы, неконтролируемой миграции и национальных проблем... Технический прогресс, верой и правдой служивший человечеству (или, во всяком случае, некоторой его части) и казавшийся залогом скорого счастливого будущего, вдруг вышел из-под контроля и стал угрожать своему создателю.

На это обратили внимание многие, как в нашей стране, так и на Западе, где в это время произошел взрывной рост футурологических исследований. В советских же условиях обсуждать такие вопросы можно было только в формате Самиздата, стремительный рост которого также пришелся на этот период. Одной из наиболее интересных стала работа А.А. Амальрика [2], также заметное внимание привлек трактат А.Д. Сахарова [3]. В то же время были написаны статьи А.И. Солженицына, И.Р. Шафаревича и других авторов, опубликованные в 1974 году в сборнике «Из-под глыб», инициатива создания которого принадлежала Солженицыну Сразу же бросается в глаза отличие статей этого сборника от большинства текстов, которые ходили в Самиздате, включая и упомянутые выше.

Дело не только в несогласии в конкретных вопросах[2], но чувствуется принципиально иной взгляд на жизнь, как если бы речь шла о евклидовой и неевклидовой геометрии. Например, оценивая [2] как «одно из самых ярких и умных произведений, которые дала русская мысль после революции», И.Р. Шафаревич далее пишет [5]:

> Значение этой работы представляется мне именно в том, что в ней один путь пройден до конца, один строй мыслей продуман исчерпывающе. Если смотреть на историю с точки зрения взаимодействия интересов различных социальных групп и личностей, их прав, гарантирующих эти интересы, или как на результат воздействия экономических факторов, то у России будущего нет — против аргументов Амальрика возразить нечего. Но ведь есть в истории процессы, которые основываются на совсем других принципах <...> когда на 400 лет раньше неизвестный монах Лютер вступил в борьбу с величайшей силой тогдашнего мира, казалось, что он действует противно всем социальным и историческим законам.

Вслед за Шпенглером, И. Р. полагал, что вопрос о будущем России (как и любой другой страны и, тем более, человечества) нужно рассматривать не в «линейной одномерной» концепции прогресса, возобладавшей в XIX веке, а на обширном «историческом поле», на котором действуют различные

[2] Непосредственная полемика с трактатом Сахарова содержится в статье Солженицына [4], открывающей сборник «Из-под глыб».

и независимые друг от друга культуры, подобно живым организмам, имеющие периоды зарождения, расцвета и умирания. В своей книге «Закат Европы» (1918 – 1922) Шпенглер предрекал упадок цивилизации западного типа и замену ее какой-то другой[3].

Сразу же после опубликования книги взгляды Шпенглера вызвали волну критики. Но сейчас, сто лет спустя, слова о закате Европы трудно считать несбывшимся пророчеством.

Более сомнительным представляется прогноз об упадке науки: он был сделан в начале XX века, а спустя всего несколько десятилетий произошел взрывной рост в области многих наук, включая математику (где появились даже совершенно новые разделы) и физику (достаточно упомянуть открытие теории относительности и квантовой физики, которые перевернули все прежние представления о мире). И как бы ни оценивать плоды, принесенные этими научными достижениями в повседневную жизнь простых людей, невозможно отрицать, что XX век является веком взлета, а не заката науки. И. Р. считал, что это предсказание Шпенглера следует рассматривать в немного более отдаленной перспективе. Пожалуй, именно сейчас человечество вплотную подошло к той черте, которую можно назвать началом заката традиционной науки, движимой «фаустовским духом» — неудержимым стремлением к познанию истины. Этот закат носит общемировой характер, несмотря на различия, вызванные спецификой той или иной страны или общества [6, 14].

2. И. Р. Шафаревич о науке

Путь к свободе начинается внутри нас [5]

> На каждом шагу жизнь предлагает нам сделать выбор в небольшом вопросе: немного уступить силе, пригнуться или же устоять, слегка распрямиться. <…> Во всех этих случаях даже самое смелое решение не грозит сейчас ни тюрьмой, ни постоянной потерей работы. Угрожает только то, что отношение начальства будет похуже, не состоится очередное продвижение по службе, зарплата не увеличится, не будет нового телевизора, или лишней комнаты в квартире, или заграничной командировки.
>
> Происходит обмен, в котором мы расплачиваемся кусочками своей души, необходимыми для ее здоровья и жизни. Исчезает чувство собственного достоинства, уверенность в своих силах, появляется жесткое, недоброжелательное отношение к другим людям, лукавая психология раба. И главное: жизнь теряет светлую окраску счастья, пропадает чувство ее высокого смысла. Расплата за это — бесплодность в искусстве и науке, жизнь, погубленная на многодневные бдения в очередях за никому не нужными вещами…
>
> Что же предлагает жизнь взамен? О минимуме, необходимом, чтобы не умереть с голоду и накормить детей, здесь речь, как правило, не идет. Тогда о чем же? Я думаю, что о ценностях, основной смысл которых нематериален. Иногда это совершенно очевидно, иногда немного замаскировано. Орден, например, ни кормит, ни греет. Большая и дорогая машина садится на наших плохих дорогах, в городе труднее найти место для стоянки, а скорость движения все равно ограничена и быстрее на ней не проедешь, чем на самой дешевой. Заграничная командировка может быть профессионально важной для начинающего инженера или ученого, но ее притягательная сила не сравнима с пользой. Новый дорогой костюм греет не лучше старого и заплатанного и т. д. и т. д. Все это ценности непотребительные. Смысл их иной — они указывают место человека в иерархии, которую образуют члены окружающего нас общества. Как бумажные деньги, они не имеют ценности сами по себе, но являются символами чего-то, что людьми высоко ценится.
>
> По-видимому, для существования любого общества необходима некоторая иерархия среди его членов. Иерархия человеческого общества отражает его мировоззрение. Люди, наиболее способные к деятельности, которая является важной с точки зрения принципов

[3] И. Р. подробно обсуждает концепцию Шпенглера в работе [12] (часть XIII).

общества, обладают и бóльшим авторитетом. Общество снабжает таких людей символами, подчеркивающими их авторитет: продетым в ноздрю кольцом, расшитым мундиром или автомобилем «Чайка». Эти символы приобретают для членов общества исключительную привлекательность и заставляют людей действовать в желательном для общества направлении.

Это и есть та сила, которая более всего ограничивает сейчас нашу свободу. Ее источник не пулеметы и колючая проволока, а наши взгляды, то, что в душе мы не задумываясь принимаем иерархию окружающего нас общества и высокое положение в ней считаем реальной ценностью <. . . > И как, гонясь за этими приманками, мы жертвуем лучшими частями своей души, так, отказавшись от них, приобретем то, что составляет смысл жизни.

Наука превращается в гонку [5]

Именно массовый, сверхорганизованный характер современной науки является ее бедой, больше того, проклятием. Научных работников так много и их продукция так велика, что нет надежды прочесть все написанное даже в одной узкой области. Поле зрения ученого суживается до пятачка, он должен из кожи лезть, чтобы не отстать от бесчисленных конкурентов. Замысел Бога, божественная красота истины, открывающаяся в науке, заменяются набором технических задачек. Наука превращается в гонку, миллионная толпа мчится, и никому не понятно куда. Немногим еще эта гонка доставляет удовлетворение, они имеют какую-то перспективу, видят хоть на несколько шагов вперед, но для подавляющего большинства не остается ничего, кроме вида пяток бегущего впереди и сопения наступающего на пятки сзади.

Но даже если можно было бы перешагнуть через то, что наука сейчас не приносит того удовлетворения, которое она способна давать, уродует занимающихся ею людей, все равно, и по иным причинам она не сможет развиваться в прежнем направлении. Сейчас продукция науки удваивается каждые 10–15 лет, примерно так же растет число ученых, с близкой скоростью увеличиваются материальные затраты на науку. Этот процесс длится 200–250 лет, но сейчас уже видно, что долго такое развитие продолжаться не может: например, к концу этого века расходы на науку должны были бы превысить стоимость всего валового продукта общества. Однако на самом деле неустранимые трудности возникнут, конечно, раньше — приблизительно в 1980-е годы (как тут не вспомнить Амальрика!). Значит, это направление развития обречено, вопрос только, сможет ли наука свернуть на другой путь, на котором открытие истины не требует ни миллионных армий ученых, ни миллиардных затрат, путь, по которому шли и Архимед, и Галилей, и Мендель. В этом сейчас основная проблема науки, вопрос ее жизни и смерти. Кто как белка уже завертелся в этом колесе, вряд ли поможет ее решить, надежда может быть как раз на тех, кто этой инерции не поддался.

Цель математики [7]

Математика растет стремительно и непрерывно, не зная типичных для физики перестроек и кризисов, обогащая нас все новыми идеями и конкретными фактами <. . .> Какова же ценность неограниченного накопления идей, в принципе одинаково глубоких? Не превращается ли математика в поразительно красивый вариант «дурной бесконечности» Гегеля? <. . .> Можно сказать, что развитие математики не похоже на рост живого организма, который сохраняет свою форму, сам определяя свои границы. Оно больше напоминает рост кристалла или диффузию газа, которые могут распространяться неограниченно, пока не встретятся с внешним препятствием. Очевидно, что такое развитие науки противоречит ощущению осмысленности и красоты, которое непреодолимо возникает при соприкосновении с математикой, — подобно тому как невозможна бесконечно продолжающаяся прекрасная симфония. Но только ли в нашей науке встает эта проблема?

Я не думаю, что математика радикально отличается от других форм культурной деятельности. Однако ее объекты более абстрактны, в ней происходит отвлечение от большего числа случайных свойств. Как говорил Платон, в ней больше от познания чистого бытия и меньше — от мнений о предметах видимого мира, в ней «как бы грезят о сущем». Поэтому в математике ясно различимы закономерности, хотя и универсальные, но лишь смутно видимые в других областях. В частности, то отсутствие целей и формы, о котором мы говорили выше, относится, как мне кажется, почти ко всей жизни современного человечества <...>

Бесформенная, лишенная иной цели и смысла, кроме неограниченного расширения, лихорадочная деятельность уже несколько веков как захватила человечество. Она получила название «прогресса» и на некоторое время стала чем-то вроде суррогата религии. Ее последним порождением является современное индустриальное общество. Уже много раз указывалось на то, что эта гонка содержит в себе внутреннее противоречие, приводит к катастрофическим материальным последствиям: все возрастающему, непосильному для человека темпу изменений жизни, перенаселенности, уничтожению окружающей среды. На примере математики я хочу обратить внимание на не менее разрушительные духовные последствия: человеческая деятельность лишается глобальной цели, становится бессмысленной.

Опасность здесь не только отрицательная, она заключается не только в том, что напряженные усилия человечества, жизнь его наиболее талантливых представителей не освещается пониманием их смысла. Она не исчерпывается и тем, что, не понимая цели своих действий, мы не можем предвидеть и их результатов. Духовная конституция человечества не позволяет ему долго мириться с деятельностью, цель и смысл которой ему не даны. И здесь, как и во многих других явлениях, вступает в силу механизм замещения — не найдя того, что им необходимо, люди не успокаиваются на этом, но прибегают к суррогатам <...> В частности, математик ищет смысл своей работы в выполнении заказа государства, которому он готов рассчитать траекторию ракеты или подслушивающий аппарат, а если это ученый крупного масштаба — то спланировать и целое общество, состоящее из гибридов людей и компьютеров. Такая установка уродует не одни только души ученых, — появляются области математики, лишенные той божественной красоты, которая зачаровывает всех, знакомых с нашей наукой. Более чем двухтысячелетняя история убеждает нас в том, что математика, по-видимому, не способна сама сформулировать ту конечную цель, которой может направляться ее развитие. Она должна, следовательно, заимствовать ее извне.

Разумеется, я далек от того, чтобы пытаться указать решение этой глубокой, не только внутриматематической, но и общечеловеческой проблемы. Я хочу лишь указать на основные направления, в которых возможен поиск решения. По-видимому, таких направлений есть два. Во-первых, можно пытаться извлечь цель математики из ее практических приложений. Но трудно поверить, что более высокая — духовная деятельность найдет свое оправдание в более низкой — материальной <...>

Если мы, таким образом, отбросим этот путь, то останется, как мне кажется только одна возможность: цель математике может дать не низшая сравнительно с нею, а высшая сфера человеческой деятельности — религия. Конечно, сейчас очень трудно представить себе, как это может произойти. Но еще труднее вообразить, как математика сможет вечно развиваться, не зная, ни что, ни зачем она изучает. Да уже в следующем поколении она погибнет, захлестнутая потоком публикаций! А ведь это еще самая элементарная, внешняя причина.

С другой стороны, в принципе такое решение возможно — это доказано историей. Обратившись опять к той эпохе, когда математика только возникла, мы увидим, что тогда она знала свою цель и получила она ее именно на этом пути. Математика сложилась как наука в VI в. до Р. Х. в религиозном союзе пифагорейцев и была частью их религии. Она имела ясную цель — это был путь слияния с божеством через постижение гармонии мира, выраженной в гармонии чисел. Именно эта высокая цель дала тогда силы, необходимые для научного подвига, которому принципиально не может быть равного: не открытия прекрасной теоремы, не создания нового раздела математики, но создания самой математики. Тогда, почти в самый момент ее рождения, уже обнаружились те свойства математики, благодаря которым в ней яснее чем где-либо проявляются общечеловеческие тенденции. Именно поэтому тогда математика послужила моделью, на которой были выработаны основные принципы дедуктивной науки. Кончая, я хочу выразить надежду, что по той же причине она теперь может послужить моделью для решения основной проблемы нашей эпохи:

ОБРЕСТИ ВЫСШУЮ РЕЛИГИОЗНУЮ ЦЕЛЬ И СМЫСЛ КУЛЬТУРНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЧЕЛОВЕЧЕСТВА.

Эстетическое чувство [8]

Процесс сращивания науки и техники проявляется не только во влиянии науки на технику, но и в обратном направлении. В науке используются все более мощные и дорогие технические средства: грандиозные ускорители, даже не помещающиеся на территории одной страны, мощные компьютеры. На науку приходится тратить заметную часть бюджета государства — сопоставимую с затратами на армию. Эти средства надо планомерно распределять, то есть наука становится администрируемой. Успех в ней зависит от доступа к ее техническому оснащению, который находится в руках администраторов. Уменьшается роль индивидуального таланта, озарения и увеличивается роль финансирования и организации. Это меняет характер самой науки. Как не сопоставить весь этот кризис с «проклятьем Прометея», предсказавшего богу нового мышления, подчиняющего Космос диктату законов, что его власть у него отнимет не кто иной как он «сам у себя, замыслив безрассудное».

Конечно, древнегреческие мыслители не могли конкретно предвидеть экологический кризис и другие последствия технического прогресса и всеобъемлющего применения естественно-научной идеологии. Но они, вероятно, чувствовали, что некоторые концепции, возникавшие тогда в естествознании (философии) по необходимости вырывают человека из природы и противопоставляют его ей. Призыв «победить природу», т. е. воспринять себя как ее врага, показался бы им просто кощунственным. Такова, возможно, была мотивировка «аристотелевского тормоза», замедлившего развитие естествознания на 2000 лет.

И все же сердце физика-математика вряд ли может принять взгляд на развитие, например, физики начиная с XVI в. (Коперник!) как на вредоносную ошибку <...> Причина в том, что все строение «математизированной» физики поразительно красиво. В нем, как в зеркале, отражаются красивейшие разделы математики (симплектическая геометрия, теория комплексных аналитических многообразий, алгебраическая геометрия). Такой аргумент может показаться «ненаучным», он апеллирует к чувствам. Но как раз в XX веке человечество совершило самые трагические ошибки, следуя общим концепциям (расовым или классовым) и заглушая наивные непосредственные чувства: жалости и отвращения к насилию. Видимо, непосредственные субъективные чувства являются гораздо более надежным руководителем в жизни. В том числе, эстетическое чувство.

3. Пятьдесят лет спустя

Большинство цитированных выше работ И. Р. написано полвека назад. Хотя этот срок ничтожен с точки зрения исторических процессов, можно говорить о некоторой «экспериментальной проверке» высказанных им мыслей. Так, вспоминая о *двух направлениях* возможного развития математики — пути практических приложений и пути поиска высшей цели — можно утверждать, что в подавляющем большинстве своем человечество выбрало первый путь, и несмотря на отдельные поразительно красивые научные достижения, в целом этот выбор ведет в пустоту. На этом пути невозможно не только обрести высшую цель и смысл культурной деятельности человечества, но и «фаустовский дух» постепенно испаряется.

Научная деятельность становится похожей на коммерческий проект, вместо поисков истины ученый начинает жить «сладко-тревожной жизнью коммерсанта», постепенно вытесняющей всякое эстетическое чувство. Об этом ярко написал А. Н. Паршин [6]:

> Последние годы, участвуя в борьбе против действий властных структур по отношению к науке в нашей стране, я осознал силу чиновничества, и у нас, и за рубежом, и лежащую в основе этой силы идеологию < . . . > Огромный социум умных и энергичных людей оказался абсолютно беспомощен в имеющейся ситуации: лилипуты побеждают Гулливера.

Современный ученый, если только это не редкий «чудак-отшельник» вроде Гротендика или Перельмана, с молодых лет погружается в атмосферу, где место поиска истины занимает постоянная беготня, подготовка заявок на разные гранты, отчетов по ним, писание многочисленных статей для этих отчетов, действия, направленные на увеличение всяких наукометрических показателей (см. сборник [14]), необходимые не только для продвижения по иерархической лестнице, но и просто для выживания в научной среде. Все чаще и чаще возникает соблазн «рассматривать» умозрительные модели, уже не отражающие черты реально происходящих процессов, публиковать пустые или малосодержательные, повторяющиеся статьи, а то и сделать прямую подтасовку или халтуру, если это нужно для достижения главной цели — успеха в борьбе за гранты и привелегии. . .

О похожем явлении, только не в науке, а в литературе, откровеннона писал в своих дневниковых записях (1951 год) Ю. М. Нагибин:

> Стоит подумать, что бездарно, холодно, дрянно исписанные листки могут превратиться в чудесный кусок кожи на каучуке, так красиво облегающий ногу, или в кусок отличнейшей шерсти, в котором невольно начинаешь себя уважать, или в какую-нибудь другую вещь <. . .> тогда перестают быть противными измаранные чернилами листки, хочется марать много, много. И все-таки я уверен, что при халтуре отмирают какие-то нежнейшие и самые драгоценные клетки мозга. Устойчивые, когда мозг раскален настоящим святым усилием, они разом загнивают при решении одной из «каждодневных задач».

Процитированные в [5] слова: «наука превращается в гонку, миллионная толпа мчится, и никому не понятно куда» так и тянет дополнить ярким визуальным образом из другой цитаты: каждый «гонщик» несется на автомобиле «Чайка», с продетым в ноздрю кольцом и в расшитом мундире. . . Не это ли образ грядущего научного сообщества, да пожалуй, и всего «прогрессивного человечества»?

Можно только гадать, чем все это закончится, в какой именно форме произойдет крах нынешней цивилизации, и что придет ей на смену. Мучителен и вопрос, который каждый решает для себя индивидуально: в чем и до какой степени можно прогнуться под напором этой неумолимой стихии, какое кольцо позволить себе продеть. Вряд ли здесь могут быть конкретные ответы, но для меня образцовым символом сопротивления всегда будет Игорь Ростиславович, которого я никогда не смогу представить себе ни в расшитом мундире, ни с продетым в ноздрю кольцом.

Литература

[1] *Шафаревич И.Р., Ремизов А.О.* Линейная алгебра и геометрия. - М: Физматлит, 2009.

[2] *Амальрик А.А.* Просуществует ли Советский Союз до 1984 года? - М.: 1969.

[3] *Сахаров А.Д.* Размышления о прогрессе, мирном сосуществовании и интеллектуальной свободе. - М.: 1968.

[4] *Солженицын А.И.* На возврате дыхания и сознания. В сборнике «Из-под глыб». - М.: 1974.

[5] *Шафаревич И.Р.* Есть ли у России будущее? В сборнике «Из-под глыб». - М.: 1974. Полн. собр. соч., т. II (180–197). - М: 2014.

[6] *Паршин А.Н.* Судьба науки // Вопросы философии. - 9 (2019). - С. 98-107.

[7] *Шафаревич И.Р.* О некоторых тенденциях развития математики (1973). Полн. собр. соч., т. V (257-264). - М.: 2014.

[8] *Шафаревич И.Р.* Из истории естественно-научного мировоззрения // Матем. образование. - № 1 (12). - 2000. - С. 37-58.

[9] *Шафаревич И.Р.* Будущее России (2005). Полн. собр. соч., т. V (339-395). - М.: 2014.

[10] *Шафаревич И.Р.* Россия и мировая катастрофа. Полн. собр. соч., т. II (55-158). - М.: 2014.

[11] *Шафаревич И.Р.* Две дороги — к одному обрыву. Полн. собр. соч., т. II (3-54). - М.: 2014.

[12] *Шафаревич И.Р.* Духовные основы российского кризиса. Полн. собр. соч., т. IV (3-86). - М.: 2014.

[13] *Шафаревич И.Р.* Математическое мышление и природа (1993). Полн. собр. соч., т. VI (380-389). - М.: 2014.

[14] Игра в цыфирь, или как теперь оценивают труд ученого. - М.: МЦНМО, 2011.

Ремизов Алексей Олегович,
доцент Кафедры высшей математики
Московского физико-технического института,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: alexey-remizov@yandex.ru

Новый взгляд на старую задачу

М. А. Горелов

В статье речь пойдет о следствиях одного простого утверждения. Это утверждение неоднократно встречалось в сборниках задач. Суть его состоит в получении верхней оценки числа решений тригонометрического уравнения. Обычно эта задача появляется в конце раздела, как бы подводя итог изучению темы. Оказывается, ее результат может быть началом достаточно содержательной теории.

Введение

Относительно недавно важные результаты были получены с помощью комплекса идей, получившего название теории малочленов [1]. Грубо говоря, основной пафос этой теории состоит в том, что если уравнение задается простой формулой (содержит мало членов), то оно не может иметь много корней.

По большому счету, теория малочленов не является новой. Значительное число утверждений такого рода собрано, например, в задачнике [2]. А восходят они по своей сути ко временам Декарта (1596–1650) и Ролля (1652–1719). Но в книге [2] собраны, в основном, довольно сложные задачи. Далее пойдет речь о задачах из школьного и олимпиадного круга.

Теория малочленов многовариантна: можно рассматривать разные классы функций и по-разному определять их сложность. Соответственно, будут получаться разные следствия. В [3] рассматривается класс квазимногочленов, т.е. функций, являющихся суммой нескольких экспонент. В статьях [4, 5, 6] рассмотрен класс обычных многочленов и по-разному определяется их сложность.

Ниже пойдет речь о классе тригонометрических функций. При этом используется самое простое утверждение, оценивающее число решений уравнения через его сложность. Эта тема далеко не исчерпана в данной статье. Ее определенно можно развивать в разных направлениях, и рассматривая более сложные тригонометрические функции, и меняя рассматриваемый класс функций. Все это может служить основой для исследовательской работы школьников.

Основная лемма

Представим себе настенные часы с секундной стрелкой. Нетрудно заметить, что секундная стрелка становится вертикальной ровно один раз в полминуты.

Математически означает, что если функция $a\cos(x+\alpha)$ обращается в ноль при $x = x_1$ и $x = x_2$, то разность $x_1 - x_2$ равна πk, где k – целое число (здесь α – угол, на который была повернута секундная стрелка в начальный момент времени, а x – угол, на который поворачивается стрелка за время t). Действительно, стрелка становится вертикальной, когда абсцисса вектора с началом в центре циферблата и концом на острие секундной стрелки равна нулю. А абсцисса вектора — это косинус угла, образуемого им с горизонтальным направлением.

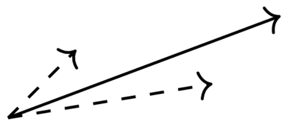


Рис. 1.

Теперь представим себе, что мы видим "дизайнерские" часы, секундная стрелка которых выглядит так, как показано на рисунке 1 (это жесткая конструкция, вращающаяся как единое целое). Если в начальный момент времени «сполошной» вектор равен сумме двух "пунктирных", то это будет верно и в любой другой момент времени. Но абсцисса суммы векторов равна сумме абсцисс слагаемых. Таким образом, если функция $b_1 \cos(x + \alpha_1) + b_2 \cos(x + \alpha_2)$ обращается в ноль в двух точках x_1 и x_2, то разность $x_1 - x_2$ кратна π. Единственное исключение — случай, когда сумма «пунктирных» векторов равна нулевому вектору. Тогда абсцисса суммы равна нулю тождественно.

Разумеется, все сказанное верно и в случае, когда складываются не два, а большее число векторов. Таким образом, приходим к простому, но важному выводу.

Основная лемма. *Если функция*

$$f(x) = b_1 \cos(x + \alpha_1) + b_2 \cos(x + \alpha_2) + ... + b_n \cos(x + \alpha_n) \tag{1}$$

обращается в ноль при двух значениях переменной x, разность которых не кратна π, то эта функция тождественно равна нулю.

Это утверждение в качестве задачи неоднократно появлялось в различных книгах, например, [7, 8]. В [7] приводится довольно сложное решение, использующее, в частности, формулу косинуса суммы[1]. Приведенное доказательство существенно проще. В нем мы использовали лишь определение косинуса и простейшие свойства векторов.

Можно дать геометрическую интерпретацию утверждению леммы. Начнем с аналогии. Согласно аксиоме Евклида, если две прямые имеют две различные общие точки, то они совпадают. Из основной леммы легко следует, что если графики функций вида (1) имеют две существенно различные общие точки, то они совпадают. Существенно различными в данном случае нужно считать такие точки, абсциссы которых отличаются на число, не кратное π. Если все коэффициенты b_i равны нулю, то график функции (1) совпадает с осью абсцисс. Это в точности дает утверждение леммы.

Основная часть статьи посвящена приложениям этой леммы. А при решении следующих упражнений удобно использовать идею, которая применялась при доказательстве леммы.

Упражнения 1. Докажите, тождества

а) $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$,

б) $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

2. (Киевская олимпиада, 1976 г.) Известно, что $\sin x + \sin y + \sin z = 0$, $\cos x + \cos y + \cos z = 0$. Докажите, что тогда $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0$ и $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$.

3. (Киевская олимпиада, 1938 г.) Решите уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

Указание. Справа – абсцисса некоторого вектора, а слева ордината того же вектора, повернутого на угол x.

4. (Всероссийская олимпиада, окружной этап, 1995 г.) Для углов α, β, γ справедливо неравенство $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geqq 2$. Докажите, что

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \sqrt{5}.$$

[1]Как будет показано ниже, эту формулу можно получить как следствие доказанной леммы.

5. (Всероссийская олимпиада, окружной этап, 2003 г.) Найдите все углы α, для которых набор чисел $\sin\alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha$ совпадает с набором $\cos\alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha$.

Указание. Определите направление суммы трех векторов.

Тригонометрические тождества

В дальнейшем будут использоваться чуть более сложные свойства векторов, впрочем, тоже прекрасно знакомые. Напомним их.

По определению $\cos x$ — это абсцисса единичного вектора, образующего угол x с положительным направлением оси абсцисс. А $\sin x$ — ордината того же вектора.

Поскольку вектор единичный, справедливо тождество

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1. \tag{2}$$

Так как векторы, образующие с осью абсцисс углы x и $x + 2\pi k$ геометрически совпадают, если k — целое число, имеем

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x. \tag{3}$$

При повороте на угол $\frac{\pi}{2}$ вектор, образующий с положительным направлением оси абсцисс угол x, переходит в угол, образующий с осью абсцисс угол $x + \frac{\pi}{2}$, а ось абсцисс переходит в ось ординат, поэтому

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x. \tag{4}$$

Аналогично могут быть установлены другие простые формулы.

Теперь можно применять полученный результат.

Начнем с формулы

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \tag{5}$$

С помощью формулы (4) это тождество можно переписать в виде

$$\cos(x + y) - \cos x \cos y - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sin y = 0.$$

Будем считать y параметром, а x — переменной. Тогда к функции, стоящей в левой части последней формулы применима основная лемма. Поэтому для доказательства тождества (5) достаточно проверить его для двух значений переменной x, разность которых не кратна π.

При $x = 0$ равенство (5) очевидно. При $x = \frac{\pi}{2}$ получится тождество (4). Задача решена!

При таком способе доказательства нетрудно понять, как можно было бы придумать тождество (5) или вспомнить его, если вдруг забыли. В самом деле, в силу основной леммы достаточно найти такие коэффициенты $b_1, b_2, \alpha_1, \alpha_2$ (зависящие от y), чтобы функция $b_1\cos(x + \alpha_1) + b_2\cos(x + \alpha_2)$ равнялась $\cos(x + y)$ при двух значениях x, разность которых не кратна π. Выбор $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ и тех же значений для переменной x выглядит достаточно естественно. А тогда коэффициенты b_1 и b_2 находятся легко.

Полагая в формуле (5) $y = x$, получим $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ или с учетом формулы (2)

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1. \tag{6}$$

Аналогично доказывается тождество

$$2\cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y). \tag{7}$$

Функция $f(x) = 2\cos x \cos y - \cos(x + y) - \cos(x - y)$ (здесь y — параметр) обращается в ноль при $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$. Поэтому в силу основной леммы она тождественно равна нулю.

Справедливость формулы (4) и ее аналогов позволяют применять основную лемму к функциям, которые кроме слагаемых вида $b_i\cos(x+\alpha_i)$ содержат слагаемые вида $b_i\sin(x+\alpha_i), b_i\cos(\alpha_i-x)$ и $b_i\sin(\alpha_i-x)$. Действительно, $b_i\sin(x+\alpha_i)=-b_i\cos\left(x+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_i\right)\right)=b_i{}'\cos(x+\alpha_i{}')$ где $b_i{}'=-b_i$ и $\alpha_i{}'=\frac{\pi}{2}+\alpha_i$, а $b_i\cos(\alpha_i-x)=b_i\cos(x-\alpha_i)=b_i{}'\cos(x+\alpha_i{}')$ при $\alpha_i{}'=-\alpha_i$. Для других вариантов рассуждения аналогичны.

Докажем для примера тождество

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Для того, чтобы воспользоваться леммой, удобно ввести переменные $x=\frac{\alpha+\beta}{2}, y=\frac{\alpha-\beta}{2}$. Тогда доказываемое тождество запишется в виде $\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$. Дальше можно рассуждать, как при доказательстве тождества (7).

Упражнения

6. Докажите тождество $\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y+\mathrm{tg}z-\frac{\sin(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z}=\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y\mathrm{tg}z$.

7. Докажите тождества

а) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(-\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma)-\sin(\alpha+\beta-\gamma)=$
$=4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$;

б) $\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(-\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

8. Упростите выражение

$$\cos x\sin y\sin z+\cos y\sin x\sin z+\cos z\sin x\sin y-\cos x\cos y\cos z.$$

Указание. Рассмотрите значения $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$.

9. (Ленинградская олимпиада, 1981 г.) Числа a,b,c лежат на отрезке $[0,1]$. Докажите неравенство

$$\sqrt{a(1-b)(1-c)}+\sqrt{b(1-a)(1-c)}+\sqrt{c(1-a)(1-b)}\le 1+\sqrt{abc}.$$

10. Докажите, что

$$\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\cos(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)+\cos(\gamma+\delta)\sin(\gamma-\delta)+\cos(\delta+\alpha)\sin(\delta-\alpha)=0.$$

Теорема Птолемея

Эта математическая теорема появилась в книге по астрономии — трактате Клавдия Птолемея (II век н.э.) “Альмагест”. В известном смысле эта теорема обобщает формулы предыдущего раздела. Собственно, как замена этих формул теорема Птолемея и использовалась в древности в астрономических вычислениях.

Эта классическая теорема гласит: если a,b,c и d – последовательные стороны вписанного четырехугольника, а e и f – его диагонали (см. рис. 2), то $ac+bd=ef$.

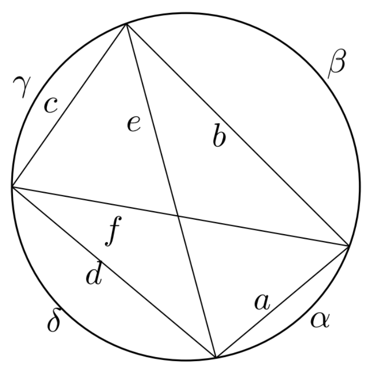


Рис. 2.

Доказать ее можно практически теми же рассуждениями, какими доказывались формулы в предыдущем разделе.

Не ограничивая общности, можно считать, что радиус описаннной окружности равен 1. Пусть α, β, γ и δ — величины дуг, стягивающих стороны a, b, c и d соответственно. Тогда имеем $a = 2\sin\frac{\alpha}{2}, b = 2\sin\frac{\beta}{2}$, $c = 2\sin\frac{\gamma}{2}, d = 2\sin\frac{\delta}{2}$, и доказываемая формула после сокращения на 4 примет вид

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Поскольку $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$, последнюю формулу можно переписать в виде

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{2\pi-\alpha-\beta-\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = 0.$$

Если считать α и β параметрами, то в левой части этой формулы стоит функция переменной γ, которая легко приводится к виду, позволяющему применить основную лемму. Поэтому данную формулу, а значит, и теорему Птолемея достаточно проверить для двух значений переменной γ, разность которых не кратна π.

При $\gamma = 0$ имеем $c = 0$, $d = e$ а $f = b$ и равенство очевидно. При $\gamma = 2\pi - \alpha - \beta$ будет $c = e, d = 0$ и $f = a$ и равенство Птолемея вновь верно. Таким образом, теорема Птолемея доказана для случая, когда $\alpha + \beta \neq \pi$, то есть диагональ e не проходит через центр описанной окружности четырехугольника. Если $\alpha + \beta = \pi$, но $\beta + \gamma \neq \pi$, то теорема может быть доказана аналогичным образом (проверьте). Остается нерассмотренным случай $\alpha + \beta = \pi$ и $\beta + \gamma = \pi$. В этом случае обе диагонали четырехугольника проходят через центр описанной окружности. Значит, мы имеем дело с прямоугольником и теорема Птолемея сводится к теореме Пифагора, или, что то же самое, к формуле (2). (Искушенный читатель мог бы воспользоваться соображениями непрерывности для рассмотрения "исключительных" случаев.)

Упражнения

11. Докажите, что если функция

$$f(x) = b_1\cos(x+\alpha_1) + b_2\cos(x+\alpha_2) + ... + b_n\cos(x+\alpha_n) + c$$

равна нулю при $x = 0, x = \pi$ и еще при одном x, не кратном π, то она тождественно равна нулю.

12. Четырехугольник $ABCD$ — вписанный. Докажите, что

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}.$$

Указание. Перепишите равенство в виде $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\delta)} = \frac{\sin\alpha\sin\delta+\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta+\sin\delta\sin\gamma}$.

13. Постройте правильный пятиугольник с помощью циркуля и линейки.

Указание. Сначала найдите отношение диагонали пятиугольника к его стороне.

14. (С. Карно) Пусть ABC — остроугольный треугольник, R и r — радиусы его описанной и вписанной окружностей, d_a, d_b, d_c — расстояния от центра O описанной окружности до сторон $a = BC, b = AC и c = AB$ соответственно. Докажите, что $d_a + d_b + d_c = R + r$.

15. (П. Эрдеш) Пусть h — длина наибольшей высоты остроугольного треугольника, r и R — радиусы его вписанной и описанной окружностей. Докажите, что $h \geq R + r$.

Обобщенная теорема Помпею

Если в утверждении теоремы Птолемея положить $a = b = e$ (то есть считать, что «половинка» рассматриваемого четырехугольника является правильным треугольником), то равенство Птолемея после очевидного сокращения примет вид $f = c + d$. По не совсем понятным причинам это очевидное следствие теоремы Птолемея получило имя собственное. Оно называется теоремой Помпею в честь румынского математика Димитрие Помпею, опубликовавшего его в 1936 г.

В 1970 г. доказательство этого утверждения предлагалось в качестве задачи в “Задачнике “Кванта” (задача М18 а)). Решение, опубликованное в 12 номере за тот же год, сопровождалось таким комментарием: “А. Браверман прислала нам интересное доказательство (с помощью теоремы Птолемея) следующего обобщения задачи а): пусть M – точка на дуге A_1A_{2n+1} окружности, описанной около правильного $(2n+1)$-угольника $A_1A_2A_3\dots A_{2n}A_{2n+1}$; тогда

$$MA_1 + MA_3 + \dots + MA_{2n+1} = MA_2 + MA_4 + \dots + MA_{2n}\text{”}.$$

Очевидно, теорема Помпею является частным случаем этого утверждения, соответствующим $n = 1$.

Доказательство этого утверждения с помощью теоремы Птолемея довольно трудоемко. Недавно этому утверждению была посвящена отдельная статья [9]. Там доказательство тоже занимает несколько страниц. С помощью основной леммы утверждение доказывается совсем просто.

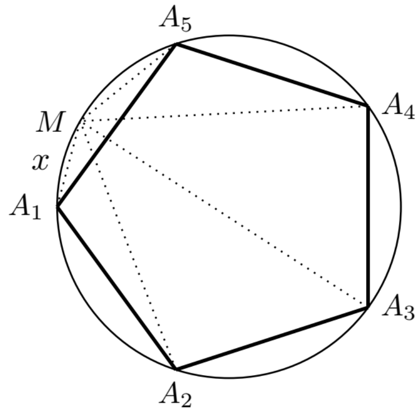


Рис. 3.

Будем характеризовать положение точки M на дуге A_1A_{2n+1} величиной x дуги MA_1 (см. рис. 3). Тогда $MA_1 = 2\sin\frac{x}{2}, MA_2 = 2\sin\frac{x+\eta}{2}, \dots,\ MA_{2n+1} = 2\sin\frac{x+2n\eta}{2}$, где $\eta = \frac{2\pi}{2n+1}$. Поэтому для доказательства можно применить основную лемму. Следовательно, равенство достаточно доказать для «крайних» случаев. При $x = 0$ получим $MA_1 = 0$ и в силу симметрии $MA_2 = MA_{2n+1}, MA_3 = = MA_{2n}, \dots, MA_{n+1} = MA_{n+2}$ и доказываемое равенство очевидно. При $x = \eta$ имеем $MA_1 = MA_{2n}$, $MA_2 = MA_{2n-1}, \dots, MA_n = MA_{n+1}, MA_{2n+1} = 0$ и все так же просто.

Упражнения

16. Докажите, что при целом $n > 1$

$$\sin x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(x + 2\frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(x + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right) = 0.$$

17. (Киевская олимпиада, 1936 г.) Докажите, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha) = \sin^2\alpha + \sin^2(120^\circ + \alpha) + \sin^2(120^\circ - \alpha) = \frac{3}{2}.$$

18. (М18 б)) Три равные окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ попарно касаются друг друга и вокруг них описана окружность Ω, которая касается всех трех ω_1, ω_2 и ω_3. Докажите, что для любой точки M

окружности Ω касательная, проведенная из точки M к одной из трех окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ равна сумме касательных, проведенных из точки M к двум другим окружностям.

19. Правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ вписан в окружность радиуса R; M — точка этой окружности. Докажите, что

$$A_1M^4 + A_2M^4 + ... + A_nM^4 = 6nR^4.$$

20. Расстояние от точки M до центра правильного n-угольника равно d, r — радиус вписанной окружности n-угольника. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки M до прямых, содержащих стороны n-угольника, равна $n\left(r^2 + \frac{d^2}{2}\right)$.

Теорема Гаусса

Пусть даны треугольник ABC и точка D в его плоскости. Тогда расстояния AD, BD и CD не могут быть независимыми: если расстояния AD и BD заданы, то расстояние CD может принимать не более двух значений в зависимости от того, лежат ли точки C и D по одну сторону от прямой AB, или по разные. Встает вопрос: можно ли выписать эту зависимость явно? Ответ на него дает теорема Гаусса. Сформулировать ее можно следующим образом.

Пусть точки A, B, C и D лежат в одной плоскости. Обозначим $u = AD^2, v = BD^2, w = CD^2$, $U = BD^2 + CD^2 - BC^2$, $V = AD^2 + +CD^2 - AC^2, W = AD^2 + BD^2 - AB^2$. Тогда справедливо равенство $uU^2 + vV^2 + wW^2 = UVW + 4uvw$.

Вид переменных U, V и W наводит на мысль об использовании теоремы косинусов. Если величина угла ADB равна α, а величина угла BDC равна β, то величина угла ADC равна[2] $\alpha + \beta$ и $U = 2BD \cdot CD\cos\beta$, $V = AD \cdot CD\cos(\alpha+\beta), W = AD \cdot BD\cos\alpha$. Поэтому после очевидного сокращения доказываемая формула принимает вид

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) + 1. \tag{8}$$

Воспользовавшись формулами (6) и (7) можно привести ее к виду[3]

$$\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1) + \cos^2\beta + \frac{1}{2}(\cos(2\alpha+2\beta)+1) = \cos(2\alpha+\beta)\cos\beta + \cos^2\beta + 1.$$

Если считать β параметром, а 2α — переменной, то к доказательству этого равенства можно применить основную лемму. Поэтому формулу (8) достаточно проверить для случаев $\alpha = 0$ и $\alpha = -\beta$. В обоих случаях получаем очевидные равенства.

Упражнения

21. Разберитесь самостоятельно со случаями $\beta = \frac{\pi}{2}$ и $\beta = \pi$.

22. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$$

Выведите отсюда теорему косинусов.

23. Пусть $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Докажите тождества

а) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

б) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

Получите отсюда формулу Герона для площади треугольника.

[2]В этой и других аналогичных задачах удобно считать углы ориентированными. Тогда сказанное верно и в том случае, когда луч DB лежит вне угла ADC.

[3]Если воспользоваться результатом упражнения 11, то эту выкладку явно можно и не проводить. Все необходимое можно сделать «в уме».

24. Докажите, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

25. Пусть α,β,γ – углы треугольника. Докажите, что

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=1.$$

26. Найдите алгебраическое соотношение между величинами α,β,γ, если $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma=\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma$.

Целующиеся окружности

Данная метафора принадлежит английскому химику Фредерику Содди (1877–1956), нобелевскому лауреату по химии. В 1936 г. он открыл следующий замечательный факт.

Если окружности ω,ω_1,ω_2 и ω_3 попарно касаются внешним образом (см. рис. 4), то их радиусы r,r_1,r_2 и r_3 связаны соотношением

$$2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}\right)=\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^2. \tag{9}$$

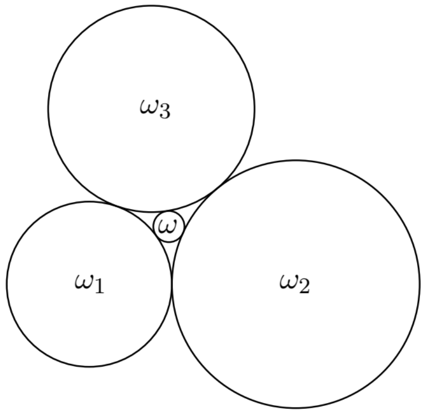


Рис. 4.

Нужно сказать, что Содди был не первым, кто открыл эту теорему.

Весьма вероятно, что нечто похожее было известно древнегреческому математику Аполлонию Пергскому (262–190 г. до н.э.), посвятившему похожим вопросам целую книгу "О касаниях", к сожалению, до нас не дошедшую.

В 1643 г. французский математик Рене Декарт (1596–1650) обсуждал этот вопрос в письме принцессе Елизавете Богемской (как видим, в те времена золотая молодежь интересовалась геометрией).

В XVII–XIX веках в Японии было принято отображать геометрические находки на красочных досках — сангаку — и вывешивать их на стенах храмов. Это было одновременно и данью божествам, и научными публикациями. Результат, эквивалентный формуле (9), появлялся на одной из таких досок.

Докажем формулу Содди. Воспользуемся полученной в предыдущем разделе формулой (8). Введем новую переменную $\gamma=\pi-\alpha-\beta$. Тогда $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, а формула (8) примет вид

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma. \tag{10}$$

Теперь можно приступать к доказательству равенства (9). Обозначим центры окружностей ω, ω_1, ω_2 и ω_3 через O, O_1, O_2 и O_3 соответственно. Пусть величины углов O_2OO_3, O_1OO_3 и O_1OO_2 равны $2\alpha, 2\beta$ и 2γ. Тогда $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Стороны треугольника O_1OO_2 равны $r+r_1, r+r_2$ и r_1+r_2. Поэтому по теореме косинусов будем иметь $\cos 2\gamma = \frac{r^2+(r_1+r_2)r-r_1r_2}{(r+r_1)(r+r_2)}$, или $\cos^2\gamma = \frac{r(r+r_1+r_2)}{(r+r_1)(r+r_2)}$ и $\sin^2\gamma = \frac{r_1r_2}{(r+r_1)(r+r_2)}$. Аналогично $\sin^2\alpha = \frac{r_1r_3}{(r+r_1)(r+r_3)}$ и $\sin^2\beta = \frac{r_2r_3}{(r+r_2)(r+r_3)}$.

Поэтому тождество (10) перепишется в виде

$$\frac{r_2r_3}{(r+r_2)(r+r_3)} + \frac{r_1r_3}{(r+r_1)(r+r_3)} - \frac{r_1r_2}{(r+r_1)(r+r_2)} = \frac{2r_3\sqrt{rr_1r_2(r+r_1+r_2)}}{(r+r_1)(r+r_2)(r+r_3)}.$$

Умножив это равенство на $\frac{(r+r_1)(r+r_2)(r+r_3)}{r_1r_2r_3}$, получим

$$\frac{r}{r_1} + \frac{r}{r_2} - \frac{r}{r_3} + 1 = 2\sqrt{\frac{r(r+r_1+r_2)}{r_1r_2}}.$$

А разделив последнее равенство на r, будем иметь

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} = 2\sqrt{\frac{1}{rr_1} + \frac{1}{rr_2} + \frac{1}{r_1r_2}}.$$

Возведем это равенство в квадрат. Получим

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{rr_1} + \frac{1}{rr_2} + \frac{1}{r_1r_2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^2 - 2\frac{1}{r_3}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \left(\frac{1}{r_3}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{rr_1} + \frac{1}{rr_2} + \frac{1}{r_1r_2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^2 + 2\frac{1}{r_3}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \left(\frac{1}{r_3}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{rr_1} + \frac{1}{rr_2} + \frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{rr_3} + \frac{1}{r_1r_3} + \frac{1}{r_2r_3}\right),$$

или

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{rr_1} + \frac{1}{rr_2} + \frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{rr_3} + \frac{1}{r_1r_3} + \frac{1}{r_2r_3}\right).$$

Остается воспользоваться известной (и несложно доказываемой) формулой квадрата суммы четырех чисел:

$$(a_1+a_2+a_3+a_4)^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+2(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4).$$

Упражнение

27. Пусть окружности ω_1, ω_2 и ω_3 радиусов r_1, r_2 и r_3 попарно касаются внешним образом, а окружность Ω радиуса R касается каждой из них внутренним образом. Докажите, что

$$2\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}\right) = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{R}\right)^2.$$

Теорема Морли

Рассмотрим тождество

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}. \tag{11}$$

Его можно рассматривать как обобщение тождества (8) (подумайте, почему?).

Для доказательства будем рассматривать разность левой и правой частей как функцию переменной α. Чтобы убедиться в применимости основной леммы, достаточно преобразовать произведение $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$ в сумму. Поэтому равенство (11) достаточно проверить при двух значениях переменной α. При $\alpha=-\beta$ и $\alpha=-\gamma$ это сделать совсем просто (с вырожденными случаями разберитесь самостоятельно).

Положив в формуле (11) $\beta=\alpha+\frac{2\pi}{3}$ и $\gamma=\alpha-\frac{2\pi}{3}$, получим

$$\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)-\sin 3\alpha=4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\alpha.$$

Сумма первых трех слагаемых в этой формуле равна нулю (это частный случай результат упражнения 16). Поэтому окончательно имеем следующий интересный аналог формулы синуса двойного угла:

$$\sin 3\alpha=4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right). \tag{12}$$

Теперь несложно доказать следующий красивый результат, носящий название теоремы Морли.

Если внутри произвольного треугольника ABC выбрать точки A_0, B_0 и C_0 так, что $\angle BAC_0=\angle C_0AB_0=\angle B_0AC$, $\angle ABC_0=\angle C_0BA_0=\angle A_0BC$ и $\angle BCA_0=\angle A_0CB_0=\angle B-0CA$, то треугольник $A_0B_0C_0$ будет правильным (см. рис. 5).

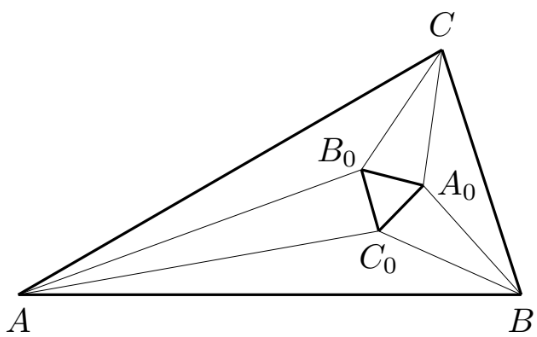


Рис. 5.

Докажем, что угол $A_0B_0C_0$ равен $\frac{\pi}{3}$. Для этого найдем углы $\varphi=A_0B_0C$, $\psi=AB_0C$ и $\theta=AB_0C_0$. Пусть углы треугольника ABC равны α,β и γ, а радиус описанной воле него окружности равен R.

Очевидно, $\psi=\pi-\frac{\alpha+\gamma}{3}$.

По теореме синусов для треугольника ABC имеем $AC=2R\sin\beta$. А по теореме синусов для треугольника AB_0C получим

$$B_0C=\frac{AC\sin\frac{\alpha}{3}}{\sin\left(\pi-\frac{\alpha+\gamma}{3}\right)}=\frac{2R\sin\beta\sin\frac{\alpha}{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\beta}{3}\right)}$$

или в силу формулы (12)

$$B_0C=2R\sin\frac{\alpha}{3}\sin\frac{\beta}{3}\sin\left(\frac{\beta}{3}+\frac{\pi}{3}\right).$$

Аналогично, $A_0C = 2R\sin\frac{\alpha}{3}\sin\frac{\beta}{3}\sin\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$.

Теперь по теореме синусов для треугольника A_0B_0C имеем

$$2R\sin\frac{\alpha}{3}\sin\frac{\beta}{3}\sin\left(\frac{\beta}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\sin\varphi = 2R\sin\frac{\alpha}{3}\sin\frac{\beta}{3}\sin\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\pi-\frac{\gamma}{3}-\varphi\right)$$

или $\sin\left(\frac{\beta}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\sin\varphi = \sin\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\pi-\frac{\gamma}{3}-\varphi\right)$.

При $\varphi = 0$ это равенство не верно. Тогда по основной лемме на интервале $[0,\pi)$ существует лишь одно значение φ, удовлетворяющее ему. Очевидно, это $\varphi = \frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}$.

Аналогично, $\theta = \frac{\gamma}{3}+\frac{\pi}{3}$, откуда $A_0B_0C_0 = \frac{\pi}{3}$. Так же устанавливается, что и два других угла треугольника $A_0B_0C_0$ равны $\frac{\pi}{3}$, что и доказывает теорему Морли.

Упражнения

28. Найдите стороны треугольника Морли $A_0B_0C_0$, зная радиус описанной окружности треугольника ABC и его углы.

29. Докажите, что трисектрисы внешних углов треугольника, прилегающие к его сторонам попарно пересекаются в трех точках, являющихся вершинами правильного треугольника.

30. Докажите тождества

а) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma) = 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$.

б) $\cos 3\alpha = 4\cos\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.

31. Докажите тождество $\mathrm{tg}3\alpha = \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.

Неравенства

Немного поменяем картинку. Представим себе, что стенные часы освещаются точно сверху. Тогда тень от конца секундной стрелки движется вдоль прямой, по которой пересекаются стена и пол комнаты. Пусть точка M лежит на этой прямой «под часами» и справа от центра циферблата. Тогда тень конца секундной стрелки будет проходить через точку M дважды в минуту, причем правее точки M эта тень будет находиться меньше, чем половина минуты. Отсюда немедленно приходим к следующему утверждению.

Лемма. *Пусть $c > 0$ и уравнение*

$$b_1\cos(x+\alpha_1)+b_2\cos(x+\alpha_2)+...+b_n\cos(x+\alpha_n) = c$$

имеет на интервале $(-\pi,\pi]$ два корня x_1 и x_2, причем $0 < x_2-x_1 < \pi$. Тогда при $x_1 < x < x_2$ выполняется неравенство

$$b_1\cos(x+\alpha_1)+b_2\cos(x+\alpha_2)+...+b_n\cos(x+\alpha_n) > c,$$

а для остальных значений x – противоположное неравенство.

Упражнение

32. Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для случаев $c < 0$ и $x_2 - x_1 > \pi$.

Доказанная лемма тоже может оказаться весьма полезной. Установим, например, следующий результат.

Пусть α,β и γ – углы треугольника. Тогда $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \le \frac{3}{2}$.

Пусть для определенности α — меньший угол треугольника, а γ — больший. Поскольку $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, будем иметь $\alpha \le \frac{\pi}{3}, \gamma \ge \frac{\pi}{3}$. Если $\alpha = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{\pi}{3}$, то и $\beta = \frac{\pi}{3}$ и доказываемое неравенство очевидно. Поэтому можно считать, что $\alpha < \frac{\pi}{3}, \gamma > \frac{\pi}{3}$ Пусть $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = c$.

Если $c < 0$, то доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $c > 0$.

Уравнение $\cos x + \cos\beta + \cos(\pi - \beta - x) = c$ имеет два корня: $x = \alpha$ и $x = \gamma$. Их разность, очевидно, меньше π, поэтому при $x \in (\alpha, \gamma)$ имеем $\cos x + \cos\beta + \cos(\pi - \beta - x) > c$ и, в частности,

$$\cos\frac{\pi}{3} + \cos\beta + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \beta\right) > c.$$

Пусть теперь $\cos\frac{\pi}{3} + \cos\beta + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \beta\right) = d$. Тогда уравнение

$$\cos\frac{\pi}{3} + \cos x + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = d$$

имеет корни $x = \beta$ и $x = \frac{2\pi}{3} - \beta$. Повторяя рассуждения предыдущего абзаца, придем к выводу $\frac{3}{2} \geq d$.

Итак, доказаны неравенства $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = c \leq d \leq \frac{3}{2}$, что и требуется.

Аналогично доказывается следующий результат.

Пусть α, β и γ – углы остроугольного треугольника. Тогда

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > 1.$$

Вновь будем считать, что α — меньший угол треугольника, а γ — больший. Пусть $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = c$. Поскольку треугольник остроугольный, $c > 0$. Уравнение $\cos x + \cos\beta + \cos(\pi - \beta - x) = c$ имеет два корня $x = \alpha$ и $x = \gamma$ и их разность, очевидно, меньше π, поэтому при $x < \alpha$, будет $\cos x + \cos\beta + \cos(\pi - \beta - x) < c$. В частности, при $x = 0$ получим $1 = \cos 0 + \cos\beta + \cos(\pi - \beta) < c$, что и требовалось доказать.

Данное направление представляется весьма перспективным. Во всяком случае, аналог использованной в данном разделе леммы для функций вида $f(x) = b_1 a_1^x + b_2 a_2^x + \ldots + b_n a_n^x$ позволил доказать огромное число неравенств (см., например, статью [3]). Ограничимся несколькими простыми утверждениями, оставляя дальнейшее читателю для самостоятельного исследования.

Упражнения

33. Пусть α, β и γ — углы остроугольного треугольника. Докажите неравенства $2 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 3\frac{\sqrt{3}}{2}$.

34. Пусть α, β и γ — углы треугольника. Докажите неравенства

$$2 < \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \leq 3\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

35. Пусть α, β и γ — углы треугольника. Докажите неравенство

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma \leq \frac{3}{4}.$$

36. Пусть α, β и γ — углы треугольника. Докажите неравенство

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \leq \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \gamma) + \sin(\beta + \gamma).$$

Указание. Преобразуйте суммы в левой и правой частях неравенства в произведения.

37. Пусть R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника. Докажите неравенство $R \geq 2r$.

Заключение

Формулу (5), например, проще доказать, если понимать ее не как равенство чисел, а как равенство функций, и пользоваться свойствами функций. Теорему Птолемея доказать проще, если «заставить двигаться» картинку на рисунке 2, перемещая одну из вершин четырехугольника. Чтобы получить навык такого «диалектического» мышления, нужно, конечно, потрудиться, но затраты труда наверняка окупятся.

К сожалению, современные школьники не очень хорошо владеют понятием функции. Надеюсь, данная статья хоть в какой-то степени позволит исправить такое положение дел.

Литература

[1] Хованский А.Г. Малочлены. - М.: Фазис, 1996. - 217 с.

[2] Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. II. - М.: Наука, 1978. - 431 с.

[3] Горелов М.А. Правило Декарта // Квант. - 2005. - № 3. - С. 40-43, 61-62.

[4] Горелов М.А. Неравенства и ... параллельный перенос // Квант. - 2009. - № 2. - С.41-45.

[5] Горелов М.А. О пользе графиков // Квант. - 2010. - № 3. - С. 44-47.

[6] Горелов М.А. Принцип симметрии в задачах оптимизации // Математическое просвещение. - Вып. 28. - М.: МЦНМО. - 2021. - С. 165-198.

[7] Лидский В.Б., Овсянников Л.В., Тулайков А.Н., Шабунин М.И. Задачи по элементарной математике. - М.: Наука, 1968. - 416 с.

[8] Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. - М.: МЦНМО, 2002. - 264 с.

[9] Бакаев Е. Обобщение теоремы Помпею // Квант. - 2017. - № 1. - С. 39-42.

Горелов Михаил Александрович,
ведущий научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: griefer62@gmail.com

Число Фидия как организующий фактор в сложных геометрических построениях

А. Н. Ковалев

Рассмотрены построения с треугольником Кеплера, параболой и эллипсами, где присутствие числа Фидия является фактором, организующим и согласующим части сложного построения в единое целое.

Введение

Хорошо известны основные плоские геометрические объекты, связанные с золотым сечением, алгебраически задаваемым числами Фидия (φ, Φ), — равнобедренные треугольники с углом при вершине в 36° и 108°, правильные пяти-, десятиугольники и пятиконечная звезда. Такая степень проявления числа Фидия в этих плоских фигурах связана с простыми тригонометрическими фактами:

$$2 \cdot \sin 18^\circ = \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ и } 2 \cdot \sin 54^\circ = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Несмотря на простоту этих формул, в умелых руках настоящего исследователя даже, казалось, примитивные плоские фигурки, построенные на их основании, вроде двух ромбов с равными сторонами и углами в 36° и 72° при вершине, могут привести к самым настоящим открытиям, вроде апериодических узоров Пенроуза, созданных до изучения квазикристаллов, основой описания структур которых они стали [13].

Поскольку $\sqrt{5}$ равно отношение диагонали прямоугольника 2:1 к меньшей стороне, то он, явно или неявно, присутствует во многих построениях золотого сечения. Самым простым из таких является квадрат, вписанный в полуокружность [2] (см. рис. 1). Точка C делит отрезок AB в золотом сечении. Это могло использоваться в древнем и средневековом мире при построении отрезка в Φ раз больше заданного. Но одновременно такая композиция могла применяться в архитектуре и без всякой связи с золотым сечением, что говорит о том, что сам факт обнаружения золотого сечения в архитектурных пропорциях еще не доказывает его использования в них.

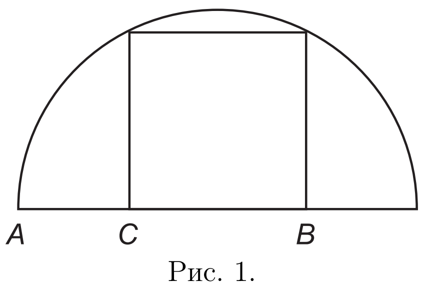


Рис. 1.

Правильные многоугольники и вписанный в полуокружность квадрат задали направление многих поисков — построения, где золотое сечение появляется автоматически. Так, ненамного более сложным является случай вписанного в окружность равностороннего треугольника (рис. 2) [12]. Продолжение средней линии треугольника (DE, $AD = DC$) до пересечения с окружностью (точка F) приводит к золотому сечению отрезка:

$$\frac{|DF|}{|DE|} = \frac{|DE|}{|EF|} = \Phi.$$

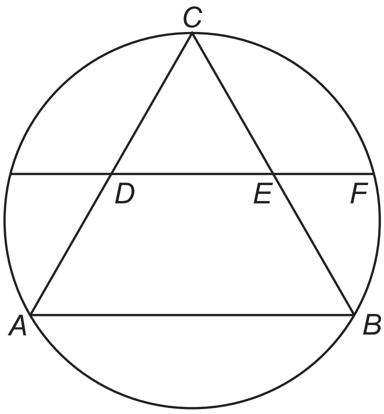


Рис. 2.

На рисунке 3 изображено построение, приводящее к появлению золотого сечения в пересечении двух пар концентрических окружностей, отношение диаметров которых равно двум [7]. Отношение длин отрезков AC и AB равно Φ.

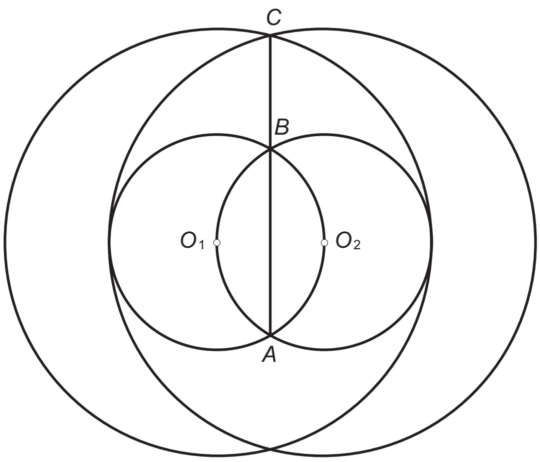


Рис. 3.

Это построение стартует с двух окружностей равных диаметров, с центрами, разнесенными на их радиус. Само по себе это начало оказалось продуктивным и привело к трем различным вариантам построения. Второй вариант, состоящий из трех равных по диаметру окружностей, приведен на рис. 4 [8]. *Отношение длин отрезков* O_1B *и* BO_2 *равно* Φ.

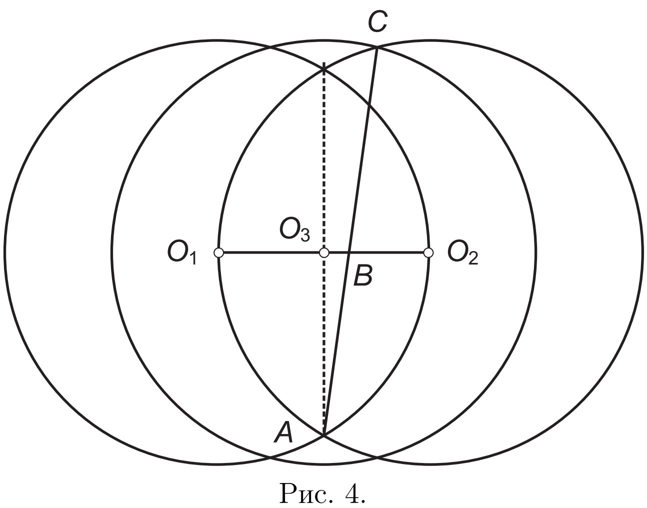


Рис. 4.

Более сложный случай с использованием таких начальных двух окружностей, предполагающий 5 шагов в построении, приведен в другой статье этого же автора [9]. Интересно отметить, что такие две окружности иногда встречаются в эзотерических трудах, претендующих на сакральность, под названием "Vesica Piscis" — "Пузырь Рыбы".

Золотое сечение появляется в построении из трех одинаковых по длине реек с отмеченной серединой. Для этого достаточно их расположить их, последовательно примкнув к серединам, расположив первую вертикально, как показано на рис. 5 [11]. Отношение длин отрезков AC и AB равно Φ.

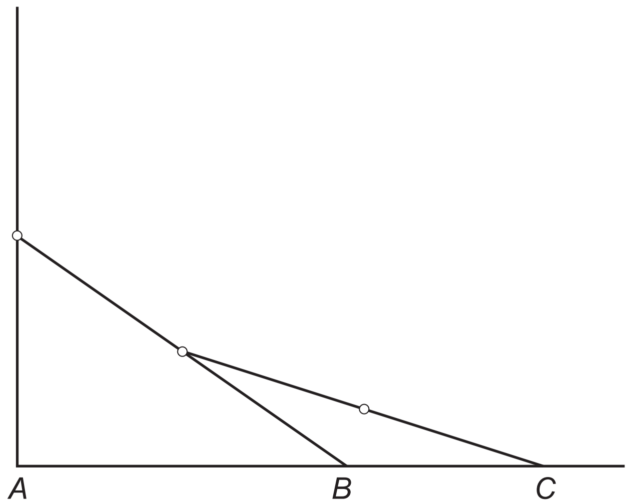


Рис. 5.

Подобные построения, хотя и являются своеобразным введением в тему проявления золотого сечения в геометрии, но мало что говорят как о свойствах объектов, обуславливающих появление числа Фидия, так и о роли золотого сечения в качестве организующего фактора, приводящего с особой согласованности и сопряженности частей геометрических построений. Все эти примеры, и даже более сложные, которые предлагают построение золотого сечения в определенных условиях [10], сосредоточены на определении способа построения золотого сечения. Хотя и есть исключения, но они достаточно редки, и исследуют уже достаточно сложные случаи, вроде свойств треугольников, построенных на центрах близнецов Архимеда в золотых арбелосах, выстроенных, в свою очередь, на сторонах произвольного треугольника [6]. Эти работы, ориентированные на специалистов по геометрии, конечно, не могут послужить материалом при рассмотрении в школе на факультативных занятиях особой организующей роли золотого сечения в некоторых геометрических построениях. Предлагаемая статья призвана отчасти восполнить этот пробел.

Треугольник Кеплера

Прямоугольный треугольник, у которого стороны образуют геометрическую прогрессию, называется треугольником Кеплера, первого описавшего его. Но, видимо, он был известен, как минимум, с первой половины III тысячелетия до н.э. Так пирамиды фараонов IV династии Снофру в Мейдуме и Хеопса в Гизе (XXVII – XXVI вв. до н.э.) имеют уклон, соответствующий этому треугольнику. Из $a/b = b/c = q$ и $a^2 + b^2 = c^2$ следует $q = \sqrt{\varphi}$, где $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Треугольник Кеплера обладает рядом примечательных свойств. Проведем в нем высоту CE, как показано на рисунке 6, и следом — высоту ED. Точки E и D делят AB и AC в золотом сечении соответственно, и треугольники CEB и ADE равны, в то время как в любом другом прямоугольном треугольнике они будут только подобны. Новосибирский математик Щетников предполагает, что именно это свойство подтолкнуло египтян выбрать этот треугольник при строительстве пирамиды Хуфу [5]. Расстояния от точки D до сторон AB и BC равны.

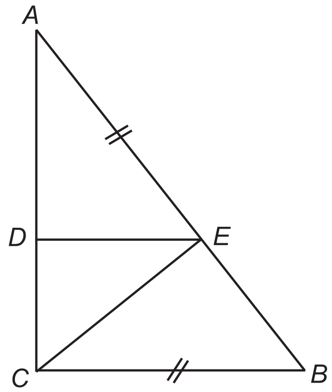


Рис. 6.

Известны два факта проявления экстремальных свойств в треугольниках, связанных с числом Фидия. Построим на треугольнике Кеплера равнобедренный треугольник, у которого отношение боковой стороны к половине основания равно Φ (см. рис. 7). Впишем в него окружность радиуса r (центр которой будет в точке D рисунка 6). У такого равнобедренного треугольника будет максимальным (среди всех других равнобедренных) отношение $r/|AB|$, равное $\varphi^{5/2}$ [1]. Если мы захотим создать правильную четырёхугольную пирамиду (или конус) с заданной длиной апофемы (образующей), такую, чтобы в нее можно было вписать сферу максимального радиуса, то это будет пирамида (конус), построенная на треугольнике Кеплера. Будет максимальным и отношение радиуса вписанной полуокружности с центром в C к полупериметру равнобедренного треугольника, также равное $\varphi^{5/2}$ [ibid].

Треугольник Кеплера может появиться в построении и спонтанно, если в нем неявно использовано свойство золотого сечения. Например, на катетах прямоугольного треугольника ABC, с отношением их длин 2:1, как на радиусах построим две окружности (α и β) и проведем ряд дополнительных отрезков (рис. 8). Окружности α и β ортогональны и точки их пересечения с отрезком AF (D и E) делят последний в золотом сечении. Отметим, что точки D и F являются симметричными относительно окружности α ($|AD||AF| = |AE|^2$). Для любых точек D и F, симметричных относительно окружности α, верны следующие утверждения [3]:

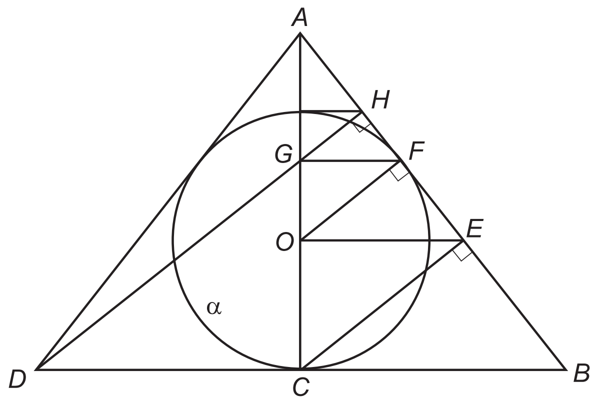


Рис. 7.

1. Для любой точки X окружности α угол AXD равен углу AFX;

2. Отношение расстояний от них до любой точки окружности α постоянно;

3. Если какая-либо окружность проходит через две симметричные точки, то она перпендикулярна окружности α.

Из-за симметричности точек D и F отношение расстояний от них до любой точки окружности α будет равно φ. В частности, в прямоугольном треугольнике DBF отношение катетов равно φ, отрезок FH касается окружности α (из утверждения 1), а прямоугольные треугольники DHF и AHF — Кеплера.

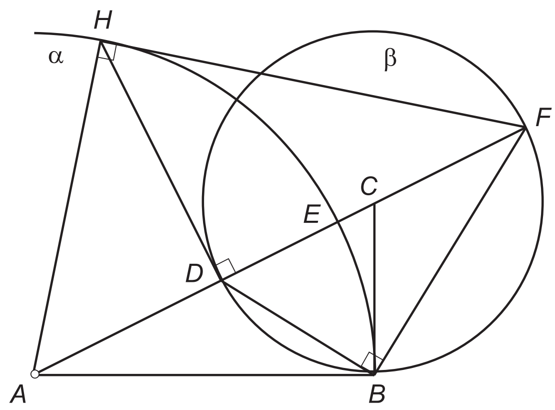


Рис. 8.

Дополнительные, геометрически оправданные, построения к треугольнику Кеплера часто приводят и к продолжению проявления золотого сечения, и к появлению особенностей, характерных только для этого треугольника. Например, рассмотрим вневписанные окружности (α, β и γ) к равнобедренному треугольнику, построенному на нем (рис. 9).

Свойства построения, верные для любого равнобедренного треугольника:

1. Вершины треугольника ABC лежат на отрезках O_1O_3, O_2O_3 и O_1O_2;

2. Радиусы боковых окружностей (β и γ) будут равны высоте треугольника;

3. Вершины B и C, точки O_2 и O_3 лежат на одной окружности δ с центром в вершине A треугольника;

4. Пересечение перпендикуляров, опущенных от центров вневписанных окружностей, например, O_1 и O_2, к продолжению сторон треугольника, пересекаются в точке F, равноудаленной от O, O_1 и O_3.

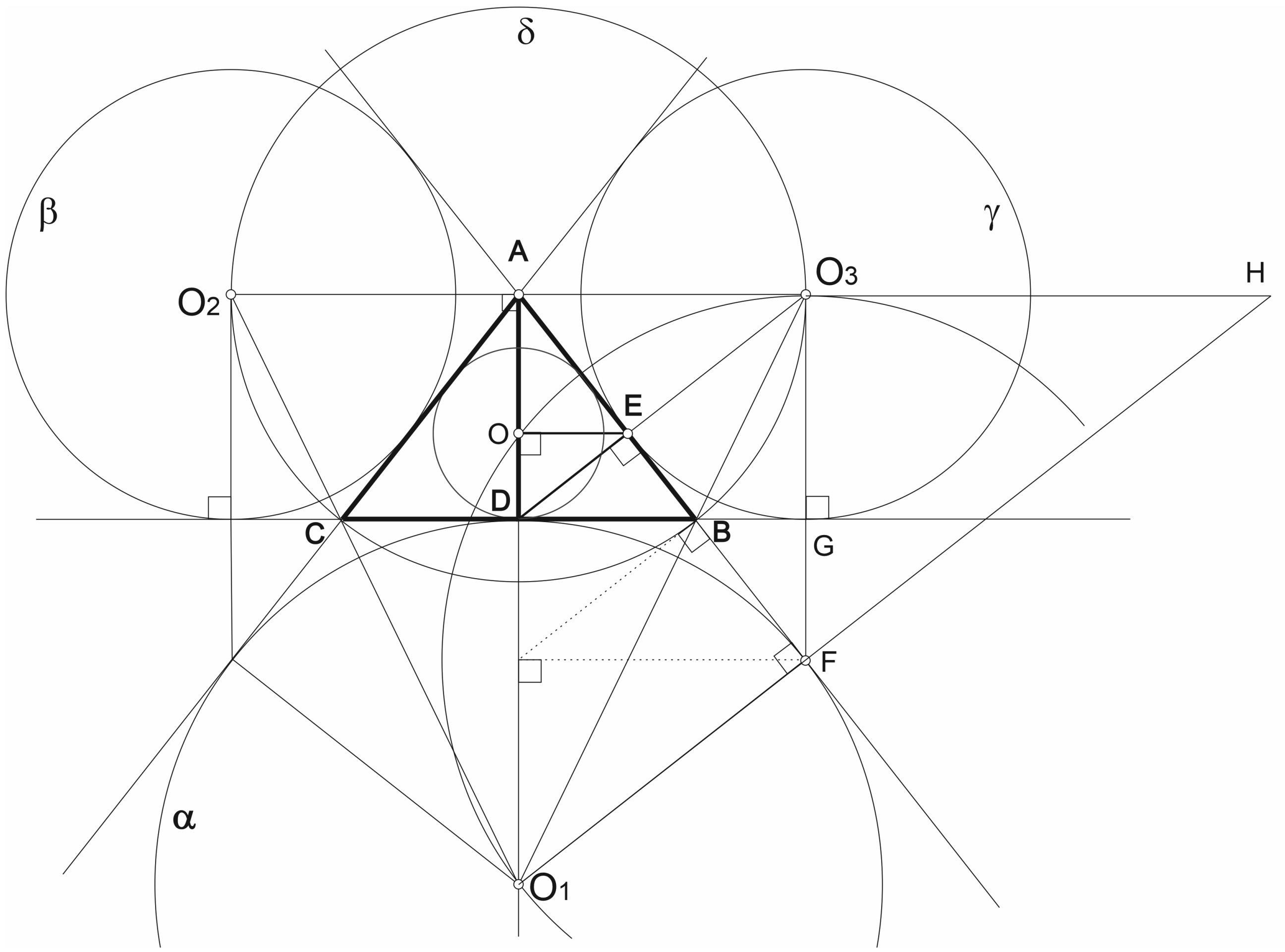


Рис. 9. Вневписанные окружности к равнобедренному треугольнику, построенному на Δ Кеплера

Пусть высота AD треугольника Кеплера равна 1. Тогда $r = \varphi^2$.

Радиусы вневписанных окружностей связаны формулой:

$$\frac{1}{r_\alpha} + \frac{1}{r_\beta} + \frac{1}{r_\gamma} = \frac{1}{r}, \tag{1}$$

откуда в нашем случае, поскольку $r_\beta = 1$, получим, что $r_\alpha = \Phi$ — член ряда геометрической прогрессии, задаваемой сторонами треугольника Кеплера.

Свойства построения, верные только для рассматриваемого треугольника:

1. Центр боковой вневписанной окружности лежит на продолжении перпендикуляра DE к стороне AB, $DO_3 = \Phi$;

2. Точка пересечение перпендикуляров, опущенных от центров вневписанных окружностей, например, O_1 и O_3, к продолжению сторон треугольника (F), лежит на продолжении боковой стороны треугольника. $FO = FO_1 = FO_3 = DO_3 = \Phi$. Треугольник DO_3G — Кеплера, а DO_3FO_1 — ромб.

3. В треугольнике Кеплера AFH гипотенуза AH является минимальной среди всех аналогичных треугольников при равенстве высот (AD) исходного треугольника ABC.

Докажем последнее. $AH = AF/\cos(\beta) = p/cos(\beta)$, где β — угол при основании, а p — полупериметр треугольника ABC. $p = h\left(\frac{1}{\mathrm{tg}(\beta)} + \frac{1}{\sin(\beta)}\right)$. $y = AH = h\left(\frac{1}{\sin(\beta)} + \frac{1}{\sin(\beta)\cos(\beta)}\right)$. Возьмем производную от y по β при постоянстве h. $y' = h\left(\frac{\sin^2(\beta)-\cos^2(\beta)}{(\sin(\beta)\cos(\beta))^2} - \frac{\cos(\beta)}{\sin^2(\beta)}\right) = h\left(\frac{1-2\cos^2(\beta)-\cos^3(\beta)}{(\sin(\beta)\cos(\beta))^2}\right)$. Приравняем числитель $0: 1 - 2\cos^2(\beta) - \cos^3(\beta) = -(\cos(\beta)+1)(\cos^2(\beta)+\cos(\beta)-1) = 0$. Получаем, что $y' = 0$

при $\cos(\beta) = -1$ и $\cos(\beta) = \varphi, -\Phi$. Случай $\cos(\beta) = \varphi$ — единственный реалистичный и соответствует нашему рассмотрению. После определения второй производной, получается минимум при этом угле β.

Таким образом, построение, в основании которого лежит треугольник Кеплера, приобретает дополнительную согласованность его частей и экстремальные свойства, по сравнению с аналогичным построением для любого другого треугольника, за исключением равностороннего. Согласованность дополнительных построений в последнем случае обусловлена исключительно симметрией 3 порядка, которая сохраняется в них.

Парабола как геометрический объект

Поскольку число Фидия появляется как корень квадратного уравнения, то естественно ожидать, что оно может проявиться в построениях с параболой. Рассмотрим параболу, как геометрическую фигуру, одну из коник, эксцентриситет которой равен 1. Ее можно определить, как геометрическое место точек, равноудаленных от заданных прямой (директрисы) и точки (фокуса). На рисунке 10: COP_1 – парабола; O — ее вершина; F — фокус; $FP_1 = p$ — фокальный параметр; $OF = p/2$ и равно расстоянию от вершины до директрисы. Проведем прямую через фокус и проекцию точки P_1 на ось x, как показано на рисунке 9. В результате получим две точки ее пересечения с параболой — B и C. Тогда:

$$|OD| = \varphi \cdot |OA| = \varphi \cdot p, \quad \text{а} \quad |OE| = \Phi \cdot p, \tag{2}$$

Это получается из подобия треугольников ABD и AFO и следствия определяющего свойства параболы $|BF| = |BD| + p/2$ (расстояния от параболы до фокуса и директрисы равны). Точка B делит отрезок AF в золотом сечении, а точка F, в свою очередь, делит отрезок AC в золотом сечении.

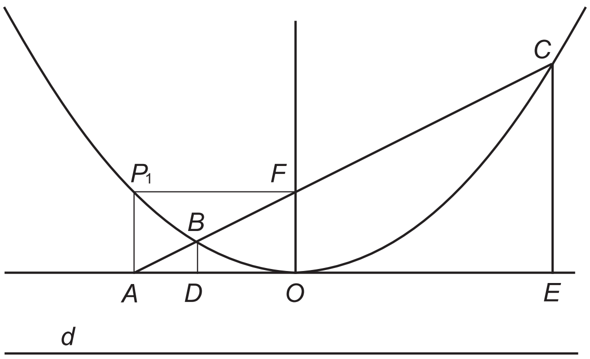


Рис. 10.

Это построение отличается от стандартного рассмотрения пересечения параболы $y = x^2$ с прямой $y = x + 1$ опорой на геометрически значимые особые точки, которые не присутствуют в стандартном варианте. Прямая $y = x + 1$ не проходит через фокус параболы $y = x^2$ (координаты фокуса этой параболы — $(0; 1/4)$). Но утверждения (2), конечно, можно было бы получить и аналитически, рассмотрев пересечение соответствующих кривых в декартовых координатах.

Сделаем дополнительные построения, чтобы сильнее проявить общие геометрические свойства параболы, связанные с золотым сечением. Проведем окружность с центром, лежащим на директрисе, проходящую через фокус и точку P параболы (рис. 11). Она выделяет точки B', C' на директрисе — проекции точек касания прямых проведенных из точки M к параболе. Прямая, проходящая через точки B и C — построенная выше, и она касается нашей окружности в точке F. Действительно, поскольку $|F'M| = \frac{p}{2}$, то радиус окружности $R = \sqrt{5}/2p$. Но $R = \frac{|B'C'|}{2}$, и если точки B и C — проекции точек B и C из вышеприведенного построения, то $\frac{|B'C'|}{2} = \frac{\varphi+\Phi}{2}p = \sqrt{5}/2 \cdot p$.

Т.е. точки B и C можно получить и не строя ось x и проекцию точки P_1 на нее. Достаточно провести через точки F и P окружность с центром на директрисе и касательную к ней в точке F. Точки пересечения этой касательной с параболой дадут точки B и C, касательные к параболе в которых, в свою очередь, пересекутся в точке M и дадут прямоугольный треугольник BMC с отношением катетов равным Φ (рис. 11). Т.е. $BF/FM = FM/FC = BM/MC = \varphi$.

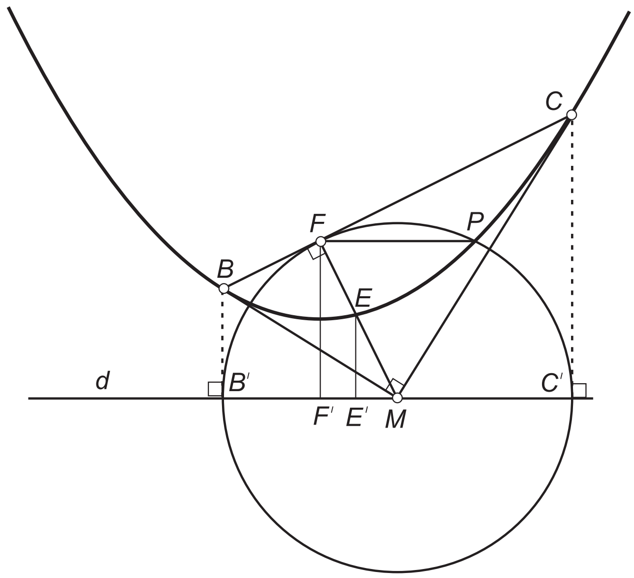


Рис. 11.

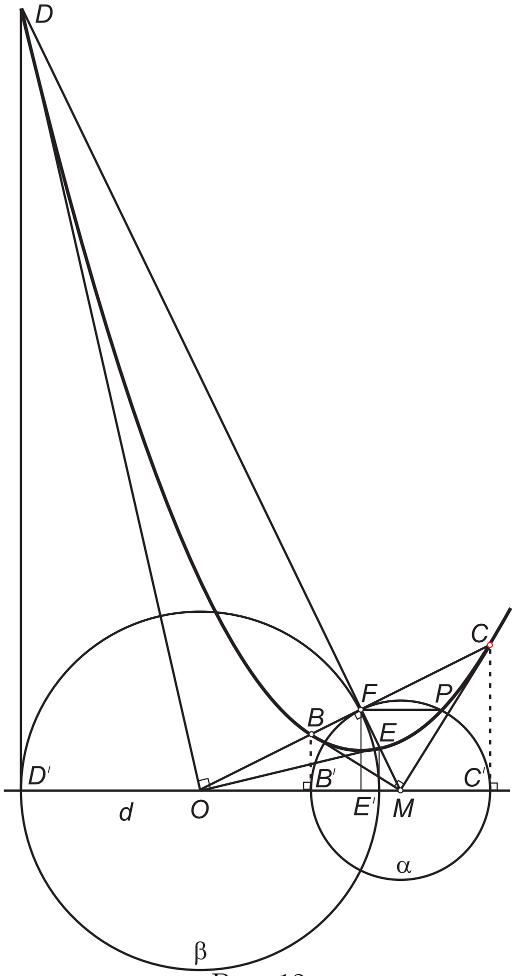


Рис. 12.

Если E — точка пересечения высоты MF с параболой, а E' — ее проекция на директрису, то $|F'E'| = \varphi^3 p$. Верность этого можно доказать геометрически, используя подобие треугольников и определяющее свойство параболы, но сделаем это аналитически. В ранее принятых координатах уравнение прямой, проходящей через точки M и F, будет $y = -2x + p/2$. Обозначим $|F'E'| = x_E$. Тогда x_E будет определяться уравнением: $x_E^2/(2p) = -2x_E + p/2$ или $x_E^2 + 4px_E - p^2 = 0$, корнем которого и будет $\varphi^3 p$.

Если продолжить отрезок MF до второго пересечения с параболой — точки D, то ее проекция на директрису (точка D') даст отрезок $|F'D'| = \Phi^3 p$ (рис. 12). Построим окружность β, диаметр которой равен $D'E'$. Окружности α и β ортогональны, и точки B' и C' — симметричны относительно окружности β, а точки E' и D', принадлежащие окружности β, — относительно окружности α. Диаметр окружности α равен радиусу окружности β, и, как легко показать, $|C'E'|/|B'E'| = \Phi$. Из симметричности точек B' и C' относительно окружности β следует, что отношение катетов в прямоугольном треугольнике $B'FC'$ равно Φ.

Задача. Через точку F' провести прямую, тангенс угла наклона которой к директрисе равен $3/2$. Доказать, что, если точки ее пересечения с параболой обозначить как G и H, а точки их проекций на директрису — G' и H', то $|F'G'| = \varphi^2 p$ и $|F'H'| = \Phi^2 p$.

Эллипсы как геометрические объекты

Посмотрим на один из наиболее часто приводимых рисунков золотых равнобедренных треугольников с углом при вершине C в $36°$ с дополнительными построениями, как это сделано на рис. 13.

Теперь представим, что треугольник ABC повернули вокруг его высоты на $180°$, сотворив конус, а потом провели вдоль AD коническое сечение, нормаль к которому принадлежит исходной плоскости. Это сечение — эллипс с большой осью AD. Какой будет эксцентриситет у этого эллипса? Согласно теории конических сечений [4]:

$$e = \frac{\cos(\angle CED)}{\cos(\angle ACB/2)} = \frac{\cos(54°)}{\cos(18°)} = 2\sin(18°) = \varphi. \tag{3}$$

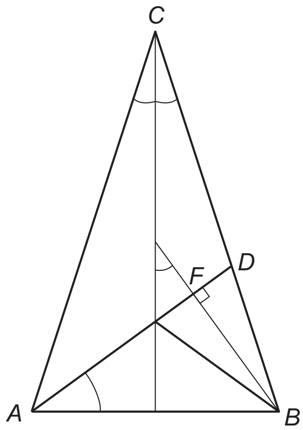


Рис. 13. К появлению эллипса с $e = \varphi$.

Один из фокусов этого эллипса будет находиться в точке F, где $BF \perp AD$. Рассмотрим его свойства подробнее (рис. 14). Введем обозначения:

$OF_1 = c$ — фокальное расстояние;

$OA = OD = a$ — большая полуось;

$OB = b$ — малая полуось;

$F_1P = p$ — фокальный параметр;

$OF_2/OA = DF_1/DD_1 = c/a = e$ — эксцентриситет;

Прямая d — директриса эллипса.

PD_1 — касательная к эллипсу в точке P.

Для любой точки эллипса расстояние от нее до фокуса F_1 в e раз меньше расстояния до директрисы. Уравнение этого эллипса в полярной системе координат (r, β), когда полюс находится в точке фокуса F_1:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\beta)} = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\beta)} = \frac{a\varphi}{1 + \varphi\cos(\beta)} = \frac{a}{\Phi + \cos(\beta)} \tag{4}$$

При $\beta = \pi/2$ $r = p = a/\Phi = c$. *Равенство фокального параметра фокусному расстоянию является определяющим свойством этого эллипса. Квадрат, вписанный в такой эллипс, проходит через его фокусы.*

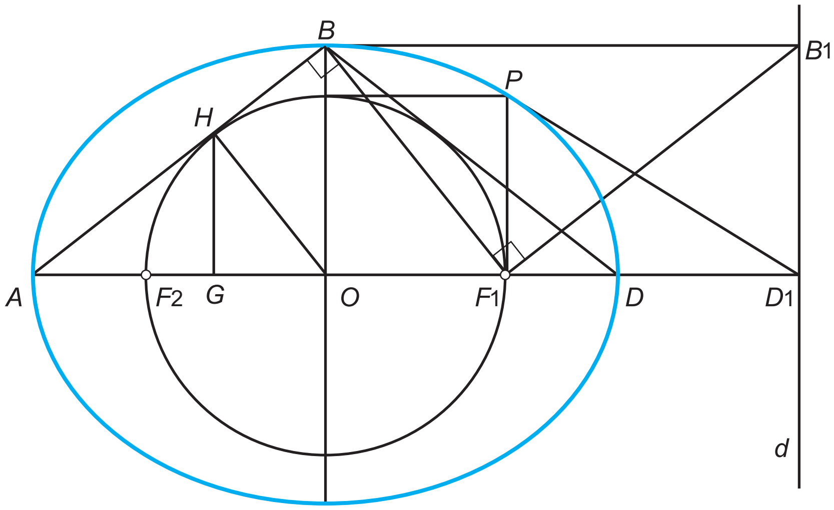


Рис. 14. Эллипс с $e = \varphi$

Если для простоты записи принять, что $c = 1$, то $F_1P = 1$; $b = \sqrt{\Phi}$; $a = BF_1 = \Phi$; $DD_1 = 1$; $F_1D_1 = \Phi$; $F_1B_1 = \Phi^{3/2}$ и $BB_1 = \Phi^2$. Точки F_1 и D делят в золотом отношении отрезок OD_1. Прямоугольник OBB_1D_1 состоит из трех треугольников Кеплера: OBF_1; BB_1F_1 и $F_1B_1D_1$. Эти треугольники задают 5 отрезков, длины которых принадлежат одной геометрической прогрессии с $q = \sqrt{\Phi}$.

Треугольник ABF_1, который только в случае $e = \varphi$ будет прямоугольным, также являются треугольником Кеплера. Он демонстрирует одно известное свойство треугольника Кеплера: *Если в треугольнике Кеплера из вершины опустить высоту на гипотенузу, которая делит ее на отрезки x и $y (y > x)$, то больший отрезок y будет равен меньшему катету исходного треугольника.* На рисунке 14 проведены еще две последовательные высоты к гипотенузам (OH и HG). Треугольники $OBF1$, и OHA равны, точки A и G симметричны относительно изображенной центральной окружности с радиусом, равным c.

Если к этому эллипсу добавить две софокусных с ним гиперболы с $e = \Phi$, то они пройдут через фокальные точки M и P и пересекут большую ось эллипса в точках C_1 и C_2, которые делят отрезки OF_j в золотом отношении. $C_1D = C_2A = c$ и точки C_j являются центрами радиусов кривизны эллипса в точках A и D (рис. 15).

Последнее утверждение верно, поскольку радиус кривизны эллипса в точках A и B равен [4]:

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{b^2}{a} = p = c, \\ R_B &= \frac{a^2}{b} = \Phi^{3/2}c = |AB|. \end{aligned} \tag{5}$$

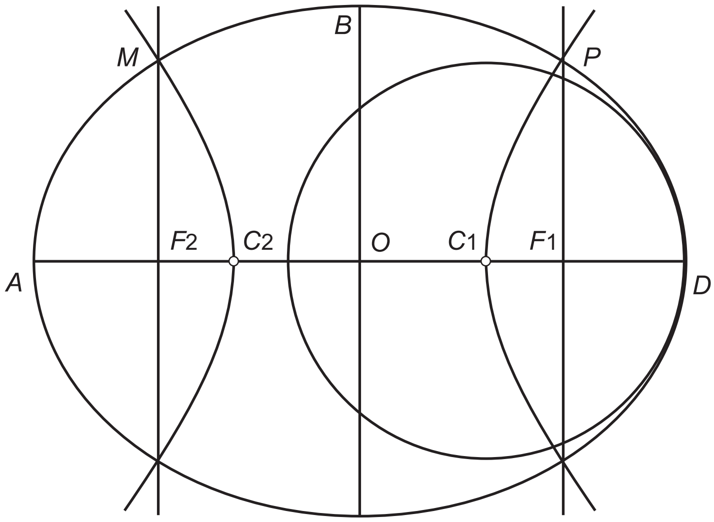


Рис. 15. Эллипс с $e = \varphi$ и гиперболы с $e = \Phi$

Взаимное положение вписанной окружности и последовательности эллипсов приводит к построению, которое может понравиться любителям сложных и одновременно красивых геометрических композиций (см. рис. 16). Отметим, что при другом значении эксцентриситета такой внутренне согласованной композиции не получилось бы.

Введем обозначения для последовательности вписанных эллипсов — $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ и соответствующих точек вершин A и B — $A_1, A_2, \ldots$ и $B_1, B_2, \ldots$ и их полуосей — a_k и b_k. Радиус кривизны в точке A_1 эллипса α_1 будет равен радиусу кривизны в точке B_4 эллипса α_4 — $R_{B_4} = R_{A_1}$. При этом центры этих двух окружностей смещены относительно друг друга на расстояние, равное их радиусу. Этот факт отражен на рис. 17. Отметим, что у последовательности таких эллипсов α_{k+1} проходит через фокус α_k только при $e = \varphi$. В общем случае, $b_{k+1} = p_k$.

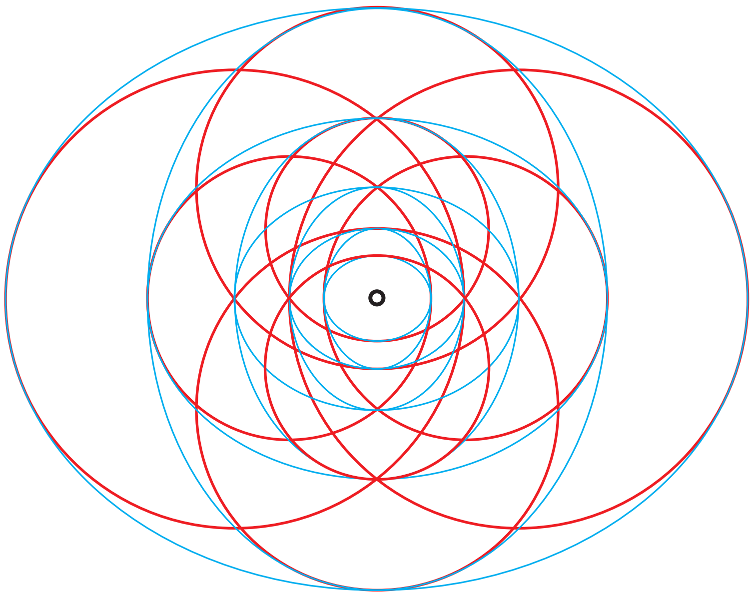


Рис. 16. Эллипсы с $e = \varphi$ и окружности с радиусом, равным фокусному расстоянию c

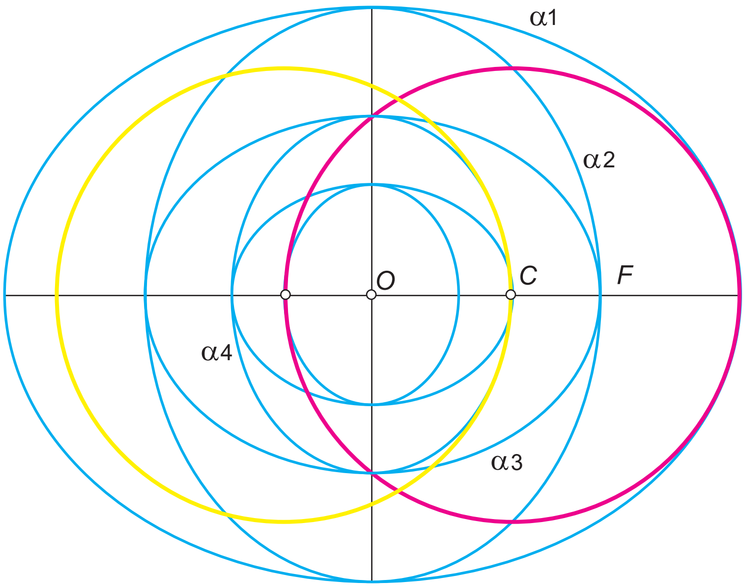


Рис. 17.

Докажем, что $R_{B_4} = R_{A_1}$ при любом e. Из формулы (5) находим $R_{A_1} = \frac{b^2}{a} = (1-e^2)a_1$. Т.к. $a_{k+1} = b_k = (1-e^2)^{k/2}a_1$ и $b_{k+1} = \sqrt{(1-e^2)}a_{k+1} = (1-e^2)^{(k+1)/2}a_1$, то $R_{B4} = \frac{a_4^2}{b_4} = (1-e^2)a_1 = R_{A_1}$.

А при каких эксцентриситетах окружность, вписанная в эллипс α_1, с радиусом равным радиусу кривизны в точках A_1, которой она касается, будет внешне касаться $\alpha_k (R_A > a)$? Этот вопрос приводит к уравнению:

$$2\frac{b_1^2}{a_1} = a_1 + b_{2n}. \tag{6}$$

Т.к.:

$$b_{2n} = a_1(1-e^2)^n, \tag{7}$$

то в результате получается уравнение:

$$2(1-e^2) = (1-e^2)^n + 1. \tag{8}$$

При $n = 1$ и 2 получаем тривиальное решение $e = 0$. При $n = 3$ получаем эксцентриситет $e = \varphi$. При $n > 3$ имеем для решения (8): $1/\sqrt{2} > e > \varphi$.

Если все окружности, изображенные на рисунке 16, радиусы которых равны радиусу кривизны в точках A_k, переместить на расстояние их радиусов “вглубь”, то получим окружности, касающиеся эллипсов в точках B_{k+3}, радиусы которых будут равны радиусу кривизны эллипсов в этих точках. Как видно из рисунка 17, для этих окружностей не будет такого хорошего сопряжения с эллипсами, как в случае, изображенном на рис. 16. Верно общее утверждение: не существует такой эксцентриситет, что окружности с радиусом, равным радиусу кривизны в точках B_k, и внутренне касающиеся их, касались бы и эллипса α_1. Это следует из того, что уравнение $2\frac{a_k^2}{b_k} = b_1 + b_k$ не имеет решений при любом e.

Если пересечь конус, образованный вращением треугольника Кеплера вокруг его большего катета, под углом к основанию, равным половине угла при вершине, то получим эллипс с $e = \sqrt{\varphi}$. Рассмотрим некоторые свойства этого эллипса (см. рисунок 18). Обозначим последовательность эллипсов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, соответствующие точки вершин — $A_1, A_2, \ldots$ и $B_1, B_2, \ldots$, а их полуоси — a_k и b_k.

Свойства:

1. Радиус кривизны в точке $A_1(R_{A_1})$ эллипса α_1 будет равен радиусу кривизны в точке B_4 эллипса α_4. Их центры разнесены на расстояние R_{A_1}.

$$a_1 + b_4 = a_1 + (1 - e^2)^2 a_1 = (1 + \varphi^4) a_1 = 3\varphi^2 a_1 = 3R_{A_1} \tag{9}$$

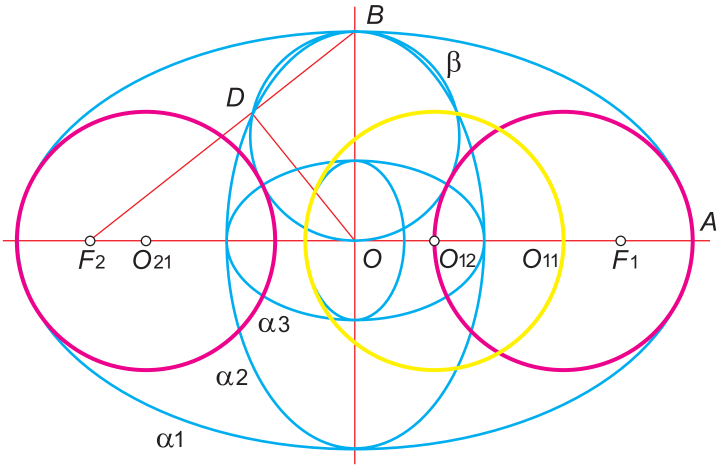


Рис. 18. Некоторые свойства системы эллипсов с $e = \sqrt{\varphi}$

2. Введем обозначение ω_{ij} для окружностей, с центрами в точках O_{ij}. Между эллипсом α_1 и окружностями ω_{11} и ω_{21} впишем окружность β. Окружность β проходит через точку O, т.е. имеет диаметр, равный b.

Т.к. $|OO_{11}| = b$, то радиус окружности β находится из уравнения:

$$(R_\beta + R_A)^2 = (b - R_\beta)^2 + b^2. \tag{10}$$

Откуда получим $R_\beta = b/2$, и окружность β проходит через точку O.

3. Построим отрезок F_2B. К гипотенузе треугольника Кеплера F_2BO проведем высоту — OD. Через точку D, которая делит F_2B в золотом сечении, проходят — окружность β и эллипс α_2.

Из перпендикулярности отрезков F_2B и OD находим декартовы координаты точки D — $(-\varphi^{3/2}b; \varphi b)$, подставляя их в уравнение окружности β:

$$\left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \tag{11}$$

и уравнение эллипса α_2:

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{\varphi b}\right)^2 = 1, \tag{12}$$

получаем верные равенства, что доказывает свойство 3.

Согласованные построения

Интересно найти геометрические построения, где золотое сечение появляется, как следствие особенностей геометрического объекта, напрямую не связанных с числом Фидия и "золотоносными" углами. Одними из вариантов воплощения такого намерения является эллипс с $e = \varphi$, у которого *фокальный параметр равен фокальному расстоянию* ($c = p$). Его еще можно определить, как *эллипс, фокусы которого лежат на сторонах вписанного в него квадрата.* Рассмотрим рисунок, иллюстрирующий некоторые взаимные отношения параболы и этого эллипса, имеющих общие фокус и директрису. На рис. 19 точка B (пересечения AF с параболой) лежит на отрезке P_1P_1', где FP_1 —

фокальный параметр эллипса, P_1' — проекция точки P_1 на директрису. Окружность α, в которую вписан эллипс, имеет радиус, равный расстоянию FF'. Точки F и F' *симметричны относительно этой окружности*, отношение расстояний от них до любой точки окружности равно φ (эксцентриситету, общее свойство эллипса).

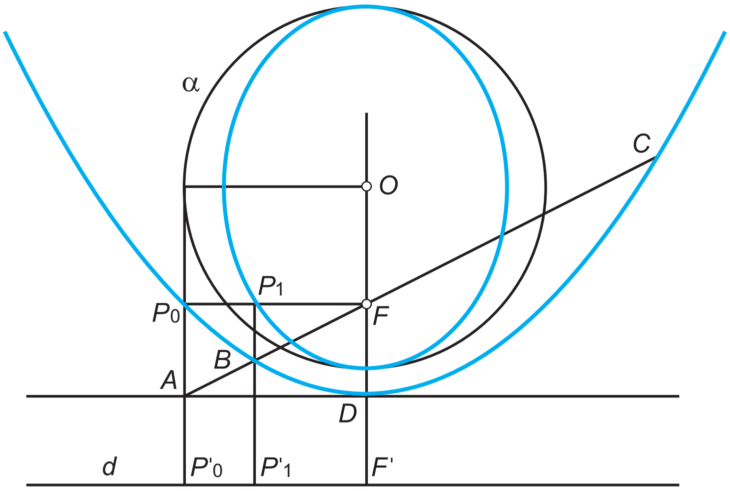


Рис. 19. Парабола, окружность α и эллипс с $e = \varphi$

Рассмотрим лемнискату Бернулли, кривую, произведение расстояний от которой до двух ее фокусов равно квадрату половины расстояния между фокусами. и зададимся вопросом: чему равен эксцентриситет софокусного с нею эллипса, который пересекается с лемнискатой в своих фокальных точках? Эксцентриситет такого эллипса (α на рис. 20) равен $\sqrt{\varphi}$, а отношение полуосей равно φ. Площадь такого эллипса равна площади окружности радиуса, равного фокальному расстоянию. Эта окружность (ω) пересекает лемнискату в ее наивысшей точке (рис. 20). Отрезок B_2A_2 касается окружности ω и эллипса α, последней в точке P_1^1 [1]. Этот пример подталкивает искать появление числа Фидия как условия пересечения двух кривых в особых точках.

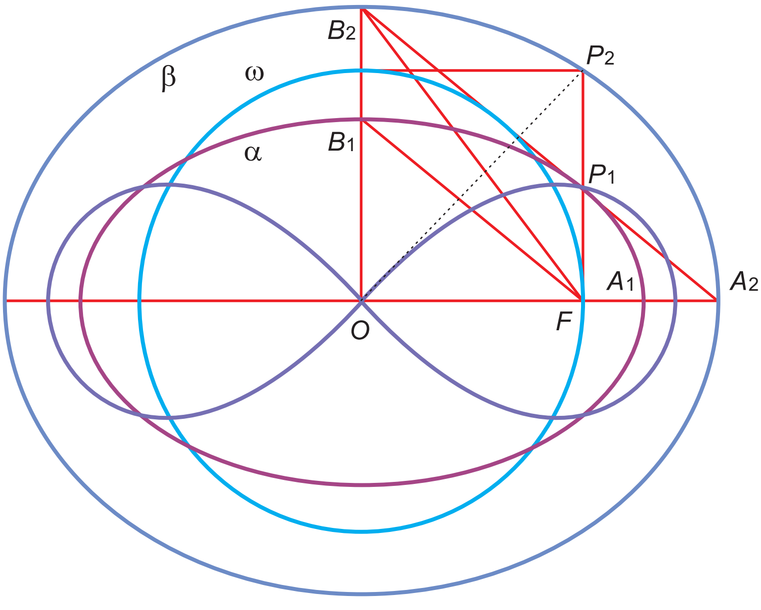


Рис. 20. Софокусные эллипсы с эксцентриситетом, равным $\sqrt{\varphi}$ и φ, и лемниската Бернулли

[1] Через точку A_2 проходит директриса эллипса α. Директриса эллипса 1 проходит через точку A эллипса 2, если $e_1^2 = e_2$.

Прямоугольные треугольники OFB_1, OFB_2, построенные на фокальном расстоянии и малой полуоси (гипотенуза равна большой полуоси) и OA_2B_2, являются треугольниками Кеплера. Поскольку софокусные эллипсы и гиперболы, произведение эксцентриситетов которых равно единице, пересекаются в фокальных точках (P_1 и P_2), то написанное здесь про эллипсы можно перенести и на гиперболы с эксцентриситетом равным $\sqrt{\Phi}$ и Φ.

Литература

[1] Василенко С.Л. От экстремальных свойств треугольника Кеплера и золотого конуса — к возможному проецированию на пирамиды Древнего Египта // “Академия Тринитаризма”. - М. - Эл. № 77-6567. - публ. 22827. - 16.12.2016.

[2] Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. Серия: Популярные лекции по математике. Вып. 6. - М.: Наука, 1978.

[3] Жижилкин И.Д. Инверсия. - М.: Изд-во МЦНМО, 2009. - 72 с.

[4] Погорелов А.В. Геометрия. - М.: Наука, 1983.

[5] Щетников А.И. Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе // Матем. обр. - 2006. - № 3(38). - с. 59–71.

[6] Cerin Z. Centres of the golden ratio Archimedean twin circles, Mathematics Subject Classification, 1991. URL: https://web.math.pmf.unizg.hr/ cerin/c136.pdf

[7] Hofstetter K. A Simple Construction of the Golden Section // Forum Geometricorum. - 2. - 2002. - p. 65–66. URL: https://forumgeom.fau.edu/FG2002volume2/FG200208.pdf

[8] Hofstetter K. Division of a Segment in the Golden Section with Ruler and Rusty Compass // Forum Geometricorum. - 5. - 2005. - p. 135–136.

URL: https://forumgeom.fau.edu/FG2005volume5/FG200518.pdf

[9] Hofstetter K. Another 5-step Division of a Segment in the Golden Section // Forum Geometricorum. - 4. - 2004. - p. 21–22. URL: https://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200322.pdf

[10] Nguyen Ngoc Giang, Le Viet An. Golden sections and Archimedean circles in an Arbelos // International J. of geometry. - 2018. -No 7(2). - p. 25-36.

URL: https://ijgeometry.com/wp-content/uploads/2018/10/25-36.pdf

[11] Niemeyer Jo. A Simple Construction of the Golden Section // Forum Geometricorum. - 11. - 2011. - p. 53.

[12] Odom G., J. van de Craats. Elementary Problem 3007 // American Math. Monthly. - 90. - 1983. - p. 482; solution. - 93. - 1986. - p. 572.

[13] Penrose R. The role of aesthetics in pure and applied research // Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications. - Vol. 10. - 1974. - p. 266-271.

Ковалев Андрей Николаевич,
Санкт-Петербург.

E-mail: ser.levsha@yandex.ru

Математические задачи с номером года (2023 год). Условия задач 1–65

С. В. Костин

На различных математических конкурсах и олимпиадах часто встречаются задачи, в условии или решении которых фигурирует год проведения конкурса или олимпиады. Данная статья посвящена задачам, в условии или решении которых присутствует число 2023. Большинство задач составлены автором статьи.

Наверное, сейчас уже сложно установить, откуда пошла традиция использования на математических конкурсах и олимпиадах задач, в условии или решении которых фигурирует год проведения данного конкурса или данной олимпиады. Во всяком случае, на XIII Московской математической олимпиаде, проходившей в 1950 году (более 70 лет назад!) в условии одной из задач фигурировало число 1950.

Авторы и составители задач, а также методические комиссии математическихсоревнований всегда имеют в виду эту замечательную возможность — если в задаче фигурирует в той или иной степени «произвольное» число, то нет ли возможности использовать в качестве этого числа номер текущего календарного года?

Это, естественно, не всегда возможно, поскольку многие математические конструкции и рассуждения существенным образом основываются на определенных теоретико-числовых свойствах числа (скажем, на его делимости на 3) и для текущего календарного года это свойство не всегда имеет место. Но если номер года может быть использован, то почему нет? Это делает задачу более симпатичной, более «уникальной», а также позволяет в будущем по самому условию задачи понять, в каком году она предлагалась на конкурсе или олимпиаде.

В данной статье мы хотели бы предложить Вашему вниманию подборку задач, в условии или решении которых фигурирует число 2023 (номер текущего календарного года). Большинство задач составлены автором данной статьи.

Задачи очень разные по сложности — есть совсем простые, есть посложнее, есть близкие к олимпиадным. Также в статье приведено несколько не очень строго (с точки зрения математики) сформулированных задач, которые, видимо, правильнее было бы считать не математическими задачами, а задачами на смекалку.

Приведенные задачи не претендуют на большую оригинальность. Многие использованные идеи являются хорошо известными. Тем не менее, автор надеется, что, решая предложенные задачи, каждый читатель найдет одну или несколько задач «по своему вкусу» и, возможно, испытает несколько приятных минут.

Для удобства тех читателей, которые хотят проверить свои силы, решения задач отделены от их условий и будут опубликованы в следующих номерах журнала.

Задача 1. Вычислите число

$$a = 777 + 777 + 777 - 77 - 77 - 77 - 77.$$

Задача 2. Вычислите число

$$a = 14^3 + 15^3 - 16^3.$$

Задача 3. Вычислите число

$$a = \frac{1}{55} + \frac{3}{77} - \frac{6}{119} - \frac{9}{1445}.$$

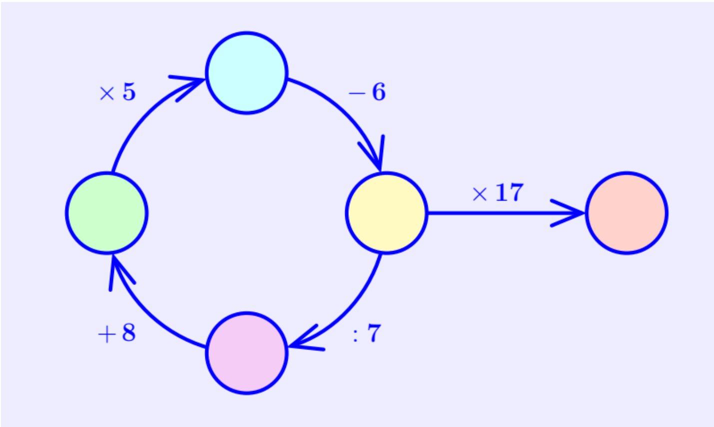
Задача 4. Существует ли натуральное число x такое, что:

1) сумма цифр числа x равна 7;

2) число x делится на 7;

3) если к числу x добавить 77, то получится число, которое делится на сто?

Задача 5. Расшифруйте все числа математической карусели (см. рисунок). Какое число стоит в самом правом кружке?



Задача 6. Слово называется палиндромом, если оно одинаково читается слева направо и справа налево (примеры: ДЕД, КАЗАК, ШАЛАШ). Число называется палиндромом, если оно одинаково читается слева направо и справа налево (примеры: 7, 77, 787). Представить число 2023 в виде суммы наименьшего возможного количества палиндромов.

Задача 7. В ряд стоят четырнадцать электронных часов. Первые часы показывают 07 : 07, десятые часы показывают 17 : 19, четырнадцатые часы показывают 11 : 11. Что показывают восьмые часы?

Задача 8. Известно, что числа АБ, БВ, ВГ и ГД являются полными квадратами, причем разность наибольшего и наименьшего из этих чисел равна $\text{П}^2 + \text{Р}^2 - \text{С}^2$. Найти массу кекса, который испекла бабушка, если известно, что эта масса выражается (в граммах) числом КЕКС.

Задача 9. Будем считать, что цифры складываются из спичек следующим образом:

Для того чтобы записать число 2023, требуется 21 спичка:

Сколько существует натуральных чисел, которые меньше 2023, но требуют для своей записи больше спичек?

Задача 10. На рисунке в предыдущей задаче показано, как можно записать число 2023, используя 21 спичку. Но это не минимум! Сможете ли Вы записать число 2023, используя:

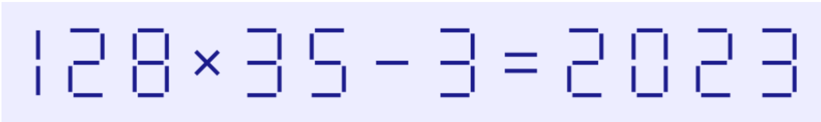
1) лишь 17 спичек;

2) лишь 15 спичек;

3) лишь 13 спичек;

4) лишь 11 спичек;
5) лишь 10 спичек.
Все спички имеют равную длину. Ломать спички категорически запрещается!

Задача 11. Барон Мюнхгаузен сложил из спичек следующее числовое равенство:



Это равенство ложно (в левой части получается, как легко сосчитать, 4477). Однако барон утверждает, что он может превратить равенство в верное, не добавляя, не убирая и не перекладывая ни одной спички. Как он это делает?

Задача 12. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он может сложить из спичек число 2023 и затем, не добавляя, не убирая и не перекладывая ни одной спички, увеличить это число в $64\,\frac{2}{7}$ раза. Как он это делает?

Задача 13. Пусть

$$a = \sqrt{28 \cdot 29 \cdot 34 \cdot 35 + 9},$$
$$b = \sqrt{28 \cdot 29 \cdot 36 \cdot 37 + 16}.$$

Найти $c = a + b$.

Задача 14. В ряд написаны цифры от 1 до 7:

1 2 3 4 5 6 7

Расставить знаки действий и скобки так, чтобы в результате получилось 2023. Можно использовать следующие действия:
сложение (+);
вычитание (−);
умножение (×);
деление (:);
возведение в степень (^);
факториал (!).
Порядок самих цифр изменять нельзя.

Задача 15. В ряд написаны цифры от 1 до 9:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Расставить знаки действий и скобки так, чтобы в результате получилось 2023. Можно использовать следующие действия:
сложение (+);
вычитание (−);
умножение (×);
деление (:);
возведение в степень (^).
Порядок самих цифр изменять нельзя.

Задача 16. На доске написаны три натуральных числа:

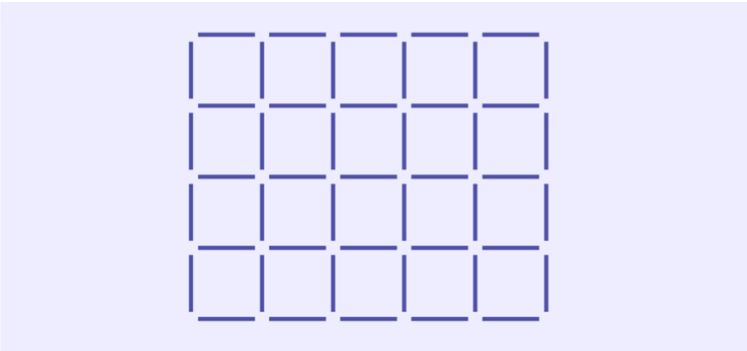
7007, ???, 7077

Найти второе число, если первое число составляет 77% от суммы второго и третьего чисел.

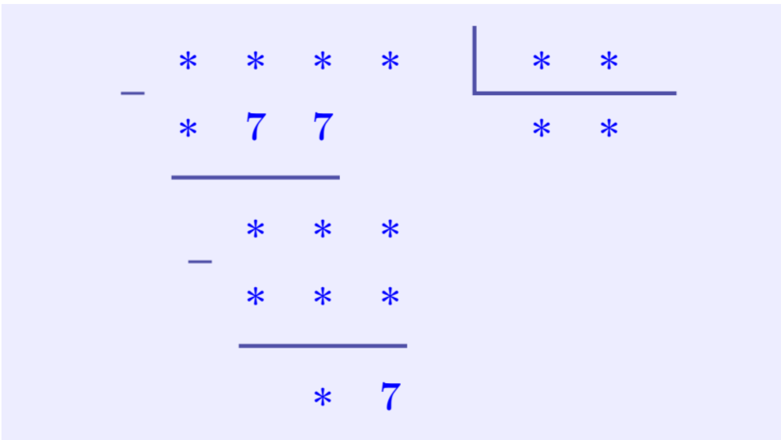
Задача 17. В некотором доме 65 квартир. Жильцы дома решили купить в мастерской цифры, чтобы пронумеровать свои квартиры (числами от 1 до 65). Цифра 1 стоит 11 рублей, цифра 2 стоит 12 рублей, цифра 3 стоит 13 рублей, ..., цифра 9 стоит 19 рублей, цифра 0 стоит 70 рублей. Какая наименьшая сумма денег понадобится жильцам?

Задача 18. Можно ли, используя 20 спичек, сложить 2023 (или больше) прямоугольников?

Задача 19. Для того чтобы сложить решетку 4×5 (см. рисунок), требуется 49 спичек. А сколько требуется спичек, чтобы сложить решетку, которая в семь раз больше данной?



Задача 20. Расшифруйте пример на деление (см. рисунок), если известно, что суммы цифр делимого и частного равны семи.

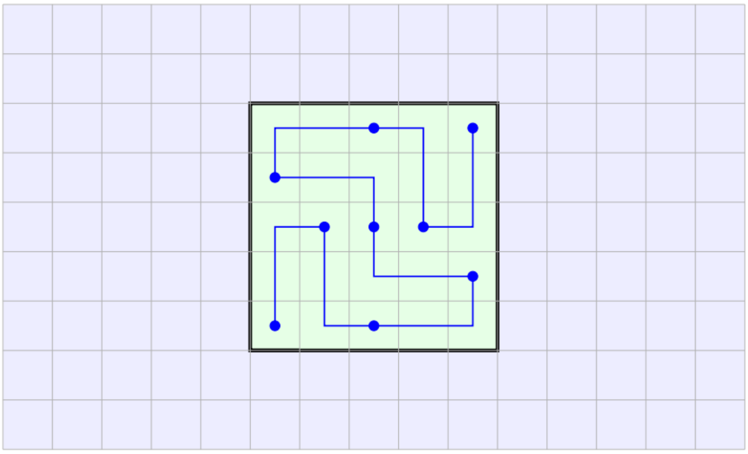


Задача 21. Во время каникул в Простоквашино дядя Федор решил позаниматься математикой. Он загадал натуральное число и произвел с ним следующие действия:

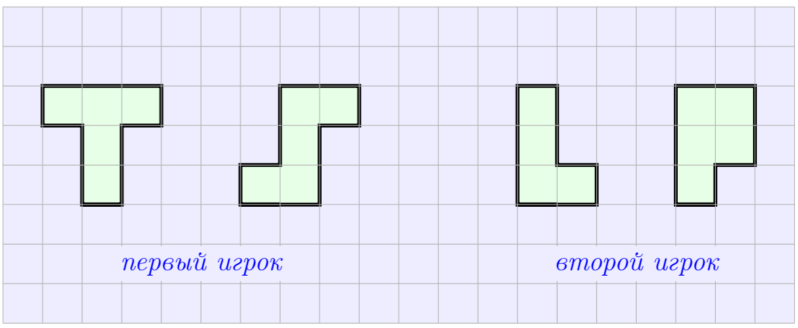
1) умножил на 5 или на 6;
2) добавил 7 или 8;
3) умножил на 5 или на 6;
4) добавил 7 или 8;
5) умножил на 5 или на 6;
6) добавил 7 или 8.

В результате дядя Федор получил число 2023. Какое число загадал дядя Федор?

Задача 22. Конь-пешеход — это шахматная фигура, которая ходит как конь, но не прыгая с одной клетки на другую, а наступая на каждую клетку буквы Г. На рисунке показано, как конь-пешеход может обойти весь квадрат 5×5, побывав на каждой клетке ровно один раз. Может ли конь-пешеход обойти аналогичным образом квадрат 2023×2023?

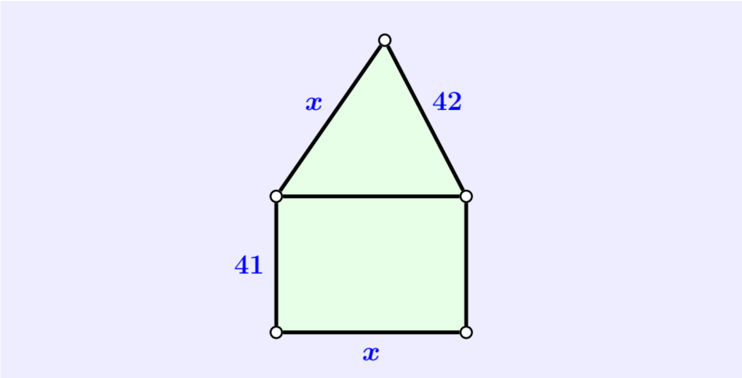


Задача 23. Квадрат 2023×2023 покрашен в синий цвет. Два игрока ходят по очереди. Первый игрок при своем ходе любую фигуру в виде буквы T или в виде буквы Z, если все клетки этой фигуры синие, может перекрасить в зеленый цвет. Второй игрок при своем ходе любую фигуру в виде буквы L или в виде буквы P, если все клетки этой фигуры синие, может перекрасить в зеленый цвет. Все перечисленные фигуры изображены на рисунке (каждую из них можно поворачивать и переворачивать). Проигрывает тот из игроков, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

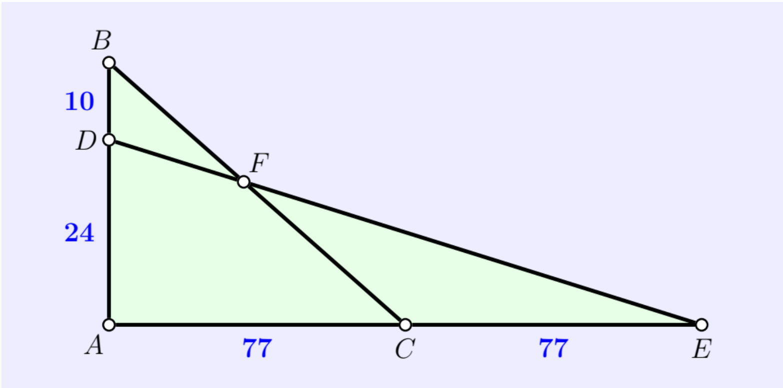


Задача 24. Имеются три кучи с камнями. В первой куче 55 камней, во второй куче 2000 камней, в третьей куче x камней. Два игрока ходят по очереди. За ход можно взять любое ненулевое количество камней из одной какой-либо кучи. Проигрывает тот игрок, кто не сможет сделать ход. Определить, при каких значениях x выигрышную стратегию имеет второй игрок.

Задача 25. Изображенная на рисунке фигура в виде домика имеет площадь 2023. Найти x.



Задача 26. Прямоугольные треугольники ABC и ADE расположены так, как показано на рисунке. Гипотенузы BC и DE пересекаются в точке F. Найти площадь четырехугольника $ABFE$.



Задача 27. Пусть ABC — равносторонний треугольник со стороной 34. Окружности с центрами в точках A, B, C попарно касаются друг друга. Фигура Φ состоит из тех точек плоскости, которые лежат внутри ровно одной из окружностей. Найти площадь фигуры Φ, если известно, что она покрывает менее 77% площади треугольника ABC.

Задача 28. Барон Мюнхгаузен утверждает, что ему удалось придумать конечную арифметическую прогрессию, у которой первый член, разность и количество членов равны по модулю, а сумма всех членов равна 2023. Не обманывает ли барон?

Задача 29. Имеются 2023 карточки, на которых написаны числа 1, 2, 3, …, 2023. Вася хочет разложить карточки на две кучки так, чтобы сумма чисел в первой кучке была равна произведению чисел во второй кучке. Сможет ли он это сделать?

Задача 30. Доказать, что число

$$a = 2023 \cdot 11111 - 96$$

является составным.

Задача 31. Решить в целых числах уравнение

$$x^3 - 7xy + y^3 = 2023.$$

Задача 32. Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 + 123x + 1 = 0.$$

Пусть x_1 и x_2 — корни этого уравнения и пусть

$$a = \sqrt[5]{x_1} + \sqrt[5]{x_2}\,.$$

Найти число $b = ((a^2 - 2)^2 - 4)^2 - 2$.

Задача 33. Какую наименьшую сумму цифр может иметь число

$$x_n = n^6 + 4n^4 + 4n^2 + 14n! + 2023 \quad (n \in \mathbb{N})?$$

Задача 34. Доказать неравенство

$$\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + \ldots + \frac{2023}{2021!+2022!+2023!} < \frac{1}{2}.$$

Задача 35. Доказать, что число

$$a = 3\ \underbrace{44444\ \ldots\ 4}_{2023\ \text{цифры}}\ 3$$

является составным.

Задача 36. Доказать, что число

$$a = \underbrace{171717\ \ldots 17}_{2112\ \text{цифр}}$$

делится нацело на 2023.

Задача 37. Доказать, что число

$$A = 2 \cdot 3 \cdot 3!! + 4 \cdot 5 \cdot 5!! + \ldots + 76 \cdot 77 \cdot 77!! - 3$$

делится нацело на 2023.

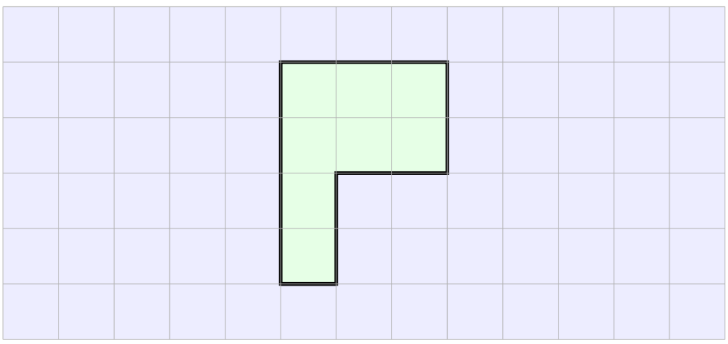
Замечание. Символом $n!!$ ($n \in \mathbb{N}$) обозначается «двойной факториал» числа n — произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и сравнимых с n по модулю 2 (то есть таких натуральных чисел $k \in [1\,..\,n]$, что разность $n - k$ делится на 2). Например, $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, $8!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 384$.

Задача 38. Можно ли написать в строку 2023 чисел так, что: 1) сумма любых 7 последовательных чисел отрицательна, а сумма всех 2023 чисел положительна; 2) сумма любых 77 последовательных чисел отрицательна, а сумма всех 2023 чисел положительна?

Задача 39. 1) Можно ли в клетках квадрата 5×5 расставить натуральные числа так, чтобы сумма чисел в любом трехклеточном уголке была больше 250, а сумма всех чисел в квадрате была меньше 2023? 2) Можно ли в клетках квадрата 7×7 расставить натуральные числа так, чтобы сумма чисел в любом трехклеточном уголке была больше 123, а сумма всех чисел в квадрате была меньше 2023?

Задача 40. Можно ли в клетках квадрата 10×10 расставить натуральные числа так, чтобы сумма чисел в любом квадрате 3×3 и в любом квадрате 4×4 была четной, а сумма всех чисел в квадрате 10×10 была равна 2023?

Задача 41. В каждой клетке квадрата 17×17 написано действительное число. Известно, что сумма всех чисел равна 3355, а сумма чисел в любом «флажке» (см. рис. 1) равна 37 (флажок может поворачиваться и переворачиваться). Найти число, написанное в центральной клетке квадрата.



Задача 42. Все члены последовательности (x_n) положительны и каждый член, начиная со второго, равен полусумме среднего арифметического и среднего геометрического двух соседних с ним членов. Найти x_{60}, если $x_1 = \dfrac{1}{7}$, $x_4 = 7$.

Задача 43. Рассмотрим рекуррентную последовательность

$$x_1 = 7, \quad x_n = x_{n-1}^2 + 6x_{n-1} + 7, \ \text{ если } \ n \geqslant 2.$$

Найти четыре последние цифры числа x_{77}.

Задача 44. Рассмотрим рекуррентную последовательность

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 8, \quad x_n = x_{n-2} + 3x_{n-1}, \ \text{ если } \ n \geqslant 3.$$

Доказать, что в последовательности (x_n) встретится число, которое заканчивается на цифры 2023.

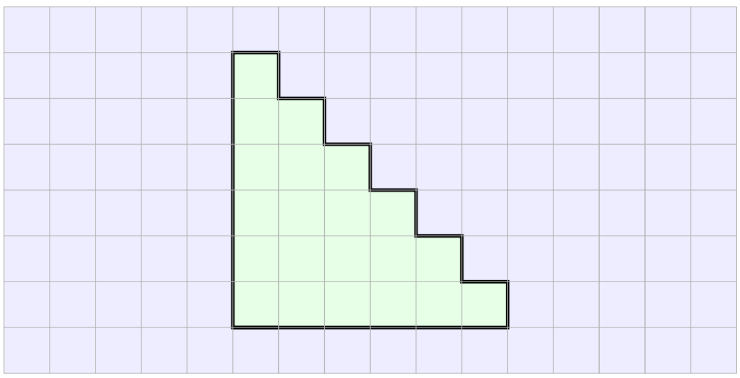
Задача 45. Рассмотрим рекуррентную последовательность

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 8, \quad x_n = 4(x_{n-1} - 2x_{n-3} - x_{n-4}), \ \text{ если } \ n \geqslant 5.$$

Доказать, что число x_{2023} делится нацело на 2023.

Задача 46. Какое наибольшее количество прямоугольников 2×11 можно вырезать из квадрата 211×211?

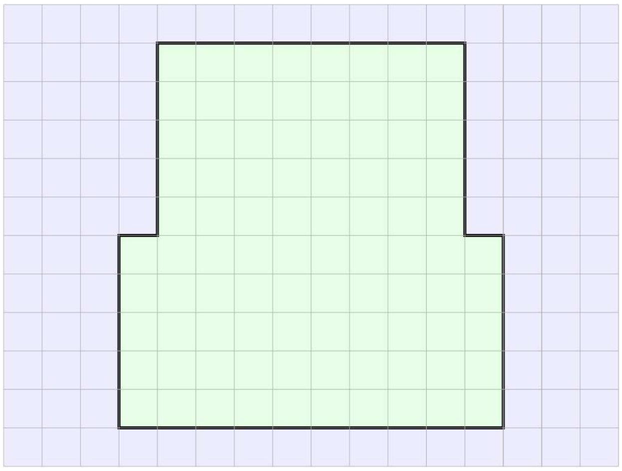
Задача 47. На рисунке изображена фигура в виде лесенки. Можно ли разрезать эту фигуру на 2023 равные части?



Задача 48. На противоположных сторонах квадрата $2n \times 2n$ отрезали два прямоугольника $1 \times n$ (см. рисунок; на рисунке $n = 5$). Можно ли разрезать полученную фигуру на 2023 равные части, если:

1) $n = 60$;

2) $n = 6000$?



Задача 49. Доказать, что неравенство

$$\operatorname{arctg}\frac{45\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-45}-\operatorname{arctg}\frac{22\sqrt{x}+23}{23\sqrt{x}-22}<0{,}77$$

имеет более 2023 натуральных решений.

Задача 50. Функция $f(x)$ определена на множестве $\mathbb{I}$ всех иррациональных чисел и при всех $x \in \mathbb{I}$ удовлетворяет равенству

$$f\left(\frac{x+2}{x+1}\right)+f\left(\frac{x+3}{2x+5}\right)=x.$$

Определить, какое число больше: $f(\sqrt{2023}\,)$ или $f(\sqrt[3]{2023}\,)$.

Задача 51. Найти наименьшее значение выражения

$$x^2+y^2+z^2+u^2$$

при дополнительном условии

$$x+y+z+2u=119.$$

Задача 52. Найти предел функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 77x+\sin 42x-\sin 43x-\sin 76x}{(\sin 42x-\sin 43x)^3}.$$

Задача 53. Рассмотрим функцию

$$f(x)=(x^2+7x+7)\,e^x.$$

Найти $f^{(42)}(0)$ (то есть значение 42-й производной функции $f(x)$ в точке $x=0$).

Задача 54. Найти тройной интеграл

$$\iiint\limits_Z \sqrt{x^2+y^2+z^2}\;dx\,dy\,dz,$$

где область интегрирования

$$Z=\{51 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 68\}.$$

Задача 55. Пусть $Oxyz$ — прямоугольная декартова система координат в пространстве. Найти объем $V(Z)$ тела Z, которое состоит из всех точек пространства, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$|\,x+77y\,|+|\,7y+31z\,|+|\,7z+61x\,|<3.$$

Задача 56. Дан квадратный трехчлен

$$f(x) = x^2 + 2px + q.$$

Числа p и q случайным образом и независимо друг от друга выбирают из отрезков $[-3,\ 14]$ и $[-9,\ 8]$ соответственно. Найти вероятность того, что квадратный трехчлен имеет два корня, причем один из этих корней больше 7, а другой меньше 7.

Задача 57. На какую наибольшую степень числа 2023 делится число 2023! ?

Задача 58. Существует ли натуральное число, которое делится на 2023, сумма цифр которого равна 2023 и такое, что в записи этого числа присутствуют только две различные цифры (например, в числе 77877788 присутствуют только цифры 7 и 8)?

Задача 59. Сколько существует 21-значных натуральных чисел, в записи которых нет цифры 4, а сумма всех цифр меньше 5?

Задача 60. Сколько существует 2023-значных натуральных чисел, у которых сумма любых двух соседних цифр делится на 7?

Задача 61. В строку написаны 2023 единицы. Можно ли между некоторыми из этих единиц поставить k плюсов так, чтобы полученное в результате число было полным квадратом? Рассмотреть следующие случаи: 1) $k = 4$; 2) $k = 5$; 3) $k = 6$.

Замечание. Например, если в строку написаны 9 единиц, то между ними можно поставить три плюса так, чтобы полученное в результате число было полным квадратом, а именно: $111 + 11 + 11 + 11 = 144 = 12^2$.

Задача 62. В магическом квадрате 3×3 в середине первой строки стоит число 30. Может ли сумма квадратов всех чисел этого магического квадрата быть меньше 2023?

Замечание. Магический квадрат — это состоящий из действительных чисел квадрат, в котором суммы чисел в каждой строке, в каждом столбце и по каждой из двух больших диагоналей одинаковы.

Задача 63. На листе бумаги написано число

2023

Как с помощью этого листа бумаги и пяти спичек получить какое-либо число a, которое отличается от 7,7 менее, чем на $\frac{1}{7}$ $\left(\text{то есть } \left|a - 7{,}7\right| < \frac{1}{7}\right)$?

Задача 64. Расшифруйте следующее таинственное сообщение:

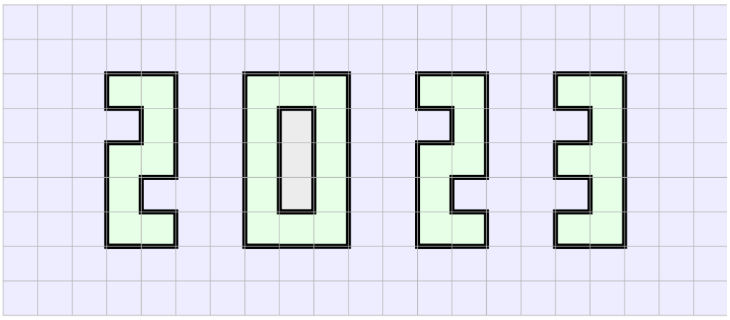
472 4173773 89513717371 11513

71109671379729 11521189271113 716129

97731113674710983 8951371372

Замечание. В этом сообщении использован *простой* шифр; КЛЮЧ $=$ 374113197.

Задача 65. Разрежьте квадрат 6×6 на семь частей и из этих частей сложите изображенную на рисунке фигуру в виде числа 2023.



Автор очень надеется, что приведенные выше задачи (или, во всяком случае, некоторые из них) заинтересуют читателей и будет очень благодарен за любые комментарии или замечания по поводу данной статьи.

Литература

1. Костин С.В. Метод математической индукции. Статья 1. Возможности и ограничения метода математической индукции // Математическое образование. - 2016. - № 2 (78). - С. 26-32.

2. Костин С.В. Нестандартные решения математических задач в работах школьников и студентов // Инновационные подходы к обучению математике в школе и вузе: материалы всероссийской научно-практической конференции (Омск, 1-3 марта 2021 г.). - Омск: Омский гос. пед. ун-т, 2021. - С. 150-155.

3. Костин С.В. О взаимосвязи различных разделов высшей математики при ее преподавании // Общество. Наука. Инновации (НПК-2021): сборник статей XXI всероссийской научно-практической конференции (Киров, 12-30 апреля 2021 г.). - Киров: Вятский гос. ун-т, 2021. - С. 237-251.

4. Костин С.В. О методах доказательства свойств чисел Фибоначчи // Математика в высшем образовании. - 2016. - № 14. - С. 25-42.

5. Костин С.В. Об изучении числовых последовательностей в школе и вузе // Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов: материалы 40-го международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (Брянск, 7-9 октября 2021 г.). - Брянск: Брянский гос. ун-т имени И.Г. Петровского, 2021. - С. 351-357.

6. Костин С.В. Об использовании методов аналитической геометрии при решении математических задач // Осенние математические чтения в Адыгее: материалы IV международной научной конференции (Майкоп, 13-17 октября 2021 г.). - Майкоп: Адыгейский гос. ун-т, 2021. - С. 334-340.

7. Костин С.В. Об одной задаче, в которой возникают числа Фибоначчи // Методика преподавания математических и естественно-научных дисциплин: современные проблемы и тенденции развития: материалы VIII всероссийской научно-практической конференции (Омск, 30 июня 2021 г.). - Омск: Омский гос. ун-т имени Ф.М. Достоевского, 2021. - С. 102-107.

8. Костин С.В. Об убедительных и неубедительных решениях математических задач // Наука и школа. - 2015. - № 5. - С. 151-155.

9. Костин С.В. Чем меньше, тем лучше // Математика для школьников. - 2023. - № 4. - С. 11, 20.

Костин Сергей Вячеславович,
учитель математики ГБОУ г. Москвы «Школа № 1788»,
старший преподаватель кафедры высшей математики
Российского технологического университета МИРЭА.

E-mail: kostinsv77@mail.ru

О вещественных числах

А. И. Саблин

В статье, предназначенный для студентов младших курсов и преподавателей математики, рассматриваются естественно-научные и математические основания для современного понятия вещественного числа.

Эта заметка возникла из размышлений автора над тем, как следует преподносить понятие вещественного числа в курсе математики (или математического анализа) для студентов технического ВУЗа.

Статья "Вещественное число" известной интернет-энциклопедии "Википедия" начинается со следующего определения:

Вещественное число — математический объект, возникший из потребности измерения геометрических и физических величин окружающего мира.

Далее, однако, говорится об аксиоматическом подходе к понятию числа и о трёх конструктивных способах определения вещественного числа: теории фундаментальных последовательностей Кантора, теории бесконечных десятичных дробей Вейерштрасса, теории сечений в области рациональных чисел Дедекинда.

Теория последовательностей и их пределов является необходимой составной частью курса математического анализа, однако определение вещественного числа как множества фундаментальных последовательностей, имеющих один предел, в том смысле, что предел разности между этими последовательности равен нулю, выглядит, на наш взгляд, слишком сложным и абстрактным для студентов младших курсов. Видимо поэтому, желая конкретизировать понятие вещественного числа, Вейерштрасс стал рассматривать бесконечные десятичные дроби. Однако при таком подходе имеется известная неоднозначность, кроме того, рациональные числа получают бесконечные представления. Наиболее изящно, с точки зрения математика, выглядит теория Дедекинда, но, с нашей точки зрения, она недостаточно конструктивна и апеллирует к бесконечным множествам. Между тем, анализируя приведённое в самом начале определение, мы можем получить вполне конструктивное определение вещественного числа.

Итак, займёмся измерениями. Первое, что обычно начинают измерять это длина.

Предположим, что имеются два отрезка. Длину большего обозначим l_1, длину меньшего l_2. Откладывая отрезок длины l_2 внутри отрезка длины l_1, подбираем число k_1 так, чтобы выполнялось соотношение

$$k_1 l_2 \le l_1 < (k_1 + 1) l_2. \tag{1}$$

Если

$$l_1 = k_1 l_2, \tag{2}$$

то процесс измерения закончен и можно сказать, что отрезок длины l_1 содержит k_1 отрезков длины l_2. В этом случае для измерения хватает целых чисел и пишут

$$\frac{l_1}{l_2} = k_1 \tag{3}$$

В противном случае

$$k_1 l_2 < l_1 < (k_1 + 1)\, l_2. \tag{4}$$

В этом случае можно построить отрезок длины l_3, такой, что

$$l_1 = k_1 l_2 + l_3, \;\; 0 < l_3 < l_2. \tag{5}$$

Далее, точно так же можно откладывать отрезок длины l_3 внутри отрезка длины l_2. Предположим, найдётся k_2, такое, что

$$l_2 = k_2 l_3. \tag{6}$$

Тогда, исключая из (5) и (6) l_3, нетрудно получить соотношение

$$k_2 l_1 = (k_1 k_2 + 1)\, l_2. \tag{7}$$

Таким образом, отрезок длины l_1 содержит $k_1 k_2 + 1$ отрезков, полученных делением отрезка длины l_2 на k_2 равных отрезков. В этом случае пишут

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{k_1 k_2 + 1}{k_2} = k_1 + \frac{1}{k_2} \tag{8}$$

и говорят, что отношение длин есть число рациональное.

Если же ни при каком k_2 соотношение (6) не выполняется, то мы сможем найти отрезок длины l_4, такой, что

$$l_2 = k_2 l_3 + l_4, 0 < l_4 < l_3. \tag{9}$$

В общем случае, повторяя этот процесс (он называется алгоритмом Евклида) и дальше можно предположить, что при некотором n мы получим соотношения

$$l_i = k_i l_{i+1} + l_{i+2}, \; 0 < l_{i+2} < l_{i+1}, \; i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1, \tag{10}$$

$$l_n = k_n l_{n+1}. \tag{11}$$

Из них можно вывести, что отношение $\frac{l_1}{l_2}$ — число рациональное. Из соображений удобства далее вместо отношения $\frac{l_1}{l_2}$ будем рассматривать отношение $\frac{l_2}{l_1}$.

Соотношения (10), (11) при $n = 1$ совпадают с (2) и, как мы уже видели, дают равенство

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{k_1}. \tag{12}$$

При $n = 2$ соотношения (10), (11) совпадают с (5), (6) и дают равенство

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2}}. \tag{13}$$

Нетрудно также убедиться, что при $n = 3$ из (10), (11) следует

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3}}}. \tag{14}$$

Рациональные числа стоящие справа в равенствах (8), (9), (10) называются *непрерывными дробями*, соответствующими последовательностям $\{k_1\}$, $\{k_1, k_2\}$, $\{k_1, k_2, k_3\}$.

Определение 1. Рациональное значение отношения $\frac{l_2}{l_1}$, соответствующее последовательности $\{k_1, k_2, ..., k_n\}$ и однозначно определяемое соотношениями (10) и (11), называется *конечной непрерывной дробью* соответствующей последовательности $\{k_1, k_2, ..., k_n\}$.

Итак, соотношения (10), (11) также позволяют записать отношение длин l_1 и l_2 как рациональное число. Достаточно ли этого для практики? Конечно, достаточно! Тем более, современные достижения физики говорят нам, что при измерении координаты частицы всегда имеется принципиальная неточность, определяемая принципом неопределённости Гейзенберга. Поэтому предположение, что процесс измерения может продолжаться бесконечно, есть не что иное, как математическая абстракция. Однако эта абстракция необходима из внутренних потребностей математики, которая признаёт только абсолютно точные рассуждения. Действительно, геометрия Евклида говорит нам, что в квадрате длина диагонали l_1 связана с длиной стороны l_2 соотношением

$$l_1^2 = 2l_2^2 \tag{15}$$

Из соотношения (15), используя соображения делимости, нетрудно вывести, что отношение длин $\frac{l_1}{l_2}$ рациональным быть не может, поэтому процесс измерения, описываемый соотношениями (10), в этом случае должен быть бесконечным. Поэтому мы получаем бесконечную последовательность натуральных чисел $\{k_1, k_2, ..., k_n, ...\}$. В этом случае мы будем говорить, что отношение $\frac{l_1}{l_2}$ *иррационально* и его значение равно бесконечной непрерывной дроби определяемой последовательностью $\{k_1, k_2, ..., k_n, ...\}$.

Таким образом, мы приходим к определению:

Определение 2. *Вещественным числом из полуинтервала* (0;1] называется полученная в результате измерения конечная или бесконечная непрерывная дробь.

Это, так сказать, определение, вытекающее из практики измерения. Однако математики абстрагируются от практики. Кроме того, мы хотим рассматривать произвольные вещественные числа, а не только числа из полуинтервала (0;1]. Тогда получаем следующее определение:

Определение 3. *Вещественным числом* называется формальная сумма целого числа и конечной или бесконечной непрерывной дроби. Если дробь конечная, то число называется рациональным, если бесконечная, то иррациональным.

Далее нам следовало бы объяснить, как бесконечные непрерывные дроби складывать, умножать, сравнивать и проверить все обычные свойства вещественных чисел. Здесь уже следует прибегнуть к традиционному изложению через бесконечные последовательности и сечения Дедекинда. Отметим, что согласно традиционной теории каждой возрастающей, ограниченной сверху последовательности рациональных чисел соответствует сечение Дедекинда. Построим такую последовательность для произвольной бесконечной непрерывной дроби.

Определение 4. Последовательностью *подходящих* дробей для бесконечной непрерывной дроби, заданной последовательностью $\{k_1, k_2, ..., k_n, ...\}$, называется последовательность $\{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$, где r_n есть непрерывная дробь, соответствующая последовательности $\{k_1, k_2, ..., k_n\}$.

Утверждение. *Последовательность* $\{r_2, r_4, ..., r_{2n}, ...\}$ *возрастает и ограничена.*

Для доказательства утверждения рассмотрим последовательность рациональных функций:

$$R_0(x) = x, \quad R_i(x) = R_{i-1}\left(\frac{1}{k_i + x}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots \tag{16}$$

Перечислим свойства функций $R_i(x)$.

Свойство 1. $R_i(x)$ определена на $[0;1]$ и принимает значения на $[0;1]$.

Это свойство следует из того, что им обладают функции $R_0(x) = x$ и $\frac{1}{k_i + x}$.

Свойство 2. $R_{2i}(x)$ возрастает на $[0;1]$, $R_{2i+1}(x)$ убывает на $[0;1]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$

Доказательство: $R_0(x) = x$ возрастает на $[0;1]$, поэтому $R_1(x) = R_0\left(\frac{1}{k_1 + x}\right)$ убывает на $[0;1]$ как композиция возрастающей и убывающей функции. $R_1(x) = x$ убывает на $[0;1]$, поэтому $R_2(x) = R_1\left(\frac{1}{k_2 + x}\right)$ возрастает на $[0;1]$ как композиция убывающих функций. И так далее.

Свойство 3. $R_i(x) = R_{i-2}\left(\dfrac{1}{k_{i-1}+\dfrac{1}{k_i+x}}\right)$, $i = 2, 3, \ldots, n, \ldots$

Доказательство: Подставим $i-1$ вместо i в (16):

$$R_{i-1}(x) = R_{i-2}\left(\frac{1}{k_{i-1}+x}\right). \tag{17}$$

В (17) вместо x подставим $\dfrac{1}{k_i+x}$:

$$R_{i-1}\left(\frac{1}{k_i+x}\right) = R_{i-2}\left(\frac{1}{k_{i-1}+\frac{1}{k_i+x}}\right). \tag{18}$$

Сопоставляя (16) и (18), получаем требуемое равенство.

Свойство 4. $r_n = R_n(0) = R_{n-1}\left(\dfrac{1}{k_n}\right) = R_{n-2}\left(\dfrac{1}{k_{n-1}+\dfrac{1}{k_n}}\right)$.

Доказательство: Из (10) следует $\frac{l_{i+1}}{l_i} = \frac{1}{k_i+\frac{l_{i+2}}{l_{i+1}}}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Из определения $R_i(x)$ получаем

$$R_{i-1}\left(\frac{l_{i+1}}{l_i}\right) = R_{i-1}\left(\frac{1}{k_i+\frac{l_{i+2}}{l_{i+1}}}\right) = R_i\left(\frac{l_{i+2}}{l_{i+1}}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Следовательно, все числа $R_i\left(\dfrac{l_{i+2}}{l_{i+1}}\right)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ равны. В частности, $R_0\left(\frac{l_2}{l_1}\right) = R_{n-1}\left(\frac{l_{n+1}}{l_n}\right)$. Далее, получаем

$$r_n = \frac{l_2}{l_1} = R_0\left(\frac{l_2}{l_1}\right) = R_{n-1}\left(\frac{l_{n+1}}{l_n}\right) = R_{n-1}\left(\frac{1}{k_n}\right) = R_n(0).$$

В этой цепочке первое равенство следует из определения r_n, второе и пятое — из определения $R_i(x)$, четвёртое — из (11).

Последнее равенство в свойстве 4 следует из свойства 3. Что и требовалось доказать.

Теперь мы можем доказать утверждение. Так как

$$\frac{1}{k_{2n-1}+\frac{1}{k_{2n}}} > 0$$

и функция $R_{2n-2}(x)$ возрастает по свойству 2, то по свойству 4 имеем:

$$r_{2n} = R_{2n-2}\left(\frac{1}{k_{2n-1}+\frac{1}{k_{2n}}}\right) > R_{2n-2}(0) = r_{2n-2}.$$

Итак, $\{r_2, r_4, ..., r_{2n}, ...\}$ возрастает. Ограниченность $\{r_2, r_4, ..., r_{2n}, ...\}$ следует из свойства 1.

Таким образом, уже процесс измерения длины приводит к необходимости рассмотрения понятия вещественного числа в полном объёме.

Саблин Александр Иванович,
доцент МГТУ им. Баумана,
кандидат физико-математических наук.

E-mail: sablin3103@gmail.com

О последовательностях, определяющих комплексный логарифм

С. В. Шведенко

В заметке представлена графическая иллюстрация поведения некоторых последовательностей из семейства последовательностей, определяющих комплексный логарифм.

Назначение данной заметки — на простых примерах проиллюстрировать данное в заметке [1] определение комплексного логарифма

$$\operatorname{Ln} z \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} n\bigl(\sqrt[n]{z}-1\bigr), \quad z \in \mathbf{C}, \ \ z \neq 0,$$

где предел вычисляется отдельно для каждого значения $\arg z$ (из множества $\operatorname{Arg} z$ всех значений аргумента числа z), а под $\sqrt[n]{z}$ понимается то значение корня, аргумент которого равен $\dfrac{\arg z}{n}$. То, что это определение корректно и вполне согласуется с традиционным $\operatorname{Ln} z \stackrel{\text{def}}{=} \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$, есть один из результатов заметки [1].

Наглядной иллюстрацией данного определения комплексного логарифма служат прилагаемые рисунки, графически представляющие выборочно вычисленные элементы последовательностей $\{n\bigl(\sqrt[n]{z}-1\bigr)\}$ для двух конкретных комлексных чисел z и трех значений их аргументов.

Рис. 1 иллюстрирует поведение последовательности $\{n\bigl(\sqrt[n]{z}-1\bigr)\}$ при $z=-1$ для трех значений $\arg(-1):\ \pi,\ 3\pi$ и $-\pi$.

В обозначениях

$$z_n = n\bigl(\sqrt[n]{\cos\pi + i\,\sin\pi}\,-1\bigr) = n\bigl(\cos\frac{\pi}{n} + i\,\sin\frac{\pi}{n}\,-1\bigr),$$

$$z'_n = n\bigl(\sqrt[n]{\cos 3\pi + i\,\sin 3\pi}\,-1\bigr) = n\bigl(\cos\frac{3\pi}{n} + i\,\sin\frac{3\pi}{n}\,-1\bigr),$$

$$\tilde{z}_n = n\bigl(\sqrt[n]{\cos(-\pi) + i\,\sin(-\pi)}\,-1\bigr) = n\bigl(\cos\frac{-\pi}{n} + i\,\sin\frac{-\pi}{n}\,-1\bigr)\ \bigl(=\overline{z_n}\bigr),$$

вычисления[1] дают для выборочных значений n приближенные значения:

$z_1=-2+0\,i,\ \ z_2=-2-2\,i,\ \ z_3=-1{,}5+2{,}6\,i\ \ z_4=-1{,}17-2{,}8\,i\ \ z_5=-0{,}95+2{,}9\,i,$

$z_7=-0{,}69+3{,}04\,i,\ \ z_{10}=-0{,}49+3{,}09\,i,\ \ z_{20}=-0{,}25+3{,}13\,i,\ \ z_{100}=-0{,}05+3{,}14\,i;$

$z'_1=-2+0\,i,\ \ z'_2=-2-2\,i,\ \ z'_3=-6+0\,i,\ \ z'_4=-6{,}8+2{,}8\,i,\ \ z'_5=-6{,}\,5+4{,}7\,i,\ \ z'_6=-6+6\,i,$

$z'_7=-5{,}4+6{,}8\,i,\ \ z'_8=-4{,}9+7{,}4\,i,\ \ z'_9=-4{,}5+7{,}8\,i,\ \ z_{10}=-4{,}1+8{,}1\,i,\ \ z'_{15}=-2{,}86+8{,}8\,i,$

$z'_{20}=-2{,}18+9{,}1\,i,\ \ z'_{40}=-1{,}1+9{,}33\,i,\ \ z'_{50}=-0{,}88+9{,}36\,i,\ \ z'_{200}=-0{,}22+9{,}42\,i;$

$\tilde{z}_1=-2-0\,i,\ \ \tilde{z}_2=-2-2\,i,\ \ \tilde{z}_3=-1{,}5-2{,}6\,i,\ \ \tilde{z}_4=-1{,}17-2{,}8\,i\ \ \tilde{z}_5=-0{,}95-2{,}9\,i,$

$\tilde{z}_7=-0{,}69-3{,}04\,i,\ \ \tilde{z}_{10}=-0{,}49-3{,}09\,i,\ \ \tilde{z}_{20}=-0{,}25-3{,}13\,i,\ \ \tilde{z}_{100}=-0{,}05-3{,}14\,i.$

[1] С помощью Desmos Scientific Calculator.

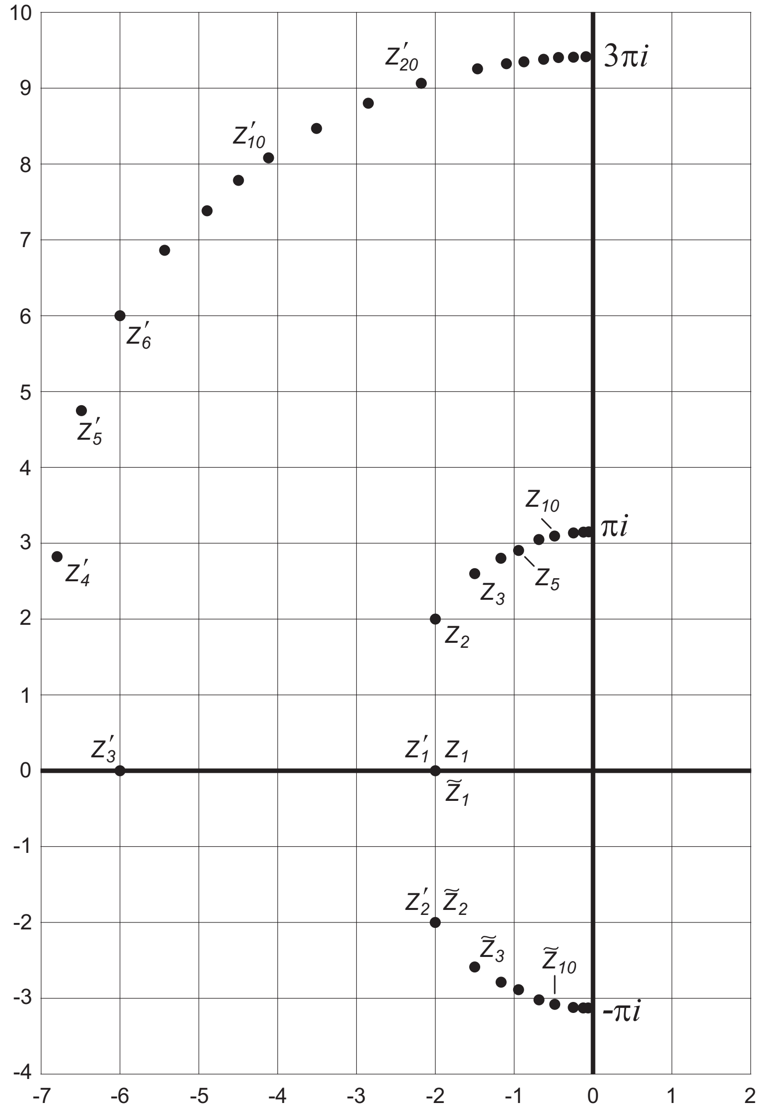


Рис. 1.

Замечание. Рис. 1 свидетельствует, в частности, о том, что в случае $|z| = 1$ при любом выборе $\varphi = \arg z$ последовательность $\left\{\mathrm{Re}\left(n\left(\sqrt[n]{z}-1\right)\right)\right\} = \left\{n\left(\cos\frac{\varphi}{n}-1\right)\right\}$ оказывается *возрастающей*[2] (вне зависимости от знака числа φ), а последовательность $\left\{\mathrm{Im}\left(n\left(\sqrt[n]{z}-1\right)\right)\right\} = \left\{n\sin\frac{\varphi}{n}\right\}$ — *возрастающей*, если $\varphi > 0$, и *убывающей*, если $\varphi < 0$. Это вытекает из следующих оценок производных функций $f(x) = x\left(\cos\frac{\varphi}{x}-1\right)$ и $g(x) = x\sin\frac{\varphi}{x}$ при $x \to +\infty$:

$$f'(x) = \cos\frac{\varphi}{x} - 1 + \frac{\varphi}{x}\sin\frac{\varphi}{x} = -\frac{1}{2!}\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$g'(x) = \sin\frac{\varphi}{x} - \frac{\varphi}{x}\cos\frac{\varphi}{x} = \frac{\varphi}{x} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\varphi}{x}\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{\varphi}{x} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\varphi}{x}\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\varphi}{x}\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Рис. 2 иллюстрирует поведение последовательности $\left\{n\left(\sqrt[n]{z}-1\right)\right\}$ в случае $z = 3-4\,i$ для трех значений $\arg(3-4\,i)$: $-\mathrm{arctg}(4/3)$, $2\pi-\mathrm{arctg}(4/3)$, $-2\pi-\mathrm{arctg}(4/3)$ с обозначением z_n, z'_n, $\tilde{z}_n$ соответствующих им значений $n\left(\sqrt[n]{3-4\,i}-1\right)$:

---
[2] Начиная с некоторого n.

$$z_n = n\,\Big(\sqrt[n]{5}\,\Big(\cos\frac{-\operatorname{arctg}(4/3)}{n} + i\,\sin\frac{-\operatorname{arctg}(4/3)}{n}\Big) - 1\Big),$$

$$z'_n = n\,\Big(\sqrt[n]{5}\,\Big(\cos\frac{2\pi-\operatorname{arctg}(4/3)}{n} + i\,\sin\frac{2\pi-\operatorname{arctg}(4/3)}{n}\Big) - 1\Big),$$

$$\tilde z_n = n\,\Big(\sqrt[n]{5}\,\Big(\cos\frac{-2\pi-\operatorname{arctg}(4/3)}{n} + i\,\sin\frac{-2\pi-\operatorname{arctg}(4/3)}{n}\Big) - 1\Big).$$

Выборочные вычисления дают приближенные значения:

$z_1 = 2 - 4\,i$, $z_2 = 2 - 2\,i$, $z_3 = 1{,}88 - 1{,}56\,i$, $z_4 = 1{,}82 - 1{,}37\,i$, $z_5 = 1{,}78 - 1{,}27\,i$,

$z_{10} = 1{,}7 - 1{,}08\,i$, $z_{20} = 1{,}65 - 1{,}0\,i$, $z_{100} = 1{,}62 - 0{,}94\,i$, $z_{200} = 1{,}61 - 0{,}93\,i$;

$z'_1 = 2 - 4\,i$, $z'_2 = -6 + 2\,i$, $z'_3 = -4{,}09 + 5{,}01\,i$, $z'_4 = -2{,}6 + 5{,}8\,i$, $z'5 = -1{,}7 + 6{,}05\,i$,

$z'_6 = -1{,}07 + 6{,}1\,i$, $z'_7 = -0{,}65 + 6{,}1\,i$, $z'_8 = -0{,}33 + 6{,}07\,i$, $z'_9 = -0{,}09 + 6{,}03\,i$,

$z'_{10} = 0{,}1 + 5{,}99\,i$, $z'_{12} = 0{,}38 + 5{,}9\,i$, $z'_{20} = 0{,}9 + 5{,}7\,i$, $z'_{50} = 1{,}34 + 5{,}5\,i$, $z'_{200} = 1{,}54 + 5{,}4\,i$;

$\tilde z_1 = 2 - 4\,i$, $\tilde z_2 = -6 + 2\,i$, $\tilde z_3 = -6{,}8 - 3{,}65\,i$, $\tilde z_4 = -5{,}37 - 5{,}8$, $\tilde z_5 = -4{,}1 - 6{,}24\,i$,

$\tilde z_6 = -3{,}17 - 7{,}32\,i$, $\tilde z_7 = -2{,}46 - 7{,}55\,i$, $\tilde z_{15} = -0{,}2 - 7{,}7\,i$, $\tilde z_{20} = 0{,}28 - 7{,}64\,i$,

$\tilde z_{30} = 0{,}74 - 7{,}53\,i$, $\tilde z_{50} = 1{,}09 - 7{,}4\,i$, $\tilde z_{100} = 1{,}36 - 7{,}3\,i$, $\tilde z_{500} = 1{,}56 - 7{,}23\,i$.

Справка: $\ln 5 \approx 1{,}61$, $-\operatorname{arctg}(4/3) \approx -0{,}93$, $2\pi - \operatorname{arctg}(4/3) \approx 5{,}35$, $-2\pi - \operatorname{arctg} 4/3) \approx -7{,}21$.

Замечание (в продолжение предыдущего). На рис. 2 отражены, в частности, свойства *монотонности* (начиная с некоторого n) последовательностей

$$\big\{\mathrm{Re}\big(n\big(\sqrt[n]{z}-1\big)\big)\big\} = \big\{n\big(\sqrt[n]{a}\cos\frac{\varphi}{n} - 1\big)\big\} \text{ и } \big\{\mathrm{Im}\big(n\big(\sqrt[n]{z}-1\big)\big)\big\} = \big\{n\sqrt[n]{a}\sin\frac{\varphi}{n}\big\}$$

в зависимости от значений $a = |z|$ и $\varphi = \arg z$. А именно, первая из этих последовательностей *возрастает*, если $|\varphi| > |\ln a|$, и *убывает*, если $|\varphi| < |\ln a|$, тогда как вторая последовательность *возрастает* при $\varphi \ln a < 0$ и *убывает* при $\varphi \ln a > 0$. Это вытекает из следующих оценок производных функций $\tilde f(x) = x\big(a^{1/x}\cos\frac{\varphi}{x} - 1\big)$ и $\tilde g(x) = x a^{1/x}\sin\frac{\varphi}{x}$ при $x \to +\infty$:

$$\tilde f'(x) = a^{1/x}\cos\frac{\varphi}{x} - 1 + x\Big(a^{1/x}\ln a\big(-\frac{1}{x^2}\big)\cos\frac{\varphi}{x} + a^{1/x}\sin\frac{\varphi}{x}\,\frac{\varphi}{x^2}\Big) =$$

$$= a^{1/x}\Big(\cos\frac{\varphi}{x} - \frac{\ln a}{x}\cos\frac{\varphi}{x} + \frac{\varphi}{x}\sin\frac{\varphi}{x}\Big) - 1 =$$

$$= \Big(1 + \frac{\ln a}{x} + \frac{1}{2!}\Big(\frac{\ln a}{x}\Big)^2 + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big)\Big(\Big(1 - \frac{\ln a}{x}\Big)\Big(1 - \frac{1}{2!}\Big(\frac{\varphi}{x}\Big)^2 + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big) + \Big(\frac{\varphi}{x}\Big)^2 + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big) - 1 =$$

$$= \frac{\varphi^2 - (\ln a)^2}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big);$$

$$\tilde g'(x) = a^{1/x}\sin\frac{\varphi}{x} + x\Big(a^{1/x}\ln a\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)\sin\frac{\varphi}{x} - a^{1/x}\cos\frac{\varphi}{x}\,\frac{\varphi}{x^2}\Big) =$$

$$= a^{1/x}\Big(\sin\frac{\varphi}{x} - \frac{\ln a}{x}\sin\frac{\varphi}{x} - \cos\frac{\varphi}{x}\,\frac{\varphi}{x}\Big) = a^{1/x}\Big(\frac{\varphi}{x} - \frac{\ln a}{x}\,\frac{\varphi}{x} - \frac{\varphi}{x} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big) =$$

$$= -\frac{\varphi\ln a}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

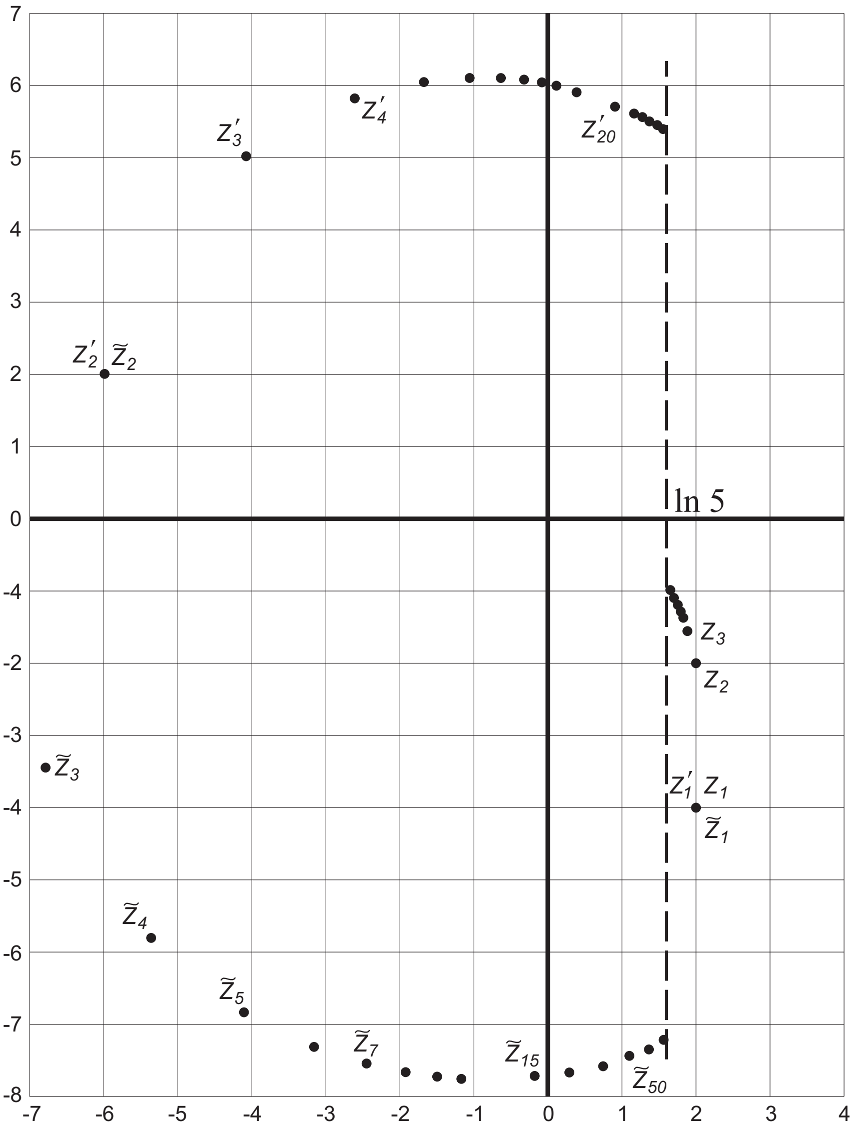


Рис. 2.

В частности, на рис. 2 последовательность $\{\mathrm{Re}\, z_n\}$ *убывает* $\big(\varphi \approx -0{,}93,\ \ln a \approx 1{,}61\big)$, а последовательности $\{\mathrm{Re}\, z'_n\}$ и $\{\mathrm{Re}\, \tilde{z}_n\}$ (с соответственно $\varphi \approx 5{,}35$ и $\varphi \approx -7{,}21$) *возрастают*; последовательность $\{\mathrm{Im}\, z'_n\}$ *убывает* ($\varphi \ln a > 0$), а последовательности $\{\mathrm{Im}\, z_n\}$ и $\{\mathrm{Im}\, \tilde{z}_n\}$ (для обеих $\varphi \ln a < 0$) *возрастают*[3].

Литература

1. Шведенко С.В. Натуральный логарифм как отправной пункт определения элементарных функций // Математическое образование. - 2020. - № 4 (96). - С. 55-60.

Шведенко Сергей Владимирович,
доцент кафедры высшей математики
Национального исследовательского ядерного
университета (МИФИ), кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: sershvedenko@mail.ru

[3] Во всех случаях имеется в виду *монотонность, начиная с некоторого n*.

Из истории науки

Вселенская задача: от Коперника до Кеплера. Ценности требуют жертв и долготерпения

В. Н. Оникийчук, И. В. Оникийчук

Рассказ о драматическом пути гелиоцентрической системы Николая Коперника к признанию.

Весна 1543 г. была холодной. В апреле мела снежная пороша и шли холодные дожди. Николай Коперник[1], прильнув к окну, всматривался сквозь седую пелену дождя. Мелкий моросящий дождь с примесью тумана не давал возможности посмотреть вдаль, за околицу, откуда должна была вынырнуть легкая повозка.

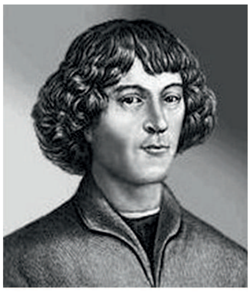
Он уже давно с нетерпением ждал приезда Ретика[2] — своего верного ученика и помощника. Георг Ретик уже месяц как уехал в Нюрнберг к печатнику Джохану Петраусу. Там он должен был отдать издателю рукопись своей книги. Он должен был вернуться с книгой, потому что часто ездить в Нюрнберг уже не было ни средств, ни времени.

Рисунок академика
Фоменко А.Т.

[1]**Николай Коперник (Kopernik, Copernicus)** (1473-1543). Выдающийся польский ученый, астроном.

[2]**И. Ретик** — известный математик средневековья, до приезда к Николаю Копернику был профессором одного из итальянских университетов. Близкий друг Коперника, астролог. В 1540 г. написал книгу “Narratio Primo”, в которой пропагандировал теорию Коперника и использовал её в астрологических расчётах относительно надвигающегося Второго пришествия Христа.

Больше всего не любил он сырую холодную погоду — такую, какая сейчас на дворе. В холод ему было тяжело дышать от часто накатывавшихся приступов кашля. Где-то он простыл вот в такую слякоть. И хотя он лечил всех людей в окрестности, для себя он целительного снадобья так и не нашел.



Николай Коперник
(1473-1543)

Перечитывая десятки и сотни раз свою рукопись, Николай Коперник с каждым годом замечал, что материал можно улучшить дополнительными и более весомыми доказательствами своей гипотезы. Однако резко пошатнувшееся здоровье заставило его принять окончательное решение о публикации рукописи в том виде, в каком она была. Не проходящие тяжелые приступы кашля и седина на голове давали ему понять, что его жизненный путь неумолимо приближается к концу.

Как быстро ушло время, когда он был молод, красив и беспечен. Теперь только одно желание — как избавиться от этого проклятого кашля. И второе — надо дождаться книгу. В ней — вся его жизнь. Жаль, что он раньше ее не предложил издателю. А сейчас... Нет, еще не время приезжать Ретику. Ранний его приезд, возможно, будет значить только одно: книгу издатель не принял. Нет, только не это! Если же книгоиздатель решил принять рукопись, то Ретик вряд ли так быстро вернется... Значит, надо ждать.

Числилась пальмой, а оказалась липой

Неспешное путешествие солнца по небесному куполу всегда вызывало восторг и радость. А теперь попробуйте людей убедить, что все, что они видят — это неправда. Дескать, все наоборот: Солнце стоит на месте в холодном космосе, а шарообразная Земля летит вокруг Солнца. Какова будет реакция людей? Догадаться нетрудно. Все будут искренне возмущаться и крутить пальцем у виска. Разве может быть неправдой то, что видят *все* люди?

Клавдий Птолемей
(прибл.85-165 г. н.э.)

Когда астрономы нарисовали траектории планет на основе телескопических наблюдений, то выяснилось, что ближайшие к нам планеты движутся по каким-то непонятным причудливым петлеобразным траекториям. Странно. Почему же планеты так странно петляют?

Были разные мнения. Искали путеводную Идею, которая бы объяснила все эти странности в поведения планет.

Идеи — ответственная вещь. Они требуют определенной логики существования. Конечно, если захочешь, то логику найдешь. И её нашли.

В этом хаосе петель в движении планет на небосводе наблюдались периодические циклы. Это давало шанс на то, что наблюдения можно превратить в систему знаний. Так оно и случилось. В конечном итоге возникла вполне респектабельная теория Птолемея[3]-Гипарха.

Она существовала более двух тысяч лет и вполне справлялась со своей ролью предсказателя положения планет. Теория Птолемея имела свою внутреннюю логику и, казалось, будущее у нее такое же безоблачное, как и величественное прошлое.

В теории Птолемея-Гипарха главной причиной всякого движения был Бог. Это, дескать, "по его желанию" планеты движутся по окружностям, загадочно петляя. А почему петляют планеты? — да кто его знает! богу виднее, как они должны двигаться. Бог являлся в этой теории и причиной и следствием всего и вся.

Астрономы на основании теории предсказывали движение планет с точностью, подтверждаемой оптическими приборами. Это была очень серьезная и уважаемая наука. Она имела мощный штат профессоров и координировалась "академией наук" — папской церковью.

[3]**Птолемей**. Выдающийся греко-египетский астроном, астролог, математик, географ и оптик. Работал в Александрии Египетской, вёл там астрономические наблюдения в 125-141 гг. до Рождества Христова (до "нашей эры").

Правда, теория Птолемея-Гиппарха была очень сложна. Главный её недостаток — отсутствие единой логики. В ней не было базовой стержневой идеи, из которой исходили бы многие наблюдаемые случаи. Каждый раз, как только замечалось расхождение между теоретическими и наблюдаемыми, движениями планет, эта наука достраивалась очередным набором "эпициклов" и "дифферентов" и дополнительных "петель". При этом зачастую отсутствовало ясное понимание всей картины. И это было не случайно.

Современные исследования показали, что в теории Птолемея было много откровенных подлогов и намеренно искаженных астрономических фактов. Об этом написал один из современных исследователей птолемеевской теории Роберт Ньютон:

"Все наблюдения Птолемея, которыми он пользуется в "Синтаксисе", оказались подделкой. Многие наблюдения, приписанные другим астрономам, также часть обмана, совершенного Птолемеем... Само существование "Синтаксиса" привело к тому, что для нас потеряны многие подлинные труды греческих астрономов... "Синтаксис" нанес астрономии больше вреда, чем любая другая когда-либо написанная работа, и было бы намного лучше для астрономии, если бы этой книги вообще не существовало".

Запах перемен

Масштабные аферы имеют плохую привычку: они почти всегда выходят из-под контроля. Так случилось и на этот раз.

Однажды в этой идеальной системе обнаружился крошечный элемент не идеального. Так, пустячок, от которого можно было легко отмахнуться. Однако потом выяснилось, что это не "мелочь". Это Скверна. Астрономы тогда не догадывались, что этот "пустячок" оставит позже от этой теории одно пепелище.

Всё началось из элементарного "пустячка". Накопились факты систематического "ухода" момента равноденствия от теоретически расчетного значения. Наблюдаемая астрономами величина и направление ухода не вписывались в существующую теорию. Это было крайне неприятно, поскольку от этого момента определялся день Пасхи. От этого дня зависело и начало весенних полевых работ.

Это аномальное явление в начале XVI века вызывало серьезное беспокойство не только у астрономов, но и у высших иерархов католической церкви. По этой причине на Никейском соборе (325 г. н.э.) было решено подправить календарь. Еще одна попытка реформы календаря была предпринята на Лютеранском соборе в 1514 г.

Однако вскоре стало ясно, что реформы календаря не помогают. В конечном итоге количество поправок и доработок в теории достигло критической массы. Взрыв негодования по этому поводу был исторически неминуем.

Слабейшее звено маскировало язвы более крупных частей системы. И когда это звено разорвется, рушится вся система. Сначала полагали, что это "легкий недуг" лечится заговариваниями и простыми словесными "примочками". Увы, всё оказалось серьёзнее. Вскрыть этот абсцесс в XV в. могли лишь весьма изощренные "хирурги" — тонкие знатоки птолемеевской теории. Когда недуг перерастает в болезнь, думают вызывать лекаря. Лекаря не успели позвать: он сам пришел . Это был никому не известный Николай Коперник. Он предложил лекарство от этой болезни.

В своём сочинении *"Об обращении небесных тел"* Коперник высказал довольно простую мысль. Он заявил, что причинами нестыковок в безумно сложной теории является принципиально ошибочное построение самой теории. Коперник предложил рассматривать движение планет не вокруг Земли, а *вокруг Солнца.* В этом случае всё существенно упрощается. Но главное — при этом разрешаются ряд тупиковых проблем.

Правда, книга Коперника не стала литературным шедевром XV века. Она была написана на латинском языке и поэтому не могла найти своего широкого читателя.

Всякой идее нужны соки для роста. Идеи Коперника упали в пересохшую и потрескавшуюся от засухи почву. Нужен был благодатный дождь, чтобы Идея взошла мощным побегом. И он пришел.

Европейские историки любят рассказывать о благословенных XV-XVI веках. Именно в эти “весьма средние” века и начиналась мелкими ручейками эпоха Просвещения. В XVI веке возникает мировоззренческий фундамент, на котором строится потребительское общество через умаление Бога.

Именно в это время *протестантизм* вышел “из катакомб” католицизма. “Бог любит богатых” — главная идея протестантизма. Убивал ли ты людей, грабил ли и обманывал ли их на пути к своему богатству — не важно. Если ты стал богат, то боженька все твои грехи прощает. Короче, на пути к богатству никаких моральных препятствий не должно быть. Совсем никаких. Началось строительство новой социальной конструкции — “светское общество”, в которой Бога нет. Только деньги. Мораль далеко на периферии.

Католицизм был не согласен на ликвидацию какой-либо морали. И в этом был главный конфликт протестантов и католиков. Протестантам в борьбе с Ватиканом нужны были серьезные инструменты. Протестантизм нуждался в прагматичной идеологии. Нужно было избавиться от “божественной шелухи”, в которую были упрятаны зёрна рациональных знаний. И он её нашел. Волна протестантизма, захлестнувшая Европу, подняла на щит теорию Коперника. Важно было то, что идеи Коперника взламывали главную идею католиков, что — Ватикан центр Вселенной

Николай Коперник для планеты Земля не сделал исключения и говорил, что Земля, как и все наблюдаемые планеты, тоже вращается вокруг Солнца. Другими словами, Земля не является Центром Вселенной. Это наводило на мысль, что Ватикан, находящийся “в центре Земли”, не является духовным божественным Центром всего и вся.

Ватикан не простил Копернику такого богохульства. Если бы Коперник дожил до триумфа своей книги, то его бы сожгли на костре, а пепел развеяли.

Нет более опасного взрыва, чем взрыв справедливости

Самым мучительным для умирающего Николая Коперника были уже даже не боли в груди и не надрывный кашель, а долгое отсутствие Ретика. Ночью начался сильный озноб, из-за которого он всю ночь не спал. Уснул лишь рано утром, сжигаемый высокой температурой. Николай Коперник не слышал, как скрипнула дверь и как вбежал в комнату Ретик. Он уже с порога понял неладное...

Рисунок академика Фоменко А.Т.

Позже вернулся просвет сознания к Копернику, который оказался весьма коротким. Он открыл глаза, пытаясь сказать какие-то слова. Ретик, обливаясь слезами, что-то быстро рассказывал ему, но Коперник, кажется, даже его не узнал... Положив под его почти безжизненную ладонь книгу, Ретик надеялся, что может быть она придаст ему какие-то жизненные силы. Коперник гладил слабой немощной рукой пахнущий краской переплет и смотрел куда-то безжизненным взором вдаль.

Смерть Николая Коперника (24 мая 1543 г.) была исключительно местечковым событием и скорбь коснулась лишь его родственников и друзей. Для Ватикана Коперник был тем листочком на дереве власти, исчезновение которого ничего не меняет в жизни могучего дуба. Он был похоронен как обычный мещанин и могила его до сих пор не найдена.

Как обмануть Матрицу?

Идеи, высказанные Николаем Коперником в книге *"Об обращении небесных тел"*, со временем вызвали некий симптом социальной болезни. Медицине известны такие вирусы гриппа, исход действия которых бывает летальным, несмотря на незначительные признаки заболевания организма в самой начальной фазе.

Так было и с книгой Н. Коперника. Этот интеллектуальный вирус оказался смертельным для теории Птолемея–Гиппарха и в конечном итоге перевернул мировоззрение эпохи. Привычный и удобный взгляд на устройство мира начал трещать и разваливаться и это потом вызывало гнев и проклятия Ватикана в адрес Н. Коперника. Правда, "эпидемия" случилась не сразу.

Иногда в современных книгах можно прочитать, что католическая церковь "проморгала" одного из величайших еретиков, возможно, самого главного еретика за всю ее историю. Действительно, Николай Коперник миновал костер инквизиции. Сначала его книга не была внесена в список запрещенных книг. Это случилось позже. Через семь десятков лет книга Коперника стала запретной. В индексе официально запрещенных книг она находилась вплоть до конца XIX в.

Среди образованной элиты Европы тогда не нашлось сторонников новой коперниканской теории. Коперник знал, что его книга после публикации будет с негодованием встречена в "высшем обществе". По этому поводу еще до выхода своей книги он писал:

> "Возможно, появятся болтуны, абсолютно неосведомленные в математике, которые будут осуждать эти математические вопросы. Они будут ужасно искажать некоторые положения Священного писания с целью придраться к моему сочинению и всяческому его порицанию. Я игнорирую их презрительную критику как необоснованную".

Так оно и случилось. После издания работы Н. Коперника известный немецкий богослов Мартин Лютер[4] так отозвался о взглядах Николая Коперника:

Тихо Браге (1546-1601)

1. **М. Лютер**: "Этот дурак хочет перевернуть все астрономическое искусство. Не менее язвительную оценку Николаю Копернику позже дал и Галилео Галилей:

Г. Галилей[5]: "Я был убежден, что новая система — **чистейшая глупость**. Я спрашивал многих из бывших на лекциях и увидел, что для них лекции эти служили неистощимым предметом для насмешек".

Политический заказ — как приговор

Лишь через полвека датский астроном Тихо Браге[6] сделает официальное заключение, что коперниканская и птолемеевская теории примерно равноценны. А пока в год смерти Н. Коперника малышу Тихо Браге едва исполнилось три года. В это же время "под стол пешком ходил" и трехлетний Джордано Бруно[7].

Полностью опровергнуть Н. Коперника Ватикану не удалось. Поэтому пусть хоть какой-то "половинчатый" вывод о "равноценности" официальной и коперниканской теории вносит сумятицу в ряды критиков теории Птолемея.

[4]**Мартин Лютер** — известный немецкий богослов. Лютер отрицал власть (полномочия) духовенства быть посредником между человеком и Богом. Его работы были запрещены Церковью. Его взгляды привели к столетней религиозной войне в Европе.

[5]**Галилей Галилео** (1564-1642) — видный итальянский ученый и астроном. Открыл четыре спутника Юпитера, законы обращения Луны, лунный пепельный свет, горы на Луне, пятна на Солнце, вращение Солнца вокруг оси, фазы Венеры, выступ (впоследствии было выяснено, что это кольцо) у Сатурна. Установил, что Млечный Путь состоит из большого количества отдельных звёзд.

[6]**Тихо Браге** (1546-1601) — видный датский астроном. Жил и работал в Праге.

[7]Это монашеское имя. Настоящее его имя — Филиппо.

Сделал ли это заключение Тихо Браге искренне, как объективный ученый, или же исполнил "политический заказ" Ватикана, — трудно сказать.

Позже Иоганн Кеплер, сделав выдающиеся открытия трех законов движения планет, все же был "полноценным" автором только двух из них. Вспомним, что первый закон Кеплера звучит так: "***Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце***". Ведь то же самое говорил и Н. Коперник!

Единственное, что он не указал на эллиптический характер орбит... Этот закон Кеплера, фактически, поставил "жирную точку" в споре, верна ли теория Н. Коперника, или нет. Только жаль, что до этого триумфа своих идей Николай Коперник не дожил.

Но, пожалуй, самое интригующее в этой истории то, что Иоганн Кеплер был... учеником Тихо Браге. Так что крепкое вино, содержавшее и критику и мощную поддержку Н. Коперника, разливалось из одной "бочки", имя которой — научная школа Тихо Браге.

Поэтому, маловероятно, что взгляды коперниканца И. Кеплера сильно расходились со взглядами своего учителя — Тихо Браге. Однако, "официальное заключение" Т. Браге не помогло птолемеевской теории уцелеть.

И все же, во всей этой истории осталось много загадок. Вскоре после завершения научной экспертизы книги Коперника, в следующем году Тихо Браге неожиданно скончался, будучи в возрасте чуть больше пятидесяти лет. История странная. Может, ему "помогли" уйти в иной мир? Вполне возможно, кто-то отомстил Тихо Браге за то, что он дал такое "беззубый" и примиряющий две теории вердикт?

Мучеников всегда любят после их публичной казни. Гори, костер, ярче

История эта случилось давно, в конце XVI века. Корабли Венеции, закупоренные в Средиземном море, не могли вести мировую торговлю, поскольку Гибралтар контролировался их вечным соперником — Испанией. Мощный капитал, накопленный за несколько столетий торговой элитой Венеции, искал своего применения. Он нашел свою гавань в Англии.

Джордано Бруно
(1548-1600)

Деньги Венеции были направлены на строительство мощного океанского флота Англии. Сначала аристократы Англии сопротивлялись приходу иностранного капитала. Они боялись, что вслед за финансовым могуществом торговцы потребуют и политической власти. Так оно потом и случилось. Крупный капитал не дремал.

Однако активное противодействие со стороны английской аристократии вскоре было нейтрализовано "антикоролевской" революцией. Результатом ее было полное открытие шлюзов для развития торгового и промышленного капитала. Влияние королевского двора на политическую жизнь ограничили. Наиболее активные противники революционных перемен потеряли на плахе голову.

Профессор Джордано Бруно был одним из немногих доверенных лиц богатых венецианских купцов. Читая лекции в Лондоне и Оксфорде в течении нескольких лет, он вместе с тем успешно вел переговоры (в том числе и тайные) о размещении торгового капитала Венеции. Кроме того, он читал лекции, в которых пропагандировал идеи Николая Коперника. Вернувшись в Рим, был арестован. В мотивах его ареста до сих пор много неясностей и нестыковок.

До сих пор сохранилась часть протоколов тюремных допросов Джордано Бруно. Обнаруженные в современных архивах протоколы допросов, мягко говоря, не совсем отражают сущность дела и выполняют, по-видимому, совсем другую роль... В документах написано, что он просил о пощаде святую инквизицию, ибо любил жизнь и вовсе не хотел умирать. Однако подсаженные к нему в камеру тайные провокаторы засвидетельствовали, что он и в тюремной камере, якобы, продолжал проповедовать свои идеи множественности небесных миров.

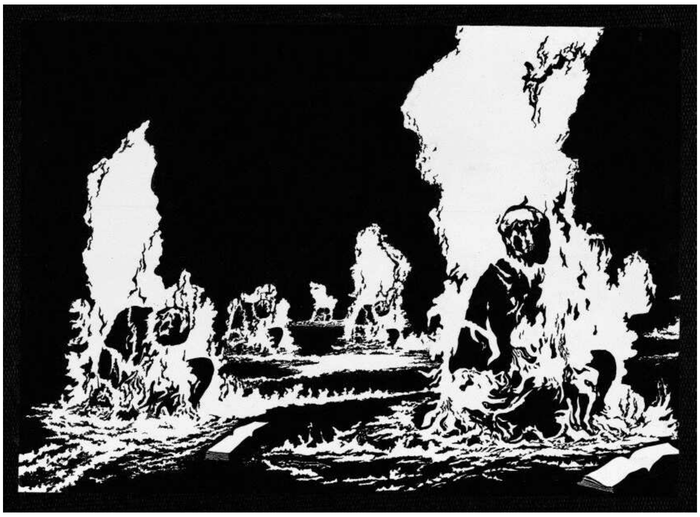


Рисунок академика Фоменко А.Т.

Инквизиция сделала вывод, что их подопечный категорически не исправим и все его обещания отказаться от взглядов Коперника — это просто уловка. После восьми лет тюрьмы было принято решение о казни. Чтобы он на площади ничего не крикнул, ему прибили гвоздем язык. Святейшая инквизиция приняла решение сжечь живьем Джордано Бруно. Публичная казнь была объявлена на Площади Цветов в Риме 17 февраля 1600 г. Толпа зевак с нетерпением ждала казни еретика.

Когда под ногами Джордано Бруно запылал костер, какая-то старушка вышла из толпы и бросила вязанку сухого хвороста в огонь. Потому что никто не имеет права отнимать у человека Веру. Она от Бога. Слышите? Никто! Может быть, Вера — это единственное, что держит человека на этой грешной земле. Пусть земля горит под ногами еретика! Гори костер ярче!

Вскоре последуют и другие “зачистки” и аресты. Ватикан до сих пор официально не реабилитировал Джордано Бруно. Сегодня в Риме, на площади Цветов стоит памятник с надписью “*Д*жордано Бруно. От столетия, которое он предвидел, на том месте, где был зажжен костер”.

Знаки отличия льют из знаков согласия

Арнольд Владимир Игоревич (1937-2010)

Однажды профессор В.И. Арнольд[8] получил приглашение вступить в папскую Академию Наук в Ватикане. В ответ на предложение Ватикана В.И.Арнольд ответил папе Римскому-Иоганну Павлу II, что он вступит в Академию Наук Ватикана “...только после реабилитации сожженного Вами на Площади Цветов Джордано Бруно”.

Как пишет далее В.И. Арнольд в своих воспоминаниях: “Очень доброжелательный к науке папа Иоганн Павел II ответил мне на это так: “Во-первых, зачем мы говорим по-французски? Давайте лучше будем говорить по-русски. Во-вторых, я уже сделал много для реабилитации Галилея, осужденного ведь за то, что он утверждал, что “система Коперника не *п*ротиворечит Святому Писанию” (а вовсе не за утверждение о вращении Земли).

[8]**Арнольд Владимир Игоревич** (1937-2010) — выдающийся советский и российский математик. Окончил механико-математический факультет Московского государственного университета. Доктор физико-математических наук, профессор МГУ. Академик АН СССР. Лауреат Ленинской премии, премии Московского математического общества, премии Крафоордской шведской Королевской АН, премии Лобачевского РАН, Харвиевской премии Техниона, премии Американского института физики, премии Хайнемана по математической физике.

Мы признали теперь его правоту: *п*ротиворечия, действительно, нет! Вопрос о вращении — другой. Что же касается монаха Джордано Бруно, то он был ***справедливо*** обвинен в том, что *о*тстаивал недоказанную научную гипотезу как установленный факт: это была *г*ипотеза о множественности обитаемых миров. Она сегодня *н*е доказана. Найдите "пришельцев", и мы его сразу реабилитируем!".

Проводникам новых идей — надежную изоляцию!

Если кто-то вышел и написал формулу, а второй подошел и дал ему кулаком в челюсть, то это нельзя назвать победой над Идеей. Инквизиторы больше не собиралась спорить с несогласными. Они решили выбивать им зубы.

Инквизиторы католической церкви не были арбитрами и не собирались "вникать в нюансы", кто из подозреваемых прав, а кто — нет. Это раньше они честно спорили с отступниками. Теперь они поняли свою ошибку и уже вели себя как воины Священного ордена. Инквизиция фанатично продолжала исполнять свой священный долг. А "долгов'' накопилось много. С врагом не спорят, его уничтожают.

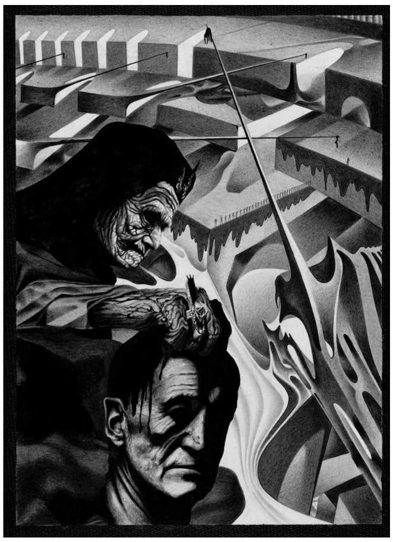


Рисунок академика Фоменко А.Т.

Уничтожив физически почти 10 миллионов человек в средние века, инквизиция заметила, что свою главную задачу всё же не выполнила. Энергии тратилось много, но все удары шли как-то мимо цели. Инквизиторы преуспели на ловле ведьм, разборе доносов, сожжению на кострах, но прозевали главное.

Оказалось, что врагом был не чиновник и не мещанин, которого можно подсидеть, и не армия, которую можно разбить. Врагом инквизиции были Идеи, не чувствительные к чиновничьим и воинским приемам боя. С Идеями было намного сложнее.

К ужасу инквизиции, среди аристократов появилась даже некая мода на богохульство. Вера в бога уже не была абсолютным концептом. Ее уже начали сгонять на обочину другие более привлекательные занятия — логика, риторика, философия...

Однако инквизиция легко обманывалась, если антихристианские мысли были упакованы в христианский формат. Инквизиция не видела скрытых смыслов. Для инквизиторов почему-то главным была не суть, а форма.

Если Идея до безобразия безбожная, но выглядит внешне глянцевой и божественной, то инквизиция не обращала на нее внимания. Интеллектуалы-безбожники легко научились "водить за нос" инквизицию, которая работала по формальным, заранее известным правилам.

"Отступники" легко переходили на новую терминологию, на новые смысловые значения, сохраняя свои главные мысли. У чиновников от инквизиции не было формальных поводов для действий, поскольку их инструкции зачастую не предусматривали таких тонких разворотов. У инквизиторов был "самурайский кодекс". Эти европейские "самураи" искали открытого богохульства, а в книгах находили славословия Богу. Это не давало формального повода для осуждения инквизицией.

Пройдет еще сто лет и "безбожники" с инквизицией "поменяются местами". Во время Французской революции (1789) тысячи священников были повешены на столбах под свист и улюлюканье толпы. Однако это уже другая история.

Жертвоприношение

Странные события начали преследовать Иоганна Кеплера[9] после публикации своей книги. Он

[9]**Иоганн Кеплер** (1571-1630) — немецкий математик, астроном, механик, оптик и астролог, первооткрыватель законов движения планет Солнечной системы.

был удивлен, что нигде не может устроиться на работу. Нет, работодателей он вполне устраивал и все обещали ему работу и заработок. Но как только он приезжал, так они почему-то внезапно отказывались от своего приглашения, которое давали ранее.

Иоганн Кеплер (1571-1630)

Кеплер не знал, что накануне его приезда к работодателям тайно наведывались какие-то люди и вели с хозяином "правильные беседы"... Служба тайных осведомителей работала отменно.

В итоге он так и не смог найти нигде хоть какой-то заработок. Иоганн Кеплер, не выдержав мытарств, нищеты и унижений, вскоре заболел и умер (15 ноября 1630 в г. Регенсбурге, Германия.), оставив в нищете своих несовершеннолетних детей без куска хлеба. Он был похоронен местной церковью, которая была разрушена в ходе тридцатилетней войны. До сих пор его могила не найдена. Сначала инквизиция пыталась отдать под суд и сжечь на костре его мать. Ее удалось спасти от чудовищной смерти невероятными усилиями.

Тайные осведомители продолжали докладывать, что Иоганн Кеплер не отрекся от своих мыслей. Значит, он ничего не понял ? Он не понял, что надо жить по-христиански и уважать те ценности, которые веками создавались поколениями... Так не бывает, что сотни лет *все* ошибались, а он, видите ли, "прозрел"... Да и вообще, кто он такой, этот *Кеплер*? Все знания от Бога. И никому не позволено топтать святую *Веру*. Никому! В конце-концов, святой инквизиции виднее, где божественная истина, а где — богохульство.

Гелиоцентрическая идея Николая Коперника была очень ценна. И всё-таки одна эта идея не давала полной картины движения планет вокруг Солнца. Иоганн Кеплер искал устойчивые эффекты и закономерности движения планет, используя астрономические таблицы наблюдений Тихо Браге. Труд оказался не напрасным. Кеплер обнаружил удивительные закономерности.

1. Траектория движения Марса представляет собой не круг, а эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2. Радиус-вектор, соединяющий планету и Солнце, в равное время описывает равные площади. Значит, чем дальше планета от Солнца, тем медленнее она движется.

Эти два закона он опубликовал в своей первой книге "Новая астрономия" (1609). Правда, Иоганн Кеплер был весьма осторожен в выводах и эти два закона он объявил справедливыми только для планеты Марс. Позже он нашел еще одну закономерность:

3. Отношение куба среднего удаления (a) планеты от Солнца к квадрату периода (T) обращения её вокруг Солнца есть величина постоянная для всех планет:

$$\frac{a^3}{T^2} = \mathrm{const}$$

Проанализировав таблицы наблюдений остальных планет, он увидел, что их движение также подчиняется этим закономерностям. В новой своей книге "Гармония мира" он рассказывает об этих трех закономерностях движения планет Солнечной системы, включая их спутники.

Однако, в этом игривом названии "Гармония мира" инквизиция не усмотрела никакой "гармонии". Где в этой "картине мира" идеальные окружности, по которым должны двигаться планеты? Эллипсы — это не идеальные окружности, они противоречат гармоничному устройству Мира. Почему Земля не в центре Вселенной? Значит и Ватикан не в центре Вселенной? Где в этом "новом мире"‘ место Священному Ватикану? Его там нет...

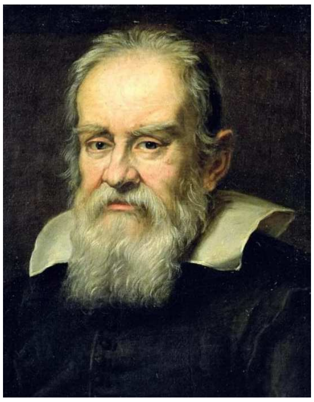
О том, как Галилей "подставил" Папу Римского

Галилей был знаменит тем, что составил весьма благоприятный персональный гороскоп для Великого Герцога Тосканского Фердинанда I Медичи. Самое удивительное в этой истории было потом.

Через три недели после представления персонального “благоприятного” гороскопа Великий Герцог умер (!).

Несмотря на скоропостижную смерть клиента, Галилей был удостоен титула Первого Математика Великого Герцогства Тосканского (со столицей во Флоренции) за этого составление “смертельно удачного” гороскопа.

Когда Галилео Галилей[10] увидел четыре спутника Юпитера в собственном телескопе, он понял, что Николай Коперник был прав. Юпитер со своими спутниками был очень схож на Землю с Луной. И это принципиально разнилось с теорией Птолемея.



Галилео Галилей
(1564-1642)

Галилей сожалел, что ранее отчаянно критиковал и высмеивал взгляды Н. Коперника. Его мучила совесть за то, что он ранее грубо и оскорбительно отзывался о Николае Копернике.

Сначала Галилей начал осторожно поддерживать теорию Коперника в приватных беседах среди влиятельных людей. Вскоре он выпустил свою книгу “*Диалог Относительно Двух Главных Систем Мира — Птолемеев и коперниканский*”. Книга построена в форме полемической философской беседы между Сальвиатти, который приводит доводы в пользу коперниканской системы, и Симплисио, который является Аристотелевским философом. Победила в этом споре коперниканская точка зрения.

Странно было то, что пропагандируя Н. Коперника, Галилей не поддерживал взглядов Иоганна Кеплера. В теории И. Кеплера ему не нравилось утверждение, что планеты движутся вокруг Солнца по ***эллипсам***. Галилею хотелось, чтобы траекториями планет были строгие ***круги***. Он считал, что эллипсами траектории планет “в принципе не могут быть”, поскольку эллипс — это “не совершенная кривая”, она не обладает полной симметрией и поэтому она не может лежать в основе мироздания. Симметрия ведь от Бога. Мир, созданный Творцом, является совершенным. Поэтому он не может состоять из “несовершенных” элементов. Эллипс — “не совершенный” элемент, в отличии от круга. Значит ему нет места в этом мире.

Галилей сильно рисковал, убеждая в неспешных светских беседах, что Коперник “где-то прав...”. Расчет был построен на том, что у него были личные очень хорошие отношения с Папой Римским. Предполагалось, что это будет надежным щитом от разного рода неприятностей.

Галилей предварительно даже рассказал Папе Римскому о своем желании написать книгу, в которой бы происходил диалог между сторонниками Коперника и его оппонентами. Папа Римский одобрил задумку. Он рассчитывал, что такая книга будет “правильно написана" и разъяснит наконец-то ошибочность взглядов Коперника. Миссия по разоблачению “кощунственных взглядов” Николая Коперника, с которой “не справился” Тихо Браге (и за это, возможно, лишился жизни), была возложена на Галилея.

Когда Папа Римский прочитал только что вышедшую из типографии книгу “Диалог...” Галилея, то был взбешен. Галилей нарушил все личные договоренности с ним! Книга убеждала своих читателей совершенно в обратном — в том, что Коперник прав. Этого прощать было нельзя!

В ответ на критику профессора Кастелли, о том, что теория Н. Коперника противоречит Священному Писанию, Галилео заявил, что Библия должна интерпретироваться в свете того, что наука показала, чтобы быть верной.

[10]**Галилео Галилей** (1564-1642) — итальянский ученый. Галилей сформулировал основной закон падающих тел, которые он подтвердил аккуратными измерениями. Он построил телескоп, с помощью которого он изучил лунные кратеры, и обнаружил четыре новых спутника, вращающихся вокруг Юпитера. Эта работа вызвала сенсацию. Галилео утверждал, что видел горы на Луне и доказал, что Млечный путь составлен из крошечных звезд.

Суд признал его виновным в том, в чем он оказался прав

Галилей все-таки недооценил ненависть Ватикана к Николаю Копернику. По личному приказу Папы Римского осенью 1632 г. Галилей был арестован, а его книга была внесена в список запрещенных книг. Через полгода заточения в темнице он предстал перед судом Инквизиции. Он должен был выбрать что-то одно: либо искреннее раскаяние и официальное отречение от своих взглядов, либо смерть. Он выбрал жизнь и был осужден к пожизненному заключению.

Однако вскоре приговор был смягчен. Галилей был приговорен к домашнему аресту, а не к тюремному сроку. Он жил в своем доме близ Флоренции под присмотром офицеров Инквизиции.

Находясь под домашним арестом, ослеп. Галилео Галилей умер 8 января 1642 года. Его похоронили без почестей и надгробия. Лишь спустя сто лет (1737), его прах был перенесен в собор Санта Кроче во Флоренции. Там он был торжественно погребен рядом с Микеланджело.

Год спустя в Англии родился Исаак Ньютон. Природа не терпит пустоты.

Литература

[1] Ньютон Р. Преступление Клавдия Птолемея. - М.: Наука, 1985., стр.318.

[2] Арнольд В.И. Истории давние и недавние. - М.: ”ФАЗИС”, 2005 г.

[3] Веселовский И.Н. Очерки по истории теоретической механики. - М.: “Высшая школа”, 1974 г.

[4] Голованов Я. Этюды об ученых. - М.: “Молодая Гвардия”, 1976 г.

[5] Костюшко В. Галилео, ты не прав! // Техника — молодежи. - № 12. - 1991.

[6] Берри А. Краткая история астрономии, пер. с англ., 2 изд. - М.-Л., 1946 г.

[7] Чепикова К. Продюсер Коперника. Подлинная история революции в астрономии. - М.: Наше Завтра, 2021 г.

Оникийчук Валерий Николаевич,
кандидат физико-математических наук,
Государственный Университет
Просвещения (г. Москва),
Кафедра “Высшей алгебры,
математического анализа и геометрии”

E-mail: valeryonikiychuk@yandex.ru

Оникийчук Игорь Валерьевич,
Руководитель проектов
ООО «Электрорешения», Москва.

E-mail: ionikv@inbox.ru

К 140-летию великого Н.Н. Лузина. Ещё раз о «деле против Лузина»

И. П. Костенко

9 декабря 2023 г. исполнилось 140 лет со дня рождения академика Николая Николаевича Лузина —- одного из величайших наших математиков и несравненного Учителя целого поколения крупнейших учёных, —- Учителя, выдвинувшего советскую математику на одно из первых мест в мире. Личности Н.Н. Лузина (научной, педагогической и человеческой) была посвящена статья [1], написанная к его 120-летию, и опубликованная в нашем журнале в 2003 г. Спустя 20 лет, автор возвращается к своему любимому Лузину и размышляет о его трагической судьбе.

Мне отмщение, и аз воздам.
К Римлянам 12:19

Напомню суть и фабулу «дела», как она кратко представлена в [2].

3 июля 1936 года в газете “Правда”[1] появилась анонимная статья «О врагах в советской маске»[2]. «В ней Лузин ... нарисован врагом, сочетающим “моральную нечистоплотность и научную недобросовестность с затаённой враждой, ненавистью ко всему советскому”. Он печатает “якобы научные статьи”, “не стесняется выдавать за свои достижения открытия своих учеников”, он недалек от черносотенства, православия и самодержавия, “может быть, чуть-чуть фашистски модернизированных”».

По следам статьи была создана Чрезвычайная Комиссия, в которую вошли ученики Лузина: П.С. Александров, А.Я. Хинчин, Л.Г. Шнирельман. Активное участие в работе Комиссии принимали

[1]Главный редактор —- Л.З. Мехлис.

[2]Историки математики (С.С. Демидов и др.) полагают автором этого пасквиля Э.Я. Кольмана, в то время —- зав. отделом науки Московского горкома ВКП(б). Стиль, словесные обороты, ярлыки, целые куски текста повторяют подписанные им статьи.

ученики Лузина: А.Н. Колмогоров и Л.А. Люстерник, а также: молодой ленинградский математик, комсомольский активист Академии и уже членкор С.Л. Соболев, ученик Хинчина А.О. Гельфонд и учёный секретарь Группы математики АН Б.И. Сегал[3].

В итоговом Заключении Комиссия «полностью подтверждает характеристику, данную Н.Н. Лузину в газете "Правда"». На этом основании Президиум АН СССР принял Постановление от 5 августа 1936 г. Вот выдержка: «Относясь, по существу, нелояльно к советской власти и пренебрежительно к советской науке, принося ей тем прямой вред, он тщательно прикрывался маской крайне угодливой лояльности... Такое лицемерное и двуличное поведение Лузина ... несовместимо с достоинством действительного члена Академии Наук. ... Однако, учитывая значение Н.Н. Лузина как крупного математики ... и, исходя из желания предоставить Лузину возможность перестроить всё его дальнейшее поведение и работу, Президиум считает возможным ограничиться предупреждением...».

С.С. Демидов пишет: «Кампания[4] резко оборвалась вмешательством сверху, судя по всему, её остановил сам И.В. Сталин»[5] [3, с. 37, 59, 143].

Результат этого "дела": Лузин вышел из состава Группы математики АН, председателем Президиума которой был, и потерял работу (в 1937 г. руководимый им отдел Математического института АН СССР был закрыт), не считая официального клейма вредителя, лицемера, плагиатора и пр. И ещё один прискорбный результат —- он потерял связь со студенчеством. А сколько молодых умов он мог бы ещё воспламенить страстью к науке!

В 1999 году вышла в свет книга [3], в которой были полностью приведены стенограммы пяти заседаний Комиссии, найденные в архивах канцелярии Академии наук[6]. Публикация архивных материалов выявила ранее скрытое обстоятельство: активными участниками политической травли Лузина оказались его ученики (не все). Главную роль "прокурора" сыграл его первый ученик П.С. Александров —- глава московской топологической школы.

Он же оказался инициатором, запустившим окольным путём письмо-донос в ЦК. Этот факт обнаружил позже ученик Лузина П.С. Новиков, не запятнавший себя участием в этом "деле".

В 2007–2011 гг. в различных журналах появилась статья новосибирского математика С.С. Кутателадзе «Корни дела Лузина», в которой он прояснил роль в этом "деле" его учеников, и дал им публично должную моральную оценку. Позицию автора поддержали другие новосибирские, а также московские и петербургские учёные —- члены МО РАН (не все). Они[7] направили Президенту РАН Ю.С. Осипову и Академику-секретарю МО РАН Л.Д. Фаддееву письмо, в котором предложили «отменить Постановление Президиума АН СССР от 5 августа 1936 г. "Об академике Н. Н. Лузине" как порочащее имя выдающегося российского ученого». В результате, Президиум РАН, заслушав сообщение Л.Д. Фаддеева, принял

[3]В Комиссию также входили О.Ю. Шмидт (активно поддерживал обвинения) и С.Н. Бернштейн. Он и А.Н. Крылов — единственные, кто "отважно" защищали Лузина.

[4]Журнал "Успехи математических наук", в редколлегии которого состояли Колмогоров и Люстерник, открыл номер (1937, № 3) редакционной статьёй «Изжить лузинщину в научной среде» (редактировали номер Ф.Р. Гантмахер и Д.А. Райков). В ней, среди прочего вздора, ставились в вину Лузину «двусмысленные рецензии на плохие книги ... это объективно направлено против политики партии». В этом же номере выступил А.Ф. Бермант: «Разоблачение вредительской деятельности Лузина и ему подобных ... еще теснее сплотит ...». На собрании математиков МГУ, посвящённом «делу Лузина», основной доклад делала С.А. Яновская: «Возмутительное вредительство его сказалось при переработке известного учебника Гренвиля ... Вся переработка книги пестрит дефектами и ошибками» [6, с. 362–363].

[5]Сейчас этот факт установлен точно — решение было принято Политбюро по письму акад. П.Л. Капицы Председателю Совнаркома В.М. Молотову от 06.07.1936.

[6]Это оказались первичные стенограммы —- без правки, с пропусками, ошибками, —- почему и сохранились. Официальная стенограмма была уничтожена.

[7]Следует назвать имена этих достойных людей: академики: А.А. Боровков, В.Е. Захаров, И.А. Ибрагимов, В.Е. Накоряков, А.К. Ребров и Ю.Г. Решетняк.

Постановление № 8 от 17 января 2012 г.: «Отменить Постановление Президиума Академии наук СССР от 5 августа 1936 г. (протокол № 16)».

С.С. Кутателадзе пишет, что Президиум РАН «поставил точку в “деле Лузина”». Но, думается, окончательная точка ещё не поставлена (об этом —- позже).

С.С. Кутателадзе доказал, что “дело Лузина” является, по своему существу, не делом Лузина а, делом “против Лузина” [2]. Исполнителями этого “дела” являются его знаменитые ученики[8]. Вот один из фактов их деяний.

“Многоопытный” Сегал внёс добавление в проект резолюции: «Я предлагаю в конце добавить: “Показывает, что Н.Н. Лузин своей деятельностью за последние годы приносил вред советской науке и Советскому Союзу”. Эта добавка давала формальное основание исключить Лузина из состава Академии, поскольку в Уставе было записано, что члены Академии “лишаются всех своих званий, если деятельность их направлена во вред Советскому Союзу”. Эту статью извлёк в ходе обсуждения ученик Лузина А.Я. Хинчин, задав секретарю Академии Н.П. Горбунову вопрос: “Какая статья Устава АН СССР даёт возможность исключить члена Академии из её состава?”. Замечание А.Н. Баха, что “ставить таким образом вопрос мы никаких оснований не имеем” встретило “отпор со стороны А.Я. Хинчина и С.Л. Соболева”» [4, с. 33–34].

На основании анализа фактов, С. С. Кутателадзе заключает: «Если у Лузина и была вина, она лежала в сфере камеральных математических отношений учитель-ученик. Сколь-либо убедительных доказательств плагиаризма Лузина не предъявлено. Инкриминируемые ему обвинения ... шиты белыми нитками и грубо натянуты. ... То, что предъявляется как доказательства, таковыми не были даже в то время ни для П.Л. Капицы (1894–1984), ни для В.И. Вернадского (1863–1945), ни для А. Данжуа (1884–1974), ни для Лебега, ни для многих других людей, достигших зрелого возраста. . . . Изуверство, учинённое над Лузиным, не идет ни в какое сравнение с предъявленными ему этическими претензиями» [2].

Сам Лузин исчерпывающе объяснил ситуацию в своём заявлении в Президиум АН и предложил своим голословным обвинителям метод объективного её разрешения, который те, конечно, принять не могли:

«Я категорически отрицаю наличие какого-либо плагиата у моих учеников... Заимствование идей у моих учеников мне и чуждо, и совершенно не нужно, так как мое научное имя получило широкую известность еще до того, как у меня появились ученики. С обвинением меня в плагиате я прошу лиц, делавших это голословно, выступить в научной печати на двух языках, мною будет дан исчерпывающий печатный ответ на это. Когда я работал с учеником, я ему давал не только тему, но часто еще изобретал и метод для ее разработки. И когда ученик кончал свою работу, я считал себя вправе продолжать работать этим методом. Я крайне сожалею, что темы моим ученикам я часто давал в пределах моей личной работы и этим создавал переплетение идей...» [5, с. 389].

Заключение С.С. Кутателадзе: «инициаторами и движущей силой этого дела были ученики Лузина, . . . боровшиеся за ликвидацию влияния Лузина в математической инфраструктуре того периода» [2][9].

[8]Кутателадзе отвёл наветы на И.В. Сталина: «Гипотеза о том, что Сталин затеял дело Лузина, не имеет никаких документальных подтверждений. Она представляется мне надуманной и явно апостериорной. ... Это не Сталин и не Кольман уничтожили официальные стенограммы заседаний Чрезвычайной комиссии АН СССР, а те, кто был заинтересован в сокрытии правды». Эту “гипотезу” возобновил в 1995 г. некто А.Е. Левин —- философ-эмигрант из России, мотивируя её глупым аргументом, —- якобы, таким способом Сталин хотел повысить патриотизм советских учёных. Сталин повысил патриотизм иным делом —- построил новое здание Московского университета, дал ему имя М.В. Ломоносова (а не своё) и обеспечил современной материальной базой.

[9]Вероятно, так понимал дело и сам Лузин. Годом ранее, 27.07.1935 г., он писал польскому математику В. Серпинскому: «Г-н Александров имеет виды войти в Академию наук в качестве действительного члена (членкор с 1929 г. —- И.К.), сместив меня. С этой целью он требует пересмотра моих работ, заявляя, что я не имею права быть членом

Это — правда, но — не вся правда. Остаются вопросы. Во-первых, — зачем ученикам нужно было ликвидировать влияние своего учителя? Во-вторых, — как объяснить вопиющее несоответствие заурядной прагматичной цели и изуверского метода её достижения?

Сначала —- первый. Чем Лузин им мешал? Мешал научному росту? Нет. Карьерному? Тоже нет. В 1934 г., уже после декларации с участием Гельфонда (см. далее), Лузин пишет Л.В. Канторовичу, что при выборах в члены-корреспонденты Академии наук будет «стоять за Гельфонда, сделавшего недавно гениальное открытие». А в 1939 г. пишет Вернадскому: «Владимир Иванович, кандидаты по математике —- Соболев и Колмогоров —- хорошие. Я буду голосовать за них» [2]. Не поступился научной объективностью.

Посмотрим теперь на действия "учеников" после завершения их "дела". В октябре 1936 г. Лузин написал заявление о сложении полномочий председателя Президиума Группы математики АН. И сразу же, в декабре была проведена сессия ГМ, посвящённая «состоянию математического образования в стране» и программе его реформирования[10] с целью «поднятия нашей школы на высшую ступень» [6, с. 95]. Все ученики, выступившие против Лузина, —- активные участники этой сессии. Программу реформы педагогического образования представил в своём докладе Люстерник: заменить сложившиеся в пединститутах математические курсы университетскими, упразднить педвузы и слить их с университетами. Основные идеи задуманной школьной реформы изложил Хинчин в журнале «Математика в школе» [1939, №№ 4,6]: ввести в программы анализ бесконечно малых, сделать понятие функции стержнем, повысить строгость.

Вот для этой-то "реформы" Лузин с его авторитетом и, как руководитель ГМ, был существенным препятствием, —- идеи "реформаторов" отрицались всей его научной и педагогической жизнью и его учебниками. Главным в учебной книге был для Лузина не принцип строгости, а "ориентировка на понимание". Абсолютная строгость недостижима и «затруднительные для учащихся рассуждения ... кажутся совершенными в научном отношении ... в смысле строгости немногого стоят и всегда могут быть заменены другими, более интуитивными и столь же научными» [7, с. VII].

В 1937 г. "реформаторы" представили в Наркомпрос проект своей программы. Наркомпрос обратился к учителям: «очень важно, чтобы учителя сказали, насколько приемлема эта программа» [8]. Учителя подвергли профессорскую программу уничтожающей критике: «её выполнить нельзя... достигнем обратных результатов» (прогноз оправдался в 1978 г.), указали на порочность принципов (логическая систематика, абстрактность, строгие доказательства очевидного и др.) и не допустили её принятия.

Вместо того чтобы обдумать критику, "реформаторы" (Хинчин) объявили её «маскировкой косности и рутины ..., равнением ... на отсталые слои учительства» [6, с. 116]. Одновременно они развернули кампанию по дискредитации методических кадров Наркомпроса и педвузов: «вредительское руководство ... продвигало в педвузы неквалифицированных людей ..., работали ... халтурщики и невежды .... Кадры методистов ... малокультурные, проповедуют упрощённые теории с недооценкой возможностей советского ребёнка...» [там же, с. 105]. Те же методы, что и против Лузина: голословные обвинения, алогичность доводов, агрессивный тон, очернение личностей, навешивание ярлыков. Напомним: учёный секретарь ГМ, который по должности составляет документы, —- Б.И. Сегал.

Неудача не образумила "реформаторов". Они перешли к длительной подготовке "реформы". Начал её в 1949 г. А.И. Маркушевич и вёл 20 лет. В ней участвовали все главные противники Лузина: Хинчин готовил кадры в АПН, Александров обеспечил в ММО трибуну для пропаганды "реформаторских" идей и придания им "научного" веса, Соболев и Колмогоров поддерживали в АН действия

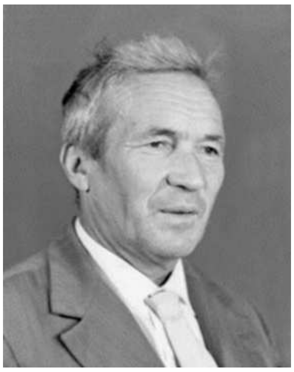
Академии, поскольку мои идеи все украдены у Суслина» [2].

[10]Новые академики проявили "озабоченность состоянием" в то время, когда качество образования росло "не по дням, а по часам'. В 1935 г. инспектор ЦИК СССР доложил Всероссийскому совещанию: «с каждым годом имеется несомненное повышение уровня знаний поступающих в высшую школу по математике» [6, с. 47]. В 1937 г. директора вузов подтвердили этот факт.

"реформаторов"[11]. В 1972 г., в разгар "реформы" Соболев ездил на Международный конгресс по образованию в Эксетер (Англия) и отчитывался перед международными "реформаторами". В 1978 г. он не допустил в Решение Общего собрания ОМ АН СССР фразу о «неприемлемости принципов» "реформы", и блокировал их обсуждение.

Колмогоров был поставлен во главе «реформы» на последнем этапе подготовки, за 3 года до её начала — его имя было использовано как знамя. "Реформу" ложно назвали "колмогоровской" (её основные принципы сформулировал Хинчин) и, тем самым, перевели на него всю ответственность за запланированные результаты. Сами (Маркушевич и др.) остались "в тени".

"Реформа" началась в 1970 г. и завершилась в 1978 г. катастрофическим падением качества знаний. С этого момента был запущен процесс непрерывной, неостановимой деградации образования. При поддержке кого-то в высшем эшелоне государственной власти "реформаторам" удалось удержать и закрепить результаты. Ну, что ж, ради «поднятия нашей школы на высшую ступень» можно было пожертвовать своим Учителем.



Теперь второй вопрос —- несоответствие цели и метода. Здесь надо вспомнить о более ранних фактах применения этого метода —- ложных политических обвинений, клеветы и публичного унижения жертв.

В апреле 1927 г., за два года до выборов в АН, некто А.Н. Бах —- биохимик, народоволец, вернувшийся в Россию после 32-летней эмиграции, —- создаёт Всесоюзную ассоциацию работников науки и техники для содействия социалистическому строительству —- ВАРНИТСО. В числе её тайных инициаторов были А.Я. Вышинский и В.М. Свердлов. Программа: «немедленная кампания в печати против АН; ... линия на моральное уничтожение лидеров прежней науки; ... репрессии против тех, кто может оказать им поддержку; ослабление материальной базы АН; разрушение её связей; завоевание командных высот в АН, а затем и полное овладение ею» [9, с. 173].

«Линию на моральное уничтожение» реализовала газета «Ленинградская правда» (гл. ред. М.А. Рафаил), которая регулярно печатала погромные, клеветнические статьи на «учёных-обскурантов» АН [там же, с. 172, 174, 177, 189]. 14 февраля 1929 г. газета подвела победоносный итог: «Академия освежена, она пополнена новой, революционной кровью» [там же, с. 177]. Вдохновитель этого "дела" А.Н. Бах стал академиком, П.С. Александров — членкором.

Л.А. Люстерник, Л.Г. Шнирельман, А.О. Гельфонд

Следующее "дело". В 1930 г. создана «Инициативная группа по реорганизации Московского математического общества» (президент Д.Ф. Егоров, вице-президент Н.Н. Лузин, секретарь И.И. Привалов), в которую вошли Л.А. Люстерник, Л.Г. Шнирельман, А.О. Гельфонд, Л.С. Понтрягин[12], К.П. Некрасов. Подписанная ими «Декларация» была направлена против «открыто реакционных элементов» в среде математиков. 21 ноября Московское математическое общество было "реорганизовано". В новый Президиум ММО вошли Яновская, Выгодский, Хинчин, Люстерник, а в кресло председателя вместо Егорова сел сотрудник Института красной профессуры Э.Я. Кольман, через год передавший этот пост П.С. Александрову —- надолго. Старейший русский

[11] Подробную историю подготовки, реализации и закрепления результатов "реформы-70" см. в [6, гл. 3–8].

[12] Л.С. Понтрягину в то время было 22 года, и он находился под обаянием Люстерника и Шнирельмана —- «оба они в течение многих лет были моими друзьями» (пишет он в своём "Жизнеописании...", с. 58).

математический журнал «Математический сборник», тоже "освежился" —- ответственным редактором стал Люстерник, отв. секретарём —- Гельфонд.

В 1931 г. Кольман начал публичную травлю Лузина обвинением в «идеализме, приводящем к кризису основ математики». 22 февраля 1931 г. датирован "секретный" донос Кольмана на Лузина в ЦК ВКП(б). К Кольману присоединилась сотрудница Комакадемии С.А. Яновская, обвиняя Лузина и его учебники в "идеалистическом формализме" (что это такое?), навешивая зловещие ярлыки: "вредительство", "двурушничество". На семинаре Яновской выступали и печатались в изданиях Комакадемии: Хинчин, Люстерник, Шнирельман, Колмогоров [6, с. 345–348, 362].

В Ленинграде погром математической школы вело «Общество математиков-материалистов», организованное Комакадемией в декабре 1928 г., состоящее всего из 5 человек, и руководимое Л.А. Лейфертом[13] и Б.И. Сегалом (!). Главный удар был направлен против председателя Ленинградского физико-математического общества проф. Н.М. Гюнтера и его "группы" (В.И. Смирнов, Г.М. Фихтенгольц и др.) —- против "рекционной гюнтеровщины". Конечным результатом стала ликвидация общества и замена его новым обществом "математиков-партийцев". Гюнтер вынужден был написать в газету письмо с признанием "ошибок". «Желание работать на новых путях» выразили публично Смирнов и Фихтенгольц. Лейферт заставил написать покаянное письмо заведующего кафедрой математики Ленинградского пединститута имени А.И. Герцена профессора С.А. Богомолова, обвинив его в идеализме и, под видом диспута, устроив ему в институте публичное шельмование.

Подобные процессы шли на рубеже 1920–30-х годов всюду: в науке, в образовании, в искусстве, в литературе, в армии. Шельмовалось и морально уничтожалось многое ценное, талантливое, национально-русское [6, с. 26–34].

Пример —- травля в печати великого русского дирижёра Н.С. Голованова[14] ("головановщина")[15]. В 1928 г. он вынужден был уйти из Большого театра. Но в следующем году был восстановлен по личному распоряжению И.В. Сталина. В 1953 г., сразу после смерти Сталина, Голованов вторично был "изгнан" из Большого театра, чего не пережил, и в том же году скончался от сердечного приступа после "дружеского" сообщения о невозможности возврата в БТ. Было ему всего 62 года.

Другой яркий пример —- МХАТ: «"Рапповская дубинка" то и дело проходилась по головам основателей МХАТ. В. Блюм, С. Марголин, В. Павлов и другие дружно создавали образ Художественного театра в виде "старой барской кареты, которой, конечно, никогда не догнать советского локомотива", расценивая каждый спектакль как очередной "дебют буржуазно-помещичьего театра"... . П. Новицкий ... разоблачал театр, "глубоко чуждый советской эпохе". ... Подсекция Комакадемии в 1930 г. сделала вывод об идеалистической сущности "системы" ... . Возникает реальная угроза расформирования театра и создания на основе лучшей части труппы "театра РАПП" ... в 29-м году в МХАТ назначается новый "красный директор" М.С. Гейтц ... через два года Станиславский обращается в правительство и взывает к "спасению приближающегося к катастрофической гибели Художественного театра"... . "Меры", предложенные Станиславским, были полностью приняты: театр перешёл из ведения Наркомпроса в ведение Президиума ЦИК, непосредственное руководство театром с января 1932 г. поручалось К.С. Станиславскому и В.И. Немировичу-Данченко» [6, с. 33].

Та же "дубинка" проходилась и по многим другим талантливым русским людям, например, по М.А. Булгакову. В 1929 г. его пьесы перестали идти во всех советских театрах, и он фактически остался без средств к существованию. 28 марта 1930 г. он пишет письмо советскому правительству. Вспоминает Е.С. Булгакова: "8 апреля ему звонит Сталин. «Мы ваше письмо получили. Читали с

[13] В 1932 г. Лейферт поучаствовал в травле в Ростове замечательного представителя русской педагогики, методиста-философа Д.Д. Мордухай-Болтовского. В начале 1938 г. Лейферт арестован «по подозрению в причастности к деятельности правой троцкистско-зиновьевской организации Азовско-Черноморского края ... дал признательные показания и вскоре расстрелян» [6, с. 34].

[14] Н.С. Голованов (1891–1953) —- дирижёр, пианист, композитор, народный артист СССР (1948). Четырежды лауреат Государственной премии СССР (1946, 1949, 1950, 1951).

[15] Поставим в ряд: "егоровщина", "лузинщина", "гюнтеровщина", "киселёвщина", "головановщина", позже добавится "ждановщина" и др. Один почерк.

товарищами. Вы будете по нему благоприятный ответ иметь .... Вы где хотите работать? В Художественном театре? — Да, я хотел бы. Но я говорил об этом, и мне отказали. — А вы подайте заявление туда. Мне кажется, что они согласятся»"[16]. Эти и многие другие подобные факты связаны в пространстве и во времени. Это — политика. Но не политика Сталина.

Наконец, ещё один вопрос. Кутателадзе пишет: «Разъяснения своих отношений с Лузиным, которые при жизни оставили П.С. Александров и А.Н. Колмогоров, по сути, одинаковы. Высказанные ими суждения по сей день в той или иной форме разделяются их многочисленными учениками. Подчеркивается, что Лузин был не таким значительным математиком как затравившие его ученики»[17]. Так ли это?

Кутателадзе разбирает этот вопрос в разделе «Математические корни дела Лузина». Вот несколько его суждений:

«Г. Кантор (1845–1918) стал предвестником грозных перемен, заявив, что "сущность математики заключена в ее свободе"».

«... эпоха теории вероятностей, функционального анализа, обобщённых функций и топологии началась тогда, когда идея единственного последнего обоснования была разрушена раз и навсегда. К. Гёдель (1906–1978) указал некоторые особенности мышления, объясняющие данный феномен, но совершенные математики чувствовали их, руководствуясь врождённой интуицией и вызовами разума».

«Успешные прорывы (?) в науке, осуществлённые великими учениками Лузина, были основаны на отказе от его математических идей.... Его одарённые ученики чувствовали необходимость освобождения от дескрипции (?) и сопутствующих чудесных, но неосуществимых мечтаний (?) Лузина с целью достижения математической свободы ... на пути освобождения математики от иллюзий категоричности (?)».

«Математика ... не категорична, она свободна. Эту свободу математики ... лучше других демонстрировал ... А.Н. Колмогоров... . Он был более свободен в математике и, значит, был бóльшим математиком».

Если я правильно понял, основную мысль Кутателадзе можно выразить простыми словами так. Лузин стоял на позициях категоричности, искал единственное, последнее обоснование математики. Развитие науки в XX веке доказало, что эта позиция ошибочная. Ученики Лузина интуитивно это чувствовали, вырвались из оков консервативных идей Лузина, и обрели свободу творчества. Значит, они бóльшие математики, чем Лузин.

Думается, критерий не верен, и вывод не убедителен. Путь Лузина мало кому был по силам, по нему можно было идти только с его мощной помощью, и ученики могли просто перейти на более лёгкие для себя пути (как ни возмутительно это может для кого-то звучать). Не они открыли эти пути, поэтому их переход нельзя называть прорывом. Сам Лузин оценивал эти пути так: вероятность — полунаука, топология — это ботаника. Надо бы понять, — почему он так оценивал? Ведь научные оценки и предвидения Лузина всегда оправдывались.

А вот всё творчество Лузина, начиная с его знаменитой диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд», — это, действительно, постоянные прорывы, открывающие новые пути движения научной мысли, освещающей далёкие горизонты. Это признавали его ученики, признавали выдающиеся современники в нашей стране и за рубежом. И это очень хорошо видно на замечательном анализе работ Лузина [10], сделанном В.А. Успенским через 25 лет после его преждевременной кончины.

Лузин — мечтатель? Странно. Никто ещё так Лузина не называл. Ученики, сохранившие верность, называли его «одним из крупнейших математиков-мыслителей нашего времени». Знаменитый А. Данжуа, через много лет после смерти Николая Николаевича назвал его в своей статье «одним из самых великих аналистов в мире». Анри Лебег: «Г-н Лузин исследует вопросы с философской точки зрения и приходит к математическим результатам: беспрецедентная оригинальность!»

[16]Булгаков М. Собр. соч. Т. 10. М., 2000. С. 260–261.

[17]Из этих слов следует, что эту установку (мы значительнее!) задали сами "ученики" Лузина.

Математик-мыслитель! Математик-философ![18] К кому ещё из великих можно отнести эти определения? Разве, лишь, к Анри Пуанкаре.

Приложимы ли подобные подобные высшие оценки к его ученикам? На наш взгляд, — нет.

Здесь уместно напомнить слова академика С.Н. Бернштейна: «значение Колмогорова преувеличивают»[19].

Между прочим, Лузин и Пуанкаре (и, по-видимому, только они) сразу поняли, что идея Гильберта о возможности формализовать всю математику является ошибочной. Поняли задолго до того, как была доказана теорема Гёделя. Более того, Лузин предвосхитил[20] эту теорему (и даже, в более сильном виде), высказав предположение, что «среди задач арифметики есть задачи абсолютно неразрешимые» (из отчёта Лузина на заседании АН о своей заграничной поездке, 1930 г.).

Для того, чтобы не согласиться с Гильбертом —- первым авторитетом в математике своего времени, надо было обладать высшим, не только математическим, а философским мышлением, — мышлением, органично и глубоко связанным с Сущим, а не с логической системой. Это — характеристическое свойство всех подлинных Гениев. Они прозревают Истину поверх всех условностей времени. Они — ясновидцы. Только они подлинно СВОБОДНЫ.

И вот эта "беспрецедентная" особенность лузинского мышления вызывала непонимание и раздражение у некоторых математиков. Симптоматичный факт: фундаментальную статью Лузина "Функция", написанную для первого издания БСЭ (1935, т. 59, с. 314–333), Колмогоров (он был членом редколлегии второго издания) заменил короткой заметкой И.П. Натансона.

У тех же математиков, которые понимали Лузина, он вызывал изумление и восхищение. Анри Лебег: «поистине малейшая крупица написанного, возвеличенная толкованием г-на Лузина, оборачивается исключительно богатой россыпью» [10, с. 105]. В.А. Успенский: «он с беспрецедентной смелостью предсказал их неразрешимость — и это в 1925 г., при том, что первые результаты о неразрешимости теоретико-множественных гипотез появились лишь в 1963 г. При этом Н.Н. Лузин с поражающей глубиной раскрывает причины еще только предвиденной неразрешимости. . . » [10, с. 91].

Мысль Лузина не имела пределов, его волновала даже теория Эйнштейна, и он размышлял о бесконечномерной структуре пространства (переписка с В.И. Вернадским 1937–40 гг.). Через 65 лет учёные МГУ публикуют эту переписку, и в заключение пишут: «В МЛТИ на протяжении десяти последних лет проводятся компьютерные исследования физических процессов . . . утверждение Н.Н. Лузина "... о правизне, левизне, числе измерений пространства. . . " находит подтверждение в проведенных компьютерных исследованиях» [11, с. 120–121].

Теперь — о канторовской "свободе". Вот к какому удивительному выводу приходит Лузин в результате исследований своих и своих учеников: «вместо триумфа мы натолкнулись на ряд загадок, полностью разгадать которые мы не умеем, но которые не оставляют ни малейшего сомнения в том, что дело математического анализа поставлено неправильно при введении в него идей Cantor'a» [1, с. 5].

---

[18] Ученики Лузина не могли не чувствовать свою несоизмеримость с Учителем (это чувствовал даже великий Лебег). Но у не лишённых таланта и одарённых большим честолюбием математиков это ощущение не могло не вызывать чувства ревности, болезненного желания (подсознательного или сознательного) ниспровергнуть авторитет Учителя. Этот психологический феномен ("комплекс Каина" — «совокупность враждебных эмоций, основанных на зависти...» [Большая психологическая энциклопе-дия. М. 2007, с. 310]) следует учитывать при объяснении их поведения в Комиссии. Он объясняет и их последующее, мягко говоря, неадекватное отношение к "поверженному" Учителю [2]. Подчеркну, — это моя личная гипотеза, объясняющая психологические мотивы действий учеников и, возможно, в какой-то мере, их оправдывающая ("такова природа!").

[19] Ярким примером "преувеличения" может служить книга В.М. Тихомирова "Андрей Николаевич Колмогоров. . . " (М.: Наука, 2006), из которой приведена эта цитата (с. 145). Ограниченность мышления учёного отчётливо проявилась в педагогических идеях, которые его "ученик" В.И. Арнольд назвал "вздором" [6, с. 221]. Вредоносность этих идей подтвердила жизнь, но об этом стараются умалчивать, а его "значение", продолжают преувеличивать (см. доклад В.А. Садовничего на недавнем съезде преподавателей математики в МГУ).

[20] А что предвосхитили ученики? Поднятие школы на "высшую ступень"?

В чём же состоит "неправильность"? Похоже, этот вопрос сегодня никого не интересует. Чуть далее Лузин говорит о «яде, который содержится в атмосфере современного анализа. ... В принципах математического анализа необходимо ... признать continuum понятием субъективным» (Отчёт о деятельности Академии наук СССР за 1930 г., с. 30).

Возможно, что эта и другие математико-философские мысли Лузина преждевременны. Возможно, о них вспомнят в будущем, когда будет осознан очередной кризис математики —- кризис, который чувствуется уже сегодня, в частности, в математическом образовании.

Математика объективно пошла по иным путям "свободного" творчества в рамках строгих логических систем, оставив позади мысль и страдания Лузина. Не ведут ли эти догматические рамки к вырождению мысли в схоластику? И кто здесь прав — Лузин или История? Покажет Время.

А пока части математиков кажется, что Лузин, действительно, —- пройденный этап, и "не надо ворошить прошлое". Другие его или не знают, или забыли. Немногие знающие молчат[21]. Но кто-то упорно продолжает поддерживать существование негативных мифов о Лузине. Кому-то это зачем-то надо. Кто-то (кто?) даже оскверняет его могилу [2]. Все участники «дела против Лузина» давно сошли со сцены, а продолжатели их "дел" не сходят.

И, тем не менее, через 60 лет после ухода Лузина нашлись на Руси люди, которые сказали: «ЧЕСТЬ ЛУЗИНА — ЧАСТЬ МОЕЙ ЧЕСТИ» [2]. И восстановили его нравственную честь.

История не кончается сегодняшним днём. Её императив —- "всё пройдёт, только правда останется". Правда останется, несмотря на все старания её скрыть. Придёт время, История расставит всех по своим подлинным местам, и восстановит научную честь Николая Николаевича Лузина —- нашего русского Гения.

Литература

1. Костенко И.П. Слово о Лузине // Математическое образование. - 2003. - № 4(27). - С. 2–8.

2. Кутателадзе С.С. Трагедия отечественной математики.
URL: http://www.math.nsc.ru/LBRT/g2/english/ssk/case.html

3. Дело академика Николая Николаевича Лузина / отв. ред. Демидов С.С., Левшин Б.В. - СПб: РХГИ, 1999.

4. Демидов С.С. Дело академика Н.Н. Лузина как историко-научная проблема / История математики и математического преподавания как предмет исследования и преподавания. - Ярославль: ЯГУ, 2003.

5. Юшкевич А.П. Дело академика Н.Н. Лузина. В кн.: Репрессированная наука. - Л.: Наука, 1991. - С. 377–394.

6. Костенко И.П. Проблема качества математического образования в свете исторической ретроспективы: монография. - М.: РГУПС, 2013.

7. Грэнвиль В. Элементы дифференциального и интегрального исчислений. Часть первая. - Москва-Ленинград: ГИ, 1928.

8. Стенограмма совещания учителей и методистов Москвы 9 мая 1937 года. // Науч. Арх. РАО. - Ф. 11. - Оп. 1. - Ед. хр. 54. - Л. - С. 283–307.

9. Перчёнок Ф.Ф. Академия Наук на «великом переломе» / Звенья. Исторический альманах. Вып. 1. - М.: Прогресс, 1991.

[21] Журнал «Успехи математических наук» единственный раз посвятил номер памяти Н.Н. Лузина (УМН, 1985, № 3). Номер почему-то вышел через два года после его столетия. В этом номере есть двухстраничное интервью Колмогорова, где на вопрос «Как Вы оцениваете роль Н.Н. Лузина в развитии математических знаний?» он отвечает так: «Н.Н. Лузин вошел в математику как автор первоклассных работ в метрической и дескриптивной теории функций, дескриптивной теории множеств». Всё! Значит, надо понимать, что на развитие математики Лузин не повлиял. Каково?! Вместе с тем, он сообщает, что познакомился с Лузиным в 1921–22-м году, занимался с ним не дескрипцией, а метрикой, и довольно быстро — в 1924 г. — вместе с Хинчиным «начал интересоваться теорией вероятностей ... мы применяли методы, ... выкованные ... Н. Н. Лузиным и его учениками».

10. Успенский В. А. Вклад Н.Н. Лузина в дескриптивную теорию множеств и функций: понятия, проблемы, предсказания // Успехи математических наук. - 1985. - т. 40. - вып. 3(248).

11. Рыбников К.К., Короткина М.П. Николай Николаевич Лузин // Лесной вестник. - 2005. - № 3.

Костенко Игорь Петрович,
канд. физ.-мат. наук, доцент.

E-mail: kost@kubannet.ru

Устный счет в системе профессора С.А. Рачинского (190 лет со дня рождения)

С. В. Жаров

В статье рассмотрены возможности использования педагогических идей формирования навыков устного счета из системы известного ученого-методиста профессора Сергея Александровича Рачинского. Опубликованные авторами пособия являются неисчерпаемым кладезем практических заданий для современной школы.

Современная педагогика постоянно стремится к совершенствованию среднего и высшего образования. Однако нельзя забывать, что многие педагогические проблемы уходят корнями в далекое прошлое. Среди авторитетных педагогов прошлого можно выделить выдающегося русского ученого, просветителя науки, профессора Московского университета, ботаника и математика конца XIX века Сергея Александровича Рачинского, который посвятил более 30 лет своей жизни разносторонней педагогической деятельности с детьми.

В тот период уже был накоплен большой педагогический опыт, который можно успешно применять в современных условиях. Исследованию православной педагогики С.А. Рачинского были посвящены различные научные статьи и выступления на конференциях, написана кандидатская диссертация, в которой школа С.А. Рачинского исследуется как целостная педагогическая система [1].

Сергей Александрович Рачинский (2 мая 1833 г. – 2 мая 1902) — российский учёный, педагог, просветитель, профессор Московского университета, ботаник и математик, член-корреспондент Императорской Санкт-Петербургской Академии наук по отделению русского языка и словесности.

В 1866 г., тридцати трех лет от роду, С.А. Рачинский защитил докторскую диссертацию "О некоторых химических превращениях растительных тканей" и стал ординарным профессором Московского университета. Ему присвоена степень доктора ботаники, как известно из официальных документов. Постоянные заботы о благополучии как всего студенчества, так и отдельных студентов, о благосостоянии материальном и нравственном — вот что делало С.А.Рачинского популярным профессором. Своими трудами он был известен далеко за пределами России.

В 1872 г. С.А. Рачинский вернулся в родовое село Татево Смоленской губернии, где стал строителем и учителем в первой в России сельской школе с общежитием для крестьянских детей. На свои собственные средства С.А. Рачинский построил школу — благоустроенное каменное здание, и сам, оставив свой барский дом, поселился здесь, заняв лишь две небольшие комнатки под лестницей. Данная школа до сих пор воспитывает новые кадры учеников. Наряду со своей школой Сергей Александрович "расплодил" по окрестностям еще десять школ, которые работали и жили под его руководством. Для этого ему приходилось постоянно разъезжать, но он эту обязанность выполнял с особым усердием. Следует отметить, что С.А. Рачинский основал еще около 40 таких школ, за что получил полное одобрение Императора и его финансовую поддержку [5].

Каждый, кто хочет представить себе, как проходили занятия в школе С.А. Рачинского, пусть посмотрит на знаменитую картину Н.П. Богданова-Бельского "Устный счет". На ней изображен урок математики в татевской школе, кстати говоря, художник сам был учеником и выпускником школы С.А. Рачинского.

С.А. Рачинский был убежденным сторонником классического образования. И для народной сельской школы он предложил такую систему классического образования, где роль древнего языка (греческого и латыни — в гимназии) исполнял язык церковнославянский, а математические знания давались в изучении арифметики, причем особое значение педагог придавал устному счету. Он даже написал специальный учебник "1001 задача для умственного счета" [4], вышедший при его жизни тремя изданиями.

Приведем несколько замечаний по развитию навыков устного счета в системе преподавания арифметики школы С.А. Рачинского. Основным трудом Сергея Александровича был уникальный сборник статей под названием "Сельская школа» [3], где излагаются основные методические особенности работы татевской школы.

В одной из статей Рачинский пишет: "Посторонних посетителей, изредка заглядывающих в мою школу, всего более поражает умственный счет ее учеников. Та быстрота и легкость, с которой они производят в уме умножения и деления, обращаются с мерами квадратными и кубическими, соображают данные сложные задачи, то радостное оживление, с которым они предаются этой умственной гимнастике, наводят на мысль, что в этой школе употребляются особые усовершенствованные приемы для преподавания арифметики, что я обладаю в этом отношении каким-то особым искусством или секретом.

Ничто не может быть ошибочней этого впечатления. Конечно, теперь я владею некоторым навыком к умственному счету, могу импровизировать арифметические задачи в том быстром темпе, в котором они решаются моими учениками. Но до этих скромных умений довели меня или, лучше сказать, домучили сами ученики" [4].

С.А. Рачинский опубликовал и ряд других педагогических статей: "Начальная школа и сельское хозяйство" (1896), "Школьное цветоводство" (1896), "Церковная школа" (1895), "Чтение Псалтири в начальной школе" (1896), "Школы летом" (1898), "Заикание и церковно-славянское чтение" (1898), "1001 задача для умственного счета" (1891), "Арифметические забавы" (1900), "Геометрические забавы" (1901) и др. В 1899 г. был издан уникальный "Татевский сборник", где впервые были опубликованы материалы поэта Е.А. Баратынского, письма к И.В. Киреевскому, "Детские стихотворения", письма В.А. Жуковского, письма Н.И. Пирогова и др. В 1898 г. были изданы "Письма С.А. Рачинского духовному юношеству о трезвости". Этот разносторонний опыт С.А. Рачинского преподавания в школе привел к тому, что появилась целая педагогическая система обучения различным дисциплинам. Можно сказать, что организовалась новая начальная школа, где ученики получали разносторонние знания, совмещенные с практическим жизненным опытом.

Арифметические забавы

Будучи незаурядным человеком, С.А. Рачинский сначала сам прекрасно изучил свойства чисел, их делимость, свойства простых чисел. Его стала интересовать арифметика как наука, и он понял, что если применить важнейшие теоремы теории чисел к простейшим арифметическим расчетам, то можно добиться больших успехов. Главным в преподавании он считал знакомство с числами, т.е. ясное сознание их состава из первичных множителей.

В своей статье "Арифметические забавы" [2] С.А. Рачинский указывает довольно оригинальный способ устного умножения на число, записанное только одними девятками.

Этот способ заключается в следующем. Для того чтобы найти произведение числа, написанного одними девятками, на число, имеющее с ним одинаковое количество цифр, надо от множителя отнять единицу и к получившемуся числу приписать другое число, все цифры которого дополняют соответствующие цифры числа до 9.

Примеры:

$$7 \cdot 9 = 63$$

$$37 \cdot 99 = 36|63$$

$$127 \cdot 999 = 126|873 \text{ и т.д.}$$

Покажем этот способ в общем виде для двузначных чисел. Пусть дано число $M = 10x + y$. Тогда получим:

$$x10^3 + (y-1)10^2 + (9-x)10 + (10 - y = 1000x + 100y - 100 + 90 - 10x + 10 - y =$$

$$= 990x + 99y = (10x + y)(100 - 1) = (10x + y)99.$$

Другой прием связан с возведением в квадрат чисел в пределах первой сотни при условии, что в памяти запечатлены квадраты чисел до 25. Для этого необходимо взять сто раз избыток этого числа над 25 и прибавить квадрат его дополнения до 50 или избытка над 50.

Примеры:

$$37^2 = 1200 + 13^2 = 1369, \ \ 58^2 = 3300 + 8^2 = 3364.$$

Этот способ нетрудно доказать в общем виде. Пусть дано число $M = 10x + y$. Тогда запишем следующее выражение: $(10x + y - 25).100 + (50 - (10x + y))^2 = 1000x + 100y\breve{}2500 + 2500 + 100x^2 + y^2 - 1000x - 100y + 20xy = 100x^2 + 20xy + y^2 = (10x + y)^2$.

Еще один прием связан с перемножением чисел, симметрически расположенных в пределах одного десятка или разных десятков. Предположим надо умножить 13 на 17, для этого нужно умножить 10 на 20 и прибавить произведение $3 \cdot 7$. При умножении чисел, расположенных в разных десятках, необходимо следующее видоизменение. Чтобы умножить, например, 13 на 27, необходимо перемножить 10 на 30 и сложить с произведением $3 \cdot 17$. Докажем приведенные примеры в общем виде.

$$(10 - x)(20 - x) = 10 \cdot 20 + 20x - 10x - x^2 = 10 \cdot 20 + 10x - x^2 = 10 \cdot 20 + x(10 - x).$$

В пределах 100 данное правило выполнимо всегда. Представляет интерес рассмотреть подобную задачу для трехзначных чисел.

В указанной статье С.А. Рачинского можно найти много полезного материала, связанного с признаками делимости натуральных чисел, не входящими в базовый курс начальных классов общеобразовательной школы.

В качестве дополнительных замечаний для быстрого устного счета можно выделить так называемые “последовательности Рачинского”, которые дают дополнительные знания о закономерностях суммы квадратов натуральных чисел. Математически можно доказать, что следующие суммы квадратов равны:

- $3^2 + 4^2 = 5^2$ (обе суммы равняются по 25)
- $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$ (сумма равняется 365)
- $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$ (суммы по 2030)
- $6^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$ (что равняется 7230).

Чтобы найти любую другую последовательность Рачинского, достаточно просто составить уравнение следующего вида, при этом всегда в такой последовательности справа количество суммируемых квадратов на один меньше, чем слева:

$$n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2.$$

Это уравнение дает первую строчку последовательностей $n^2 + (n + 1)^2 = (n + 2)^2$. Аналогично получается вторая последовательность, которая помогает решить задачу с известной картины Н.Богдана-Бельского о нахождении суммы чисел. Общее уравнение имеет вид:

$$n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = (n + 3)^2 + (n + 4)^2,$$

решая которое получим числа 10, 11, 12, 13, 14 и ответ на задачу, которая пришла с картины:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = 2.$$

Зная знаменитые последовательности Рачинского, многие вычисления можно произвести быстрее, чем решать их письменно.

Следует заметить, что Рачинский опубликовал другую работу “Геометрические забавы”, но она не относится к тематике данной статьи.

1001 ЗАДАЧА ДЛЯ УМСТВЕННОГО СЧЕТА

Из предисловия к первому изданию

“Мною давно замечено, что огромное большинство учителей затрудняется изобретением сколько-нибудь сложных арифметических задач. Происходит это не от недостатка воображения и изобретательности, а от недостаточного знакомства с числами. Для учителя, например, не безразлично, что число 40 не только $= 2^3{*}5$, но также $= 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3$, что 365 не только $5 \cdot 73$, т.е. $5 \cdot (8^0 + 8^1 + 8^2)$, но также $= 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = (17^2 + 21^2)/2$ и т.д.

Знакомство с числами первой тысячи приобретается легко, при некотором внимании и старании. Пишущий эти строки, приступивший к преподаванию арифметики на пятом десятке своих лет, приобрел его довольно быстро следующими двумя простыми приемами. Он поставил себе за правило решать в уме, во время уроков всякую письменную задачу, решаемую учениками, — и разлагать в уме на первоначальные множители всякое число, не слишком крупное, попадающееся ему на глаза. Само собой разумеется, что в молодые годы знакомство с числами приобретается гораздо легче, чем в возрасте зрелом” [4].

Современное стремление к «развивающему» обучению и наличие многочисленной вычислительной техники значительно уменьшает роль устных упражнений в школе, и в настоящее время уже предпринято несколько попыток переиздать без всяких изменений пособие С.А. Рачинского.

В задачнике С.А. Рачинского не просто даны задачи на вычисление, но все с практическим содержанием, чтобы были навыки работы с различными жизненными ситуациями и единицами измерения величин. Приведем несколько простых задач (с ответами) на разнообразные ситуации.

1. Поезд проезжает версту в 1 м. 30 с. Во сколько времени может он проезжать 1000 верст? — 25 ч.

2. Выехал из деревни крестьянин и едет по 6 верст в час. Через 2 часа выезжает за ним другой и проезжает по 9 верст в час. Через сколько времени он догонит первого? — Через 4 часа.

3. Выехал из деревни крестьянин и проезжает в час по 8 верст. Через 3 часа выезжает другой. По сколько верст должен он ехать в час, чтобы нагнать первого через 12 часов? — По 10 верст.

4. Некто тратит 40 к. в день. Сколько он тратит в год? — 146 р.

5. Некто поехал в город и взял с собою 3 р. Прожил он в городе неделю и задолжал 1 коп. Сколько он тратил?

6. Машина изготавливает по листу бумаги в минуту. Сколько стоп (по 480 листов) она изготовит в неделю? — 21.

7. Живописец в 2 ч. 5 м. написал маленький портрет и получил за него 30 р. Сколько он зарабатывал в минуту? — 24 к.

8. Два писца берутся переписать 180 листов: один в 36 дней, другой в 45. Во сколько дней перепишут они их вместе? — 20.

9. Нужно проверить 360 тетрадей диктанта. Один учитель может проверить их в 15 часов, другой в 10 часов, третий в 6 часов. Во сколько времени проверят они тетради втроем? — В 3 часа.

10. Между двумя городами 51 верста. Вышли из них одновременно друг другу два путника. Один проходит в час 4 версты, другой по 4,5. Через сколько часов они встретятся? — 6.

11. Между двумя городами 150 верст. Из них выехали одновременно друг другу навстречу двое. Один проезжает в час 6, другой 6,5 верст. Через сколько часов они встретятся? — 12.

12. У меня было 54 пряника, и я каждый день съедал по 4,5. На сколько дней хватило? — 12.

13. Некто каждую неделю зарабатывает 36 р., а в год тратит 672 р. Сколько он откладывает в месяц? — 100 р.

14. Приказчик служил у купца 2 года. Год с месяцем он получал по 19 р. в месяц; затем стал получать по 23 р. Сколько заработал он в эти два года? — 500 р.

15. Сапожник в 5 дней может сшить 3 сапога. Сколько пар сапог сошьет он в год, если в году 280 рабочих дней? — 84.

Данные задачи предназначались для устного счета, в них применялись старые русские единицы измерений длины и площади, но в современной школьной практике это легко можно изменить на привычные измерения.

Литература

[1] Багге М.Б. Школа С.А. Рачинского как педагогическая система: диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук: 13.00.01. - СПб. - 1999. - 206 с.

[2] Рачинский С.А. Арифметические забавы // Народное образование. - Книга III. - март 1900. - Синодальная Типография. - С. 3–14.

[3] Рачинский С.А. Сельская школа. - СПб., 4-е изд., 1889. - 370 с.

[4] Рачинский С.А. 1001 задача для умственного счета. - СПб., 1903. - 90 с.

[5] Письма Победоносцева к Александру III. Т. 1. - М., 1925.

Жаров Сергей Викторович,
доцент кафедры методики преподавания
естественно-математических дисциплин в начальной школе,
кандидат физико-математических наук,
Ярославский государственный педагогический
университет имени К.Д. Ушинского, г.Ярославль.

E-mail: szharv@rambler.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2023 год (включая стоимость пересылки) – 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2023 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.
Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!
Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >