ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцать седьмой

№ 3 (107)

июль - сентябрь 2023 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 3 (107), 2023 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2023 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 17.10.2023 г.
Стиль верстки разработан С.А. Кулешовым.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (107), июль – сентябрь 2023 г.

Содержание

Математик и Наставник. К юбилею А. А. Андреева

От редакции[1]

Краткий биографический очерк к 75-летнему юбилею Александра Анатольевича Андреева. Редакция нашего журнала является одним из учредителей возглавляемой им межрегиональной Олимпиады школьников по математике и информатике "ТИИМ" (ранее САММАТ), см. предыдущий выпуск журнала.

А. А. Андреев

[1]Материал для очерка предоставил редакции наш постоянный автор Сергей Владимирович Дворянинов.

В этом году отметил свой 75-летний юбилей почетный работник высшей школы Александр Анатольевич Андреев. Несмотря на солидный возраст, Александр Андреев продолжает создавать новые смыслы в олимпиадных математических задачах, начав еще 30 лет назад с основания ежегодной межрегиональной олимпиады по математике для школьников «САММАТ». Александр Анатольевич за 50 лет карьеры вырастил немало будущих ученых, руководя в разные годы аспирантами в Самарском государственном техническом университете и Самарском государственном университете (ныне Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева). Успешную работу в высшей школе он сочетал с обучением математически одаренных школьников в Самарском региональном центре для одаренных детей «Вега» и заведованием сектором школьных олимпиад Московского технического университета связи и информации.

Любовь к математике у Александра Андреева — «точка сборки», особой математической лаконичностью он любуется сам и показывает, как ее увидеть молодым поколениям. Сам он окончил Самарский лицей авиационного профиля № 135, сейчас это базовая школа РАН. «В детстве у меня был друг — математический гений. И я, глядя на него, решил нырнуть в математическую науку. И, как только я освоился, мне понравилось! Я, не без поддержки родителей, развивал свои математические способности, участвовал в разных олимпиадах. Все это помогло мне поступить в МГУ в 1966 году. Правда, потом я перевелся в Куйбышевский пединститут, так и остался жить и работать в Самаре», — рассказывает юбиляр. Андреев с удовольствием занимался наукой и в 1982 году защитил кандидатскую диссертацию. Его основные научные результаты связаны с теорией дифференциальных уравнений в частных производных.

Александр Андреев — талантливый и артистичный педагог. Все, кто когда-нибудь попадал на его уроки, обращали внимание на особую увлеченность материалом, которая привлекает слушателя, обнаруживая особый шарм. Он мог просто и доступно объяснить сложные для понимания математические понятия и детям, и взрослым. «Когда я заканчивал педагогический институт, то был абсолютно сосредоточен на науке и не думал, что буду заниматься математикой со школьниками, был ориентирован на работу в высшей школе. Но родительство делает каждого из нас лучше и дает посмотреть на привычные вещи под новым углом. Я сам подготовил сына к поступлению в МГУ, и понял, что открывать математические нюансы для школьника, показывать ему короткую дорогу в решениях — занятие чрезвычайно азартное. А потом это стало моим призванием» — вспоминает Александр Андреев.

Он 28 лет организовывал олимпиаду для школьников в Самаре — «САММАТ» [1], — которая за годы сменила множество площадок, неизменным оказывался именно Александр Анатольевич как один из организаторов этого математического состязания. Также он создал московскую олимпиаду «ТИИМ» (Технология, Интеллект, Информатика, Математика) [2,3]. Многие призеры этих мероприятий благодаря хорошей подготовке и проверке своих знаний впоследствии поступали в вузы страны. Эти проекты также курируются Советом российского Союза ректоров.

Коллеги отзываются об Александре Анатольевиче как о вдохновенном, добром и отзывчивом человеке, безусловном профессионале. «Оборачиваясь назад, я понял, что даже не математическая наука, как я когда-то думал, а педагогика — моя жизнь. Бесценная возможность передать знания, продемонстрировать математическую легкость и логику в сложнейших, на первый взгляд, задачах. Многое зависит от личности педагога, ведь от того, как учитель найдет общий язык со своей аудиторией, как продемонстрирует научную дисциплину, зависит то, как дети будут относиться к нему и к его предмету. Это определенная ответственность. Надеюсь, что у меня получилось привить любовь к математике многим людям. Думаю, что основа успеха в долгой профессиональной жизни — это любовь к людям. Надо любить людей, помнить, что именно человек — мера всех вещей, надо улыбаться чаще, уметь и разрядить обстановку и выслушать, не только делиться своими навыками и умениями, а оставить после себя что-то значимое», — говорит Андреев.

Семья Александра Анатольевича умело конкурировала за его внимание с математической наукой. Юмор, терпение и понимание помогли ему с супругой отметить золотую свадьбу. Общие интересы помогают поддерживать отношения. Андреевы любят вместе бывать в театрах и Самарской филармонии. «Я всегда прилагал усилия, чтобы не ссориться с людьми и особенно с детьми. А когда появляется конфронтация между учеником и учителем, то виноват учитель, тот, у кого больше опыта. Главное для меня — востребованность в профессии и семья. Мой сын окончил мехмат МГУ, он кандидат физико-математических наук. Дочь работает врачом анестезиологом-реаниматологом. У нас трое внуков и все они разные, но, конечно, изумительные, как все дети», — добавил Александр Анатольевич.

И Александр Анатольевич Андреев продолжает передавать свои знания детям.

Редакция журнала желает юбиляру всего самого доброго!

Литература

1. XXV Межрегиональная олимпиада школьников по математике САММАТ // Математическое образование. - № 1 (81). - 2017. - С. 3-14.

2. Андреев А.А., Скородумова Е.А., Максимова Е.А. ТИИМ — Технологии. Интеллект. Информатика. Математика 2021/2022 // Математическое образование. - № 2 (102). - 2022. - С. 19-37.

3. Андреев А.А., Скородумова Е.А., Максимова Е.А. Олимпиада школьников «ТИИМ — Технологии. Интеллект. Информатика. Математика» // Математическое образование. - № 2 (98). - 2021. - С. 54-70.

Применение педагогических ценностей русской школы для изучения математики. Окончание

К. А. Лебедев

Рассматриваются педагогические ценности русской школы [1]–[3], сформулированные в виде принципов, и способы их применения к изучению математики. Анализируется центральная, ведущая роль принципа природосообразности. Отмечается, что для русской школы характерен принцип систематического применения письменной и устной речи. Указывается, что история знает три удачные реализации системы обучения, основанные на природосообразном принципе. Обсуждаются способы применения принципов русской школы к освоению математического знания, которое объективно представимо в виде иерархии структур (разделов), а также в виде двух периодических систем числовых и алгебраических записей. Представлена диаграмма Венна для данной иерархии. Напоминаются диалектические законы развития и их проявление в познании природы и педагогических системах. Сделан оптимистический вывод о возможности создания эффективной системы обучения (в том числе и цифровой), основанной на природосообразном принципе и ценностях русской школы.

Окончание статьи. Первая часть напечатана в предыдущем номере журнала.

5. (6) **Принцип предметности** «требует строить обучение последовательными цельными блоками (учебными предметами). Не смесь (хаос) разнородных предметов, формально объединённых в один предмет под названием “математика” (или “геометрия”), а система взаимосвязанных цельных предметов, распределённых во времени, на весь период обучения» [3, с. 4].

Данный принцип продолжает предыдущий. «Цельность учебного предмета обеспечивается тесной внутренней *взаимосвязью* всех его частей, которая определяет такую же связь знаний о предмете в голове учащегося, и которая является необходимой предпосылкой неформального, сознательного и прочного усвоения» [3, с. 4].

Не хаотическая смесь разнородных дисциплин в рамках одной дисциплины, а строго отграниченных, самостоятельных дисциплин или самостоятельных разделов (табл. 1 и 2)[1] (каждый раздел можно рассматривать как отдельную дисциплину, особенно это касается раздела тригонометрических записей) со своей целью, со своим предметом, со своими методами, со своими задачами, со своим количеством часов и строго сформулированными ожидаемыми конкретными результатами обучения. Подчеркнём: **конкретными** результатами, а не **общими**, вроде достигаемого какого-то “развития” или овладения какими-то “компетенциями”.

Изложение материала большими, взаимосвязанными структурно-целостными блоками позволяет увидеть единую картину там, где раньше был хаос, разрозненные фрагменты, не дававшие представления ни о роли раздела в общей системе знаний, ни о внутренних взаимосвязях.

Известна фраза, не раз повторяемая, что ученик — это не сосуд, который надо наполнить знаниями, а факел, который надо зажечь. В.Ф. Шаталов возражал на эту фразу следующей репликой: «Не наполнив, не зажжёшь, не наполнишь факел горючей смесью, он гореть не будет, кроме чада и дыма ничего не получите. Знания первичны, творчество вторично. Пустая голова не мыслит и не творит» [19]. Древние пропитывали факел нефтью.

[1] Таблицы содержатся в первой части статьи, см. предыдущий номер журнала. — *Прим. ред.*

Момент перехода от репродуктивного освоения знание к творческому, нестандартному решению задач всегда появится (!), но только вследствие эффективной природосообразной методики и только как следствие её правильного применения. Чем больше следовать природосообразности, тем лучший и глубокий результат получается на выходе.

Две таблицы дают ещё два крупных блока. При переходе от раздела к разделу осуществляется качественные скачки 1-го уровня, а при переходе от числовых систем к алгебраическим (от табл. 1 к табл. 2), после обширных количественных накоплений, можно совершать успешный качественный скачок 2-го уровня, от чисел к буквам.

Отметим особо, что при изучении пределов, производных, интегралов скачок будет совсем иным, раздел останется тем же самым, только появится новое действие, взятие предела в рамках того же раздела. Это новая тема в разделе, а не новый раздел. Темы высшей математики повторяются в строке таблицы, из раздела к разделу, только объекты у них разные, а способ их применения (взятие предела) один и тот же.

Это **ключ** к пониманию простой, понятной и очень эффективной методики обучения. Разделы аккумулируют материал предыдущих разделов. Данное положение имеет и более глубокий смысл в диалектике научного познания. Нет теорий, которые бы не вбирали в себя более простые теории и далее мы обсудим это более подробно. Совместное использование индукции (при первичном изучении) и дедукции (при повторении), конечно, приводит к более прочному, глубокому пониманию и освоению знаний. Таблицы являются и наглядными, осязаемыми образами, и образами более высокого порядка, потому что за связями ячеек таблиц, или столбцов, или строк лежат абстрактные математические законы, за ними стоит природа математики, её объективное строение, общие закономерности, связывающие столбцы, с одной стороны, и строки — с другой, разные способы мышления (анализ и синтез, индукция и дедукция).

За столбцами таблиц лежат законы появления новых объектов, а за строками общность приёмов решения задач. Что значить решить например, логарифмическое уравнение? Это умение упростить его, например, до дробно-рационального уравнения (с учётом ограничений), а затем до целого рационального и найти корни полинома, отбросив те, которые не входят в допустимое множество. То есть уметь двигаться по строке, справа налево. Вывод: принцип предметного обучения следует более последовательно использовать при обучении математике: только такой разносторонний путь ведёт к активному творчеству, других путей, противоречащих принципу предметности не следует даже искать.

6.(3) **Принцип постепенности**: «переход от одной ступени к другой может совершаться лишь тогда, когда хорошо усвоена предыдущая ступень. Нужно медленно, тщательно выяснять и осваивать каждую произведённую ***операцию***, пока выполнение не станет прочно усвоенным навыком» [3, с.3].

Хотя в принципе у И.П. Костенко указана «отдельная осваиваемая операция», должно быть ясно, что принцип относится и к малым, и к большим блокам. В свете представленных таблиц этот принцип означает, что переход к следующему разделу (столбцу-блоку) невозможен, пока достаточно не освоены предыдущие столбцы. Для осознанного усвоения раздела необходимо время, нужно освоить знания, приобрести твёрдые навыки и умения, решать разнообразные задачи 1-3-го уровня сложности. Мы убеждаемся в том, что таблицы имеют трёхмерное строение, третья координата — трудность. Каждый раздел не может быть качественно усвоен за один проход, требуется два, три и более проходов, повторяя его и при этом углубляясь в раздел. Эта особенность отражена в методике Г.Г. Левитаса — в его технологии учебных циклов: при поэтапном (до 6 этапов) формировании умственных качеств личности [27].

Умственные качества личности (опыт личности) не формируются сразу, одномоментно, об этом говорит и классическая психология [7, 8, 19], предоставляя три таблицы [7, 8] для 5-6 этапного развития каждой стороны опыта личности: знаний, навыков и умений. Циклическое, поэтапное освоение разделов (и тем) представляется по необходимости обязательным условием глубокого и творческого обучения. Глубокие знания тоже не приобретаются вдруг, и только поэтапное углубление в материал раздела даёт владение этим разделом и ученику, и учителю, при этом скорость прохождения каждого следующего раздела возрастает, так как сами приёмы одни и те же и повторяются от раздела к разделу, автоматизированные качества ума и опыта личности растут.

В.Ф. Шаталов, опыт которого давно надо изучить, понять и применять, так как он полностью соответствует природосообразому принципу и классической психологии, поэтому показывает высочайшую эффективность. Например, рассказ учителя, два, три, а то и четыре раза, с разными вариациями, под разным углами зрения и скоростью (знакомство с новым материалом под разными углами, скорость в цифровых видео легко варьируется самим слушателем). Повторение учителем узловых моментов по цветным плакатам (в настоящее время можно использовать электронную доску, планшеты, где палитра красок гораздо больше, хотя много не надо) с опорными сигналами (фиксация основного, главного и отделение второстепенного, выделение логического каркаса — это есть мышление!). Повторение учениками дома материала по уменьшенной копии опорных сигналов, у каждого должны быть цветные копии в бумажном (и в настоящее время в электронном виде; упрочение знаний, 1-й этап, и это мышление!). Работа с учебником и опорными сигналами, подготовка к письменному ответу (углубление знаний разве не мышление?). Письменное воспроизведение (письменная речь) листов с опорными сигналами (упрочнение знаний, 2-й этап, то же самое!). Ответы (устная речь — это самый важный вид мышления!!!) и прослушивание устных ответов товарищей по опорным сигналам в разных вариациях (внутренняя речь, понимание речи, аудирование, придание гибкости знаниям и мышлению, важнейший тип мышления по слуховому восприятию устной речи!!!).

В настоящее время письменное и устное воспроизведение, в том числе с использованием смартфонов для записи собственной речи и устных выступлений (для повышения эффективности использовались все три способа) делают процесс познания увлекательным и эффективным, результат при длительном и всеобщем применении гарантированно будет высоким, потому что все (и учителя, и ученики) очень любят себя снимать и показывать другим. Соревнование в качестве показа увлекает учащихся и преподавателей. Тут в нашем распоряжении обширное поле, а если вспомнить методику Р.Г. Хазанкина и частный педагогический эксперимент Дж. Пиаже (вертикальная педагогика, когда старшие учат младших), то можно прийти к выводу, что многие потенциальные возможности скрыты в совместном применении информационных технологий и природосообразного принципа.

В 2001 г. В.Ф. Шаталов писал: «Возможно, недалеко то время, когда каждая семья будет иметь возможность иметь видеомагнитофонные приставки к телевизорам, при умелом использовании которых можно поднять учебный процесс в школе на новую качественную высоту» [19, ч. 1, с. 132]. Мы теперь имеем гораздо больше — компьютеры, смартфоны, виртуальные лаборатории, математические пакеты, и есть возможность поднять обучение на качественно новую высоту, но вместо этого изобретаются бессмысленные антиприродные инновации.

Цель обучения достигается тем, что цветные яркие опорные сигналы и живая устная речь приводят к слаженному взаимодействию и взаимному усилению обеих сторон мышления, основанных на одновременном использовании 1-й и 2-й сигнальных систем психики, в специальной социально-организованной среде. Образно-наглядное мышление, образная память, а также связанные с образами эмоции и абстрактно-логическое мышление функционируют совместно в условиях социализации коллективного познания.

Отметим, что В.Ф. Шаталов, кажется, единственный педагог, использующий в социальной среде обучения элементы массового гипноза. Ученику постоянно, настойчиво, систематически внушается мысль о его высокой способности к обучению, никаких сомнений в этом не допускается. Так же поступал А.В. Суворов с его знаменитым обращением к солдатам: «Вы воины Отечества, Чудо-Богатыри! Для вас нет ничего не-возможного, враг перед вами дрожит, враг перед вами бежит!».

Как формируются глубокие, широкие и одновременно гибкие знания, как приобретаются навыки и умения, можно детальнее просмотреть в интернете согласно учебнику К.К. Платонова и Г.Г Голубева, советских академиков [7, 8], руководивших Институтом психологии по работе с лётчиками-испытателями и первыми советскими космонавтами.

Знания, навыки, умения, формируются в 5-6 этапов (всего получается 15 - 18 этапов), таковы выводы настоящей классической, природосообразной науки психологии [7, 8]. Невозможно получить качественные сдвиги без количественных изменений — это вывод наук философии и диалектики познания.

МГУ до сих пор остаётся флагманом российского образования. Физический факультет демонстрирует понимание психологии обучения, природосообразного принципа и принципа поэтапного формирования владения учебным материалом [29]. В связи с этим каждый раздел курса квантовой механики состоит из шести пособий: «Лекции», «Лекционный эксперимент», «Лабораторный практикум», «Семинарское занятие», «Методика решения задач» и «Сборник задач».

«Лекционный эксперимент» увеличивает ценность и привлекательность курса. Для установления единого уровня сложности задач и широты охвата материала на семинарах служит пособие «Семинарское занятие». Рассматривается порядок подачи учебного материала, включающий проверку теоретической подготовки студента, обсуждение методов решения задач, анализ физического смысла результата, разбор характерных ошибок.

В пособии по развитию различных умений решать физические задачи «Методика решения задач» показываются различные подходы и приёмы для решения типовых задач. А для самостоятельной работы студентов предназначен «Сборник задач», в котором представлены наиболее характерные и типичные задачи, собранные в систему задач. Почему школьников не учат методике решения задач, а полно имеется просто сборников задач, учебники необоснованно раздуты одними условиями задач. А как их решать? Вывод такой, что постепенность и методическая всесторонность обучения требует значительной работы для создания современного (видео-) учебника.

7.(4) **Принцип достаточного учебного времени** «предполагает взаимообусловленность содержания обучения и учебного времени, отводимого учебным планом на полноценное усвоение этого содержания. Принцип определяет необходимое условие для сознательного обучения. Он предостерегает от перегрузки программ и указывает путь их гармонизации, с одной стороны, сокращением содержания до минимально необходимых основ наук, с другой — добавлением числа учебных часов, достаточных для сознательного и прочного усвоения этих основ» [3, с. 4].

Если предыдущие разделы хорошо, основательно изучить, то времени на освоение последующих разделов нужно меньше. Вполне курс математики осваивается таким способом за 9 лет (а не за 11 лет) [19], потому что материал повторяется многократно, одни и те же темы, одни и те же приёмы, одни и те же методы, но с возрастанием трудности (которая не имеет верхнего уровня). При решении задачи дело все сводится к упрощению рассматриваемой задачи какого-то раздела к задаче из предыдущих разделов. Строго на разделы делится информационный видео-курс физики, созданный Павлом Виктором, на основе классического обучения [30].

8.(7) **Принцип учета возрастных особенностей** «детей, в частности, недопустимость непосильных абстракций в обучении и соответствующий детскому опыту язык преподавания и учебников (язык задачи обязательно надо приспособить к детям)» [3, с. 4].

Следует добавить, что до 14 лет доминирует 1-я сигнальная система, а после 14 начинает развиваться и доминировать 2-я сигнальная система, поэтому после 14 лет все знания, полученные в начальных классах, должны быть переучены, переосмыслены.

Сначала числовые системы (табл. 1, в основном без букв), потом все те же действия с буквами (табл. 2), появление каждого раздела обусловлено появлением нового действия. Учебный материал постепенно усложняется, вбирая все предыдущие разделы, но и дети растут, становятся все более способными понимать усложнения. При переходе от раздела к разделу автоматически учитывается и возраст.

9.(8) **Принцип систематического устного счета** «и устного решения задач и примеров на протяжении всех лет обучения. Устный счёт формирует внутреннее внимание, способность сосредоточиваться, держать в уме несколько элементов мысли. И выполнять над ними мысленные операций» [3, с. 4].

С помощью устного счёта и устного решения задач, примеров на протяжении всех лет обучения формируются базовые качества математического ума. Сегодня устному счету уделяют мало внимания. Письменный счёт тоже не практикуется в должной мере. Простые, типовые, базовые примеры присутствуют в каждой теме из разделов табл. 1 и табл. 2, разумеется их устное решение весьма полезно. Устное и письменное решения задач формируют разные качества ума, которые дополняют друг друга.

10. **Принцип систематического решения текстовых задач**. Этот принцип не сформулирован отдельно в статье [3], но он очень важен.

Решение текстовых задач вызывает интерес и положительные эмоции и приносит бóльшую пользу, чем любой другой вид деятельности. Текстовые задачи учат логическому мышлению, догадке, устанавливают связь практики с абстрактными понятиями, развивают речь. Попутно выполняются устные вычисления, приводят к понятиям уравнения, функции, знакомят с явлениями и закономерностями окружающего мира, сочетаются с текстовыми задачами геометрии, физики, химии. Их надо решать арифметическим способом (по действиям) и затем алгебраическим (с помощью уравнений), выясняя и усваивая теснейшую взаимосвязь арифметических и алгебраических приёмов.

Систематическое решение текстовых задач, точнее, *классической системы типовых текстовых задач*, служит развитию логического, абстрактного мышления. Решение системы текстовых задач может быть поставлено в качестве первого и самого верного способа развить мышление и речь учащихся, заинтересовать предметом. Это важнейший инструмент обучения и воспитания склонности к естественно-научным дисциплинам, преподавание которых немыслимо иначе как на текстовых задачах (арифметика, геометрия, физика, химия, информатика).

Навыки и умения формируются только в практической деятельности. Даже слабые ученики испытывают глубокие эмоции и проявляют особый интерес к оригинальным, занимательным задачам, задачам на смекалку [31]. Решение текстовых задач — это, видимо, отдельная дисциплина, решение текстовых задач надо выполнять на протяжении всех лет обучения с 1-го по 11-й класс. Простые традиционные текстовые задачи необходимы для массового математического образования. Их главная функция в русской школе — служить развитию логического, абстрактного мышления, а не быть приложением к практике в буквальном смысле, хотя и практическая сторона в текстовых задачах проявляется наиболее выпукло.

11.(5) **Принцип систематического повторения и закрепления пройденного**. «В частности, повторение в начале учебного года материала, пройденного в предыдущем учебном году, и повторение в конце учебного года материала, пройденного за весь год» [3, с. 4].

В настоящее время нет повторения, потому что оно бессмысленно для обессмысленного образования и антиприродного обучения. Без повторения, поэтапного формирования умственных качеств не может быть никакого эффективного обучения. Систематическое и системное обобщающее и углубляющее повторение, как средство укрепления долговременной селективной памяти. Повторение — это не только память, это углубление и улучшение качества мышления, углубление и развитие критического мышления, улучшение понимания различия и сходства между разделами, темами, и уровнями трудности, лучшее владение мыслительными конструкциями анализа и синтеза, индукции и дедукции. Единство разноплановых и противоречивых сторон познания как в образовании, так и в науке невозможно без неоднократного возвращения, повторения, углубления в эти стороны деятельности на любом этапе. При повторении речь становится все более точной, более богатой по выразительности, более свободной, следовательно, повторение развивает речь, а значит и мышление.

Повторение имеет и чисто психологический положительный смысл, то, что каждому в той или иной мере казалось вначале трудным, вдруг становится ясным и простым; окинув взором пройденный путь, можно набраться сил для нового подъёма [19, ч. 1, с. 120]. Зримое ощущение движения и подъёма, развития и роста даёт мощный психологический стимул в преодолении новых трудностей. Повторение по спирали означает, что каждый новый раздел — это повторение пройденного, но на более высоком уровне. Те же самые темы повторяются, но на более сложном материале. Опять мы видим в этих таблицах проявление гегелевской диалектики спирального, периодического (поэтапного) развития [32–34].

Отметим, что достижение В.А. Куренского [35] об автодидактике, в частности учение о «творческом повторе», об артикуляционной памяти и мышлении, положено в основу системы обучения КЭСПА иностранному языку И. Гивенталь и А. Задорожной [36, 37]. Артикуляционная память и мышление есть психические процессы, которые основываются на сенсорных системах восприятия звуков, связаны с такими сенсорными звукообразующими органами, как губы, зубы, язык. Понимание иностранной (и родной) речи возможно только тогда, когда речь доведена до автоматизма и течёт свободно, а для этого надо многократные (100 и более раз) речевые и слуховые повторения. Авторы пишут: «Ведь недаром, требуя что-нибудь выучить на “отлично”, учителя обычно говорят: выучи так, чтобы от зубов отскакивало или выучи назубок!» [36, 37].

Математика не исключение, в ней тоже, чтобы на слух воспринимать математическую речь, нужны многие повторения.

Довести навыки и умения до автоматизма можно только многократными упражнениями, и чем их больше, тем лучше. Нельзя же в самом деле хорошо научиться играть на фортепьяно, не выполняя ежедневно много типовых упражнений, нельзя научиться хорошо прыгать в высоту, не выполняя тысячи раз это упражнение, нельзя научиться говорить на иностранном языке, многократно не повторяя языковой материал. Привести можно массу примеров из разных областей. Математика, конечно, не исключение из правила.

12.(10) **Принцип стабильности** «во всей организации учебного процесса: основная форма занятий — урок, стабильный учебный план, программа, расписание, систематический учёт знаний, ежегодные проверочные испытания, стабильная классная комната, индивидуальное учебное место и др. К этому принципу следует отнести и дисциплину учащегося, которая является необходимыми условием продуктивной организации коллективного обучения» [3, с. 5].

Учебный материал табл. 1 и 2 стабилен, разделы неизменяемы 200 лет, потому что операции одни и те же, изучались и будут изучаться пока существует человечество, ибо это объективное строение математического знания. Часто слышится, что образование школьное устарело, надо идти в ногу со временем и произносятся аналогичные нелепые выдумки. То, что наука действительно ушла далеко от школьного уровня, является очевидным фактом, но удивление вызывает способ решения проблемы согласования новых научных достижений со школьным обучением, в котором можно только знакомить с основами наук, но не серьёзно их изучать.

13. (9) **Принцип систематической самостоятельной работы**. «Учащиеся работают с учебником и задачником под руководством учителя. Подлинно осмысленные знания не могут быть просто переданы ученику учителем. Ученик должен сам, самостоятельными усилиями присвоить знания»[3, с. 5].

Самостоятельность — это способность ученика систематизировать, планировать, контролировать и регулировать свою деятельность без непосредственного постоянного руководства и практической помощи со стороны учителя, однако учитель обязан контролировать и направлять эту деятельность. Следует иметь в виду, что самостоятельные учебные работы полезны только тогда, когда они посильны, хотя и довольно трудны. Эта грань между посильностью и трудностью весьма подвижна, переменчива. Посильность и трудность диалектически противоречивы и требуют со стороны учителя большого опыта, знаний как в предметной области, так и в области психологии, большой наблюдательности и способности идентифицировать трудности, возникающие перед учеником, и самое главное — способности правильно и взвешенно решить это противоречие.

14. **Принцип учета абсолютного и относительного** в познании и в образовании.

Настоящий кризис в образовании во многом объясняется тем, что под напором развития информационных технологий, огромного количества доступной информации, большого успеха естественно-научных дисциплин педагогика совершенно растерялась и потеряла ориентиры, чему учить и как надо учить, особенно математику, что заставляет методистов, психологов, авторов учебников искать новые методы обучения. Но ищут там, где их в принципе не может быть. Законы диалектики точно указывают, где надо искать решения и где их найти нельзя. Поэтому при кризисах так важна диалектика, которая показывает, как совершается познание и развитие. Сейчас много пишут о развитии, но никаких определений и формул не обсуждают, основной закон развития игнорируют, отсюда проистекают многие нелепости. Основной закон диалектики о развитии сформулирован Г. Гегелем и может быть кратко охарактеризован следующим образом [32–34]: диалектика — движущая сила всякого научного развёртывания научной мысли, который вносит в содержание науки связь и необходимость (других общих принципов нет или еще не открыты).

Что касается природосообразных методик обучения самой математике, то они есть [38, 39]. Обратим внимание на наиболее известные. В первую очередь это методика американского педагога Дж. Пойя (три его известные книги) [40], разработанная в духе природосообразности и до сих пор не утратившая актуальности. Имеются методики: Г.Г. Левитаса [27], весьма примечательная и эффективная методика Р.Г. Хазанкина [41] и стоящая особняком методика 239-й школы Санкт Петербурга, представленная В.И. Рыжиком [42], готовящая с детских лет профессионалов-математиков. В труде «Книга для учителя математики» автор старался передать, по его словам, хоть в какой-то степени, своё отношение к преподаванию математики — человеческому делу, в котором удивительным образом переплетаются и математическая наука, и педагогика, и дидактика, и психология, и философия. Однако, на наш взгляд, эффективность этой методики проявляется только с одарёнными учащимися. В отличие от методик В.Ф. Шаталова, Г.Г. Левитаса, Р.Г. Хазанкина она требует значительной её адаптации к реалиям средней массовой школы и отдельного обсуждения. Не потеряла актуальность и книга академика Л.Д. Кудрявцева [43] о классических способах преподавания. Методика университета ядерной энергии Беркли, готовящая детей с 6-летнего возраста к поступлению на физико-математические факультеты [44] вполне классическая, природосообразная.

За последние 70 лет в педагогике и психологии произошёл ряд событий: обобщена классическая психология [7, 9], открыт закон о совместном и взаимообусловленном функционировании первой и второй сигнальной систем [11], выявлена роль опорных сигналов для продуцирования речи и активизации мышления [19], доказано взаимоподчинение описательной, объяснительной и доказательной речи [19], создано учение об автодидактике, учение об артикуляционной памяти и мышлении [35–37], понята роль повторения в развитии мышления [7, 19], опробована роль внушения в познании, создана система обучения на основе природосообразного принципа [19], разработаны природосообразные методики обучения математике [27, 40, 41, 42], произведён детальный анализ возникновения и внедрения в учебный процесс принципа ВТУ [1], сформулированы ценности русской школы в виде 10-ти принципов [1–3], понято объективное строение математического знания на основе структур [24–26], изданы некоторые учебники в духе природосообразности (советские и современные российские), осознана роль диалектики познания при создании новых природосообразных систем обучения [26, 42, 43], университетом Беркли разработан уникальный курс элементарной математики повышенной сложности [44], создан высоко-профессиональный видеокурс по элементарной физике [30]. Данные достижения подтверждены практикой и основаны на научном диалектическом способе исследования.

Стремительное развитие информационных технологий несут в себе и большую пользу, и большой вред. Задача учёных — нивелировать отрицательные стороны и использовать сильные стороны информационных технологий. Все представленные принципы эффективного природосообразного обучения в русской школе неизбежно войдут в любую эффективную систему обучения с использованием информационных технологий. Обсуждение конкретной реализации новой системы обучения на основе принципа природосообразности и информационных систем вывело бы нас далеко за рамки статьи, это тема отдельного обсуждения. Статья а расширенном варианте представлена на [45].

Автор выражает признательность Костенко Игорю Петровичу и Рыжику Валерию Адольфовичу за многочисленные дискуссии по вопросам методики обучения; их прямо противоположные мнения по многим вопросам послужили катализатором для данной статьи.

Литература[2]

1. Костенко И.П. Проблема качества математического образования в свете исторической ретроспективы. - М.: РГУПС, - 2013. - 501 с.

URL: https://russianclassicalschool.ru/pdf/kostenko-mono.pdf?ysclid=l6goxcvmx1106000115

2. Костенко И.П. Реформы образования России. 1918 -2018. Идеи, идеология, результаты. - М.: Ижевск, - 2018. - 191 с.

URL: https://russianclassicalschool.ru/uchebnye-komplekty/monografii/product/view/75/224.html/?ysclid=l6gp1onp4l273816477

3. Костенко И.П. Педагогические ценности русской-советской школы. // Математическое образование. - 2022. - № 1(101). - С. 2-6.

7. Платонов К.К., Голубев Г.Г. Психология. - М.: Высшая школа, - 1977. - 246 с.

8. Общая психология.

URL: https://zen.yandex.ru/media/id/5ceedae932677000aff81291/psihologiia-62272fd20915983d355e971d

9. Педагогическая психология.

URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Педагогическая_психология

11. Межполушарная асимметрия.

URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Межполушарная_асимметрия

19. Шаталов В.Ф. Соцветие талантов. - М.: ГУП-ЦРП, 2001. - Ч.1. - 380 с.; 2003. - Ч.2. - 352 с.

24. Лебедев К.А. Архитектура элементарной математики. - Краснодар: КубГУ. – 2000. - 34 с.

25. Лебедев К.А. Архитектура математики: топология, алгебра и функциональный анализ. - Краснодар: КубГУ. - 2001. - 16 с.

26. Лебедев К.А. О методических и научных принципах создания школьного учебника математики серии «МГУ — школе». I. Числовые системы (5-6 классы) // Математическое образование. - 2016. - № 3(79). - С. 3-20.

27. Левитас Г.Г. Технология учебных циклов вариант реализации резервов классно-урочной системы [Электронный ресурс].

URL: https://bib.convdocs.org/v17022

29. Авакянц Л.П., Колесников С.В., Салецкий А.М. Введение в квантовую физику. Методика решения задач. М.: МГУ, 2018. - 400 с.

30. Универсальный информационный видео-справочник по физике Павла Виктора. Ришельевский лицей. [Электронный ресурс].

URL: https://www.youtube.com/channel/UCSdDqsIYf9v5UEWTNda1YBw

31. Шарыгин И.Ф., Шевкин А.В. Задачи на смекалку. - М.: Просвещение, 2012. - 94 с.

32. Гегель Георг. [Электронный ресурс]. URL: https://bookscafe.net/author/gegel_georg-35779.html

33. Энгельс Ф. Диалектика природы. - М.: Политическая литература, 2017. - 343 с.

34. Энгельс Ф. Анти-Дюринг. - М.: Политическкавя литература, 2017. - 462 с.

35. Куринский В.А. Автодидактика. - М.: Культ. учеб.-изд. центр "Автодидакт", 1994. - 391 с.

36. Гивенталь И., Задорожная А. Английский с нуля для детей и взрослых. - М.: Питер, 2013. - 350 с.

37. Гивенталь И.А. Как это сказать по-английски. - М.: Питер, 2016. - 380 с.

[2] В списке литературы оставлены только работы, на которые имеются ссылки в данной части статьи. При этом сохранена сквозная нумерация из представленного автором материала. — *Прим. ред.*

38. Эффективные и неэффективные методики изучения математики. Часть 1. Принципы [Электронный ресурс].

URL: https://zen.yandex.ru/media/id/5ceedae932677000aff81291/effektivnye-i-neeffektivnye-metodiki-izucheniia-matematiki-chast-1-principy-5eb8489fa19aea5aa93006a4

39. Эффективные и неэффективные методики изучения математики. Часть 2. Про электронный учебник-справочник. [Электронный ресурс].

URL: https://zen.yandex.ru/media/id/5ceedae932677000aff81291/effektivnye-i-neeffektivnye-metodiki-izucheniia-matematiki-chast-2-pro-elektronnyi-uchebnikspravochnik-5ebe9efc0bc6f5686b2ead11

40. Пойа, Дьёрдь [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Пойа,_Дьёрдь

41. Хазанкин Р.Г. Вертикальная педагогика [Электронный ресурс].

URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Вертикальная_педагогика

42. Рыжик В.И. Задача для учителя математики. 7-11 классы. - М.: Вако, 2017. - 397 с.

43. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и ее преподавание. - М.: Наука, 1980. - 143 с.

44. Беркли, архив математического кружка. [Электронный ресурс].

URL: https://mathcircle.berkeley.edu/circle-archives

45. Педагогические ценности русской классической школы и цифровизация обучения [Электронный ресурс].

URL: https://dzen.ru/media/id/5ceedae932677000aff81291/pedagogicheskie-cennosti-russkoi-shkoly-640863cec99c882aad477f85

Лебедев Константин Андреевич,
Заведующий кафедрой теоретической физики
и компьютерных технологий КубГУ,
д.ф.-м.н., профессор.

E-mail: klebedev.ya@yandex.ru

Некоторые "нестандартные" признаки равенства треугольников

Р. А. Акбердин, А. А. Костина

В статье рассказано о получении нестандартных признаков равенства треугольников при помощи комбинирования конструктивного и аналитического подходов.

Как известно, основным методом, применяемым при изучении школьного курса геометрии, является *синтетический метод*, одной из важнейших составляющих которого является использование признаков равенства треугольников. В школьном курсе геометрии используется три основных признака равенства треугольников, однако при решении задач зачастую приходится пользоваться и другими признаками равенства треугольников по некоторым комбинациям его элементов, которые традиционно подразделяются на основные (стороны и углы), дополнительные (медианы, высоты, биссектрисы, радиусы вписанной и описанной окружностей, периметр). Для обоснования признаков равенства треугольников в школьных учебниках используются прямые доказательства. Такой подход не позволяет ответить на вопрос: "Справедлив ли признак равенства треугольников по некоторому заданному набору из трех его элементов?" Таким образом, возникает задача поиска и использования "поисковых" методов доказательства [1, 2].

В основе *конструктивного метода* проверки справедливости или опровержения предложений о равенстве треугольников (n-угольников) лежит использование задач на построение этих фигур по заданному набору элементов, а именно, этапа исследования в таких задачах. Если задача имеет единственное решение, то по заданному набору элементов справедливо предложение о равенстве треугольников (n-угольников), в противном случае — нет.

Необходимо учесть, что не любая задача на построение разрешима с помощью циркуля и линейки [3] (например, задача на построение треугольника по трем биссектрисам) и поэтому конструктивный метод проверки справедливости или опровержения предложений о равенстве треугольников не всегда применим. Можно использовать в некоторых случаях решения задач на построение иными наборами инструментов.

Основой *аналитического метода* является решение задачи на нахождение по заданному набору из трех элементов α_1, α_2, α_3 треугольника некоторого четвертого элемента α_4, который в совокупности с какой-то парой из элементов $\alpha_1 - \alpha_3$ определяет найденный ранее признак равенства треугольников. Тогда если α_4 определяется однозначно, то по элементам $\alpha_1 - \alpha_3$ справедливо предложение о равенстве треугольников, в противном случае — нет.

В [1] с использованием этих двух методов исследованы наборы, состоящие из: 1) трех основных элементов, 2) двух основных и одного дополнительного, 3) двух дополнительных и одного основного. В данной статье мы исследуем некоторые наборы из трех дополнительных элементов.

Задача 1. В треугольнике ABC известны m_b, m_c и высота h_a. Найти одну из его сторон.

Решение. Обозначим $BC = x$, $AC = y$, $AB = z$, составим систему уравнений, используя при этом, что (рис. 1):

а) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов его сторон (первое и второе уравнение системы, рис. 1а));

б) $CB = CH + HB$ или $CB = HB - HC$ (третье уравнение системы, рис. 1 б)).

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2) = 4m_c^2 + z^2 \\ 2(x^2+y^2) = 4m_b^2 + y^2 \\ x = \sqrt{y^2 - h_a^2} \pm \sqrt{z^2 - h_a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{1}{3}(8m_c^2 + 4m_b^2 - 6x^2) \\ z^2 = \frac{1}{3}(8m_b^2 + 4m_c^2 - 6x^2) \\ x = \sqrt{y^2 - h_a^2} \pm \sqrt{z^2 - h_a^2} \end{cases}$$

После подстановки в третье уравнение системы получаем:

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}\left(8m_c^2 + 4m_b^2 - 6x^2\right) - h_a^2} \pm \sqrt{\frac{1}{3}\left(8m_b^2 + 4m_c^2 - 6x^2\right) - h_a^2}$$

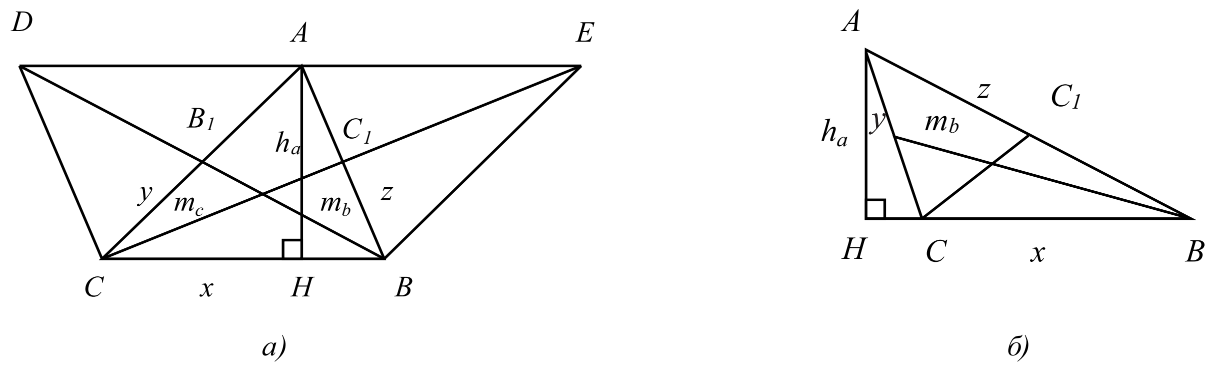


Рисунок 1

В результате преобразований имеем биквадратное уравнение:

$$9x^4 - 4x^2\left(2m_b^2 - +2m_c^2 - h_a^2\right) + \frac{16}{3}\left(m_b^2 - m_c^2\right) = 0.$$

Пусть $x^2 = t$, тогда решение уравнения сводится к решению квадратного уравнения:

$$9t^2 - 4t\left(2m_b^2 - 2m_c^2 - h_a^2\right) + \frac{16}{3}\left(m_b^2 - m_c^2\right) = 0.$$

Это уравнение может иметь два положительных корня, в таком случае получаем следствие:

Следствие. По набору элементов m_b, m_c, h_a, т.е. по двум медианам и высоте, предложение о равенстве треугольников неверно.

Примечание. Подтверждение этого вывода можно получить и конструктивным путем.

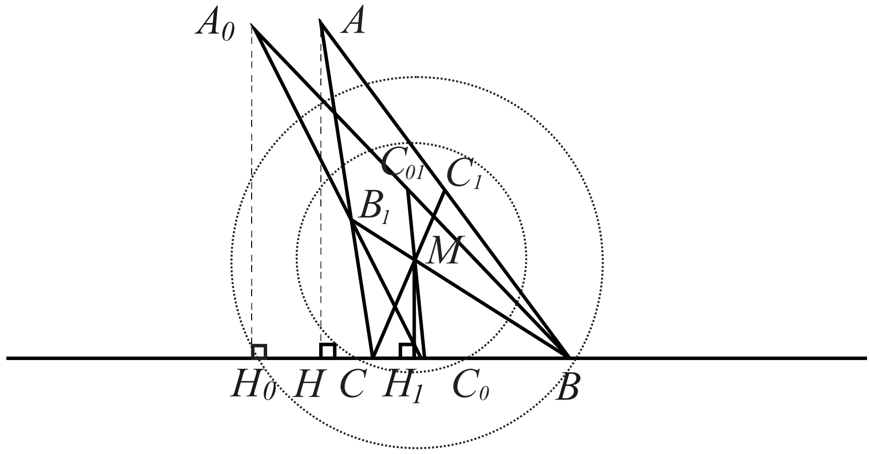


Рисунок 2

Задача 1*. Построить треугольник ABC по двум медианам m_b, m_c и высоте h_a.

Анализ. Решение задачи сводится к построению $\triangle CMB$ по двум сторонам: $CM = \frac{2}{3}m_c$, $BM = \frac{2}{3}m_b$ и высоте $MH_1 = \frac{1}{3}h_a$

Исследование. Задача может иметь два решения (рис. 2), что и подтверждает следствие.

Задача 2. В треугольнике ABC известны две медианы m_a, m_b и высота, проведенная из той же вершины, что и одна из данных медиан. Найти одну из сторон.

Решение. Обозначим $BC = x$, $AC = y$, $AB = z$, тогда, используя данные задачи, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2(y^2+z^2) = 4m_a^2 + x^2 \\ 2(x^2+z^2) = 4m_b^2 + y^2 \\ 2xh_a = \sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(z-(x-y))(z+(x-y))} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2y^2+2z^2 = 4m_a^2 + x^2 \\ -y^2+2z^2 = 4m_b^2 - 2x^2 \\ 2xh_a = \sqrt{((x+y)^2-z^2)\,(z^2-(x-y))} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{1}{3}\left(3x^2+4m_a^2-4m_b^2\right) \\ z^2 = \frac{1}{2}\left(-x^2+\frac{4}{3}m_a^2+\frac{8}{3}m_b^2\right) \\ 4x^2h_a^2 = \left((x+y)^2-z^2\right)\left(z^2-(x-y)^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y^2 = \frac{1}{3}\left(3x^2+4m_a^2-4m_b^2\right) \\ z^2 = \frac{1}{2}\left(-x^2+\frac{4}{3}m_a^2+\frac{8}{3}m_b^2\right) \\ 4x^2h_a^2 = \left(x^2+y^2-z^2+2xy\right)\left(z^2-x^2-y^2+2xy\right) \end{cases}$$

Подставив в третье уравнение системы после преобразований, имеем:

$$4x^2h_a^2 = 4x^2y^2 - \left(\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3}m_a^2-\frac{8}{3}m_b^2\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$4x^2h_a^2 = 4x^2\cdot\frac{1}{3}\left(3x^2+4m_a^2-4_b^2\right)^2 - \left(\frac{5}{2}x^2+\left(\frac{2}{3}m_a^2-\frac{8}{3}m_b^2\right)\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{9}{4}4x^2 - x^2(2m_a^2 + 8m_b^2 - 4h_b^2) + \left(\frac{2}{3}m_a^2 - \frac{8}{3}m_b^2\right)^2 = 0.$$

Введем новую переменную $x^2 = t$, уравнение примет вид:

$$\frac{9}{4}t^2 - t(2m_a^2 + 8m_b^2 - 4h_b^2) + \left(\frac{2}{3}m_a^2 - \frac{8}{3}m_b^2\right)^2 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета, имеем два положительных корня, следовательно, сторона $BC = x$ определяется неоднозначно, тогда получаем следствие:

Следствие. По набору элементов m_a, m_b, h_a, т.е. по двум медианам и высоте, проведенной из той вершины, что и одна из данных медиан, предложение о равенстве треугольников неверно.

Примечание. Это же предложение можно получить, проведя исследование к задаче на построение треугольника ABC по m_a, m_b, h_a. Построение (рис. 3):

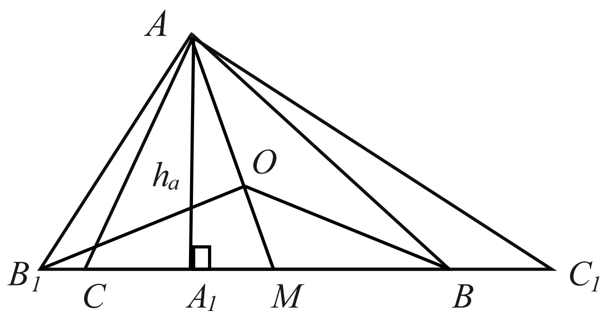


Рисунок 3

1) треугольник A_1AM — прямоугольный: $A_1A = h_a$ — катет. $AM = m_a$ — гипотенуза;
2) точка O — точка пересечения медиан, где $AO : OM = 2 : 1$;
3) вершины B, B_1, где $OB = OB_1 = \frac{2}{3}MB$;
4) вершины C и C_1, где $MC = MB$ и $MC_1 = MB_1$.

Получаем, что оба треугольника ABC и $AB1C1$ удовлетворяют условиям задачи, при этом они неравны.

Задача 3. Построить треугольник ABC по двум высотам h_a, h_b и медиане m_c [3].

Анализ. Решение задачи сводится к построению прямоугольных треугольников CDC_1 по гипотенузе $CD = 2m_c$ и катету $CC_1 = h_a$; CDD_1 по гипотенузе $CD = 2m_c$ и катету $DD_1 = h_b$. Возможны два случая расположения этих треугольников (рис. 4) относительно общей гипотенузы CD. Вершина A получается как точка пересечения прямых, содержащих вторые катеты. Вершину B получаем откладыванием отрезка $MB = MA$.

Исследование. Существование решения зависит от существования прямоугольных треугольников CDC_1 и CDD_1, а также существования точки А пересечения прямых DC_1 и CD_1.

Следовательно, задача имеет и притом два решения тогда и только тогда, когда:
$\begin{cases} h_a \le 2m_c \\ h_b < 2m_c \\ h_a \ne h_b \end{cases}$ или $\begin{cases} h_a < 2m_c \\ h_b \le 2m_c \\ h_a \ne h_b \end{cases}$. Таким образом, получаем следствие:

Следствие. По набору элементов h_a, h_b, m_c, т.е. по двум высотам и медиане, предложение о равенстве треугольников неверно.

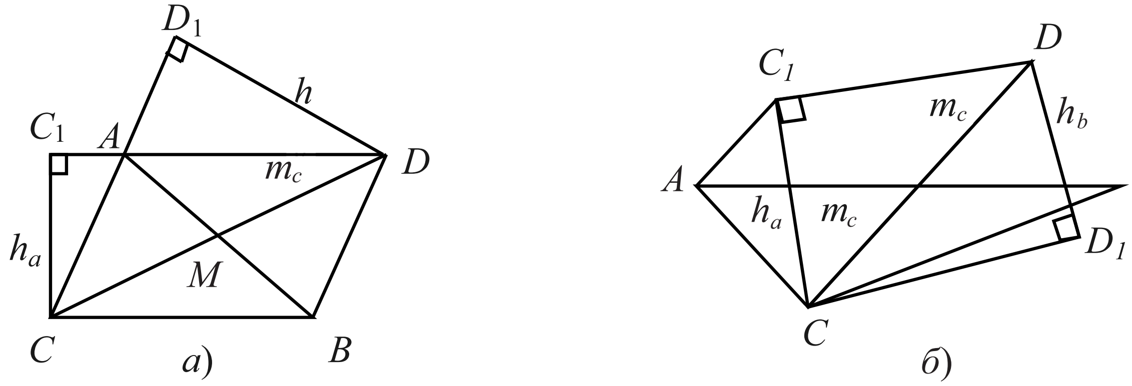


Рисунок 4

Задача 4. Построить треугольник ABC по двум высотам h_a, h_b и медиане m_a, проведенной из той же вершины, что и одна из данных высот [3].

Анализ. Решение задачи сводится к построению прямоугольных треугольников MAA_1 по гипотенузе $AM = m_a$ и катету $AA_1 = h_a$; MAB_2 по гипотенузе $MA = m_a$ и катету $MB_2 = \frac{1}{2}h_b$ Возможны два случая расположения этих треугольников относительно AM (рис. 5). Вершина C получается в результате пересечения прямых MA_1 и AB_2. Отложив от M отрезок $MB = MC$, получим вершину B искомого треугольника.

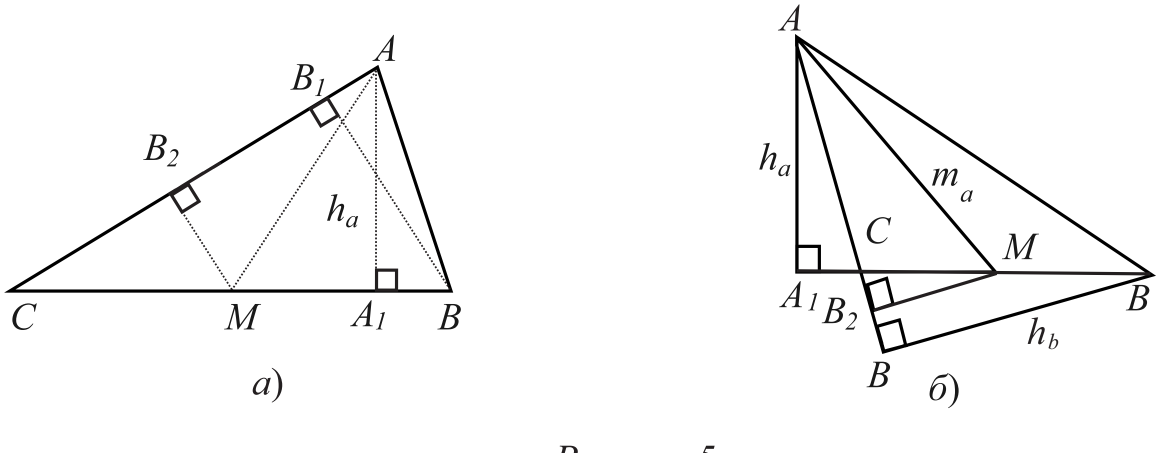


Рисунок 5

Исследование. Существование решения зависит от возможностей построения прямоугольных треугольников MAA_2 и MAB_2, а также существования точки C пересечения прямых MA_1 и AB_2. Следовательно, задача имеет и притом два решения тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} m_a \geq h_a \\ m_a > \frac{1}{2}h_b \\ h_a \neq \frac{1}{2}h_b \end{cases} \text{ или } \begin{cases} m_a > h_a \\ m_a \geq \frac{1}{2}h_b \\ h_a \neq \frac{1}{2}h_b \end{cases}.$$

Основываясь на вышеизложенном, получаем следствие:

Следствие. По набору элементов h_a, h_b, m_a, т.е. по двум высотам и медиане, проведенной из той же вершины, что и одна из данных высот, предложение о равенстве треугольников неверно.

Задача 5. В треугольнике ABC известны две высоты h_a, h_b и биссектриса l_c. Найти одну из его сторон.

Решение. Обозначим $BC = x$, $AC = y$, $AB = z$, тогда используя данные задачи, составим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} xh_a = yh_b \\ l_c^2 = xy\left(1 - \dfrac{z^2}{(x+y)^2}\right) \\ \dfrac{xh_a}{2} = \sqrt{\left(\dfrac{x+y+z}{2}\right)\left(\dfrac{x+y-z}{2}\right)\left(\dfrac{z-(x-y)}{2}\right)\left(\dfrac{z+(x-y)}{2}\right)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x\dfrac{h_a}{h_b} \\ l_c^2 = x^2\dfrac{h_a}{h_b}\left(1 - \dfrac{z^2}{x^2\left(1+\dfrac{h_a}{h_b}\right)^2}\right) \\ 4x^2h_a^2 = \left((x+y)^2 - z^2\right)\left(z^2 - (x-y)^2\right) \end{cases}.$$

Из второго уравнения системы находим:

$$z^2 = \frac{h_a}{h_b}\left(1+\frac{h_a}{h_b}\right)^2 \cdot \left(x^2 \cdot \frac{h_a}{h_b} - l_c^2\right) = \left(\frac{h_b}{h_a} + 2\frac{h_b}{h_a}\cdot\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_a}{h_b}\right)\cdot\left(x^2\cdot\frac{h_a}{h_b} - l_c^2\right) =$$

$$= \left(\frac{h_b}{h_a} + 2 + \frac{h_a}{h_b}\right)\cdot\left(x^2\cdot\frac{h_a}{h_b} - l_c^2\right) = \frac{(h_a+h_b)^2}{h_ah_b}\cdot\left(x^2\cdot\frac{h_a}{h_b} - l_c^2\right).$$

Подставив в третье уравнение системы после преобразований, получим:

$$4x^2 = \frac{(h_a+h_b)^4\ l_c^4}{h_a^2\left((h_a+h_b)^2\ l_c^2 - h_a^2h_b^2\right)} \text{ или } x = \frac{(h_a+h_b)^2\ l_c^2}{\sqrt{2h_a(h_a+h_b)^2\ l_c^2 - h_a^2h_b^2}}.$$

То есть по данным задачи сторона $BC = x$ определяется однозначно, а, следовательно, $AC = y$ и $AB = z$ также определяются однозначно. Таким образом, получаем следствие:

Следствие. По набору элементов h_a, h_b, l_c, т.е. по двум высотам и биссектрисе, справедливо предложение о равенстве треугольников.

Задача 6. В треугольнике ABC известны две высоты h_a, h_b и радиус вписанной окружности r. Найти одну из его сторон.

Решение. Обозначим $BC = x$, $AC = y$, $AB = z$, тогда, используя данные задачи, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} xh_a = yh_b \\ xh_a = (x+y+z)\cdot r \\ \dfrac{xh_a}{2} = \sqrt{\left(\dfrac{x+y+z}{2}\right)\left(\dfrac{x+y-z}{2}\right)\left(\dfrac{z-(x-y)}{2}\right)\left(\dfrac{z+(x-y)}{2}\right)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x\dfrac{h_a}{h_b} \\ z = \dfrac{x}{r}\left(h_a - r - \dfrac{h_a}{h_b}\cdot r\right) \\ 4x^2h_a^2 = \left((x+y)^2 - z^2\right)\left(z^2 - (x-y)^2\right) \end{cases}.$$

Подставив в третье уравнение системы после преобразований, имеем:

$$x^2 = \frac{4r^4}{\left(2r\left(1+\frac{h_a}{h_b}\right)-h_a\right)\left(h_a-2r\left(1+\frac{h_a}{h_b}\right)+\frac{4r^2}{h_b}\right)}.$$

То есть по данным задачи сторона $BC = x$ определяется однозначно, а, следовательно, $AC = y$ и $AB = z$ также определяются однозначно. Получаем следствие:

Следствие. По набору элементов h_a, h_b и r, т.е. по двум высотам и радиусу вписанной окружности справедливо предложение о равенстве треугольников.

В задачах 1–6 исследованы некоторые наборы из трех дополнительных элементов треугольника, из которых два являются одноименными. Исследуем наборы, в которых все три элемента являются разноименными.

Задача 7. Построить треугольник ABC по высоте h_a, медиане m_a и биссектрисе l_a, проведенным из одной вершины [3].

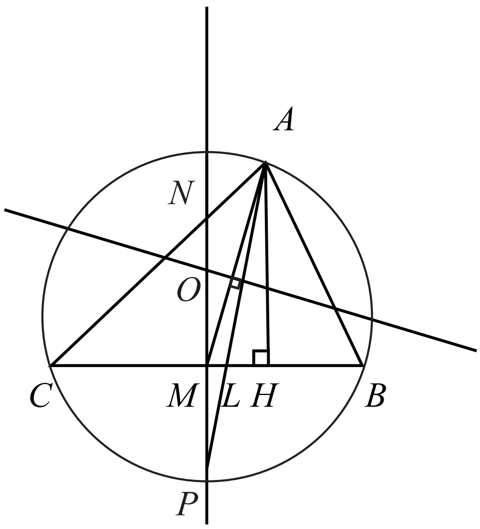


Рисунок 6

Анализ. Решение задачи сводится к построению прямоугольного треугольника AHM по катету $AH = h_a$ и гипотенузе $AM = m_a$ (см. рис. 6). Прямоугольный треугольник AHL даст луч, на котором лежит данная биссектриса. P — точка пересечения луча AL и серединного перпендикуляра MN к BC — лежит на описанной окружности, центр O которой — пересечение MN и серединного перпендикуляра к AP. Построим окружность ω (O, OA), получим точки B и C — пересечение этой окружности и прямой MH.

Исследование. Существование решения зависит от существования треугольников AHM и AHL, следовательно: 1) если при условии $h_a \neq l_a \neq m_a$ имеем $h_a < l_a < m_a$, то задача имеет и притом единственное решение; 2) если $h_a = l_a = m_a$, то задача имеет бесконечное множество решений.

Следствие. По набору элементов h_a, l_a, m_a, т.е. по высоте, биссектрисе и медиане, проведенным из одной вершины, справедливо предложение о равенстве треугольников (при условии, что $h_a \neq l_a \neq m_a$).

Задача 8. Построить треугольник ABC по высоте h_a, медиане m_a, проведенным из одной вершины, и радиусу описанной окружности R [3].

Анализ. Решение задачи сводится к построению прямоугольного треугольника AHM по катету $AH = h_a$ и гипотенузе $AM = m_a$, а также построению центра окружности, описанной около искомого треугольника (точки O_1, которую можно получить как пересечение прямой n — перпендикуляра к MH, проведенного через точку M и окружности ω_1 $(A,\ R)$). Вершины B и C можно поучить как пересечение этой окружности и прямой MH (см. рис. 7).

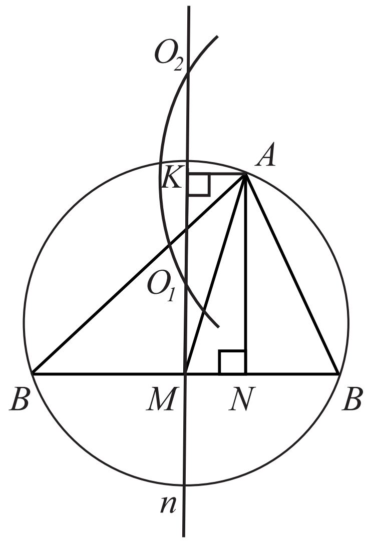


Рисунок 7

Исследование. Существование решения зависит от: 1) существования треугольника AHM, $h_a < m_a$, если $h_a = m_a$, тогда дальнейшие построения также выполнимы; 2) существования центра описанной окружности — точек O_1 и O_2 $(R \geq MN) \Leftrightarrow R \geq \sqrt{m_a^2 - h_a^2}$; 3) существования точек B и C $(R > O_1M$ и $R > O_2M)$, $O_1M = KM - KO_1$, $O_2M = KM + KO_2$, $KO_1 = KO_2 = \sqrt{R^2 - MN^2}$ т.к. $MH^2 = m_a^2 - h_a^2$, то $KO_1 = KO_2 = \sqrt{R^2 - m_a^2 + h_a^2}$. Тогда $O_1M = h_a - \sqrt{R^2 - m_a^2 + h_a^2}$, $O_2M = h_a + \sqrt{R^2 - m_a^2 + h_a^2}$.

Следовательно, $R > O_2M \Leftrightarrow R > h_a - \sqrt{R^2 - m_a^2 + h_a^2} \Leftrightarrow \dfrac{m_a^2}{2h_a}$, аналогично $R > O_2M \Leftrightarrow R < \dfrac{m_a^2}{2h_a}$, но эти два условия одновременно не выполнимы. Условие $R < \dfrac{m_a^2}{2h_a}$ противоречит условию $R \geq \sqrt{m_a^2 - h_a^2}$. Следовательно, задача имеет и притом единственное решение при условии:

$$\begin{cases} m_a \geq h_a \\ R \geq \sqrt{m_a^2 + h_a^2} \\ R \geq \dfrac{m_a^2}{2h_a} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m_a > \sqrt{2}h_a \\ R \geq \sqrt{m_a^2 + h_a^2} \end{cases} \\ \begin{cases} h_a \leq m_a \leq \sqrt{2}h_a \\ R \geq \sqrt{m_a^2 + h_a^2} \end{cases} \end{array} \right. .$$

Следствие. По набору элементов h_a, m_a, R, т.е. по высоте, медиане, проведенным из одной вершины, и радиусу описанной окружности справедливо предложение о равенстве треугольников.

Задача 9. Построить треугольник ABC по высоте h_a, периметру $2p$ и радиусу вписанной окружности r [3].

Анализ. Используя формулы площади треугольника, получаем, что $BC = a = \dfrac{2p \cdot r}{h_a}$ (*). Этот отрезок можно построить циркулем и линейкой. Из $\triangle AON$ получаем, что $\operatorname{tg} \dfrac{\hat{A}}{2} = \dfrac{r}{AN}$. Известно, что

$AN = p - a$, т.е. $AN = p - \frac{2p \cdot r}{h_a}$. Следовательно, $\operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = \frac{r \cdot h_a}{p(h_a - 2r)}$ (**). Построив угол $\frac{\hat{A}}{2}$, а затем $\hat{A}$, мы сводим задачу на построение искомого треугольника к задаче на построение треугольника ABC по стороне a, высоте проведенной к ней h_a и радиусу вписанной окружности r. Для решения этой задачи можно использовать множество точек, из которых данный отрезок виден под данным углом (см. рис. 8).

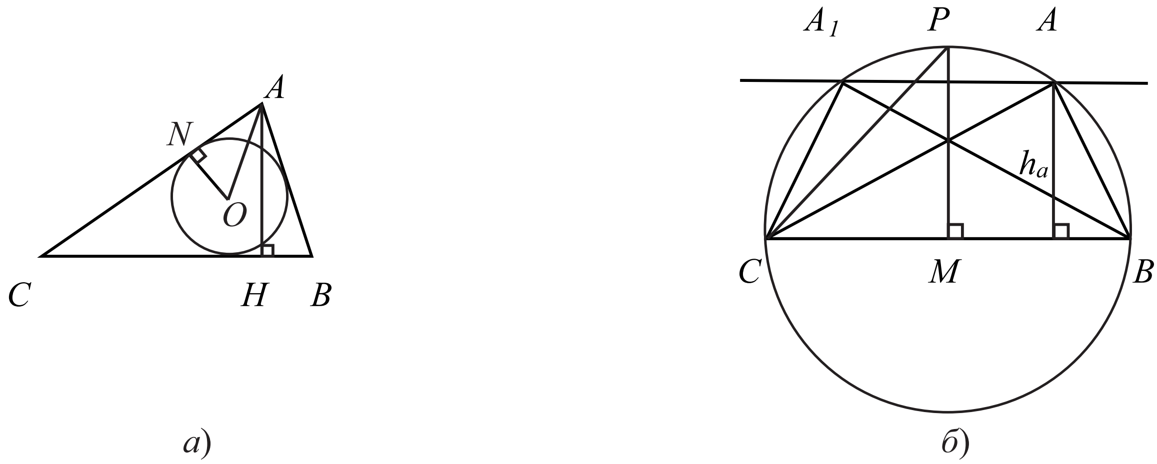


Рисунок 8

Необходимо учесть, что хотя может получиться два треугольника ABC и A_1BC, удовлетворяющих заданным условиям, но эти треугольники симметричны относительно серединного перпендикуляра PM, а следовательно, они равны (см. рис. 8 б)).

Исследование. Исходная задача имеет и притом единственное решение при выполнимости следующих условий: 1) построение угла $\angle CPM = \frac{\hat{A}}{2} < 90°$, т.е. $h_a > 2r$; 2) нахождение точки A, т.е. $h_a \le PM$, где $PM = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2}}$. Используя две формулы (*) и (**), получаем: .

Вывод: задача может иметь и притом единственное решение при условии: $\begin{cases} h_a > 2r \\ h_a \le \frac{p^2(h_a - 2r)}{h_a^2} \end{cases}$,

т.е. по набору элементов: h_a, 2_p, r треугольник определяется однозначно.

Следствие. По набору элементов h_a, 2_p, r, т.е. по высоте, периметру и радиусу вписанной окружности справедливо предложение о равенстве треугольников.

Предложенные в этой статье два подхода к конструированию признаков равенства треугольников могут послужить основой для организации поисковой деятельности учащихся в следующих направлениях: используя указанные признаки равенства треугольников, рассмотреть циклы задач на нахождение элементов треугольника (решение треугольников); исследовать другие наборы из трех дополнительных элементов треугольника.

Сведения об этих наборах приведены в следующей таблице.

Таблица. Всевозможные комбинации из трех дополнительных элементов треугольника

		1	2	3	4	5	6	7	8
1	m_a, m_b	$m_c^{\oplus}$	$h_a^{\ominus}$	$h_c^{\ominus}$	l_a?	l_c?	r?	R?	$2p$?
2	h_a, h_b	$h_c^{\oplus}$	$m_a^{\oplus}$	m_c	l_a?	$l_c^{\oplus}$	r $^{\oplus}$	R?	$2p$?
3	l_a, l_b	$l_c^{\oplus}$	m_a?	m_c?	h_a?	h_c?	r?	R?	$2p$?
4	m_a, h_b	$l_a^{\oplus}$	l_b?	r?	R $^{\oplus}$	$2p$?	-	-	-
5	m_a, l_a	h_b?	r?	R?	$2p$?	-	-	-	-
6	h_a, l_a	m_b?	r?	R?	$2p$?	-	-	-	-
7	m_a, h_b	l_c?	r?	R?	$2p$?	-	-	-	-
8	m_a, l_b	r?	R?	$2p$?	-	-	-	-	-
9	l_a, l_b	r?	R?	$2p$?	-	-	-	-	-
10	m_a, r	R?	$2p$?	-	-	-	-	-	-
11	m_a, R	$2p$?	-	-	-	-	-	-	-
12	h_a, r	R?	$2p$ $^{\oplus}$	-	-	-	-	-	-
13	h_a, R	$2p$?	-	-	-	-	-	-	-
14	l_a, r	R?	$2p$?	-	-	-	-	-	-
15	l_a, R	$2p$?	-	-	-	-	-	-	-
16	R, R	$2p$?	-	-	-	-	-	-	-

В этой таблице представлены различные комбинации из трех дополнительных элементов (57 вариантов). В этой статье исследовано 9 вариантов (1.2, 1.3, 2.2, 2.3, 2.5, 2.6, 4.1, 4.4, 12.2), варианты 1.1, 2.1, 3.1 исследованы в [4,5]. В соответствующих позициях таблиц отмечены результаты исследования: “$\oplus$” — верно предложение о равенстве треугольников по указанному набору из трех элементов, “$\ominus$” — неверно это предложение. Оставшиеся 45 вариантов ждут своих исследователей (отмечены в таблице знаком “?”). В известной литературе нет сведений об исследованиях этих вариантов.

Литература

[1] Акбердин Р.А., Шмигирилова И.Б. Нестандартные задачи школьной геометрии: Признаки равенства треугольников. Учебно-методическое пособие. - Петропавловск: СКУ им. М. Козыбаева, 2022. - 230 с.

[2] Акбердин Р.А., Шмигирилова И.Б. Конструирование признаков равенства выпуклых n-угольников // Математическое образование. - 2019. - № 2 (90). - С. 31–36.

[3] Голубев В.И., Ерганжиева Л.Н., Мосевич К.К. Построение треугольника. 5-е изд., электрон., испр. - М.: Лаборатория знаний. - 2020. - 251 с.

[4] Жуков А., Акулич И. Однозначно ли определяется треугольник? // Квант. - 2003. - № 1. - С. 29–31.

[5] Жуков А.В. Биссектрисы задают треугольник // Математика в школе. - 2010. - № 5. - С. 64–65.

Акбердин Рифкат Абдулович,
доцент кафедры “Математика и информатика”,
факультета математики и естественных наук
НАО “Северо-Казахстанский университет
им. М.Козыбаева”, Петропавловск, Казахстан.

E-mail: akberdin47@mail.ru

Костина Александра Александровна,
студентка той же кафедры,
факультета математики и естественных наук
НАО “Северо-Казахстанский университет
им. М.Козыбаева”, Петропавловск, Казахстан.

E-mail: kostina-2002@bk.ru

Об одном способе решать уравнения четвертой степени

А. Я. Белов

В заметке рассказано о способе решения уравнения четвертой степени, который автор предложил, будучи школьником.

В свое время в 8 классе[1] преподаватель "спецматематики" Игорь Томович Гурвич рассказал мне о классическом методе решения уравнений третей степени. Для удобства читателей напомним его.

Пусть нам надо решить уравнение третей степени

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{1}$$

Воспользуемся идеями решения квадратных уравнений. Для начала, разделив на a, сведем уравнение к виду $x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 = 0$, где $b_1 = b/a, c_1 = c/a, d_1 = d/a$.

Затем выделим полный куб (для решения квадратных уравнений выделяют полный квадрат). Уравнение (1) перепишется в виде

$$\left(x + \frac{b_1}{3}\right)^3 + \left(c_1 - \frac{b_1^2}{3}\right)\left(x + \frac{b_1}{3}\right) + \left(\frac{2}{27}b_1^3 - \frac{c_1b_1}{3} + d_1\right) = 0. \tag{2}$$

Таким образом, кубическое уравнение (1) приводится к виду

$$y^3 + py + q = 0, \tag{3}$$

и здесь требуется **новая идея**. Представим y в виде $y = u + v$ и перепишем уравнение (3) в виде

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0. \tag{4}$$

На величины u, v с известной суммой можно наложить дополнительное соотношение $3uv + p = 0$. Получается система

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ 3uv = -p \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = \frac{-p^3}{27} \end{cases}$$

Применяя теорему Виета и формулу для корней квадратного уравнения имеем классическую *формулу Кардано:*

$$y = u + v = \sqrt[3]{q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \sqrt[3]{q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}. \tag{5}$$

Замечания: 1. Джироламо Кардано, вопреки расхожему мнению, не крал формулу Кардано у Тартальи (а сам Тарталья получил ее по наследству). Кардано собирался написать учебник по всей тогдашней математике и нарушил обещание о неразглашении. Он был крупным изобретателем (и замечательным учителем, зарабатывал астрологией), в частности, карданный вал — это его

[1]Это был 1978 год. В то время была десятилетка, 10 класс выпускной.

изобретение. Говоря об инфекционных заболеваниях, он утверждал, что они вызываются живыми существами, настолько малыми, что мы их не видим. Кардано был человеком редкой скромности — утверждал, что за всю историю было только 6 стоящих врачей куда включал и себя.

2. У читателя (прежде всего школьника или студента) может возникнуть недоумение. Только что осуществленный вывод выглядит как олимпиадная задача средней сложности, а ее решали столетия. Почему же тогдашние ученые были такими глупыми?

Дело в том, что у них не было современного даже школьного алгебраического языка. Они говорили: к площади прямоугольника с такими-то сторонами добавим объем куба с такой-то стороной и вычтем площадь квадрата с такой-то стороной и т.д. и т.п. Кроме того, не было отрицательных чисел, а тогда уравнение пишется в виде: "левая часть равна правой". Возникает разнообразие случаев. И, что хуже всего, при каждом преобразовании случаи начинают ветвиться. Люди ленились, и вместо того, например, чтоб написать "Объем" или "Volume" оставляли только первую букву V (кстати, на уроках физики скорость обозначают буквой v (velosity), ускорение — буквой a (acceleration) и т.д.) Знак интеграла $\int$ — это удлиненная буква S (summa omnium). Вместо слов "сложение" и "умножение" ввели соответствующие знаки. Кстати, некоторые математики считали использование отрицательных чисел "нестрогим" вплоть до конца 18 века. На этом фоне можно оценить гениальность Кардано, когда он ввел $i = \sqrt{-1}$. Он обнаружил, что если многочлен имеет 3 вещественных корня, то под квадратными радикалами уравнения (5) возникают отрицательные числа. Когда он сообщил этот факт Тарталье, тот прекратил с ним переписку.

Вдохновленный выводом формулы Кардано, я по-своему вывел формулу для уравнений четвертой степени $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$. Этот вывод несколько отличается от традиционного.

Первый этап вполне естественный. Он аналогичен случаям квадратного и кубического уравнения. Разделив уравнение на a_0, сведем к случаю единичного старшего коэффициента. Далее, выделив полную четвертую степень, избавимся от кубического члена. Таким образом, мы сведем уравнение к виду

$$y^4 + ay^2 + by + c = 0.$$

Упражнение. Проведите это.

Перейдем к содержательному аспекту. Разложим многочлен $y^4 + ay^2 + by + c = 0$ на множители:

$$y^4 + ay^2 + by + c = (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2). \tag{6}$$

Если мы найдем p_1, p_2, q_1, q_2, то решим задачу. Сравнивая коэффициенты, имеем систему

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 0 \\ q_1 + q_2 + p_1p_2 = a \\ p_1q_2 + p_2q_1 = b \\ q_1q_2 = c \end{cases}$$

Положим $p = p_1, p_2 = -p$. Имеем:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 - p^2 = a \\ p(q_2 - q_1) = b \\ q_1q_2 = c \end{cases}$$

Заметим, что тогда $(p(q_2 - q_1))^2 = p^2((q_1 + q_2)^2 - 4c) = b^2$. Сделав замену $r = p^2, s = q_1 + q_2$, имеем:

$$\begin{cases} s - r = a \\ r(s^2 - 4c) = b \\ q_1q_2 = c \end{cases}$$

Эта система сводится к кубическому уравнению

$$(s-a)(s^2-4c)=b,$$

а кубические уравнения мы решать научились.

Замечания: 3. *Теорема Руффини-Абеля* утверждает, что общее уравнение пятой степени (или выше) не решается в радикалах. С помощью *преобразования Чирнгаузена* общее уравнение пятой степени приводится к виду $x^5-x+a=0$, а уравнение шестой степени — к виду $x^6-x^2+bx+c=0$. Вот уже почти два столетия не доказано, что нельзя свести уравнение шестой степени к одному параметру.

4. Впервые формулу для уравнений четвертой степени вывел Феррари — ученик Кардано. Он происходил из обедневшей графской семьи и в 14 лет, будучи неграмотным, поступил к Кардано в услужение. В последующем стал его учеником. В дальнейшем Феррари рассчитывал налоги у архиепископа и разбогател, жил со своей сестрой. Вскоре после того, как у него появилась невеста, умер от отравления.

Канель-Белов Алексей Яковлевич,
профессор Bar-Ilan University, Израиль,
доктор физ.-мат. наук., профессор.

E-mail: kanelster@gmail.com

Некоторые нестандартные логические задачи

Г. А. Оганесян, Э. М. Джамбетов, А. Я. Белов

Участникам конкурса предлагается решить систему трех уравнений с тремя неизвестными вида $A_1 = ab + c$, $A_2 = ac + b$, $A_3 = bc + a$, где a, b, c — неизвестные, принимающие натуральные значения, большие 1, зная только одно из чисел в левых частях уравнений A_1, A_2, A_3, а также результаты опроса участников ведущим. Сформулированы и решены пять задач с полным анализом решения. Предложены алгоритмы решения этих задач.

Предлагаемые задачи, которые могут быть отнесены к “исследовательским”, показывают, какие интересные вариации можно получить, используя только одну задачу [1]. Представляется, что такая работа будет полезной в обучении математике [2], [3].

Сформулируем общую задачу.

Из трех разных натуральных чисел a, b, c, больших 1, учитель получает новые три числа $A_1 = ab + c$, $A_2 = ac + b$, $A_3 = bc + a$ и каждому из учеников У1, У2, У3 сообщает (дает) только одно из этих чисел (в тайне от других) по правилу: $A_1 \to$ У1, $A_2 \to$ У2, $A_3 \to$ У3.

Затем учитель проводит опрос учеников по очереди, начиная с У1 (не обязательно в один круг), с вопросом: “Знает он три числа (a, b, c) — тройку?”, или состоится короткая беседа между учениками. При этом ответы слышат все, и каждый знает вид всех трех выражений $ab + c$, $ac + b$, $bc + a$. Задача каждого ученика — определить тройку чисел (a, b, c), исходя из своего числа, которое ему известно (он видит) — A_1 или A_2, или A_3, — и ответов других. Тройки, отличающиеся порядком расположения чисел, считаются одинаковыми.

Задача 1. Состоялся опрос. Ответы опроса были такие: первый круг — все трое ответили “нет”, второй круг — У1 — нет, У2 — да, уже знаю тройку (a, b, c).

Требуется: 1) найти тройку (a, b, c) и A_2. 2) Какие ответы будут от У3 и от У1 на последующие вопросы?

Решение: Ответы учеников будем записывать следующим образом: $Q_k \equiv$ да (нет), если на вопрос с номером “k” был дан ответ “да” (“нет”). Тогда условие задачи 1 можно записать следующим образом: $Q_1 \equiv$ нет, $Q_2 \equiv$ нет, $Q_3 \equiv$ нет, $Q_4 \equiv$ нет и $Q_5 \equiv$ да.

Пусть A — любое из чисел A_1, A_2, A_3. Заметим, что наименьшее значение, которое может принять A, это 10. Если $A = 10$ или $A = 12$, то тройка (a, b, c) определяется однозначно и это $(2, 3, 4)$ или $(2, 3, 6)$, так как $10 = 2 \cdot 3 + 4$ и $12 = 2 \cdot 3 + 6$.

Число $A = 11$ определяется двумя тройками $(2, 3, 5)$ и $(2, 4, 3)$, так как $11 = 2 \cdot 3 + 5 = 2 \cdot 4 + 3$.

Для любого числа $A \geq 13$ существует не меньше двух троек чисел (a, b, c), определяющих его: $13 + d = 2 \cdot 3 + (7 + d) = 2 \cdot 4 + (5 + d)$, где $d = 0, 1, 2, \ldots$

Итак, верно утверждение: если A имеет одно разложение, то $A = 10$ или 12 и наоборот.

Договоримся: 1) Тройки, из которых получается данное число A, называть “своими” и для A, и для ученика, которому сообщено (он видит) это число.

2) Все три числа, получаемые из одной тройки, назовём “своими” для этой тройки.

3) Два числа (из трёх: A_1, A_2, A_3), полученные из одной и той же тройки (a, b, c), назовём “родственными” друг для друга.

На первый взгляд, тройку (a, b, c) находят следующим образом: ученик сначала определяет множество “своих” троек, потом, исходя из результатов опроса, исключает часть (“почти все”) “своих” троек, и, если после этого остаётся ровно одна тройка, то отвечает “да”.

А конкретно, как происходит исключение какой-то тройки? Чтобы ответить на этот вопрос, надо начинать анализ ответов с самого начала опроса. Наша цель — выяснить, какой вывод можно сделать, если первый раз ответ “да” был дан на вопрос с номером k (1, 2, 3, 4). Получим равносильные утверждения и будем пользоваться их отрицаниями.

Ясно, что исключение тройки — это исключение, хотя бы одного “своего” числа этой тройки. Ученик думает так: “Я не вижу некоторое число B_0 и убедился, что остальные также не видят B_0 (иначе, на соответствующий вопрос был бы дан ответ “да”), значит, исключаю B_0 и тройку(тройки) T_0, из которой получается B_0”.

Значит, для исключения числа B_0 необходимо выполнение трёх условий: $A_1 \neq B_0$, $A_2 \neq B_0$, $A_3 \neq B_0$ (никто не видит число B_0) и таким видом записи будем пользоваться в дальнейшем.

Выходит, ученик видит A_0, исключает число B_0 и одновременно тройку T_0, которая является “своей” тройкой и для A_0, и для B_0. Значит, A_0 и B_0 — “родственные” числа.

Вывод: исключить можно только “родственное” число.

Верно и обратное (следует из симметричности бинарного отношения “родственности”): для исключения учеником числа B_0 необходимо, чтобы он видел число A_0, “родственное” с числом B_0.

В итоге мы дали ответ на три вопроса:

1) Какое число можно исключить? Ответ: “родственное” число.

2) Кто “имеет право” на исключение числа B_0? Ответ: ученик, который видит число A_0, “родственное” с B_0.

3) Когда происходит исключение числа B_0? Ответ: тогда и только тогда, когда выполняются три условия $A_1 \neq B_0$, $A_2 \neq B_0$, $A_3 \neq B_0$.

Остался один немаловажный случай, упустив который, можем получить неполное решение. Выше мы сказали “…необходимо, чтобы он видел число A_0, “родственное” с B_0” (см. Вывод). А что будет, если не выполняется это необходимое условие? Ведь тогда процесс исключения становится невозможным. А в таком случае число A_0 может из “исключающего” превратиться в “исключаемое”, если для A_0 будут справедливы необходимые три условия $A_1 \neq A_0$, $A_2 \neq A_0$, $A_3 \neq A_0$. И такой случай встретится в пункте Д) нашего решения.

В итоге, алгоритм решения общей задачи (где ответ “да” первый раз даётся на вопрос с номером N и множество M_1 (см. ниже) содержит любое количество чисел), готов.

Пусть $M_1 = \{10, 12\}$ содержит те числа, для которых тройка (a, b, c) определяется однозначно. Составим два “дерева связей” (рис.1).

А) $Q_1 \equiv$ да.

Ясно, что $A_1 \in M_1$ и наоборот: ($Q_1 \equiv$ да) $\Leftrightarrow A_1 \in M_1$ ($A_1 = 10$ или $A_1 = 12$).

Б) $Q_1 \equiv$ нет, $Q_2 \equiv$ да.

Здесь случай, когда $У2$ знал тройку, т.е. $A_2 = 10$ или $A_2 = 12$, и просто ждал своей очереди независимо от ответа $У1$, очевиден.

Теперь предположим, что $У2$ не знал тройку, так как $A_2 \neq 10$ и $A_2 \neq 12$, и ему помог ответ $У1$, а это не что иное, как отрицание вывода, сделанного в пункте А), т.е. $A_1 \neq 10$ и $A_1 \neq 12$. Для чисел 10 и 12 имеем $10 \neq A_1$, $10 \neq A_2$, $12 \neq A_1$, $12 \neq A_2$ и это — вся информация у ученика $У2$. Но этого недостаточно, чтобы он подумал “Я не вижу число B_0 и убедился, что остальные не видят”. Не хватает факта $A_3 \neq 10$ или $A_3 \neq 12$. Значит, ответ $У1$ не помог, наше предположение неверно. Остаётся только $A_2 = 10$ или $A_2 = 12$. Легко убедиться, что при этих значениях A_2 ответ на Q_2 будет “да”.

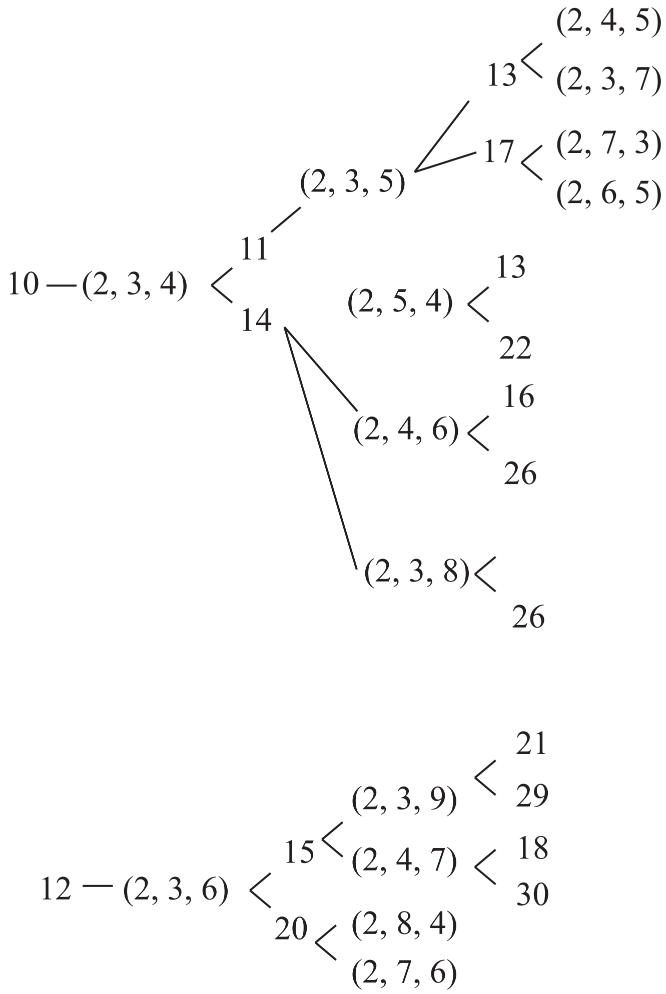


Рис. 1.

Запишем этот вывод: ($Q_2 \equiv$ да) $\Leftrightarrow A_2 \in M_1$ ($A_2 = 10$ или $A_2 = 12$).

В) $Q_1 \equiv$ нет, $Q_2 \equiv$ нет, $Q_3 \equiv$ да.

Здесь также случай, когда *УЗ* знал тройку чисел, т.е. $A_3 \in M_1$, и ждал своей очереди, очевиден. Теперь предположим, что *УЗ* не знал тройку (т. е. $A_3 \neq 10$ и $A_3 \neq 12$) и ему помогли чужие ответы. А это отрицания пунктов А) и В), которые выглядят так:

($Q_1 \equiv$ нет) $\Leftrightarrow$ ($A_1 \neq 10$ и $A_1 \neq 12$), ($Q_2 \equiv$ нет) $\Leftrightarrow$ ($A_2 \neq 10$ и $A_2 \neq 12$).

Добавив сюда наше предположение ($A_3 \neq 10$ и $A_3 \neq 12$), получим и для числа 10, и для 12 необходимые тройные условия $A_1 \neq B_0$, $A_2 \neq B_0$, $A_3 \neq B_0$, о которых говорили ранее. И только теперь можно исключить числа 10 и 12. Но мы уже знаем, "кто на это имеет право". Тот, кто видит одно из чисел 20, 15, 14 и 11 — "родственные" для 10-и или 12-и (рис.1). Получим следующее заключение. Если *УЗ* видит число 11 или 14 ($A_3 = 11$ или $A_3 = 14$), то исключает число 10, а вместе с ним и тройку (2, 3, 4). А если видит число 15 или 20, то исключает 12 и тройку (2, 3, 6), рис. 1.

В трёх случаях, когда $A_3 = 20$ или $A_3 = 15$, или $A_3 = 14$, после исключения соответствующей тройки у *УЗ* остаётся больше одной тройки и он не может ответить "да". А вот, когда $A_3 = 11$, после исключения тройки (2, 3, 4) остаётся единственная тройка (2, 3, 5), и *УЗ* ответит "да". Осталось рассмотреть случай, когда не выполняется необходимое условие "родственности", т. е. $A_3 \neq 11$. Нетрудно убедиться, что это ничего нового не даёт нам.

Далее заметим, что ($A_3 \in M_1$) $\Rightarrow$ ($Q_1 \equiv$ нет, $Q_2 \equiv$ нет, $Q_3 \equiv$ да).

Но когда $A_3 = 11$, то истинно (верно) только часть этого утверждения (т.е. мы не можем утверждать, что $Q_1 \equiv$ нет, $Q_2 \equiv$ нет, $Q_3 \equiv$ да), а именно ($A_3 = 11$) $\Rightarrow$ ($Q_3 \equiv$ да), в чём нетрудно убедиться (и при тройке (2, 3, 4), и при (2, 3, 5)). Запишем коротко итог текущего пункта:

($Q_3 \equiv$ да)$\Leftrightarrow$($A_3 = 10$ или $A_3 = 12$, или $A_3 = 11$).

Г) $Q_1 \equiv$ нет, $Q_2 \equiv$ нет, $Q_3 \equiv$ нет, $Q_4 \equiv$ да (ответ ученика $У1$).

Отрицания пунктов А), Б) и В) дают: ($Q_1 \equiv$ нет) $\Leftrightarrow$ ($A_1 \neq 10$ и $A_1 \neq 12$),

($Q_2 \equiv$ нет) $\Leftrightarrow$ ($A_2 \neq 10$ и $A_2 \neq 12$), ($Q_3 \equiv$ нет)$\Leftrightarrow$($A_3 \neq 10$ и $A_3 \neq 12$, и $A_3 \neq 11$).

Здесь, в отличие от пункта В), нет необходимости предполагать, что $A_3 \neq 10$ и $A_3 \neq 12$, так как это уже есть в третьей строке равносильности. Значит, числа 10 и 12 подлежат исключению. Повторив для A_1 рассуждения из пункта В), получаем единственное значение 11. Нетрудно убедиться и в обратном: если $A_1 = 11$, то $Q4 \equiv$ да (и при тройке (2, 3, 4) и при (2, 3, 5)).

Запишем результат этого пункта: ($Q4 \equiv$ да) $\Leftrightarrow$ $A_1 = 11$.

Наконец, дошли до условия нашей задачи:

Д) $Q_1 \equiv$ нет, $Q_2 \equiv$ нет, $Q_3 \equiv$ нет, $Q_4 \equiv$ нет, $Q_5 \equiv$ да.

Отрицания предыдущих четырех случаев выглядят так: ($Q_1 \equiv$ нет) $\Leftrightarrow$ ($A_1 \neq 10$ и $A_1 \neq 12$),

($Q_2 \equiv$ нет) $\Leftrightarrow$ ($A_2 \neq 10$ и $A_2 \neq 12$), ($Q_3 \equiv$ нет)$\Leftrightarrow$($A_3 \neq 10$ и $A_3 \neq 12$, и $A_3 \neq 11$), ($Q_4 \equiv$ нет)$\Leftrightarrow$ $A_1 \neq 11$.

И опять, можно исключить 10 и 12. Повторив для A_2 рассуждения из второй части пункта В), получим $A_2 = 11$ и $(a, b, c) \sim (2, 3, 5)$.

Осталось рассмотреть ещё случай, когда $У2$ видит не 11, а другое число (т. е. $A_2 \neq 11$) и не выполняется необходимое условие "родственности". Тогда к двум имеющимся условиям $A_3 \neq 11$ и $A_1 \neq 11$ добавится ещё $A_2 \neq 11$ и уже можно исключить число 11. Для этого находим все "родственные" с 11 числа (это они имеют право на исключение). Такими являются числа 10, 14, 13 и 17 (рис. 1). Из них число 10 не годится, у нас уже есть запись $A_3 \neq 10$. При остальных трёх значениях A_2 после исключения числа 11 и соответствующей тройки у $У2$ остаются больше одной тройки и он не может ответить "да". В итоге получили единственный ответ: $A_2 = 11$ и $(a, b, c) \sim (2, 3, 5)$.

Дополнение: Рассмотрев последний случай, когда $A_2 \neq 11$, мы, тем самым, дали ответ на такой вопрос (который напрашивается): "Какие ответы будут в дальнейшем, если $Q_1 \equiv Q_2 \equiv Q_3 \equiv Q_4 \equiv Q_5 \equiv$ нет?"

Ответ на такой вопрос очевиден: будут только ответы "нет".

Ответ задачи 1: $(a, b, c) \sim (2, 3, 5)$ и $A_2 = 11$.

Задача 2. $У1$ сказал: "Я пока не знаю тройку (a, b, c)". $У2$ — "Я тоже не знаю". $У3$ — "Я знаю, что мое число меньше ваших чисел".

Вопрос: кто-то сможет определить тройку (a, b, c)?

Решение. Если A_3 — нечетное число, большее десяти, то его можно представить в виде $A_3 = 2\alpha + 3$, где $\alpha \geq 4$. Но из тройки $(2, \alpha, 3)$, кроме A_3, можно получить меньшее число $(2 \cdot 3 + \alpha)$:

$$(2 \cdot 3 + \alpha) = 6 + \alpha < 3 + 2\alpha = A_3$$

Значит, $A_3 \neq 11$, 13, 15, ...

Если теперь A_3 — четное число, большее тринадцати, то $A_3 = 2\alpha + 4$, где $\alpha \geq 5$. Но из тройки $(2, \alpha, 4)$, кроме A_3, получается меньшее число $2 \cdot 4 + \alpha$:

$$(2 \cdot 4 + \alpha) = 8 + \alpha < 4 + 2\alpha = A_3.$$

Значит, $A_3 \neq 14$, 16, 18, ...

Остались числа 10 и 12. Очевидно, что в этих случаях ученик $У3$ может сказать, что его число меньше остальных двух. Если остальные видят 11 и 14, то определят тройку (2, 3, 4), а если видят 15 и 20, то определят тройку (2, 3, 6).

Ответ: и $У1$, и $У2$ определят тройку.

Напрашивается следующий вопрос:

Задача 2а. Что будет, если ученик $У3$ скажет: "Мое число больше ваших чисел"?

Решение. Рассуждая аналогично, получаем:

$$A_3 = 3 + 2\alpha \Rightarrow (3, 2, \alpha) \to A_2 = 3\alpha + 2 > A_3, \quad A_3 = 4 + 2\alpha \Rightarrow (4, 2, \alpha) \to A_2 = 4\alpha + 2 > A_3.$$

Проверив выполнение условий задачи для $A_3 = 10$ и $A_3 = 12$, убеждаемся, что это невозможно.

Ответ: Такого не может быть.

Задача 3. Вот такая беседа была: $У1$: "Я уверен, что никто из нас не знает тройку (a, b, c)". $У2$: "Я тоже уверен в этом". $У3$: "Я тоже". $У1$: "А я уже знаю тройку (a, b, c)".

Определить тройку (a, b, c).

Решение. Обозначим через $M_2 = \{11, 14, 15, 20\}$. Числа из этого множества получаются из троек чисел (2, 3, 4), (2, 3, 6), рис. 1. Дальше делаем следующие замечания:

Замечание 1. Ученик, у которого число из M_2, не может утверждать, что другие тоже не знают (a, b, c). Это видно из рисунка 1 (только эти числа "имеют выход" на M_1).

Замечание 2. Для однозначного определения тройки (a, b, c) учеником $У1$ необходимо и достаточно:

а) среди троек разложения A_1 ровно одна не "имеет выхода" на M_2 (не приводит к M_2),

б) все остальные тройки имеют выход на M_2.

Это понятно из замечания 1. Объясним на примере $A_1 = 16$, которое имеет четыре тройки: $16 \to (2, 3, 10) \sim (2, 4, 8) \sim (2, 5, 6) \sim (2, 6, 4)$.

Из них $(2, 4, 8) \to (2 \cdot 8 + 4) = 20 \in M_2$, $(2, 4, 6) \to (2 \cdot 4 + 6) = 14 \in M_2$, $(2, 3, 10) \to 23$ и $32 \notin M_2$, $(2, 5, 6) \to 17$ и $32 \notin M_2$.

Ученик $У1$, получив $A_1 = 16$, исходя из слов $У2$ и $У3$ согласно замечанию 1, исключает тройки $(2, 4, 8)$ и $(2, 4, 6)$, которые приводят к M_2, и у него остается не одна, а две тройки, и он не может дать предпочтение какой-то из них.

Дальше из всех возможных значений числа A_1 (10, 11, 12, 13, …) сразу исключаем числа, содержащиеся в M_1 и M_2, и в оставшемся списке первым будет число 13. Убеждаемся, что $A_1 = 13$ удовлетворяет нашим требованиям:

$$13 \to (2, 3, 5) \sim (2, 4, 5) \sim (2, 3, 7), \quad (2, 3, 5) \to 11 \in M_2, \quad (2, 4, 5) \to 14 \in M_2,$$

а вот $(2, 3, 7) \to 17$ и 23, где $17 \notin M_2$ и $23 \notin M_2$.

Итак, для $A_1 = 13$ соответствующая тройка чисел — это $(a, b, c) \sim (2, 3, 7)$ и это один из ответов. Докажем, что это единственный ответ. Дальше в нашем списке значится число 16 (14 и 15 исключены раньше), а этот случай мы уже рассмотрели выше в качестве примера. Значит, $A_1 \neq 16$.

Следующее число 17 также имеет две тройки, которые не приводят к $M_2 : 17 \to (2, 3, 11) \to 25$ и $35 \notin M_2, (2, 4, 9) \to 22$ и $38 \notin M_2$. Тогда $A_1 \neq 17$.

Таким же образом исключаем числа 18 и 19:

$$18 \to (2, 3, 12) \to 27 \text{ и } 38 \notin M_2, \ 18 \to (2, 4, 10) \to 24 \text{ и } 42 \notin M_2$$
$$19 \to (2, 3, 13) \to 29 \text{ и } 41 \notin M_2, \ 19 \to (2, 4, 11) \to 26 \text{ и } 46 \notin M_2$$

Следующее число 20 мы уже исключили ($M_2 \ni 20$). Убедимся теперь, что все числа, большие двадцати, тоже исключаются:

$$21 + \alpha = 2 \cdot 3 + (15 + \alpha) = 2 \cdot 4 + (13 + \alpha), \text{ где } \alpha = 0, 1, 2, \ldots,$$

так как для таких чисел существуют две тройки $(2, 3, 15 + \alpha)$ и $(2, 4, 13 + \alpha)$, ни одна из которых не приводит к M_2, потому что из них получаются числа не меньше 21, а в нашем множестве M_2 максимальное число это 20.

Ответ: $(a, b, c) \sim (2, 3, 7)$ и $A_1 = 13$.

Задача 4. Ребята опять беседуют: $У1$: “Я уверен, что никто из нас не знает тройку (a, b, c)”.
$У2$: “А я был уверен, что ты можешь это сказать”.
$У3$: “Я тоже был уверен, что ты (т.е. $У1$) можешь это сказать”.
$У1$: “После ваших слов я уже знаю тройку (a, b, c).
Найдите (a, b, c).

Решение. Пусть $T_1 = \{(2, 3, 4), (2, 3, 6)\}$. Для каждого числа множества $M_2 = \{11, 14, 15, 20\}$ запишем новые тройки (их разложения), которые не входят в T_1 (рис. 1).

Таблица 1

M_1	T_1	M_2	T_2	M_3
10	2, 3, 4	11	2, 3, 5	13, 17
		14	2, 5, 4	13, 22
			2, 4, 6	16, 26
			2, 3, 8	19, 26
12	2, 3, 6	15	2, 3, 9	21, 29
			2, 4, 7	18, 30
		20	2, 8, 4	16, 34
			2, 7, 6	19, 44
			2, 6, 8	22, 50
			3, 4, 8	28, 35
			2, 5, 10	25, 52
			2, 4, 12	28, 50
			2, 3, 14	31, 44

Обозначим множество этих троек через T_2. А теперь из каждой тройки T_2 составим по два числа, не содержащихся в M_2, множество которых обозначим через T_3. Получаем цепочку $M_1 \to T_1 \to M_2 \to T_2 \to M_3$ (табл. 1). Посмотрим, какие отношения могут быть между числами A_1, A_2 и A_3 и множествами M_1, M_2, M_3, T_1 и T_2. Ясно, что ни одно из чисел A_1, A_2 и A_3 не принадлежит множествам M_1 или M_2 (замечание 1 из решения задачи 4).

Замечание 1. Если $A_2 \in M_3$, то не исключается, что $A_1 \in M_2$, но только-что выше сказали, что это невозможно. Значит, $A_2 \notin M_3$. По этой же причине $A_3 \notin M_3$. Значит, $A_2 \notin M_3$ и $A_3 \notin M_3$.

Замечание 2. Для однозначного определения тройки (a, b, c) учеником $У1$ необходимо и достаточно:

а) среди троек разложения A_1 ровно одна не имеет “выхода” ни на M_2, ни на M_3,

б) все остальные тройки приводят к M_2 или M_3.

Это вытекает из замечания 1. Далее, отметим, что про A_1 не можем утверждать, что $A_1 \in M_3$ или $A_1 \notin M_3$.

Затем (как в решении задачи 4) из списка всех возможных значений A_1 вычеркиваем числа, которые входят в M_1 или M_2 ($A_1 \neq 10, 12, 11, 14, 15, 20$). Оставшиеся числа разделим на две группы:

$R_1 = \{13, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23\}$ и R_2 — все числа, большие 23. Дальше по одному рассмотрим числа из R_1, среди них найдем два числа, которые будут ответом нашей задачи, а потом исключим всю группу R_2. Запишем весь этот процесс сжато:

$$A_1 = 13 \to (2,3,7) \sim (2,4,5) \sim (2,5,3),$$
$$(2,3,7) \to 17 \neq M_3 \quad (2,5,3) \to 17 \neq M_3, \quad (2,4,5) \to 14 \neq M_2.$$

Вывод: $A_1 = 13$ — все тройки приводят к $M_2 \cup M_3$.

$$A_1 = 16 \to (2,6,4) \sim (2,5,6) \sim (2,4,8) \sim (2,3,10),$$
$$\text{из них} \quad (2,6,4) \to 26 \in M_3, (2,5,6) \to 17 \in M_3, (2,4,8) \to 34 \in M_3,$$

а вот $(2,3,10) \to 23$ и $32 \notin M_2 \cup M_3$. Все тройки, кроме одной, привели к $M_2 \cup M_3$. Значит, $A_1 = 16$ и $(a,b,c) \sim (2,3,10)$ — один из ответов.

$$A_1 = 17 \to (3,5,2) \sim (2,7,3) \sim (3,4,5) \sim (2,6,5) \sim (2,5,7) \sim$$
$$\sim (2,4,9) \sim (2,3,11) \Rightarrow (13,13,19,16,19,22,25) \in M_3).$$

Все тройки приводят к M_3, соответствующие числа написаны в скобках по порядку троек.

$A_1 = 18 \Rightarrow$ имеет две тройки, которые не приводят ни к $M_2 \cup M_3$. Вот они: $(2,4,10) \to 42$, и $24 \notin M_2 \cup M_3$ и $(2,3,12) \to 38$, и $27 \notin M_2 \cup M_3$.

Вывод: $A_1 \neq 18$.

$A_1 = 19$ — это число удовлетворяет условию задачи. Рассмотрим все его тройки: $(2,5,9) \to 23$ и $47 \notin M_2 \cup M_3$, остальные приводят к $M_2 \cup M_3$ – $(2,8,3) \to 14 \in$, $(3,5,4) \to 17 \in M_3$, $(2,7,5) \to 17 \in M_3$, $(2,6,7) \to 44 \in M_3$, $(3,4,7) \to 31 \in M_3$.

Тогда второй ответ — $A_1 = 19, (a,b,c) \sim (2,5,9)$.

$A_1 = 21$ имеет две "плохие" тройки, которые не приводят к $M_2 \cup M_3 : (2,5,11) \to 27$ и $54 \notin M_2 \cup M_3$ и $(2,3,15) \to 47$ и $33 \notin M_2 \cup M_3$. Значит, $A_1 \neq 21$.

Такие же "плохие" тройки есть у чисел 22 и 23:

$$22 \to (2,4,14) \to 58 \text{ и } 32 \notin M_2 \cup M_3, 22 \to (2,7,8) \to 58 \text{ и } 23 \notin M_2 \cup M_3,$$
$$23 \to (2,3,17) \to 37 \text{ и } 53 \notin M_2 \cup M_3, 23 \to (3,4,11) \to 37 \text{ и } 47 \notin M_2 \cup M_3.$$

Теперь покажем, что все числа $A_1 \geq 24$ тоже имеют 2 "плохие" тройки, которые не приводят к $M_2 \cup M_3$:

$52 = \max M_2 \cup M_3$ — максимальное число во множестве $M_2 \cup M_3$. Заметим, что $(24 + \alpha) \to (2, 3, 18 + \alpha) \sim (2, 4, 16 + \alpha)$, где $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$ Эти две тройки будут "плохими".

Действительно, $(2, 3, 18 + \alpha) \to (39 + 2\alpha)$ и $(56 + 3\alpha)$. Из них $56 + 3\alpha > 52$, значит, не входит в $M_2 \cup M_3$, а $(39 + 2\alpha)$ — нечетное, но в $M_2 \cup M_3$ таких нечетных нет.

Рассмотрим следующую тройку: $(2, 4, 16 + \alpha) \to (36 + 2\alpha)$ и $(66 + 4\alpha)$. С последним из них все ясно: $66 + 4\alpha > 52 = \max(M_2 \cup M_3)$. А первое выражение $(36 + 2\alpha)$ имеет три значения (при $\alpha = 4$ или 7 или 8), при которых оно попадает в M_3:

$$36 + 2 \cdot 4 = 44 \in M_3, \quad 36 + 2 \cdot 7 = 50 \in M_3, \quad 36 + 2 \cdot 8 = 52 \in M_3.$$

При этих значениях α ($\alpha = 4, 7, 8$) получаем следующие значения для $A_1 : 24 + 4 = 28$, $24 + 7 = 31$, $24 + 8 = 32$. Для каждого из этих найдем другие две "плохие" тройки:

$$A_1 = 28 \to (2,3,22) \sim (2,5,18) \Rightarrow (47, 68, 41, 92 \notin M_2 \cup M_3)$$
$$A_1 = 31 \to (2,3,25) \sim (2,5,21) \Rightarrow (53, 78, 47, 107 \notin M_2 \cup M_3)$$
$$A_1 = 32 \to (2,3,26) \sim (2,5,22) \Rightarrow (55, 80, 49, 112 \notin M_2 \cup M_3)$$

Этим мы исключили все $A_1 \geq 24$.

Ответ: $(a,b,c) \sim (2,3,10)$ и $A_1 = 16$ или $(a,b,c) \sim (2,5,9)$ и $A_1 = 19$.

Задача 5. Беседа такая же, как в задаче 4, но требование задачи следующее (вместо "найти (a, b, c)"): могут ли ученики $У2$ и $У3$ определить тройку (a, b, c) после ответа $У1$?

Решение: После слов $У1$ остальные поняли, что $(a, b, c) \sim (2, 3, 10)$ или $(2, 5, 9)$. Их этих троек получаются следующие значения A_2 и A_3 : $(2, 3, 10) \to 23$ и 32,

$$(2, 5, 9) \to 23 \text{ и } 47.$$

Понятно, что тот, у кого 32 или 47, определяет, из какой тройки это число получено, а тот, у кого 23, не может однозначно определить тройку.

Ответ: один из них может, а другой — нет.

Литература

[1] Артемов С., Гиматов Ю., Федоров В. Много битов из ничего // Квант. - 1977. - № 3.

[2] Шарыгин И.Ф. Откуда берутся задачи? // Квант. - 1991. - № 8. - С. 42-48.

[3] Белов А.Я., Джамбетов Э.М., Тарамова Х.С. Решение олимпиадных задач по математике. Учебное пособие. - Издательство АЛЕФ, Грозный-Махачкала, 2020.

Оганесян Гегам Аршакович,
преподаватель математики школы Evoland г. Воронежа.

E-mail: geghamvahe@gmail.com

Джамбетов Эльман Махмудович,
доцент кафедры математического анализа
Чеченского государственного педагогического
университета, кандидат технических наук,
Почетный работник высшего образования РФ.

E-mail: xazar-76@mail.ru

Белов Алексей Яковлевич,
профессор МФТИ, Главный научный сотрудник,
Федеральный профессор математики,
профессор, доктор физ.-мат. наук.

E-mail: kanelster@gmail.com

Способ решение уравнений 4-й степени с помощью симметрии

Бехзод Собиров

В заметке изложен способ решения уравнения 4-й степени путем сведения его к возвратному. Оказывается, что для этого, как и в случае классического метода Феррари, достаточно решить вспомогательное кубическое уравнение.

Еще в школе учащиеся решают биквадратные уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, которые одной очевидной заменой сводятся к квадратному уравнению. Интуитивно достаточно очевидным обобщением является идея исследовать такое уравнение, которое сводится к биквадратному через линейную замену. Для этого нам потребуется понять, что происходит с коэффициентами многочлена при линейной замене.

Пусть $f(x)$ — многочлен степени n; представим его в виде многочлена Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Пользуясь этим равенством, можно сделать линейную замену $x = y + x_0$ и получить следующее равенство:

$$f(y + x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot y^k. \tag{1}$$

Упражнение. Доказать равенство (1) для любого многочлена степени n.

В частности, пользуясь равенством (1), можно получить формулу сдвига для многочлена 4-й степени:

$$f(x + x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot x + \frac{f''(x_0) \cdot x^2}{2!} + \frac{f'''(x_0) \cdot x^3}{3!} + \frac{f''''(x_0) \cdot x^4}{4!}.$$

Теперь приступим к решению уравнения 4-й степени. Если мы разделим любое уравнение 4-й степени на его старший коэффициент, то получим приведенное уравнение. Допустим, у нас есть уравнение $f(x) = 0$ с единичным старшим коэффициентом, то есть приведенное. Требуется его решить:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{2}$$

Пользуясь (1), можно легко добиться того, чтобы коэффицент при x^3 был равен нулю. Но также нам хочется, чтобы при этом стал равен нулю и коэффициент при x. Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ \frac{f'''(x_0)}{3!} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_0^3 + 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = 0 \\ 24x_0 + 6a = 0 \end{cases}$$

После решения этой системы мы получим следующий результат:

$$\begin{cases} a^3 - 4ab + 8c = 0 \\ x_0 = \frac{-a}{4} \end{cases}$$

Отсюда видно, что x_0 выражается через a, а чтобы найти a, надо решить уравнение

$$a^3 - 4ab + 8c = 0. \tag{3}$$

Условие (3) является необходимым и достаточным чтобы уравнение (2) можно было свести к биквадратному.

Упражнение. 1. Доказать, что если выполняется условие $a^3-4ab+8c=0$, то график исходного многочлена из (2) симметричен относительно оси OY.

2. Доказать, что выражение $a^3-4ab+8c$ не меняется после линейной замены.

Однако не все уравнения подчиняются этому условию, поэтому мы найдем более сложный метод для их решения. Для этого мы будем использовать симметрию коэффициентов или же превращать уравнения 4-й степени в *возвратные уравнения*[1].

Пусть уравнение (2) является возвратным. Тогда для него справедлива следующая система:

$$\begin{cases} \frac{c}{a}=\lambda \\ d=\lambda^2 \\ \lambda\neq 0 \end{cases} \iff d=\frac{c^2}{a^2} \iff a^2d=c^2 \iff a^2d-c^2=0. \tag{4}$$

Для удобства перепишем (2) в другой форме:

$$x^4+ax^3+bx^2+a\lambda x+\lambda^2=0.$$

Так как $\lambda\neq 0$, то 0 не является решением уравнения и мы можем уравнение разделить на x^2 и получить следующее:

$$x^2+ax+b+\frac{a\lambda}{x}+\frac{\lambda^2}{x^2}=0.$$

И после группировки получим

$$\Big(x+\frac{\lambda}{x}\Big)^2+a\Big(x+\frac{\lambda}{x}\Big)+b-2\lambda=0.$$

Затем производим очевидную замену $y=x+\frac{\lambda}{x}$ и находим корни квадратного уравнения, решая его относительно переменной y.

Теперь, как и раньше, сделаем попытку преобразовать уравнение (2). Для того, чтобы оно было возвратным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (4):

$$\Big(\frac{f'''(x_0)}{3!}\Big)^2\cdot f(x_0)-(f'(x_0))^2=0.$$

После раскрытия скобок в уравнении появится 6-я степень неизвестного x_0, что может вызвать беспокойство из-за необходимости решать уравнение 6-й степени, чтобы решить исходное уравнение 4-й степени. Однако, оказывается, что 6-е, 5-е и 4-е степени сократятся и после группировки останется следующее кубическое уравнение относительно x_0:

$$(a^3-4ab+8c)x_0^3+(a^2b+2ac-4b^2+16d)x_0^2+(a^2c+8ad-4bc)x_0+a^2d-c^2=0. \tag{5}$$

Удивительно и очень красиво, что старший коэффициент в кубическом уравнении (5) имеет уже знакомое нам значение (3). Если возможно привести уравнение (2) к биквадратному, то это следует сделать, так как это более простой способ решения. В противном случае придется решать кубическое уравнение (5) чтобы превратить исходное уравнение (2) в форму возвратного. Приятным фактом является то, что мы можем использовать значение (3), которое мы уже вычислили, когда хотели узнать, можно ли свести уравнение (2) к биквадратному. Таким образом, эти два метода дополняют друг друга в решении уравнений 4-й степени.

[1] Возвратными (симметричными) уравнениями 4-ой степени называют уравнения вида $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, а также уравнения вида $ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$.

Также можно отметить, что свободный член уравнения (5) равен (4). Это объясняется тем, что если (4) равен нулю, то исходное уравнение (2) четвертой степени становится возвратным, и полученное кубическое уравнение (5) должно иметь решение, равное нулю.

После увиденного возникает желание обобщить методы для других степеней, но при этой попытке возникает ряд проблем. Первый метод решает лишь небольшой класс задач, и с увеличением степени класс задач уменьшается. Использовать равенства (1) проще, чем выводить достаточное и необходимое условие для каждой степени.

Второй метод дает нам надежду, но теорема Руффини-Абеля [1] указывает на то, что для пятых и более степеней что-то должно пойти не так. Действительно, уравнения пятой степени и выше не разрешимы в радикалах. Популярное изложение доказательства неразрешимости см. в книге [2]. Это подтверждается тем, что при попытке привести уравнение пятой и выше степеней к возвратному виду необходимо решить систему алгебраических уравнений, и система не всегда имеет решение в отличие от одного алгебраического уравнения.

Но что насчет решения кубических уравнений? Теорема Руффини-Абеля не препятствует обобщению метода на кубические уравнения. Формально кубическое уравнение может быть преобразовано в возвратную форму после линейной замены, но для этого необходимо сначала решить другое кубическое уравнение, что является тавтологией.

Список литературы

1. Алексеев В.Б. Теорема Абеля в задачах и решениях. - М.: МЦНМО, 2001.
2. Табачников С.Л., Фукс Д.Б. Математический дивертисмент. - М.: МЦНМО, 2011.

Бехзод Собиров,
студент 1-го курса Факультета информатики и
вычислительной техники МФТИ,
г. Долгопрудный Московской обл.

E-mail: libreel@tutanota.com

From Differential Equations to Difference Equations

Ushangi Goginava, Farrukh Mukhamedov [1]

Самый популярный и широко используемый метод решения линейных уравнений первого порядка — применение индукции. Однако существуют методы, которые можно использовать для получения общего решения без применения математической индукции. Также, общие решения можно найти методом, основанном на характеристическом уравнении — для линейных разностных уравнений второго порядка типа Эйлера-Коши. Эти дифференциальные уравнения являются важным аспектом обучения, поскольку они дают фундаментальное сочетание инструментов и интуиции, которые в итоге приводят к уравнениям в частных производных. Последние широко используются для описания разнообразных явлений в естественных науках.

Статья публикуется на английском языке.

The most popular, widely used method in regards to solving first order linear equations is through induction. However there are similar techniques that can be employed to obtain a general solution without the use of mathematical induction. Also, general solutions can be provided by borrowing a method based on the characteristic equation for second order linear difference equations of the Euler-Cauchy type. These differential equations are an important aspect of learning as they provide a fundamental foundation of tools and intuition that lead to partial differential equations which are used to describe phenomena in natural sciences.

1. Introduction

The main fundamental tool of calculus is considered to be the notion of the derivative with many applications in natural sciences and explanations for phenomenas ranging from heat, traffic, waves, etc. Concepts such as acceleration, Newton's Second law, etc will make an appearance in a student's life at some point especially in physics. Hence understanding the key concept of the derivative is imperative in truly grasping the notions presented within the student's other studies which helps in the applications of the derivative in real world systems. Considering some of the most simple real world applications and notions, the main point boils down to the involvement ordinary differential equations and their solutions.

Taking a step further, studying discrete analogous of the derivatives builds intuition on using integration. This can be extended to the case of discrete versions of ordinary differential equations where a heuristic method of separation of variables is employed when solving first order ordinary differential equations. Note, there are many books and resources dedicated in solving and providing solutions to these type of ordinary differential equations (see [3]) where most provide the explicit form of the solution and mathematical induction is employed to prove that the result is a general solution.

Now, the main objective is to employ similar techniques to acquire the general solution for first order linear difference equations without the use of induction and to awaken the intuition of the student in regards to applications in real world systems. These techniques gently lead to the next objective which is to solve and find general solutions of the Euler-Cauchy type second order linear difference equations. This is done through a borrowed method based on the characteristic equation associated with the Euler-Cauchy differential equation.

$$t^2y'' + aty' + by = 0$$

In [5] general solutions of linear difference equations related to a particular equation $y'' + (\lambda/t^2)y = 0$ are presented. Note that the discoveries within this paper may have potential applications in analysis of asymptotic expansion of solution of the Euler type equations. This illustrates the fact that similar

[1] Date: Received: 20.03.2023; Accepted: 30.06.2023.
2010 Mathematics Subject Classification. Primary 39A21; Secondary 39A12.
Key words and phrases. difference equation; Cauchy-Euler equation.

approaches in other literature have not been found, hence cementing the findings of this paper as a new discovery with potential for applications. However, the characteristic equation method has been used to investigate asymptotic expansion of the second order linear difference equations.

$$y_{n+2} + a(n)y_{n+1} + b(n)y_n = 0; \tag{1.1}$$

where $a(n)$ and $b(n)$ have asymptotic expansions of the form

$$a(n) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n^k}, \quad b(n) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{n^k}$$

Asymptotic solutions to (1.1) are classified by the roots of the characteristic equation

$$\rho^2 + a_0\rho + b_0 = 0.$$

We refer the reader to [1, 2, 7] for more information. It is pointed out that the last characteristic equation is different from what we are presenting in this paper.

2. Discrete Derivative

For convenience think of a sequence of real numbers $\{y_n\}$ as a function defined on the natural numbers $\mathbb{N}$, and as such the discrete derivative Dy_n can be defined to be the sequence obtained as follows:

$$Dy_n = y_{n+1} - y_n, \quad n \in N.$$

For instance, for the constant sequence $y_n = c$, $n \in \mathbb{N}$, we have $Dy_n = 0$ for all values of n. If we consider the sequence $y_n = n^2$, then $Du_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$. Another example is $y_n = 2^n$. Then, $Dy_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$, so $Dy_n = y_n$. The literature [6] is recommended to further explore these examples.

Using the same spirit of differential calculus, the discrete derivative of a product of two sequences can be calculated [3, 4]:

$$\begin{aligned} D(x_n y_n) &= x_{n+1}y_{n+1} - x_n y_n \\ &= x_{n+1}y_{n+1} - x_{n+1}y_n + x_{n+1}y_n - x_n y_n \\ &= x_{n+1}(y_{n+1} - y_n) - y_n(x_{n+1} - x_n) \\ &= x_{n+1}Dy_n + y_n Dx_n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

For example, $D(n2^n) = (n+1)D(2^n) + nD(n) = (n+1)2^n + n$.

Taking into account $x_{n+1} = Dx_n + x_n$, the product rule (2.1) can be rewritten as follows:

$$D(x_n y_n) = x_n Dy_n + y_n Dx_n + Dx_n Dy_n. \tag{2.2}$$

Now, observe the second order derivative of $\{y_n\}$. Indeed, we have

$$D^2 y_n = D(Dy_n) = Dy_{n+1} - Dy_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

In the coming sections, applications of the discrete derivates are demonstrated. This is applied to the solution of difference equations by employing the methods of the differential equations.

3. First order difference equations

In this section, the methods of integrating factors is demonstrated to illustrate how it can be employed to solve first order linear difference equations.

Consider the first order linear difference equation:

$$y_{n+1} - p_n y_n = r_n, \quad y_0 = a, \quad n \geq 0, \tag{3.1}$$

where p_n, r_n are given real numbers. It is assumed that $p_n \neq 0$, for all values of n.

The interest lies in finding a solution of (3.1) such that $y_n \neq 0$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Remark 3.1. In [3] the solution of (3.1) is given explicitly which is then proved through induction. However, the solution can be acquired by solving the considered equation directly. In the spirit of the paper, this is demonstrated through the use of integrating factors method borrowed from the ordinary differential equations (ODE).

Now, rewrite (3.1) as follows

$$Dy_n + (1 - p_n)y_n = r_n. \tag{3.2}$$

To solve the last equation, the integrating factor technique is employed.

Assume that $\{F_n\}$ is a sequence, which will be found later on. Then from (3.2), we find

$$F_{n+1}Dy_n + F_{n+1}(1 - p_n)y_n = F_{n+1}r_n. \tag{3.3}$$

Suppose that

$$D(F_n y_n) = F_{n+1}Dy_n + F_{n+1}(1 - p_n)y_n \tag{3.4}$$

Then, due to (2.1), from the last equality

$$F_{n+1}Dy_n + y_n D(F_n) = F_{n+1}Dy_n + F_{n+1}(1 - p_n)y_n$$

is obtained. Hence,

$$y_n D(F_n) = F_{n+1}(1 - p_n)y_n$$

is found. This implies $D(F_n) = F_{n+1}(1 - p_n)$. Hence,

$$F_{n+1} - F_n = F_{n+1}(1 - p_n)$$

therefore,

$$p_n F_{n+1} = F_n \Rightarrow F_{n+1} = \frac{1}{p_n}F_n.$$

Hence,

$$F_n = \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} p_k}F_0. \tag{3.5}$$

Without loss of generality, we may assume that $F_0 = 1$.

Now, using the assumption (3.4), from (3.3) it follows that

$$D(F_n y_n) = F_{n+1}r_n$$

which yields

$$\sum_{k=0}^{n-1} D(F_k y_k) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}r_k \Rightarrow F_n y_n - y_0 = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}r_k$$

so,

$$y_n = \frac{1}{F_n}\left(y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}r_k\right).$$

Now, using (3.5) from the last equality, one gets

$$y_n = \prod_{k=0}^{n-1} p_k \left(y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r_k}{\prod_{j=0}^{k-1} p_j}\right) = y_0\left(\prod_{k=0}^{n-1} p_k\right) + \sum_{k=0}^{n-1} r_k \left(\prod_{j=k}^{n-1} p_j\right).$$

Hence, the solution of (3.1) has the following form

$$y_n = y_0 \prod_{k=0}^{n-1} p_k + \sum_{k=0}^{n-1} r_k \left(\prod_{k=0}^{n-1} p_j \right), \ n \geq 1. \tag{3.6}$$

Now, we consider a version of the Bernoulli equation:

$$y_n^m - p_n y_{n+1}^m = r_n y_n^m y_{n+1}^m, \ y_0 = a \geq 0, \tag{3.7}$$

where $p_n \neq 0$ and $m \neq 0$.

Denoting

$$u_n = \frac{1}{y_n^m}$$

from (3.8), we obtain

$$u_{n+1} - p_n u_n = r_n; \ u_n = \frac{1}{y_n^m} \tag{3.8}$$

So, by (3.10), one finds

$$u_n = \frac{1}{a^m} \prod_{k=0}^{n-1} p_k + \sum_{k=0}^{n-1} r_k \left(\prod_{j=k}^{n-1} p_j \right), \ n \geq 1. \tag{3.9}$$

This implies

$$y_n^m = \frac{a^m}{\prod_{k=0}^{n-1} p_k + \sum_{k=0}^{n-1} r_k \left(\prod_{j=k}^{n-1} p_j \right)}, \ n \geq 1. \tag{3.10}$$

4. Euler-Cauchy type second order difference equations

This sections aims to show the method employed to solve the second order linear difference equation. This is done through the use of the Euler-Cauchy method which is borrowed from classical differential equations.

Let us first consider the following equation:

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0, \tag{4.1}$$

where

$$p_n = -2 + \frac{a}{n+2}, \ q_n = 1 - \frac{a}{n+2} + \frac{b}{(n+1)(n+2)}.$$

Now, using the discrete derivative, the equation (4.1) can be rewritten as follows:

$$(n+1)(n+2)D^2 y_n + a(n+1)Dy_n + by_n = 0. \tag{4.2}$$

The last equation similarly looks like the classical Euler-Cauchy equation. Now, using the same strategy as the classical case, the solution is searched in the following form:

$$y_n = A_n^\alpha, \ n \in \mathbb{N}, \ \alpha \in \mathbb{C}, \tag{4.3}$$

where A_n^m is the generalized binomial coefficient given by

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!}, \ \alpha \notin -\mathbb{N}, \tag{4.4}$$

The coefficient A_n^α enjoys the following property [8]:

$$A_{n+1}^\alpha - A_n^\alpha = A_{n+1}^{\alpha-1} \tag{4.5}$$

Using (4.5), for y_n given by (4.3) we obtain

$$Dy_n = A_{n+1}^{\alpha-1}, \ \ D^2 y_n = A_{n+2}^{\alpha-2} \tag{4.6}$$

Now, by (4.4) one finds

$$Dy_n = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{(n+1!)} = \frac{\alpha}{n+1} A_n^\alpha, \tag{4.7}$$

Similarly, we have

$$D^2 y_n = \frac{\alpha(\alpha-1)}{(n+1)(n+2)} A_n^\alpha. \tag{4.8}$$

Substituting these into (4.2), we find

$$\alpha(\alpha-1) + a\alpha + b = 0 \Rightarrow \alpha^2 + (a-1)\alpha + b = 0. \tag{4.9}$$

This equation is called *characteristic equation* of (4.2). Its discriminant equals to $\mathcal{D} := (a-1)^2 - 4b$.

Now, we consider several cases.

Case I. Assume that $\mathcal{D} > 0$, then (4.9) has two distinct real roots, say α_1 and α_2. Then

$$y_n^{(1)} = A_n^{\alpha_1}, \ \ y_n^{(2)} = A_n^{\alpha_2}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

are two solutions of (4.2). We stress that α_1; α_2 should not be negative integer, i.e. α_1, $\alpha_2 \notin -\mathbb{N}$. In this case, general solution of (4.2) has the following form:

$$y_n = c_1 A_n^{\alpha_1} + c_2 A_n^{\alpha_1}, \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

where c_1, c_2 are constants.

Case II. Assume that $\mathcal{D} = 0$, then (4.9) has only real root, say $\alpha_1 = (1-a)/2$. Then

$$Y_n = A_n^{\frac{1-a}{2}}, \ \ n \in \mathbb{N}$$

is a solutions of (4.2). It is supposed that $1 - a \notin -2\mathbb{N}$.

In this case, stress is put on the fact that the second solution of (4.2) is looked in the form $z_n = u_n Y_n$ (this is also borrowed from the theory of linear differential equations), where u_n will be determined later on. By (2.2), one can find that

$$Dz_n = Du_n(Y_n + DY_n) + u_n DY_n \tag{4.11}$$

which yields

$$D^2 z_n = D^2 u_n (Y_n + 2DY_n + D^2 Y_n) + 2Du_n(DY_n + D^2 Y_n) + u_n D^2 Y_n. \tag{4.12}$$

Rewriting (4.2) by

$$D^2 y_n + \frac{a}{n+2} Dy_n + \frac{b}{(n+1)(n+2)} y_n = 0 \tag{4.13}$$

and substituting (4.11),(4.12) into the last one, we obtain

$$D^2 u_n (Y_n + 2DY_n + D^2 Y_n) + 2Du_n(DY_n + D^2 Y_n) + u_n D^2 Y_n +$$
$$+ \frac{a}{n+2}\left[Du_n(Y_n + DY_n) \ \ + \ \ u_n DY_n\right] + \frac{b}{(n+1)(n+2)} u_n Y_n = 0$$

which yields

$$D^2u_n(Y_n+2DY_n+D^2Y_n)+Du_n\left[2D^2Y_n+2DY_n+\frac{a}{n+2}(Y_n+DY_n)\right]+$$

$$+u_n\underbrace{\left[2D^2Y_n+\frac{a}{n+2}Y_n+\frac{b}{(n+1)(n+2)}Y_n\right]}_{=0}=0.$$

Now, denoting $v_n=Du_n$, from the last equation, we have

$$Dv_n\mathcal{A}_n+v_n\mathcal{B}_n=0, \tag{4.14}$$

where

$$\mathcal{A}_n=Y_n+2DY_n+D^2Y_n,\ \ \mathcal{B}_n=2D^2Y_n+2DY_n+\frac{a}{n+2}(Y_n+DY_n). \tag{4.15}$$

We reduce (4.14) to $\mathcal{A}_n(v_{n+1}-v_n)+\mathcal{B}_nv_n=0$ which implies

$$v_{n+1}=v_n\left(1-\frac{\mathcal{B}_n}{\mathcal{A}_n}\right),$$

hence,

$$v_{n+1}=v_0\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{\mathcal{B}_n}{\mathcal{A}_n}\right).$$

Since, we are interested in a particular solution of (4.15), therefore, we may assume that $v_0=1$.

Now, taking into account $Y_n=A_n^{\alpha}$, where $a=1-2\alpha$, and using (4.6) together with (4.7),(4.8) we obtain

$$\mathcal{A}_k=A_k^{\alpha}+2A_{k+1}^{\alpha-1}+A_{k+2}^{\alpha-2} \tag{4.16}$$

$$=A_k^{\alpha}\left(1+\frac{2_{\alpha}}{k+1}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{(k+1)(k+2)}\right) \tag{4.17}$$

$$\mathcal{B}_k=A_k^{\alpha}\left[\frac{2\alpha}{k+1}+\frac{2\alpha(\alpha-1)}{(k+1)(k+2)}+\frac{1-2\alpha}{k+2}\left(1+\frac{\alpha}{k+1}\right)\right] \tag{4.18}$$

Using these equalities and simple calculations, one gets

$$1-\frac{\mathcal{B}_k}{\mathcal{A}_k}=\frac{k+\alpha+1}{k+\alpha+2} \tag{4.19}$$

So,

$$v_n=\prod_{k=0}^{n-1}=\frac{k+\alpha+1}{k+\alpha+2}=\frac{\alpha+1}{1+\alpha+n} \tag{4.20}$$

Due to $Du_n=v_n$, we have

$$\sum_{k=0}^{n-1}Du_n=\sum_{k=0}^{n-1}v_k$$

which implies

$$u_n-u_0=\sum_{k=0}^{n-1}v_k.$$

Without loss of generality, we may assume that $u_0 = 0$. So, by (4.20) we find

$$u_n = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\alpha+1}{1+\alpha+l}$$

Consequently, the second solution of (4.2) has the following form

$$y_n^{(2)} = A_n^{\frac{1-a}{2}} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{3-a}{3-a+2l}. \tag{4.21}$$

In this case, general solution of (4.2) has the following form:

$$y_n = c_1 A_n^{\frac{1-a}{2}} + c_2 A_n^{\frac{1-a}{2}} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{3-a}{3-a+2l} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.22}$$

where c_1, c_2 are constants.

Case III. In this case, we consider a situation when $\mathcal{D} > 0$, but (4.9) has two real roots such that $\alpha_1 \notin -\mathbb{N}$ and $\alpha_2 \in -\mathbb{N}$. Then, the first solution of (4.2) is given by

$$Y_n = A_n^{\alpha_1} \quad n \in \mathbb{N}$$

However, the second solution cannot be defined as before. To find it, we are going to use the same argument as shown in Case II. Namely, the second solution of (4.2) is found in the form $z_n = u_n Y_n$, where un will be determined later on. Now, by employing all above calculations, we arrive at

$$v_{n+1} = v_n \left(\frac{n+2-\alpha_1-a}{n+\alpha_1+2} \right).$$

Now, noticing that the value $2-\alpha_1-a$ could be less or equal 0, therefore, we have

$$v_n = \prod_{k \geq [a+\alpha_1-2]+1}^{n-1} \left(\frac{k+2-\alpha_1-a}{k+\alpha_1+2} \right). \tag{4.23}$$

Due to $Du_n = v_n$, we have

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k.$$

So, by (4.29) we find

$$u_n = \prod_{l=k \geq [a+\alpha_1-2]+2}^{n-1} \prod_{k \geq [a+\alpha_1-2]+1}^{l-1} \left(\frac{k+2-\alpha_1-a}{k+\alpha_1+2} \right)$$

Consequently, the second solution of (4.2) has the following form

$$y_n^{(2)} = A_n^{\alpha_1} \prod_{l=k \geq [a+\alpha_1-2]+2}^{n-1} \prod_{k \geq [a+\alpha_1-2]+1}^{l-1} \left(\frac{k+2-\alpha_1-a}{k+\alpha_1+2} \right) \tag{4.24}$$

where $n \geq a+\alpha_1-2$.

Case IV. Assume that $\mathcal{D} < 0$, then (4.9) has two complex roots, say $\alpha_1 = U + iV$, $\alpha_2 = U - iV$. Then, we can see that $A_n^{\alpha_1} = \overline{A_n^{\alpha_1}}$. Therefore, the corresponding solutions of (4.2) are given by

$$y_n^{(1)} = \frac{A_n^{\alpha_1} + A_n^{\alpha_2}}{2}, \quad y_n^{(1)} = \frac{A_n^{\alpha_1} - A_n^{\alpha_2}}{2i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hence, general solution of (4.2) has the following form:

$$y_n = c_1 \frac{A_n^{\alpha_1} + A_n^{\alpha_2}}{2} + c_2 \frac{A_n^{\alpha_1} - A_n^{\alpha_2}}{2i}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.25}$$

where, as before, c_1, c_2 are constants.

Example 4.1. Let us consider the following equation:

$$y_{n+2} - \left(2 + \frac{1}{n+1}\right) y_{n+1} + \left(2 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) y_n = 0. \tag{4.26}$$

This equation is reduced to

$$(n+1)(n+2)D^2 y_n - (n+1)Dy_n + y_n = 0.$$

In this case, $a = -1$, $b = 1$. One can see that its characteristic equation is $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$ which means that $\alpha = 1$ is a unique solution. Now, we are in the case II. Hence, the first solution is $y_n^{(1)} = A_n^1 = n+1$. By (4.21), the second solution is given by

$$y_n^{(2)} = (n+1) \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2+l}.$$

Example 4.2. Let us consider the following equation:

$$y_{n+2} - \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) y_{n+1} + \left(1 - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) y_n = 0.$$

This equation is reduced to

$$(n+1)(n+2)D^2 y_n + (n+1)Dy_n - y_n = 0.$$

In this case, $a = 1$, $b = -1$. The characteristic equation is $\alpha^2 - 1 = 0$ which means that $\alpha_1 = 1$ and $\alpha_2 = -1$. Now, we are in the case III. Hence, the first solution is $y_n^{(1)} = A_n^1 = n+1$. By (4.30), the second solution is given by

$$y_n^{(2)} = (n+1) \sum_{l=2}^{n-1} \prod_{k=1}^{l-1} \left(\frac{k}{k+3}\right) = \frac{3n^2 + 3n - 6}{2n}$$

The last one can be rewritten as follows

$$y_n^{(2)} = \frac{3}{2}(n+1) - 3\frac{1}{n}.$$

Since $n+1$ is the first solution, then we infer that the second solution of the equation is

$$y_n^{(2)} = \frac{1}{n}.$$

Consequently, a general solution of (4.26) has the following form:

$$y_n = c_1(n+1) + c_2 \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.27}$$

where, as before, c_1, c_2 are constants.

Example 4.3. Now, consider another equation:

$$y_{n+2} - \left(2 - \frac{2}{n+1}\right) y_{n+1} + \left(1 - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right) y_n = 0.$$

This equation is reduced to (4.2) with $a = 2$, $b = -2$. The characteristic equation is $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$ which has $\alpha_1 = 1$ and $\alpha_2 = -2$ roots. Again, by the case III, we find $y_n^{(1)} = n + 1$. By (4.30), the second solution can be calculated as follows

$$y_n^{(2)} = \frac{n^3 - n - 24}{2n(n-1)} = \frac{1}{3}(n+1) - 8\frac{1}{n(n-1)}.$$

Since $n + 1$ is the first solution, then we infer that the second solution of the equation is

$$y_n^{(2)} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Now, we consider the remaining cases.

Case V. In this case, we consider a situation when $\mathcal{D} > 0$, such that (4.9) has two negative integer roots, i.e. $\alpha_1 = -k$, $\alpha_2 = -m$, where k, $m \in \mathbb{N}$, $k \neq m$. Then, the above considered examples suggest us the solutions of (4.2) have the following forms

$$y_n^{(1)} = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)}, \quad y_n^{(2)} = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-m+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hence, general solution of (4.2) is given by

$$y_n = \frac{c_1}{n(n-1)\dots(n-k+1)} + \frac{c_2}{n(n-1)\dots(n-m+1)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.28}$$

where, as before, c_1, c_2 are constants.

Case VI. This is the last possible case, in which it is assumed that $\mathcal{D} = 0$, and (4.9) has one negative integer root $\alpha = -k$, where $k \in \mathbb{N}$. Then by the case V, one of the solution of (4.2) can be found by

$$Y_n = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Now, to find the second solution of (4.2) we are going to employ the method given in the case II. Namely, the second solution of (4.2) is looked at the form $z_n = u_n Y_n$, where u_n will be determined later on. By using the same argument in Case II, we arrive at

$$v_{n+2} = v_n \left(\frac{n-k+1}{n-k+2} \right).$$

Now, noticing that the value $2 - \alpha_1 - a$ could be less or equal 0, therefore, we have

$$v_n = \prod_{l=k}^{n-1} \frac{l-k+1}{l-k+2} = \frac{1}{n-k+1}. \tag{4.29}$$

Due to $Du_n = v_n$, we have

$$u_n = \sum_{m=k}^{n-1} \frac{l}{m-k+1} = \sum_{t=1}^{n-k} \frac{l}{t}$$

Consequently, the second solution of (4.2) has the following form

$$y_n^{(2)} = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)} \sum_{t=1}^{n-k} \frac{l}{t} \tag{4.30}$$

where $n \geq a + \alpha_1 - 2$.

Concluding remarks

A multitude of ideas stemming from differential equations and their analogous in the discrete difference equations have been shown and explored. This new idea introduces a new outlook and provides a different perspective regarding differential equations with ideas rooted in the theory of linear differential equations and the meaning of the derivative.

A heavy emphasis is expressed regarding the method employed in finding the second solution as knowing the first solution is based on the theory of linear differential equations. However, a formula given in [3] which is used to find the second suction by means of the first one involving Casoratian determinants (see [3, p.91]). Nevertheless its calculation is nearly impossible as it requires a large number of determinants which has a high computational complexity. The beauty of the formulas discovered lie with its simplicity which can be explicitly utilised in finding asymptotic expansion of the solutions. Further development of the provided ideas can be extended for a variety of Euler-Cauchy equations. This is mentioned in hopes that it incites students to search for new findings in the field of discrete difference equations. Lastly, the obtained formulas are a great extension of differential equations and can be employed in training students to further their preparation for maths olympiads and competitions.

References

1. Adams C.R. On the irregular cases of linear ordinary difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. - Vol. 30. - 1928. - P. 507-541.

2. Birkhoff G.D. Formal theory of irregular linear drfference equations // Acta Math. - Vol. 54. - 1930. - P. 205-246.

3. Elaydi S. An Introduction to Difference Equations. - Springer Science+Business Media, Inc., 2005.

4. Goldberg S. An Inroduction to Difference Equations. - New York: Wiley, 1958.

5. Hongyo A., Yamaoka N. General solution of second-order linear difference equations of Euler type // Opuscula Math. - Vol. 37. - 2012. - P. 389-402.

6. Strang G. Sums and differences vs. integrals and derivatives // College Math. J. - Vol. 21. - 1990. - P. 20-27.

7. Wong R., Li H. Asymptotic expansions for second-order linear difference equations // J. Comput. Appl. Math. - Vol. 41. - 1992. - P. 65-94.

8. Zygmund A. Trigonemetric Series. - Cambridge Univ. Press, 2002.

Ushangi Goginava,
Mathematical Sciences Department, College of Science,
United Arab Emirates University 15551,
Al-Ain United Arab Emirates.

E-mail: zazagoginava@gmail.com, ugoginava@uaeu.ac.ae

Farrukh Mukhamedov,
Mathematical Sciences Department, College of Science,
United Arab Emirates University 15551,
Al-Ain United Arab Emirates.

E-mail: far75m@gmail.com, farrukh.m@uaeu.ac.ae

Случайные точки с фиксированным распределением координат

Е. И. Знак

В данной статье анализируется одно распространённое заблуждение, встречающееся при построении прикладных моделей на основе теории вероятностей и даже иногда в преподавании.

Случайная точка с абсолютно непрерывным распределением и предписанными распределениями координат

Время от времени приходится сталкиваться с мнением, что нормальные распределения координат X и Y случайной точки $(X;Y)$ означают нормальное распределение этой случайной точки на координатной плоскости. Это действительно так, если дополнительно известно, что X и Y независимы. А в общем случае, такое мнение, конечно же, является заблуждением. Для построения соответствующего контрпримера проинтегрируем симметричную положительную функцию

$$p(x,y) \equiv \frac{1}{\pi\sqrt{2}} e^{-x^2-y^2} ch(xy\sqrt{2})$$

по одной из переменных. Здесь $ch(t) := (e^t + e^{-t})/2$ — гиперболический косинус. Для этого предварительно обоснуем тождество

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-st^2+\lambda t} dt \equiv e^{\frac{\lambda^2}{4s}} \sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad (s>0),$$

например, сославшись на то, что функция $g(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\tau^2}{2}}$ представляет собой плотность вероятностного распределения. Итак,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-st^2+\lambda t} dt = e^{\frac{\lambda^2}{4s}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\left(t-\frac{\lambda}{2s}\right)^2} dt = e^{\frac{\lambda^2}{4s}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-sp^2} dp =$$

$$= e^{\frac{\lambda^2}{4s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(p\sqrt{2})^2}{2}} d(p\sqrt{2}) = e^{\frac{\lambda^2}{4s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = e^{\frac{\lambda^2}{4s}} \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y) dy = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} \left(e^{-x^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2+xy\sqrt{2}} dy + e^{-x^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2-xy\sqrt{2}} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} \left(e^{-x^2} e^{\frac{2x^2}{4}} \sqrt{\pi} + e^{-x^2} e^{\frac{2x^2}{4}} \sqrt{\pi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Теперь из соображений симметричности можно утверждать, что координаты X и Y случайной точки $(X;Y)$ с указанной плотностью распределения $p(x,y)$ имеют стандартное нормальное распределение. А вот то, что вероятностное распределение точки $(X;Y)$ не является нормальным, легко доказать от противного. В самом деле, из тождества

$$e^{-x^2-y^2} ch(xy\sqrt{2}) \equiv e^{Ax^2+Bxy+Cy^2+\alpha x+\beta y+\gamma}$$

сразу следует тождество

$$e^{-x^2} \equiv e^{Ax^2+\alpha x+\gamma} \quad (\text{при } \ y=0).$$

Таким образом, получается, что

$$A=C=-1, \quad \alpha=\beta=\gamma=0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\left(e^{xy\sqrt{2}}+e^{-xy\sqrt{2}}\right) \equiv e^{Bxy},$$

но последнее "тождество" не выполняется ни при каком значении B.

Приведённый пример является частным проявлением конструкций, изложенных в двух следующих теоремах.

Теорема 1. *Для любых положительных σ и τ, произвольной ограниченной последовательности $(\rho_k)_{k=1}^{\infty}$ точек луча $\left[\frac{1}{\sigma^2\tau^2};+\infty\right)$ и произвольной неотрицательной последовательности $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ с условием $\sum_{k=1}^{\infty} t_k=1$, функция*

$$p(x,y) \equiv \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} t_k\sqrt{\rho_k}e^{-\rho_k\left(\frac{\sigma^2}{2}x^2+s_kxy+\frac{\tau^2}{2}y^2\right)},$$

где $s_k^2=\sigma^2\tau^2-\frac{1}{\rho_k}$, является плотностью абсолютно непрерывного распределения на R^2, проекции которого являются нормальными распределениями.

Доказательство. Так как квадратичная форма $\sigma^2x^2+2s_kxy+\tau^2y^2$ является положительно определённой, то ряд представляющий функцию $p(x,y)$ мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k\sqrt{\rho_k}.$$

Последний ряд сходится, так как последовательность $(\rho_k)_{k=1}^{\infty}$ ограничена по условию.

В силу определённой симметрии между переменными, для проверки достаточно вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy.$$

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho_k\left(\frac{\sigma^2}{2}x^2+s_kxy+\frac{\tau^2}{2}y^2\right)}dx = e^{-\frac{\rho_k\tau^2}{2}y^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho_k\sigma^2}{2}x^2-\rho_ks_kxy}dx =$$

$$= e^{-\frac{\rho_k\tau^2}{2}y^2}\cdot e^{\frac{\rho_ks_k^2}{2\sigma^2}y^2}\sqrt{\frac{2\pi}{\rho_k\sigma^2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma\sqrt{\rho_k}}\,e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}},$$

то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}t_ke^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}.$$

Теорема 2. *Пусть последовательности $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(\psi_k)_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных и суммируемых на $\mathbf{R}$ функций таковы, что*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_k(t)dt=a_k>0, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_k(t)dt=b_k>0 \quad (k\geq 1),$$

и последовательности функций $\frac{1}{a_k}\varphi_k(t)$ *и* $\frac{1}{b_k}\psi_k(t)$ *являются равномерно ограниченными на* $\mathbf{R}$ *почти всюду. Если ряд с неотрицательными слагаемыми* $\sum_{k=1}^{\infty} t_k$ *имеет сумму, равную единице, то ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{a_k}\,\varphi_k(t), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{b_k}\,\psi_k(t)$$

сходятся к некоторым плотностям абсолютно непрерывных распределений $f(t)$ *и* $g(t)$*, а сумма* $p(x,y)$ *ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{a_k b_k}\,\varphi_k(x)\,\psi_k(y)$$

представляет собой плотность абсолютно непрерывного распределения случайной точки на координатной плоскости. При этом координатные проекции этой случайной точки являются случайными величинами с плотностями распределений f *и* g *соответственно.*

Доказательство. По условию существует такое множество нулевой меры A и такая постоянная C, что

$$\frac{\varphi_n(t)}{a_n} \le C \quad (n \in \mathbf{N},\ t \in \mathbf{R}\backslash A).$$

И можно считать, не умаляя общности, что

$$\varphi_n(t) = 0 \quad (n \in \mathbf{N},\ t \in A).$$

Таким образом, указанные в условии функциональные ряды и ряды интегралов от их слагаемых мажорируются абсолютно сходящимися числовыми рядами и, следовательно, почленное интегрирование допустимо. Очевидно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{a_k}\,a_k = 1 \ \text{ и } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{a_k b_k}\,a_k\psi_k(y) = g(y).$$

Симметричность вполне очевидна.

В условиях первой теоремы достаточно положить

$$\sigma = \tau = 1, \quad t_1 = t_2 = \frac{1}{2}, \quad t_{m+2} = 0, \quad \rho_m = 2 \quad (m \in N) \ \text{ и } \ s_1 > 0, \quad s_2 < 0.$$

И получится рассмотренная в самом начале плотность двумерного распределения.

А в условиях второй теоремы достаточно положить

$$\varphi_k(t) = t^{2k}e^{-t^2} \quad \psi_k(t) = t^{2k}e^{-\tau t^2} \ \text{ и } \ t_k = \frac{(2k)!}{(k!)^2 8^k \sqrt{2})} \quad (k \in \mathbf{N})$$

при некоторых положительных σ и τ. Тогда, как не трудно непосредственно вычислить,

$$a_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(t)dt = \frac{(2k)!}{k!(4\sigma)^k}\sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}, \quad b_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(t)dt = \frac{(2k)!}{k!(4\tau)^k}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{a_k b_k}\,\varphi_k(x)\psi_k(y) = \frac{\sqrt{2\sigma\tau}}{2\pi}\,e^{-\sigma^2x^2-\tau y^2}ch(xy\sqrt{2\sigma\tau}).$$

К тому же,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{a_k}\,\varphi_k(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \;\text{ и }\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{b_k}\,\psi_k(y) = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2\tau^2}}.$$

В целом эти две теоремы определённо указывают на вариативность возможного двумерного распределения при заданных распределениях проекций.

Случайная точка с конечным числом возможных положений и предписанными распределениями координат

Возможные значения x_1, ..., x_m ($m \geq 2$) для случайной величины X и возможные значения y_1, ..., y_n ($n \geq 2$) для случайной величины Y считаем известными и допускающими изменение. А значения вероятностей распределений $P(X = x_j) = \alpha_j$ ($j = 1$, ..., m) и $P(Y = y_k) = \beta_k$ ($k = 1$, ..., n) полагаем зафиксированными. Положим $P(X = x_j,\, Y = y_k) = p_{jk}$ и поставим вопрос о возможных вариантах совместного распределения.

Имеем матрицу неизвестных $(p_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}$, имеем

$$n \;\text{ связей }\; \sum_{j=1}^{m} p_{jk} = \beta_k, \qquad m \;\text{ связей }\; \sum_{k=1}^{n} p_{jk} = \alpha_j \;\text{ и ещё одну связь }\; \sum_{j,k} p_{jk} = 1.$$

Нетрудно видеть, что размерность пространства решений равна

$$n \cdot m - (n + m - 1) = (n-1)(m-1).$$

Это обстоятельство довольно выразительно характеризует степень вариативности возможного двумерного распределения. Впрочем, даже свободно назначаемые вероятности должны будут удовлетворять системе ограничительных неравенств; примеры смотрите ниже.

Рассмотрим теперь ковариацию случайных величин X и Y

$$\sum_{j,k} (p_{jk} - \alpha_j \beta_k) x_j y_k$$

как многочлен переменных $x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n$.

Сначала выясним его структуру в некоторых частных случаях.

Случай m=n=2

При $m = n = 2$ имеем систему

$$\begin{cases} p_{11} + p_{12} = \alpha_1 \\ p_{12} + p_{22} = \alpha_2 \\ p_{11} + p_{21} = \beta_1 \end{cases}$$

с одним свободным параметром, например, p_{11}. Отсюда, с учётом равенства $p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 1$, получаем

$$\begin{pmatrix} p_{11} + p_{12} \\ p_{12} + p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha_1 - \lambda \\ \beta_1 - \lambda & 1 + \lambda - \alpha_1 - \beta_1 \end{pmatrix}.$$

Из неотрицательности элементов последней матрицы следуют необходимые ограничения

$$\max(0, \alpha_1 + \beta_1 - 1) \leq \lambda \leq \min(\alpha_1, \beta_1).$$

Эти ограничения на параметр λ являются и достаточными для существования соответствующего распределения.

А коэффициенты многочлена ковариации, как нетрудно видеть, в этом случае оказываются такими:

$$a_{11} = a_{22} = \lambda - \alpha_1\beta_1, \qquad a_{12} = a_{21} = -\lambda + \alpha_1\beta_1.$$

Ковариация равна $(\lambda - \alpha_1\beta_1)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$ и, следовательно, в данном случае она пропорциональна конкретному многочлену.

Случай m=3, n=2

При $m = 3$, $n = 2$ имеем аналогичную систему линейных уравнений с двумя свободными параметрами, например, p_{11} и p_{22}. Отсюда, с учётом равенства $p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} + p_{31} + p_{32} = 1$, получаем

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha_1 - \lambda \\ \alpha_2 - \mu & \mu \\ \beta_1 - \alpha_2 - \lambda + \mu & \beta_2 - \alpha_1 - \mu + \lambda \end{pmatrix}.$$

Из неотрицательности элементов последней матрицы следуют необходимые ограничения

$$\max(0, \alpha_1 + \beta_1 - 1) \leq \lambda \leq \min(\alpha_1, \beta_1), \quad \max(0, \alpha_2 + \beta_2 - 1) \leq \mu \leq \min(\alpha_2, \beta_2).$$

А коэффициенты многочлена ковариации, как нетрудно видеть, в этом случае оказываются такими:

$$a_{11} = -a_{12} = \lambda - \alpha_1\beta_1, \quad a_2 2 = -a_2 1 = \mu - \alpha_2\beta_2. \quad a_{31} = -a_{32} = a_{22} - a_{11}.$$

Ковариация равна

$$((\lambda - \alpha_1\beta_1)(x_1 - x_3) + (\mu - \alpha_2\beta_2)(x_3 - x_2))(y_1 - y_2)$$

и, следовательно, в данном случае она является линейной комбинацией двух конкретных многочленов.

Случай m=n=3

И при $m = 3$, $n = 3$ также имеем аналогичную систему линейных уравнений с четырьмя свободными параметрами, например, заполняющими минорную матрицу $\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ матрицы совместного распределения.

Отсюда, с учётом равенства

$$\sum_{j,k=1}^{3} p_{jk} = 1, \quad \text{получаем}$$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \alpha_1 - \lambda_{11} - \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \alpha_2 - \lambda_{21} - \lambda_{22} \\ \beta_1 - \lambda_{11} - \lambda_{21} & \beta_2 - \lambda_{12} - \lambda_{22} & 1 + \sum\limits_{j,k} \lambda_{jk} - \sum\limits_{i=1}^{2} (\alpha_1 + \beta_i) \end{pmatrix}.$$

Ковариация равна

$$\sum_{j,k=1}^{2} (\lambda_{jk} - \alpha_j\beta_k)(x_j - x_3)(y_k - y_3)$$

и, следовательно, в данном случае она является линейной комбинацией четырёх конкретных многочленов второй степени. Возможность такой формы представления многочлена ковариации не случайна. Оказывается, как можно доказать прямым вычислением, и в самом общем случае многочлен ковариации равен

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq m-1 \\ 1 \leq k \leq n-1}} (\lambda_{jk} - \alpha_j\beta_k)(x_j - x_m)(y_k - y_n).$$

Здесь матрица свободных параметров $(\lambda_{jk})_{\substack{1 \le j \le m-1 \\ 1 \le k \le n-1}}$ является минорной подматрицей матрицы возможного совместного распределения $(p_{jk})_{\substack{1 \le j \le m \\ 1 \le k \le n}}$ случайных величин X и Y.

Этот многочлен переменных x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n либо тождественно равен нулю, либо является однородным многочленом второй степени. Нетрудно видеть, что он тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда случайные величины X и Y независимы.

Знак Евгений Иосифович,
доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Михайловской Военной Артиллерийской Академии, Санкт-Петербург.

E-mail: evgematem@mail.ru

О гиперболе — напрямую

Е. Г. Смольянова

В статье предложена интересная конструкция взаимно-однозначного сопоставления точек ветви гиперболы (как графика дробно-рациональной функции) и точек прямой, заданной в подходящей системе координат. При помощи этой конструкции объясняются различные случаи взаимного расположения гипербол из некоторых семейств (пучков).

Напомним, что дробно-линейной функцией называется частное линейных функций, т.е. функция вида

$$f(x)=\frac{Ax+C}{Bx+D},\ \ (x\neq -D/B) \tag{1}$$

где A, B, C, $D\in\mathbb{R}$, причем $B\neq 0$. К примеру,

$$f_1(x)=\frac{2x+3}{-7x+6},\ \ f_2(x)=\frac{3}{x-\sqrt{2}},\ \ f_3(x)=\frac{1}{2x}.$$

При $x\neq -D/B$

$$\frac{Ax+C}{Bx+D}=\frac{A}{B}+\frac{\triangle/B^2}{x-(-D/B)}, \tag{2}$$

где $\triangle=BC-AD$.

Графиком любой такой функции является гипербола с центром симметрии $\left(\frac{-D}{B};\frac{A}{B}\right)$ и соответствующими горизонтальной и вертикальной асимптотами, если только $\triangle\neq 0$. Будем обозначать далее эту гиперболу через Γ_f. Если $\triangle=0$, то дробь в (1) окажется сократимой в области определения $f(x)$. В этом случае о Γ_f говорят как о вырожденной гиперболе.

Как обычно строят Γ_f? В школьном курсе математики предлагается алгоритм построения, основанный на равенстве (2) и сводящийся к последовательному применению преобразований сдвига и деформации (сжатия, растяжения) к графикам функций $f_+(x)=\frac{1}{x}$ или $f_-(x)=\frac{-1}{x}$ как простейшим представителям указанного класса. Коэффициент деформации $k=\frac{|\triangle|}{B^2}$.

В частном случае, когда $D=-A$, формула (1) принимает вид

$$f(x)=\frac{Ax+C}{Bx-A}, \tag{1'}$$

$(x\neq A/B)$. Далее нас будут интересовать только такие гиперболы.

Аналог преобразования (2):

$$\frac{Ax+C}{Bx-A}=\frac{A}{B}+\frac{\triangle/B^2}{x-A/B},\ x\neq A/B\,. \tag{2'}$$

Докажем, что соответствующая гипербола Γ_f симметрична относительно биссектрисы 1-го и 3-его координатных углов. Для этого последовательно преобразуем уравнение

$$y=\frac{Ax+C}{Bx-A}$$

в области допустимых значений x:

$$Bxy-Ay=Ax+C,\quad Bxy-A(x+y)-C=0. \tag{3}$$

Поскольку одновременная замена x на y и y на x не изменяет (3), то с каждой точкой $(x; y)$ Γ_f содержит и точку $(y; x)$, что и доказывает требуемое.

На самом деле уже из $(2')$ понятно, что гипербола Γ_f обладает таким геометрическим свойством: её центр симметрии $S\left(\frac{A}{B}; \frac{A}{B}\right)$ (как общая точка горизонтальной и вертикальной асимптот) находится на указанной биссектрисе.

Осями симметрии Γ_f являются, очевидно, прямые с уравнениями

$$y = x; \; y = -x + \frac{2A}{B}.$$

Рассмотрим произвольную дробно-линейную функцию вида $(1')$. Для дальнейшего нам будет удобно иметь коэффициент C как $(-C)$. Такая подмена обозначения, разумеется, ничего не изменит по сути.

Итак, уже окончательно полагаем, что

$$f(x) = \frac{Ax - C}{Bx - A}. \tag{4}$$

Тогда

$$\triangle = \triangle^* = A^2 - BC; \;\; k = \frac{|\triangle^*|}{B^2}.$$

Потребуем, чтобы $\triangle^* \neq 0$ и воспользуемся результатом (3) в виде:

$$-A(x + y) + Bxy + C = 0. \tag{5}$$

Введём обозначения:

$$\begin{cases} x + y = -p; \\ xy = q \end{cases} \tag{6}$$

и перепишем (5) соответственно как

$$Ap + Bq + C = 0. \tag{7}$$

В прямоугольной декартовой системе координат pOq уравнение (7) задаёт прямую. Обозначим её через L_f.

Так, для функции $f(x) = \frac{x-3}{2x-1}$ прямая L_f будет такой:

$$p + 2q + 3 = 0.$$

Соответствие между точками прямой L_f и гиперболой Γ_f

Вернёмся к связям (6). На основании теоремы Виета можно утверждать, что x и y являются корнями квадратного уравнения

$$t^2 + pt + q = 0 \tag{8}$$

при известном условии на его дискриминант:

$$d = p^2 - 4q \geq 0.$$

Следовательно, каждой паре симметричных точек $(x; y)$ и $(y; x)$ графика функции $f(x)$ можно поставить в соответствие определённую точку прямой L_f. Её координаты будут такими:

$$(-x - y; \; xy).$$

Обратно, если $p^2 - 4q \geq 0$, то с каждым решением $(p; q)$ линейного уравнения (7), мы найдём пару симметричных точек Γ_f, исходя уже в этом поиске из уравнения (8).

Разумеется, чтобы не обсуждать соответствие “пара точек для одной точки” вместо ожидаемого “одна для одной”, можно договориться, устанавливать взаимно-однозначное соответствие между точками прямой L_f и соответствующими точками симметричной части гиперболы.

Особенными точками для любой гиперболы являются её вершины — по одной на каждой ветви. Как найти координаты вершин гиперболы? Определимся сначала с расположением ветвей таких кривых.

Поскольку

$$sign(\triangle^*/B^2) = sign(\triangle^*),$$

то поиск координат вершин $\mathit{\Gamma}_f$ сведётся к решению уравнения

$$f(x) = x \quad \text{в случае } \triangle^* > 0,$$

и к решению уравнения

$$f(x) = -x + \frac{2A}{B} \quad \text{в случае } \triangle^* < 0.$$

В обоих этих случаях абсциссы $x_{1,2}^{(в)}$ вершин гиперболы найдутся как корни алгебраических уравнений второй степени. Несложно проверить, что при любом знаке $\triangle^*$

$$x_{1,2}^{(в)} = \frac{A \pm \sqrt{|\triangle^*|}}{B} = \frac{A}{B} \pm \sqrt{k}.$$

При этом

$$y_{1,2}^{(в)} = x_{1,2}^{(в)} \text{ в случае } \triangle^* > 0, \quad y_{1,2}^{(в)} = x_{2,1}^{(в)} \text{ в случае } \triangle^* < 0.$$

Понятно также, что если прямые L_{f_1} и L_{f_2} параллельны, то

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$$

и, значит, гиперболы $\mathit{\Gamma}_{f_1}$ и $\mathit{\Gamma}_{f_2}$ будут иметь общий центр симметрии. Верно и обратное.

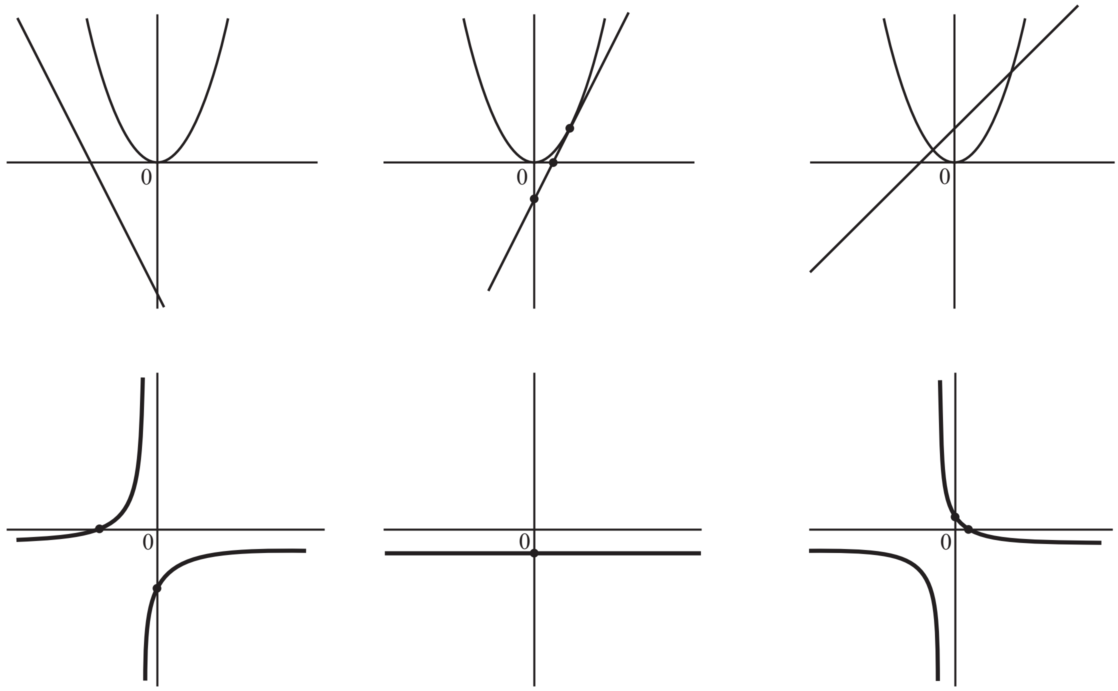
Взаимное расположение прямой L_f и параболы $\mathcal{P}$

Обозначим через $\mathcal{P}$ параболу с уравнением

$$q = p^2/4,$$

а через $K_{\mathcal{P}}$ — касательную прямую к ней. Какую именно касательную из бесконечного множества касательных мы имеем ввиду как $K_{\mathcal{P}}$, всегда будет понятно в рамках контекста.

Представим все возможные взаимные расположения прямой L_f и параболы $\mathcal{P}$ в системе координат pOq (Рис. 1). Выясним, как эти разные случаи будут интерпретироваться на этапе восстановления графика функции $f(x)$.



Случай I ($\triangle^* < 0$) Случай II ($\triangle^* = 0$) Случай III ($\triangle^* > 0$)

Рис. 1

Очевидно, что Случай II, когда L_f касается параболы, всегда придётся рассматривать как исключительный: $\triangle^* = 0$.

Исследуем сначала Случай III ($\triangle^* > 0$). Для этого решим совместно уравнения:

$$\begin{cases} Ap + Bq + C = 0, \\ p^2 - 4q = 0. \end{cases}$$

Будем иметь:

$$\begin{cases} 4Bq = Bp^2, \\ Bp^2 + 4Ap + 4C = 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения в последней системе уравнений равен $d^* = 4^2 \cdot \triangle^*$. Следовательно, $sign(d^*) = sign(\triangle^*)$. Действительными решения будут только если $\triangle^* > 0$. Формулы для корней:

$$p_{1,2} = (-2) \cdot \frac{A \pm \sqrt{|\triangle^*|}}{B} = (-2) \cdot x_{1,2}^{(в)}.$$

Таким образом, в Случае III общим точкам параболы $\mathcal{P}$ и прямой L_f соответствуют вершины ветвей гиперболы Γ_f и, наоборот.

В частности, если зафиксировать одну из этих двух точек и непрерывно менять положение второй, то мы получим множество гипербол, у которых ветви по одну сторону от центра симметрии образуют "пучок" с общей вершиной. А поскольку через две точки можно провести только одну прямую, то легко объясняется и факт не существования гипербол с общей парой вершин.

Исследуем Случай I ($\triangle^* < 0$). Сначала научимся находить место точки $\left(p^{(в)}; q^{(в)}\right)$ на прямой L_f. Применим связи (6):

$$\begin{cases} q^{(в)} = x_1^{(в)} \cdot x_2^{(в)} = \dfrac{A^2 + \triangle^*}{B^2}; \\[2ex] p^{(в)} = -\left(x_1^{(в)} + x_2^{(в)}\right) = -\dfrac{2A}{B}. \end{cases} \tag{9}$$

Как геометрически найти такую точку на L_f? Проведём касательную $K_{\mathcal{P}}$ параллельно L_f и выпишем равенство угловых коэффициентов этих прямых:

$$-\frac{A}{B} = \frac{p}{2}.$$

Следовательно,

$$p = -\frac{2A}{B} = p^{(в)}.$$

Таким образом, чтобы на прямой L_f найти точку $\left(p^{(в)};\, q^{(в)}\right)$, надо построить параллельную этой прямой касательную $K_{\mathcal{P}}$ и определить абсциссу точки касания. Она и есть $p^{(в)}$. Так что и в условиях Случая I несложно объяснить факт не существования гипербол с общей парой вершин: через одну точку нельзя провести две различные параллельные прямые.

Уравнение касательной $K_{\mathcal{P}}$, параллельной L_f:

$$\frac{A}{B}p + q + \left(\frac{A}{B}\right)^2 = 0.$$

Поворот гиперболы одним сдвигом

Как следует из предыдущего, "переход" прямой L_f (в ту или другую сторону) через соответствующую, т.е. параллельную ей, касательную $K_{\mathcal{P}}$ на плоскости pOq геометрически будет означать сохранение центра симметрии и, вообще говоря, изменение коэффициента деформации.

Научимся сдвигать L_f с переходом через касательную так, чтобы для Γ_f это означало бы поворот на $90°$.

Итак, пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ такие, что $\triangle_1^* \cdot \triangle_2^* < 0$. Каким должно быть взаимное расположение прямых L_{f_1} и L_{f_2} относительно параллельной им касательной $K_{\mathcal{P}}$, чтобы соответствующие гиперболы получались одна из другой поворотом на $90°$? Ясно, что кроме общего центра симметрии, надо иметь равными коэффициенты деформации: $k_1 = k_2$. Поэтому требуем:

$$\begin{cases} \dfrac{\triangle_1^*}{B_1^2} + \dfrac{\triangle_2^*}{B_2^2} = 0; \\ \dfrac{A_1}{B_1} = \dfrac{A_2}{B_2} = \dfrac{A}{B}. \end{cases}$$

Равносильно имеем:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{C_1}{B_1} + \dfrac{C_2}{B_2}\right)/2 = \left(\dfrac{A}{B}\right)^2; \\ \dfrac{A_1}{B_1} = \dfrac{A_2}{B_2} = \dfrac{A}{B}. \end{cases} \tag{10}$$

Как следствие, точка $\left(0;\, -\left(\dfrac{A}{B}\right)^2\right)$ — середина отрезка с концами $\left(0; -\dfrac{C_1}{B_1}\right)$ и $\left(0; -\dfrac{C_2}{B_2}\right)$ (Рис. 2). Последние являются общими для прямых L_{f_i} $(i = 1, 2)$ и координатной оси Oq.

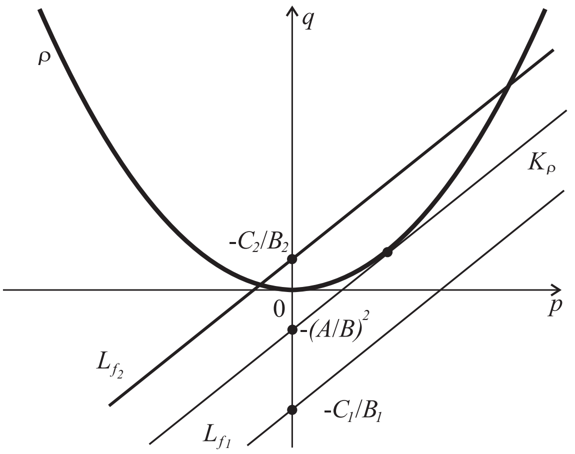


Рис. 2

Уравнения прямых L_{f_i} $(i = 1, 2)$:

$$\frac{A}{B}p + q + \frac{C_1}{B_1} = 0; \ \frac{A}{B}p + q + \left(2\left(\frac{A}{B}\right)^2 - \frac{C_1}{B_1}\right) = 0. \tag{11}$$

с учётом связей в системе (10).

Поскольку $(0; -\left(\frac{A}{B}\right)^2)$ — общая точка касательной $K_{\mathcal{P}}$ и координатной оси Oq, делаем вывод: $K_{\mathcal{P}}$ находится на одном и том же расстоянии от прямых L_{f_i} $(i = 1, 2)$. А т.к. $\triangle_1^* \cdot \triangle_2^* < 0$, то одна из прямых пересекает параболу $\mathcal{P}$ в двух точках (Случай III), а другая не имеет с ней общих точек (Случай I).

Продолжая «расходиться» от $K_{\mathcal{P}}$ в разные стороны тем же способом, мы получим любое количество пар гипербол с требуемым свойством (Рис. 3).

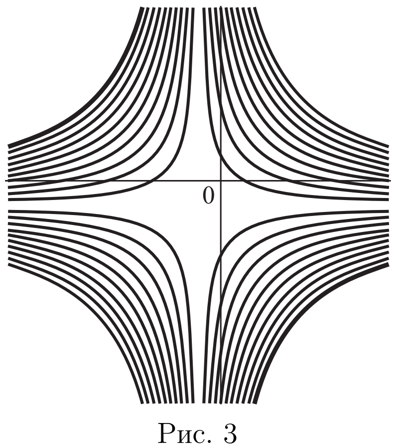


Рис. 3

Пусть, к примеру, прямая L_{f_1} задана уравнением

$$2p - 3q + 17 = 0.$$

Имеем: $A_1 = 2$; $B_1 = -3$; $C_1 = 17$; $\triangle_1^* = 55$; $k_1 = \frac{|\triangle_1^*|}{B^2} = \frac{55}{9}$. Применяя (11), выпишем уравнение прямой L_{f_2} для гиперболы Γ_{f_2}, которая получится из Γ_{f_1} поворотом на 90°:

$$6p - 9q - 59 = 0.$$

Соответствующие гиперболы такие:

$$y = \frac{2x-17}{-3x-2};\ \ y = \frac{6x+59}{-9x-6}.$$

“Связка” гипербол с вершинами на окружности

Поскольку в Случае I

$$\left(x_1^{(в)}\right)^2 + \left(y_1^{(в)}\right)^2 = \left(x_1^{(в)}\right)^2 + \left(x_2^{(в)}\right)^2 = \left(x_1^{(в)} + x_2^{(в)}\right)^2 - 2x_1^{(в)} \cdot x_2^{(в)},$$

то на основании (9) будем иметь:

$$\left(x_1^{(в)}\right)^2 + \left(y_1^{(в)}\right)^2 = 4\left(\frac{A}{B}\right)^2 - 2 \cdot \frac{A^2 + \triangle^*}{B^2}.$$

После преобразований получаем:

$$\left(x_1^{(в)}\right)^2 + \left(y_1^{(в)}\right)^2 = \frac{2C}{B}.$$

Итак, если зафиксировать точку $(0; -\frac{C}{B})$ как общую для пучка прямых L_f, то соответствующее им множество (“связка”) гипербол будет иметь вершины на окружности S_r с центром $(0; 0)$ и радиусом $r = \sqrt{\frac{2C}{B}}$ (Рис. 4). А поскольку $\frac{A}{B}$ будет изменяться, то центры симметрии у таких гипербол — разные.

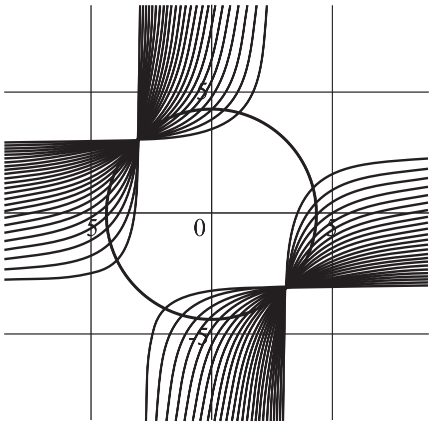


Рис. 4

Ещё одна парабола в нашем исследовании

Укажем на одно любопытное обстоятельство в условиях Случая I. Из (9) следует, что

$$\frac{1}{2}\left(p^{(в)}\right)^2 - q^{(в)} = 2\left(\frac{A}{B}\right)^2 - \frac{A^2 + (A^2 - BC)}{B^2} = \frac{C}{B}.$$

Обозначим через П параболу с уравнением

$$q = -\frac{C}{B} + \frac{1}{2}p^2.$$

Тогда точки $\left(p^{(в)}; q^{(в)}\right)$ можно искать на L_f как общие с параболой П. Построим две касательные прямые к параболе $\mathcal{P}$, проходящие через точку $(0; -\frac{C}{B})$. (Рис. 5)

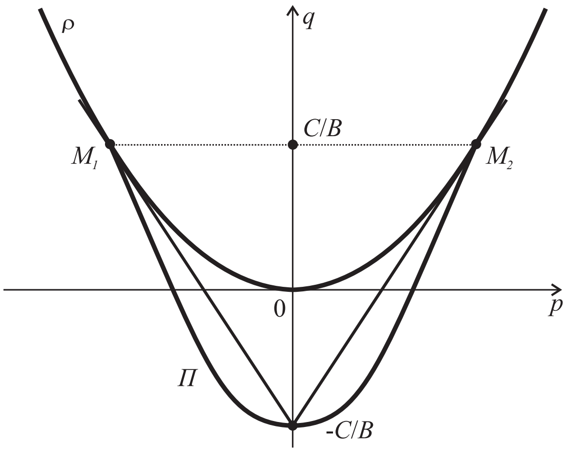


Рис. 5

Несложно проверить, что $M_{1,2}\left(\mp 2\sqrt{\frac{C}{B}};\frac{C}{B}\right)$ — точки касания. Это означает, что при рассмотрении множества

$$\left\{f(x)=\frac{Ax-C}{Bx-A},\ \triangle^*<0,\ h^2=\frac{C}{B}=const\right\}$$

заранее можно утверждать, что все возможные точки $\left(p^{(в)};q^{(в)}\right)$ заполнят дугу M_1M_2 параболы П, за исключением концевых её точек.

Гипербола из вершин гипербол

Зададимся целью описать семейство гипербол, геометрическое место вершин которых — тоже гипербола.

Выберем гиперболу Γ_f (в роли ГМТ) заранее. Пусть прямая L_f для неё имеет уравнение

$$Ap+Bq+C=0,$$

причём $\triangle^*<0$. Для решения поставленной задачи каждую точку последней прямой будет понимать как точку $\left(p^{(в)};\,q^{(в)}\right)$, определяющую вершины соответствующей ей гиперболы. Именно это семейство гипербол затем предъявим как искомое.

Составим уравнение прямой с угловым коэффициентом $k_{кас}=\frac{t}{2}$, проходящей через точку $(t;q(t))$, где $q(t)=-\frac{A}{B}t-\frac{C}{B}$ и $t\in\mathbf{R}$.

Получим:

$$q-\left(-\frac{A}{B}t-\frac{C}{B}\right)=\frac{t}{2}(p-t).$$

После преобразований:

$$Btp-2Bq-(Bt^2+2At+2C)=0.$$

Следовательно, искомое семейство гипербол определяется функциями

$$f_t(x)=\frac{Btx+(Bt^2+2At+2C)}{-2B-Bt},\ t\in\mathbf{R}.$$

Пусть, например,

$$f(x)=\frac{2x-5}{3x-2}.$$

Тогда

$$f_t(x)=\frac{3tx+(3t^2+4t+10)}{-6x-3t},\ t\in\mathbf{R}.$$

На Рис. 6 представлены гиперболы как графики нескольких функций этого семейства.

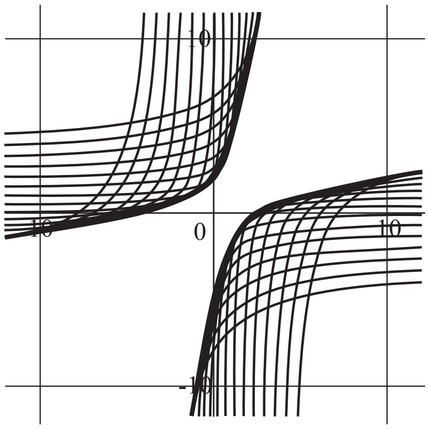


Рис. 6

Замечание. Можно было бы с самого начала преобразовать выражение функции (4) к виду

$$f(x) = \frac{Ux - V}{x - U},$$

где $U = \frac{A}{B}$, $V = \frac{C}{B}$.

Однако автору удобнее было описать всё именно в том виде, как это предложено.

Замечание про общий случай

Пусть $f(x)$ — невырожденная дробно-линейная функция вида (1). Обозначим её график через Г. Определим число G условием

$$BG - A = D. \tag{12}$$

Тогда

$$\frac{Ax + C}{Bx + D} = \frac{A(x + G) - C^*}{B(x + G) - A},$$

где

$$C^* = AG - C.$$

Ясно, что гипербола Г — результат сдвига на вектор $(-G; 0)$ гиперболы Γ_{f^*}, где

$$f^*(x) = \frac{Ax - C^*}{Bx - A}.$$

Прямая Γ_{f^*} для неё определится уравнением

$$Ap + Bq + C^* = 0.$$

В таком случае, по образцу предыдущего исследования, функции $f(x)$ можно поставить в соответствие прямую в координатном пространстве $Opqh$:

$$\begin{cases} Ap + Bq + C^* = 0; \\ h = G. \end{cases}$$

Постановка новой задачи

Пусть $(p_0;\, q_0)$ — произвольная точка допустимой области координатной плоскости pOq, т.е. такая что

$$p_0^2 - 4q_0 > 0.$$

Полагая её точкой, соответствующей вершине гиперболы $\mathit{\Gamma}_{f_0}$, построим прямую L_{f_0} как параллельную касательной $K_{\mathcal{P}}$ с точкой касания $(p_0; (p_0)^2/4)$. Прямая L_{f_0} однозначно определит $\mathit{\Gamma}_{f_0}$. Далее, совмещая системы координат pOq и xOy, находим вершину ветви этой гиперболы и объявляем её точкой $(p_1; q_1)$ — очередной в последовательности точек $\{(p_n; q_n)\}$. Затем применяем к точке $(p_1; q_1)$ аналогичную процедуру и продолжаем так, вообще говоря, бесконечно долго.

Вопрос: какими будут

$$\lim_{n\to\infty}\{(p_n; q_n)\} \text{ и } \lim_{n\to\infty}\{(f_n(x)\}\,?$$

Смольянова Елена Григорьевна,
старший преподаватель кафедры математического анализа, алгебры и геометрии факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва», г. Саранск.

E-mail: janovaeg@mail.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2023 год (включая стоимость пересылки) – 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2023 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >