ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцать седьмой

№ 2 (106)

апрель - июль 2023 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.
Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)
Дубовицкий А.В.
Канель-Белов А.Я.
Комаров С.И.
Константинов Н.Н.
Костенко И.П.
Саблин А.И.

№ 2 (106), 2023 г.

© “Математическое образование”, составление, 2023 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2023 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 17.07.2023 г.
Стиль верстки разработан С.А. Кулешовым.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (106), апрель – июнь 2023 г.

Содержание

К 100-летию И.Р. Шафаревича

От редакции

3 июня текущего года исполнилось 100 лет со дня рождения выдающегося русского советского математика и общественного деятеля академика Игоря Ростиславовича Шафаревича (1923 – 2017).

Этому событию была посвящена совместная конференция МИАН и МГУ, Москва, состоявшаяся 5–9 июня с.г., см.

https://www.mathnet.ru/php/conference.phtml?confid=2203&option_lang=rus

На конференции отражены научные достижения Игоря Ростиславовича. О его общественной, в частности, правозащитной деятельности хорошо рассказано на

https://dzen.ru/a/ZHth1Pu8FV95YhaO

И.Р. Шафоревич был активным автором нашего журнала, более того, можно сказать, что он своими публикациями способствовал становлению журнала, начиная с первых номеров. Эта информация отражена в номере 2(46) нашего журнала в связи с его 85-летием.

Более подробный материал к 100-летию редакция планирует поместить в следующем номере.

Применение педагогических ценностей русской школы для изучения математики

К. А. Лебедев

Рассматриваются педагогические ценности русской школы [1]–[3], сформулированные в виде принципов, и способы их применения к изучению математики. Анализируется центральная, ведущая роль принципа природосообразности. Отмечается, что для русской школы характерен принцип систематического применения письменной и устной речи. Указывается, что история знает три удачные реализации системы обучения, основанные на природосообразном принципе. Обсуждаются способы применения принципов русской школы к освоению математического знания, которое объективно представимо в виде иерархии структур (разделов), а также в виде двух периодических систем числовых и алгебраических записей. Представлена диаграмма Венна для данной иерархии. Напоминаются диалектические законы развития и их проявление в познании природы и педагогических системах. Сделан оптимистический вывод о возможности создания эффективной системы обучения (в том числе и цифровой), основанной на природосообразном принципе и ценностях русской школы.

Статья печатается с продолжением.

Педагогические ценности русской школы представлены в трудах И.П. Костенко [1]–[3]. Рассмотрим их более подробно и применительно к изучению школьной и вузовской математики. Не все ценности (принципы) перечислены И.П. Костенко в статье [3]. Среди 10-и принципов не обсуждаются три наиболее ценные и фундаментальные принципа, которые, собственно, и делают русскую школу выдающимся явлением мировой педагогики: принцип природосообразности, принцип систематического использования письменной и устной речи, принцип систематического решения текстовых задач в рамках классической психологии и диалектики. Ценности принципов русской школы в настоящее время ещё более возрастают в связи с цифровизацией образования, правильное использование этих ценностей позволит не только без ущерба для качества образования осуществить цифровизацию, но и достигнуть новых сдвигов в природосообразном обучении.

1. **Принцип природосообразности**. Это главный закон эффективного и разумного обучения, потому что «человек — часть природы, следовательно, он и его развитие подчиняются её универсальным законам. Эти закономерности проявляются в устройстве неживой природы, в жизни растений и животных, в развитии человека. Природа и жизнь человека познаваемы. Познаваемы также законы обучения» [4,5]. Так писал основоположник этого принципа Я.А. Коменский. Мы, разумеется, здесь не ставим задачу раскрыть этот принцип со всех сторон.

1) Основные понятия природосообразности можно найти в [6].

2) Природосообразность и психология. Природосообразное обучение предполагает такое обучение, которое согласуется с человеческой психологией. Классическая общая психология лежит в основе всех разумных, эффективных природосообразных систем [7,8]. Наряду с классической общей психологией имеется множество психологических подходов и теорий к обучению, которые не основываются на прошлых достижениях, касаются узких сторон психологии, которые достаточно не подкреплены практикой [9].

Других эффективных и научных законов обучения нет. К.Д. Ушинский [10] стремился построить процесс обучения в соответствии с природой, психологией и развитием детей. Первое условие этого соответствия он видел в своевременном начале обучения. «Если вы начинаете вообще учить ребёнка раньше, чем он созрел для ученья, — писал Ушинский, — или учить его какому-нибудь предмету, содержание которого приходится ему ещё не по возрасту, то неминуемо встретитесь с такими препятствиями в его природе, которые может преодолеть только одно время. И чем настойчивее будете вы бороться с этими препятствиями возраста, тем более принесёте вреда вашему ученику».

Именно закон природосообразности составляет главный стержень, вокруг которого располагаются остальные принципы русской школы, он составляет смысл всех других ценностей. Природосообразность ставит во главу угла человеческое мышление. Мышление у человека осуществляется первой (образно предметное, чувственное мышление) и второй (абстрактно-логическое мышление) сигнальными системами. У животных нет второй сигнальной системы, поэтому они не способны к познанию и обучению, основанным на абстрактно-логическом мышлении.

Первичным является чувственно-осязаемое и образно-предметное мышление, возникающее под воздействием первичных представлений, наблюдений того, что только возможно воспринять чувствами. Как принято говорить в философии, познание начинается с живого созерцания. Только вслед за этим познание восходит к мысленному — абстрактному, логическому. Истинность же такого познания проверяется практикой. Единство чувственного и логического в мышлении основывается на сложном взаимодействии первой и второй сигнальных систем и даёт возможность познания и образования.

Это отмечал ещё Я.А. Коменский [4,5], это подтверждается теорией Р. Сперри [1, с. 406], которая открыла двухполушарную специфику человеческого мозга [11].

Каждое полушарие формирует свои принципы организации речи: правое формирует целостность смыслового содержания, создаёт ассоциации на основе наглядно-чувственных восприятий, ощущений, представлений, образов, чувств о предмете. При этом образ предмета позволяет объединить набор разнородных практических признаков и операций в целостную картину. Этой стороне дела очень мало уделяется внимания при обучении в школе и вузе, её связи со второй сигнальной системой.

Напротив, левое полушарие обеспечивает теоретическое, абстрактно-логическое мышление, грамматическое оформление высказывания. Формами данного вида мышления являются абстрагирование, образование понятий, суждение, умозаключение, конкретизация-обобщение, анализ-синтез, индукция-дедукция, сравнение-классификация [7,8].

Формирование структуры речи, и следовательно, продуктивность мышления человека происходят за счёт совместного функционирования правого и левого полушарий, 1-й и 2-й сигнальных систем.

Даже такая абстрактная дисциплина, как геометрия Лобачевского (а в школе евклидова геометрия), будет восприниматься гораздо лучше и глубже, если использовать графы (по сути, опорные сигналы), отражающие иерархию аксиом и теорем этой геометрии, однако до сих пор никто этого не сделал. Или представление квантовой физики в виде структуры, состоящей из трёх математических структур [12]. Или одна из недавних интересных попыток, названная «квантовой живописью»: учёные Оксфордского университета предложили использовать диаграммный язык, который допускает интуитивные рассуждения о взаимодействии квантовых систем и упрощает многие другие сложные и утомительные вычисления в гильбертовом пространстве, открывая путь к более глубокому концептуальному пониманию квантовой теории [13].

Разумеется, количество примеров может быть многократно увеличено, но все они будут свидетельствовать о большом значении образного мышления в науке, даже при познании сильно абстрагированных математических теорий. Образное мышление с большим эффектом служит дидактическим целям как школьного, так и вузовского образования и основывается на психологии человека.

Однако законы дидактики, эффективного обучения, обосновываются практикой длительного применения психологических законов и не могут быть доказаны формально-логическим путём. Практикой доказано: школьное эффективное преподавание любого предмета должно быть постепенным, подробным, идти от образов к логике, от простого к сложному, от частей к целому, от знакомого к незнакомому, от элементов к структуре, от деталей к главному, от конкретного к абстрактному, от частного к общему, от индуктивного к дедуктивному [7,8]. И только впоследствии, после накопления нужной критической массы теоретических и практических знаний можно идти в другом направлении: от сложного к простому, от целого к частям, дедуктивно и т.д. [14]. Так мыслит и математик, и физик, и любой учёный, чем выше его квалификация, тем более обобщёнными мыслительными образами — смысловыми понятиями — он оперирует, которые все больше направляются интуицией.

Природосообразное обучение идёт от конкретного чувственного к абстрактному и постоянно опирается на образное мышление (на опорные образы, опорные сигналы, формулы, схемы, графы, таблицы).

Введение новых понятий эффективно может быть осуществлено только с разбора разнообразных простых осязаемых примеров, задач, выявления в них общего на интуитивном уровне, опираясь на доступный опыт учащихся, и формулируются определения исходя из этого опыта, а не теоретических современных положений дисциплины. Прежде чем ввести определение, надо оправдать его введение [15, 16], надо объяснить примерами необходимость и полезность вводимого нового определения.

В университетских курсах иногда допустимо действовать наоборот, руководствуясь дедуктивным способом подачи материала, хотя и здесь следовало бы не увлекаться чисто дедуктивным способом, а пояснять и использовать, где только возможно, направление от конкретного к общему, исходя из доступного опыта студентов. Доступный опыт студента или школьника — это база, на которой разворачивается понятная теория, любая теория исторически строится, опираясь на доступный в данный момент опыт человечества.

Отметим, что обратный ход от общего к частному, от целого к частям возможен не только при дедуктивном изложении, но и необходим как введение: контур целого предшествует частям. Читающие текст всегда стараются понять общий смысл текста и только потом с помощью детального анализа частей, разбора каждой части и связей между частями вновь синтезируют целое, вновь создают суть и смысл текста [17].

Диалектика части и целого, анализа и синтеза, индукции и дедукции порождает множество методических проблем, в частности, важную проблему определения границ относительной самостоятельности и целостности разделов, но весьма примечательно, что эти границы в математике строго обозначены. Далее мы убедимся в правильности приведённых слов на примере единства и противоположности всех разделов и тем (ещё есть и третья координата — трудность) математики; способы её природосообразного изучения является предметом обсуждения данной статьи.

2. **Принцип систематического применения письменной и устной речи.** Этот принцип, будучи одним из главных особенностей русской школы, тесно увязан с первым принципом природосообразности, являясь по сути способом его проведения в жизнь.

По мнению великого русского педагога К.Д. Ушинского, первоначальное преподавание русского языка имеет следующие цели: учить ясному пониманию письменной и печатной речи, учить ребёнка грамотно, быстро и ясно выражать мысли устно и письменно [7,10]. Мы знаем целую плеяду русских писателей и поэтов от В.А. Жуковского и до С.А. Есенина, создавших гениальные произведения, вошедшие в мировую классику, причём А.С. Пушкин был создателем современного русского языка.

Эффективная система обучения существует только одна. Во главу угла в ней положена речь как самое важное отличие человека от животного. Речь (письменная и особенно устная), мышление (образами и абстракциями) — это одно и то же. Речь (и следовательно, мышление) бывает описательной, объяснительной, доказательной. Путь от описательной речи к доказательной есть путь природосообразного обучения, так как доказательная речь наиболее трудна. Все другие принципы и ценности русской школы так или иначе связаны с первыми двумя основополагающими принципами.

Чем более полно и сознательно применяется и проводится в жизнь эти принципы, тем эффективнее процесс обучения. Нет никакой необходимости изобретать нежизнеспособные, надуманные системы и методики обучения, не основанные на природосообразном принципе. Это не приводило и никогда не приведёт к положительному результату, история знает массу таких попыток, все они окончились крахом и неудачами, принося в школу больше вреда, чем какой-то пользы [18, с. 66]. Напротив, история хранит память о трёх очень удачных реализациях природосообразных систем обучения:

1. Академия Платона, просуществовавшая 915 лет, готовившая руководителей рабовладельческого государства, сенаторов, политиков, законодателей, военачальников, основанная на выработке красноречия, устных диалогах, устного ораторского искусства и открытой устной полемике.

2. Русская школа, унаследовавшая некоторые черты Академии, основанная на письменной и устной речи и существующая по сей день в виде Русской классической школы (рук. Т.А. Алтушкина).

3. Система обучения В.Ф. Шаталова [19], расширившая принципы русской школы законами психологии и психолингвистики, основанная на систематическом использовании письменной и устной речи, с применением опорных сигналов [20], что значительно повышает продуктивность мышления (а не механической памяти, как “умозаключают” некоторые авторы [21], не берущие во внимание ни общую психологию, ни классическую психологию возрастного обучения).

Других реализаций эффективной природосообразной системы обучения мы не находим, остальные узкие попытки заменить принцип природосообразности другими принципами (ВТУ-принципом, принципами деятельности и развития, компетентностными подходами, использованием информационных технологий в отрыве от принципа природосообразности) закономерно терпят неудачу и, главное, никогда не смогут привести к положительному результату.

Далее идут 10 принципов, взятые из работы [3]. Мы дадим новую нумерацию принципов, в кавычках приведём их пояснение, взятое из работы [3]. В скобках указаны номера, данные И.П. Костенко в [3].

3.(2) **Принцип системаности**: «знания и навыки, сообщаемые учащимся, должны располагаться в определённой системе и строгой последовательности. Это означает, что последующее должно быть связано с предыдущим, базироваться на предыдущем, вытекать из него» [3].

Систематические знания (только такие нужны) представляют собой строго оправданную систему тесно увязанных понятий, наиболее удобную для усвоения, хранения в памяти и практического использования в жизни и практической деятельности. В этой системе знаний ничего существенного нельзя упускать, ничего нельзя менять местами без ущерба для восприятия, осмысления, запоминания и применения на практике. Теоретические и практические знания тесно увязываются и не существуют раздельно [7,8].

«Природосообразная система обучения и последовательность разделов и тем не придумываются методистами, не пишутся на заказ или под какой-то конкурс, а вырабатываются исторической, длительной практикой обучения и могут быть созданы только с учётом результатов этой практики» [1].

Что касается математических знаний, то они могут быть представлены в виде строго систематизированных двух таблиц (числовые системы и алгебраические системы), в которых невозможно менять между собой местами ни разделы, ни темы. Таблицы состоят из разделов (столбцы) и тем (строки). Темы едины в таблицах, и образуют периоды [22].

Темы \ Разделы	N	D	Z	Q	D_{10}	R	C
Общие понятия							
Числовые выражения							
Текстовые задачи							
Прогрессии							
Простейшие функции							
Задачи с модулем							

Рис. 1. Таблица разделов в числовых ситстемах: N — раздел натуральных чисел, 1–5-е классы; D — раздел обыкновенных дробных чисел (5-й класс); D_{10} — раздел десятичных дробей (5-й класс); Z — раздел целых чисел (6-й класс); Q — раздел рациональных чисел (6-й класс); R — раздел вещественных чисел (6 –7-й классы); C — раздел комплексных чисел (10 – 11-й классы).

Темы \ Разделы	O	M_1	M_2	M_n	Q_s	A	P+	L+	T+
Общие понятия									
Тождества									
Уравнения									
Текстовые задачи									
Функции									
Неравенства									
Задачи с модулем									
Задачи с параметром									
Предел									
Дифференцирование									
Интегрирование									

Рис. 2. Таблица разделов в алгебраических системах: O — раздел одночленов (7-й класс), M_1 — раздел полиномов 1-й степени (7-й класс); M_2 — раздел полиномов 2-й степени (7-й класс); M_n — раздел полиномов 3-й и выше степеней (8-й класс); Q_s — раздел дробно-рациональных записей (8-й класс); A — раздел алгебраических записей (9-й класс); P+ — раздел-объединение показательных и алгебраических записей (10–11-й классы); L+ — раздел-объединение логарифмических записей и P+ (10–11-й классы); T+ — раздел-объединение тригонометрических записей и L+ (7–11-й классы).

Заметим, что для структур P+, L+, T+ до сих пор нет названий. Под P+ понимается множество записей — объединение алгебраических A записей и показательных P, под L+ — множество-объединение P+ и логарифмических L; под S = T+ — множество-объединение L+ и тригонометрических T записей. Мы не будем углубляться в математические тонкости строгих теоретических построений: любой педагог, имеющий опыт преподавания, легко осознает суть: появление нового раздела связано с появление новой обратной операции (за исключением тригонометрии, где появляются прямые и обратные тригонометрические операции; это, очевидно, должна быть отдельная дисциплина).

Теоретическим, научным основанием таких представлений служит учение Н. Бурбаки [23], применимое к разным дисциплинам [24,25]. Согласно учению любая математическая дисциплина представима в виде математической структуры. Под структурой понимается множество элементов с заданными на них отображениями. Отметим, что в современном объектно-ориентированном программировании эта конструкция (тип) называется классом. Важно то, что каждый следующий раздел поглощает целиком предыдущий. Можно построить диаграмму Венна основных структур.

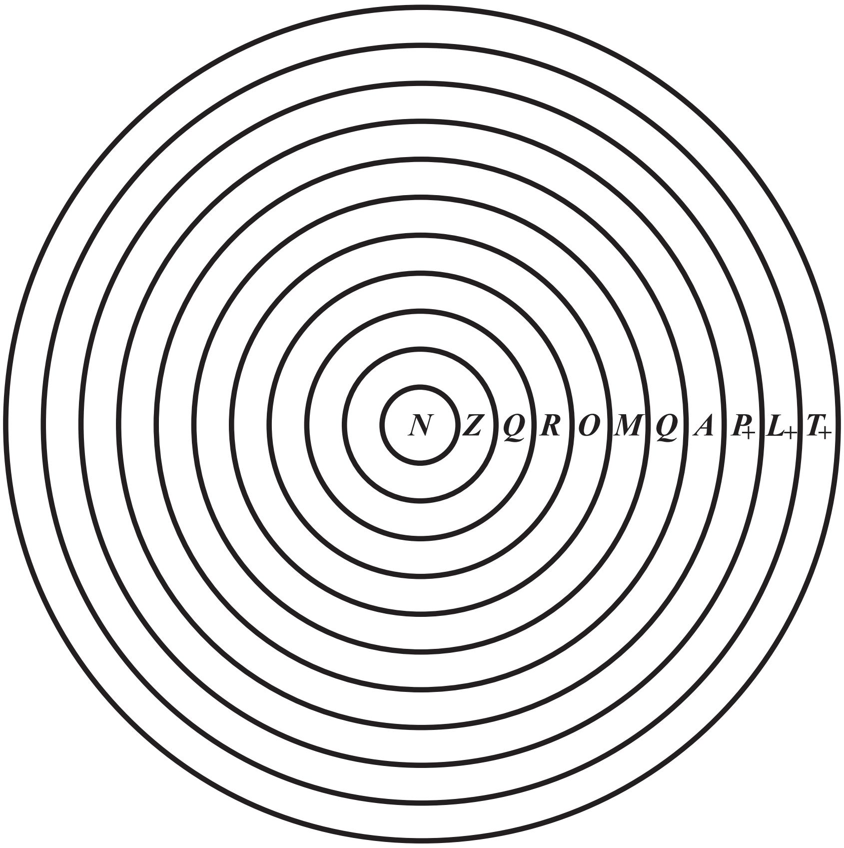


Рис. 3. Диаграмма Венна для разделов математики, каждое обозначение относится к кругу, а не кольцу.

Отметим также удивительное, по сути дела, сходство, представленных таблиц 1 и 2 с известной периодической системой химических элементов Д.И. Менделеева. Как и в таблице Менделеева, имеются разделы (группы элементов, столбцы) и темы (периоды элементов, строки). В столбце сверху вниз, как и в таблице химических элементов, нарастает сложность записей одной структуры. С другой стороны, наблюдаются периодическое закономерные изменения свойств записей, находящихся в строках. Отметим попутно, что системность химических знаний, отражённая в таблице Д.И. Менделеева, давно уже учитывается педагогами-химиками, и современные учебники химии и для школ, и для вузов строятся в соответствии с содержанием этой таблицы, но в математике и по сей день не учитывается периодичность математического знания. Единственным исключением следует считать не вполне завершённую (только числовые разделы, таблица 1) попытку авторов “МГУ — школе” [26] представить знания в соответствии с объективным строением разделов. Показательно обращение В. Садовничего к учащимся в этом учебнике: «Учебники серии “МГУ — школе” позволяют учащимся получить хорошее образование и помогут выработать правильный взгляд на основы научного знания. Это важно. Большинство школьных предметов — фундамент Здания Науки. Лучше сразу понять, как он устроен, чтобы потом при изучении верхних этажей не возвращаться к исследованию фундамента» [26].

Это обращение можно трактовать как краткое напоминание, что математика — это подобие здания, где этажами являются разделы таблиц 1 и 2. Других попыток построения учебников в строгом соответствии с ««этажами» математики нет, причины отсутствия попыток не очень ясны, ведь системный смысл таблиц достаточно очевиден.

Следует подчеркнуть, что физики также строят обучение строго по разделам: статика, кинематика, динамика, электричество и т.д. и нигде не мешают темы разных разделов. Только математики странным образом мешают все разделы, чудным образом перескакивая из одного раздела в другой, затрудняя тем самым понимание сути самой математики.

4.(1) **Принцип сознательности (осмысленности) усвоения знаний.** «Что значит "сознательные знания"? Знания, наделённые смыслами. Как проверить? Задать вопрос: почему?» [3].

Сознательность основывается на понимании. Понимание основывается на системности, последовательности знаний, умении отвечать письменно и устно на вопросы: почему? зачем? как? для чего? с какой целью? Главный признак понимания — это умение применять теорию к практике решения задач и описывать, объяснять или доказывать изучаемые положения.

Термин «понимание» происходит от слова «понятие». Усвоение первичных и фундаментальных понятий (первая строка в таблице 1 или 2) есть основа глубокого понимания изучаемой дисциплины. При построении теории круг понятий расширяется, но каждое новое вводимое понятие базируется на старых (всегда есть возможность построить наглядный граф, способствующий пониманию и запоминанию материала предмета). Важна простая и естественная иерархия наиболее важных понятий, легко обозримая и отражающая их связи, это тоже способствует неформальному усвоению сути. Понятие о разделе (столбце), понимание причин, вызывающих его возникновение (т.е. понимание генетической связи разделов) есть, разумеется, важнейший фактор понимания математики в целом, понимание глубинной сути объективного строения математического знания. Умение строить разделы индуктивно и дедуктивно, письменно и устно — признак глубокого понимания сути математики. В настоящее время упрощённое создание видео самими учащимися (очень любят снимать себя и показывать окружающим) с помощью смартфонов позволяет легко контролировать этот признак.

Обратный ход, дедуктивный способ построения разделов с помощью аристотелевского метода дихотомии понятий возникает при повторении. Все записи математики (S = T+) над полем вещественных чисел (хотя ничто не мешает рассмотреть и над полем комплексных чисел) делятся на: тригонометрические (T) и не тригонометрические ($\overline{\mathrm{T}}$ =L+); не тригонометрические делятся на логарифмические (L) и не логарифмические ($\overline{\mathrm{L}}$ =P+); не логарифмические делятся на показательные (P) и алгебраические записи (A); алгебраические делятся на рациональные (Q_s) и иррациональные (I_s) записи; рациональные записи — на дробно-рациональные (D_s) и целые рациональные (M_n — полиномы); целые рациональные — на одночлены (O) и записи являющиеся суммой двух или более одночленов; одночлены — на вещественные (R) числа и произведения, состоящее из двух или более действительных сомножителей; вещественные числа — на рациональные (Q) и иррациональные (I); рациональные — на целые (Z) (записанные без знаменателя) и собственно рациональные (записи со знаком + или −, имеющие знаменатель); целые делятся на натуральные (N) и целые неположительные.

Таким образом, имеется прямой индуктивный ход построения таблиц (при первичном обучении) и обратный ход — дедуктивный (при повторении). В каждом разделе мы видим последовательность одних и тех же тем. Это и есть методическая системность, вызывающая понимание природы математики.

Совершенно ясно, что первоначальное изучение в школе возможно только индуктивным способом, с достаточно глубоким изучением каждого из разделов. Какие темы должны изучаться в школе, можно выяснять только длительной практикой. Вполне возможно, что в условиях информатизации образования, доступности информации (Интернета), наличия математических пакетов странно было бы ограничивать существующие темы в разделах, но тогда следует указать и эффективные способы обучения.

Вообще, физики преподносят математикам наглядный урок дидактики, который не грех и позаимствовать и, возможно, это единственно правильный путь решения проблемы. В физике ещё в большей мере, чем в математике, современная эпоха представила сверхсложные теории атома, квантовых явлений, теории атомного ядра, теории относительности (специальной и общей), теории полей и элементарных частиц, теории космоса. В школе нет никакой возможности серьёзно изучать эти дисциплины, однако, открыв любой учебник по физике, мы увидим, что каждой из перечисленных теорий посвящена отдельная глава, имеется простое изложение основ теории и набор первичных задач, на изучение отведено определенное количество часов. Этим и ограничивают знакомство со сложными теориями.

Математики строят обучение неестественным образом. Например, растягивают изучение теории вероятностей на годы обучения в средней школе, довольно хаотично включая её разделы и темы в алгебру, что только затрудняет изучение, не давая цельных знаний и приводит к искажённому представлению о дисциплине.

Ещё хуже обстоит дело с геометрией, в которую намешали и векторную алгебру, и аналитическую геометрию, и анализ, и аксиоматическое построение, и теорию измеримости, все это назвали геометрией, но разрешить противоречие удовлетворительно невозможно, потому что каждая дисциплина имеет свой предмет, свой метод, свою цель, совмещать и мешать которые, недопустимо. Это приводит к потере главного качества обучения — понимания предмета. Вывод: современное обучение математики проводится не в полном соответствии с принципом сознательности.

Литература

1. Костенко И.П. Проблема качества математического образования в свете исторической ретроспективы. - М.: РГУПС, - 2013. - 501 с.

URL: https://russianclassicalschool.ru/pdf/kostenko-mono.pdf?ysclid=l6goxcvmx1106000115

2. Костенко И.П. Реформы образования России. 1918 -2018. Идеи, идеология, результаты. - М.: Ижевск, - 2018. - 191 с.

URL: https://russianclassicalschool.ru/uchebnye-komplekty/monografii/product/view/75/224.html/?ysclid=l6gp1onp4l273816477

3. Костенко И.П. Педагогические ценности русской-советской школы. // Математическое образование. - 2022. - № 1(101). - С. 2-6.

4. Коменский Я.А. Великая дидактика / Избранные педагогические сочинения. - М.: Педагогика, - 1982. - 605 с.

5. Коменский Я.А. Избранные педагогические сочинения (в трёх томах).

URL: https://vk.com/wall-67308657_6898?ysclid=l5tv00roek145648467

6. Принцип природосообразности.

URL: https://zaochnik.com/spravochnik/pedagogika/teorija-vospitanija/printsip-prirodosoobraznosti/?ysclid=l6kqqjcqmv913990190

7. Платонов К.К., Голубев Г.Г. Психология. - М.: Высшая школа, - 1977. - 246 с.

8. Общая психология.

URL: https://zen.yandex.ru/media/id/5ceedae932677000aff81291/psihologiia-62272fd20915983d355e971d

9. Педагогическая психология.

URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Педагогическая_психология

10. Принцип природосообразности К.Д. Ушинского.

URL: https://studbooks.net/1845543/pedagogika/printsip_prirodosoobraznosti_ushinskogo/?ysclid=l66lhday24393018246

11. Межполушарная асимметрия.

URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Межполушарная_асимметрия (дата обращения: 19.07.2022).

12. Лебедев К.А., Тумаев Е.Н. О структуре квантовой теории // Экологический вестник научных центров ЧЭС. - 2020. - Т. 17. - № 2. - С. 66–73.

13. Коке Б., Киссинджер А. Изображение квантовых процессов / пер. с анг. А.А. Слинкина. – М.: ДМК Пресс, 2019. – 880 с.

14. Философский словарь / под ред. Ф.И. Розенталя. - М.: Политическая литература, - 1975. - 496 с.

15. Пуанкаре А. О науке. Математическое определение и преподавание. - М.: Наука, - 1983. - 560 с.

16. Пуанкаре А. О науке.

URL: https://booksee.org/book/439606?ysclid=l5txpk4is4966150084 (дата обращения: 19.07.2022).

17. Виноградов С.Н. Открытие В.Ф. Шаталова. - М.: Школа Шаталова, - 2010. - 60 с.

18. Колягин Ю.М. Русская школа и математическое образование. - М.: Просвещение, - 2001. - 317 с.

19. Шаталов В.Ф. Соцветие талантов. - М.: ГУП-ЦРП, 2001. - Ч.1. - 380 с.; 2003. - Ч.2. - 352 с.

20. Кондракова С.О. Опорные сигналы В.Ф. Шаталова — средство активизации творческого подхода к учебному процессу // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. СПб. - 2008. - Т. 65. - С. 404-408.

URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?ysclid=l74sb6zrz4119013100&id=13920425

21. О так называемых ошибках В.Ф. Шаталова.

URL: https://alexfisich.livejournal.com/762991.html?ysclid=l5ty5blohq940919429

22. Универсальный структурированный видео-учебник-справочник по математике.

URL: https://zen.yandex.ru/media/id/5ceedae932677000aff81291/universalnyi-strukturirovannyi -videouchebnikspravochnik-po-matematike-5ebf6f50f0a6d113d54b6cbd

23. Бурбаки Н. Архитектура математики.

URL: http://egamath.narod.ru/Math/Bourbaki.htm?ysclid =l5tyxbfqw2537519841

24. Лебедев К.А. Архитектура элементарной математики. - Краснодар: КубГУ. – 2000. - 34 с.

25. Лебедев К.А. Архитектура математики: топология, алгебра и функциональный анализ. - Краснодар: КубГУ. - 2001. - 16 с.

26. Лебедев К.А. О методических и научных принципах создания школьного учебника математики серии «МГУ — школе». I. Числовые системы (5-6 классы) // Математическое образование. - 2016. - № 3(79). - С. 3-20.

Лебедев Константин Андреевич,
Заведующий кафедрой теоретической физики
и компьютерных технологий КубГУ,
д.ф.-м.н., профессор.

E-mail: klebedev.ya@yandex.ru

Ещё одно доказательство теоремы Морлея

А. Н. Афанасьев

В статье приводится доказательство Теоремы Морлея, основанное на свойствах ориентированных углов. В конце приводится два примера четырехугольников, для которых выполняется аналог теоремы Морлея.

Теорема Морлея является одной из красивейших теорем геометрии, привлекающих интерес любителей математики начиная со школьников и заканчивая известными математиками. О теореме можно прочитать в известной любителям геометрии книге [1]. Многие проводили часы, дни и даже месяцы в поисках своего доказательства этой теоремы. Некоторые из этих доказательств можно найти в сайте http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/. Также стоит отметить статьи из отечественных журналов [2], [3].

В настоящей статье приводится еще одно доказательство этой теоремы. Важное место в доказательстве занимает понятие ориентированного угла. Об ориентированных углах можно прочитать в [4].

Теорема 1 (Frank Morley, 1904). *Пусть точки A_0, B_0 и C_0 внутри треугольника ABC таковы, что*

$$\angle B_0AC = \angle C_0AB_0 = \angle BAC_0 = \frac{1}{3}\angle A,$$
$$\angle C_0BA = \angle A_0BC_0 = \angle CBA_0 = \frac{1}{3}\angle B,$$
$$\angle A_0CB = \angle B_0CA_0 = \angle ACB_0 = \frac{1}{3}\angle C.$$

Тогда, треугольник $A_0B_0C_0$ — равносторонний.

Доказательство. Пусть $\frac{1}{3}\angle A = \alpha$, $\frac{1}{3}\angle B = \beta$ и $\frac{1}{3}\angle C = \gamma$, рис. 1. Тогда $\alpha + \beta + \gamma = 60°$.

Далее, пусть точки A_1 A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 — точки пересечения прямых, выходящих из вершин

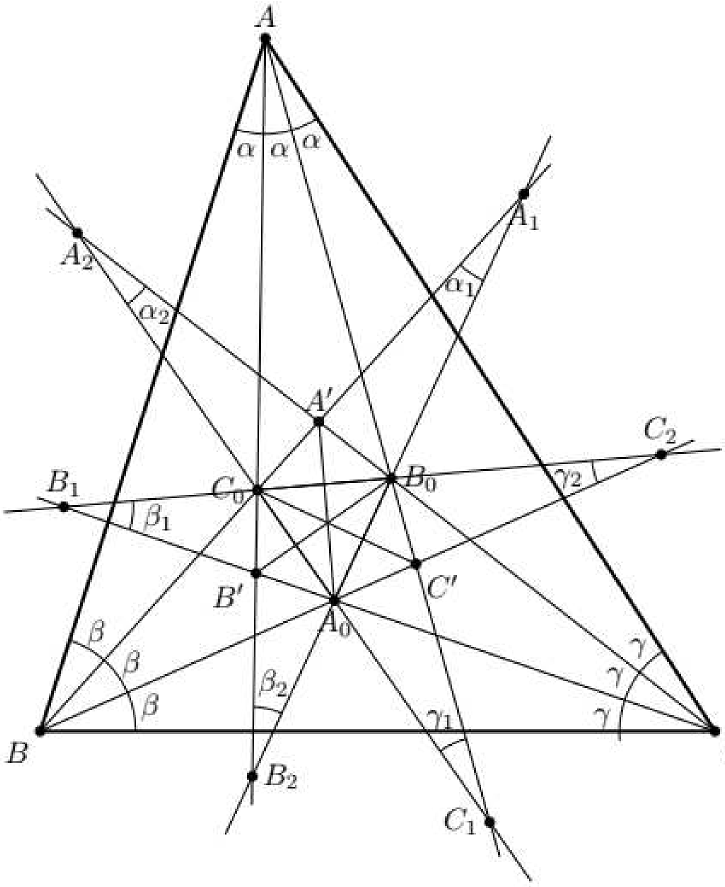


Рис. 1.

данного треугольника и делящих углы при этих вершинах на три равные части, с прямыми A_0B_0, A_0C_0 и C_0B_0, как показано на рисунке 1, и пусть

$$\angle BA_1B_2 = \alpha_1,\ \angle C_1A_2C = \alpha_2,\quad \angle CB_1C_2 = \beta_1,\ \angle A_1B_2A = \beta_2,\quad \angle AC_1A_2 = \gamma_1,\ \angle B_1C_2B = \gamma_2.$$

Так как у треугольников ABC_0 и $A_1B_2C_0$ общий внешний угол при вершине C_0, то

$$\alpha_1 + \beta_2 = \alpha + \beta. \tag{1}$$

Аналогично:

$$\beta_1 + \gamma_2 = \beta + \gamma \tag{2}$$
$$\alpha_2 + \gamma_1 = \alpha + \gamma. \tag{3}$$

Пусть A' — точка пересечения прямых BA_1 и CA_2, B' — точка пересечения прямых AB_2 и CB_1, C' — точка пересечения прямых AC_1 и BC_2.

Так как A_0 — точка пересечения биссектрис треугольника $BA'C$, то

$$\angle BA'A_0 = \angle A_0A'C = 90^\circ - \beta - \gamma. \tag{4}$$

Аналогично:

$$\angle B_0B'C_0 = \angle A_0B'B_0 = 90^\circ - \alpha - \gamma \tag{5}$$
$$\angle B_0C'C_0 = \angle C_0C'A_0 = 90^\circ - \alpha - \beta. \tag{6}$$

Найдем угол между прямыми A_0A' и B_0B':

$$\measuredangle(A_0A', B_0B') = \measuredangle(A_0A', CA_2) + \measuredangle(CA_2, CB_1) + \measuredangle(CB_1, B_0B') = \\ = (90^\circ - \beta - \gamma) + \gamma + (90^\circ - \alpha - \gamma) = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ. \quad (7)$$

Аналогично:

$$\measuredangle(C_0C', A_0A') = \measuredangle(C_0C', AC_1) + \measuredangle(AC_1, CA_2) + \measuredangle(CA_2, A_0A') = -(90^\circ - \beta - \alpha) + (\alpha + \gamma) - (90^\circ - \beta - \gamma) = \\ = -180^\circ + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = -180^\circ + 120^\circ + 180^\circ = 120^\circ \quad (8)$$

и следовательно,

$$\measuredangle(B_0B', C_0C') = \measuredangle(B_0B', A_0A') + \measuredangle(A_0A', C_0C') = 180^\circ - 120^\circ + 180^\circ - 120^\circ = 120^\circ. \quad (9)$$

Далее, выразим углы $\angle C'C_0B_0$ и $\angle C_0B_0B'$:

$$\angle C'C_0B_0 = \measuredangle(C_0C', B_1C_2) = \measuredangle(C_0C', BC_2) + \measuredangle(BC_2, CB_1) + \measuredangle(CB_1, B_1C_2) = \\ = (90^\circ - \alpha - \beta) - (\beta + \gamma) + \beta_1 = 90^\circ - \alpha - 2\beta - \gamma + \beta_1 = 30^\circ - \beta + \beta_1 \quad (10)$$

и

$$\angle C_0B_0B' = \measuredangle(B_1C_2, B_0B') = \measuredangle(B_1C_2, CB_1) + \measuredangle(CB_1, B_0B') = \\ = -\beta_1 + (90^\circ - \alpha - \gamma) = 30^\circ - \beta + \beta_1. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что $\angle C'C_0B_0 = \angle C_0B_0B'$. Следовательно,

$$\angle C'C_0B_0 = \angle C_0B_0B' = 30^\circ. \quad (12)$$

Аналогично докажем, что

$$\angle B'B_0A_0 = \angle B_0A_0A' = 30^\circ \quad (13)$$

и

$$\angle A'A_0C_0 = \angle A_0C_0C' = 30^\circ. \quad (14)$$

Из (12), (13) и (14), учитывая (7), (8) и (9) следует, что

$$\angle B_0A_0C_0 = \angle C_0B_0A_0 = \angle A_0C_0B_0 = 60^\circ. \quad (15)$$

Теорема доказана.

После знакомства с теоремой возникает возникает естественный вопрос: «Верна ли аналогичная теорема, где вместо треугольника рассматриваются произвольный четырехугольник, и четырехугольник, образованный последовательными точками пересечения трисектрис исходного четырехугольника?». Здесь мы рассматриваем четырехугольники $ABCD$, в которых

$$\angle A = 3\alpha, \angle B = 3\beta, \angle C = 3\gamma, \angle D = 3\delta$$

и точки A_0, B_0, C_0, D_0 внутри $ABCD$ такие, что

$$\angle A_0AD = \angle B_0AA_0 = \angle BAB_0 = \alpha, \quad \angle B_0BA = \angle C_0BB_0 = \angle CBC_0 = \beta, \\ \angle C_0CB = \angle D_0CC_0 = \angle DCD_0 = \gamma, \quad \angle D_0DC = \angle A_0DD_0 = \angle ADA_0 = \delta \quad (16)$$

и проверяем, является ли четырехугольник $A_0B_0C_0D_0$ квадратом.

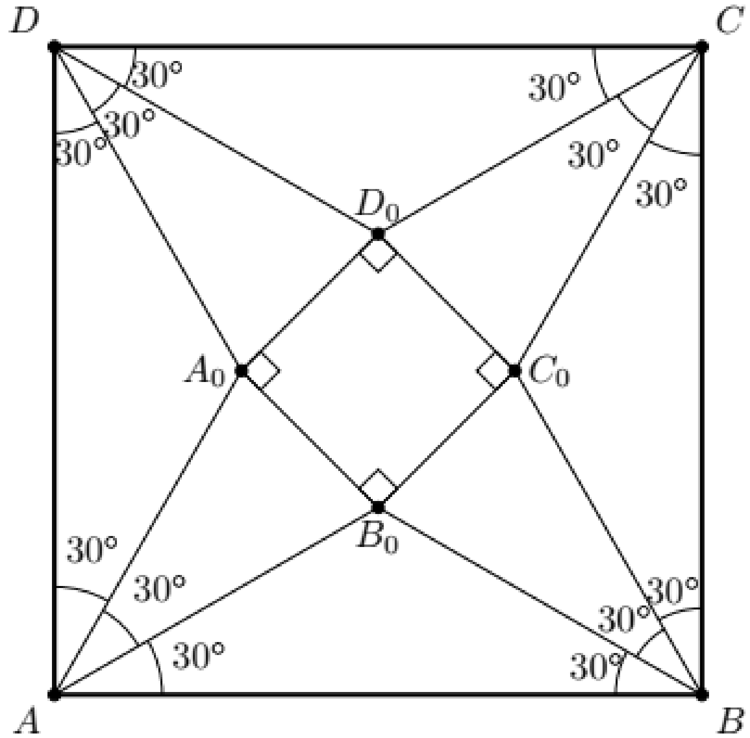


Рис. 2.

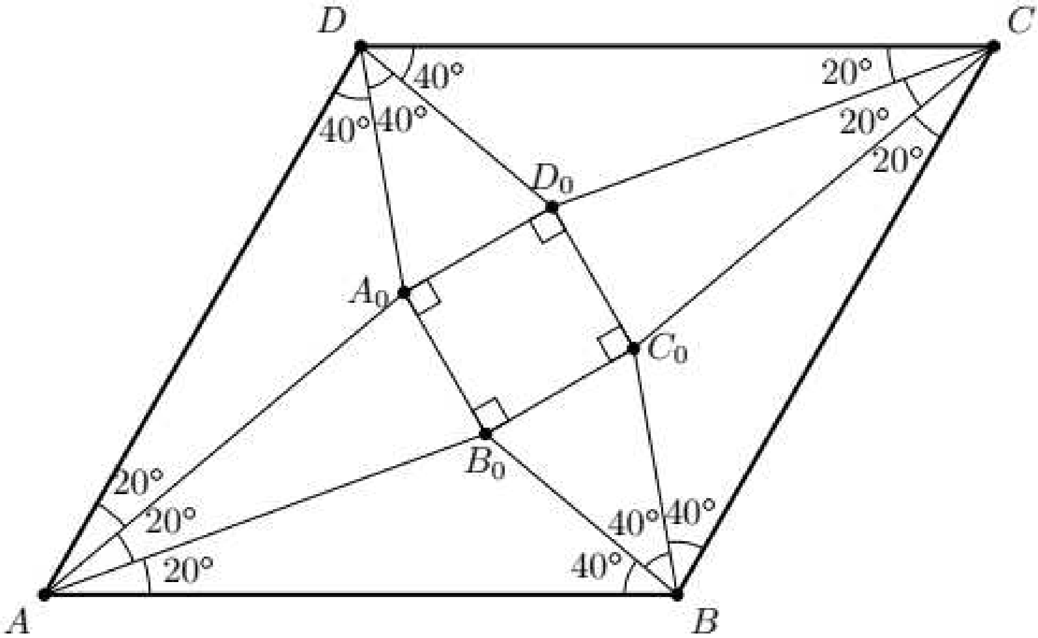


Рис. 3.

Проверка показывает, что это далеко не так. Но тем не менее, если исходный четырехугольник — квадрат (рисунок 2) или ромб с острым углом 60° (рисунок 3), то легко проверить, что четырехугольник $A_0B_0C_0D_0$ — квадрат.

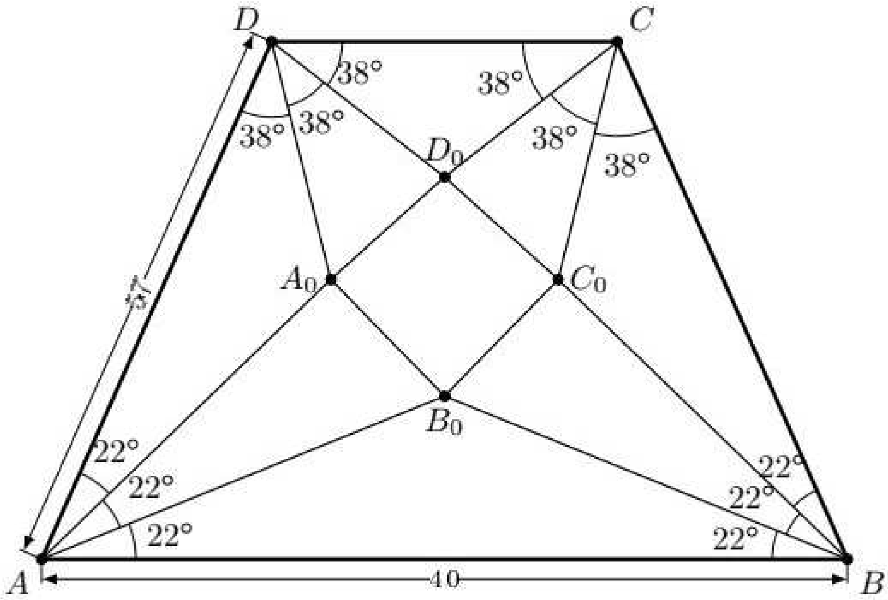


Рис. 4.

Вопрос о существовании других четырехугольников с такими свойствами для автора остается открытым.

Рисунок 4, где изображена равнобедренная трапеция $ABCD$, в котором $\angle A = \angle B = 66°$, $AD : AB = 57 : 40$ и отрезки выходящие из вершин — трисектрисы, наталкивает на мысль, что, возможно, существует равнобедренная трапеция, удовлетворяющая нашим условиям. Но, к сожалению, расчеты показали, что это не так.

Литература

1. Грейтцер С., Коксетер Г.С.М. Новые встречи с геометрией. - М.: Наука, 1978. - 224 с.
2. Яглом И., Тоноян Г. Теорема Морлея // Квант. - № 8. - 1978.
3. Штейнгарц Л. Снова о теореме Морлея // Квант, № 5. - 2009.
4. Evan Chen. Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads. - The Mathematical Association of America, 2016.

Афанасьев Александр Николаевич,
доцент кафедры теории и методики
обучения математике и информатике
Института математики и информатики
Северо-Восточного Федерального Университета
им. М.К. Аммосова, г. Якутск,
кандидат педагогических наук.

E-mail: an.afanasev@s-vfu.ru, afalnik@mail.ru

Простое доказательство неравенства $e < 3$

Н. В. Илюшечкин

В последовательность, имеющую своим пределом число e, вводится несложный добавочный множитель, стремящийся к единице. Такая модификация позволяет доказать неравенство $e < 3$ с использованием только неравенства Бернулли (без бинома Ньютона).

Наиболее естественным образом число e определяется как предел последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \tag{1}$$

что позволяет доказать основное свойство экспоненты (её производная равна ей самой).

В российских школьных учебниках приводятся некоторые оценки числа e сверху. Так в [1; с. 304] с помощью неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для многих чисел доказывается, что эта последовательность строго монотонно возрастает. Там же рассматривается вспомогательная последовательность

$$z_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

и аналогично доказывается её строгое монотонное возрастание. Так как произведение $x_n z_n < 1$, то нетрудно установить, что $x_n < 4$ для всех n. Отсюда следует, что, во-первых, последовательность (1) имеет некоторый предел — e, — и, во-вторых, что $e < 4$.

Далее, в [2; с. 141] рассматривается последовательность

$$w_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \tag{2}$$

то есть вводится добавочный множитель, равный основанию степени в последовательности (1). С помощью неравенства Бернулли (о нём ниже) доказывается строгое монотонное убывание последовательности (2), откуда следует существование её предела, равного пределу последовательности (1), то есть числу e. Кроме того, взяв в (2) значение $n = 2$, легко получить оценку $e < 3{,}375$.

Что же касается российских учебников [3] – [9] для студентов, то в них с использованием бинома Ньютона доказывается более точная оценка $e < 3$. Однако, как будет показано далее, эта оценка может быть доказана проще, путём незначительного по сравнению с (2) изменения добавочного множителя и с использованием неравенства Бернулли вместо бинома Ньютона. Приводимое ниже доказательство достаточно просто и его можно преподавать учащимся математических классов.

Неравенство Бернулли легко доказывается по индукции и формулируется следующим образом. Если действительное число $a > -1$, то для любого натурального числа $n \geqslant 2$ верна оценка

$$(1 + a)^n > 1 + na. \tag{3}$$

Мы будем использовать это неравенство в несколько усложнённой форме. Именно, если a_n — числовая последовательность, все члены которой удовлетворяют условию $a_n > -1$, то для любого натурального числа $n \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$(1 + a_n)^n > 1 + na_n. \tag{4}$$

Здесь возникает небольшая трудность — ведь в оценке (3) и при её доказательстве число a предполагается постоянным, а в неравенстве (4) величина a_n является переменной. Эта трудность преодолевается так. Фиксируем произвольное значение n и при любом натуральном $m \geqslant 2$ из (3) получаем

$$(1+a_n)^m > 1 + ma_n.$$

В частности, полагая здесь $m = n$, приходим к неравенству (4).

Займёмся исследованием предела последовательности (1). Рассмотрим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \frac{n+2}{n+1}.$$

Применяя неравенство Бернулли, получаем при всех $n \geqslant 2$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \frac{n+2}{n+1} > \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^2} - \frac{n}{(n+1)^3} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1.$$

Таким образом, последовательность x_n строго монотонно возрастает. Теперь рассмотрим вспомогательную последовательность

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) x_n,$$

отличающуюся от исходной последовательности (1) наличием добавочного множителя $1 + (n+1)^{-1}$, а также отношение

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{x_n}{x_{n+1}} \frac{n+2}{n+1} \frac{n+2}{n+3} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^n \frac{n+2}{n+3}.$$

Применяя неравенство Бернулли, получаем при всех $n \geqslant 2$

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^n \frac{n+2}{n+3} > \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \frac{n+2}{n+3} = 1.$$

Таким образом, последовательность y_n строго монотонно убывает. А так как при любом n имеем $x_n < y_n$, то последовательность x_n ограничена сверху, а последовательность y_n — снизу. Поэтому существуют пределы

$$e_* = \lim_{n\to\infty} x_n, \qquad e^* = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

причём для всех n справедливы неравенства

$$x_n < e_* \leqslant e^* < y_n. \tag{5}$$

Далее,

$$0 < y_n - x_n = \frac{1}{n+1} x_n < \frac{e_*}{n+1},$$

так что с ростом n разность $y_n - x_n$, будучи положительной, становится меньше любого наперёд заданного положительного числа. Поэтому пределы e_* и e^* совпадают. Обозначим их общее значение через e, тогда

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Наконец, из (5) при $n = 2$ получаем

$$e < y_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 3,$$

что и требовалось.

Литература

1. Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С. Алгебра и элементарные функции. Учебное пособие для учащихся 9 класса средней школы. - М.: Просвещение, 1969.
2. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни. - М.: Просвещение, 2009.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. - М.: Наука, 1969.
4. Толстов Г.П. Элементы математического анализа. Том 1. - М.: Наука, 1974.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Том 1. - М.: Высшая школа, 1981.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Том 1. - СПб.: Мифрил, Главная редакция физико-математической литературы, 1996.
7. Камынин Л.И. Курс математического анализа. Том 1. - М.: Издательство Московского университета, 2001.
8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 1. - М.: Физматлит, 2005.
9. Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1, - М.: МЦНМО, 2007.

Илюшечкин Никита Васильевич,
Ведущий инженер АО Концерн
Моринформсистема – Агат, г. Москва.

E-mail: ilyush55@mail.ru

Об одной исторической задаче по аналитической геометрии

А. О. Голосов, С. К. Соболев, В. Я. Томашпольский

Рассмотрены методические аспекты преподавания аналитической геометрии в техническом вузе. Обсуждается возможность включения в курс лекций дополнительного материала для повышения интереса у студентов к изучаемому предмету. Подробно разбирается задача, которая была задана на магистерском экзамене в Московском университете в начале 19 в. Рассматривается класс задач, когда по двум заданным точкам плоскости находится геометрическое место таких точек, что постоянна некоторая величина. Обсуждается ортогональность линий двух однопараметрических семейств, возникающих при решении задач этого класса.

Введение

Курс высшей математики преподается во всех технических вузах, а также в вузах многих других направлений. При чтении лекций преподаватели часто делают отступления от основной программы для повышения интереса студентов к изучаемому разделу. Эти отступления содержат экскурсы в историю математики, интересные технические приложения, факты из жизни знаменитых ученых. На лекциях по аналитической геометрии рассказывают о Пьере Ферма, Рене Декарте, Иоганне Кеплере и роли, которую играют кривые второго порядка в небесной механике. Мы предлагаем в качестве темы для такого экскурса задачу, которую получил в 1825 г. на магистерском экзамене будущий профессор московского университета Н.Е. Зернов [1].

1. Научные интересы Н.Е. Зернова. Николай Ефимович Зернов (1804-1862) родился в семье служащего Московского почтамта. Во время войны 1812 г. семья переехала в Ярославль, где Н.Е. Зернов получил среднее образование. Он учился в Ярославском уездном училище, гимназии, Демидовском лицее, а затем вернулся в Москву и поступил на отделение физических и математических наук Московского университета. Среди его учителей были знаменитые профессора Д.М. Перевощиков и П.С. Щепкин.

В 1822 г. Н.Е. Зернов окончил Московский университет и стал готовиться к получению степени магистра. В 1827 г. он защитил магистерскую диссертацию "О суточном и годовом движении Земли".

На протяжение нескольких лет Николай Ефимович вел занятия по математике в 1-й Московской гимназии, в Сиротском институте, был помощником астронома при университетской обсерватории.

С 1834 г. и до конца жизни Н.Е. Зернов преподавал в Московском университете: экстраординарный профессор (1835), ординарный профессор кафедры чистой и прикладной математики (1842–1850) физико-математического отделения философского факультета; ординарный профессор кафедры чистой и прикладной математики физико-математического факультета (1850–1862); заслуженный профессор Московского университета (1859).

Областью научных интересов Н.Е. Зернова были дифференциальные и интегральные уравнения, теория вероятностей с приложением к страхованию. В 1837 г. он защитил первую в России докторскую диссертацию «Рассуждение об интеграции уравнений с частными дифференциалами».

Н.Е. Зернов был также конструктором-изобретателем. Он принимал участие в расчетах деревянной конструкции крыши Московского манежа, сконструировал перископ, установил солнечные часы в Кремлевском саду.

Николай Ефимович является родоначальником научной династии. Его сын Дмитрий Николаевич Зернов (1843—1917) — врач, заслуженный профессор, декан медицинского факультета и ректор Московского университета. Внук Владимир Дмитриевич Зернов (1878—1946) — физик, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики МВТУ им. Н.Э. Баумана. Правнук Дмитрий Владимирович Зернов (1907—1971) — учёный в области электроники, член-корреспондент АН СССР.

Другой сын Николая Ефимовича Сергей Николаевич Зернов (1840—?) — математик, выпускник Московского университета, преподаватель математики Московского Ремесленного Учебного заведения (так тогда называлось МГТУ им. Н.Э. Баумана), автор ряда научных работ, посвященных интегрированию уравнений с частными производными [2,3]. Внучка Антонина Сергеевна Зернова (1883–1964) — библиограф, историк книги, работала в библиотеке им. В.И. Ленина.

2. Задача с магистерского экзамена. Для допуска к защите магистерской диссертации Н.Е. Зернов 8 мая 1825 г. сдал экзамен. Экзаменационный билет содержал следующие вопросы:

1. Изложить теорию простого маятника.

2. Составить и исследовать уравнение линии, образуемой вершинами треугольников, имеющих общие основания и такие углы при нем, что разность их постоянна [1].

Разберем решение второй задачи. На современном языке задача формулируется так: на плоскости даны две точки A и B. Найти на плоскости геометрическое место таких точек C, что разность углов $\angle ABC$ и $\angle BAC$ постоянна.

Выберем систему координат так, чтобы основание AB лежало на оси OX, причем начало координат — в середине отрезка AB. Пусть вершины треугольника имеют координаты $A(-a;0)$, $B(a;0)$, $C(x;y)$ и $\angle B - \angle A = \varphi = \text{const} < \pi$. Не нарушая общности можно считать, что $y > 0$, $\varphi \geq 0$. Если $\varphi = 0$, то искомое геометрическое место точек (далее — ГМТ) — это прямая, серединный перпендикуляр к AB. Пусть $\varphi > 0$ и $\operatorname{ctg}\varphi = b$. Рассмотрим сначала случай $x \neq \pm a$ и $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$.

Тогда $\operatorname{tg}\angle A = \frac{y}{x+a}$; $\operatorname{tg}\angle B = \operatorname{tg}(\angle A + \varphi) = \frac{y}{a-x}$. Следовательно,

$$\frac{y}{a-x} = \operatorname{tg}(\angle A + \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\angle A + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\angle A \cdot \operatorname{tg}\varphi} = \left(\frac{y}{x+a} + \operatorname{tg}\varphi\right) : \left(1 - \frac{y}{x+a}\operatorname{tg}\varphi\right). \tag{1}$$

Из (1) следует

$$\frac{y + \frac{x+a}{b}}{x + a - \frac{y}{b}} + \frac{y}{x-a} = 0.$$

После упрощения получим уравнение

$$x^2 - y^2 + 2bxy - a^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - y^2 - a^2}{xy} = -2b. \tag{2}$$

При $x = a$ равенство (2) также верно. В самом деле, как показано на рисунке 1,

$$\angle ABC = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \angle ABC - \angle BAC, \quad b = \operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{tg}\angle BAC, \quad y = BC = AB \cdot \operatorname{tg}\angle BAC = 2ab$$

Аналогично, это равенство верно при $x = -a$, а также при $\varphi = \frac{\pi}{2} (b = 0)$.

Уравнение (2) задает гиперболу с центром в начале координат и взаимно перпендикулярными асимптотами

$$y = k_{1,2}x, \text{ где } k_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2+1} = \frac{\cos\varphi \pm 1}{\sin\varphi}, \ k_1 = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}, \ k_2 = -\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Искомое ГМТ есть верхняя часть $\{y \geq 0\}$ правой ветви этой гиперболы. Эта ветвь показана на рисунке 2. При всевозможных $b \in \mathbb{R}$ уравнение (2) задаёт семейство прямоугольных (т.е. с ортогональными асимптотами) гипербол с центром в начале координат и проходящих через точки A и B. Ряд гипербол для различных значений b построен на рисунке 3.

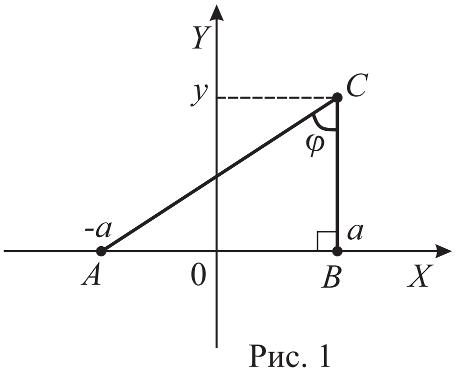


Рис. 1

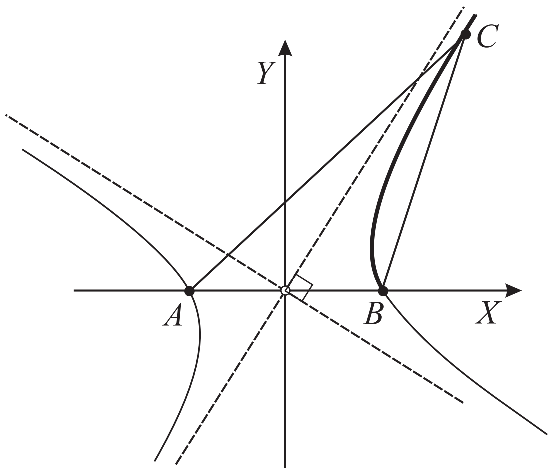


Рис. 2

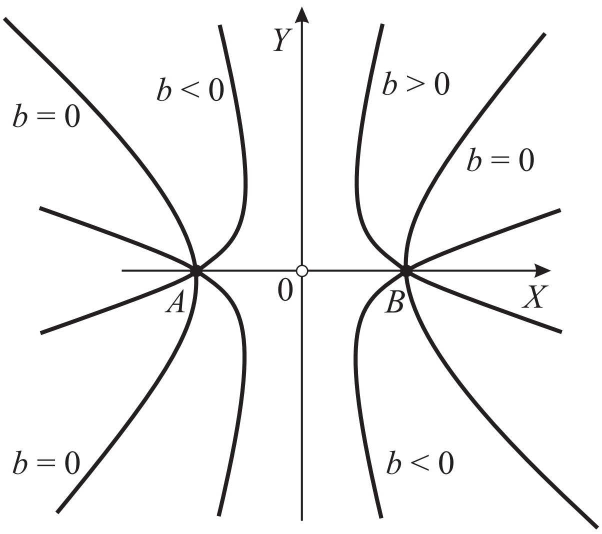


Рис. 3

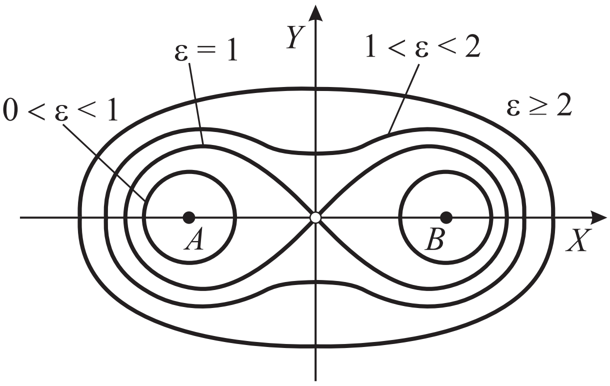


Рис. 4

3. Нахождение ГМТ для двух заданных точек. Разобранная задача принадлежит к классу задач с двумя заданными точками плоскости A, B — на поиск геометрического φ места таких точек плоскости M, что постоянна некоторая величина, например:

(А) **сумма** расстояний $\rho(A, M) + \rho(B, M) = \text{const}$.

(Б) **разность** расстояний $\rho(A, M) - \rho(B, M) = \text{const}$.

(В) **Модуль разности** расстояний $|\rho(A, M) - \rho(B, M)| = \text{const}$.

(Г) **сумма квадратов** расстояний $\rho^2(A, M) + \rho^2(B, M) = \text{const}$.

(Д) **разность квадратов** расстояний $\rho^2(A, M) - \rho^2(B, M) = \text{const}$.

(Е) **Произведение** расстояний $\rho(A, M) \cdot \rho(B, M) = \text{const} = c^2$.

(Ж) **отношение** расстояний $\dfrac{\rho(A, M)}{\rho(B, M)} = \text{const}$.

(З) **Сумма углов** $\angle MBA + \angle MAB = \text{const}$.

(И) **Разность углов** $\angle MBA - \angle MAB = \text{const} = \varphi$ (“Задача Зернова”).

(К) Угол $\angle MBA$ вдвое больше угла $\angle MAB$.

Разберём, например, задачу (Е). Итак, на плоскости даны две точки: $A(-a;0)$, $B(a;0)$ и точка $M(x;y)$ Тогда, $\rho(M,A)=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$, $\rho(M,B)=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$. Получаем уравнение

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-a)^2+y^2}=c^2 \Leftrightarrow (x^2+a^2+y^2)^2-4a^2x^2=c^4 \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2)=c^4-a^4. \tag{3}$$

Перейдём к полярным координатам $(\varphi;\rho)$:

$$\rho^4+2a^2\rho^2-4a^2\rho^2\cos^2\varphi+a^4-c^4=0;\quad \rho^4-2a^2\rho^2\cos 2\varphi+a^4(1-\varepsilon^2)=0,$$

где $\varepsilon=\dfrac{c^2}{a^2}$. Получим уравнение

$$\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi\pm\sqrt{\varepsilon^2-\sin^2 2\varphi}} \tag{4}$$

линии, симметричной относительно осей OX и OY, называемой *овалом Кассини*, [4].

Если $c<a$ $(\varepsilon<1)$, то кривая (3) состоит из двух не связных между собой частей, имеющих форму овала (см. Рис. 4). Точки A и B называются *фокусами.*

При $\varepsilon=1$ получаем уравнение хорошо известной студентам *лемнискаты Бернулли*

$$\rho=a\sqrt{2\cos 2\varphi},$$

имеющей форму символа бесконечности ∞. Если $c>a(\varepsilon>1)$, то получим уравнение замкнутой линии

$$\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi+\sqrt{\varepsilon^2-\sin^2 2\varphi}},$$

охватывающей начало координат. При $\varepsilon\geq 2$ кривая выпукла, а при $1<\varepsilon<2$ имеет четыре точки перегиба. Кривые для различных значений ε показаны на рисунке 4.

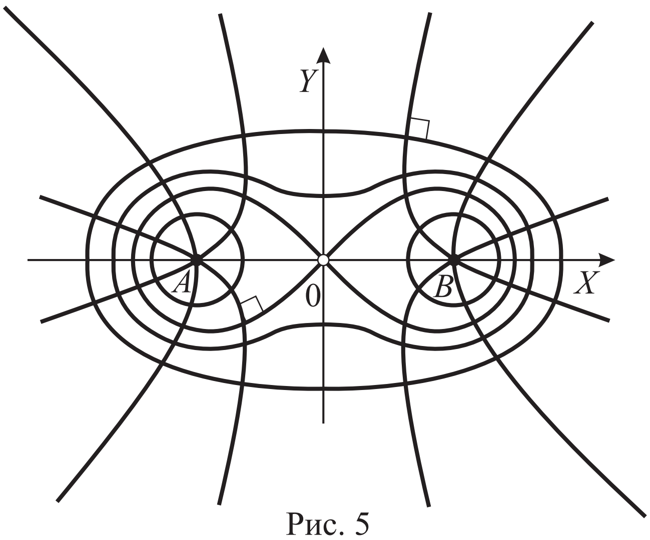


Рис. 5

4. Ортогональность линий двух семейств Если совместить семейства гипербол (2) из «задачи Зернова» (И) и семейство овалов Кассини (3) из задачи (Е) в одной координатной плоскости с одними и теми же теми же фокусами A, B (эти семейства изображены на рисунке 5), то обнаружим, что линии этих семейств пересекаются под прямым углом. В этом легко убедиться аналитически. В самом деле, линии $P(x,y)=\lambda$ и $Q(x,y)=\mu$ пересекаются под прямым углом тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y}\equiv 0 \tag{4}$$

Здесь $P(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2 - a^2}{xy}$, $\lambda = -2b$, $Q(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2)$, $\mu = c^4 - a^4$ Находим $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{x^2 + y^2 + a^2}{x^2 y}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-x^2 - y^2 + a^2}{xy^2}$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что (4) верно.

Для самостоятельного решения можно предложить студентам найти ГМТ (А) — (К), и убедиться, что взаимно ортогональны семейства линий: (А) и (В), а также (Ж) и (З).

Общий подход к решению задач на поиск геометрического места точек и возможность включения этих задач в курс аналитической геометрии обсуждались на методическом семинаре кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана [5].

Литература

[1] Юшкевич А.П. Математика в Московском университете за первые сто лет его существования // Историко-математические исследования. - Выпуск 1. - М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. - С. 43-140.

[2] Томашпольский В.Я., Сидняев Н.И. О математике, математиках и кафедре “Высшая математика”. История, традиции, современность. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2014. - 258 с.

[3] Томашпольский В.Я. Становление и развитие научной школы математики Императорского Московского технического училища // Инженерный журнал: наука и инновации. - 2013. - № 5(17). - 13 с.

[4] Савелов А.А. Плоские кривые. - М: ФИЗМАТЛИТ, 1960. - 293 с.

[5] Соболев С.К., Томашпольскаий В.Я., Методический семинар на кафедре “Высшаяя математика” // Гуманитарный вестник (МГТУ им. Н.Э. Баумана): электронный журнал. - 2018. - № 7.
URL: http://hmbul.ru/catalog/edu/pedagog/537.html

Голосов Андрей Олегович,
доцент кафедры “Высшая математика”
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва,
кандидат физико-математических наук.

E-mail: golosov@bmstu.ru

Соболев Сергей Константинович,
доцент кафедры “Высшая математика”
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва,
кандидат физико-математических наук.

E-mail: sergeisob@bmstu.ru

Томашпольский Виктор Яковлевич,
доцент кафедры “Высшая математика”
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва,
кандидат физико-математических наук.

E-mail: tomashpolski@bmstu.ru

О ключевых инструментах цифровой трансформации экономики

С. П. Левашкин

В эпоху становления цифровой экономики традиционные представления о числах и данных существенно изменились. Возникла даже целая отрасль науки о больших данных (Data Science). Новым понятиям и тенденциям в этой науке, а также ее связи с искусственным интеллектом, посвящена эта статья.

О больших данных

Формального определения больших данных не существует. Более 60 лет назад один из крупнейших математиков 20 века Андрей Николаевич Колмогоров выступил на семинаре научных работников и аспирантов механико-математического факультета Московского государственного университета с докладом «Автоматы и жизнь». На простых примерах он объяснил научному сообществу, что такое маленькие, средние и большие числа. Вот один пример того, как появляются большие данные (Big Data).

К электрической лампочке присоединено три выключателя, каждый из которых может находиться в левом или в правом положении. Существует восемь возможных вариантов совместных положений выключателей. Проводку к ним можно подвести таким образом, чтобы в каждом из восьми положений лампочка или горела, или не горела. Получится 256 возможных комбинаций. Если выключателей, допустим, пять, комбинаций будет уже 4 294 967 296. А если шесть, то число комбинаций превысит количество атомов во Вселенной.

А теперь представим, что на одну из моих лекций пришла тысяча человек, и я решил с каждым из них поздороваться за руку. При личном контакте я получу информацию о человеке (пол, примерный возраст, рост и т.д.), на основе которой смогу определить, например, процентное соотношение мужчин и женщин, их средний возраст (в науке о данных это называется «разметкой данных»). Если же попросить всю тысячу присутствующих обменяться друг с другом рукопожатиями, то нашему мозгу не под силу будет сосчитать общее число контактов и тем более обработать в разы увеличившееся количество сведений. Получается, тысяча — это среднее число, потому что мы осознанно не можем проанализировать такое количество элементов.

Кстати, интересно: чем больше объём данных, тем лучше работают алгоритмы искусственного интеллекта. А на малых данных машина начинает проигрывать человеку и по скорости, и по качеству обработки. Условно классификацию данных можно представить так: Малые данные: 1 байт = 8 бит, 1 Килобайт (Кб) = 1024 байта, 1 Мегабайт (Мб) = 1024 Кб; Средние данные: 1 Гигабайт (Гб) = 1024 Мб, 1 Терабайт (Тб) = 1024 Гб; Большие данные — начиная с 1 Петабайт (Пб) = 1024 Тб, Экзабайт, Зеттабайт...

Об искусственном интеллекте

Человеческий мозг с лёгкостью может строить теории, делать выводы и принимать решения при малом наборе сведений. А вот большие объёмы данных, и даже средние, люди уже не в силах проанализировать. Для этого и создан искусственный интеллект, который формально определяют, как набор методов, алгоритмов, сред и технологий для обработки данных любого типа. Цель обработки — составление всевозможных прогнозов, разработка классификаций, выявление аномалий, а также получение нового знания, обнаружение новых интересных закономерностей в данных. И компьютер с этим справится гораздо лучше человека. Но всё же надо помнить, что у машины всегда есть вероятность пусть и минимальной погрешности. Поэтому слепо доверять ей не стоит.

О квантовых компьютерах

Квантовые компьютеры — недалекая мечта. Это идея, которую технически трудно воплотить в жизнь. Как правило, обычные компьютеры обрабатывают бинарные последовательности (биты), где все данные представляют собой набор нулей и единиц. В текст-, видео-, аудио- и фото- документы, которые мы видим на экране, их преобразует интерфейс — совокупность средств, при помощи которых пользователь даёт команды, а устройство их выполняет. Идея же квантового компьютера заключается в том, чтобы отойти от бинарной архитектуры и вместо битов оперировать кубитами. Это минимальные элементы хранения информации, способные принимать значения и нуля, и единицы одновременно. Такой дуализм позволит обрабатывать все возможные состояния той или иной системы одновременно, что обеспечит квантовому компьютеру существенное превосходство над обычным и в скорости, и в производительности. В квантовой механике известны такие состояния, когда частица одновременно находится в двух состояниях, поэтому компьютер и назвали квантовым. Такие «машины будущего» могут получить широкое применение в криптографии (для быстрого взлома алгоритмов шифрования). Также они будут эффективны при моделировании сложных ситуаций, например, расчёта физических свойств новых элементов на молекулярном уровне.

Что есть что! «Три кита» информатики — это данные, информация и знания. «Сырые» данные мы превращаем в информацию. А из неё, в свою очередь, извлекаем знания — неизвестные ранее сведения. С позиции искусственного интеллекта, информация — структурированные данные. А знания — структурированная информация. Сейчас учёные работают над автоматизацией процессов структуризации.

О нейронных сетях

Нейронные сети были придуманы лет 60 назад. Сегодня они стали основным инструментом глубокого обучения (Deep Learning) — методов машинного обучения, основанных на имитации работы человеческого мозга в процессе обработки данных. Мы знаем, что в нашем мозге есть нейроны (нервные клетки), соединённые друг с другом аксонами (длинными цилиндрическими отростками нервной клетки). А нейронная сеть с точки зрения информатики — это математическая модель, в которой искусственные нейроны (простые процессоры) объединены в систему и взаимодействуют друг с другом. Так, каждый процессор периодически получает сигналы от других процессоров, а также посылает сигналы сам. И такая с виду простая сеть способна выполнять довольно сложные задачи. Схема работы нейросети выглядит так: входные нейроны получают исходные данные, скрытые нейроны обрабатывают информацию, а выходные нейроны выводят готовый результат. Таким образом, в зависимости от характера задачи определённое количество нейронов получает входные данные, а затем передаёт их на скрытый средний слой. Машина ищет закономерности среди огромного количества нейронных связей и «принимает» решение.

Появление генеративно-состязательных нейронных сетей, таких как ChatGPT от OpenAI, Midjourney и других, основанных на больших языковых моделях (LLM), которые содержат миллиарды параметров и обучаются на огромных объемах данных, привело к долгожданному прорыву в ИИ. Теперь такой интеллект называют "генеративный ИИ" (Generative AI). Это интеллект, основанный на данных или в другой классификации — «слабый» ИИ, где в отличии от «сильного» ИИ, когнитивные функции заменяются машинным обучением на больших датасетах (об этом подробнее в другой статье).

А.Н. Колмогоров «Автоматы и жизнь»: Современная электронная техника открывает весьма широкие возможности моделирования жизни и мышления. Дискретный (арифметический) характер современных вычислительных машин и автоматов не создает в этом отношении существенных ограничений. Системы из очень большого числа элементов, каждый из которых действует чисто "арифметически", могут приобретать качественно новые свойства. Наверное, это лучшее определения сути современных компьютерных технологий, данное им еще в 1961 г.!

О компрессии данных

Компрессия данных, то есть их сжатие, уменьшение занимаемого объёма — одна из главных задач информатики. Этот процесс важен, поскольку позволяет более рационально использовать устройства хранения и передачи данных. Приведу простой пример. Средневековый датский астроном Тихо Браге посвятил почти всю жизнь изучению движения планет Солнечной системы. В итоге накопилось несколько сотен томов с записями его наблюдений. Немецкий астроном Иоганн Кеплер на основе этих ценных книг вывел три закона движения планет. Таким образом, он свёл многостраничные сведения в три короткие элегантные формулы. Проще говоря, сжатие устраняет из данных избыточность, оставляя лишь необходимый минимум информации.

А что потом? Data Science уже начала менять наш мир. Мы никуда не денемся от цифровизации. Окружающие нас вещи будут постепенно лишаться физического тела и переходить в виртуальность под лозунгом: «Все что может быть лишено физического тела, будет его лишено, превратившись в цифрового двойника». Можно предположить, что в недалеком будущем после полной цифровизации геномов белковых тел, станет вероятным отправлять их цифровую копию по электронной почте. Кстати, в скором времени спрос на программистов начнёт спадать, станут востребованы другие специалисты — компьютерные лингвисты, специалисты по машинному обучению, архитекторы виртуальности, аналитики Big Data.

Литература

1. Левашкин С.П. Колмогоров и современная информатика // Математическое образование. - 2020. - № 96. - С.42-54.

Левашкин Сергей Павлович,
заведующий Научно-исследовательской
лабораторией Искусственного интеллекта
Поволжского государственного университета
телекоммуникаций и информатики, Самара, Россия,
профессор, кандидат физ.-мат. наук,
Действительный Член Мексиканской Академии
Наук (Sistema Nacional de Investigadores)
Выпускник ФМШ № 18 при МГУ 1978 г.

E-mail: serguei.levachkine@gmail.com

Предел определенного интеграла: вычисляем различными способами

Л. В. Панкратова

В настоящей статье описываются различные способы вычисления предела одного определенного интеграла. Представленные способы решения задачи восходят к использованию приемов интегрирования рациональных дробей, правилам вычисления пределов, обращению к теореме о предельном переходе в двойном неравенстве, теореме о пределе монотонной ограниченной последовательности. Некоторые приемы основаны на применении геометрического смысла определенного интеграла и ряда его свойств, в том числе теорем о среднем значении. Кроме того, используются вспомогательные утверждения и некоторые факты теории рядов. В заключении статьи обсуждаются методические особенности задач, подобных рассмотренной, а также возможности использования таких задач в обучении математическому анализу.

В сборниках задач и упражнений по математическому анализу нередко встречаются задания, в которых требуется найти предел определенного интеграла. Приведем одно из них, см., например, [1, с. 198, № 2326.1].

Задача. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx = 0$.

Рассмотрим несколько способов решения данной задачи.

1-й способ. Вычислим интеграл непосредственно, разложив подынтегральную функцию в сумму простейших дробей:

$$\frac{x^n}{1+x} = \frac{\left(x^n + x^{n-1}\right) - x^{n-1}}{1+x} = x^{n-1} - \frac{x^{n-1}}{1+x} = \ldots =$$

$$x^{n-1} - x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} + (-1)^n \frac{1}{1+x}\,. \tag{1}$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n-1}}{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} + (-1)^n \ln(1+x)\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} + (-1)^n \ln 2 = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).$$

Заметим теперь, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ есть n-я частичная сумма ряда Лейбница $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$. Поскольку этот ряд сходится и его сумма равна $\ln 2$ (можно апеллировать, например, к значению ряда Маклорена для функции $f(x) = \ln(1+x)$ в точке $x = 1$), то $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{n\to\infty}^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx = (-1)^{n-1}\ln 2 + (-1)^n \ln 2 = 0$.

2-й способ. Очевидным недостатком предыдущего способа доказательства является обращение в нем к элементам теории рядов, которая традиционно изучеется в вузах позднее интегрального исчисления функций одной переменной. Поэтому предложим иной подход к решению анализируемой задачи.

Оценим интеграл следующим образом:

$$0 \le \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \le \int\limits_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Тогда по теореме о предельном переходе в двойном неравенстве (теореме “о двух милиционерах”) немедленно получим требуемое.

Замечание. Можно рассмотреть иную оценку сверху для интеграла, например, основанную на использовании неравенства Коши – Буняковского

$$\left|\int\limits_a^b f_1(x)f_2(x)dx\right| \leq \sqrt{\int\limits_a^b f_1^2(x)dx}\sqrt{\int\limits_a^b f_2^2(x)dx},$$

положив $f_1(x) = x^n$, $f_2(x) = \dfrac{1}{1+x}$. В оценке снизу можно обратиться к неравенству Эрмита–Адамара (см., напр., [3]), поскольку при $n \geq 2$ функция $f(x) = \dfrac{x^n}{1+x}$ выпукла на отрезке $[0;1]$.

3-й способ. Введем в рассмотрение последовательность $a_n = \int\limits_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx$. Тогда в силу (1) $a_n = \int\limits_0^1 \left(x^{n-1} - \dfrac{x^{n-1}}{1+x}\right)dx = \dfrac{1}{n} - a_{n-1}$. Из свойств определенного интеграла следует, что для всякого $n \in N$ справедливы оценки $a_n \geq 0$ и $a_n \geq a_{n-1}$. Таким образом, по теореме о монотонной ограниченной последовательности, $\{a_n\}$ сходится.

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Переходя в равенстве $a_n = \dfrac{1}{n} - a_{n-1}$ к пределу при $n \to \infty$, получим: $A = 0 - A$, откуда $A = 0$.

4-й способ.

Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x} = \begin{cases} 0, & x \in [0;1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$ Применим теорему Лебега об ограниченной сходимости (см., например, [4, с.120]).

Теорема (А. Лебег). *Пусть на измеримом множестве E задана последовательность $\{f_n(x)\}$ измеримых ограниченных функций, сходящаяся по мере к измеримой ограниченной функции $F(x)$: $f_n(x) \Rightarrow F(x)$. Если существует такая постоянная K, что при всех n и при всех x $f_n(x) < K$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = \int\limits_E F(x)dx\,.$$

Условия теоремы Лебега выполнены, при этом предельная функция $F(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$ отличается от постоянной функции $c = 0$ в единственной точке, значит, ее интеграл Римана совпадает с интегралом Лебега от этой постоянной. Требуемое установлено.

5-й способ. Применим к интегралу под знаком предела первую теорему о среднем значении, нередко также называемую обобщенной (см., например, [6, с. 126]). Получим:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x} \cdot x^n dx = \mu \int\limits_0^1 x^n dx = \frac{\mu}{n+1}, \tag{2}$$

где $m \leq \mu \leq M$ и $m = \inf_{[0;1]} \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{2}$, $M = \sup_{[0;1]} \dfrac{1}{1+x} = 1$. Переходя в (2) к пределу при $n \to \infty$, получаем требуемое.

6-й способ. В силу непрерывности на отрезке интегрирования функции $f(x) = \dfrac{x^n}{1+x}$ для любого фиксированного n найдется точка $c_n \in (0;1)$ такая, что $\int\limits_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx = \dfrac{c_n^n}{1+c_n}$ (это среднее значение функции $f(x) = \dfrac{x^n}{1+x}$ на отрезке $[0;1]$). Для доказательства требуемого достаточно перейти в записанном равенстве к пределу при $n \to \infty$.

7-й способ. Воспользуемся вновь теоремой о среднем значении, но не первой, а второй. Напомним ее формулировку.

Теорема [7, с. 132]. *Если в промежутке $[a;b]$, где $a < b$, функция $f(x)$ монотонно убывает (хотя бы и в широком смысле), а $g(x)$ интегрируема, то*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int\limits_a^{\varepsilon} g(x)dx + f(b)\int_{\varepsilon}^{b} g(x)dx, \tag{3}$$

при этом $a \le \varepsilon \le b$.

Положим в (3) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $g(x) = x^n$, рассматривая их на отрезке $[0;1]$. Будем иметь:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \int\limits_0^{\varepsilon} x^n dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon}^1 x^n dx = \frac{1+\varepsilon^{n+1}}{2(n+1)}.$$

Поскольку $0 \le \varepsilon \le 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\varepsilon^{n+1}}{2(n+1)} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx = 0$, что и требовалось доказать.

8-й способ. Воспользуемся следующей леммой (она представляет обобщение задачи, представленной в [2, с. 88, №130]).

Лемма. *Пусть $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ на $[0;1]$. Тогда $\int\limits_0^1 x^n f(x)dx \le \dfrac{1}{n+1}\int\limits_0^1 f(x)dx$.*

Для доказательства леммы достаточно установить равносильное неравенство

$$\int\limits_0^1 \left((n+1)x^n - 1\right) f(x)dx \le 0.$$

Интеграл в нем вычислим по частям:

$$\int\limits_0^1 \left((n+1)x^n - 1\right) f(x)dx = (x^{n+1} - x)f(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (x^{n+1} - x)f'(x)dx = -\int\limits_0^1 (x^{n+1} - x)f'(x)dx.$$

Но по условию $f'(x) < 0$ на $[0;1]$ и $x^{n+1} - x \le 0$ на $[0;1]$. Следовательно, $-\int\limits_0^1 \left(x^{n+1} - x\right) f'(x)dx \le 0$. Лемма доказана.

Для решения исходной задачи положим $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Будем иметь:

$$\int\limits_0^1 x^n \frac{1}{1+x}dx \le \frac{1}{n+1}\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{\ln 2}{n+1}.$$

Но поскольку $\int\limits_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx \ge 0$, заключаем: $0 \le \int\limits_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx \le \dfrac{\ln 2}{n+1}$. Переходя в данном неравенстве к пределу при $n \to \infty$, на основании теоремы “о двух милиционерах” получаем требуемое.

Замечание. Применение теоремы “о двух милиционерах”, известной также как теорема о предельном переходе в двойном неравенстве или теорема о промежуточной функции, детально описано нами в работе [5]. Там же показана важность упоминаемой теоремы и необходимость ее восприятия как полноценного инструмента математического анализа.

Мы представили восемь различных способов решения задачи о вычислении предела определенного интеграла, используя приемы интегрирования рациональных дробей, правила вычисления предела, обращаясь к теоремам о предельном переходе в двойном неравенстве и о пределе монотонной ограниченной последовательности, а также различные свойства определенного интеграла и его геометрический смысл. Допускаем, что существуют и принципиально иные подходы к решению исходной задачи.

Где можно использовать подобные упражнения? Например, для проведения так называемого “урока одной задачи” или в качестве домашнего задания для студентов при обобщении темы “Свойства определенного интеграла”. При этом можно переформулировать его в следующем виде: “Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ возможно большим числом способов”.

Поиск различных способов решения задачи позволяет студентам проявлять математическую интуицию, оттачивать навыки применения аппарата математического анализа, способствует углублению внутрипредметных связей дисциплины. О важности формирования внутрипредметных связей математического анализа мы уже писали в работе [6], где подчеркивали их значение для достижения целей обучения, оптимизации учебного процесса вуза, актуализации у студентов системы фундаментальных понятий математического анализа.

Литература

[1] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. - М.: ООО “Издательство Астрель”: ООО “Издательство АСТ”, 2002. - 558[2] с.

[2] Задачи и упражнения по началам математического анализа: Пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики и для внеклассных занятий математикой / Сост. Канин Е.С., Калинин С.И.. Под общей редакцией Канина Е.С. - Киров, 1997. - 203 с.

[3] Калинин С.И., Панкратова Л.В. Неравенства Эрмита–Адамара: образовательно-исторический аспект // Математическое образование. - 2018. - № 3(87). - с. 17–31.

[4] 4) Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974. - 480 с.

[5] Панкратова Л.В. Использование теоремы о промежуточной функции для вычисления пределов // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона: период. межвуз. сборник науч.-метод. работ. - Вып. 21. - Киров, 2019. - с. 175–180.

[6] Панкратова Л.В. Реализация внутрипредметных связей математического анализа при изучении числовых рядов // Advanced science. - 2020. - № 4. - с. 31–35.

[7] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 2. 8-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, Лаборатория знаний, 2003. - 864 с.

Панкратова Лариса Валерьевна,
доцент кафедры фундаментальной математики
Вятского государственного университета (Киров),
кандидат педагогических наук.

E-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru

Формула дискретной интерполяции

В. М. Федосеев

Задача интерполирования функций издавна привлекала внимание математиков. Сами названия интерполяционных формул: Ньютона, Лагранжа, Гаусса, Бесселя, Эрмита и другие убедительно говорят о том, математики какого уровня интересовались этой задачей. Методическое значение её заключается в том, что основные положения теории интерполирования доступны пониманию даже школьника. В то же время разработка возникающих в теории интерполирования вопросов, охватывая разделы алгебры, математического анализа, теории функций и др., является богатым источником интересных математических задач [1, 2]. Несмотря на обилие имеющихся сведений, на этом пути все еще возможно получение новых результатов.

Особенностью настоящей статьи является то, что интерполяционная задача рассматривается в ней для класса дискретных функций. На основе принятого в статье подхода построена компактная и удобная для вычислений формула дискретной интерполяции. Приводятся примеры вычислений и задания для самостоятельного решения.

Постановка интерполяционной задачи

Напомним постановку классической задачи интерполяции в математике. Для определенности установим интервал значений независимой переменной: $x \in [0;1]$ и ограничимся системой равноотстоящих узлов интерполяции. При таких условиях необходимо определить аналитическое выражение интерполирующей функции $y = F_n(x)$ по ряду ее заданных значений в следующей системе точек (узлов интерполяции):

$$F_n\left(\frac{i}{n}\right) = y_i, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Другими словами, нужно подобрать некоторую функцию, график которой проходит в границах заданного интервала через указанные в условии задачи фиксированные точки. Существуют и более сложные задачи интерполирования, например, когда в ряде точек фиксируются не только значения функции, но и значения ее первой производной (интерполяционный процесс Эрмита, Фейера и др. [3]).

Потребность в построении интерполирующей функции возникает при математической обработке результатов наблюдений, при аппроксимации функций, при составлении формул численного дифференцирования и интегрирования и в других задачах вычислительной математики [3, 4].

В теории интерполирования [1] для решения поставленной выше задачи составляются формулы вида

$$F_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot f_i(x), \tag{2}$$

где $\{f_i(x)\}$ — выбираемая по усмотрению исследователя система базовых функций. Это могут быть, например, многочлены, тригонометрические или другие функции. Значения коэффициентов a_i находятся из системы линейных уравнений, составляемой из условий (1).

Решение поставленной интерполяционной задачи, задаваемое формулой (2), очевидно неоднозначно и зависит как от способа выбора последовательности базовых функций $\{f_i(x)\}$, так и от требований, предъявляемых к интерполирующей функции $y = F_n(x)$. В классической теории интерполирующая функция относится к классу непрерывно дифференцируемых функций, то есть ее график должен быть гладкой непрерывной кривой. На этом основании строятся соответствующие интерполяционные формулы, например, формулы Лагранжа и Ньютона. Академиком С.Н. Бернштейном в работе [5] было доказано, что при ослаблении требований к виду интерполирующих функций, как сама формула (2), так и расчетная схема для определения числовых коэффициентов a_i могут быть существенно упрощены. В качестве базовых им были использованы функции $f_i(x) = \left|x - \frac{i}{n}\right|$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ и в результате получена [5, с.6] следующая интерполяционная формула:

$$F_n(x) = a_0 \cdot |x| + a_i \cdot \left|x - \frac{i}{n}\right| + \ldots + a_n \cdot |x - 1|. \tag{3}$$

Формула Бернштейна (3) реализует интерполяционный процесс на классе непрерывных функций $y = F_n(x)$, для которых производная $F_n'(x)$ имеет разрыв в узлах интерполяции. Графиком функции (3) является ломаная кривая.

В статье решение задачи интерполяции в свою очередь расширяется на класс дискретных (разрывных) интерполирующих функций. По этой причине в качестве системы базовых функций $\{f_i(x)\}$ предлагается использовать дискретные арифметические функции. Область приложений дискретной интерполяции, например, может быть связана с математическим моделированием задач, параметры которых являются дискретными величинами.

Задача дискретной интерполяции

Постановка задачи дискретной интерполяции отличается от задачи предыдущего раздела тем, что здесь значения интерполирующей функции $y = F_n(x)$ задаются не только в точках, а для ряда интервалов значений переменной, покрывающих некоторый отрезок. Таким образом, график интерполирующей функции является дискретной линией, состоящей из отдельных участков. Пример подобной линии показан на рис. 1.

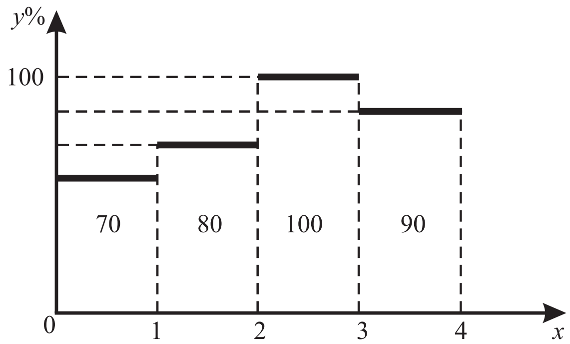


Рис. 1.

В нашей задаче будем составлять аналитическое выражение дискретной функции $y = F_n(x)$, $x \in [0; 1]$ по ряду ее значений на интервалах равной длины:

$$F_n(x) = y_i \text{ при } x \in \left[\frac{i}{n}; \frac{i+1}{n}\right), \ (i = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Условия (4), собственно говоря, и составляют постановку задачи дискретной интерполяции. Заметим, что определяемая таким образом дискретная функция также является и решением задачи точечной интерполяции по условиям (1).

Для составления формулы дискретной интерполяции в качестве базовых функций воспользуемся последовательностью арифметических функций: $f_i(x) = \left[\frac{nx}{i}\right]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ где символ $[\ldots]$ означает целую часть выражения, стоящего в квадратных скобках. Теперь отыскиваемую интерполирующую функцию согласно формуле (2) запишем в виде следующей суммы:

$$F_n(x) = a_0 + a_1[nx] + a_2\left[\frac{nx}{2}\right] + \ldots + a_n[x] = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \left[\frac{nx}{i}\right]. \tag{5}$$

В формуле (5) базовые функции $f_i(x) = \left[\dfrac{nx}{i}\right]$ являются дискретными, поэтому и их сумма $F_n(x)$, вообще говоря, также является дискретной функцией. После того как вид интерполяционной формулы выбран, перейдем к определению ее коэффициентов a_i.

Решение. С целью вычисления коэффициентов a_i подставим условия (4) в формулу (5). После преобразований получим линейную систему:

$$\begin{cases} a_0 = y_0, \\ a_1 = y_1 - y_0, \\ a_1 + a_2 = y_2 - y_1, \\ a_1 + a_3 = y_3 - y_2, \\ a_1 + a_2 + a_4 = y_4 - y_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1 + \ldots + a_n = y_n - y_{n-1}. \end{cases} \tag{6}$$

Уравнения системы (6) составляются по арифметическому принципу, и каждое из них включает только те коэффициенты, номера которых являются делителями номера строки уравнения (нумерация начинается со второго уравнения). Например, уравнение третьей строки содержит слагаемые a_1 и a_3, так как его номер 3 имеет делители: 1 и 3; номер 4 имеет делителями числа: 1, 2 и 4, поэтому уравнение четвертой строки включает слагаемые: a_1, a_2, a_4 и т. д.

Система уравнений (6) имеет сильно разреженную матрицу неизвестных, более простого вида, чем система с диагональной матрицей. Это делает ее решение, как это видно из приведенного ниже примера, достаточно простым даже в случае задач больших размерностей.

После подстановки найденных значений коэффициентов в формулу (5) будет получено окончательное решение задачи дискретной интерполяции.

Пример. В таблице 1 по данным Облстатуправления Пензенской области представлены по месяцам затраты R на капитальное строительство в млн. руб.

Таблица 1

Месяц	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь
Номер месяца	5	6	7	8	9	10	11
R, млн. руб.	2410	2800	2820	3160	3630	3650	3740

Требуется построить математическую модель динамики роста строительной отрасли экономики Пензенской области и составить прогноз на декабрь.

Решение. Для решения поставленной задачи воспользуемся формулой дискретной интерполяции (5). С этой целью обозначим через n номер месяца года и введем новую переменную $x = \dfrac{n-5}{6}$. Введение новой переменной нужно для того, чтобы привести значения переменной задачи n к принятому при составлении формулы (5) стандартному интервалу $[0;1]$.

После подстановки данных таблицы в правую часть системы (6) получим следующую систему уравнений для вычисления коэффициентов интерполяционной формулы:

$$\begin{cases} a_0 = 2410, \\ a_1 = 2800 - 2410 = 390, \\ a_1 + a_2 = 2820 - 2800 = 20, \\ a_1 + a_3 = 3160 - 2860 = 340, \\ a_1 + a_2 + a_4 = 3630 - 3160 = 470, \\ a_1 + a_5 = 3650 - 3630 = 20, \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_6 = 3740 - 3650 = 90. \end{cases}$$

Отсюда находим искомые значения коэффициентов:

$$a_0 = 2410;\ a_1 = 390;\ a_2 = -370;\ a_3 = -50;\ a_4 = 450;\ a_5 = -370;\ a_6 = 120.$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу (5) и возвращаясь к старой переменной, окончательно запишем выражение интерполирующей функции, составленное по данным условия рассматриваемой задачи:

$$R(n) = 2410 + 390[n-5] - 370\left[\frac{n-5}{2}\right] - 50\left[\frac{n-5}{3}\right] = \\ +450\left[\frac{n-5}{4}\right] - 370\left[\frac{n-5}{5}\right] + 120\left[\frac{n-5}{6}\right]. \tag{7}$$

Выражение (7) является решением поставленной задачи и составляет дискретную математическую модель динамики роста строительной отрасли экономики Пензенской области.

Для сравнения приведем другую математическую модель той же задачи, но построенную с использованием формулы полиномиальной интерполяции [4]:

$$R^*(n) = 2410 + 390(n-5) - 185(n-5)(n-6) + 115(n-5)(n-6)(n-7) - \\ -\frac{110}{3}(n-5)(n-6)(n-7)(n-8) + \frac{49}{12}(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9) + \\ +\frac{25}{18}(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-10). \tag{8}$$

Математическая модель по формуле (7) кроме своего более компактного выражения обладает еще тем преимуществом, что работа с ней не требует столь значительного объема вычислений, как в случае полиномиальной модели (8). Кроме того, пользование формулой (7) лишено некоторых недостатков, свойственных полиномиальной интерполяции. Если мы, например, попробуем использовать формулу (8) для прогнозирования объема строительства на декабрь месяц, то получим $R^*(12) = 8010$ млн. руб. В то время как прогноз по формуле (7) дал более реальную цифру $R(12) = 4130$ млн. руб.

В качестве упражнений рекомендуется решить следующие задачи:

Задача 1. Составьте аналитическое выражение интерполирующей функции, график которой показана на рис. 2, пользуясь для этой цели формулами (5) и (6).

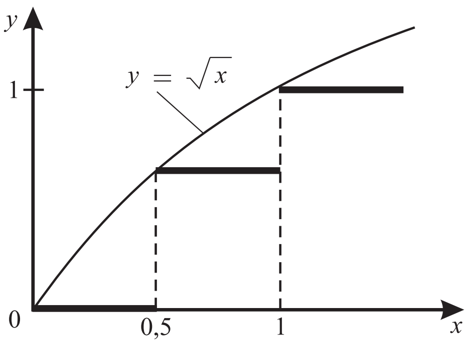


Рис. 2.

Ответ: $F_2(x) = \dfrac{[2x]}{\sqrt{2}} + (1-\sqrt{2})[x]$.

Задача 2. Синтезировать дискретный сигнал $y = f(t)$, заданный таблицей 2.

Таблица 2

t	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$
$y(t)$	3	4	6	2	3

Ответ: $y(t) = 3 + [t] + \left[\frac{t}{2}\right] - 5\cdot\left[\frac{t}{3}\right] - \left[\frac{t}{4}\right]$.

Литература

[1] Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах. - Минск: «Вышэйшая школа», 1968. - 320 с.

[2] Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах. Ч. 2. - Минск: «Вышэйшая школа», 1977. - 256 с.

[3] Микеладзе Ш.Е. Численные методы математического анализа. - М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. - 528 с.

[4] Пирумов У.Г. Численные методы: Учебное пособие для студентов втузов. - М.: Дрофа, 2003. - 224 с.

[5] Бернштейн С.Н. Об интерполировании. Собрание сочинений. - Т. 1. - М., 1952. - С. 5-7.

Федосеев Виктор Михайлович,
Преподаватель математики
Технологического колледжа
Пензенского государственного
технологического университета,
доцент, кандидат технических наук,
Почетный работник Высшей школы.

E-mail: fedoseev_vik@mail.ru

Олимпиада школьников "ТИИМ — Технологии. Интеллект. Информатика. Математика" 2022/2023

А. А. Андреев, Е. А. Скородумова, Е. А. Максимова

В статье рассказано об олимпиаде для школьников по математике и информатике "ТИИМ" 2022/23 учебного года. Приведены задачи отборочного тура по математике для 10-11 классов с ответами, задачи заключительного тура по математике для 11 класса с решениями, а также примеры задач отборочного и заключительного туров по информатике с решениями.

Олимпиадная математика и информатика учит обучающихся, прежде всего, думать нестандартно и творчески подходить к решению сложных задач. В будущем это поможет нынешним школьникам решать различные, в том числе и бытовые, жизненные задачи намного лучше, так как уже с юных лет они научатся смотреть на задачи с разных сторон и рассматривать их под разным углом.

Для успешного участия в олимпиадах помимо творческих способностей и нестандартного мышления необходима серьёзная подготовка, важной составляющей которой является знакомство с заданиями и разбор решений олимпиадных соревнований различных уровней.

В 2022/23 учебном году отборочный тур олимпиады школьников «ТИИМ - Технологии. Интеллект. Информатика. Математика» прошел в ноябре 2022 - январе 2023 г., заключительный — в феврале 2023 г.

В состязании по математике принимали участие школьники 5-11 классов. Для удобства участников отборочный тур проходил как в очной, так и в дистанционной форме. Каждый из 4 вариантов отборочного тура содержал 10 задач. Вариант заключительного тура также включал в себя 10 задач.

Варианты заданий отборочного тура и финала по информатике включали в себя по 6 задач, рассчитанных на учащихся 8-11 классов. Тур проводился с применением системы автоматической проверки решений участников на наборе тестовых данных. Решения оценивались в соответствии с количеством верно пройденных тестов и принимались на языках C++, Python, Pascal, Java.

В олимпиаде по математике приняли участие 6015 школьников из 9 стран ближнего зарубежья и 74 регионов РФ, по информатике — 1826 школьников из 66 регионов РФ и 6 зарубежных стран. Заключительный тур прошел на 48 площадках, в том числе в Москве, Санкт-Петербурге, Владимире, Самаре, Белгороде, Омске, Тюмени, Ульяновске, Саранске, Калининграде, Улан-Удэ, Красноярске, Елабуге, Волгограде, Ивановской области, Республике Башкортостан, Вологде, Ростове-На-Дону, Нижнем Новгороде, Новосибирске, Челябинске, а также в Абхазии, Казахстане, Кыргызстане и Донецкой Народной Республике.

Полный текст заданий с ответами и решениями, а также информация о победителях и призерах опубликованы на официальном сайте олимпиады

https://тиим.рф

1. Задания отборочного тура по математике

Каждое из заданий отборочного тура по математике могло быть оценено в 0 или 1 балл. От участников принимался краткий ответ.

Здесь мы приводим по одному варианту заданий для 10 и 11 класса с ответами.

10 класс

Задача 1. Найдите сумму всех целых решений уравнения

$$| x - \sqrt{x} - 3 | + | \sqrt{x} + 7 - x | = 6.$$

Ответ: 4.

Задача 2. Найдите сумму всех натуральных a, при каждом из которых неравенство

$$2a + a(3 - \sin^2 x)^2 + 22\cos^2 x < 88$$

выполняется при всех действительных значениях x.

Ответ: 15.

Задача 3. Восьмизначное натуральное число A, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа B перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 12 и $B \leqslant 88888888$. Найти наибольшее среди чисел A, удовлетворяющих этим условиям.

Ответ: 98888887.

Задача 4. В пачке письменных работ абитуриентов не более 75 работ. Известно, что половина работ в этой пачке имеют оценку отлично. Если убрать три верхние работы, то 48% оставшихся работ будут с оценкой отлично. Сколько работ было в пачке?

Ответ: 28.

Задача 5. Положительные числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 75, \\ y^2 + yz + z^2 = 432, \\ z^2 + zx + x^2 = 507. \end{cases}$$

Чему равняется $(xy + yz + zx)^2$?

Ответ: 4800.

Задача 6. Имеются 3 слитка: 1-й слиток — сплав меди и никеля, 2-й — сплав никеля с цинком, 3-й — сплав цинка с медью. Если сплавить 1-й слиток со 2-м, то процент меди в полученном сплаве будет в 2 раза меньше, чем он был в 1-м слитке. Если сплавить 2-й слиток с 3-м, то процент никеля в полученном сплаве будет в 3 раза меньше, чем он был во 2-м слитке. Какой процент цинка будет содержать слиток, полученный при сплаве всех трёх слитков, если во 2-м слитке цинка 12%, а в 3-м — 5%?

Ответ: 5,5.

Задача 7. Найти среднее арифметическое всех целых b, при которых уравнение имеет не одно решение

$$2 | x + 1 | -2 | x - 2 | + | x - 6 | = x + b.$$

Ответ: 0,375.

Задача 8. На десяти одинаковых карточках написаны числа 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. Наугад берутся две карточки. Найти вероятность в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$ того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима. В ответе записать $m + n$.

Ответ: 59.

Задача 9. Пусть N — количество решений уравнения

$$\sqrt{4\cos(2x\pi) - 2\sin(2x\pi)} = 2\cos(x\pi)$$

на интервале (0;100), a — наибольший корень, b — наименьший корень в промежутке. Чему равно $\frac{a-b}{N}$?

Ответ: 1.

Задача 10. В группе из 16 детей 7 родились в Москве, 4 — в Санкт-Петербурге, 3 — в Казани и 2 — в Урюпинске. Выбирают группу из 4 детей. Какова вероятность, что в выбранной группе есть дети из всех 4 городов? Ответ дать в виде десятичной дроби с двумя десятичными знаками.

Ответ: 0,09.

11 класс

Задача 1. Найдите сумму S всех целых решений неравенства

$$| x - \sqrt{x} - 3 | + | \sqrt{x} + 7 - x | \leqslant 6.$$

Ответ: 60.

Задача 2. Положительные числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 75, \\ y^2 + yz + z^2 = 121, \\ z^2 + zx + x^2 = 196. \end{cases}$$

Чему равняется $xy + yz + zx$?

Ответ: 110.

Задача 3. Девятизначное натуральное число A, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа B перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 18 и $B \leqslant 222222222$. Найти наибольшее среди чисел A, удовлетворяющих этим условиям.

Ответ: 922222220.

Задача 4. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} | 3x - 2a + 6 | = 3y, \\ | 3y - a + 6 | = 3x, \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ: 4.

Задача 5. Чему равен радиус вписанного круга в треугольник с целочисленными сторонами, если один из углов равен $\frac{1}{2} arcsin\frac{13}{85} + arctg 13$, а две стороны 84 и 85?

Ответ: 12.

Задача 6. Функция $f(x)$ при всех допустимых значениях x удовлетворяет равенству

$$f(x) + 2f(1 - x) = x^2.$$

Пусть M — наименьшее её значение достигается в точке x_0. Чему равна дробь $\frac{x_0}{1+M}$?

Ответ: 6.

Задача 7. Вкладчик положил в банк на депозит некоторую сумму денег и в течение пяти лет не снимал деньги со счёта и не делал дополнительных взносов. В течение первых трёх лет банк ежегодно начислял вкладчику проценты по депозиту по постоянной процентной ставке. После этого в стране разразилась инфляция. И хотя банк продолжал ежегодно начислять проценты по вкладу по прежней годовой ставке, деньги в результате инфляции обесценились настолько, что вкладчик каждый год в течение последних двух лет стал нести убытки. Величина убытков в процентном исчислении составляла ровно половину от исходной годовой процентной ставки. При какой исходной процентной ставке, не превышающей 200% годовых, вкладчик будет иметь максимальный суммарный прирост денежных сбережений за пять лет?

Ответ: 80.

Задача 8. Сколько корней имеет уравнение

$$\sin\frac{\pi x}{3}(\lg(x+5)+\lg(400-x))=0?$$

Ответ: 137.

Задача 9. Из полного набора трёхзначных чисел наудачу выбирается одно. Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются в порядке убывания слева направо. Числа не могут начинаться с цифры 0. Записать найденную вероятность в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$. В ответе записать m^2+n^2.

Ответ: 229.

Задача 10. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{(x^4-16x^2+48)\mid x-3\mid}+\lg(2022+331x-x^2).$$

В ответе запишите число всех целых значений из области определения.

Ответ: 341.

2. Отборочный тур олимпиады ТИИМ по информатике

На отборочном туре по информатике участникам были предложены 6 заданий “сказочной” тематики. Представленные задания требовали от участников разнообразных знаний и оригинального подхода: работа с большими числами, системы счисления, регулярные выражения, геометрия и динамическое программирование. Для получения максимального балла (100) по каждой из задач программа должна была выдать верный ответ на всех тестовых данных. По каждой из задач таких тестов было не менее 25. Самой сложной для участников оказалась следующая задача.

Забор для тридевятого царства

Царь постановил возвести ограду прочную, чтобы отделить земли своего царства великого, тридевятого, от прочих.

Инженерам поставлена задача — начертить границу вокруг владений царя, используя символы +, −, | (вертикальная черта) и пробелы.

Данные о владениях — координаты точек, принадлежащих царству.

Известно следующее:

- Царство может быть различной формы.
- В центре полученной фигуры могут быть пропуски.
- Внутри царства заборы не нужны.
- Царство состоит из одной фигуры.

Примеры:

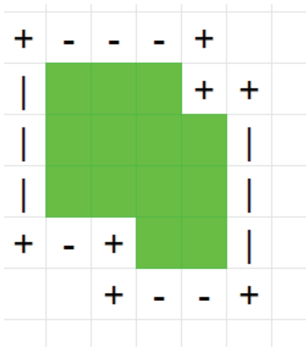


Рис. 1 - тридевятое царство

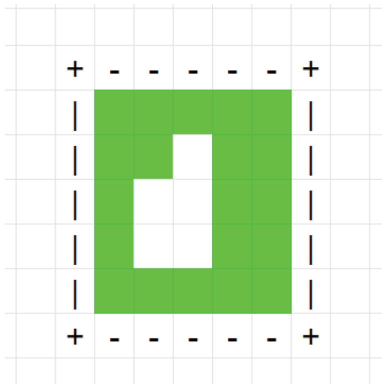


Рис. 2 - тридевятое царство с внутренним пространством

Допустимые значения: Размер области: 1-2000 единичных квадратов Длина/ширина области: 1-90

Входные данные

Координаты точек x, y, разделенные пробелом, каждая пара с новой строки, $-150 \leqslant x,\ y \leqslant 150$.

Выходные данные:

Чертеж.

Требования к выходным данным:

Минимальное количество начальных пробелов (хотя бы одна строка должна начинаться не с пробела).

Отсутствие пробелов в конце строки.

Отсутствие лишних переносов строк в конце вывода.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Примеры тестовых данных:

<table>
<tr><th>Входные данные</th><th>Результат работы программы</th></tr>
<tr><td><pre>1 1</pre></td><td><pre>+-+
| |
+-+</pre></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Входные данные</th><th>Результат работы программы</th></tr>
<tr><td>1 1
2 1</td><td>+--+
| |
+--+</td></tr>
<tr><td>1 1
2 1
3 1
1 2
2 2
3 2</td><td>+---+
| |
| |
+---+</td></tr>
<tr><td>1 2
2 2
3 2
4 2
5 2
5 3
5 4
4 4
3 4
2 4
1 4
1 5
1 6
2 6
3 6
4 6
5 6
6 6
7 6
8 6
8 5
8 4
8 3
8 2
9 2
10 2
11 2</td><td>+--------+
| |
| +---++ |
| || |
+---+ || +--+
| || |
+-----++----+</td></tr>
</table>

Решение на C++

С заданием полностью справились только три участника. Приводим решение призера отборочного тура, Эмиля Талыпова, 10 класс, г. Бишкек.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

const int N = 305;
const int INF = 1e+3;

char m[N][N];
bool used[N][N];

void dfs(int y, int x)
{
    if (0 <= y and y < N and 0 <= x and x < N and m[y][x] == 0)
    {
        m[y][x] = 1;

        dfs(y - 1, x);
        dfs(y + 1, x);
        dfs(y, x - 1);
        dfs(y, x + 1);
    }
}

void replace(int y, int x)
{
    if (m[y][x] == 1) m[y][x] = '+';
}

void draw(int y, int x)
{
    for (int i = y + 1; y < N and m[i][x] == '+'; i++)
    {
        m[i - 1][x] = '|';

        if (m[i][x + 1] == '+' and m[i][x + 2] == '+')
        {
            draw(i, x); break;
        }

        while (m[i][x - 1] == '+' and m[i + 1][x] == '+') i++;
    }

    for (int i = x + 1; i < N and m[y][i] == '+'; i++)
    {
        m[y][i - 1] = '-';

        if (m[y + 1][i] == '+' and m[y + 2][i] == '+')
        {
            draw(y, i); break;
        }

        while (m[y - 1][i] == '+' and m[y][i + 1] == '+') i++;
    }
```

```
    used[y][x] = true, m[y][x] = '+';
}

signed main()
{
    ios_base::sync_with_stdio(0); cin.tie(0);

    int y, x;

    while (cin >> y >> x)
        m[N - x - 152][y + 152] = ' ';

    dfs(1, 1);

    int sy = INF, sx = INF, ey = -INF, ex = -INF;

    for (y = 2; y < N; y++)
        for (x = 2; x < N; x++)
            if (m[y][x] == ' ')
            {
                sy = min(sy, y - 1);
                sx = min(sx, x - 1);
                ey = max(ey, y + 1);
                ex = max(ex, x + 1);

                replace(y - 1, x - 1);
                replace(y - 1, x + 1);
                replace(y + 1, x - 1);
                replace(y + 1, x + 1);
                replace(y - 1, x);
                replace(y + 1, x);
                replace(y, x - 1);
                replace(y, x + 1);
            }

    for (y = 2; y < N; y++)
        for (x = 2; x < N; x++)
            if (!used[y][x] and m[y][x] == '+')
                draw(y, x);

    for (y = sy; y <= ey; y++)
    {
        for (x = sx; x <= ex; x++)
            if (m[y][x] != ' ' and m[y][x] != '|' and m[y][x] != '-' and m[y][x] != '+')
                cout << ' ';
            else
                cout << m[y][x];

        cout << '\n';
    }
}
```

3. Заключительный тур по математике

Каждое из заданий могло быть максимально оценено в 10 баллов.

Вариант заданий для 11 класса

Задача 1. Наборщик рассыпал некоторое число, представляющее седьмую степень натурального числа. Его цифры: 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6. Восстановить по этим цифрам число.

Решение: Седьмая степень натурального числа
$10^{10} < x^7 < 10^{11}$,
$10\sqrt[7]{10} < x < 10\sqrt[7]{1000}$,
$26 < 10\sqrt[7]{1000} < 27$,
$N = 27$,
$27^4 = 531441$,
$27^3 = 19683$.
Проводим операцию умножения и получаем в итоге:
$27^7 = 10460353203$.
Для $N = 36$
$36^4 = 1679616$,
$36^3 = 46656$,
$36^7 = 1679616 \cdot 46656 = \ldots 096$.
Операцию умножения не производим, так как вторая цифра с конца будет 9-ка.

Ответ: $27^7 = 10460353203$.

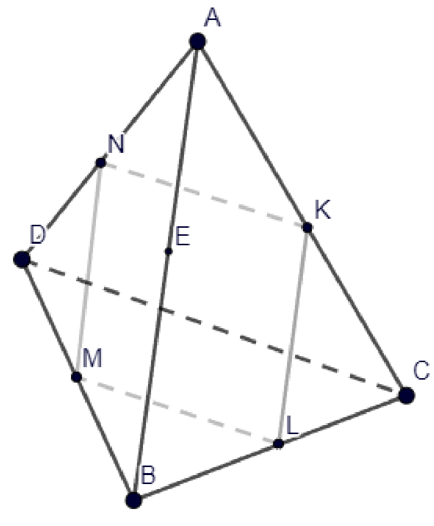
Задача 2. Используя все цифры от 1 до 9, составить три трёхзначных числа с наибольшим возможным произведением.

Решение: $941 * 852 * 763$.

Ответ: 683519816.

Задача 3. Правильный тетраэдр разделили плоскостью на две части так, что в сечении получился единичный квадрат. Найдите объём шара, вписанного в этот тетраэдр и отношение объёмов полученных тел.

Решение: Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр (см. рисунок ниже). Проведем в ABC и ABD средние линии KL и MN. Обе они параллельны ребру AB, а значит друг другу, т. е. параллельны и лежат в одной плоскости, которая пересекает тетраэдр по четырехугольнику $NKLM$. Покажем, что он и есть искомый квадрат.



Сначала заметим, что все четыре его стороны — средние линии равных правильных треугольников, граней тетраэдра. Поэтому они равны между собой, т. е. $KLMN$ — ромб. Стороны его параллельны ребрам AB и CD тетраэдра. Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что прямые $AB \perp CD$. Для этого обозначим середину ребра AB через E и заметим, что прямая $AB \perp$ плоскости CDE, т. к. перпендикулярна лежащим в ней пересекающимся прямым CE и DE. Потому она перпендикулярна и лежащей в плоскости CDE прямой CD.

$$V_1 : V_2 = 1 : 1,$$

$$HK = 1 => AD = 2 = a,$$

$$v = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}, S_{\text{п.п.}} = a^2\sqrt{3}, r = \frac{3V}{S_{\text{п.п.}}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4 \cdot a^2\sqrt{3}} = a\frac{\sqrt{6}}{12},$$

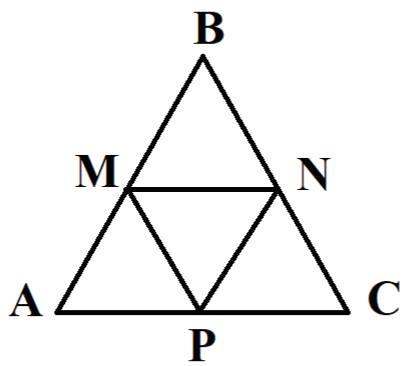
$$r = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{6\sqrt{6}} = \frac{2\pi\sqrt{6}}{9 \cdot 6} = \frac{\pi \cdot \sqrt{6}}{27}.$$

Ответ: $\frac{\pi*\sqrt{6}}{27}$.

Задача 4. Внутри правильного треугольника случайно бросили точку O. Пусть a, b, c — длины отрезков, равные расстоянию от точки O до сторон этого угла. Найдите вероятность того, что из отрезков a,b,c можно построить треугольник.

Решение:



Перпендикуляр, опущенный на AC из любой точки, лежащей внутри треугольника MBN (M,N,P — середины AB , BC, AC соответственно), будет больше $\frac{H}{2}$, а опущенный из точки, лежащей на MN, равен $\frac{H}{2}$. Следовательно, все эти точки не удовлетворяют условию задачи.

Аналогичный вывод можно сделать по отношению к точкам, лежащим внутри треугольников MAP и PCN, а также к лежащим на MP и NP.

Наоборот, по отношению к любой точке O, лежащей внутри треугольника MNP, имеем (предположив, что OB_1 — наибольший из перпендикуляров, что не уменьшает общности):

$$OA_1 + OB_1 = H - OB_1,$$

и так как $OB_1 < \frac{H}{2}$, то

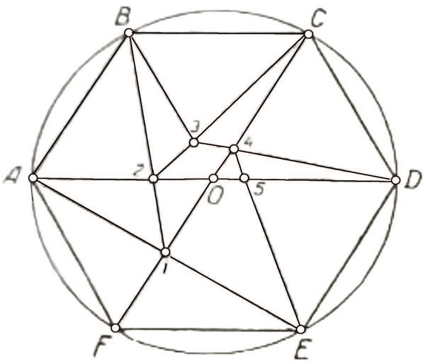
$$OA_1 + OC_1 > H - \frac{H}{2} = \frac{H}{2},$$
$$OA_1 + OC_1 > OB_1,$$
$$P = \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: 0,25.

Задача 5. В круг радиуса 2023 вписан правильный шестиугольник. Пользуясь только линейкой, построить отрезок длиною 1.

Решение: Дан правильный шестиугольник ABCDEF.

1. Проводим AD.
2. Проводим CF.
3. Проводим AL. Отрезок $O1 = \frac{1}{2}R$.
4. Проводим B1. Отрезок $O2 = \frac{1}{3}R$, это следует из подобия треугольников B1C и 21O. $\frac{O2}{R} = \frac{O1}{C1} = \frac{1}{3}$.
5. Проводим BO.
6. Проводим C2. Отрезок $O3 = \frac{1}{4}R$.



7. Проводим D3. Отрезок $O4 = \frac{1}{5}R$.
8. Проводим E4. Отрезок $O5 = \frac{1}{6}R$ и т.д.

Доказательство везде основывается на подобии треугольников.

Задача 6. Если A, B, C — углы остроугольного треугольника, то какое наименьшее значение может принимать выражение

$$\frac{\operatorname{tg}^{2023} A + \operatorname{tg}^{2023} B + \operatorname{tg}^{2023} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}?$$

Решение: Известно, что $\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}$,

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B - \operatorname{tg}(A+B) = -\operatorname{tg}(A+B)\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B.$$

Если $A + B + C = 180$, то $\operatorname{tg}(A+B) = -\operatorname{tg} C$,

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C \leq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}, \text{ тогда} \qquad \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C \leq 3^{\frac{3}{2}},$$

$$\operatorname{tg}^n A + \operatorname{tg}^n B + \operatorname{tg}^n C \leq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}^n A \cdot \operatorname{tg}^n B \cdot \operatorname{tg}^n C},$$

$$\frac{\operatorname{tg}^n A + \operatorname{tg}^n B + \operatorname{tg}^n C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} \leq 3(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)^{\frac{n}{3}-1} = 3(3^{\frac{3}{2}})^{\frac{n}{3}-1} = 3^{1011}.$$

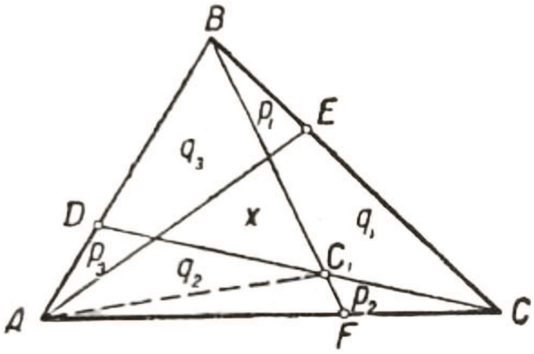
Ответ: 3^{1011}.

Задача 7. Точками E, F и D каждая из сторон треугольника ABC разделена в отношении $m : n$. Найти отношение площади треугольника, образованного прямыми AE, BF и CD, к площади данного треугольника.

Решение: Согласно условию

$$\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA} = \frac{m}{n} = k.$$

Обозначим искомую площадь через x, а площади треугольников и четырехугольников, на которые разбивается прямыми AE, BF, CD данный треугольник, соответственно через p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3.



Из равновеликости треугольников BAE и CBD следует, что

$$p_2 + q_3 = p_2 + q_1. \tag{1}$$

Точно так же из равновеликости треугольников BAE и ACD:

$$P_2 + q_2 = p_1 + q_3 v. \tag{2}$$

На основании теоремы о треугольниках, которые имеют общую вершину, найдем, что

$$\frac{S_{AC_1D}}{S_{DC_1B}} = \frac{m}{n} = k.$$

Отсюда:

$$S_{AC_1D} = k(x + q_3). \tag{3}$$

На том же основании:

$$S_{AC_1F} = \frac{1}{k} p_2, \tag{4}$$

$$S_{AC_1D} = q_2 + p_2 - S_{AC_1F} = p_3 + q_2 - \frac{1}{k} p_2. \tag{5}$$

Из (3) и (5) получаем:

$$k(x+q_3) = p_3 + q_2 - \frac{1}{k}p_2. \tag{6}$$

Совершенно аналогично найдем:

$$k(x+q_1) = p_1 + q_2 - \frac{1}{k}p_3. \tag{7}$$

Исключим x из (6) и (7) путем вычитания и получим следующее:

$$k(q_2-q_1) = p_3 + q_2 - \frac{1}{k}p_2 - p_1 - q_3 + \frac{1}{k}p_3 \tag{8}$$

или

$$k^2q_3 - k^2q_1 = kp_3 + k(q_2-p_1) + (p_3-p_2) - kq_3.$$

Но из (1) и (2) имеем:

$$q_2 - p_1 = q_3 - p_2 u p_3 - p_2 = q_1 - q_3.$$

После подстановки получим:

$$k^2q_3 - k^2q_1 = k(p_3+q_3-p_2) + q_1 - q_3 - kq_2.$$

Наконец, приняв во внимание (1),

$$k^2q_3 - k^2q_3 = kq_1 + q_1 - q_3 - kq_2$$

или

$$k^2q_3 + kq_3 + q_3 = k^2q_1 + kq_1 + q_1.$$

Но отсюда непосредственно следует:

$$q_3 = q_1.$$

А тогда из (1):

$$p_3 = p_2.$$

Совершенно аналогично найдем, что

$$q_2 = q_3,$$

а тогда из (2), что

$$p_1 = p_2,$$

и, следовательно, в итоге имеем:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p, \quad q_1 = q_2 = q_3 = q.$$

Выразим площадь S треугольника ABC через p и q и через x — площадь искомого треугольника. Будем иметь:

$$x + 3p + 3q = S.$$

С другой стороны, соотношения

$$\frac{S_{ADC}}{S_{DBC}} = \frac{AD}{AB} = k,$$

$$\frac{S_{ADC}}{S_{DBC}} = \frac{AD}{DB} = k,$$

p и q:

$$2p + q = k(x + p + 2q),$$

$$p + q - \frac{p}{k} = k(x + q).$$

Или

$$(2 - k)p + (1 - 2k)q = kx,$$

$$(k - 1)p + (k - k^2)q = k^2 x.$$

Решив эту систему, найдем:

$$p = \frac{k^3 x}{(k-1)^2(k+1)} uq = \frac{(k + k^2 - k^2)x}{(k-1)^2(k+1)}.$$

Подставив полученные значения в (7):

$$x = \frac{(k-1)^2}{k^2 + k + 1} = \frac{(m-n)^3}{m^3 - n^3}.$$

Ответ: $\frac{(m-n)^3}{m^3-n^3}$.

Задача 8. Доказать, что в каждой бесконечной десятичной дроби существует последовательность десятичных знаков произвольной длины, которая в разложении дроби встречается бесконечно много раз.

Решение: Пусть m — произвольное заданное натуральное число. Разобьём данную бесконечную дробь на отрезки, по m цифр в каждом. Таких отрезков будет бесконечно много. С другой стороны, число систем из m цифр равно числу упорядоченных m-выборок из (10)-множества, $A^m_{(10)} = 10^m$, т.е. конечное число. Следовательно, хотя бы одна из этих систем должна повторяться бесконечно много раз.

Задача 9. Найти шестизначные числа такие, что: $\overline{xyznut} = (\overline{xyz} + \overline{nut})^2$.

Решение: Обозначим:

$$\overline{xyz} = M \quad \text{и} \quad \overline{nut} = N.$$

По условию:

$$1000M + N = (M + N)^2.$$

Отсюда:

$$999M = (M + N)^2 - (M + N) = (M + N)(M + N + 1). \tag{9}$$

Так как $M + N$ и $M + N - 1$ — два соседних натуральных числа, то они взаимно простые. Число $999 = 27 \cdot 37$. Отсюда можно сделать такие предположения:

$$M + N = 999. \tag{10}$$

(Точнее, $M + N = 999k$, но легко показать, что k может быть равно только 1).
Тогда

$$M + N - 1 = 998$$

и из (9)

$$M = \frac{999 \cdot 998}{999} = 998.$$

Следовательно, из (10)

$$N = 1$$

и искомое число равно

$$998001 = (998 + 001)^2.$$

$$M + N = 27m;\ M + N - 1 = 37n;$$

$$M = mn.$$

Отсюда:

$$27m = 37n + 1.$$

Решив это неопределённое уравнение в целых положительных числах, найдём:

$$m = 11 + 37t; \quad n = 8 + 27t.$$

Но

$$M = mn = (11 + 37t)(8 + 27t) < 1000.$$

Следовательно, $t = 0$ (так как уже при $t = 1$ имеем $48 \cdot 35 > 1000$). Значит:

$$M = 11 \cdot 8 = 88.$$

Это значение M не годится, так как M по условию число трёхзначное.

$$M + N = 37m; \quad M + N - 1 = 27n;$$

$$M = mn.$$

Отсюда:

$$37m = 27n + 1.$$

Это уравнение даёт

$$m = 19 + 27t; \quad n = 26 + 37t,$$

и так как (аналогично предыдущему) $t = 0$, то имеем:

$$m = 19; \quad n = 26.$$

$$M = mn = 19 \cdot 26 = 494;$$

$$M + N = 37 \cdot m = 37 \cdot 19 = 703;$$

$$N = 703 - 494 = 209.$$

Искомое число:

$$494209 = (494 + 209)^2.$$

Предположение $M + N - 1 = 999k$ не годится, так как уже при $k = 1$ получим $M + N = 1000$ и из (9) $M = 1000$ — четырёхзначное (хотя второе условие задачи имеет место).

Ответ: Итак, имеем два числа

$$998001 \quad \text{и} \quad 494209,$$

удовлетворяющие условию задачи.

Задача 10. Пусть координаты вектора $\overrightarrow{l}(x, y, z, w)$ удовлетворяют трём условиям. Найдите все натуральные значения, которые может принимать $|\overrightarrow{l}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 6y + 12, \\ z^2 + w^2 + 8z = 2w + 19, \\ xw + zy + 2w + 4y \geqslant 44 + x + 3z. \end{cases}$$

Решение: Преобразуем систему

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25, \\ (z+4)^2 + (w-1)^2 = 36, \\ (w-1)(x+2) + (z+4)(y-3) \geqslant 30, \end{cases}$$

$$30\cos\phi\sin\psi + 30\sin\phi\cos\psi \geqslant 30,$$

$$\begin{cases} x + 2 = 5\cos\phi, \\ y - 3 = 5\sin\phi, \\ z + 4 = 6\cos\psi, \\ w - 1 = 6\sin\psi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant \phi \leqslant 360^\circ, \\ 0 \leqslant \psi \leqslant 360^\circ, \end{cases}$$

$$\sin(\phi + \psi) \geqslant 1,$$

$$\phi + \psi = 90^\circ + 360^\circ n, \ n \in \mathbb{Z},$$

$$|\overrightarrow{l}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 4 - 20\cos\phi + 25\cos^2\phi + 9 + 30\sin\phi +$$

$$+25\sin^2\phi + 16 - 48\cos\psi + 36\cos^2\psi + 1 + 12\sin\psi + 36\sin^2\psi =$$

$$= 91 - 20\cos\phi + 30\sin\phi - 48\cos\psi + 12\sin\psi,$$

$$\cos\psi = \cos(90^\circ - \phi + 360^\circ n) = \sin\phi; \quad \sin\psi = \sin(90^\circ - \phi + 360^\circ n) = \cos\phi,$$

$$|\overrightarrow{l}|^2 = 91 - 8\cos\phi - 18\sin\phi = 91 - \sqrt{8^2 - 18^2}\{\sin\alpha\cos\phi + \cos\alpha\sin\phi\} =$$

$$= 91 - \sqrt{388}\sin(\alpha + \phi),$$

$$\sin\alpha = \frac{8}{\sqrt{388}} = \frac{4}{\sqrt{97}}; \ \cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{97}},$$

$$|\overrightarrow{l}|^2 = 91 - \sqrt{388}\sin(\alpha+\phi) \in [91-\sqrt{388};\ 91+\sqrt{388}],$$
$$91-\sqrt{388} \in (71;72) \quad 91+\sqrt{388} \in (110;111),$$

$$\sqrt{91-\sqrt{388}} \in (8;9) \quad \sqrt{91+\sqrt{388}} \in (10;11).$$

Ответ: $|l| \in \{9;10\}$.

4. Заключительный тур олимпиады ТИИМ по информатике

Заключительный тур также, как и отборочный, содержал задачи, различные по сложности и требующие от участников большого количества разнообразных знаний и навыков. Комплект заданий содержал геометрическую задачу, задачу динамического программирования, задачу на объединение перекрывающихся неупорядоченных интервалов, простую задачу на рисование (ASCII Art) и задачу на быстрые алгоритмы и большие числа. Также от участников требовалось написать компилятор эзотерического языка “Tick”. Задания оценивались по 100-балльной шкале.

Самой сложной для участников задачей оказалась “Большие числа”, которую мы и приведем ниже.

Задача 2. Большие числа

Задано натуральное число m, $1 \leqslant m \leqslant 10^{24}$.

Найти наименьшее n, такое, что n^n делится на m без остатка.

Входные данные:

Число m, $1 \leqslant m \leqslant 10^{24}$.

Выходные данные:

Число n.

Ограничение времени выполнения программы: 0.2 сек.

Пример тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
17	17
480	30
999	111
12345	12345
654321	654321
92812	46406
18663	18663
1024	8
123456799	123456799
7576507881	841834209
465625359367	465625359367
150678007667	150678007667
849974449459008	26561701545594
595261012762099	595261012762099
265810403357172049	265810403357172049
458622479488159988	229311239744079994
480340172940925918931	480340172940925918931
859766721564453703972	429883360782226851986
385793285260553180041986	428659205845059088935554
871499258247560694421845	871499258247560694421845

Решение задачи на языке Python

Очевидно, что $n \leqslant m$, и для решения задачи в случае небольших значений m или неограниченного времени работы программы подойдет и решение простым перебором, с проверкой $pow(n, n, m) == 0$ для каждого из проверяемых значений.

Такое решение работает за время $O(nlog(n))$. Соответственно, с возрастанием m растет и сложность вычислений, и нам требуется более оптимальный алгоритм.

Для определения простоты числа в решении используется алгоритм Миллера-Рабина, для разложения на простые множители — ρ–алгоритм Полларда.

Подробнее об этих и других методах быстрых вычислений можно прочитать, в том числе, в пособии “Введение в криптографию”, под общ. ред. В. В. Ященко, МЦНМО, 2012 г., и монографии Василенко О. Н. “Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии”, МЦНМО, 2003.

```
import math
import random

#Miller-Rabin

def MR_is_prime(n: int) -> bool:
    if n < 2:
        return False
    if n in [2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31]:
        return True
    if n % 2 == 0:
        return False
    k, r, d = 37, 0, n - 1
    while d % 2 == 0:
        d //= 2
        r += 1
    for i in range(k):
        a = random.randint(2, n - 2)
        x = pow(a, d, n)
        if x == 1 or x == n - 1: continue
        for j in range(r - 1):
            x = pow(x, 2, n)
            if x == n - 1: break
        else:
            return False
    return True

# Pollard
def Pollard_rho(n: int) -> int:
    if n & 1 == 0:
        return 2
    c = random.randint(1, n - 1)
    r, t = c * (c + 1) % n, c
    while r != t:
        d = math.gcd(abs(t - r), n)
        if d > 1:
            return d
        r = (c + (r * r + c) ** 2) % n
        t = (c + t * t) % n
    return n
```

```
def factor(n: int) -> set:
    if n <= 1:
        return {*()}
    if MR_is_prime(n):
        return {n}
    r = n
    while r == n:
        r = Pollard_rho(n)
    while n % r == 0:
        n //= r
    return factor(r) | factor(n)

def solve(m: int) -> int:
    n, i = 0, 1
    for p in factor(m):
        i *= p
    while True:
        n += i
        if pow(n, n, m) == 0:
            return n

print(solve(int(input())))
```

Андреев Александр Анатольевич,
руководитель сектора олимпиад школьников МТУСИ,
кандидат физ.-мат. наук, доцент.

E-mail: andre01071948@yandex.ru

Скородумова Елена Александровна,
доцент кафедры "Теория вероятностей и
прикладная математика" ФГБОУ ВО
"Московский технический университет
связи и информатики",
кандидат физ.-мат. наук, доцент.

E-mail: eas@mtuci.ru

Максимова Екатерина Алексеевна,
специалист сектора олимпиад школьников МТУСИ.

E-mail: ekamaks@bk.ru

Александр Барсуков помогает Павлу Урысону в 1920 году. К 125-летию со дня рождения П.С. Урысона, 03.02.1898–17.08.1924

Л. П. Барабанова

Об эпизоде знакомства и помощи со стороны А.Н. Барсукова выдающемуся русскому математику П.С. Урысону.

Александр Николаевич Барсуков в 1913 году окончил физмат Московского университета. Осенью того же года А.Н. Барсуков поступает преподавателем математики и физики реального училища г. Коврова Владимирской губернии.

В декабре 1913 г. в Москву на II Всероссийский съезд преподавателей математики собралось 1076 преподавателей, среди них был молодой преподаватель из Коврова А.Н. Барсуков.

В 1915 г. в № 4 журнала «Математическое образование» была напечатана первая работа А.Н. Барсукова «Представление целого числа в виде суммы ряда последовательных нечетных чисел».

По официальной биографии Барсуков спокойно работал преподавателем математики и, возможно, физики вплоть до Февральского переворота в 1917 году в реальном училище города Коврова. Официальный биограф Андронов пишет:

В 1916 г. Барсуков устанавливает связь с ковровской подпольной организацией большевиков[1], а в феврале 1917 г. вступает в ленинскую партию большевиков[2] [1, С. 147].

С января 1918 года А.Н. Барсуков возглавляет Ковровский уездный отдел народного образования и, заодно, занимается на его ниве своей педагогической деятельностью. «С момента установления Советской власти до 1920 г. А.Н. Барсуков заведовал Ковровским уездным и городским Отделом народного образования» [1, С. 147].

Годы Военного Коммунизма не мешали интересу ковровского общества к достижениям современной науки и техники.

Так, ковровская газета «Трудящаяся Беднота», № 37 от 25.11.19 печатает статью «Открытие Ковровского Народного Дома. 21 ноября с.г. в г. Коврове состоялось открытие Народного Дома, который собой положил начало Народному Университету. . . ».

Затем «Трудящаяся Беднота», № 43 от 09.12.19 печатает статью «Народный Дом. 8 ч. Вечера 3 декабря около входа в народный дом, где читалась лекция т. Барсукова по космографии наблюдалось скопление народа, среди которого раздавались протестующие голоса за то, что их не пускают на лекцию. . . . ».

Буквально чрез несколько дней после яркого выступления т. Барсукова, а именно, 13 декабря 1919 года был опубликован декрет за подписью В.И. Ленина «О ликвидации безграмотности среди населения РСФСР». «Известия ВЦИК» выпустили текст декрета специальной афишей. Во Владимирской губернии было издано «Положение о ликвидации безграмотности», инструкции по учету неграмотных от 16 до 50 лет, анкета и воззвание ко всем трудящимся. Губисполком издал обязательное постановление, установившее шестилетний срок ликвидации безграмотности – по 2 года для

[1]Об этом нам ничего не известно.

[2]Об этом событии существует множество очерков, совпадающих, как правило, в том, что оно произошло 5 марта 1917 года.

каждой из трех категорий. Неграмотные дети в возрасте от 8 до 13 лет включительно подлежали обязательному обучению в школах I ступени» [2]. Очевидно, что в обеспечение Декрета были выделены определенные деньги. На местах освоением этих средств занимались заведующие отделами народного образования.

В Коврове этим занимался большевик А.Н. Барсуков, лично знакомый с Лениным [3]. А.Н. Барсуков с января 1918 года возглавляет Ковровский уездный отдел народного образования и продолжает заниматься педагогической деятельностью. В 1920 г. в г. Коврове организуется вечерний университет, а затем при нем — рабфак. А.Н. Барсуков назначается заведующим рабфаком и одновременно преподавателем математики.

А.Н.Барсуков около 1920 года

П.С.Урысон около 1915 года

Здесь мы коснемся лишь одного из поступков Александра Николаевича Барсукова в то время. Это было оказание профессиональной помощи юному математику Павлу Самуиловичу Урысону.

Фотография из архива Гимназии им. Барсукова (1912 год)

На коллективной фотографии Семинара Профессора Д.Ф. Егорова 1912 года наш Барсуков стоит непосредственно над Егоровым. По левую руку от Барсукова стоит его однокурсник В.В. Степанов. Можно идентифицировать еще нескольких участников этой фотосессии.

Для нас сейчас важно, что на этой исторической фотографии еще нет П.С. Урысона и нет Н.И. Лузина. П.С. Урысон был на два курса моложе, а Н.И. Лузин находился в заграничной командировке. Возвращение Лузина на Родину привело к созданию знаменитой научной школы — Лузитании. Одним из самых ярких представителей Лузитании стал П.С. Урысон. Несмотря на молодость, он уже руководил некоторое время молодым А.Н. Колмогоровым.

А.Н. Колмогоров около 1925 года

Фотография из Интернета.

Павел Самуилович Урысон родился 03.02.1898 в Одессе Херсонской губернии, погиб 17.08.1924 во время купания на французском побережье Ба-сюр-Мер (фр. Batz-sur-Mer), Бретань. Его спутника и друга — Павла Александрова — швырнуло огромной волной на берег и выкинуло на мелкие камни, а Урысона — головой на скалы.

Академик П.С. Александров впоследствии писал: «Погиб в самом начале своего творческого пути одаренный советский ученый, от которого советская наука и наша Родина были вправе ждать многих столь же глубоких и важных открытий, как те, которые он успел сделать за свою короткую, 26-летнюю жизнь» [4].

Сохранились дневники Павла Урысона. Их опубликовала его сестра Лина Нейман [4]. Там Павел описывает посещение города Коврова с 26.10.1920 по 2.11.1920. Пока неизвестно, кто рекомендовал Урысону обратится за продовольственной помощью к народному комиссару по образованию Ковровского района. Возможно это был сам Д.Ф. Егоров или однокурсники Барсукова. Это могли быть В.В. Степанов (на групповой фотографии стоит рядом с Барсуковым) и И.И. Привалов (на групповой фотографии сидит в первом ряду вторым с левого края). Степанов и Привалов спасались в то время от голода в городе Иваново.

Урысон П.С. 03.02.1898 г. – 17.08.1924 г., Александров П.С. 25.4.1896 г. – 16.11.1982 г.

Фотография из Интернета.

Прибыв в Ковров, Урысон остановился у А.Н. Барсукова, который в 1913 году окончил Императорский Московский университет вместе со Степановым В.В., Приваловым И.И. и хорошо их знал. О Барсукове Урысон пишет «Старый большевик, математик... Энтузиаст, организатор». О своей жизни в Коврове пишет «Живу, как у Христа за пазухой», «Ем до животоболия», «читаю лекции до потери голоса», «Читал три часа подряд — университетский курс», «А местные люди очень уговаривают меня переселиться сюда совсем на очень выгодных условиях. Ну, это дудки. Я со скуки помер бы, пожалуй», «Младшая сестра Барсукова — девушка лет 17-ти, довольно хорошенькая; эта совсем меня не дичится и даже охотно вступила бы в беседу». Урысон читает: Уэльса, Джерома, Ибсена, Эдгара По, Достоевского, Дюма.

За недельное чтение лекций в Коврове Урысон «получил 36 000 рублей и все продукты». Уложил продукты «мешок в 1 пуд и чемодан в 1,5». Урысон с товарищами Тихонравовым и Акимом Герасимовичем должен был ехать в Москву 3 ноября почтовым поездом в штабном вагоне, причем разрешение на штабной дает комендант станции Новки. В Коврове в штабной вагон не впустили, и Павел «влез на последнюю ступеньку». Проехав 2 версты (мост) Павел роняет мешок на железнодорожное полотно: «у меня было состояние полнейшего отчаяния». Из Новок Павел с Акимом Герасимовичем на товарном поезде возвращаются на поиски мешка. «Гляжу с замиранием сердца. Вот он! Лежит сиротливо с обнажённым видом... Спрыгнул (поезд еле-еле плёлся). Схватил мешок и ходу! — В 10 был дома» (в Коврове, то есть опять у Барсукова).

4 ноября в 14.00 Урысон был дома в Москве и вечером на заработанные в Коврове деньги пошёл на камерный концерт, от которого «имел превеликое удовольствие».

Почему Урысон вернулся за потерянным мешком в 1 пуд = 40 фунтов = 16,3804964 кг.?

На 03.08.1920 в Москве проживало 1023000 человек гражданского населения, а продовольственных карточек роздано 1105000 — на 8% больше [5, С. 54]. С 01.01.1920 по 01.09.1920 было распределено 10028207 пудов продуктов питания. Это около 10 пудов на каждого жителя Москвы [5, С. 116]. Недостаток продуктов был вызван мировой и гражданской войнами. Цены росли подобно снежной лавине. На 01.09.1919 цена фунта ржаного хлеба стоила 1.42 руб. и 55 руб. на вольном рынке. а на 02.07.1920 – 480 руб. Цена ржаного хлеба на 2 июля с 1919 года по 1920 год увеличилась на 1163 % [5, С. 317-322].

За чтение лекций с 26.10.1920 по 2.11.1920 Урысон получил 36 000 рублей. Большое ли это было вознаграждение?

31 августа 1918 г. утверждается Исполкомом минимум заработной платы от 9 до 14 руб. в день [5, С. 28]. Согласно месячным учетным картам Московской секции статистики труда, средняя заработная плата фабричного-заводского рабочего в июне 1920 года в Москве за 1 час при повременной оплате труда составляла 15.9 руб., при премиальной составляла 31.1 руб. и при сдельной оплате труда составляла 58.6 руб.

Кому и где читал «университетский курс» математики Павел Урысон? «Вечером, перед лекцией, беседовал немного с Женей Г. Она москвичка, только 2,5 года оттуда; кончила гимназию в прошлом году, а теперь преподаёт математику в пятом классе. Говорят, что хороший математик». Кроме учителей математики были ли другие слушатели?

Осенью 1918 года в Москве возникли первые подготовительные курсы для будущих студентов-рабочих. Затем было принято решение, что готовить себе слушателей нужно в самом университете. «Так возникла идея рабочих факультетов... Что же лежит в основе построения всех Рабочих Факультетов? Их учебные планы и программы построены таким образом, что дают слушателям совершенно достаточный запас знаний для успешной работы в одном из факультетов университета или специального учебн. заведения» [5, С. 500]. Научным Сектором было принято 5 ноября 1920 года постановление, где говорилось о том, что на Рабочие Факультеты принимаются только лица физического труда, исключения допускались лишь по отношению к членам Р.К.П.

Учитывая вышенаписанное, можно предположить, что А.Н. Барсуков строил систему образования в городе Ковров, аналогичную Московской, и недельный курс лекций Урысон читал или слушателям курсов в Народном Университете, или рабфаковцам.

Осенью 1922 г. по решению губкома партии А.Н. Барсуков переезжает в г. Владимир, где организует рабфак. Работает его заведующим и преподавателем математики.

Литература

1. Андронов И.К. Полвека развития школьного математического образования в СССР. – М.: Просвещение, 1967. - 180 с.

2. Аннин Г.П. Владимирская партийная организация и советы в годы гражданской войны и иностранной военной интервенции. – Владимир: Владимирское кн. изд., 1963. - 84 с.

3. Барабанова Г.О., Барабанова Л.П. Встреча математика А.Н. Барсукова с В.И. Лениным в конце 1917 года // Рождественский сборник. - Вып. XXIII; под общ. ред. О.А. Моняковой. – Ковров-Шуя: «ПолиЦентр». - 2019. - С. 29-38.

4. Нейман Л.С. Радость открытия (математик Павел Урысон). – М.: Детская литература, 1972. - 176 с.

URL: Нейман Л. Радость открытия. Математик Павел Урысон. 1972. (pyrkov-professor.ru)

5. Красная Москва 1917-1920 гг.: Сб. статей под общ. ред. Л. Каменева, Н. Ангарского. - М.: Издание Московского Совета Р., К. и Кр. Д., 1920. - 744 с.

Барабанова Любовь Петровна,
доцент кафедры ПМ и САПР,
Ковровская государственная технологическая
академия имени В.А. Дегтярева, г. Ковров,
кандидат физ.-мат. наук., доцент.

E-mail: lpbarabanova@yandex.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2023 год (включая стоимость пересылки) – 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2023 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.
Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!
Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >