

ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического
образования и просвещения

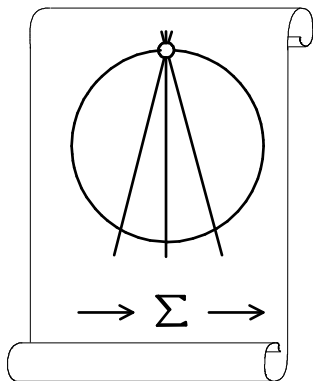
Год двадцать седьмой

№ 1 (105)

январь - март 2023 г.

Москва

*Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования*



Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.

Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)

Дубовицкий А.В.

Канель-Белов А.Я.

Комаров С.И.

Константинов Н.Н.

Костенко И.П.

Саблин А.И.

№ 1 (105), 2023 г.

© “Математическое образование”, составление, 2023 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2023 г.

“Математическое образование”, периодическое издание.

Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.

Подписано к печати 17.04.2023 г.

Стиль верстки разработан С.А. Кулеповым.

Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.

Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.

Объем 4,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (105), январь – март 2023 г.

Содержание

Учащимся и учителям средней школы

- Д. Е. Волович.* Обобщение свойства функции количества делителей 2
- С. Г. Бершадский, С. И. Кублановский.* Замечательные треугольники. Окончание 7
- Г. Н. Попов.* Об интересном свойстве треугольника Паскаля 22

Студентам и преподавателям математических специальностей

- Б. А. Воронин, С. С. Воронина.* Параметризация задачи для непрерывной двумерной случайной величины с использованием Moodle 26
- А. О. Ремизов.* Los Caprichos Diferenciales. Серия сюжетов о дифференциальных уравнениях 32
- М. Ю. Шевченко.* Обобщение тождества Деснано–Якоби 48

Из истории математики

- А. Н. Ковалев.* Дроби для $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, квазипифагоровы тройки и появление царского локтя, фута и дюйма в Египте времен Древнего царства. Часть II 54

Образовательные инициативы

- Авторский коллектив.* Материалы Летней математической школы “Алые Паруса”, июнь 2022 г., 6 класс 67

Информация

- От редакции.* Скончался Виктор Борисович Дроздов 75

Обобщение свойства функции количества делителей

Д. Е. Волович

В статье изучается вопрос, при каких условиях количество представлений натурального числа N в виде произведения m натуральных чисел не делится на m или взаимно просто с m . Изучен случай простого m , приведены некоторые обобщения на случай составного m . Работа является самостоятельным исследованием автора под научным руководством Штерна Александра Савельевича.

1. Вступление

Хорошо известно, что количество делителей числа N нечетно тогда и только тогда, когда N является полным квадратом. Но количество делителей числа N — это количество представлений N в виде произведения двух чисел (с учётом порядка сомножителей). Это позволяет выдвинуть гипотезу.

Гипотеза 1. *Количество представлений числа N в виде произведения m чисел не делится на m тогда и только тогда, когда $N = t^m$, $t \in \mathbb{N}$.*

К сожалению, гипотеза неверна. Так, число 9 можно десятью способами представить в виде произведения четырех чисел, но число 9 не является точной четвертой степенью, хотя количество представлений на 4 не делится. В обратную сторону утверждение тоже неверно: позже мы получим формулу для количества таких представлений, из которой сразу будет следовать, что число $64 = 2^6$ можно представить в виде произведения шести чисел $462 = 6 \cdot 77$ способами.

Тем не менее, эта гипотеза в некоторых случаях работает: позже мы ее докажем для простых m (см. теорему 1). Но в случае простых чисел фразы «не делится на m » и «взаимно просто с m » обозначают одно и то же, поэтому имеет смысл попробовать изменить формулировку гипотезы.

Гипотеза 2. *Количество представлений числа N в виде произведения m чисел взаимно просто с m тогда и только тогда, когда $N = t^m$, $t \in \mathbb{N}$.*

Числа 64 и 6 остаются контрпримерами: количество представлений числа 64 в виде произведения 6 чисел делится на 6, но при этом не взаимно просто с шестью. Однако необходимость оказывается верной (см. теорему 2). Кроме того, достаточность верна для всех степеней простых чисел (см. теорему 2.1).

2. Вычисление количества представлений

Количество способов представить число N как произведение чисел упорядоченного набора из m чисел будем обозначать через π_N^m . Несложно понять, что если $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$, то π_N^m — это количество способов разложить по m пронумерованным коробкам α_1 одинаковых шаров, на которых написано p_1 , а также α_2 одинаковых шаров, на которых написано p_2 , и так далее, α_n одинаковых шаров, на которых написано p_n . Через метод шаров и перегородок мы понимаем, что количество способов разложить α_i одинаковых шаров по m пронумерованным ящикам — это

$$C_{\alpha_i+m-1}^{\alpha_i} = \frac{m(m+1) \cdot \dots \cdot (m+\alpha_i-1)}{\alpha_i!} = \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{m+\alpha_i-1}{\alpha_i}.$$

Эти числа нужно перемножить по всем i , чтобы получить π_N^m . Если t_i — это количество чисел среди α_j , не меньших i , то дробь $\frac{m+i-1}{i}$ встретится в произведении ровно t_i раз. Отсюда формула:

$$\pi_N^m = \left(\frac{m}{1}\right)^{t_1} \left(\frac{m+1}{2}\right)^{t_2} \cdot \dots \cdot \left(\frac{m+i-1}{i}\right)^{t_i} \cdot \dots \cdot \left(\frac{m+k-1}{k}\right)^{t_k}.$$

Число k в этой формуле можно взять любым, не меньшим $\max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$; если k будет строго больше этой величины, произведение просто будет домножено на несколько единиц, т.к. все t_j , где $j > \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$, — нулевые.

Используя эту формулу, мы можем посчитать число π_{64}^6 , на которое ссылались ранее: для него $t_1 = t_2 = \dots = t_6 = 1, t_7 = t_8 = \dots = 0$, что мы подставляем в формулу выше и получаем

$$\pi_{64}^6 = \frac{6}{1} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{11}{6} = 6 \cdot 7 \cdot 11 = 462.$$

Если раскрыть все скобки в полученной нами формуле для π_N^m , в числителе и знаменателе будет порой стоять много одинаковых чисел. Поэтому иногда нам будет удобнее частично сократить числитель и знаменатель, в результате чего мы придем к такой формуле:

$$\pi_N^m = \frac{m^{t_1-t_m} (m+1)^{t_2-t_{m+1}} \cdot \dots \cdot (m+k-1)^{t_k-t_{m+k-1}}}{1^{t_1} \cdot 2^{t_2} \cdot \dots \cdot (m-1)^{t_{m-1}}}.$$

π_N^2 — это количество представлений числа N в виде произведения двух чисел, то есть количество делителей числа N . Подставим $m = 2$ в формулу:

$$\pi_N^2 = 2^{t_1-t_2} \cdot 3^{t_2-t_3} \cdot \dots \cdot (k+1)^{t_k-t_{k+1}}.$$

Число $t_i - t_{i+1}$ — это количество чисел α_j , равных i . Поэтому в традиционной записи количества делителей числа $d(N) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\dots)(\alpha_n + 1)$ скобка, равная $i + 1$, встречается ровно $t_i - t_{i+1}$ раз, следовательно, в этих двух произведениях перемножаются одни и те же числа. Более того, из нашей формулы видно, что π_N^2 нечетно тогда и только тогда, когда все четные числа возводятся в нулевые степени, то есть когда $t_1 = t_2, t_3 = t_4$, и так далее, что и означает, что число N — полный квадрат. Далее мы будем обобщать это утверждение для произвольного m .

3. Обобщение для простых m

Теорема 1. *Количество представлений числа N в виде произведения p чисел (p — простое) не делится на p тогда и только тогда, когда $N = z^p, z \in \mathbb{N}$, а в таком случае это количество представлений сравнимо с единицей по модулю p .*

Эта теорема является прямым обобщением рассмотренного ранее утверждения про количество делителей числа. Мы приведем два ее доказательства: комбинаторное и через прямой подсчет.

Комбинаторное доказательство. Все представления числа N в виде произведения p чисел объединим в группы по p элементов: в каждой группе находятся представления, которые можно получить циклическим сдвигом друг из друга. Если в представлении не все множители равны, циклическим сдвигом из этого представления можно получить p различных представлений. В самом деле, если после сдвига на n получилось то же представление, то первое число в представлении такое же, как под номером $n + 1$, такое же, как под номером $2n + 1$, и так далее, а поскольку p — простое, эти индексы по модулю p охватывают все остатки, то есть все числа в представлении одинаковые. В наши группы, таким образом, нельзя включить только такое представление, где все p множителей равны. Оно есть тогда и только тогда, когда N — это степень p некоторого числа, а в таком случае в группы по p мы не включили только одно представление.

Доказательство прямым подсчетом. В формуле

$$\pi_N^p = \left(\frac{p}{1}\right)^{t_1} \left(\frac{p+1}{2}\right)^{t_2} \left(\frac{p+2}{3}\right)^{t_3} \cdots \left(\frac{p+k-1}{k}\right)^{t_k}$$

разделим все множители на группы по p множителей, идущих по порядку. Мы можем это сделать, так как мы можем выбрать любое k , начиная с некоторого. Любая такая группа в этом случае выглядит так:

$$\left(\frac{np}{(n-1)p+1}\right)^{t_{(n-1)p+1}} \left(\frac{np+1}{(n-1)p+2}\right)^{t_{(n-1)p+2}} \cdots \left(\frac{np+p-1}{np}\right)^{t_{np}}.$$

Из всех множителей в числителе и знаменателе на p делится только np . При этом $t_{np} \leq t_{(n-1)p+1}$, поэтому при раскрытии скобок в каждой группе p окажется в неотрицательной степени. А во всем произведении p будет в нулевой степени тогда и только тогда, когда $t_{np} = t_{(n-1)p+1} \forall n$. В таком случае, если $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$, то количество α_i , не меньших np , и количество α_j , не меньших $(n-1)p+1$, одинаково, значит, нет никаких α_i между $(n-1)p$ и kp (не включая концы), значит, все α_i делятся на p , то есть N — степень p некоторого натурального числа. Но в таком случае в каждой группе все степени скобок равны, поэтому после сокращения np и в числителе, и в знаменателе по модулю p стоит произведение всех остатков от деления на p , кроме 0, и вся дробь возведена в некоторую степень. Разумеется, после выполнения деления останется единица. Мы доказали необходимость, достаточность доказывается аналогично — просто применяем те же шаги в обратном порядке.

4. Обобщение для составных m . Часть 1

Пусть p — некоторое простое число. Тогда

$$\text{ord}_p(\pi_N^m) = \text{ord}_p \left(\left(\frac{m}{1}\right)^{t_1} \left(\frac{m+1}{2}\right)^{t_2} \cdots \left(\frac{m+n-1}{n}\right)^{t_n} \right).$$

$$\text{ord}_p(\pi_N^m) = \sum_{i=1}^n ((\text{ord}_p(m+i-1) - \text{ord}_p(i)) t_i).$$

(Напомним, что для данных простого p и натурального n число $\text{ord}_p(n)$ — это такое максимальное целое неотрицательное число α , что $n \vdots p^\alpha$.)

Первая из этих формул получена из второй формулы параграфа 2 применением ord_p к обеим частям равенства. Вторая из формул получена из первой использованием тривиального свойства: ord_p от произведения натуральных чисел равен сумме ord_p от них.

Как мы замечали ранее, если $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$, то π_N^m — это количество способов разложить по m пронумерованным коробкам α_1 одинаковых шаров, на которых написано p_1 , а также α_2 одинаковых шаров, на которых написано p_2 , и так далее, α_n одинаковых шаров, на которых написано p_n . Отсюда понятно, что для взаимно простых N_1 и N_2 верно $\pi_{N_1 N_2}^m = \pi_{N_1}^m \pi_{N_2}^m$ — мультипликативность. Поэтому нам достаточно уметь вычислять $\text{ord}_p \left(\pi_{\left(\frac{m}{p_i^{\alpha_i}}\right)}^m \right)$:

$$\text{ord}_p \left(\pi_{\left(\frac{m}{p_i^{\alpha_i}}\right)}^m \right) = \sum_{j=1}^{\alpha_i} (\text{ord}_p(m+j-1) - \text{ord}_p(j)).$$

$$\text{ord}_p \left(\pi_{\left(\frac{m}{p_i^{\alpha_i}}\right)}^m \right) = \sum_{j=1}^{\alpha_i} \text{ord}_p(m+j-1) - \sum_{j=1}^{\alpha_i} \text{ord}_p(j).$$

Первая из этих двух формул получается подстановкой $p_i^{\alpha_i}$ вместо N в предыдущую формулу: числа t_j для $N = p_i^{\alpha_i}$ равны 1 при $1 \leq j \leq \alpha_i$ и нулю для больших j . Вторая из формул очевидно следует из первой.

Если $\alpha_i \geq m$, то в этих суммах есть одинаковые слагаемые, от которых мы можем избавиться, получив формулу ниже:

$$\text{ord}_p \left(\pi_{(p_i^{\alpha_i})}^m \right) = \sum_{j=\alpha_i+2-m}^{\alpha_i} \text{ord}_p(m+j-1) - \sum_{j=1}^{m-1} \text{ord}_p(j)$$

Легко понять, что формула выше работает не только для случая $\alpha_i \geq m$: если $\alpha_i = m - 1$, то суммы не изменились, а если $\alpha_i < m - 1$, мы добавили в каждую из сумм несколько одинаковых слагаемых. Перепишем первую сумму в несколько другом виде:

$$\text{ord}_p \left(\pi_{(p_i^{\alpha_i})}^m \right) = \sum_{j=1}^{m-1} \text{ord}_p(\alpha_i + j) - \sum_{j=1}^{m-1} \text{ord}_p(j)$$

Формулу выше мы будем использовать для вычисления $\text{ord}_p \left(\pi_{(p_i^{\alpha_i})}^m \right)$. Но для наших целей ее необходимо изменить так:

$$\text{ord}_p \left(\pi_{(p_i^{\alpha_i})}^m \right) = \sum_{j=0}^{m-1} \text{ord}_p(\alpha_i + j) - \sum_{j=1}^m \text{ord}_p(j) + \text{ord}_p m - \text{ord}_p \alpha_i$$

В этом выражении можно доказать, что разность сумм неотрицательна:

$$\sum_{j=1}^{m-1} \text{ord}_p(\alpha_i + j) - \sum_{j=0}^m \text{ord}_p(j) = \text{ord}_p \left(\frac{\alpha_i(\alpha_i + 1)(\dots)(\alpha_i + m - 1)}{m!} \right) = \text{ord}_p (C_{\alpha_i+m-1}^m) \geq 0$$

Подставляя это неравенство, получаем, что

$$\text{ord}_p \left(\pi_{(p_i^{\alpha_i})}^m \right) \geq \text{ord}_p m - \text{ord}_p \alpha_i$$

То есть, если $\pi_{(p_i^{\alpha_i})}^m$ не делится на простое число p , то $0 \geq \text{ord}_p m - \text{ord}_p \alpha_i$, то есть $\text{ord}_p \alpha_i \geq \text{ord}_p m$. Из этого следует два важных утверждения.

Во-первых, если π_N^m взаимно просто с m , где $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, то π_N^m не делится на любой простой делитель m (обозначим один из них через p), тогда $\pi_{(p_i^{\alpha_i})}^m$ не делится на p для любого i из-за мультипликативности, поэтому $\text{ord}_p \alpha_i \geq \text{ord}_p m \forall i$. Поскольку это выполнено для любого простого делителя m , можно сделать вывод, что $\alpha_i \dot{=} m$. Получаем следующую теорему:

Теорема 2. Если количество представлений числа N в виде произведения m чисел взаимно просто с m , то $N = z^m$, $z \in \mathbb{N}$.

Во-вторых, если π_N^m не делится на m , то существует простой делитель p числа m такой, что π_N^m не делится на p^α , где $\alpha = \text{ord}_p m$. Значит, все $\pi_{(p_i^{\alpha_i})}^m$ не делятся на p^α из мультипликативности. Тогда $\alpha > \text{ord}_p \pi_{(p_i^{\alpha_i})}^m \geq \text{ord}_p m - \text{ord}_p \alpha_i$, поэтому $\text{ord}_p \alpha_i > \text{ord}_p m - \alpha = 0$. Значит, все α_i делятся на p , поэтому число N является точной p -ой степенью. Получили теорему:

Теорема 3. Если количество представлений числа N в виде произведения m чисел не делится на m , то $N = z^p$, $z \in \mathbb{N}$, $m \dot{=} p$ (p — простое).

5. Обобщение для составных m . Часть 2

Теоремы 2 и 3 утверждают, что некоторое условие выполнено, если π_N^m не делится на m или даже взаимно просто с m . Следует подойти к проблеме и с другой стороны: например, доказать, что π_N^m не делится на m , если выполнено некоторое условие.

Пусть дано некоторое m , $N = q^{np^\alpha}$, $\alpha \geq \log_p m$ (p и q — простые, $n \in N$). Тогда по выведенной нами ранее формуле

$$\text{ord}_p(\pi_N^m) = \sum_{j=1}^{m-1} \text{ord}_p(np^\alpha + j) - \sum_{j=1}^{m-1} \text{ord}_p(j).$$

Поскольку $\alpha \geq \log_p m$, то $p^\alpha \geq m$, поэтому $\text{ord}_p(np^\alpha) \geq \text{ord}_p(p^\alpha) > \text{ord}_p(j)$ при j от 1 до $m-1$. Тогда $\text{ord}_p(np^\alpha + j) = \text{ord}_p(j)$, откуда $\text{ord}_p(\pi_N^m) = 0$, поэтому π_N^m не делится на p . Отсюда вытекает теорема 4:

Теорема 4. Если $N = a_1^{p^{\alpha_1}} a_2^{p^{\alpha_2}} \cdot \dots \cdot a_k^{p^{\alpha_n}}$, $\alpha_i \geq \log_p^m$ (p простое), то π_N^m взаимно просто с p .

Числа a_1, a_2, \dots, a_k в теореме 4 не обязательно простые: утверждение теоремы 4 следует из рассуждений выше и для составных a_1, a_2, \dots, a_k . Если мы выберем число p делителем числа m , то получим достаточное условие того, что π_N^m не делится на m .

Пусть $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$, $\beta_i \geq \log_{p_i} m$, $N = q^{p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}}$. Тогда по теореме 4 $\text{НОД}(\pi_N^m; m) = 1$. Получаем теорему:

Теорема 4.1. $\forall m \exists N : \text{НОД}(\pi_N^m; m) = 1$.

Используя теорему 4, мы можем улучшить результат теоремы 2 для чисел, являющихся степенью простого:

Теорема 2.1. Если число m — степень простого, то $\text{НОД}(\pi_N^m; m) = 1 \Leftrightarrow N = z^m$.

В самом деле, необходимость выполнена по теореме 2, а достаточность следует из теоремы 4.

Волович Дмитрий Евгеньевич,
учащийся 11-го класса
“Фундаментальная математика”
ГБОУ Школа № 57 г. Москвы.

E-mail: d.e.volovich@gmail.com

Замечательные треугольники. Окончание

С. Г. Бершадский, С. И. Кублановский

Рассматриваются четыре вида треугольников, в которых основание является средним (арифметическим, геометрическим, гармоническим, квадратическим) боковых сторон. Описаны некоторые новые свойства указанных треугольников. Окончание. Начало в №3 (103), июль — сентябрь 2022 г., стр. 2 — 14.

Идея соединить геометрию треугольника с важным классическим понятием среднего должна давать новое качество, то есть должны появиться треугольники с особыми уникальными свойствами. Попытки такого соединения были в прошлом и привели, например, к понятию золотого сечения (архитектура, искусство). Во второй части статьи три параграфа:

- построение замечательных треугольников с помощью циркуля и линейки;
- описание прямоугольных замечательных треугольников;
- описание целочисленных замечательных треугольников (в работе они названы диофантовыми).

В этой части рассматриваемые треугольники для краткости будут именоваться “срединными”.

§3. Построение замечательных треугольников

Следует отметить, что не для любой пары боковых сторон существует срединный треугольник каждого вида. Это следует из того, что тройка чисел — пара положительных чисел и их среднее значение — удовлетворяет неравенству треугольника только при некоторых ограничениях. Эти ограничения можно сформулировать в следующем предложении.

Предложение 5. *Построение срединного треугольника по данным боковым сторонам a и b ($b \leq a$) возможно тогда и только тогда, когда отношение $\frac{a}{b}$ удовлетворяет неравенству:*

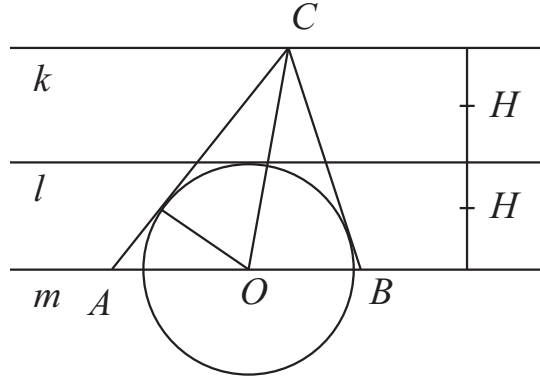
- 1) $\frac{a}{b} < 3$ для среднеарифметического треугольника;
- 2) $\frac{a}{b} < 1 + \sqrt{2}$ для среднегармонического треугольника;
- 3) $\frac{a}{b} < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ для среднегеометрического треугольника;
- 4) $\frac{a}{b} < 2 + \sqrt{3}$ для среднеквадратического треугольника.

Доказательство. Это несложное упражнение для читателя.

Замечание 7. Следует отметить, что если даны два отрезка a и b , то отрезок, равный их среднему значению каждого вида, может быть построен с помощью циркуля и линейки. Этот факт хорошо известен. С помощью циркуля и линейки можно проверить, выполняется ли для трех отрезков неравенство треугольника.

Ниже, опираясь на теоремы 1—4, будет показано, что построение срединного треугольника по основанию и углу при вершине возможно тогда и только тогда, когда этот угол не превосходит 60° .

I. Построение среднеарифметического треугольника с данным углом γ при вершине C .



Анализ.

Пусть $\triangle ABC$ — искомый. Проведём три параллельные прямые: $m = AB$, l — прямая средней линии, k проходит через C . По теореме 1(1) существует окружность с центром на основании, касающаяся средней линии и боковых сторон или их продолжений. Соединим центр окружности O и точку касания со стороной AC (считаем это касание внутренним). Т.к. CO — биссектриса, то $\angle ACO = \gamma : 2$, длина биссектрисы равна $l_c = \frac{r}{\sin(\gamma/2)}$. Радиус $r = H$ — расстояние между ближайшими параллельными прямыми. Заметим, что существует ещё один подходящий треугольник с той же окружностью, который симметричен данному относительно перпендикуляра, восстановленного к m в точке O . Таким образом, среднеарифметический треугольник однозначно определяется углом γ и высотой H (действительно, соответствующие им окружности можно совместить так, чтобы совпали построенные для них параллельные прямые), и, следовательно, любые такие треугольники с одним углом γ подобны с коэффициентом подобия, равным отношению их высот.

Построение.

1) Строим три параллельные прямые на равном (произвольно выбранном) расстоянии H друг от друга.

2) Строим окружность, касающуюся прямой l , с центром в произвольной точке $O \in m$.

3) Строим прямоугольный треугольник по катету, равному радиусу окружности и противолежащему острому углу $\frac{\gamma}{2}$. Пусть его гипотенуза равна d и другой катет равен e .

4) На прямой k делаем засечку $OC = d$. Таких точек две, и они располагаются симметрично относительно перпендикуляра к m , восстановленного в точке O . Выбираем одну из них (выбор другой точки даст симметричный треугольник).

5) На окружности делаем засечки $CA_1 = CB_1 = e$.

6) Отмечаем точки пересечения A и B прямых CA_1 , CB_1 с прямой m соответственно.

В итоге получился среднеарифметический треугольник $\triangle ABC$ с данным острым углом γ по теореме 1.

Заметим, что задача разрешима тогда и только тогда, когда $2H \leq CO$. Это равносильно следующему:

$$2H \leq \frac{H}{\sin \frac{\gamma}{2}} \Leftrightarrow \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{2} \leq 30^\circ \Leftrightarrow \gamma \leq 60^\circ.$$

Если основание s среднеарифметического треугольника известно, то строим треугольник по стороне s и двум прилежащим к ней углам равным $\angle B$ и $\angle A$, построенным выше.

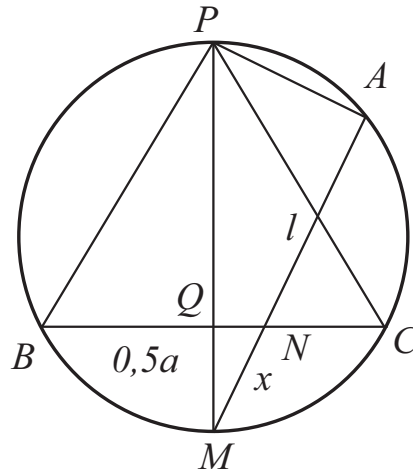
Следствие. Все среднеарифметические треугольники с данным углом при вершине подобны между собой.

Это следует из проведённого анализа.

II. Построение среднегармонического треугольника с данным углом α при вершине A .

1) Берем произвольный отрезок a в качестве основания и строим прямоугольный треугольник по гипотенузе a и острому углу $\frac{\alpha}{2}$. Пусть его прилежащий катет l .

2) Строим прямоугольный $\triangle BPQ$ по катету $\frac{a}{2}$ и противолежащему острому углу $\frac{\alpha}{2}$.



На луче BQ строим точку C так, чтобы $CQ = BQ = \frac{a}{2}$ и окружность, описанную вокруг треугольника $\triangle BPC$.

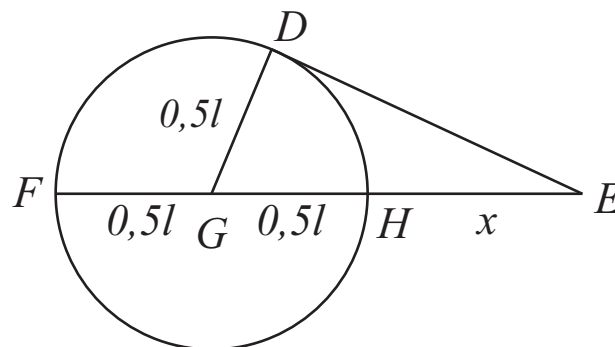
3) Предположим, что искомый треугольник ABC уже построен, и вершина A лежит от основания BC с той же стороны, что и точка P . Т.к. $\angle BPC = \angle BAC$, то A лежит на построенной окружности.

Тогда по теореме 2: $AN = a \cos \frac{\alpha}{2} = l$. Пусть $MN = x$, имеем: $\triangle QMN \sim \triangle PAM$, откуда $\frac{PM}{x} = \frac{l+x}{QM}$, $x(l+x) = PM \cdot QM$. (*)

Заметим, что если уравнение (*) имеет решение, то оно имеет единственное положительное решение. Построим отрезок x , являющийся его решением:

4) Строим отрезок p такой, что $p^2 = PM \cdot QM$.

5) Строим прямоугольный треугольник $\triangle DEG$ по двум катетам $0,5l$ и p .



и окружность с центром G и радиусом $0,5l$.

6) По теореме о касательной и секущей имеет место $EH \cdot (l + EH) = p^2$. Откуда, полагая $x = EH$, имеем $x(l+x) = PM \cdot QM$.

7) На окружности первого рисунка делаем засечку $MA = FE$.

8) Треугольник $\triangle ABC$ — среднегармонический с основанием $BC = a$ и острым углом $\angle A = \alpha$ по теореме 2.

9) Заметим, что при перемещении точки A от C к P отрезок NA меняет свою длину от 0 до PQ . Поэтому задача имеет решение тогда и только тогда, когда $l \leq PQ$.

Последнее неравенство равносильно:

$$a \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \leq 0,5a \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} \leq 30^\circ \Leftrightarrow \alpha \leq 60^\circ.$$

Следствие. Все среднегармонические треугольники с данным углом при вершине подобны между собой.

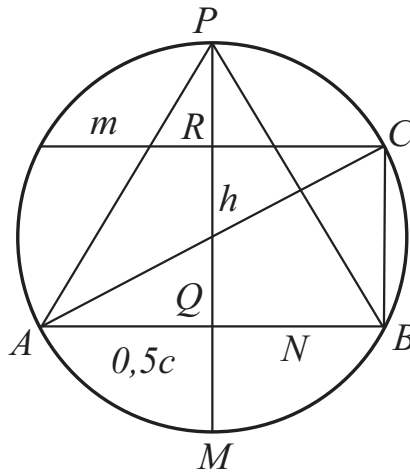
Действительно, при изменении размеров основания в k раз все фигуры на рисунках 1 и 2 изменяют размеры в k раз, то есть остаются подобными рассмотренным выше. Поэтому все среднегармонические треугольники с данным углом при вершине являются подобными.

III. Построение среднегеометрического треугольника с данным углом γ при вершине C .

По теореме 3 нам нужно строить треугольник, в котором высота $h_c = c \cdot \sin \gamma$.

1) Берем произвольный отрезок c в качестве основания и строим прямоугольный треугольник по гипотенузе c и острому углу γ . Пусть его противолежащий катет h .

2) Строим прямоугольный $\triangle BPQ$ по катету $BQ = \frac{c}{2}$ и противолежащему острому углу $\frac{\gamma}{2}$.



Строим точку A так, чтобы $AQ = BQ = \frac{c}{2}$, и описанную окружность вокруг треугольника $\triangle ABP$.

3) На луче QP откладываем отрезок $QR = h$ и через точку R строим перпендикуляр $m \perp PQ$. Пусть C — точка пересечения m и окружности.

4) Треугольник $\triangle ABC$ среднегеометрический с основанием $AB = c$ и острым углом $\angle C = \gamma$ по теореме 3.

5) Нетрудно видеть, что задача разрешима тогда и только тогда, когда $h \leq QP$.

Последнее неравенство равносильно:

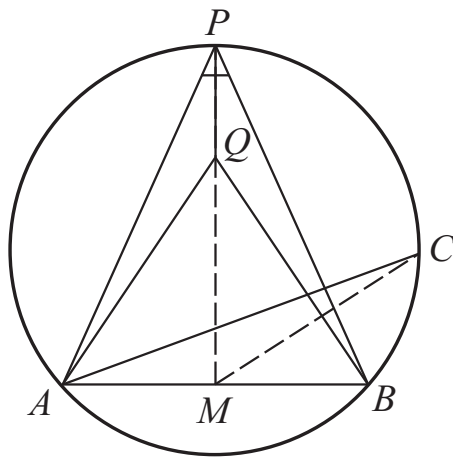
$$c \cdot \sin \gamma \leq 0,5 \cdot c \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \gamma \leq 60^\circ.$$

Следствие. Все среднегеометрические треугольники с данным углом при вершине подобны между собой.

Действительно, при изменении размеров основания в k раз все фигуры на рисунке изменяют размеры в k раз, то есть остаются подобными рассмотренным выше. Поэтому все среднегеометрические треугольники с данным углом при вершине являются подобными.

IV. Построение среднеквадратического треугольника с данным углом γ при вершине C .

Согласно теореме 4(1) мы должны построить треугольник с данным углом γ при вершине C , соответствующие сторона и медиана которого удовлетворяют равенству: $m_c = \frac{\sqrt{3}c}{2}$. Берем произвольный отрезок c в качестве основания и строим прямоугольный треугольник $\triangle AMP$ по катету $AM = \frac{c}{2}$ и острому углу $\angle APM = \frac{\gamma}{2}$. На луче AM строим точку B так, что $MB = AM$. Дальнейшие построения приведены на рисунке.



Здесь $AQ = BQ = AB = c$. Также $MQ = MC$.

Нетрудно видеть, что задача разрешима тогда и только тогда, когда $MC \leq MP$

Последнее неравенство равносильно:

$$\frac{\sqrt{3}c}{2} \leq 0,5c \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{2} \leq 30^\circ \Leftrightarrow \gamma \leq 60^\circ.$$

Следствие. Все среднеквадратические треугольники с данным углом при вершине подобны между собой.

Действительно, при изменении размеров основания в k раз все фигуры на рисунке изменяют размеры в k раз, то есть остаются подобными рассмотренным выше. Поэтому все среднеквадратические треугольники с данным углом при вершине являются подобными между собой.

§4. Прямоугольные замечательные треугольники

I. Среднегеометрические прямоугольные треугольники

Исторически в древнегреческой математике **золотым сечением** именовалось деление отрезка точкой на две части так, что *большая часть относится к меньшей, как весь отрезок к большей*. В случае золотого сечения доказывается, что отношение большего отрезка к меньшему равно $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ и называют “золотым числом” (см: //ru.wikipedia.org/wiki/Золотое_сечение).

Определение. *Треугольником Кеплера* называется прямоугольный треугольник, стороны которого образуют геометрическую прогрессию.

Историческая справка: **Иогáнн Кéплер** (нем. Johannes Kepler; 27 декабря 1571 года, Вайльдер-Штадт – 15 ноября 1630 года, Регенсбург) – немецкий математик, астроном, механик, оптик, первооткрыватель законов движения планет Солнечной системы. В жизни этого удивительного человека было и такое: в 1615 году его мать была обвинена в колдовстве и связи с дьяволом (читатель,

конечно, помнит, что в 1600 году на костре инквизиции был сожжен Джордано Бруно). Кеплер встал на защиту своей матери: он выступил её адвокатом на процессе, который длился без малого 6 лет, и добился снятия с нее обвинения. Подробнее можно узнать здесь: https://www.ng.ru/ng_religii/2019-08-06/16_469_kepler.html

Теорема 5. Все среднегеометрические прямоугольные треугольники подобны и отношение гипотенузы к меньшему катету равно: $\frac{c}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотому сечению.

Доказательство. Пусть $a < b < c$ и $b = \sqrt{ac}$. Тогда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ b^2 = c^2 - a^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + ca - c^2 = 0.$$

Положим $x = \frac{c}{a}$. Поделив уравнение на a^2 , получаем: $x^2 - x - 1 = 0$. Единственный положительный корень: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Нетрудно видеть, что $a^2 + ca - c^2 = 0$ равносильно $\frac{c}{a} = \frac{c+a}{c}$. Так как $x = \frac{c}{a}$, то получили требуемое.

Именно Кеплер установил связь одноимённых треугольников с золотым сечением.

Ему (золотому сечению) посвящена обширная литература. И у нас оно появилось не случайно: прямоугольные среднегеометрические треугольники суть в точности треугольники Кеплера.

Построение таких треугольников циркулем и линейкой хорошо известно и является несложным упражнением для читателя.

II. Среднеарифметические прямоугольные треугольники

Теорема 6. Среднеарифметические прямоугольные треугольники подобны между собой и их стороны пропорциональны числам 3, 4, 5.

Таким образом, среднеарифметические прямоугольные треугольники — это в точности египетские треугольники.

Доказательство. Пусть $a < b < c$ — стороны среднеарифметического прямоугольного треугольника.

Тогда выполнены соотношения:

$$\begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 \\ c^2 = a^2 + 4b^2 - 4ab \end{cases} \Rightarrow 3b^2 = 4ab.$$

Отсюда получаем: $3b = 4a$. Следовательно: $3c = 5a$.

Построение таких треугольников циркулем и линейкой не составляет труда.

III. Среднеквадратические прямоугольные треугольники

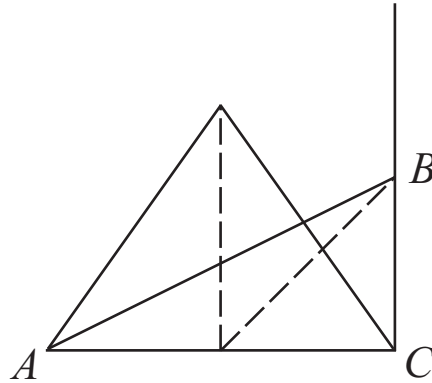
Теорема 7. Все среднеквадратические прямоугольные треугольники подобны, и отношение большего катета к гипотенузе у них равно: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Доказательство. Пусть $a < b < c$ и $b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} \\ b^2 = c^2 - a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b^2 = a^2 + c^2 \\ b^2 = c^2 - a^2 \end{cases}.$$

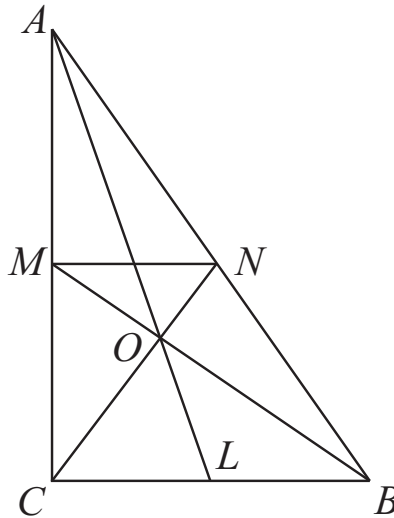
Сложив уравнения, получим: $3b^2 = 2c^2$, откуда: $\sqrt{3}b = \sqrt{2}c$. Что и требовалось.

Построение таких треугольников не составляют труда (например, см. рисунок ниже и теорему 4).



Заметим, что прямоугольные среднеквадратические треугольники допускают следующую характеристику.

Предложение 6. *Прямоугольный треугольник тогда и только тогда является среднеквадратическим, когда медиана, проведенная к одному из катетов, перпендикулярна медиане, проведенной к гипотенузе.*



Доказательство. Пусть $\triangle ACB$ — прямоугольный среднеквадратический и $b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$. Тогда получаем $a < b < c$ и $2b^2 = a^2 + c^2 = 2a^2 + b^2$, откуда $b^2 = 2a^2$ и $c^2 = 3a^2$.

Пусть M и N — середины катета b и гипотенузы c .

По теореме Пифагора $m_b^2 = BM^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{2} = \frac{3}{4} \cdot b^2$.

Воспользуемся известным свойством медиан любого треугольника: в точке пересечения они делятся в отношении 2:1, считая от вершины. Также воспользуемся известным свойством медианы прямоугольного треугольника: она равна половине гипотенузы. Получаем:

$$\begin{aligned} CO &= \frac{1}{3} \cdot c \Rightarrow CO^2 = \frac{1}{9} \cdot c^2 = \frac{1}{3} \cdot a^2, & BO &= \frac{2}{3} \cdot m_b \Rightarrow BO^2 = \frac{4}{9} \cdot m_b^2 = \frac{1}{3} \cdot b^2 = \\ &= \frac{2}{3} \cdot a^2 \Rightarrow CO^2 + BO^2 = a^2 = CB^2 \Rightarrow \triangle COB \text{ — прямоугольный и } \angle O \text{ — прямой.} \end{aligned}$$

Это то, что требовалось.

Обратно. Пусть $\angle O$ — прямой. Тогда по теореме Пифагора

$$a^2 = CO^2 + BO^2 = \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot c^2 + \frac{4}{9} \left(\frac{b^2}{4} + a^2\right),$$

откуда $5a^2 = c^2 + b^2$. Откуда $5a^2 = a^2 + b^2 + b^2$, то есть $b^2 = 2a^2$ и $c^2 = 3a^2$.

Тогда $b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} \Leftrightarrow 2a^2 = \frac{a^2 + 3a^2}{2}$ — верно.

IV. Среднегармонические прямоугольные треугольники

Теорема 8. Все среднегармонические прямоугольные треугольники подобны.

Доказательство. Пусть в прямоугольном треугольнике с гипотенузой c имеет место $a = \frac{2bc}{b+c}$.

Тогда по теореме Пифагора имеем $\left(\frac{2bc}{b+c}\right)^2 + b^2 = c^2$

Нетрудно видеть, что $b < a < c$. Пусть $x = \frac{c}{b}$. Тогда получим:

$$\left(\frac{2bc}{b+c}\right)^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{1+x}\right)^2 + 1 = x^2 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow t^4 + 6t^3 + 8t^2 - 4 = 0,$$

где $t = x - 1 > 0$.

Функция $f(t) = t^4 + 6t^3 + 8t^2 - 4$ на интервале $(0, \infty)$ монотонно возрастает. Так как $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, то уравнение $f(t) = 0$ имеет единственное положительное решение, принадлежащее интервалу $(0; 1)$.

Пусть r — единственный положительный корень данного многочлена на указанном интервале. Тогда $x = 1 + r$ — единственный положительный корень уравнения $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x - 1 = 0$ на интервале $(1; +\infty)$. Полученное означает, что во всех среднегармонических прямоугольных треугольниках отношение гипотенузы к меньшему катету равно числу $1 + r$.

Можно доказать, что построить такой треугольник с помощью циркуля и линейки невозможно, однако доказательство этого факта выходит за рамки этой статьи — оно опирается на теорию Галуа.

Историческая справка: **Эварист Галуа́** (фр. Évariste Galois /evarist galwa/; 25 октября 1811, Бурла-Рен, О-де-Сен, Франция — 31 мая 1832, Париж, Франция) — французский математик, основатель современной высшей алгебры. Радикальный революционер-республиканец, был застрелен на дуэли в возрасте двадцати лет. (Википедия, статья “Эварист Галуа”).

Вывод: таким образом, среднегармонический прямоугольный треугольник существует и единственный с точностью до подобия, но его нельзя построить циркулем и линейкой.

Однако, некоторым утешением может служить тот факт, что его можно легко построить с большой точностью. Это треугольник со сторонами $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$. Легко проверяется, что $\sqrt{3}$ приближенно равен среднему гармоническому чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$:

$$\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \approx 1,7326212; \quad \sqrt{3} \approx 1,7320508.$$

Относительная погрешность

$$\frac{0,0005704}{1,7320508} \approx 0,00033 = 0,033\%$$

§5. Диофантовы замечательные треугольники

С древнейших времен по наши дни треугольники с целыми сторонами привлекают внимание исследователей. Такие треугольники встречались при строительстве египетских пирамид и у математиков древнего Вавилона (около 2 тысяч лет до нашей эры).

Особое значение изучению таких треугольников придавал древнегреческий математик Пифагор (VI век до нашей эры) и его ученики. Прямоугольные треугольники с целыми сторонами до сих пор называют пифагоровыми (см. //ru.wikipedia.org/wiki/Пифагорова_тройка).

Треугольники с целыми сторонами мы здесь, будем называть *диофантовыми*, как это и принято. Название это дано в честь древнегреческого математика Диофанта (III век нашей эры), автора знаменитого учебника алгебры, в котором впервые рассматриваются целочисленные решения уравнений. Круг подобных задач до сих пор называют диофантовыми.

Целочисленный треугольник, у которого **НОД всех сторон равен 1**, называют *примитивным*. Целочисленный треугольник, у которого **площадь является целым числом**, называют *героновым треугольником*. Героновы треугольники названы в честь греческого математика и механика Герона (вторая половина I века н.э.), автора известной по школьному курсу формулы площади треугольника $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ по трем сторонам, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр (**формула Герона**). Одно из первых общих описаний героновых треугольников получено индийским математиком Брахмагуптой (VII век н.э.). (См. wikipedia.org/wiki/Геронов_треугольник)

Нетрудно видеть, что любой диофантов замечательный треугольник может быть получен из соответствующего примитивного замечательного треугольника путем умножение его сторон на некоторое натуральное число. Для описания героновых замечательных треугольников здесь мы будем использовать следующие предложения.

Предложение 7. *Если среди целых чисел a, b, c количество нечётных чисел нечётно, то треугольник со сторонами a, b, c не геронов.*

Доказательство. Предположим, что среди целых чисел a, b, c количество нечетных чисел нечетно. Тогда полупериметр $p = \frac{a+b+c}{2}$ — это дробь с нечетным числителем. Аналогично числа $p-a, p-b, p-c$ представляются несократимыми дробями со знаменателем 2. Следовательно, по формуле Герона, площадь $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ этого треугольника представляется дробью со знаменателем 4, а числитель — либо иррациональное число, либо нечетное число. Вывод: S не целое число.

Предложение 8. *Если треугольники подобны и диофантовы, и один из них геронов, то и второй геронов.*

Доказательство. Пусть a, b, c — стороны геронова треугольника. Тогда синусы и косинусы его углов рациональны (теорема косинусов и выражение площади через стороны и угол). Пусть α — один из острых углов, и $\sin \alpha = \frac{p}{r_1}, \cos \alpha = \frac{q}{r_2}$, и r_1 и r_2 наименьшие из возможных. Тогда это несократимые дроби. Нетрудно показать, что $r_1 = r_2 = r$. Это вытекает из основного тригонометрического тождества: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Тогда p, q, r — примитивная пифагорова тройка (см. ru.wikipedia.org/wiki/Пифагорова_тройка). Следовательно, r — нечётно, а из p, q — ровно одно чётное.

Пусть $\text{НОД}(a, b, c) = d$. Тогда треугольник T' со сторонами a', b', c' такой, что $a = da', b = db', c = dc'$, является примитивным, то есть $\text{НОД}(a', b', c') = 1$. Очевидно, что в треугольнике T' соответствующие углы такие же, как и у T , поскольку треугольники T и T' подобны.

Из теоремы косинусов для T' следует: $(a')^2 = (b')^2 + (c')^2 - 2b'c' \cos \alpha$: Откуда заключаем, что $2b'c' \cos \alpha$ — целое число. Это означает, что $2b'c'$ делится на r . Поскольку r нечетное, то заключаем, что $b'c'$ делится на r . Вывод: $2b'c' \cos \alpha$ — четное число, то есть $(b')^2 + (c')^2 - (a')^2$ — четное число. Заметим, что все числа a', b', c' четными быть не могут, поскольку в этом случае $\text{НОД}(a', b', c') \neq 1$. Тогда заключаем, что в тройке a', b', c' нечетных чисел ровно 2. По формуле Герона площадь S' треугольника T' может быть найдена в виде: $S' = \sqrt{p'(p'-a')(p'-b')(p'-c')}$, где p' — полупериметр T' . Так как число нечётных сторон 2, то p' — целое число, значит, $p'(p'-a')(p'-b')(p'-c')$ — целое.

Т.к. стороны исходного треугольника равны $a = da', b = db', c = dc'$, то его площадь $S = d^2 S'$. Поэтому S' — рациональное число и равно корню из целого числа.

Отсюда следует, что S' целое. Если треугольник T'' подобен треугольнику T , то он может быть получен из примитивного треугольника T' путем умножения на некоторое целое число k . Тогда его площадь $S'' = k^2 S'$ — целое число, то есть треугольник T'' — геронов. Предложение доказано.

Замечание 8.

1) Доказательство утверждения эквивалентного предложению 8, приведенное в работе *Carlson, John R. (1970), "Determination of Heronian Triangles", Fibonacci Quarterly, 8: 499–506* (см. лемму 1) неполное. Оно опирается на недоказанный в этой работе факт, что периметр целочисленного треугольника с рациональной площадью является четным числом. Достаточно простое доказательство этого факта было найдено позднее независимо рядом авторов (см. https://en.wikipedia.org/wiki/Heronian_triangle).

2) Мы даем здесь другое доказательство этого факта, поскольку из него немедленно следует ряд полезных дополнительных свойств героновых треугольников. Например, утверждение о том, что целочисленный треугольник является героновым, тогда и только тогда, когда любая высота, падающая на сторону, делит треугольник на два треугольника подобных пифагоровым. Напомним, что пифагоровым называется прямоугольный треугольник с целыми сторонами. Это, конечно, не означает, что треугольник делится высотой на два героновых треугольника.

Следствие. *Любой геронов замечательный треугольник может быть получен из соответствующего примитивного геронова замечательного треугольника путем умножения его сторон на некоторое натуральное число.*

I. Диофантовы среднеарифметические треугольники

Теорема 9. *1) Стороны a, b, c (где c — основание) не равностороннего среднеарифметического диофантова примитивного треугольника могут быть заданы уравнениями:*

$$\begin{cases} a = m - n \\ b = m + n \\ c = m \end{cases}, \quad (*)$$

где m, n произвольные взаимно простые натуральные числа такие, что $m > 2n$.

2) Среднеарифметический примитивный диофантов треугольник, заданный системой (*) будет героновым тогда и только тогда, когда $m = 2k$, где

(i.1) $k = \frac{3u^2 + v^2}{2}$ и $n = \frac{3u^2 - v^2}{2}$, u, v взаимно простые нечетные числа и $3u^2 > v^2$, и v не кратно 3, или

(i.2) $k = \frac{u^2 + 3v^2}{2}$ и $n = \frac{u^2 - 3v^2}{2}$, u, v взаимно простые нечетные числа $u^2 > 3v^2$ и u не кратно 3, или

(ii.1) $k = 3u^2 + v^2$ и $n = 3u^2 - v^2$, u, v взаимно простые числа, одно из которых четно, и $3u^2 > v^2$, где v не кратно 3, или

(ii.2) $k = u^2 + 3v^2$ и $n = u^2 - 3v^2$, u, v взаимно простые числа, одно из которых четно, и $u^2 > 3v^2$, где u не кратно 3.

Примеры героновых среднеарифметических примитивных треугольников:

(i.1) $u = 1; v = 1; k = 2; m = 4; n = 1; a = 3; b = 5; c = 4; S = 6.$

(i.2) $u = 5; v = 1; k = 14; m = 28; n = 11; a = 17; b = 39; c = 28; S = 210.$

(ii.1) $u = 2; v = 1; k = 13; m = 26; n = 11; a = 15; b = 37; c = 26; S = 156.$

(ii.2) $u = 2; v = 1; k = 7; m = 14; n = 1; a = 13; b = 15; c = 14; S = 84.$

Доказательство. Свойство (1) вытекает из определения и не представляет труда.

(2) Пусть треугольник со сторонами a, b, c (где c — основание) является среднеарифметическим примитивным диофантовым героновым треугольником.

Тогда по пункту (1) настоящей теоремы его стороны могут быть заданы системой (*).

Если данный треугольник геронов, то число

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{3m}{2} \cdot \frac{m+2n}{2} \cdot \frac{m-2n}{2} \cdot \frac{m}{2}}$$

является целым.

Тогда $S = \frac{m}{4} \cdot \sqrt{3(m+2n)(m-2n)}$ — целое число. Откуда заключаем, что m делится на 2, то есть $m = 2k$ для некоторого натурального числа k . Действительно, при четном m число под корнем делится на 4, и произведение корня на m делится на 4. При нечетном m число S представлено дробью с нечетным числителем и знаменателем 4. Откуда заключаем, что m — четное число, то есть $m = 2k$ для некоторого натурального числа k . Тогда $\sqrt{3(k+n)(k-n)}$ — целое число... Поскольку m и n — взаимно простые числа, то n — нечетное число и k, n взаимно простые.

Далее рассмотрим отдельные возможные случаи.

(i) Числа $k+n$ и $k-n$ взаимно простые.

В этом случае возможны следующие варианты:

(i.1) $k+n = 3u^2$ и $k-n = v^2$, где u, v — взаимно простые и $3u^2 > v^2$, и v не кратно 3. Откуда $k = \frac{3u^2+v^2}{2}$ и $n = \frac{3u^2-v^2}{2}$, и u, v — нечетные числа.

(i.2) $k+n = u^2$ и $k-n = 3v^2$, где u, v — взаимно простые числа и $u^2 > 3v^2$, и u не кратно 3. Откуда $k = \frac{u^2+3v^2}{2}$ и $n = \frac{u^2-3v^2}{2}$, u, v — нечетные числа.

(ii) Числа $k+n$ и $k-n$ не взаимно простые. Пусть $d = \text{НОД}(k+n, k-n)$. Тогда $2k$ и $2n$ делятся на d . Откуда следует, что $d = 2$.

В этом случае возможны следующие варианты:

(ii.1) $k+n = 3 \cdot 2u^2$ и $k-n = 2v^2$, где u, v — взаимно простые числа, и $3u^2 > v^2$, где v не кратно 3. Откуда $k = \frac{3u^2+v^2}{2}$ и $n = \frac{3u^2-v^2}{2}$, и одно из чисел u и v четно.

(ii.2) $k+n = 2u^2$ и $k-n = 3 \cdot 2v^2$, где u, v — взаимно простые числа и $u^2 > 3v^2$, и u не кратно 3. Откуда $k = \frac{u^2+3v^2}{2}$ и $n = \frac{u^2-3v^2}{2}$, и одно из чисел u и v четно.

II. Диофантовы среднегармонические треугольники

Теорема 10.

1) Стороны a, b, c (где c — основание) среднегармонического диофантова примитивного треугольника могут быть заданы одной из двух систем уравнений

$$\begin{cases} a = mn + m^2 \\ b = mn + n^2 \\ c = 2mn \end{cases}, \quad (*)$$

где m, n произвольные взаимно простые натуральные числа, одно из которых четное, и $\frac{m}{n} < 1 + \sqrt{2}$, и $\frac{n}{m} < 1 + \sqrt{2}$, или

$$\begin{cases} a = \frac{mn+m^2}{2} \\ b = \frac{mn+n^2}{2} \\ c = mn \end{cases}, \quad (**)$$

где m, n произвольные взаимно простые нечетные числа и $\frac{m}{n} < 1 + \sqrt{2}$, и $\frac{n}{m} < 1 + \sqrt{2}$.

2) Среднегармонических диофантовых героновых треугольников не существует.

Примеры среднегармонических примитивных диофантовых треугольников.

(*) $m = 2, n = 1, a = 6, b = 3, c = 4$. (**) $m = 7, n = 5, a = 42, b = 30, c = 35$

Доказательство. (1) Пусть треугольник со сторонами a, b, c (где c — основание) является среднегармоническим примитивным диофантовым треугольником. Тогда $c = \frac{2ab}{a+b}$. Последнее равенство эквивалентно $(2a-c)(2b-c) = c^2$. Тогда

$$\begin{cases} 2a - c = m^2 d \\ 2b - c = n^2 d \\ c = mnd \end{cases}$$

для некоторых целых m, n, d , причем m, n взаимно простые. Откуда

$$\begin{cases} a = \frac{(m^2 + mn)d}{2} \\ b = \frac{(n^2 + mn)d}{2} \\ c = mnd \end{cases} .$$

Поскольку по условию $\text{НОД}(a, b, c) = 1$ заключаем, что либо $d = 2$, либо $d = 1$.

Если $d = 2$, то

$$\begin{cases} a = mn + m^2 \\ b = mn + n^2 \\ c = 2mn \end{cases} .$$

Поскольку по условию $\text{НОД}(a, b, c) = 1$, то в этом случае одно из чисел m, n должно быть четным.

Если $d = 1$, то

$$\begin{cases} a = \frac{(m^2 + mn)}{2} \\ b = \frac{(n^2 + mn)}{2} \\ c = mn \end{cases} .$$

В этом случае заключаем, что m, n — нечетные числа. В противном случае одно из чисел a, b было бы не целым или $\text{НОД}(a, b, c) \neq 1$

Условие $\frac{m}{n} < 1 + \sqrt{2}$ и $\frac{n}{m} < 1 + \sqrt{2}$ следует из предложения 5, пункт 2.

(2) Пусть треугольник со сторонами a, b, c (где c — основание) является среднегармоническим примитивным диофантовым треугольником.

Согласно пункту (1) настоящей теоремы выполняется условие (*) или (**).

Пусть имеет место (*), тогда среди чисел a, b, c только одно нечетное.

Пусть имеет место (**), тогда среди чисел a, b, c только одно нечетное, если $m+n$ делится на 4, или все три нечетные, если $m+n$ не делится на 4.

Заключаем, что по предложению 7 треугольник со сторонами a, b, c не геронов. Отсюда, по следствию из предложения 8, получаем требуемое.

III. Диофантовы среднегеометрические треугольники

Теорема 11

1) Стороны a, b, c (где c — основание) среднегеометрического диофантова примитивного треугольника могут быть заданы уравнениями

$$\begin{cases} a = m^2 \\ b = n^2 \\ c = mn \end{cases} , \quad (*)$$

где m, n — произвольные взаимно простые натуральные числа, причем такие, что $\frac{m^2}{n^2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

и $\frac{n^2}{m^2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

2) Среднегеометрических диофантовых героновых треугольников не существует.

Примеры среднегеометрических примитивных диофантовых треугольников:

$$m = 4; n = 5; a = 16; b = 25; c = 20. \quad m = 6; n = 5; a = 36; b = 25; c = 30.$$

Доказательство. (1) Пусть треугольник со сторонами a, b, c (где c — основание) является среднегеометрическим примитивным диофантовым треугольником. Тогда $c^2 = ab$.

Имеем:

$$\begin{cases} a = m^2 d \\ b = n^2 d \\ c = mnd \end{cases}$$

для некоторых целых m, n, d , причем m, n — взаимно простые.

Поскольку по условию $\text{НОД}(a, b, c) = 1$ заключаем, что $d = 1$, то есть

$$\begin{cases} a = m^2 \\ b = n^2 \\ c = mn \end{cases} \quad (*)$$

Условие $\frac{m^2}{n^2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{n^2}{m^2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ следует из предложения 5 пункт 3.

(2) Пусть треугольник со сторонами a, b, c (где c — основание) является среднегеометрическим примитивным диофантовым треугольником.

Согласно пункту (1) настоящей теоремы выполняется условие (*). Тогда среди чисел a, b, c либо только одно нечетное, либо все три нечетные. Заключаем, что по предложению 7 треугольник со сторонами a, b, c не геронов. Отсюда, по следствию из предложения 8, получаем требуемое.

IV. Диофантовы среднеквадратические треугольники

Теорема 12.

1) Стороны a, b, c (где c — основание и $a > b$) не равностороннего среднеквадратического диофантова примитивного треугольника могут быть заданы одной из двух систем уравнений:

$$\begin{cases} a = m^2 + 2mn - n^2 \\ b = n^2 - 2mn - m^2 \\ c = m^2 + n^2 \end{cases}, \quad (*)$$

где m, n — произвольные взаимно простые натуральные числа, одно из которых четное, такие, что $\frac{m}{n} > 2 + \sqrt{3}$, или

$$\begin{cases} a = m^2 + 2mn - n^2 \\ b = 2mn - m^2 + n^2 \\ c = m^2 + n^2 \end{cases}, \quad (**)$$

где m, n — произвольные взаимно простые натуральные числа, одно из которых четное, такие, что $1 < \frac{m}{n} < \sqrt{3}$.

2) Среднеквадратических диофантовых героновых треугольников не существует.

Примеры среднеквадратических диофантовых треугольников:

$$(*) \quad m = 4, n = 1, a = 23, b = 7, c = 17. \quad (**) \quad m = 5, n = 4, a = 49, b = 31, c = 41.$$

Доказательство. (1) Пусть треугольник со сторонами a, b, c (где c — основание и $a > b$) является среднегеометрическим примитивным диофантовым треугольником. Тогда $2c^2 = a^2 + b^2$.

Последнее равенство равносильно $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = c^2$.

Если $a + b$ — нечетное число, то $a - b = a + b - 2b$ — нечетное число. Поэтому

$$c^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{(2k-1)^2}{4} + \frac{(2l-1)^2}{4} = k^2 - k + l^2 - l + \frac{1}{2}$$

— не целое число, что противоречит условию. Следовательно, $a + b = 2x$ — четное число, откуда $a - b = 2y$ — четное число. Поэтому получаем уравнение $x^2 + y^2 = c^2$. Таким образом, x, y, c — пифагорова тройка.

Все пифагоровы тройки описаны. Согласно этому описанию

$$\begin{cases} x = (m^2 - n^2)d \\ y = 2mnd \\ c = (m^2 + n^2)d \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 2mnd \\ y = (m^2 - n^2)d \\ c = (m^2 + n^2)d \end{cases},$$

где m, n — взаимно простые. (См. ru.wikipedia.org/wiki/Пифагорова_тройка). Откуда получаем

$$\begin{cases} a = (m^2 + 2mn - n^2)d \\ b = (m^2 - 2mn - n^2)d \\ c = (m^2 + n^2)d \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = (m^2 + 2mn - n^2)d \\ b = (2mn - m^2 + n^2)d \\ c = (m^2 + n^2)d \end{cases}.$$

Поскольку по условию $\text{НОД}(a, b, c) = 1$, то имеет место $d = 1$, то есть выполнено

$$\begin{cases} a = m^2 + 2mn - n^2 \\ b = n^2 - 2mn - n^2 \\ c = m^2 + n^2 \end{cases} \quad (*)$$

или

$$\begin{cases} a = m^2 + 2mn - n^2 \\ b = 2mn - m^2 + n^2 \\ c = m^2 + n^2 \end{cases} \quad (**)$$

Для того чтобы $\text{НОД}(a, b, c) = 1$, надо дополнительно потребовать, чтобы ровно одно из чисел m, n было четным.

В случае (*) неравенство $\frac{m}{n} > 2 + \sqrt{3}$ вытекает из неравенства треугольника $b + c > a \Leftrightarrow m^2 - 4mn + n^2 > 0$. Заметим, что из неравенства $\frac{m}{n} > 2 + \sqrt{3}$ вытекает неравенство $b > 0$. Действительно, $b > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2mn - n^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{m}{n} > 1 + \sqrt{2}$.

В случае (**) неравенство $1 < \frac{m}{n} < \sqrt{3}$ вытекает из неравенства треугольника $b + c > a \Leftrightarrow 3n^2 > m^2$ и из требования $y = (m^2 - n^2)d > 0 \Leftrightarrow m > n$.

Заметим, что в случае (**) из неравенства $\frac{m}{n} < \sqrt{3}$ вытекает неравенство $b > 0$. Действительно, в этом случае: $b > 0 \Leftrightarrow 2mn - m^2 + n^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{m}{n} < 1 + \sqrt{2}$.

(2) Пусть треугольник со сторонами a, b, c (где c — основание и $a > b$) является среднеквадратическим примитивным диофантовым треугольником.

Согласно пункту (1) настоящей теоремы выполняется одно из условий: (*) или (**).

Нетрудно видеть, что для каждого из этих условий все три числа a, b, c являются нечетными. Заключаем, что по предложению 7 треугольник со сторонами a, b, c не геронов. Отсюда, по следствию из предложения 8, получаем требуемое.

Замечание 9. Утверждение 1 теоремы 12 хорошо известно. Описание таких треугольников, связанное с примитивными пифагоровыми треугольниками имеет долгую историю, восходящую к Диофанту (см. https://wiki5.ru/wiki/Automedian_triangle).

Замечание 10. В последние десятилетия тема диофантовых треугольников и, особенно, диофантовых героновых треугольников стала очень популярной. Этой тематике посвящены, например,

уже упомянутая статья Дж.Карлсона (см. замечание 8), а также J. A. MacDougall, Heron triangles with sides in arithmetic progression и R. H. Buchholz, J. A. MacDougall. Heron Quadrilaterals with sides in Arithmetic or Geometric progression // Bull. Austral. Math. Soc... — 1999. — Т. 59.

В двух последних работах приведено описание героновых диофантовых среднеарифметических треугольников, несколько отличное от данного нами в теореме 9, а также даётся обобщение на случай треугольников с рациональными площадями и рациональными сторонами (обобщенно героновы). При этом в доказательстве используются методы, выходящие далеко за рамки среднего образования. Также в последней работе доказываемся, с привлечением теории эллиптических кривых, что обобщенно героновых среднегеометрических треугольников не существует. Все эти результаты, а также доказательство не существования среднегармонических и среднеквадратических героновых треугольников получены нами в теоремах 9, 10, 11, 12 методами, доступными учащимся 8-9 классов.

Пункт 2 теорем 10, 11, 12. легко обобщается на обобщенно героновы треугольники, а именно:

Предложение 9. *Обобщенно героновых, т.е. стороны и площади которых рациональны, среднегармонических, среднеквадратических и среднегеометрических треугольников не существует.*

Доказательство. Действительно, предположим обратное, т.е., что имеется срединный обобщенно геронов треугольник с рациональными сторонами a , b , c и рациональной площадью. Умножим все его стороны на целое число d — наименьшее общее кратное знаменателей сторон a , b , c и площади S . Получится геронов срединный треугольник того же типа, что и данный. Это противоречит пункту 2 теорем 10, 11, 12.

Заключение

Настоящая работа адресована широкому кругу читателей: школьникам старших классов, преподавателям, любителям математики. Учителя могут использовать материал этой статьи для факультативных занятий, предлагая участникам делать по очереди реферативные доклады по ее результатам. Такой подход доказал свою эффективность не только для студентов, но и для школьников. Данная работа может быть использована как источник задач для самостоятельного решения при подготовке к олимпиадам и экзаменам.

В этой работе мы рассматривали комплексно с разных точек зрения естественную задачу описания срединных треугольников. Мы понимаем, что отмеченными здесь характеристиками не исчерпываются основные свойства замечательных треугольников. Думается, что новые интересные неожиданные и красивые теоремы об этих геометрических объектах еще ждут своего открытия.

Литература

1. Зетель И. Свойства треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию. Сборник статей по элементарной и началам высшей математики // Математическое просвещение. - сер. 1. - № 5. - 1936. - С. 12-21.
2. Кушнир И. Классические средние в треугольнике // Квант. - 2013. - № 2. - С. 32-33.
3. Блинков А. Классические средние в арифметике и геометрии. - М: МЦНМО, 2012.
4. Кублановский С. Евклидова геометрия в задачах и упражнениях. - СПб, 2021 (в печати).

Кублановский Станислав Исакович,
ТПО “Северный ОЧАГ”, г. Санкт-Петербург,
руководитель проекта UMSolver
(искусственный интеллект в математике)
Универсальный Математический Решатель,
Доктор физ.-мат. наук.
E-mail: stas1107@mail.ru

Бершадский Сергей Григорьевич,
ТПО “Северный ОЧАГ”, г. Санкт-Петербург,
эксперт-консультант проекта.

E-mail: reptil21@rambler.ru

Об интересном свойстве треугольника Паскаля

Г. Н. Попов

В работе [1] автора было приведено интересное свойство треугольника Паскаля, связанное с значениями определителей матриц, составленных из элементов треугольника. В настоящей заметке приводится новое интересное свойство, связанное с перемножением бесконечных матриц из элементов как классического, так и модифицированного треугольника Паскаля.

Хочется обратить внимание на довольно интересное свойство треугольника Паскаля. Обычно в учебниках, да и в популярной литературе, он изображается в виде “равностороннего” треугольника (рис. 1),

						1							
					1		1						
				1		2		1					
			1		3		3		1				
		1		4		6		4		1			
	1		5		10		10		5		1		
1		6		15		20		15		6		1	

Рис. 1.

или “прямоугольного” (рис. 2).

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	

Рис. 2.

Как в первом, так и во втором случае размеры таблиц могут быть сколь угодно большими.

Предлагаю немного поэкспериментировать. Представим треугольник Паскаля в другом виде (рис. 3),

1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	
		1	3	6	10	15	
			1	4	10	20	
				1	5	15	
					1	6	
						1	

Рис. 3.

заменяя столбцы строками (то есть, транспонировав матрицу рисунка 2). Если перемножить между собой матрицы рисунков 2 и 3, то получим... Да, да — опять треугольник Паскаля, но уже в “прямоугольной” форме (рис. 4).

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	256	462
1	7	28	84	210	462	924

Рис. 4.

Здесь строками треугольника Паскаля являются восходящие диагонали прямоугольника. Кстати, именно такую таблицу итальянский математик Никола Тарталья опубликовал в “Общем трактате о числе и мере” (1556-1560) за столетие до выхода в свет трактата Паскаля (см. [2]).

Если на этом не останавливаться, а пойти дальше, то вот что может получиться.

Попробуем по образцу треугольника Паскаля “классического” вида (рис. 2) сделать другой, немного изменив правило формирования его элементов.

Напомним, что треугольник Паскаля получается так. Каждый (i, j) -ый его элемент $a_{i,j}$ (здесь i — номер строки, j — номер столбца) есть результат сложения двух других элементов $a_{i-1,j-1}$ и $a_{i-1,j}$. При этом учитывается, что нумерация строк и столбцов начинается с нуля и $a_{0,0} = 1$, а если каких-либо слагаемых нет в таблице (не вписываются в прямоугольный треугольник), то считают их равными нулю. Например,

$$a_{1,0} = a_{0,-1} + a_{0,0} \quad \text{или} \quad a_{1,1} = a_{0,0} + a_{0,1}$$

Здесь $a_{0,-1} = 0$ и $a_{0,1} = 0$. Таким образом, нулевой столбец и главная нисходящая диагональ состоят из единиц.

Оставим все требования, которые необходимы для получения треугольника Паскаля теми же, изменим только одно. Пусть каждый элемент будет результатом произведения суммы двух других элементов $a_{i-1,j-1}$ и $a_{i-1,j}$ на номер столбца j , то есть

$$a_{i,j} = (a_{i-1,j-1} + a_{i-1,j}) \cdot j.$$

Назовем полученный треугольник (рис. 5) X -треугольником.

1						
0	1					
0	1	2				
0	1	6	6			
0	1	14	36	24		
0	1	30	150	240	120	
0	1	62	540	1560	1800	720

Рис. 5.

Отметим, что здесь главная «нисходящая» диагональ состоит из факториалов.

Теперь выполним умножение матрицы этого треугольника на матрицу треугольника Паскаля (рис. 3). Получим следующую таблицу (рис. 6):

1	1	1	1	1	1	1
0	1	2	3	4	5	6
0	1	4	9	16	25	36
0	1	8	27	64	125	216
0	1	16	81	256	625	1296
0	1	32	243	1024	3125	7776
0	1	64	729	4096	15625	46656

Рис. 6.

Это есть не что иное, как таблица степеней: число j в степени i (нумерация i и j начинается с нуля). Обратите внимание, что ноль в нулевой степени в этом случае принимается равным единице.

Теперь можно перейти к проблеме, которая связана с доказательством великой теореме Ферма. Для определенности элементы треугольника Паскаля (рис.3) будем обозначать $b_{i,j}$, а элементы Х-треугольника (рис.5) оставим без изменения, т.е. $a_{i,j}$.

Если любое натуральное число x в степени n можно представить как многочлен

$$x^n = \sum_{k=1}^{\min(x,n)} a_{n,k} b_{k,x},$$

то равенство $x^n + y^n = z^n$ будет иметь следующий вид:

$$\sum_{k=1}^n a_{n,k} b_{k,x} + \sum_{k=1}^n a_{n,k} b_{k,y} = \sum_{k=1}^n a_{n,k} b_{k,z}.$$

Нетрудно заметить, что сомножители $a_{n,k}$ одинаковы во всех многочленах, а сами многочлены отличаются друг от друга только коэффициентами $b_{k,i}$, т.е. элементами треугольника Паскаля.

Можно допустить мысль, что Пьер Ферма знал о таком разложении любого числа в n -й степени, и сумел найти замечательное доказательство хорошо известной теоремы. Кстати, для второй степени числа множителей $a_{i,j}$ всего только два (1 и 2, это самый простой случай), для третьей степени их уже три (1, 6, 6), для четвертой – четыре (1, 14, 36, 24) и т.д.

Как мог знать Ферма о таком разложении любого числа в любой степени? Попытаемся это продемонстрировать.

Выпишем квадраты первых натуральных чисел, включая ноль.

0	1	4	9	16	25	36	49	64
---	---	---	---	----	----	----	----	----

Теперь из каждого последующего квадрата вычтем предыдущий, и результат занесем во вторую строку таблицы.

0	1	4	9	16	25	36	49	64
	1	3	5	7	9	11	13	15

Со второй строкой сделаем такую же операцию, как и с первой, и результаты занесем в третью строку.

0	1	4	9	16	25	36	49	64
	1	3	5	7	9	11	13	15
		2	2	2	2	2	2	2

Аналогичные действия сделаем для третьей, четвертой, пятой и т.д. степеней. Получим следующую картину.

Для третьей степени:

0	1	8	27	64	125	216	343	512
	1	7	19	37	61	91	127	169
		6	12	18	24	30	36	42
			6	6	6	6	6	6

Для четвертой степени:

0	1	16	81	256	625	1296	2401	4096
	1	15	65	175	369	671	1105	1695
		14	50	110	194	302	434	590
			36	60	84	108	132	156
				24	24	24	24	24

Для пятой степени:

0	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768
	1	31	211	781	2101	4651	9031	15961
		30	180	570	1320	2550	4380	6930
			36	390	750	1230	1830	2550
				240	360	480	600	720
					120	120	120	120

Для шестой степени:

0	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144
	1	63	665	3367	11529	31031	70993	144495
		62	602	2702	8162	19502	39962	73502
			540	2100	5460	11340	20460	33540
				1560	3360	5880	9120	13080
					1800	2520	3240	3960
						720	720	720

Нетрудно заметить, что первые «нисходящие» диагонали есть строки X -треугольника.

Литература

1. Попов Г.Н. О треугольнике Паскаля и его свойствах // Математическое образование, № 3(103). - 2022. - с. 47-51.
2. Успенский В.А. Треугольник Паскаля. 2-е изд., доп. - М.: «Наука», 1979. - 48 с. - (Популярные лекции по математике; вып. 43).

*Попов Геннадий Николаевич,
учитель математики МОУ Ошминская СОШ,
с. Ошминское Тоншаевского района
Нижегородской области.*

E-mail: popovgn@list.ru

Параметризация задачи для непрерывной двумерной случайной величины с использованием Moodle

Б. А. Воронин, С. С. Воронина

В работе рассмотрена параметризация задачи о двумерной непрерывной случайной величине. Взят случай, когда функция плотности распределена равномерно в области — прямоугольном треугольнике — и равна нулю во всей остальной части плоскости. Решение каждой подобной задачи отнимает довольно много времени. Возможность параметризации позволяет каждому студенту выдать отдельное задание, с учетом того, что проверка работы не займет много времени у проверяющего. Кроме того, параметризация позволяет использовать данную задачу в системе Moodle и значительно облегчить работу преподавателя.

В курсе “Теория вероятностей и математическая статистика” для технических специальностей наибольшую трудность вызывает у студентов двумерная случайная величина. В интернете можно найти сравнительно немного примеров. Обычно это или несколько довольно простых примеров, которые повторяются и копируются во многих учебниках, пособиях, курсах и сайтах или же довольно сложные примеры (с использованием полярных координат), которые практически невозможно давать студентам для контрольных работ или на экзамене. Сложности с двойными несобственными интегралами приводят к тому, что студенты, с одной стороны, даже не пытаются их решать, а с другой стороны, к мысли вообще опустить данный раздел из курса. Платформа Moodle оказала значительную поддержку профессорско-преподавательскому составу.

Moodle

Самая популярная статья про систему Moodle на сайте [1] elibrary.ru посвящена общим вопросам описания системы Moodle, компетенциям, различным подходам и т.д.

Имеется довольно большое число публикаций про Moodle посвященных различным аспектам ее использования при изучении различных предметов, курсов и специальностей. По математическим аспектам работ относительно немного. Например, в работе [2] перечисляются некоторые инструменты Moodle, которыми возможно пользоваться для преподавания математики с применением дистанционных технологий. На наш взгляд, наиболее удобны для этих целей — “множественный выбор”, “короткий ответ”, “числовой”, “простой вычисляемый”, “вычисляемый” и “множественный вычисляемый”. Для проверки графиков и рисунков также удобно использовать и такой инструмент, как “эссэ”. Тут можно прикрепить файлы или фотографии, и становится понятно, правильно ли студент понимает вопрос. Возможно, что и типы вопросов “Верно/Неверно” и “на соответствие”, также можно использовать. Но в целом в работе [2] используются довольно общие рекомендации. И хотя авторы работы [2] указывают, что проводили апробацию в рамках курса “Теория вероятностей и математическая статистика”, никакой специфики, например, связанной с применением факториала (отсутствует в Moodle) или интегралов, не упоминается.

В работе [3], несмотря на название журнала, сделан общий обзор работы системы Moodle и сравнение ее с другой подобной системой Blackboard, в которой отсутствуют некоторые опции, такие как глоссарий, журнал студента и некоторые другие. В работе [4] основной акцент делается на методике

организации процесса обучения, оценивания и т.п. Работа [5], несмотря на присутствие в названии слов “Дифференциальные уравнения”, опубликована в серии “Гуманитарные науки”, однако в разделе “Педагогика”. В этой статье даются оглавление курса и общие рекомендации по ведению занятий и самостоятельной работы студентов. В работе [6] даются конкретные примеры использования Moodle. Обсуждается возможность вариативности задач, вопросы оформления и другие конкретные аспекты. В работе [7], кроме общих вопросов, посвященных дистанционным образовательным технологиям (ДОТ), обсуждаются еще и конкретные примеры и методики для курса теории вероятностей.

При дистанционной работе (например, в среде Moodle) проблема усугубляется тем, что если дать один или даже несколько вариантов (2-4), то начинается параллельный перенос ответов, а не знаний, между студентами. Выход — каждому давать персональный вариант. Но проверка решения каждой задачи занимает много времени и концентрации также у преподавателя. Параметризация задачи и Moodle могут сильно облегчить труд преподавателей. В Томске есть даже целая группа математиков под руководством доцента Томиленко Владимира Алексеевича, которые успешно занимаются переводом курса высшей математики в Moodle, см., например, [8]. Посещение семинаров В.А. Томиленко вдохновило авторов статьи и внушило оптимизм по поводу возможности параметризовать самую сложную задачу курса и назначить каждому студенту его персональную задачу.

Даже для достаточно сложных задач, но с одномерной случайной величиной, сделать параметризацию задачи бывает относительно просто — см., например, [9]. При соблюдении ряда условий задачи на формулу полной вероятности, в случае, когда в каждой урне число белых и черных шаров одинаково (2-4 урны), при переключении одного шара из первой урны во вторую, (в случае 3-4 урн процесс продолжается), преподаватель может каждому студенту дать отдельную задачу, а ответ проверять в одно действие. Это происходит из-за сокращения множителей в числителе и знаменателе, когда задача решается в общем виде. В случае дискретной двумерной случайной величины задача также будет хорошо параметризоваться. Например, задача о нахождении дня рождения в студенческой учебной группе. В этом случае одна случайная величина у нас — день рождения студента, а другая — месяц рождения студента. Достаточно подробно все описано в [10].

Поэтапный разбор и параметризацию задачи о непрерывной двумерной случайной величине авторам найти не удалось. Но, например, в методических указаниях [11] в примерах для решения, все ненулевые области задания двумерной функции плотности являются квадратами $a \leq x \leq b$ и $c \leq y \leq d$, что, несомненно, значительно упрощает решение и вычисление двойных определенных интегралов. Намного интереснее и сложнее получается задача, когда область, где функции плотности распределения не равна нулю, является треугольником, пусть и прямоугольным.

Здесь необходимо отметить, что в данной работе мы используем обозначения, которые были приняты в работе [12]. Так, в частности, функция плотности вероятности у нас обозначается f , а не ρ , как в других источниках, например [13].

Параметризация задачи в общем виде

Задана двумерная непрерывная случайная величина, которая определена функцией плотности распределения $f(x, y) = C$ (где C — постоянная) в треугольнике OAB : $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$ и $f(x, y) = 0$ вне треугольника. Аналитическое задание плотности $f(x, y)$ для треугольной области дается формулой (1):

$$f(x, y) = \begin{cases} C, & \text{если } (x, y) \in \triangle OAB \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin \triangle OAB \end{cases} \quad (1)$$

Нужно найти: C , $f_1(x)$, $f_2(y)$, M_x , M_y , D_x , D_y , $cov(x, y)$, r_{xy} , и $M(Y|X = \frac{a}{2})$, т.е. постоянную C , одномерные функции плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$, математические ожидания M_x , M_y , ковариационный момент и коэффициент корреляции, а также математическое ожидание от Y при условии, что $X = a/2$. Естественно, в нашем случае $F(x, y) = F_x(x) \cdot F_y(y)$.

Для удобства предположим, что у нас $a > 0$ и $b > 0$. Тогда наш треугольник лежит в первом квадранте. Читателю предоставляется проверить, что итоговые формулы будут справедливы также при других знаках параметров, т.е. когда a и b имеют разные знаки или оба меньше нуля.

Фактически, способ решения задачи уже заложен в вопросе, но появляется предварительный вопрос о нахождении уравнения прямой, проходящей через 2 точки A и B .

Для нахождения уравнения прямой можно использовать разные способы. Например, можно воспользоваться уравнением (2) прямой, проходящей через точки с координатами (x_0, y_0) и (x_1, y_1) .

Найдем уравнение прямой AB , которое будет необходимо для взятия определенных интегралов, из соотношения

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \quad (2)$$

Для точки $A(x_0, y_0) = (a, 0)$, а для $B(x_1, y_1) = (0, b)$; тогда, подставляя значения координат точек A и B , получаем

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}. \quad (3)$$

$$y = \frac{(x - a)b}{-a} = -\frac{b}{a}x + b = \frac{b(a - x)}{a}. \quad (4)$$

И еще выразим x через y

$$x = \frac{a(b - y)}{b} = -\frac{a}{b}y + a. \quad (5)$$

Другой способ: например, можно найти уравнение прямой, решив систему из 2-х линейных уравнений с 2-мя неизвестными $y_1 = k \cdot x_1 + d$ и $y_2 = k \cdot x_2 + d$, откуда найти значения неизвестных k и d . Конечно, существуют и другие способы, например, через тангенс угла наклона, на которых мы не будем останавливаться.

1) Из условия нормировки

$$\int \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1 \quad (6)$$

найдем константу C :

$$\int \int_{-\infty}^{+\infty} C dx dy = C \int_0^a dx \int_0^{\frac{b(a-x)}{a}} dy = C \int_0^a \frac{b(a-x)}{a} dx = C \cdot \frac{b}{a} \int_0^a (a-x) dx = C \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2} = C \frac{ab}{2} = 1,$$

следовательно,

$$C \cdot \frac{ba}{2} = 1 \Rightarrow C = \frac{2}{ba}.$$

Так как C у нас является постоянной, можно также просто вычислить объем прямоугольной призмы с основанием, равным треугольнику: $V = 1 = S \times C$. Площадь прямоугольного треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{a \cdot b}{2}$, где a и b — катеты. Отсюда $\frac{ab}{2} \cdot C = 1 \Rightarrow C = \frac{2}{ab}$.

2)

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{b(a-x)}{a}} \frac{2}{ab} dy = \frac{2}{ab} \int_0^{\frac{b(a-x)}{a}} 1 dy = \frac{2}{ab} \cdot y \Big|_0^{\frac{b(a-x)}{a}} = \frac{2}{ab} \cdot \frac{b(a-x)}{a} = \frac{2(a-x)}{a^2}. \quad (7)$$

Чтобы быть уверенным, что все правильно, можно воспользоваться свойством (6) для одномерного случая:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx = \frac{2(a-x)}{a^2} = \frac{2}{a^2} \left(a^2 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^a \right) = \frac{2}{a^2} \left(\frac{2a^2 - a^2}{2} \right) = \frac{2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{2} = 1. \quad (8)$$

Получается все верно, далее ищем $f_2(y)$:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^{\frac{a(b-y)}{d}} \frac{2}{ab} dx = \frac{2}{ab} \int_0^{\frac{a(b-y)}{d}} 1 dx = \frac{2}{ab} \cdot \frac{a(b-y)}{b} = \frac{2(b-y)}{b^2}. \quad (9)$$

Проверка:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) dy = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) dy = \int_0^b \frac{2(b-y)}{b^2} dy = \frac{2}{b^2} \left(by - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^b = 1, \quad (10)$$

верно.

Приступаем к вычислению одномерных математических ожиданий. Они могут быть определены по формулам:

3)

$$Mx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_1(x) dx = \int_0^a x \cdot \frac{2(a-x)}{a^2} dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a (ax - x^2) dx = \frac{2}{a^2} \left(\frac{a^3}{6} \right) = \frac{a}{3}. \quad (11)$$

4)

$$My = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy = \int_0^b y \cdot \frac{2(b-y)}{b^2} dy = \frac{2}{a^2} \int_0^b (yb - y^2) dy = \frac{2}{b^2} \left(\frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3} \right) = \frac{2}{b^2} \cdot \frac{b^3}{6} = \frac{b}{3}. \quad (12)$$

Для проверки можно сверить положение центра масс треугольника, который также вычисляется по формулам (11) и (12), например, в [14], стр. 273, можно узнать, что центр масс — точка пересечения медиан, или “центр тяжести треугольника лежит на любой его медиане на расстоянии двух третей ее длины от вершины”, в нашем случае можно смотреть от вершины прямого угла.

5)

$$\begin{aligned} Dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x) dx - Mx^2 = \int_0^a x^2 \cdot \frac{2(a-x)}{a^2} dx - \frac{a^2}{9} = \frac{2}{a^2} \int_0^a (ax^2 - x^3) dx - \frac{a^2}{9} = \\ &= \frac{2}{b^2} \left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^a - \frac{a^2}{9} = \frac{2}{a^2} \left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} \right) - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{18}. \end{aligned} \quad (13)$$

6)

$$\begin{aligned} Dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_2(y) dy - My^2 = \int_0^b y^2 \cdot \frac{2(b-y)}{b^2} dy - \left(\frac{b}{3} \right)^2 = \frac{2}{b^2} \cdot \int_0^b (y^2 b - y^3) dy - \frac{b^2}{9} = \\ &= \frac{2}{b^2} \cdot \left(b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^b - \frac{y^4}{4} \Big|_0^b \right) - \frac{b^2}{9} = \frac{2}{b^2} \cdot \left(\frac{b^4}{3} - \frac{b^4}{4} \right) - \frac{b^2}{9} = \frac{2}{b^2} \cdot \frac{b^4}{12} - \frac{b^2}{9} = \frac{b^2}{6} - \frac{b^2}{9} = \frac{3b^2 - 2b^2}{18} = \frac{b^2}{18}. \end{aligned} \quad (14)$$

Видно, что дисперсия больше там, где больше сторона треугольника, причем отношение дисперсий равно квадрату отношения сторон.

7)

$$\begin{aligned} cov(x, y) &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f(x, y) dx dy - Mx \cdot My = \int_0^a \int_0^{\frac{b(a-x)}{a}} xy \cdot \frac{2}{ab} dx dy - \frac{a}{3} \cdot \frac{b}{3} = \\ &= \frac{2}{ab} \int_0^a x' \cdot dx' \int_0^{b(a-x)/a} y dy = \frac{2}{ab} \int_0^a x dx \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{b(a-x)/a} = -\frac{ab}{36}. \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что при $a > 0$ и $b > 0$ получается отрицательный коэффициент ковариации, а значит, и корреляции, аналогично, если $a < 0$ и $b < 0$. В случае же если $a < 0$ и $b > 0$ или $a > 0$ и $b < 0$, коэффициенты будут положительными.

8)

$r_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{Dx \cdot Dy}}$, считаем коэффициент корреляции, в общем виде:

$$r_{xy} = \frac{\frac{-ab}{36}}{\sqrt{\frac{a^2}{18} \cdot \frac{b^2}{18}}} = \frac{-ab}{36} \cdot \frac{18}{ab} = -\frac{1}{2}.$$

Так как $-1 \leq r_{xy} \leq 1$, проверка по абсолютной величине пройдена, и r_{xy} не зависит от значений a или b . В данном случае можно отдельно отметить, что если a и b больше нуля, то $r_{xy} = -0,5$, если a или b меньше нуля, $r_{xy} = 0,5$ и если a и b меньше нуля, то r_{xy} снова равен $-0,5$.

9)

$$M\left(Y|X = \frac{a}{2}\right); \quad M(Y|X) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(Y|X)dy.$$

Имеем

$$f(Y|X) = \frac{(x, y)}{f_1(x)} \Rightarrow f(Y|X) = \frac{\frac{2}{ba}}{\frac{2(a-x)}{a^2}} = \frac{2}{ba} \cdot \frac{a^2}{2(a-x)} = \frac{a}{b(a-x)};$$

$$M(Y|X) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(Y|X)dy = \int_0^a y \cdot \frac{a}{b(a-x)} dy = \frac{a}{b(a-x)} \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\frac{b(a-x)}{a}} = \frac{a}{b(a-x)} \cdot b^2;$$

$$M\left(Y|X = \frac{a}{2}\right) = \frac{b\left(a - \frac{a}{2}\right)}{2a} = \frac{b \cdot \frac{a}{2}}{2a} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{1}{2a} = \frac{b}{4}.$$

Выводы

Параметры могут быть заданы в широком диапазоне, например, параметр a может принимать любые значения на $[0; 10]$ параметр b — на $[0; 10]$ с шагом 1, 0, 1 или даже 0,01. Таким образом, у нас будут уникальные задачи для каждого студента на потоке. Т.е., у нас получилось свести интегралы для данной конкретной задачи к простым алгебраическим выражениям, которые могут быть легко использованы для параметризации в системе Moodle или для быстрых проверок во время занятия.

Авторы выражают благодарность профессору В.И. Старикову и доценту В.А. Томиленко за полезные обсуждения. Работа частично выполнена в рамках госбюджетной темы ИОА СО РАН.

Литература

- [1] Ваганова О.И., Иляшенко Л.К. Основные направления реализации технологий студентоцентрированного обучения в вузе // Вестник Мининского университета. - 2018. - Т. 6. - № 3(24). - С. 2.
- [2] Картузова Т.В., Мерлина Н.И., Селиверстова Л.В. Использование некоторых элементов системы Moodle в работе со студентами заочного отделения при изучении математических дисциплин // Карельский научный журнал. - 2016. - Т. 5. - № 2(15). - С. 34-36.
- [3] Асланов Р.М., Игнатова О.Г. Электронное обучение вчера, сегодня, завтра. Проблемы и перспективы // Continuum. Математика. Информатика. Образование. - 2018. - № 1(9). - С.28-35.
- [4] Зыкова Т.В., Шершнева В.А., Вайнштейн Ю.В., Есин Р.В. Обучение математическим дисциплинам в условиях применения облачных технологий на базе LMS Moodle // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. - 2017. - № 4(42). - С. 58-65.

- [5] Миронов А.Н., Торопова А.А. Электронный образовательный ресурс “Дифференциальные уравнения” для бакалавров направления “Математика и компьютерные науки” // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Гуманитарные науки. - 2015. - № 11-12. - С. 107-109.
- [6] Зыкова Т.В., Кацунова А.С., Цибульский Г.М., Сидорова Т.В., Шершнева В.А. Математические задания для студентов инженерных направлений в LMS Moodle // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. - 2016. - № 3(37). - С. 61-64.
- [7] Есин Р.В., Кустицкая Т.А. Повышение эффективности обучения математике в электронной среде посредством лекций-тренажеров // Информатика и образование. - 2019. - № 8(307). - С. 32-39.
- [8] Беляускене Е.А., Имас О.Н., Томиленко В.А. Математика в инженерном вузе в условиях дистанционного обучения. - Современное образование: повышение конкурентоспособности университетов: Материалы международной научно-методической конференции. В 2 ч., Томск, 28–29 января 2021 года. - Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2021. - С. 100-104.
- [9] Воронин Б.А., Воронина С.С. О возможности параметризации и быстрого счета в одной задаче на формулу полной вероятности. - Современное образование: повышение конкурентоспособности университетов: Материалы международной научно-методической конференции, в 2 частях, Томск, 28–29 января 2021 года. - Томск: ТУСУР, 2021. - С. 275-278.
- [10] Воронин Б.А. Актуальная для студентов задача с использованием дискретной двумерной случайной величины. - Современные тенденции развития непрерывного образования: вызовы цифровой экономики: Материалы международной научно-методической конференции, Томск, 30-31 января 2020 года / отв. ред. В.М. Рулевский - Томск: Изд-во ТУСУРа. - 2020. - С. 217 - 218.
- [11] Методические указания к выполнению расчетно-графической работы по дисциплине «теория вероятностей и математическая статистика» на тему «системы двух случайных величин». Составители Самохина В.М., Макарова М.Ю. Технический редактор Николаева Л.В. - Нерюнгри, Издательство ТИ (ф) СВФУ, 2016. - 34 с. URL: https://nti.svfu.ru/sveden/files/TViMS_sistema_dvux_sluch_velichin.pdf?ysclid=l34gk45eg0
- [12] Магазинников Л.И. Высшая математика IV. Теория вероятностей: учебное пособие. - Томск, Томский университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. - 151 с.
- [13] Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. 10-е изд., испр. - М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.
- [14] Валле Пуссен. Лекции по теоретической механике Т.1. - М.: ИЛ, 1948. - 339 с.
URL: <https://lib-bkm.ru/15064?>

*Воронин Борис Александрович,
ст. науч. сотр. Института оптики атмосферы,
доцент каф. АСУ ФСУ ТУСУР,
Институт физики им. Глеба Ватагина,
Университет Кампиноса, Кампинос, Бразилия,
канд. физ.-мат. наук.*

E-mail: vba_iao@mail.ru

*Воронина Светлана Станиславовна,
доцент Кафедры математики,
теории и методики обучения математике
Томского государственного педагогического
университета,
канд. физ.-мат. наук.*

E-mail: svet_lana_voronina@mail.ru

Los Caprichos Diferenciales.

Серия сюжетов о дифференциальных уравнениях

А. О. Ремизов

I seem to have been only like a boy
playing on the sea-shore,
and diverting myself in now
and then finding a smoother pebble
or a prettier shell than ordinary.

Sir Isaac Newton

Представлено восемь сюжетов, относящихся к различным естественным наукам, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, отличительной чертой которых является простота математического аппарата, необходимого для исследования. Автор надеется, что они могут быть использованы при чтении курса дифференциальных уравнений и помогут сделать его более интересным и содержательным.

Предисловие

Эта заметка задумана как начало серии, идея которой спонтанно возникла при подготовке курса лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям для студентов, большинство из которых без энтузиазма относятся к этому предмету.

Одна из принципиальных проблем в преподавании этого предмета вытекает из самого его происхождения: дифференциальные уравнения изначально возникли как средство изучения явлений природы. Во времена «отцов-основателей» Ньютона и Лейбница и их «прямых наследников» это были в основном задачи геометрии и механики — от работы искусственных механизмов до движения нерукотворных небесных тел. Позже добавились задачи из других естественных (и даже не очень естественных, вроде экономики) наук — различных разделов физики, химии, биологии, etc.

Таким образом, по самому своему происхождению дифференциальные уравнения тесно связаны с явлениями природы, лежащими вне математики и поэтому менее строгими и формализуемыми, чем это принято в «царице наук». С другой стороны, всеобщая ревизия математики, предпринятая в XIX веке с целью придать ей максимальную строгость и точность, а также (желательно) аксиоматический вид, коснулась и этого предмета, неизбежно сдвинув его в абстрактно-формальном направлении.

Преподавание дифференциальных уравнений должно строиться таким образом, чтобы присущая математическому предмету строгость и точность всех используемых понятий и утверждений (большинство из которых должны сопровождаться строгими доказательствами) гармонично сочеталась с объяснениями, для чего все это нужно и какие задачи «реального мира» таким образом можно решить. Для последнего необходимо использовать достаточное количество примеров из различных естественных наук, к которым предъявляется набор специальных требований.

Эти примеры должны быть достаточно интересными и по возможности иллюстрировать центральные понятия и факты теории дифференциальных уравнений. С другой стороны, они не должны быть слишком сложными и громоздкими ни с точки зрения естественнонаучной постановки задачи, ни в плане используемого математического аппарата. Эти трудносовместимые требования делают отбор подходящих сюжетов не таким простым делом, как может показаться на первый взгляд. Нет сомнения в том, что каждый лектор, читающий курс «диффузов», приводит хоть несколько примеров их использования, но зачастую эти примеры довольно формальны и не очень впечатляют.

С точки зрения преподавания здесь возникает следующая проблема. С одной стороны, хочется начать приводить интересные примеры в самом начале курса, пока слушатели не успели соскучиться и перестать ходить на лекции. С другой стороны, математический аппарат, которым студенты владеют в начале курса, еще слишком скуден¹. Выход видится в том, чтобы подобрать небольшое количество интересных сюжетов, пригодных для исследования минимальными математическими средствами. Таковыми являются базовые сведения из курса анализа и один единственный факт теории дифференциальных уравнений — теорема существования и единственности решения задачи Коши, без которой, пожалуй, обойтись совершенно невозможно. Да и не нужно: без нее непонятны многие другие темы, например, построение интегральных кривых методом изоклин (невозможно ответить на естественный вопрос: почему эти кривые не «разветвляются») и т. п. Эту теорему следует формулировать и обсуждать на первой же лекции, причем в общем виде, включая системы дифференциальных уравнений и уравнения произвольного порядка, а ее доказательство можно отложить до конца семестра. Такой подход не является новым, он использовался, например, в учебниках [1, 4].

Дополнительное время, необходимое для таких сюжетов (отметим, что их можно разбирать и на лекциях, и на семинарах) можно получить, если исключить из курса некоторые явно устаревшие и ненужные темы. Вообще, с учетом появления новых вычислительных возможностей, о которых нельзя было помыслить не только во времена Ньютона и Лейбница, но даже полвека назад, следовало бы пересмотреть курс дифференциальных уравнений в сторону уменьшения натаскивания на алгоритмы для решения стандартных типов уравнений. Ценность таких навыков, как умение решать линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и неоднородностью в виде квазимногочлена с помощью преобразования Лапласа или искусного подбора частного решения, бесспорная двести лет назад, сейчас сомнительна — современные компьютерные программы справляются с этим лучше и быстрее человека. Вместо этого лучше рассказать о спектральной задаче Штурма–Лиувилля (хотя бы без доказательства соответствующей теоремы) и колебаниях струны.

В этой заметке представлено восемь сюжетов, относящихся к различным естественным наукам, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, отличительной чертой которых является простота математического аппарата, необходимого для исследования. Планируется продолжение, в котором речь пойдет о более сложных и интересных сюжетах, включая движение тел в потенциальном поле, геодезические потоки, гармонический и диссипативный осцилляторы, системы с автоколебаниями (уравнение Ван дер Поля, реакция Белоусова–Жаботинского и др.), динамические системы с «хаосом» (цепь Чуа, система Лоренца).

Все выбранные сюжеты неоднократно описаны в литературе, ссылки на источники я, как правило, не привожу. Отмечу только книги [1] – [4], содержащие некоторые из выбранных сюжетов и множество других, и замечательную статью [5]. Поскольку речь идет о построении математических моделей природных явлений, мы кратко затрагиваем вопрос об адекватности и границах применимости рассматриваемых моделей. Более глубокое обсуждение нетривиальных проблем, возникающих при математическом моделировании природы, можно найти в статье [6], написанной тремя известными математиками.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 20-01-00610).

1. Los Caprichos

1.1 Цепная ядерная реакция

Реакция такого типа может быть представлена как последовательность шагов. На каждом шаге происходит некоторое (как правило, очень большое) число единичных актов, каждый из которых вызывается частицей, появившейся как продукт реакции на предыдущем шаге последовательности.

¹Вариант рассказывать сначала постановки задач с обещаниями потом изложить решения (вполне приемлемый для учебника) здесь не кажется удачным, учитывая психологию современных студентов.

Например, рассмотрим реакцию деления ядер тяжелых элементов (скажем, урана), при которой основное число актов вызвано нейтронами, появившимися при делении ядер на предыдущем шаге или, как часто говорят, в предыдущем *поколении*. Каждый нейтрон проходит свой *цикл обращения*: рождается в акте деления, некоторое время существует в свободном состоянии, затем либо теряется, либо порождает новый акт деления и дает нейтроны следующего поколения. Среднее время цикла обращения $\tau > 0$ называется *средним временем жизни* нейтронов.

Изменение числа нейтронов можно изобразить в виде схемы

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_i \rightarrow x_{i+1} \rightarrow \dots$$

где x_i – число нейтронов в i -ом поколении. Скорость размножения нейтронов характеризуется постоянным коэффициентом размножения k , то есть $x_{i+1} = kx_i$. Это хорошо известная из школы геометрическая прогрессия: $x_i = k^i x_0$.

Очевидно, что эти подсчеты верны только приблизительно, поскольку рождения и исчезновения нейтронов происходят случайным образом, а не одновременно, и в любой момент времени присутствуют нейтроны из разных поколений, т.е. процесс изменения их числа гораздо лучше описывается не дискретной, а непрерывной моделью. Чтобы построить такую модель, рассмотрим число нейтронов $x(t)$, непрерывно зависящее от времени t , которое пробегает все вещественные значения $t \geq 0$. При этом временная шкала выбрана таким образом, что $x(t) = x_t$ для целых значений t . Значит, если в некоторый момент t было $x(t)$ нейтронов, то за время τ (среднее время жизни) приращение их числа составит $x(t + \tau) - x(t) = (k - 1)x(t)$.

Предположим, что функция $x(t)$ является не только непрерывной, но и дифференцируемой. Тогда, если приращение аргумента (времени) Δt мало, приращение функции $x(t + \Delta t) - x(t)$ выглядит как линейная величина от Δt с точностью до поправки выше первого порядка:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = A(t)\Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \rightarrow 0. \quad (1)$$

Из сказанного выше следует, что при $\Delta t = \tau$ это приращение равно $(k - 1)x(t)$, откуда $A(t) = \frac{k-1}{\tau} x(t)$. Разделив обе части равенства (1) на Δt и переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \alpha x, \quad \text{где } \alpha = \frac{k-1}{\tau}, \quad (2)$$

описывающее динамику числа нейтронов $x(t)$ в нашей цепной ядерной реакции.

Общее решение уравнения (2) имеет вид $x(t) = ce^{\alpha t}$, где c – произвольная постоянная. Отсюда видно, что $x(t)$ при любом t однозначно определяется величиной x_0 в момент времени $t = 0$. Если x_0 задано, то во все последующие моменты будет $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$. Впрочем, вместо $x(0) = x_0$ можно взять начальное условие $x(t_*) = x_*$ в любой произвольно выбранный момент времени t_* . Тогда решение задачи Коши

$$\dot{x} = \alpha x, \quad x(t_*) = x_* \quad (3)$$

задается формулой $x(t) = x_* e^{\alpha(t-t_*)}$, которая однозначно определяет динамику процесса во все последующие (и предыдущие) моменты времени.

Против нашей модели можно найти возражения. Например, заметить, что число $x(t)$ принимает не только целые значения, но дробные и даже иррациональные². Мы говорим лишь о средних

²Конечно, никто не предполагает буквально рассматривать $\sqrt{2}$ или π нейтронов, речь идет лишь о приближенном моделировании реальности, некоторые черты которой наша математическая идеализация изначально игнорировала. В действительности процессы рождения и исчезновения нейтронов происходят случайным образом, и дать точное математическое описание этому процессу очень сложно. Чтобы получить достаточно простую модель, которую можно исследовать, всегда приходится жертвовать какими-то свойствами – см. [6].

характеристиках процесса (взятых по очень большому числу частиц – так, например, вычисляется среднее время жизни τ). Таким образом, найденное число $x(t)$ есть лишь приближенная оценка числа нейтронов.

Найденное решение позволяет сделать выводы о том, как будет протекать цепная реакция. Если $k < 1$, то $\alpha < 0$ и $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$ очень быстро стремится к нулю с возрастанием t . Теоретически, $x(t)$ никогда не станет равно нулю, но на самом деле в реальной цепной реакции оно станет нулем в конечный момент (заведомо, когда $x(t)$ станет меньше 1, если не раньше). Таким образом, при $k < 1$ цепная реакция быстро затухнет. Если $k > 1$, то $\alpha > 0$, и решение $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$ очень быстро возрастает. С математической точки зрения, такое решение может существовать неограниченное время (экспонента не имеет вертикальной асимптоты и определена на всей вещественной прямой), но физически этот процесс долго продолжаться не может, и в некоторый момент времени закончится взрывом (вследствие выделения большого количества тепловой энергии), после чего уравнение (2) станет неприменимо. Если же $k = 1$ (так называемый «критический режим»), то $x(t) = x_0$ в любой момент времени t , и ничего не меняется.

В ядерных реакторах ход цепной реакции регулируют, изменяя коэффициент k . Например, для его уменьшения либо выводят урановые стержни из зоны реакции, или вводят в нее графитовые стержни, хорошо поглощающие нейтроны без рождения новых. Существуют реакторы, работающие и на том, и на другом принципе.

Задача 1. Сравните решения (числа нейтронов), вычисленные в дискретной и непрерывной моделях: $x_i = k^i x_0$ и $x(i\tau) = x_0 e^{i(k-1)\tau}$, $i = 1, 2, \dots$

Задача 2. Покажите, что для любой затухающей цепной реакции (то есть для заданных $k < 1$ и $\tau > 0$) существует так называемый *период полураспада* – число $T > 0$, такое что $x(t+T)/x(t) = 2$ для любого t . Выразите T через k и τ .

Период полураспада является важнейшей характеристикой изотопов данного типа и варьируется от долей секунды до величин порядка $10^8 - 10^9$ лет (например, для некоторых изотопов урана).

1.2 Радиоуглеродное датирование и мальтузианская ловушка

В состав всех биологических организмов входит углерод, который существует в виде трех изотопов: ^{12}C , ^{13}C , ^{14}C , имеющих в своем ядре шесть протонов и 6, 7, 8 нейтронов, соответственно. Первые два изотопа стабильны, а третий – так называемый *радиоуглерод* – радиоактивен, его период полураспада составляет примерно 5700 лет.

Изотоп ^{14}C образуется из азота под действием космических лучей в верхних слоях атмосферы³. Вследствие активного перемешивания атмосферы радиоуглерод (вместе со стабильными изотопами) попадает в живые организмы, и его концентрация в них приблизительно постоянна и равна средней концентрации во всей атмосфере. Но с гибелью организма углеродный обмен прекращается. После этого стабильные изотопы сохраняются, а радиоуглерод распадается с соответствием с уравнением (2). В результате его содержание в останках постепенно уменьшается. Зная содержание радиоуглерода в организме на момент его гибели (предполагая его одинаковым для всех и эпох, в которые они жили) и сравнив его с содержанием радиоуглерода в данном образце, можно установить время, прошедшее с момента гибели организма, с помощью выведенной нами формулы для решения задачи (3).

Радиоуглеродное датирование было придумано в конце 1940-х годов американским физико-химиком Уиллардом Либби⁴ и основано на ряде предположений, некоторые из которых мы упомянули выше. Либби предполагал также, что концентрация радиоуглерода в атмосфере одинакова и не

³В среднем в год появляется около 7.5 кг, общее же его количество составляет величину порядка $10^{-10}\%$ от всего углерода на Земле.

⁴Willard Frank Libby (1908–1980), лауреат Нобелевской премии 1960 г.

меняется со временем и что содержание изотопов в живых организмах равно их содержанию в атмосфере. Эти предположения справедливы лишь приблизительно, и современный радиоуглеродный анализ учитывает это, а также множество иных факторов – так называемая *калибровка метода*⁵.

Уравнение (2) и соответствующая ему задача Коши (3) описывают не только ядерные реакции, но и многие совершенно иные процессы. Мы приведем один пример такого рода – модель роста численности населения в условиях безграничных ресурсов. Внимательный читатель наверняка заметил, что процессы рождения и исчезновения нейтронов очень похожи на процессы рождения и смерти живых организмов. Поэтому уравнение (2) описывает рост населения $x(t)$ в случае неограниченных ресурсов.

В предположении $\alpha > 0$ (рождаемость выше смертности) это дает экспоненциальный рост $x(t)$. Эту модель часто называют «мальтузианской» в честь английского демографа и экономиста Томаса Мальтуса (Thomas Robert Malthus, 1766–1834). В своем трактате «Опыт закона о народонаселении» (1798) он писал, что для всех форм жизни, располагающих избытком ресурсов, характерен экспоненциальный рост популяции, что неизбежно приводит к катастрофе – войны за ресурсы, голод, эпидемии, etc. Эта ситуация (так называемая *мальтузианская ловушка*) часто возникала в доиндустриальных обществах. Вероятно, она стала одной из главных причин (наряду с резким похолоданием), которые вызвали «Великое переселение народов» в Европе в IV–VII веках. Однако в жизни часто проявляется и обратная связь, не отраженная в уравнении (2) – по мере возрастания дефицита ресурсов снижается рождаемость, рост населения плавно замедляется, и мальтузианской ловушки удастся избежать. Соответствующая модель рассмотрена в следующем примере.

1.3 Логистическое уравнение Ферхюльста

В 1838 г. бельгийский математик Ферхюльст (Pierre Verhulst, 1804–1849) предложил уравнение для моделирования численности изолированной биологической популяции с ограниченными ресурсами:

$$\dot{x} = ax(1 - bx), \quad (4)$$

где $x(t)$ – численность популяции в момент времени t и a, b – постоянные положительные коэффициенты: a характеризует скорость размножения популяции, b – конкуренцию за ресурсы, которая ограничивает ее рост. Предполагается, что с ростом популяции потребление ресурсов возрастает линейно и скорость размножения $\dot{x}(t)$ пропорциональна текущей численности $x(t)$ и количеству доступных ресурсов $1 - bx(t)$, максимальное количество ресурсов принято за 1.

Очевидно, что уравнение (4) имеет два постоянных решения $x(t) = 0$ и $x(t) = 1/b$, это положения равновесия популяции: ее численность не меняется со временем. Общее решение задается формулой

$$x(t) = \frac{ce^{at}}{bc(e^{at} - 1) + 1}, \quad c = \text{const}, \quad (5)$$

причем решение с начальным условием $x(0) = x_0$ получается при $c = x_0$. На рис. 1 (слева) показаны решения в интересующей нас области $t \geq 0, x \geq 0$.

⁵ Например, важным фактором является географическое положение исследуемого организма: существенно отличаются калибровки для Северного и Южного полушарий, а также для морских организмов (скорость обмена углерода в морском резервуаре медленнее атмосферного). Имеется также множество других факторов, описанных в специальной литературе.

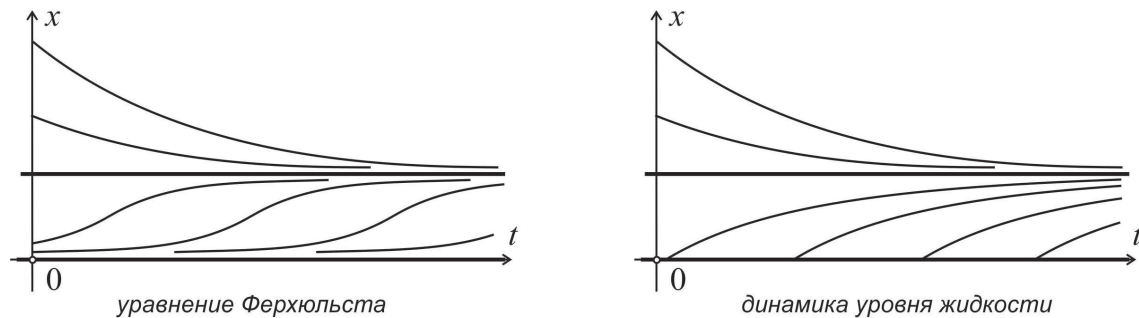


Рис. 1. Слева: решения уравнения Ферхюльста, логистические кривые (сюжет 1.3).
 Справа: динамика уровня жидкости, описываемая уравнением (13) (сюжет 1.7).

Обсудим полученный результат. Прямая $x = 1/b$ разделяет нашу область на две части. Верхняя заполнена кривыми, похожими на ветви гипербол, которые при возрастании t монотонно убывают и стремятся к горизонтальной асимптоте $x = 1/b$. Значит, если в начальный момент $t = 0$ численность популяции $x_0 > 1/b$, то с течением времени $x(t)$ будет монотонно уменьшаться, стремясь к значению $1/b$. Нижняя часть (полоса $0 < x < 1/b$) заполнена кривыми (они называются *логистическими*), похожими на график арктангенса, которые при возрастании t монотонно возрастают и тоже стремятся к горизонтальной асимптоте $x = 1/b$. Это означает, что если $0 < x_0 < 1/b$, то с течением времени $x(t)$ будет увеличиваться, стремясь к $1/b$.

Задача 3. Используя не формулу (5), а само уравнение (4), найдите, при каком значении x логистические кривые имеют перегиб.

После работы Ферхюльста уравнение (4) неоднократно переоткрывалось разными исследователями независимо друг от друга и по разным поводам. Сейчас его чаще всего называют *логистическим*. Несмотря на простоту и даже примитивность этой модели, во многих случаях она дает вполне точный прогноз. Логистическое уравнение часто используется при моделировании экономических и социальных процессов, например, для моделирования распространения инноваций или эффекта от рекламы.

Сам Ферхюльст использовал логистическое уравнение для прогнозирования численности населения Бельгии: он оценил ее ожидаемую величину $1/b$ примерно в 9.4 млн. человек, хотя в момент прогноза (1838 г.) население составляло немногим более 4 млн. и заметного роста не наблюдалось. Однако примерно с 1840 г. начался быстрый рост (логистическая кривая стала приближаться к точке перегиба). Затем темпы роста стали снижаться, и 1964 г. численность населения Бельгии почти стабилизировалась, увеличившись с 9.499 млн. в 1964 всего до 9.938 млн. в 1989. Таким образом, вплоть до 1989 г. прогноз демонстрировал неплохую точность, но затем произошел массовый въезд иммигрантов из других стран, и модель перестала работать.

1.4 Отлов рыбы с квотой

Рассмотрим теперь динамику популяции рыбы в море, численность которой без учета отлова описывается уравнением (4), а отлов происходит с постоянной квотой q , ограничивающей количество выловленной рыбы в единицу времени (например, в сутки или в неделю или в месяц, etc.). Предположим, что рыболовам всегда удается достигать квоты q , но они ее не превышают. Тогда вместо (4) мы получаем уравнение

$$\dot{x} = ax(1 - bx) - q, \tag{6}$$

где $x(t)$ – численность популяции в момент времени t и a, b, q – положительные постоянные. Как и (4), уравнение (6) можно решить «в явном виде», однако полученные формулы будут не очень удобны. Для исследования динамики популяции удобнее использовать качественный анализ уравнения.

Этот анализ следует начать с поиска постоянных решений уравнения (6). Они, очевидно, находятся из квадратного уравнения

$$ax(bx - 1) + q = 0,$$

дискриминант которого $D = a(a - 4bq)$ может принимать произвольные значения. Если $D > 0$, то есть два разных постоянных решения, оба положительные. Если $D = 0$, то есть только одно постоянное решение $x = 1/2b$. Если $D < 0$, то постоянных решений нет.

Дальнейший анализ уравнения (6) основан на простом соображении, что постоянные решения (горизонтальные прямые) разбивают плоскость (t, x) на области, в которых все остальные решения монотонны. Кроме того, так как правая часть уравнения не зависит от t (это свойство называется *автономностью*), все решения, проходящие в каждой области, получаются из одного из них путем всевозможных сдвигов вдоль оси t . Используя эти соображения и при необходимости выражая \dot{x} через x (вспомните задачу 3), нетрудно решить следующую задачу:

Задача 4. Покажите, что решения уравнения (6) в трех указанных случаях выглядят так, как показано на рис. 2. Сделайте из этого выводы об изменении численности популяции в зависимости от квоты q .

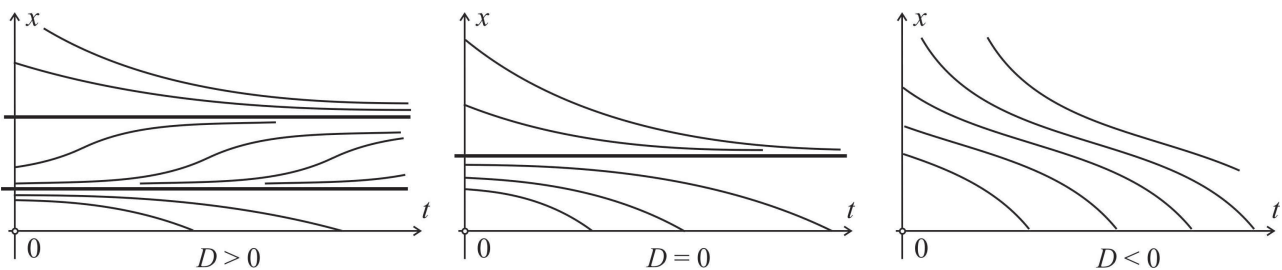


Рис. 2. Решения уравнения (6) – динамика популяции при отлове с постоянной квотой.

Задача 5. Исследуйте динамику популяции рыбы, отлов которой происходит с непостоянной квотой, пропорциональной ее численности, то есть в уравнении (6) постоянная q заменена на qx .

Задача 6. Выясните, как выглядит семейство решений уравнения вида $\dot{x} = P(x)$, где P – многочлен произвольной степени, обобщающее уравнения (4) и (6). При этом рассмотрите общий случай, когда P имеет как простые, так и кратные корни.

1.5 Нормальное распределение Гаусса

Вопрос об оценивании случайных ошибок, неизбежно возникающих при экспериментальных измерениях какой-либо величины, возник довольно давно⁶. На протяжении XVIII века он привлекал внимание многих математиков.

Было сформулировано общее понятие *плотности распределения* случайной величины ξ – такой функции $\varphi(t)$, интеграл от которой по множеству S равен вероятности того, что $\xi \in S$. Делались попытки найти конкретный вид функции $\varphi(t)$, исходя из эмпирических соображений. В случае, когда случайная величина ξ представляет собой ошибку измерений, естественно предполагать, что вероятности ошибок, равных по модулю и противоположных по знаку, должны быть одинаковыми, и что вероятность большой по модулю ошибки меньше, чем вероятность маленькой. Кроме того, интеграл от $\varphi(t)$ по всей вещественной прямой должен сходиться и быть равным 1 (условие нормировки). Из сказанного следует, что $\varphi(t)$ – положительная четная функция, достаточно быстро стремящаяся к нулю при $|t| \rightarrow \infty$, ее график представляет собой колоколообразную кривую (рис. 3).

⁶Например, его касался Галилео Галилей в своем знаменитом трактате «Диалог о двух системах мира» (1632) в связи с точностью астрономических наблюдений.

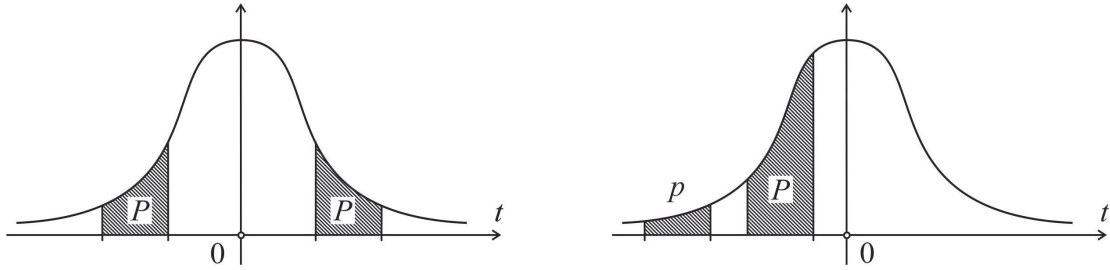


Рис. 3. Колоколообразная функция – плотность распределения. Слева: симметрично расположенные отрезки с равной вероятностью. Справа: отрезки одинаковой длины с разными вероятностями $p < P$.

Но оставался нерешенным вопрос: какова все-таки должна быть конкретная формула для такой функции? Симпсон (Thomas Simpson, 1710–1761) предложил кусочно-линейную функцию (рис. 4, слева). Лаплас (Pierre-Simon de Laplace, 1749–1827) предложил функции $\varphi(t) = \frac{a}{2}e^{-a|t|}$ (рис. 4, в центре) и

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \ln \frac{a}{|t|}, & |t| \leq 0, \\ 0, & |t| > 0, \end{cases}$$

где a – положительный параметр (рис. 4, справа).

Наконец, в 1809 г. «король математиков» Гаусс опубликовал работу, в которой вывел формулу для плотности распределения, впоследствии названную *нормальным распределением Гаусса*:

$$\varphi(t) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2t^2} \Leftrightarrow \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}h}. \tag{7}$$

На рис. 3 представлены графики именно функции (7). Если речь идет об ошибке измерений, то параметр $h > 0$ имеет смысл точности измерений. Обратный параметр σ в теории вероятностей называется *среднеквадратическим отклонением*, а его квадрат – *дисперсией*. Значения случайных величин ξ с таким распределением в основном концентрируются в окрестности нуля, который является их *математическим ожиданием*, причем $|\xi| < 3\sigma$ с вероятностью более 0.99.

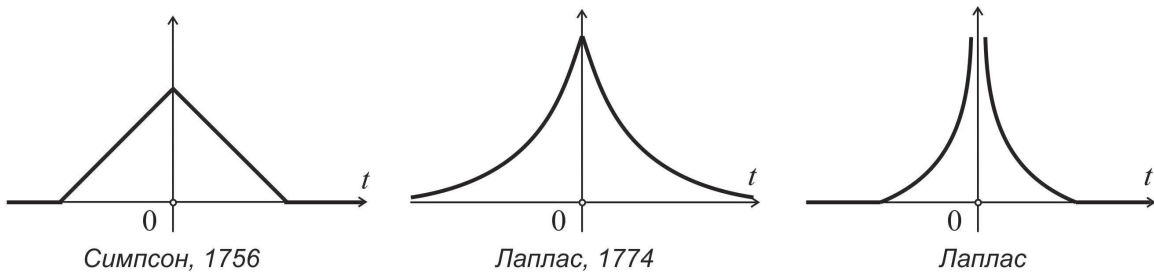


Рис. 4. Разные функции, представляющие плотность распределения.

Эмпирические соображения, которые Гаусс положил в основу своих рассуждений, состояли в следующем.

1. Функция $\varphi(t)$ должна быть строго положительной, четной, дважды дифференцируемой, иметь колоколообразный график и удовлетворять условию нормировки.

2. При наличии последовательности измерений одной и той же величины наиболее вероятным значением измеряемой величины является их среднее арифметическое.

Обозначим через x неизвестное нам истинное значение измеряемой величины, а через X_1, \dots, X_n – результаты ее измерений, проведенные со случайными ошибками ξ_1, \dots, ξ_n , то есть $X_i = x + \xi_i$.

В предположении, что ошибки ξ_i — независимые случайные величины с плотностью распределения $\varphi(t)$, функция $\varphi(t_1 - x) \cdot \dots \cdot \varphi(t_n - x)$ аргументов t_1, \dots, t_n является *плотностью совместного распределения* совокупности случайных величин $X_1 = \xi_1 + x, \dots, X_n = \xi_n + x$.

Подставим в $\varphi(t_1 - x) \cdot \dots \cdot \varphi(t_n - x)$ значения аргументов $t_1 = X_1, \dots, t_n = X_n$, соответствующие полученным результатам измерений, и рассмотрим полученное выражение как функцию от x . Тогда второе условие Гаусса состоит в том, что функция

$$\Phi(x) = \varphi(X_1 - x) \cdot \dots \cdot \varphi(X_n - x)$$

имеет глобальный максимум при $x = \bar{X}$, где

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

— среднее арифметическое результатов сделанных измерений. Из $\Phi'(\bar{X}) = 0$ следует

$$\begin{aligned} \Phi'(\bar{X}) &= -\varphi'(X_1 - \bar{X})\varphi(X_2 - \bar{X}) \cdot \dots \cdot \varphi(X_n - \bar{X}) - \\ &\quad - \varphi(X_1 - \bar{X})\varphi'(X_2 - \bar{X}) \cdot \dots \cdot \varphi(X_n - \bar{X}) - \dots \\ &\quad \dots - \varphi(X_1 - \bar{X})\varphi(X_2 - \bar{X}) \cdot \dots \cdot \varphi'(X_n - \bar{X}) = -\Phi(\bar{X}) \sum_{i=1}^n \frac{\varphi'(X_i - \bar{X})}{\varphi(X_i - \bar{X})}, \end{aligned}$$

откуда с учетом положительности Φ получаем

$$f(X_1 - \bar{X}) + \dots + f(X_n - \bar{X}) = 0, \quad (8)$$

$$f(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{d}{dt} \ln \varphi(t). \quad (9)$$

Определенная равенством (9) функция $f(t)$ называется *логарифмической производной* функции $\varphi(t)$, она используется в различных разделах математики. Согласно предположениям о $\varphi(t)$, функция $f(t)$ нечетная и дифференцируемая.

Равенство (8) должно быть выполнено при всех X_1, \dots, X_n . В частности, для набора $X_1 = A, X_2 = \dots = X_n = A - nt$, где A, t — произвольные числа. Введя для удобства обозначение $\mu = n - 1$, в этом случае имеем:

$$\bar{X} = A - \mu t, \quad X_1 - \bar{X} = \mu t, \quad X_2 - \bar{X} = \dots = X_n - \bar{X} = -t.$$

Подставляя это в (8), получаем равенство $f(\mu t) + \mu f(-t) = 0$, которое в силу нечетности f равносильно $f(\mu t) = \mu f(t)$ и должно выполняться для всех $\mu = n - 1$ и t .

Задача 7. Покажите, что из непрерывности и нечетности $f(t)$ следует, что равенство $f(\mu t) = \mu f(t)$ должно выполняться для всех вещественных μ и t . Это свойство называется *однородностью*, а обладающие им функции — *однородными*. Покажите, что дифференцируемые однородные функции имеют вид $f(t) = kt, k = \text{const}$. Подсказка: продифференцируйте тождество $f(\mu t) = \mu f(t)$ по t .

С учетом (9), получаем для функции $\varphi(t)$ дифференциальное уравнение $\varphi' = kt\varphi$, общее решение которого имеет вид $\varphi(t) = ce^{kt^2/2}$, $c = \text{const}$. Для того, чтобы построенная таким образом функция $\Phi(x)$ имела колоколообразную форму с глобальным максимумом в точке $x = \bar{X}$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено $c > 0$ и $k < 0$. Сделаем замену $k = -2h^2, h > 0$, и найдем значение c из условия нормировки:

$$c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 t^2} dt = 1.$$

Несмотря на то, что первообразная функции $e^{-h^2t^2}$ не является элементарной, точное значение нужного нам несобственного интеграла нетрудно вычислить (см., например, [7]). Это значение равно $\sqrt{\pi}/h$, то есть $c = h/\sqrt{\pi}$, что и доказывает формулу (7).

Роль, которую нормальное распределение Гаусса играет в теории вероятностей и смежных науках (статистике, теории случайных процессов, теории ошибок, etc.) трудно переоценить. Если имеется последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, имеющих нулевой математическое ожидание и конечную дисперсию (такowymi являются, например, ошибки измерений, с которых мы и начали разговор), распределение среднего первых n величин с ростом n стремится нормальному распределению Гаусса. Это утверждение называется *центральной предельной теоремой* теории вероятностей (точнее, простейшим ее вариантом).

Та же самая функция (7) присутствует в формуле, описывающей распространение тепла (решение уравнения теплопроводности) или диффузии вещества. Дело в том, что оба процесса (теплопроводности и диффузии) связаны с беспорядочными движениями («блужданиями») большого числа мельчайших частиц – так называемое *броуновское движение*, открытое в 1827 г. британским биологом Робертом Броуном (Robert Brown). В основе математической модели которого лежит нормальное распределение Гаусса, поэтому появление функции (7) в окончательной формуле, являющейся усреднением блужданий всех микрочастиц, отнюдь не случайно.

1.6 Закон Торричелли в гидродинамике

Закон Торричелли⁷ утверждает, что скорость v истечения идеальной жидкости из сосуда через отверстие в стенке, находящееся на глубине h от поверхности жидкости (см. рис. 5, слева) равна скорости тела, свободно падающего с высоты h . При падении тела массы m с нулевой начальной скоростью с высоты h его кинетическая энергия увеличивается от нуля до $mv^2/2$, а потенциальная уменьшается на mgh , где g – ускорение свободного падения. Из закона сохранения энергии следует, что $v^2 = 2gh$. Основываясь на этой формуле, установим, как меняется со временем уровень жидкости в сосуде, истекающей через отверстие в его днище.

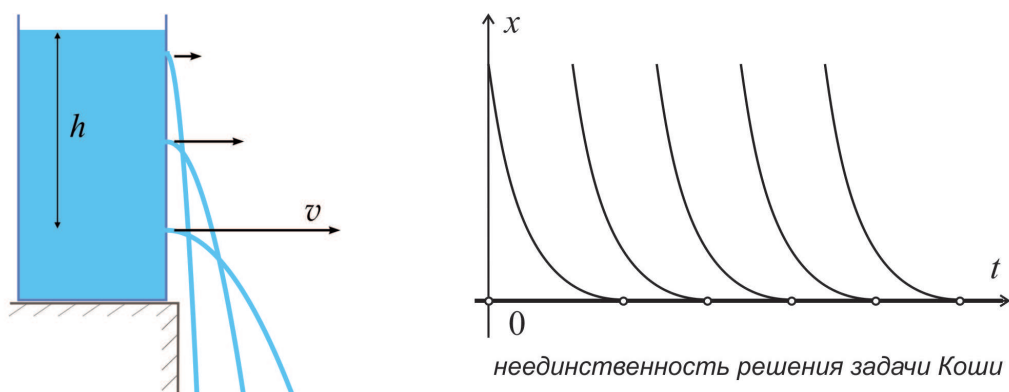


Рис. 5. Закон Торричелли. Слева: истечение жидкости из отверстий, находящихся на различной высоте. Справа: решения уравнения (10).

Рассмотрим сначала случай, когда сосуд имеет произвольную форму, его нижняя точка (днище) соответствует высоте $h = 0$, площадь сечения на высоте h обозначим $S(h)$, а площадь отверстия в днище обозначим $s > 0$. Функция $h(t)$ означает зависимость высоты жидкости, находящейся в сосуде в момент времени t . Очевидно, это должна быть монотонно убывающая функция при $t < t_*$, где t_* означает тот момент, когда вытечет вся жидкость, после чего будет $h(t) \equiv 0$.

⁷Торричелли (Evangelista Torricelli, 1608 – 1647) – итальянский математик и физик, ученик Галилео Галилея, продолживший развитие его идей.

В момент времени t уровень жидкости в сосуде равен h и скорость истечения жидкости $v = \sqrt{2gh}$. За время Δt из сосуда вытечет объем жидкости, равный $\Delta V = vs\Delta t + o(\Delta t)$, вследствие чего уровень уменьшится на величину $\Delta V/S(h)$, то есть

$$\Delta h = -\frac{\Delta V}{S(h)} = -\frac{s}{S(h)}\sqrt{2gh}\Delta t + o(\Delta t),$$

которое после деления на Δt и $\Delta t \rightarrow 0$ дает уравнение

$$\dot{h} = f(h), \quad f(h) = \begin{cases} -\frac{s}{S(h)}\sqrt{2gh}, & h > 0, \\ 0, & h \leq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Заметим, что если функция $S(h)$ непрерывно дифференцируема, то правая часть уравнения (10) удовлетворяет условию теоремы существования и единственности при $h > 0$, но не удовлетворяет этому условию в области, содержащей $h = 0$.

Рассмотрим простейший случай, когда функция $S(h)$ постоянная (например, если сосуд цилиндрический). Тогда, при $h > 0$ уравнение (10) удобно записать в виде

$$\dot{h} = -2\mu\sqrt{h}, \quad \text{где } \mu = \frac{s}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}, \quad (11)$$

его решения имеют вид $\sqrt{h} = -\mu(t - c)$, $c = \text{const}$, то есть представляют собой «левые половины» парабол $h = \mu^2(t - c)^2$. Кроме того, есть еще тождественно нулевое решение $h(t) = 0$, которое касается каждой из парабол в ее вершине (рис. 5, справа). Таким образом, если начальный уровень жидкости положителен, $h(t)$ сначала убывает до нуля по параболическому закону, а затем становится тождественно равной нулю:

$$h(t) = \begin{cases} \mu^2(t - c)^2, & t \leq c, \\ 0, & t > c, \end{cases} \quad \text{где } c = \sqrt{h(0)}/\mu. \quad (12)$$

Неединственность решения задачи Коши при $h = 0$ проявляется, если мы хотим решить обратную задачу: пусть в некоторый момент t_0 мы видим пустой сосуд и хотим определить, как менялся в нем уровень жидкости в прошлом. Ответить на этот вопрос невозможно, так как существует бесконечное число решений с условием $h(t_0) = 0$: в формуле (12) можно брать всевозможные константы $c < t_0$. В этом случае c означает тот момент времени, когда из сосуда вытекла вся вода, и уравнение (10) не дает возможности определить, произошло ли это секунду назад, или час назад, или год, или же вообще сосуд изначально был пустой ($h(t) \equiv 0$).

Сказанное относится к сосудам с произвольной площадью сечения $S(h)$, не обязательно постоянной, хотя формула (12), конечно, изменится. Например, если выбрать $S(h)$ пропорциональной \sqrt{h} , то при $h > 0$ уровень жидкости $h(t)$ будет убывать линейно, с постоянной скоростью, до тех пор, пока не достигнет нулевого уровня.

В заключение рассмотрим случай, когда из сосуда с постоянной $S(h)$ жидкость вытекает по закону Торричелли и одновременно с этим в него втекает жидкость с постоянной скоростью. Это приводит к уравнению, полученному прибавлением к правой части (11) положительной константы:

$$\dot{h} = a - 2\mu\sqrt{h}, \quad \text{где } \mu = \frac{s}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}, \quad a > 0. \quad (13)$$

Решения этого уравнения можно найти в явном виде, но для исследования их качественного поведения это не требуется.

Задача 8. Покажите, что уравнение (13) имеет одно постоянное решение $h(t) = h_*$, где $a - 2\mu\sqrt{h_*} = 0$, к которому сверху асимптотически приближаются монотонно убывающие решения, а снизу – монотонно возрастающие (рис. 1, справа). Сравните последние с логистическими кривыми из уравнения Ферхюльста, изображенными на том же рисунке слева.

Сравнение полученного результата с действительностью может вызвать некоторое недоумение. Получается, например, что если в днище пустого цилиндрического сосуда неограниченно большой высоты есть сколь угодно малое отверстие, этот сосуд никогда не удастся наполнить выше некоторого конечного уровня, определяемого постоянной скоростью вливающейся жидкости.

Объяснение состоит в том, что используемая модель верна лишь приблизительно и не учитывает ряд факторов, которые становятся значительными при больших h . Например, закон Торричелли, гласящий, что скорость истечения жидкости v пропорциональна \sqrt{h} , не учитывает вязкость и силу трения, возникающего между жидкостью и стенками сосуда. Поэтому реальная скорость истечения v_p будет несколько меньше скорости v , рассчитанной по закону Торричелли. При небольших значениях v (и следовательно, h) разница между v и v_p незначительна, но при больших h вязкость и трение существенное замедляют скорость истечения жидкости из сосуда, делая v_p близкой к постоянной.⁸ Тем самым правая часть уравнения (13) становится близкой к некоторой положительной константе, и сосуд неограниченно большой высоты заполняется до сколь угодно большого уровня.

Несмотря на эти критические замечания, наша модель и выводы из нее вполне адекватно описывают ситуацию, когда рассчитанный по закону Торричелли предельный уровень h_* не очень высок, что бывает, если отношение $a/2\mu$ не слишком велико.

1.7 Цепная линия

В 1671 г. Роберт Гук объявил Лондонскому Королевскому Обществу, что он нашел «истинную математическую и механическую форму всех видов арок для строительства». В духе того далекого времени, свое решение он опубликовал в виде анаграммы, которая гласила, что оптимальная форма арки⁹ совпадает с отраженной снизу вверх *цепной линией* – формой гибкой тяжелой цепи, свободно висящей на двух опорах (рис. 6, слева). Вопрос о форме цепной линии обсуждался и ранее. Например, Галилей считал (ошибочно или приближенно – тут мнения расходятся), что это парабола.

В 1691 году Лейбниц, Гюйгенс и Иоганн Бернулли независимо друг от друга вывели уравнение цепной линии. Один из способов состоит в том, чтобы заменить цепь с непрерывной плотностью материала ее дискретным аналогом – конечным числом точечных масс, висящих на невесомой нити. Это приводит к красивому геометрическому результату – *теореме Парди*¹⁰: *точка пересечения любых двух касательных к цепи лежит на вертикальной прямой, проходящей через центр тяжести C части цепи, расположенной между точками A и B , в которых взяты эти касательные* (рис. 6, справа). Воспользовавшись теоремой Парди, Лейбниц вывел дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $x(t)$, график которой представляет собой цепную линию:

$$\ddot{x} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \dot{x}^2}, \quad (14)$$

где $a > 0$ – параметр, связанный с длиной дуги цепи между точками подвеса A и B (рис. 6, слева). Конкретный вид этой связи мы выясним позже. Подробнее о выводе уравнения цепной линии см. [8] (раздел 19), [10] (гл. 2) или [9].

⁸Тем ближе к постоянной, чем больше вязкость. В предельном случае, когда вместо жидкости в сосуде мелкий песок (вспомните песочные часы), вязкость настолько велика, что скорость «истечения» песка через отверстие практически не зависит от h .

⁹Оптимальность состоит в том, что арка такой формы, сделанная из однородного материала, испытывает только напряжения сжатия и не испытывает напряжений изгиба, что положительно сказывается на ее прочности. Эта форма арок была использована при восстановлении Собора Святого Павла после Великого Лондонского пожара 1666 года, в котором Гук принимал участие.

¹⁰Ignace-Gaston Pardies (1636–1673) – французский математик и физик, священник.

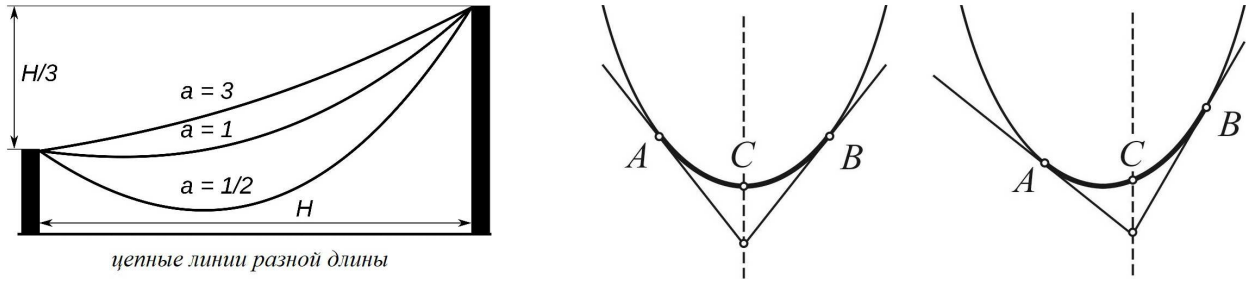


Рис. 6. Слева: цепные линии разной длины. Справа: иллюстрация к теореме Парди – цепная линия, подвешенная в точках A и B , расположенных симметрично и общим образом.

Найдем общее решения уравнения (14), воспользовавшись простыми соображениями и знанием гиперболических функций:

$$\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad \operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}),$$

которые связаны между собой тождеством $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$.

В случае $a = 1$ одно решение легко увидеть: $x(t) = \operatorname{ch} t$, откуда несложно вывести, что $x = a \operatorname{ch}(t/a)$ – решение уравнения (14) при произвольном $a > 0$. Далее заметим, что в правую часть (14) не входят ни t , ни x . Следовательно, если $x = \varphi(t)$ – некоторое решение уравнения (14), то функция $x = \varphi(t + c) + K$ также является его решением при любых постоянных c и K . Таким образом, из одного частного решения $x = a \operatorname{ch}(t/a)$ мы получаем двухпараметрическое семейство решений

$$x = a \operatorname{ch}\left(\frac{t+c}{a}\right) + K, \quad c, K = \text{const}. \quad (15)$$

Задача 9. Докажите, что для любых значений x_0, y_0 найдутся такие числа c, K , при которых функция (15) будет решением задачи Коши для уравнения (14). По теореме существования и единственности отсюда следует, что кроме (15) никаких других решений уравнения (14) не имеет.

Естественно рассмотреть следующую задачу: для заданного значения $a > 0$ найти конкретную кривую вида (15), проходящую через две заданные точки $A = (t_A, x_A)$ и $B = (t_B, x_B)$, см. рис. 6 (справа). Другими словами, мы ищем решения задачи

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}, \quad x(t_A) = x_A, \quad x(t_B) = x_B. \quad (16)$$

Это – так называемая *краевая* или *граничная* задача для уравнения (14). Она принципиально отличается от задачи Коши тем, что дополнительные условия накладываются не в одной, а в двух разных точках: t_A и t_B . Для краевых задач не существует общей теоремы, подобной теореме, гарантирующей существование и единственность решения задачи Коши при весьма общих условиях на правую часть уравнения.

Мы исследуем краевую задачу (16) в простейшем случае, когда точки подвеса A и B расположены симметрично относительно оси x , то есть $A = (-\tau, \beta)$ и $B = (\tau, \beta)$. Подставляя соответствующие значения в (15), получаем систему из двух уравнений

$$a \operatorname{ch}\left(\frac{c-\tau}{a}\right) + K = \beta, \quad a \operatorname{ch}\left(\frac{c+\tau}{a}\right) + K = \beta$$

относительно неизвестных c, K . Вычитая одно уравнение из другого, исключаем K :

$$\operatorname{ch}\left(\frac{c-\tau}{a}\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{c+\tau}{a}\right).$$

Последнее равенство равносильно $c - \tau = \pm(c + \tau)$. Знак «+» означает, что $\tau = 0$, то есть точки подвеса A и B совпадают, что не имеет смысла, а знак «-» дает $c = 0$. Таким образом, подвешенная

на точках A и B цепная линия существует при любом $a > 0$ и имеет вид (15) с константами $c = 0$ и $K = \beta - a \operatorname{ch} \omega$, где $\omega = \tau/a$.

Параметр a определяет степени провисания нашей цепной линии между фиксированными точками подвеса. Например, нетрудно видеть, что нижняя точка этой линии имеет координаты $t = 0$ и $x_{\min}(a) = a + K = \beta + a(1 - \operatorname{ch} \omega)$, а длина ее дуги, заключенной между точками A и B , равна

$$l_{AB}(a) = \int_{-\tau}^{\tau} \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt = \int_{-\tau}^{\tau} a\ddot{x}(t) dt = 2a\dot{x}(\tau) = 2a \operatorname{sh} \omega.$$

При возрастании a на интервале $(0, +\infty)$ величина $|x_{\min}(a) - \beta|$, характеризующая провисание цепи, монотонно убывает от ∞ до 0 , а длина дуги $l_{AB}(a)$ монотонно убывает от ∞ до 2τ . То есть чем больше a , тем меньше наша цепная линия провисает между опорами и тем больше она похожа на прямую линию, соединяющую эти точки.

Задача 10. Проведите аналогичное исследование краевой задачи (16) для произвольно расположенных точек подвеса A и B .

1.8 SIR-модель в эпидемиологии

Простейшая модель, описывающая распространение инфекционных заболеваний (так называемая SIR-модель), заключается в следующем. Популяция, состоящая из N (как правило, достаточно большого числа) человек в каждый момент времени t делится на три группы: потенциально восприимчивых к данному заболеванию (susceptible), инфицированных (infected) и не способных переносить инфекцию (removed). К последней группе относятся имеющие иммунитет (например, излечившиеся от данного заболевания или вакцинированные) и умершие. Число членов каждой из трех групп в момент t обозначается $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ соответственно.

Для оценки скорости переходов $S \rightarrow I \rightarrow R$ удобно рассматривать доли:

$$s(t) = S(t)/N, \quad i(t) = I(t)/N, \quad r(t) = R(t)/N.$$

Переход из группы S в I происходит за счет заражения вследствие контакта. Если обозначить через Δ приращение величины на малом интервале времени Δt , то можно приближенно считать $\Delta s = -\beta si \Delta t$, где β – среднее число контактов, приходящееся на одного человека в единицу времени, умноженное на вероятность заражения. В пределе $\Delta t \rightarrow 0$ получаем $\dot{s} = -\beta si$, откуда $\dot{S} = -\beta SI/N$. Переход из группы I в R происходит за счет выздоровления или смерти. Если γ – средняя доля выздоровевших или умерших в единицу времени, то можно считать $\Delta r = \gamma i \Delta t$, откуда получаем $\dot{R} = \gamma I$. Так как сумма $S(t) + I(t) + R(t)$ в каждый момент времени неизменна и равна N , имеет место соотношение $\dot{I} = -\dot{S} - \dot{R} = \beta SI/N - \gamma I$.

Объединяя все полученные уравнения и вводя для удобства постоянную $\alpha = \beta/N$ (в медицинской литературе она называется *базовым репродуктивным числом* или *индексом репродукции*), получаем систему из трех уравнений

$$\dot{S} = -\alpha SI, \quad \dot{I} = \alpha SI - \gamma I, \quad \dot{R} = \gamma I. \tag{17}$$

с тремя неизвестными функциями. Задача Коши для системы (17) получается добавлением начального условия

$$S(t_0) = S_0, \quad I(t_0) = I_0, \quad R(t_0) = R_0. \tag{18}$$

В связи с тем, что $S(t) + I(t) + R(t) \equiv N$, неизвестная функция $R(t)$ выражается через остальные, и нам достаточно исследовать систему, состоящую из двух уравнений

$$\dot{S} = -\alpha SI, \quad \dot{I} = (\alpha S - \gamma)I, \tag{19}$$

с начальным условием $S(t_0) = S_0$, $I(t_0) = I_0$. Системы (17) и (19) нельзя решить в «явном виде», но выяснить качественный характер их решений – функций $S(t), I(t), R(t)$ – возможно (см. рассуждение в начале статьи [5]).

Прежде всего заметим, что в интересующей нас области положительных значений S, I производная $\dot{S} = -\alpha SI < 0$, и следовательно, функция $S(t)$ монотонно убывает. Аналогично, $\dot{R} = \gamma I > 0$, и функция $R(t)$ монотонно возрастает. В силу очевидных ограничений $S(t) \geq 0$ и $R(t) \leq N$ заключаем, что при возрастании t функции $S(t), R(t)$ монотонно стремятся к некоторым постоянным $S_* \geq 0$ и $R_* \leq N$ соответственно.

Задача 11. Докажите, что из сказанного выше следует, что при возрастании t функция $I(t)$ стремится к нулю.

Для того, чтобы точнее выяснить характер функции $I(t)$, разделим второе уравнение системы (19) на первое, получив уравнение

$$\frac{dI}{dS} = \frac{S_m}{S} - 1, \quad \text{где } S_m = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

которое легко проинтегрировать. С учетом начальных условий $S(t_0) = S_0$, $I(t_0) = I_0$ это дает функцию

$$I(S) = I_0 + S_m(\ln S - \ln S_0) - (S - S_0), \quad (20)$$

которая монотонно убывает при $S > S_m$ и монотонно возрастает при $0 < S < S_m$, достигая при $S = S_m$ своего глобального максимума.

Далее мы будем предполагать, что $S_0 > S_m$ (случай $S_0 \leq S_m$ тривиален). Тогда функция $I(t)$, полученная подстановкой $S(t)$ в (20), сначала монотонно возрастает до того момента t_m , когда $S(t)$ не станет равным S_m , а после этого монотонно убывает, стремясь к нулю. Момент t_m называется *пиком эпидемии* и характеризуется максимальным числом инфицированных $I(S_m)$, которое можно явно вычислить по формуле (20). Соответствующие графики функций $S(t), I(t), R(t)$ представлены на рис. 7.

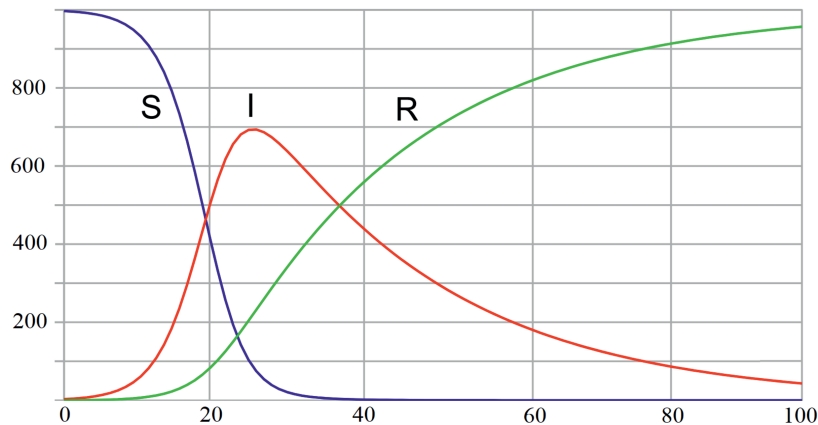


Рис. 7. SIR-модель: графики функций $S(t), I(t), R(t)$.

Задача 12. Докажите, что пик эпидемии вычисляется по формуле

$$t_m = t_0 + \int_{S_m}^{S_0} \frac{dS}{\alpha SI(S)},$$

где функция $I(S)$ задана формулой (20).

Соответствующую первообразную нельзя выразить в элементарных функциях, но определенный интеграл можно приближенно вычислить на компьютере (например, с помощью «метода прямоугольников» или «метода трапеций»). Впрочем, и саму систему дифференциальных уравнений (17) можно приближенно «проинтегрировать» на компьютере, заменяя производные их конечно-разностными аналогами. Именно таким способом были полученные графики, представленные на рис. 7.

Задача 13. Докажите, что предельное значение S_* , к которому функция $S(t)$ стремится при возрастании t , находится из уравнения $I(S) = 0$, где функция $I(S)$ задана формулой (20). Покажите, что при любых начальных значениях $S_0 > 0$ и $I_0 > 0$ уравнение $I(S) = 0$ на отрезке $[0, S_0]$ имеет единственное решение S_* , $0 < S_* < S_m$.

Таким образом, при возрастании t функции $S(t), R(t)$ монотонно стремятся к некоторым постоянным $S_* > 0$ и $R_* = N - S_*$ соответственно, которые зависят от начальных значений и могут быть найдены приближенно с помощью известных методов.

В заключение отметим, что изложенная выше простейшая SIR-модель восходит к работам двух британских медиков (А. Г. McKendrick, W. О. Kermack), выполненных в период 1927–1933 гг. Впоследствии она неоднократно совершенствовалась для того, чтобы учитывать дополнительные факторы, которыми в первоначальном варианте пренебрегли, и расширить область применения модели. Исследования в этом направлении продолжают до сих пор.

Литература

- [1] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - Москва: Наука, 1971.
- [2] Арнольд В.И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. - Москва: Наука, 1989.
- [3] Аносов Д.В. Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем. - М.: МЦНМО, 2008.
- [4] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1974.
- [5] Ильяшенко Ю.С. Аттракторы динамических систем и философия общего положения // Мат. просв., сер. 3. - 2008. - Т. 12. - С. 13-22.
- [6] Мищенко Е.Ф., Мищенко А.С., Зеликин М.И. Адекватность математических моделей в теории управления, физике и экологии // Мат. обр. - 2019. - Т. 4 (92). - С. 2-162.
- [7] Зорич В.А. Математический анализ. - М.: Наука, 1981.
- [8] Люстерник Л.А. Кратчайшие линии. Вариационные задачи. - М.: Гостехиздат, 1955.
- [9] Бодряков В.Ю., Быков А.А. История гиперболических функций: их изучение и некоторые приложения // Матем. обр. - 2018. - № 4 (88). - с. 18-29.
- [10] Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. - Москва: Наука, 1980.

Ремизов Алексей Олегович,
доцент кафедры высшей математики
Московского физико-технического института,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: alexey-remizov@yandex.ru

Обобщение тождества Деснано–Якоби

М. Ю. Шевченко

Обобщение известных математических закономерностей и объектов позволяет осознать связи между этими закономерностями и объектами как частными случаями, а также вывести новые ранее неизвестные следствия. В данной работе будет обобщено тождество Деснано–Якоби, с помощью которого будут доказаны некоторые новые тождества.

1. Введение

Дадим определение тождеству Деснано–Якоби согласно [1]. Пусть A — матрица порядка $n \times n$, M — её определитель. Обозначим через M_{ij} её минор порядка $n - 1$, полученный вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца. Пусть также $M_{ij,km}$ — минор порядка $n - 2$, полученный из матрицы A вычеркиванием i -го и j -го столбцов и k -й и m -й строк.

В этих обозначениях тождество Деснано–Якоби выглядит следующим образом:

$$M_{1n,1n}M = M_{11}M_{nn} - M_{1n}M_{n1} \quad (1)$$

На этом тождестве, в частности, основан метод “конденсации” для вычисления определителя матрицы, предложенный английским математиком XIX века Ч.Л. Доджсоном (широко известен как писатель Льюис Керрол), см. [4].

2. Обобщение тождества Деснано–Якоби

Дадим сначала определения детерминантов, которые будут далее использоваться.

Определение 1. $d(F_n)$ — детерминант матрицы $F_n = (f_{ij})$ порядка n .

Определение 2. $F_i(\mathbf{q}_n)$ — детерминант, который получается из $d(F_n)$ заменой его i -го столбца на вектор $\mathbf{q}_n = (q_1, q_2, \dots, q_n)$.

Определение 3. $F^i(\mathbf{q}_n)$ — детерминант, который получается из $d(F_n)$ заменой его i -й строки на вектор $\mathbf{q}_n = (q_1, q_2, \dots, q_n)$.

Определение 4. $F_{ik}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n)$ — детерминант, который получается из $d(F_n)$ заменой его i -го столбца на вектор $\mathbf{q}_n = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ и k -го столбца на вектор $\mathbf{q}'_n = (q'_1, \dots, q'_m, \dots, q'_n)$ для $i \neq k$; $F_{ii}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n) = 0$.

Определение 5. $F^{ik}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n)$ — детерминант, который получается из $d(F_n)$ заменой его i -й строки на вектор $\mathbf{q}_n = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ и k -й строки на вектор $\mathbf{q}'_n = (q'_1, \dots, q'_m, \dots, q'_n)$ для $i \neq k$; $F^{ii}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n) = 0$.

Обобщение тождества Деснано–Якоби дадим в следующей теореме:

Теорема 1. Для любых $F_n, \mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n$ справедливо следующее тождество:

$$F_i(\mathbf{q}_n)F_j(\mathbf{q}'_n) - F_j(\mathbf{q}_n)F_i(\mathbf{q}'_n) = d(F_n)F_{ij}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n), \quad (2)$$

где $i, j \in \overline{1, n}$.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции по n . Чтобы отличить в рамках этого доказательства элементы матрицы F_n от элементов матрицы F_{n+1} , введем в обозначение этих элементов индекс n : $F_n = (f_{nij})$. Аналогично, чтобы отличить элементы вектора \mathbf{q}_n от элементов вектора \mathbf{q}_{n+1} , обозначим: $\mathbf{q}_n = (q_{n1}, \dots, q_{nm}, \dots, q_{nn})$.

1. Докажем это тождество для $n = 2$. В этом случае возможны лишь следующие отношения между i и j : $i = j$; $i = 1, j = 2$ и $i = 2, j = 1$.

Для $i = j$ левая часть равна нулю тождественно, правая же равна нулю по определению 4.

Для $i = 1, j = 2$:

$$F_1(\mathbf{q}_2)F_2(\mathbf{q}'_2) - F_2(\mathbf{q}_2)F_1(\mathbf{q}'_2) = \begin{vmatrix} q_{21} & f_{212} \\ q_{22} & f_{222} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_{211} & q'_{21} \\ f_{221} & q'_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_{211} & q_{21} \\ f_{221} & q_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q'_{21} & f_{212} \\ q'_{22} & f_{222} \end{vmatrix};$$

$$d(F_2)F_{12}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}'_2) = \begin{vmatrix} f_{211} & f_{212} \\ f_{221} & f_{222} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_{21} & q'_{21} \\ q_{22} & q'_{22} \end{vmatrix}.$$

Правые части двух этих равенств равны, в чем можно убедиться непосредственно. Равенство для $i = 2, j = 1$ можно доказать аналогично. Таким образом, равны и левые части, из чего следует справедливость утверждения теоремы для $n = 2$.

2. Пусть для n утверждение теоремы справедливо по индуктивному предположению:

$$F_i(\mathbf{q}_n)F_j(\mathbf{q}'_n) - F_j(\mathbf{q}_n)F_i(\mathbf{q}'_n) = d(F_n)F_{ij}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n). \quad (3)$$

3. Докажем, что для $n + 1$ справедливо:

$$F_i(\mathbf{q}_{n+1})F_j(\mathbf{q}'_{n+1}) - F_j(\mathbf{q}_{n+1})F_i(\mathbf{q}'_{n+1}) = d(F_{n+1})F_{ij}(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{q}'_{n+1}), \quad (4)$$

где $i, j \in (1, n + 1)$; \mathbf{q}_{n+1} и \mathbf{q}'_{n+1} - вектора с элементами $q_{(n+1)m}$ и $q'_{(n+1)m}$ соответственно ($m = \overline{1, n + 1}$).

Для каждого детерминанта, используемого в (4), вычтем из каждой m -й строки ($m \neq 1$) первую строку, умноженную на $f_{(n+1)mk}/f_{(n+1)1k}$, где $k \neq i, k \neq j$. В результате получим, что для каждого детерминанта на пересечении 1-й строки и k -го столбца находится элемент $f_{(n+1)1k}$, а на пересечении всех остальных строк - нули. Разложим каждый детерминант по k -му столбцу и получим:

$$d(F_{n+1}) = (-1)^{k+1} f_{(n+1)1k} d(F_n); \quad (5)$$

$$F_i(\mathbf{q}_{n+1}) = (-1)^{k+1} f_{(n+1)1k} F_i(\mathbf{q}_n); \quad (6)$$

$$F_j(\mathbf{q}_{n+1}) = (-1)^{k+1} f_{(n+1)1k} F_j(\mathbf{q}_n); \quad (7)$$

$$F_i(\mathbf{q}'_{n+1}) = (-1)^{k+1} f_{(n+1)1k} F_i(\mathbf{q}'_n); \quad (8)$$

$$F_j(\mathbf{q}'_{n+1}) = (-1)^{k+1} f_{(n+1)1k} F_j(\mathbf{q}'_n); \quad (9)$$

$$F_{ij}(\mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{q}'_{n+1}) = (-1)^{k+1} f_{(n+1)1k} F_{ij}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n), \quad (10)$$

где:

$$\mathbf{q}_n = (q_{(n+1)2} - f_{2k}/f_{1k}, \dots, q_{(n+1)m} - f_{mk}/f_{1k}, \dots, q_{(n+1)n} - f_{nk}/f_{1k});$$

$$\mathbf{q}'_n = (q'_{(n+1)2} - f_{2k}/f_{1k}, \dots, q'_{(n+1)m} - f_{mk}/f_{1k}, \dots, q'_{(n+1)n} - f_{nk}/f_{1k}).$$

Умножим обе части тождества (3), которое справедливо по индуктивному предположению, на $(-1)^{k+1} f_{(n+1)1k}$. Отсюда с учетом (5)-(10) получим (4).

Теорема доказана. \square

Следствие 1. Тождество Деснано–Якоби является частным случаем тождества (2).

Действительно, пусть M и $d(F_n)$ обозначают один и тот же определитель. Далее, пусть \mathbf{q}_n — вектор, у которого k -й элемент равен единице, а все остальные — нулям; \mathbf{q}'_n — вектор, у которого m -й элемент равен единице, а все остальные — нулям ($k \neq m$). Разложим $F_i(\mathbf{q}_n)$ и $F_i(\mathbf{q}'_n)$ по i -му столбцу; $F_j(\mathbf{q}_n)$ и $F_j(\mathbf{q}'_n)$ — по j -му столбцу. Применяя теорему Лапласа, разложим $F_{ij}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n)$ по i -му и j -му столбцам. Так как в \mathbf{q}_n и \mathbf{q}'_n от нуля отличен лишь один элемент (причем равный единице), то подобное разложение равносильно вычеркиванию из каждого определителя строки и столбца, на пересечении которых эта единица расположена. В результате получим:

$$F_i(\mathbf{q}_n) = (-1)^{i+k} M_{ki}, \quad F_j(\mathbf{q}_n) = (-1)^{j+k} M_{kj}, \quad F_i(\mathbf{q}'_n) = (-1)^{i+m} M_{mi}, \quad F_j(\mathbf{q}'_n) = (-1)^{j+m} M_{mj}, \\ F_{ij}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n) = (-1)^{i+j+k+m} M_{ij,km}.$$

С учетом этих равенств получим из (2):

$$M(-1)^{i+j+k+m} M_{ij,km} = \\ = (-1)^{i+k} M_{ki} (-1)^{j+m} M_{mj} - (-1)^{j+k} M_{kj} (-1)^{i+m} M_{mi}$$

Или, после сокращения на $(-1)^{i+j+k+m}$:

$$M M_{ij,km} = M_{ki} M_{mj} - M_{kj} M_{mi}$$

Положим здесь $i = k = 1, j = m = n$, откуда и получим тождество Деснано-Якоби (1). \square

Следствие 2. Из (2) следует, что $F_{ij}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n) = 0$ при $F_i(\mathbf{q}_n) = 0$ и $F_j(\mathbf{q}_n) = 0$.

Действительно, в этом случае левая часть (2) равна нулю, а значит нулю будет равна и правая часть, т.е. $d(F_n) F_{ij}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n)$. В общем случае $d(F_n) \neq 0$, откуда $F_{ij}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n) = 0$. \square

Следствие 3. Так как определитель матрицы не меняется при ее транспонировании, то справедливо тождество, аналогичное (2), для строк \mathbf{q}_n и \mathbf{q}'_n :

$$F^i(\mathbf{q}_n) F^j(\mathbf{q}'_n) - F^j(\mathbf{q}_n) F^i(\mathbf{q}'_n) = d(F_n) F^{ij}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n). \quad (11)$$

\square

Рассмотрим еще два соотношения, при доказательстве которых применяется тождество (2).

Теорема 2. Справедливо следующее тождество:

$$F_i(\mathbf{q}_n) F_{jk}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n) + F_j(\mathbf{q}_n) F_{ki}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n) + F_k(\mathbf{q}_n) F_{ij}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n) = 0. \quad (12)$$

Доказательство. Непосредственно можно убедиться в том, что:

$$F_i(\mathbf{q}_n) [F_j(\mathbf{q}_n) F_k(\mathbf{q}'_n) - F_k(\mathbf{q}_n) F_j(\mathbf{q}'_n)] + F_j(\mathbf{q}_n) [F_k(\mathbf{q}_n) F_i(\mathbf{q}'_n) - F_i(\mathbf{q}_n) F_k(\mathbf{q}'_n)] + \\ + F_k(\mathbf{q}_n) [F_i(\mathbf{q}_n) F_j(\mathbf{q}'_n) - F_j(\mathbf{q}_n) F_i(\mathbf{q}'_n)] = 0$$

Преобразуем выражения в квадратных скобках согласно (2) и получим:

$$d(F_n) [F_i(\mathbf{q}_n) F_{jk}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n) + F_j(\mathbf{q}_n) F_{ki}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n) + F_k(\mathbf{q}_n) F_{ij}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n)] = 0$$

Таким образом, один из множителей левой части или оба из них тождественно равны нулю. Так как $d(F_n)$ тождественно не равен нулю, то равен нулю второй множитель, откуда и получим (12).

Теорема доказана. \square

Теорема 3. Для любых $i, k \in \overline{1, n}$ справедливо следующее тождество:

$$q'_i F_k(\mathbf{q}_n) - q_i F_k(\mathbf{q}'_n) = \sum_{l=1}^n f_{il} F_{kl}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n). \quad (13)$$

Доказательство. Для любых $i, k \in [1, n]$ справедливо:

$$\sum_{l=1}^n f_{il} A_{kl} = \delta_{ik} d(F_n), \quad (14)$$

где A_{il} - алгебраическое дополнение элемента f_{il} детерминанта $d(F_n)$; δ_{ik} - символ Кронекера (см. [2]). Разложим $F_l(\mathbf{q}_n)$ и $F_l(\mathbf{q}'_n)$ по l -у столбцу и получим соответственно:

$$F_l(\mathbf{q}'_n) = \sum_{k=1}^n q'_k A_{kl}, \quad F_l(\mathbf{q}_n) = \sum_{k=1}^n q_k A_{kl}.$$

Отсюда с учетом (2) получим соответственно:

$$\sum_{l=1}^n f_{il} F_l(\mathbf{q}'_n) = q'_i d(F_n) \quad (15)$$

$$\sum_{l=1}^n f_{il} F_l(\mathbf{q}_n) = q_i d(F_n) \quad (16)$$

Умножим обе части равенства (15) на $F_k(\mathbf{q}_n)$, обе части (16) - на $F_k(\mathbf{q}'_n)$ и вычтем из каждой части (15) соответствующую часть (16):

$$(q'_i F_k(\mathbf{q}_n) - q_i F_k(\mathbf{q}'_n)) d(F_n) = \sum_{l=1}^n f_{il} (F_l(\mathbf{q}'_n) F_k(\mathbf{q}_n) - F_l(\mathbf{q}_n) F_k(\mathbf{q}'_n)).$$

Преобразуем правую часть этого равенства с учетом (2), сократим обе части на $d(F_n)$ и получим (13).

Теорема доказана. \square

Следствие 4. Из (13) как частный случай следует разложение детерминанта $d(F_n)$ по k -й строке.

Действительно:

а. положим $q_m = f_{mk}$ для $m = \overline{1, n}$; $k \in \overline{1, n}$, откуда: $q_k = f_{kk}$, $F_k(\mathbf{q}_n) = d(F_n)$, $F_{kl}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n) = F_l(\mathbf{q}'_n)$ для $l \in \overline{1, n}$, $l \neq k$.

б. положим $q'_m = \delta_{mk}$, откуда: $q'_k = 1$, а все остальные элементы \mathbf{q}'_n равны нулю.

с. разложим $F_l(\mathbf{q}'_n)$ по l -у столбцу, откуда: $F_l(\mathbf{q}'_n) = A_{kl}$ для каждого $l \in \overline{1, n}$. По определению $F_{kk}(\mathbf{q}_n, \mathbf{q}'_n) = 0$, поэтому при $l = k$ слагаемое в правой части (2) равно нулю. Однако, этот пробел компенсируется вторым слагаемым в левой части данного равенства. Перенесем его в правую часть и получим:

$$d(F_n) = \sum_{l=1}^n f_{kl} A_{kl}.$$

\square

Посредством замены переменных из (2) также получим:

$$a_1 a_2 - b_1 b_2 = r_1 r_2, \quad (17)$$

где:

$$\begin{aligned} a_1 &= (u_1 z_1 + u'_1) v_1 r_1 - (v_1 z_2 + v'_1) u_1 r_2, & a_2 &= (u_2 z_1 + u'_2) v_2 r_1 - (v_2 z_2 + v'_2) u_2 r_2, \\ b_1 &= (u_1 z_1 + u'_1) v_2 r_1 - (v_2 z_2 + v'_2) u_1 r_2, & b_2 &= (u_2 z_1 + u'_2) v_1 r_1 - (v_1 z_2 + v'_1) u_2 r_2, \\ & & & u'_1 u_2 - u_2 u_1 = 1, \quad v'_1 v_2 - v_2 v_1 = 1, \end{aligned}$$

z_1, z_2, r_1, r_2 — произвольные числа.

Доказать это тождество несложно, непосредственно раскрыв скобки в левой части.

Докажем также с помощью (2), что присоединенная матрица, определитель которой равен нулю, является альтернативной матрицей, т.е. матрицей с элементами w_{ij} вида:

$$w_{ij} = f_j(\alpha_i),$$

где f_j — некоторая функция от аргумента α_i .

Действительно, пусть $d(F_n) = 0$. Тогда из (2) следует:

$$F_i(\mathbf{q}_n) F_j(\mathbf{q}'_n) = F_j(\mathbf{q}_n) F_i(\mathbf{q}'_n).$$

Разложим определители из этого тождества по столбцам \mathbf{q}_n и \mathbf{q}'_n , тогда:

$$\sum_{l=1}^n q_l A_{il} \sum_{l=1}^n q'_l A_{jl} = \sum_{l=1}^n q_l A_{jl} \sum_{l=1}^n q'_l A_{il}.$$

Отсюда получим в силу произвольности q_l и q'_l , что коэффициенты при произведении $q_k q'_m$ ($k, m \in \overline{1, n}$) слева и справа равны:

$$A_{ik} A_{jm} = A_{jk} A_{im}. \quad (18)$$

Пусть A'_i — алгебраическое дополнение, минимальное по модулю на множестве всех алгебраических дополнений из i -й строки. Тогда из (18) получим:

$$A'_i A_{jm} = A'_j A_{im}. \quad (19)$$

Отсюда получим:

$$A_{im} = p_m A'_i, \quad A_{jm} = p_m A'_j,$$

где p_m — некоторое число, по модулю большее или равное единице.

Эти равенства можно описать в виде одного равенства:

$$A_{ij} = p_j A'_i.$$

Отсюда видно, что присоединенная матрица определителя $d(F_n)$ является альтернативной, где f_j есть функция умножения аргумента A'_i на число p_j .

Также отметим, что все минимальные алгебраические дополнения A'_i располагаются в одном и том же столбце. Действительно, пусть для некоторого t -го столбца $p_t = 1$, откуда элемент A_{it} является минимальным в t -м столбце (т.к. $A_{it} = p_t A'_i$), что справедливо для любого значения $i \in \overline{1, n}$.

Литература

- [1] Смирнов Е.Ю. Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакопеременные матрицы. Летняя школа «Современная математика» (Дубна), июль 2013.
URL: <https://users.mccme.ru/smirnoff/papers/dubna14.pdf>
- [2] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М: “Наука”, 1971.
- [3] Ляпин Е.С, Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. - М: “Просвещение”, 1974.
- [4] Dodgson C.L. Condensation of determinants, being a new and brief method for computing their arithmetical values // Proceedings of the Royal Society of London. - 15. - 1866–1867. - p. 150-155.

*Шевченко Максим Юрьевич,
инженер по тестированию ПО,
г.Саратов.*

E-mail: maks.shevchenko.76@list.ru

Из истории математики

Дроби для $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, квазипифагоровы тройки и появление царского локтя, фута и дюйма в Египте времен Древнего царства.

Часть II

А. Н. Ковалев

Высказана гипотеза, что в Древнем царстве, после нахождения дроби $47/21$ для $\sqrt{5}$, обнаруженной Шетниковым при анализе пропорций погребальной камеры Великой пирамиды, был введен дюйм, как $1/21$ часть царского локтя. Приведены примеры из архитектуры и религиозного искусства, в которых применялся дюйм. Рассмотрена возможность выделения мерного модуля в 4 ладони (dsr), структурно тождественного футу, еще во времена Джосера (XXVII в. до н.э.). Показано, что “большой фут” в 35,5 см мог появиться как парный модуль к основному мерному модулю Хесира для нахождения площади круга. Найден пример применения в III тысячелетии до н.э. в Египте дроби $99/70$ для $\sqrt{2}$, которая, вместе с дробью $161/72$ для $\sqrt{5}$, могла быть частью секретов жрецов-архитекторов.

Введение

Обычно источниками для историков математики служат текстовые документы или, в крайнем случае, графические изображения. На ранние времена, от которых таких источников не осталось, они чаще всего не распространяют свой взгляд. Между тем, первые математические текстовые документы Древнего Египта относятся только к началу II тысячелетия до н.э. и не отражают передовой уровень математики того времени. Это сборники задач для учебных целей и рекомендаций для практического использования. Профессиональные историки не обращаются к архитектуре Древнего Египта как источнику математических знаний из-за чувства невозможности получить из ее анализа достоверные утверждения. Понимание вероятности случайных совпадений, которую к тому же непонятно как оценить, часто отталкивает от подобных исследований, представляя их мало перспективными. Между тем, определенная часть математики, связанная с теоремой Пифагора и, в случае ее знания, с нахождением дробей для $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ ¹, должна была получить толчок для своего развития еще в первой половине III тысячелетия до н.э. из-за использования в архитектуре приема переноса диагоналей прямоугольников. И если масштаба III династии (XXVII — XXVI вв. до н.э.), с пропорцией 2:1, в мерных единицах того времени имеет размеры 72×144 у.е., то утверждение, что египтяне знали равенство диагонали этого прямоугольника 161 у.е. (принимаемое за примерное или точное, в зависимости от знания теоремы Пифагора) опирается на этот прием и представление, вытекающее из архитектурного анализа, что при этом искалось выражение ее длины в целых числах этих условных единиц [5]. Если анализ более ранних памятников говорит об использовании дробей $11/5$, $20/9$ и $9/4$ для отношения такой диагонали к меньшей стороне [Ibid]², то это отчасти обеспечивает последовательность в получении дроби $161/72$, особенно если еще и предложить прием, которым, исходя из более ранних дробей для $\sqrt{5}$, она могла быть найдена (как среднеарифметическое $9/4$ и $20/9$). Несмотря на почти полное незнание математики Египта первой половины III тысячелетия, что не позволяет нам быть уверенным в открытии такого приема, вся сумма найденного создает чувство достоверности полученного результата. Отчасти, поскольку сами доводы

¹Или третьей стороны соответствующих прямоугольных треугольников, при незнании теоремы Пифагора.

²Там же (лат.; здесь и далее), т.е. см. предыдущую ссылку.

в поддержку гипотезы разнообразны и затрагивают почти все стороны вопроса, кроме фиксации и повторяемости результата. Нахождение пока одной мастабы с размерами 72×144 у.е. длины не значит, что они использовались только в ней — автор, не будучи историком архитектуры, не делал полноценного анализа всех известных памятников того времени, а привычное выражение размеров в царских локтях зачастую не позволяет правильно определить числа, заложенные архитектором. С другой стороны, нельзя утверждать, что не было иероглифа числа 72 на стенах этой мастабы или в сопутствующих погребению предметах искусства. Просто египтолог если и обратил бы на него внимание, то интерпретировал бы его, скорее всего, как возраст смерти погребенного³. Но возможно было и сознательное сокрытие найденной дроби, которое будет обсуждаться в конце этой статьи.

Недавно предложенная реконструкция истории появления царского локтя говорит о возможности создания мерных единиц длины на раннем этапе развития архитектуры в результате использования конкретных дробей для квадратных корней, которые определили и отношения их друг с другом [5]. В этой статье была высказана гипотеза, что появление царского локтя, равного 7 ладоням, предвзялось введением во времена фараона Джосера, основателя III династии, четырех мерных модулей ($l_1 - l_4$), основной из которых (l_1) делился на 8 ладоней и был равен $63,3 \pm 0,2$ см. Три остальных происходили от первого с использованием дробей $7/4$ ($\sqrt{3}$), $9/4$ ($\sqrt{5}$) и $11/14$ (l_4) [Ibid].

Последующее появление царского локтя между строительством Ломаной и Розовой пирамид Снофру, основателя IV династии, обязано применению в архитектуре нескольких приемов: переноса диагоналей, при котором для отношения диагонали квадрата к его стороне использовалась дробь $7/5$ (уклон Ломаной пирамиды); пропорции помещений определялись вписанными в них равнобедренными религиозно-значимыми треугольниками, в первую очередь — равнобедренным, для отношения высоты к основанию которого использовали дробь $7/8$ (положение ступенчатой пирамиды в погребальном комплексе Джосера, проходы в настоящих пирамидах). А применение дроби $14/11$ для уклона Великой пирамиды закрепило особое положение царского локтя. При использовании модуля, делящегося на 7 и 4 без остатка, вторая искомая сторона становилась равна целому числу уже обозначенных его частей.

Первый вариант модуля, деленного на 7 ладоней, как $(1/2)l_2$ (rc_0), мог появиться еще при Джосере, использоваться в основном для построения равнобедренного треугольника, и был равен $55,2 - 55,6$ см. Этот “нулевой” вариант царского локтя по инерции применялся, когда уже был введен и использован в Розовой и Великой пирамидах царский локоть в $52,4 \pm 0,1$ см. Так, статуя фараона Микерина с женой (IV династия), хранящаяся в музее Изящных Искусств в Бостоне, имеет высоту и ширину основания равные l_3 и rc_0 соответственно (142,2 и 55,2 см).

Когда для древнеегипетского архитектурного сооружения твердо установлены величины основных мерных модулей, то при анализе его помещений на предмет примененных геометрических методов и приближений для квадратных корней, проблема выбора, какая из дробей была применена, минимизируется — получающиеся мерные модули должны быть связаны с основными. В общем случае, если c — относительная строительная погрешность данного объекта, а da и db — относительные измерительные погрешности размеров a и b , то относительное отклонение отношения a/b от замысла не должно превышать $2c + da + db$. Когда нет возможности посчитать строительную погрешность для конкретного случая, то обычно считается, что она не превышает 0,3%. Стоит отметить, что могла быть применена и дробь, входящая в область погрешности для отношения размеров, но не получающаяся при его разложении в цепную дробь. При этом погрешность изготовления мерных шестов не влияет на отклонения отношения размеров от замысла, и учитывается только на последнем этапе сравнения получившихся из дробей единиц длины с мерными модулями. Этот подход применялся в цитируемой статье, хотя в ней не обсуждался.

В Древнем Египте использовался еще один мерный модуль, отношение которого с другими мерными единицами не имело наглядного соответствия в пропорциях тела человека — *большой палец*,

³Нельзя исключать, что он действительно прожил 72 года, что и обусловило выбор размера ширины мастабы. Вероятность подобных совпадений часто и отталкивает математика от анализа архитектурных построек.

равный $1/3$ части ладони и тождественный дюйму. Но прежде чем анализировать историю его появления, рассмотрим другой, связанный с ним, египетский мерный модуль — dsr.

Dsr, структурно тождественный футу

В середине прошлого века в список модулей Древнего Египта входил **большой фут** в 35,5 см (bf) [2, с. 201]. О большом футе писал и известный французский историк архитектуры Шуази, который 72 см приравнял двум футам [8, с. 47]. Модуль в 35,5–36 см в Древнем Египте мог и не ассоциироваться с размером ступни, поскольку предполагал рост человека в 213–216 см — невероятный для людей бронзового века. Но длине $35,5 \pm 0,1$ см равна 4-я часть l_3 . И тогда $bf = \frac{9}{16}l_1$. Числу $(16/9)^2$ было равно значение числа π в Египте (π_e), зафиксированное в Московском математическом папирусе (начало II тысячелетия до н.э.) [4, с. 31]. В результате можно записать, что:

$$l_1^2 = \left(\frac{16}{9}bf\right)^2 = \pi_e(bf)^2, \quad (1)$$

т.е. *площадь квадрата со стороной l_1 равна площади круга радиуса bf* . Вполне вероятно, что формула (1) и является источником происхождения “большого фута”. Существование такой пары модулей было очень важно в древнегреческой архитектуре, с ее моноптерами и топосами, и в средневековой русской — с ее философией включения в храмы равных по площади подкупольного квадрата (“земля”) и круга (“небо”) [1]. В истории египетской архитектуры она могла появиться аналогично, как отклик на религиозное наполнение круга символикой бога и принятие квадрата за символ Земли. Одновременно такая пара обслуживала практическую потребность расчета необходимого материала для основания круглой постройки.

Описание задачи M10 из Московского математического папируса и R50 папируса Райнда (Ринда), из которых следует это значение π не позволяет восстановить метод, которым оно было получено. Иногда исходят из построения, представленного на рис. 1 а), где площадь неправильного восьмиугольника равна площади приведенной окружности при $\pi = \pi_e$ [15, fig. 13.6]. В нашем случае число π_e связано с приближением $9/8$ для $\sqrt{5}/2$ и геометрическим построением, приведенным на рисунке 1 б) [21, fig. 10]. На нем площадь квадрата $ABCD$ равна площади круга α . Этому варианту соответствует сам текст задачи R50, где S круга диаметром 9 у.е. равна S квадрата со стороной 8 у.е. Поскольку модуль l_1 использовался, скорее всего, только на протяжении III и IV династий, то и появление этого приближения для π , если оно было связано с формулой (1), следует отнести ко времени их правления, т.е. к XXVII — XXVI вв. до н.э. Отметим, что задачи M10 и R50 сформулированы так, что из нее не следует выделение константы π_e . Но если удастся обнаружить древнеегипетскую постройку, в который хотя бы частично присутствовало проявление или круга с радиусом, кратным bf , или формулы (1), то это будет доводом за вероятность ее выделения.

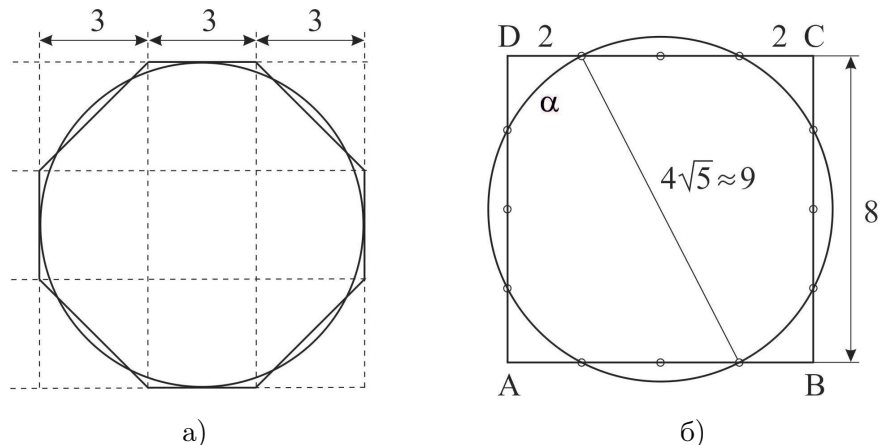


Рис. 1. К египетской формуле для π

Рассмотрим длину в 4 ладони, на которые во времена римского владычества в Египте делился фут. Модуль в 4 ладони, обозначенный на церемониальных царских локтях как d_{sr} , что читается как *djeser*, что может быть скрытой отсылкой к фараону Джосеру (Djeser, Djoser), во времена III династии равный $l_1/2 = 31,5 - 31,8$ см, могли тогда и ввести. D_{sr} в 4 ладони мог сначала выделиться как половина основного мерного модуля Хесира и применяться при построении пропорций 7 : 4 и 9 : 4. Когда царский локоть окончательно сместил с первых ролей основной мерный модуль Хесира, d_{sr} мог использоваться при построении пропорций, отталкивающихся от равностороннего треугольника (7 : 8). При равенстве ширины таких прямоугольников целому числу царских локтей, их длина будет равна четному числу d_{sr} . Так проход в Великой пирамиде равен 105×120 см или 2 гс на 4 d_{sr} . Для различения $l_1/2$ от более позднего d_{sr} в 30 см, обозначим первый — d_{sr_0} .

В таблице 1 приведены результаты анализа размеров из погребального комплекса Джосера. На первый взгляд, из нее следует предпочтение введения царского локтя и ладони над d_{sr_0} для ступенчатой пирамиды, поскольку величины локтей в строках 1 — 3 совпадают. Но размеры саркофага, 296×165 см, дают первую подходящую дробь $9/5$ ($\varepsilon = 0,3\%$), что сразу выделяет модуль в $32,9 - 33$ см, в то время как пропорции, вытекающие из размеров в ладонях, не дают подходящей дроби, и дробь $20/11$, несмотря на большие числа, имеет значительно большую погрешность ($\varepsilon = 1,4\%$). Расхождение модулей, полученных из размеров саркофага и погребальной камеры, может быть связано с историческим разнесением во времени их появления. Возможно, саркофаг делался раньше, еще до строительства первоначальной мастабы, в то время как окончательный вариант погребальной шахты уже несет в себе результат работы над системой модулей, с приравниванием l_1 восьми ладоням.

Таблица 1. Размеры в мемориальном комплексе Джосера в царских локтях (rc), ладонях (p) и d_{sr_0} [17, с. 88, 93]

№	Деталь	Размер (м)	Размер (rc или p)	rc (см)	Размер (d_{sr_0})	d_{sr_0} (см)
1	Погребальная камера	7,3×7,3	14×14 rc	52,1±0,3	23×23	31,74±0,17
2	Сакофаг	2,96×1,65×1,65	40×22×22 p	52,15±0,35	9×5×5	32,95±0,05
3	Погребальная камера ю. м.*	7,0×7,0	94×94 p	52,1±0,3	22×22	31,8±0,2
4	Сакофаг ю. м.	1,6×1,6×1,3	3×3×2,5 rc	52,8±0,8	5×5×4	32,15±0,65
5	Первый магазин ю. м.	18×1,6	34×3 rc	53,1±0,2	56×5	32,05±0,17

* ю. м. — южная мастаба.

На “локте из Ниппура”, известном артефакте шумерской цивилизации, который датируется XXVIII — XXVII в. до н.э. и хранится в Стамбульском Археологическом музее, третья справа риска отделяет длину от правого конца в 32,95 см [22]. При стандартном анализе размеров саркофага фараона Джосера, основанного на ладони в 7,5 см, эта возможная связь мерных модулей Египта и Шумера не выявляется. Поддерживает вероятность существования такой связи и вхождение длины “локтя из Ниппура” (110,35 см) в диапазон возможных значений l_2 ($110,7 \pm 0,4$ см [5]). Размеры погребальной камеры южной мастабы не выражаются в локтях, а в ладонях дают ничем не обоснованное большое число 94, в то время как в d_{sr_0} получается знаковое число 22. Внутри камеры

находится гранитная усыпальница размером $1,6 \times 1,6$ м и высотой 1,3 м ($5 \times 5 \times dsr_0$) [17, с. 93]. У нее горизонтальная диагональ равна примерно $7 dsr_0$, а ее отношение к высоте — $7/4$ — может быть отсылкой к $\sqrt{3}$ (в современных обозначениях). Диагональ усыпальницы примерно равна $8 dsr_0$. Но эти числа проявляются, только если размеры усыпальницы выражены в dsr_0 (рис. 2). Одновременно этот саркофаг является и доводом в поддержку гипотезы о применении в то время для $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ дробей $7/5$ и $7/4$.

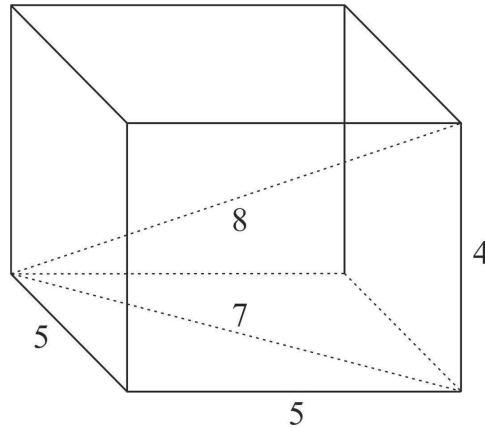


Рис. 2. Саркофаг Южной мастабы комплекса Джосера в dsr_0

Найденный в 1982 году рядом с Розовой пирамидой разбитый пирамидион, согласно реконструкции, имел основание 157—158 см [14, с. 209]. Коринна Росси определяет уклон его боковой грани как $7:5$ и относит ко второй фазе Ломаной пирамиды [13]. При определении его размеров в царских локтях, высота равна $2 + 1/10$ гс [Ibid]. Но $1/5$ длины основания равна $1/2 l_1$ ($\varepsilon = 0,3\%$ — не больше погрешности реконструкции). Тогда основание равно $5dsr_0$, а высота — l_2 (14 ладоней).

Связывался ли этот *djeser* во времена Джосера с длиной ступни? Данные таблицы 1, саркофаг южной мастабы и пирамидион Ломанной пирамиды говорят о выделении dsr_0 в отдельный модуль. Но dsr_0 , будучи равным $1/2 l_1$, для своего выделения в самостоятельный модуль должен был иметь дополнительное основание. В качестве такого видится возможность его соотнесения с какой-либо частью человеческого тела, тем более, что ни один из четырех модулей Хесира не имел прямой отсылки к размерам человека, не считая деления трех из них на ладони. Dsr мог упрочить свою связь с длиной ступни, став равным 12 дюймам, т.к. число 12 и “нога” ассоциируются с ходом времени (12 часов от восхода до заката, 12 месяцев в году), что могло поддержать выделение фута. Но когда в Древнем Египте появился дюйм?

Математика пирамид Гизы и появление дюйма

На раннем этапе истории архитектуры выделилась дробь $14/11$, происхождение которой до конца не ясно⁴, которая проявляется в пропорциях пирамиды Снофру в Мейдуме и погребальной камеры Ломаной [5] и является основной для пропорций Великой пирамиды. Щетников предлагает путь появления дроби $14/11$, отталкивающийся от нахождения дроби $123/55$ для $\sqrt{5}$ и выделения золотого прямоугольного треугольника Кеплера, у которого гипотенуза в Φ (1,618...) раз больше основания [9]. Но он математически достаточно сложен для времени возведения пирамиды в Мейдуме, тем более, что в ней проявляется применение более простых дробей для $\sqrt{5}$ ($9/4$ или $20/9$ [5]). Нельзя исключать и той возможности, что изначально модуль Хесира l_4 , равный $11/14 l_1$, определялся геометрически, как основание треугольника Кеплера с высотой l_1 , без понимания особого значения

⁴Она обнаруживается в пропорциях основания шумерского Белого Храма в Уруке, датируемого концом IV тысячелетия до н.э.

числа Φ и без получения дроби $11/14$ ($|14/11 - \sqrt{\Phi}|/\sqrt{\Phi} \approx 0,00056$). При этом главенствующую роль приобретает размер не основания, а высоты пирамиды, которая выражается круглым и символическим числом, связанным с Осирисом и фараоном, основных мерных единиц. И только во времена использования царского локтя эмпирически было обнаружено, что при высоте в 1 гс искомое основание прямоугольного треугольника равно 5,5 ладоней. И могли или ввести модуль $m_4 = 11/7$ гс = 11 ладоней, или закрепить за этим уклоном секед⁵, введенный не раньше строительства пирамид Гизы, в 5,5 ладоней. Пирамиды с уклоном Великой при высоте N гс имеют длину основания — $N m_4$. Поддержкой этой гипотезы являются пирамиды жен Хеопса с этим уклоном, длина основания которых в гс не делится без остатка на 11.

Щетников пишет о знании еще одной дроби для $\sqrt{5} - 47/21$, связывая с ее использованием размеры погребальной камеры фараона в Великой пирамиде [9]. Высота этой камеры (586 см) получается целым числом только в дюймах (235), где последний определяется как $1/21$ гс. Ее отношение к ширине ($235/210 = 1/2 \times 47/21$) говорит о применении дроби $47/21$ для $\sqrt{5}$. Щетников предлагает и геометрический метод, которым в III тысячелетии могли получить это приближение. Можно предположить, что дюйм был выделен как $1/21$ часть царского локтя в следствии нахождения дроби $47/21$ для $\sqrt{5}$, с тем, чтобы получать целые числа при построении прямоугольников с отношением сторон $\sqrt{5} : 1$ и $\sqrt{5} : 2$.

Реконструкция Щетникова исходного плана погребальной камеры, в которой выстраивается треугольник (3, 4, 5) (рис. 3, [9]), подразумевает знание формулы Пифагора, а значит и приближенности дробей, получаемых для квадратных корней. Но Лауэр считал, что вертикальный размер погребальной камеры фараона мог отмериваться вставкой диагонального шеста длиной в 15 локтей, т.е. без нахождения дроби для $\sqrt{5}$ и гипотетического знания формулы Пифагора, хотя и с сохранением знания пифагоровой тройки (3, 4, 5) [6, с. 221]. Использование шеста длиной в 15 локтей менее удобно, чем деление царского локтя на 21 дюйм или использование для вертикального размера мерного модуля $m_3 = 47/21$ гс ($117,4 \pm 0,1$ см) — аналог модуля l_3 времен III династии [5]. Но могли использовать и геометрически найденный модуль $m_3 = \sqrt{5}$ гс, который отличается от $47/21$ гс всего на 0,09%. Размеры служебной камеры Веллингтона, ширина которой равна 10 гс (206 англ. дюймов), а длина — $10 m_3$ (462 англ. дюйма) [12], поддерживают это предположение.

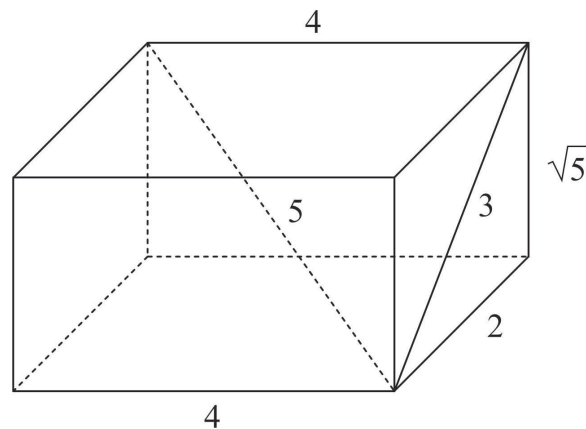


Рис. 3. Пропорции камеры фараона в Великой пирамиде, $1 = 5$ гс, Щетников [9]

Размеры погребальной камеры фараона однозначно не говорят о применении дюйма в этой пирамиде. Но за него — размеры «вентиляционных воздуховодов», равные 25×30 см (8×10 дюймов) и, как это будет показано далее, размеры саркофага фараона. В пирамиде Хеопса, как и в пирамидах его отца Снофру, скорее всего, использовалось сразу несколько модулей: дюйм — для мелких деталей; гс — для основных размеров; пара гс и d_{sr} — для наклонных проходов (105×120 см); пара гс и

⁵Основание прямоугольного треугольника, вертикальный катет которого равен гс.

m_3 — для задания пропорции, содержащей $\sqrt{5}$, и l_1 (63,5 см) — для некоторых служебных размеров и длин коридоров⁶.

Дюйм — второй после царского локтя мерный модуль, не имеющий естественного основания в пропорциях человека. Соотнесение ему толщины большого пальца — следствие уже существующего до этого деления ладони на 4 пальца, что при ее делении на 3 части толкает к введению “большого пальца”. Но визуального деления ширины ладони на 3 больших пальца — нет. Хирш считает, что введение в Древнем Египте “большого пальца”, в 4 : 3 длины пальца может быть обязано сельскохозяйственным нуждам, поскольку плотность эммера⁷ на 1/3 меньше плотности ячменя, “следовательно, для равного веса, контейнер, наполненный эммером, будет на 1/3 больше, чем контейнер заполненный ячменем” [16, с. 33]. И подтверждение существования большого пальца в Древнем Египте он получает на основании анализа церемониального царского локтя фараона Аменемпе (1001 — 992 гг. до н.э.) [16, с. 38-51]. Согласно его исследованию, одна и та же ладонь на нем делилась как на 4 пальца (“черная серия”), так и на 3 больших пальца (“белая серия”). Но отношение объемов двух равных по весу мер ячменя и эммера становится отношением длин только в случае применения цилиндрического контейнера. Тем более, что палец и дюйм — слишком малые величины для измерения высот контейнеров с зерном. К этому можно добавить, что со времен Джосера пропорция 4 : 3 обеспечивалась отношением основного мерного модуля Хесира к простому локтю в 6 ладоней, использование которых для измерения объемов зерна, на первый взгляд, представляется предпочтительным. Если не обнаружится применение большого пальца до IV династии, то предлагаемая здесь гипотеза его появления является более предпочтительной, чем вариант Хирша. Отметим, что о существовании модуля в 2,5 см писал в 1991 году Виктор Н., исследуя сетки киосков Древнего и Нового царств [23].

Если выявление факта существования дюйма на основании анализа помещений размерами в несколько метров вызывает сомнения, то его обнаружение в изделиях религиозного искусства Древнего Египта, где ожидается применение целого числа единиц длины, было бы сильным доводом в поддержку представлений о его существовании. Одним из таких предметов является “Гроб Сенби” (1918—1859 гг. до н.э.), хранящийся в Кливлендском художественном музее. Размеры его боковой грани (70 × 55 см) получаются целыми числами только в дюймах (28 × 22), которые являются значимыми в религиозном строительстве и дают невольную отсылку к пирамиде Хеопса и своей пропорцией 14/11.

Избегание использования для большого пальца Древнего Египта понятия “дюйм” и “фут” для d_{sr} оправданно только в рамках отсутствия доказательств отождествления d_{sr} с длиной ступни и их связи с римскими футом и дюймом. Но использование большого пальца в 2,5 см и d_{sr} в 12 таких пальцев в Египте времен Птолемея [24, с. 158] создает естественный путь для путешествия фута и дюйма из Египта в Грецию и Рим. Стоит обратить внимание и на близость по величине римского фута (29,6 см) к d_{sr} (29,8 — 30 см).

Склонность к выражению всех архитектурных размеров через царский локоть не позволяет обнаружить использование тройки (3, 4, 5) в пирамиде Хефрена. Как пишет Щетников, ее размеры равны: основание (a) — 720 и высота (h) — 480, апогема — 600 футов (фут = 29,9 см)⁸ [9]. Историки выражают их в царских локтях ($a = 411$ и $h = 274$), в которых не только не проявляется применение тройки (3, 4, 5), но и основание соответствующего прямоугольного треугольника не равно целому числу локтей. Но, скорее всего, пирамида Хефрена является примером как отсутствия закрепления использования царского локтя для основных размеров после его применения в пирамиде-спутнике Ломаной, в Розовой и Великой пирамидах, так и использования, как минимум, двух модулей — гс и

⁶Ширина камеры Нельсона равна $8 l_1$; общая длина горизонтальной части нижнего коридора — $14 l_1$, и т.д. Модуль m_3 мог использоваться не только в паре с гс. Так, первоначальная длина входного горизонтального участка до пересечения с Поднимающимся коридором равна $24 m_3$. Исходные размеры: [12, 18].

⁷Тип пшеницы.

⁸Хотя в ней мог применяться не d_{sr} , а мерный модуль в $8/7$ гс, который называется n_{bj} [16, с. 23-25] — аналог основного мерного модуля Хесира.

dsr. Входной проход, идущий под уклоном вниз, у нее, как и в Великой, равен $2 \text{ rc} \times 4 \text{ dsr}$.

Для отношения горизонтальных размеров погребальной камеры пирамиды Хефрена (1415×497 см, [20, с. 80]) получается пара достойных внимания подходящих дробей: $17/6$, $20/7$, с отличием от отношения — $0,49\%$ и $0,35\%$ соответственно⁹. Дробь $17/6$ образует идеальную квазипифагорову тройку¹⁰ (и.к.т.):

$$6^2 + 17^2 = 18^2 + 1.$$

Из этой формулы, после ее деления на 6^2 и переноса 1 в правую часть, получается приближенное значение для $\sqrt{2} - 17/12$. Но только тогда можно говорить, что было использована пропорция $17:6$, когда $1/6$ и $1/17$ часть соответствующих сторон достаточно хорошо встраивается в систему мерных модулей. $497/6 = 82,8 \text{ см} = 11 \times p \times 1,004$ и $1415/17 = 83,24 \text{ см} = 11 \times p \times 1,0089$, где ладонь (p) равна $7,5 \text{ см}$. Отличие от 11 ладоней (m_4) выходит за границы допустимого, хотя и соответствующий возможный царский локоть ($52,7 - 52,9 \text{ см}$) не выходит за границы, установленные Хиршем. Этот модуль в 11 ладоней мог использоваться, только если суммарная погрешность его изготовления и применения была порядка $0,5\%$, что, на первый взгляд, представляется завышенным. Т.е. использование дроби $17/12$ для $\sqrt{2}$ не получает достаточного подтверждения. Для следующей дроби получается модуль в $70,9 \pm 0,1 \text{ см}$, равный 2 bf , а для $\sqrt{2}$ — приближение $10/7$. Это пока самое раннее возможное появление большого фута, которое стоит отставить в сторону, и рассмотреть более ожидаемые варианты. Дробь $54/19$, принятая на основании использования царского локтя (размеры камеры: $27 \times 9,5 \text{ rc}$), имеет лучшее соответствие отношению размеров камеры ($\varepsilon = 0,18\%$), чем $20/7$. В этом случае для $\sqrt{2}$ получается дробь $27/19$ ($\varepsilon = 0,5\%$). Хотя дробь $10/7$ имеет худшее соответствие $\sqrt{2}$, чем $27/19$, но она лежит, в отличие от последней, в русле истории математики, будучи “сопряженной”¹¹ для $7/5$. Такие дроби, сопряженные к $7/4$ и $9/4$ ($12/7$ и $20/9$), уже появлялись при анализе архитектурных пропорций [5].

Отношение ширины камеры к ее высоте ($h = 683(4) \text{ см}$, [20, с. 80]) имеет подходящую дробь $8/11$ ($\varepsilon < 0,02\%$), что может быть значением $\sqrt{3} - 1$ и говорить о применении для $\sqrt{3}$ подходящей дроби $19/11$. Но $\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ и отношению $11/8$ соответствует более ожидаемое приближение $7/4$ для $\sqrt{3}$. Выбор между ними, видимо, следует делать, исходя из наиболее вероятного геометрического построения. И наоборот — наиболее вероятная дробь толкает к конкретному геометрическому построению. На рисунке 4 приведен план камеры с основными пропорциями (приближение $7/4$ для $\sqrt{3}$).

Возможным примером использования и.к.т. является пирамида Микерина в Гизе, половина основания которой равна 100 rc , а высота — 125 rc (уклон боковой грани $5/4$): $100^2 + 125^2 = 160^2 + 25$. Т.е. ее апофема с хорошей точностью равна 160 rc ($\varepsilon = 0,05\%$). Сокращая 25, получим¹²:

$$(4 \cdot 5)^2 + (5 \cdot 5)^2 = 32^2 + 1. \tag{2}$$

Равнобедренный треугольник с отношением высота/основание, равным $5 : 8$, появляющийся в сечении пирамиды Хефрена, знаменитый французский историк архитектуры Виолле-ле-Дюк назвал “египетским”, настолько часто он встречается там в архитектуре. Хотя выбор пропорции $5:8$ не обязательно был связан с конкретными предшествующими геометрическими построениями, он мог быть обусловлен эстетическими соображениями. Рудольф Арнхейм объясняет предпочтение пропорций близких к золотому сечению чувством равновесия формы. Отношение, приближающееся к центрической симметрии квадрата, не дает преимущества ни в одном направлении и, следовательно,

⁹Для отношения размеров камеры максимальная погрешность равна $0,6 + 0,1 + 0,04 = 0,74\%$.

¹⁰Тройка чисел (a, b, c), для которых $a^2 + b^2 = c^2 \pm 1$.

¹¹Будем называть два дробных приближения к \sqrt{N} , a и a^* , сопряженными, если $a \cdot a^* = N$.

¹²Щетников выделяет 5 царских локтей в “сажень Г” [9]. В формуле (2) в скобках приведены размеры пирамиды в сажнях I.

выглядит как статическая масса; тогда как слишком большая разница в двух измерениях подрывает равновесие: более длинное измерение лишено противовеса, обеспечиваемого более коротким. Соотношение, приближающееся к золотому сечению, позволяет форме оставаться на месте, придавая ей естественное живое напряжение [10].

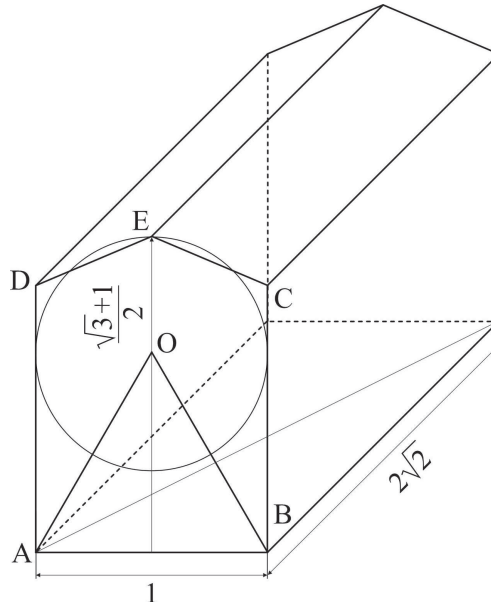


Рис. 4. План погребальной камеры Хефрена, $\triangle ABO$ — равносторонний

Нахождение формулы (2) открывает тему поиска и.к.т. для заданного отношения катетов a/b , вида:

$$(a \cdot m)^2 + (b \cdot m)^2 = n^2 \pm 1. \quad (3)$$

Например, если задана пропорция $3 : 7$ (два числа Осириса), то первой тройкой вида (3), с наименьшим сомножителем m , будет:

$$(3 \cdot 13)^2 + (7 \cdot 13)^2 = 99^2 + 1.^{13} \quad (4)$$

Дробь $3/7$ является подходящей дробью для отношения горизонтальных внешних размеров саркофага в Великой пирамиде ($\varepsilon = 0,26\%$). Эти размеры — 978×2276 мм (измерения В. Петри [19, с. 53]) — равны целым числам только в дюймах, $39 = 3 \cdot 13$ и $91 = 7 \cdot 13$, где дюйм определяется как $1/21$ гс (гс = 52.5 см). Согласно (4), его диагональ с очень хорошей точностью равна 9×11 дюймов. Обнаруженная на основании анализа размеров саркофага тройка чисел, если только появление формулы (4) не является случайным совпадением, — довод в поддержку представления о существовании во времена Древнего Царства дюйма примерно в 2,5 см. И одновременно — пример возможного, неожиданно сильного, развития определенной стороны алгебраической математики.

Мерный модуль, содержащий целое число царских локтей и d_{sr} , равен 4 локтям или египетской оргии. Длина в 5 оргий, 20 локтей или 420 дюймов, была “строительным шнуром” [9]. Строительный шнур делится без остатка на все числа (от 2 до 7), только если царский локоть равен 21 единицам. Напомним, что высота и половина основания Великой пирамиды пропорциональны 20 локтям. Щетников, в поддержку факта применения предлагаемого шнура, напоминает о значении числа 420 в строительстве идеального города-государства в философии Платона, который предлагал ном разделять на 12 секторов, посвященных 12 богам, по 420 жителей в каждом [9].

¹³Следующее m , при котором появляется и.к.т., равно 2574.

Архитектурная математика Древнего Египта и сокрытие знаний

Если дюйм широко использовался в архитектуре, то почему тогда не находят царских локтей, разделенных на 21 дюйм, не считая единичного случая, описанного Хиршем? Возможно, использование дроби $47/21$ для $\sqrt{5}$ было частью тайны, которую жрецы-архитекторы не хотели разглашать, что могло быть поддержано совпадением $21 = 3 \times 7$ – произведение двух чисел Осириса. Пирамида – не просто усыпальница фараона, а, по религиозным представлениям, – “лестница”, обеспечивающая путь к звездам души фараона, слившейся с Осирисом. Математическая точность в построении этих первых “космических кораблей” для путешествия к звездам соединилась с сакральной стороной религиозных представлений. Неразглашение тайны могло быть частью требований для полноты исполнения задуманного. Размеры и пропорции пирамиды, погребальной камеры и саркофага фараона, возможно, должны были помочь достичь тайной цели. Во многих египетских постройках и планах более позднего периода для $\sqrt{5}$ используется худшее приближение, чем $47/21$ ($9/4$ и $11/5$).

Анализ пропорций архитектурных памятников древности позволяет определять, какие приближения архитекторы использовали для квадратных корней. Так, примером использования дроби $17/12$ для $\sqrt{2}$ в Египте является комната 8 из пирамидного комплекса Аменемхета III (XX в. до н.э.), “закодированная” в отношении ее длины к высоте ($389/275$) [16, с. 61], и храм в Абу-Симбеле времен Нового царства, датируемый XIII веком до н.э., который хорошо вписывается в сетку 17×12 [3, с. 148 – 149]. Одновременно для отношения длины комнаты 8 к ее ширине ($389/225$) [16, с. 61]) использована одна из подходящих дробей для $\sqrt{3}$: $19/11$ или $26/15$. Применение ладони для комнаты 8 приводит только к одной содержательной дроби – $26/15$.

Порой анализ архитектурных пропорций может давать неожиданные результаты. Так, две пирамиды Нейт, жены Пепи II (XXII в. до н.э.), и одна из дополнительных Сенусерта I (Senwosret I, XX в. до н.э.) имеют уклон $9/5$ [14, App.; 17, с. 173]. Выбор этого значения непонятен, если не посчитать уклон ребра, который с хорошей точностью равен $14/11$. Достаточно знаковое для истории пирамид значение, чтобы предположить, что архитекторы его обнаружили или даже исходили из него. Но это значит, что для $\sqrt{2}$ могло использоваться приближение – $11/14 \times 9/5 = 99/70$ – пятая подходящая дробь для $\sqrt{2}$, связанная с и.к.т. ($70, 70, 99$). Столь ранее и потом исчезнувшее из истории математики возможное использование столь точного приближения ($\varepsilon = 0,005\%$) поразительно. Гипотезу о нахождении этой дроби для $\sqrt{2}$ поддерживают размеры оснований пирамиды-спутника Нейт ($70 p$) и упомянутой пирамиды Сенусерта I ($70 dsr$). Диагональ последней равна $99 dsr$ ($29,7 m$) с точностью до $1,5 mm$. находка могла быть закреплена из-за знаковости числа 70 , являющегося произведением символических чисел Осириса (7) и завершенности, полноты (10). Ее могли найти эмпирически, рассматривая квадрат 70×70 , или определить как среднее арифметическое между двумя “сопряженными” приближениями для $\sqrt{2}$: $7/5$ и $10/7$. Но это еще не все математические находки, возможно, закодированные в этих пирамидах. Два прямоугольных треугольника FEN и AFH (рис. 5) задают квазипифагоровы тройки $(5 \cdot 7, 9 \cdot 7, 8 \cdot 9)$ и $(5 \cdot 7, 8 \cdot 9, 8 \cdot 10)$ соответственно. Т.е. апофема и ребро примерно равны 72 у.е. ($\varepsilon = 0,096\%$) и 80 у.е. ($\varepsilon = 0,15\%$) соответственно. В пирамиде при основании в $7 \cdot 10$ у.е. и высоте $7 \cdot 9$ у.е. все ее размеры очень близки к целым числам в у.е. (рис. 5).

Проблему существования в Древнем Египте знания с ограниченным доступом рассмотрел Джон Бейнс, изучивший источники от Древнего Царства до Позднего периода, содержащие намеки на различные степени вовлеченности в религиозное знание. Его вывод: древнеегипетский титул «Хранитель тайн», безусловно, наводит на размышления, но природа и содержание этих “тайн” неясны [11]. Не исключено, что именно по этой причине нет и письменных египетских источников ранее периода Птолемея даже о частных случаях формулы Пифагора, хотя ее знание в Египте II тысячелетия до н.э. сейчас не вызывает сомнения у многих египтологов. Аналогично не разглашались особо ценные находки приближений для квадратных корней, важные для перехода от архитектурного плана к строительству. В случае незнания формулы Пифагора в Египте третьего тысячелетия, дроби $17/12$

и $99/70$ для $\sqrt{2}$, а для $\sqrt{5} - 47/21$, $123/55$ и $161/72$ — каждое в свое время могли рассматриваться как точные¹⁴. Интересно, что после предполагаемого нахождения дроби $161/72$ во время правления III династии, последующее использование дробей $47/21$ и $123/55$ во время строительства Великой пирамиды говорит об отсутствии передачи знаний даже между архитекторами-математиками последовательных династий.

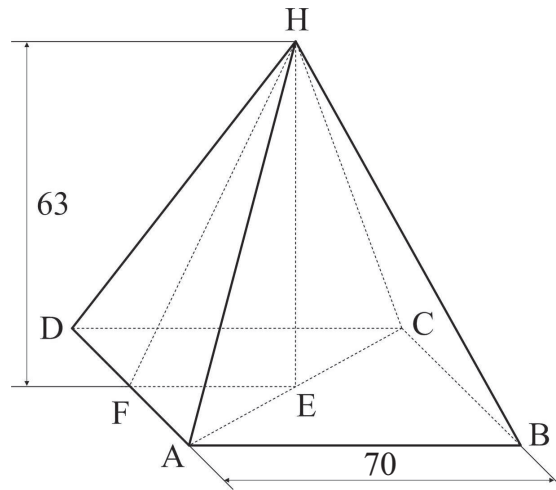


Рис. 5. План пирамид Нейт и дополнительной Сенусерта I, размеры в p и dsr соответственно.
 $AB = 70$, $AC \approx 99$, $FH \approx 72$, $AN \approx 80$, $\sqrt{2} \approx 99/70$, $EN/AE \approx 14/11$

Использование сразу двух дробей для $\sqrt{5}$ в Великой пирамиде говорит о том, что меньшая из них, $47/21$, могла быть найдена и раньше, при Снофру, считаться точной и закрепиться за счет введения дюйма. При незнании формулы Пифагора при Хеопсе, уже дробь $123/55$ могла взять на себя славу точной. И «точные» дроби для квадратных корней могли быть и в списке первых цеховых секретов «ордена» жрецов-архитекторов, и одним из побуждающих мотивов закрепить их знание в пропорциях пирамид. Хотя упрощение в нахождении перечисленных дробей при знании формулы Пифагора столь значительно, и реконструкция Щетникова исходного замысла погребальной камеры фараона Великой пирамиды столь впечатляюща, что это является сильным косвенным доводом за ее обретение, как минимум, ко времени строительства пирамид Гизы. Скорее всего, нахождение достаточно точных значений для основных квадратных корней, даже при понимании их приближенности, представлялось значимым событием, коль скоро их увековечили в пропорциях пирамид и погребальных камер, и их могли скрывать, исходя из религиозных или цеховых целей. Но пока нельзя исключать и того, что соответствующие надписи в пирамидах, фрески на стенах и папирусы просто не дошли до нас.

* * *

Предлагаемая реконструкция истории появления царского локтя и дюйма говорит о возможности определения их структурных отношений с другими мерными единицами в результате развития математики. При этом конкретные ее достижения приобретают религиозный характер, который отражается в нумерологических представлениях. Так, закрепление использования локтя в 7 ладоней могло предваряться и сопровождаться насыщением религиозным содержанием числа 7, его соотношения Осирису. Здесь стоит вспомнить не только выделение этого числа в мифе об Осирисе¹⁵, но

¹⁴Когда древние математики узнали, что площадь квадрата, построенного на диагонали исходного, в 2 раза больше площади исходного, они получили инструмент для убеждения, что все находимые дроби для отношения диагонали к стороне квадрата — приближенные.

¹⁵Осирис был убит своим братом Сетом на 28 году жизни. Сет расчленил тело убитого им Осириса на 14 частей, разбросав по 7 частей в Верхнем и Нижнем Египте.

выделение на небе в созвездии Орион, связываемым с ним, семи ярких звезд. Дюйм как $1/21$ царского локтя также имел скрытую отсылку к числам Осириса. Такое внутреннее согласование религиозной, нумерологической, архитектурной и математической сторон деятельности древних египтян должно было рождать чувство верности обретаемых, порой на ощупь, знаний на их продвижении к ожидающим после смерти звездам, где Млечный Путь был небесным прообразом Нила.

Литература

- [1] Венгерова М.Э. Решение задачи “квадратуры круга” в геометрическом пропорционировании древнерусских храмов X–XV веков // *Architecture and Modern Information Technologies*. - 1 (38). - 2017.
URL: https://marhi.ru/AMIT/2017/1kvart17/PDF/10_AMIT_38_VENGEROVA_PDF.pdf
- [2] Всеобщая история архитектуры. Т. I / Под общей редакцией Д.Е.Аркина, Н.И.Брунова, М.Я.Гинзбурга и др. - М.: Издательство Академии Архитектуры СССР, 1944. - 370 с.
- [3] Всеобщая история архитектуры. В 12 т. Т. I. Архитектура древнего мира. Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Стройиздат, 1970. - 512 с.
- [4] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3 т, Т. 1. - М.: Наука, 1970.
- [5] Ковалев А.Н. Дроби для $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, квазипифагоровы тройки и появление царского локтя, фута и дюйма в Египте времен Древнего царств // *Математическое образование*. - № 102. - 2022. - с. 43-54.
- [6] Лауэр Ж-Ф. Загадки египетских пирамид. - М.: Наука, 1966.
- [7] Радзюкевич А.В., Марченко Ю.Г. К вопросу о размерах и пропорциях пирамиды Хеопса // *Вестник ТГАСУ*. - 2015. - №1. - с. 9-22.
- [8] Шуази О. Всеобщая история архитектуры. От доисторической эпохи до романской архитектуры. - М.: АСТ, 2019.
- [9] Щетников А.И. Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе // *Математическое образование*. - 2006. - № 3(38). - с. 59-71.
- [10] Arnheim R. *The Dynamics of Architectural Forms*. - Berkeley/London: University of California Press, 1977.
- [11] Baines J. *Restricted Knowledge, Hierarchy and Decorum: Modern Perceptions and Ancient Institutions* // *JARCE*. - vol. 27. - 1990. - p. 1-23.
- [12] Bonwick J. *Pyramid facts and fancies*. - London: C. Kegan Paul & Co, 1877.
- [13] Rossi C. *Note on the Pyramidion Found at Dahshur* // *JEA*. - 85. - 1999. - p. 219-222.
- [14] Rossi C. *Architecture and mathematics in Ancient Egypt*. - Cambridge University press, 2003. - 280 p.
- [15] Gillings R.J. *Mathematics at the Time of the Pharaohs*. - Cambridge: Massachusetts Institute of Technology Press, 1972.
- [16] Hirsch A.P. *Ancient Egyptian Cubits – Origin and Evolution*. - PhD thesis. - Toronto, 2013.

- [17] Lehner M. The complete pyramids. - London, 1997.
- [18] Maragioglio V., Rinaldi C. L'architettura delle Piramidi Menfite. Parte IV. Tavole. - Torino, 1962.
- [19] Maragioglio V., Rinaldi C. L'architettura delle Piramidi Menfite. Parte IV. Le Grande Piramide di Cheope. - Torino: Artale, 1965.
- [20] Maragioglio V., Rinaldi C. L'architettura delle Piramidi Menfite, Parte V. Le Piramidi di Zedefra e di Chefren. - Rapallo: Canessa, 1966.
- [21] Robins G., Shute Ch. The Rhind Mathematical Papyrus. - London: British Museum Press, 1987.
- [22] Unger E. Die Nippur-Elle, Publikationen der Kais. Osman. Museen, Konstantinopel, 1916 ders. - Eberts Reallexikon, Stichwort Nippur // Elle. - Bd. VIII. - S. 58. - 1927.
- [23] Victor N. The Rod (Nbj) and its use in Egyptian Architecture // Göttinger Miszellen. - 121. - 1991. - p. 101-110.
- [24] Zignani P. Le temple d'Hathor à Dendara: Relevés et étude architecturale. - Le Caire: Institut français d'archéologie orientale du Caire, 2010.

*Ковалев Андрей Николаевич,
Санкт-Петербург.*

E-mail: ser.levsha@yandex.ru

Образовательные инициативы

Материалы Летней математической школы “Алые Паруса”, июнь 2022 г., 6 класс

Авторский коллектив

Предлагаем вниманию читателя материалы для 6-го класса 1-й смены Летней математической школы “Алые паруса”¹, июнь 2022 г. 6-классниками считались дети, окончившие 6-й класс в 2021/22 учебном году. Особенностью работы было то, что занятия с 6-классниками проводили старшеклассники школы № 179 г. Москвы, окончившие в этом же году 9-й класс². Они и являются авторами-составителями данных учебных материалов.

Введение

На каждом занятии детям предлагался листок с задачами по определенной теме, которая представляет собой некоторый общий метод или идею для решения определенного класса задач. Проводилось предварительное краткое пояснение материала. Затем дети решали задачи и сдавали их устно проверяющим. Можно было переходить к следующему листку, не обязательно сдав все задачи из предыдущего. Когда возможности детей по данной теме иссякали, проводился разбор нерешенных задач для всех.

Вступительная работа

Предполагалось, что по итогам вступительной работы детей поделят на более сильную и более слабую группы. Но поскольку всего шестиклассников оказалось немного (14 человек), а команда проверяющих достаточно большая (5 человек), деления не потребовалось. Были просто выявлены индивидуальные уровни детей.

Задачи расположены НЕ В ПОРЯДКЕ УСЛОЖНЕНИЯ

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 7x + 4y = 3. \end{cases}$$

2. Фрекен Бок сварила вишневое варенье. Если бы она взяла вишни в полтора раза больше, а сахара в полтора раза меньше, получилось бы варенья ровно столько же. Карлсон попробовал и сказал, что с вишней все в порядке, а вот сахара следовало бы взять вдвое больше. Во сколько раз больше варенья получилось бы по его рецепту?

3. У Юры есть калькулятор, который позволяет умножать число на 3, прибавлять к числу 3 или, если число делится на 3 нацело, делить его на 3. Как на этом калькуляторе получить из числа 1 число 11?

¹<https://lmshalyparus.ru/>

²При ненавязчивом кураторстве взрослого преподавателя.

4. В таблице размером $m \times n$ расставлены числа так, что сумма чисел в любой строке равна 100, и сумма чисел в любом столбце равна 100. Докажите, что $m = n$.

5. Можно ли разбить квадрат размером 8×8 с отрезанным угловым квадратиком 1×1 на прямоугольники 1×3 ?

6. Дана шахматная доска. Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки, расположенные внутри произвольного квадрата 2×2 . Может ли в итоге остаться только одна черная клетка?

7. Разбейте квадрат на треугольники так, чтобы каждый треугольник граничил ровно с тремя другими. (Два треугольника граничат по общему отрезку их сторон, который не обязательно совпадает с целой стороной.)

8. На Луне используются монеты по 1, 15 и 50 фердингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил сдачу — на одну монету больше. Какова наименьшая возможная цена покупки? (Нельзя вносить за покупку и получать на сдачу одинаковую монету.)

Инвариант

Определение. *Инвариант* некоторого преобразования — это величина (или свойство), остающаяся постоянной при этом преобразовании.

В качестве инварианта может использоваться четность, остаток от деления на некоторое число, раскраска и т.п.

Задача 1. Конь вышел с поля $a1$ и через несколько ходов снова вернулся на него. Докажите, что он сделал четное число ходов.

Задача 2. Может ли конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

Задача 3. Можно ли разбить числа $1, 2, \dots, 33$ на 11 групп по 3 числа в каждой так, чтобы в любой группе одно из чисел равнялось сумме двух других?

Задача 4. На квадратном поле 10×10 девять клеток 1×1 поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что тем не менее бурьян не сможет распространиться на все клетки.

Задача 5. В народной дружине 100 человек, и каждый вечер трое из них идут на дежурство. Может ли через некоторое время оказаться так, что каждый с каждым дежурил ровно один раз?

Задача 6. Квадрат со стороной 5 заполнен числами так, что произведение чисел в каждой строке отрицательно. Докажите, что найдется столбец, произведение чисел в котором также отрицательно.

Задача 7. Саша начертил квадрат размером 179×179 клеток и поочередно закрашивает в нем по одной клетке. Закрасив очередную клетку, он записывает в ней число — количество закрашенных клеток, соседних с ней. Закрасив весь квадрат, Саша складывает числа, записанные во всех клетках. Докажите, что в каком бы порядке Саша ни красил клетки, у него в итоге получится одна и та же сумма. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)

Задача 8. Замок имеет в плане форму равностороннего треугольника со стороной 100 м. Он разделен на 100 треугольных залов. Все стены залов имеют одинаковую длину — 10 м. В середине каждой стены между залами сделана дверь. Докажите, что если человек захочет пройти по замку, побывав в каждом зале не более одного раза, то он сможет осмотреть не более 91 зала.

Задача 9. Обобщим предыдущую задачу: пусть сторона замка равна k^2 метров и имеется k^2 треугольных залов. Какое наибольшее число залов в этом случае можно осмотреть?

Разнойой

1. Как разделить поровну семь одинаковых пирожных между 12-ю гостями так, чтобы каждое пирожное было разделено не более, чем на 5 частей?

2. Первые две цифры четырехзначного числа либо меньше пяти каждая, либо больше пяти каждая. Про последние две цифры можно сказать то же самое. Сколько всего таких чисел?

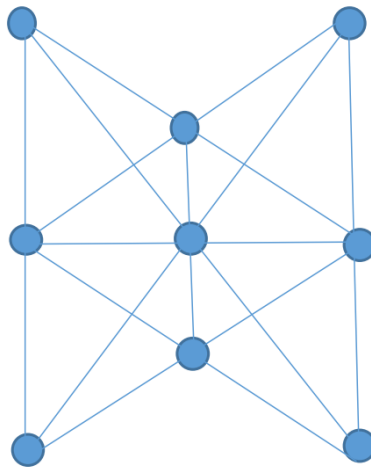
3. В одном из расположенных в ряд ста окопов спрятался вражеский робот. Ваша задача — уничтожить робота. У вас есть пушка, которую можно навести на любой окоп и произвести выстрел. Если робот находится в этом окопе, задача выполнена. Если же робот был в другом окопе, то он, пока дым от выстрела не рассеялся, незаметно от вас обязательно перебегает в один из соседних окопов. Можно ли выполнить боевую задачу?

4. В замке живут принцессы и ведьмы. Известно, что принцессы всегда лгут, а ведьмы — никогда. Король попросил гадалку сказать, кем является данная девушка. Гадалка сказал, что девушка — принцесса. Врет ли гадалка?

5. Как с помощью чашечных весов и гирь весом 1, 3, 9, 27 и 81 г (использовать каждую можно только один раз) уравновесить груз весом а) 31 г; б) 32 г; в) 49 г?

6. В магазине в ряд лежат 21 красный и 21 зелёный доширак. Найдите такое минимальное k , что при любом изначальном порядке дошираков можно убрать k красных и k зеленых так, чтобы оставшиеся зеленые макаронки лежали подряд и оставшиеся красные тоже.

7. На столе лежат 9 яблок, образуя 10 рядов по 3 яблока в каждом (см. рисунок). Известно, что у девяти рядов веса одинаковы, а вес десятого ряда отличается. Есть электронные весы, на которых за рубль можно узнать вес любой группы яблок. Какое наименьшее число рублей надо заплатить, чтобы узнать, вес какого именно ряда отличается?



Подсчет двумя способами

1. Можно ли в прямоугольной таблице 5×10 расставить котиков так, чтобы количество котиков в каждой строке было равно 30, а в каждом столбце — 10? (Ставить можно хоть десять котиков в клетку.)

2. Известно, что среди бомжей каждый седьмой — математик, а среди математиков каждый пятый — бомж. Кого на свете больше, бомжей или математиков?

3. Мяч Никочки сшит из 32 кусочков: розовых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный кусочек граничит только с розовыми, а каждый розовый — с тремя чёрными и тремя розовыми. Сколько кусочков розового цвета?

4. Имеется много одинаковых квадратов. В вершинах каждого из них в произвольном порядке написаны числа 1, 2, 3 и 4. Квадраты сложили в стопку и написали сумму чисел, попавших в каждый из четырёх углов стопки. Может ли оказаться так, что

а) в каждом углу стопки сумма равна 2004?

б) в каждом углу стопки сумма равна 2005?

5. По кругу расставлены бежевые и синие числа. Каждое бежевое число равно сумме соседних чисел, а каждое синее — полусумме соседних чисел. Докажите, что сумма бежевых чисел равна нулю.

6. Дан набор, состоящий из таких $n > 2$ чисел, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе равно 0.

7. На сторонах модного шестиугольника было нарисовано шесть чисел, а в каждой вершине — число, являющееся суммой двух чисел на смежных с ней сторонах. Затем все числа на сторонах и одно число в вершине удалили. Можно ли найти число, стоявшее в вершине?

8. Ева, Лука и Вася пришли на матан. Валерий Марсович пообещал им конфетки “Марсианка” в обмен на задачи. Тот, кто решил первым, получал четыре конфетки. Тот, кто решил вторым — две, а последний неудачник, решивший задачу, получал 1 конфету. В конце урока ребята сказали, что каждый получил ровно 20 конфет. Не пытаются ли они надуть учителя?

9. а) Можно ли занумеровать рёбра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров рёбер, которые в ней сходятся, была одинаковой?

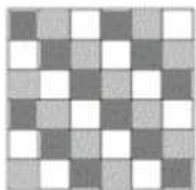
б) Аналогичный вопрос, если расставлять по рёбрам куба числа $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

10. Станислав Игоревич покрасил клеточки доски $i \times j$ в два разных цвета. Известно, что на какую бы клетку Валерий Марсович не поставил ладью, она будет бить больше клеток не того цвета, на котором стоит (клетка под ладьей тоже считается побитой). Докажите, что если Владимир Владимирович посчитает количество клеток различных цветов на каждой вертикали и каждой горизонтали, то удивится, что их поровну.

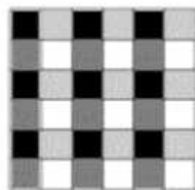
11. Пусть S_i — сумма чисел в i -й строке, G_i — сумма чисел в i -м столбце. В прямоугольной таблице произведение G_i любого столбца на S_i любой строки равно числу, стоящему на их пересечении. Доказать, что либо сумма всех чисел в таблице равняется единичке, либо все числа равняются нулю.

Ножницы и кисточки. Семь раз раскрась — один раз отрежь

Для решения этих задач предлагается использовать раскраску пространства задачи (поля, доски и т.п.) определенным способом и увидеть соответствующий инвариант. Ниже приведены рисунки предлагаемых раскрасок.



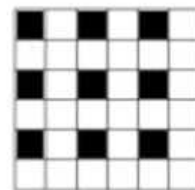
диагональная
в 3 цвета



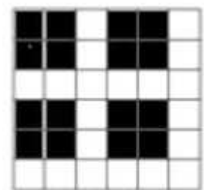
4-цветная
решётка



тигровая
раскраска



окошки



крупные
окошки

Задача 1. Можно ли квадрат 10×10 разрезать на части 1×4 ? Решите задачу: а) с помощью диагональной раскраски в 4 цвета (как она устроена?); б) с помощью 4-цветной решётки; в) с помощью “окошек”.

Задача 2. Можно ли замостить доску 10×10 фигурами: а) Т-тетрамино; б) L-тетрамино?

Задача 3. Кусок сыра имеет форму кубика $3 \times 3 \times 3$, из которого вырезан центральный кубик. Мышь начинает грызть этот кусок сыра. Сначала она съедает некоторый кубик $1 \times 1 \times 1$. После того, как мышь съедает очередной кубик $1 \times 1 \times 1$, она приступает к съедению одного из соседних (по грани) кубиков с только что съеденным. Сможет ли мышь съесть весь кусок сыра?

Задача 4. На каждой клетке доски 7×7 сидит жук.

а) По команде все жуки одновременно переползают на соседние по стороне клетки. Докажите, что при этом хотя бы в одной клетке будет несколько жуков.

б) По команде все жуки переползают в одну из соседних по диагонали клеток. Докажите, что после этого найдётся 7 свободных клеток.

Задача 5. Доска 8×8 разрезана на доминошки размером 2×1 . Может ли быть 15 вертикальных и 17 горизонтальных доминошек?

Задача 6. Из листа клетчатой бумаги размером 17×17 клеточек вырезали 35 квадратиков 2×2 (режут по линиям). Докажите, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё хотя бы один такой же квадратик.

Задача 7. На клетчатой бумаге отмечены произвольным образом 2000 клеток. Докажите, что среди них всегда можно выбрать 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом. Выберите раскраску сами. Угол считается соприкосновением.

Задача 8. Для игры в классики на земле нарисованы клетки с числами от 1 до 10 (см. рис.). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была 1 раз, на клетке 2 — 2 раза, ..., на клетке 9 — 9 раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

Задача 9. Дан куб $6 \times 6 \times 6$. Докажите, что его нельзя разбить на параллелепипеды $4 \times 1 \times 1$.

Задача 10. Клетчатая доска 10×10 замощена Т-тетрамино и L-тетрамино. Какое наибольшее количество фигурок L-тетрамино могло быть использовано?

Задача 11. Какое наибольшее количество несоприкасающихся (даже по диагонали) кораблей 1×4 можно разместить на доске 10×10 ?

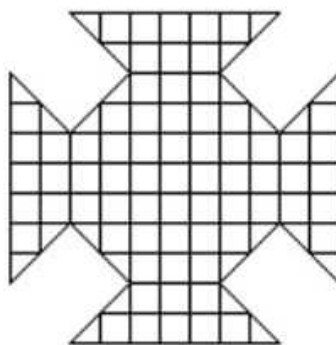
Задача 12. Разрежьте флаг с 6 полосами на две части так, что бы из них можно было сложить флаг с 8 полосами.

Задача 13. Разрежьте квадрат 5×5 с дыркой в центре двумя прямыми на 4 части так, чтобы из них и еще одного обычного квадрата 5×5 можно было сложить новый квадрат.

Задача 14. Разрежьте “мальтийский крест” на рисунке на

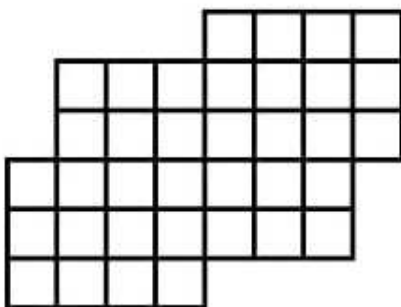
а) 6 частей так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

б) 5 частей так, чтобы из них можно было сложить квадрат.



Задача 15. Дано три квадрата: 2×2 , 6×6 и 9×9 . Разрежьте самый большой квадрат на три части так, чтобы из полученных пяти фигур можно было сложить один квадрат.

Задача 16. Разрежьте фигуру на рисунке на 4 равные части.



Задача 17. В прямоугольнике 3×5 вырезали центральную клетку. Разрежьте получившуюся фигуру на две одинаковые части пятью способами. Разрез должен идти по линиям клеток.

Играем или страдаем. Математическая вертушка

Математическая вертушка — это командная игра, команды из 4-5 учащихся перемещаются по “станциям”, на которых получают небольшие задания. Их надо решить за ограниченное время, за решения команды получают определенное количество баллов. По итогам обхода всех станций определяется команда-победитель. Приведены материалы 4-х станций для шестиклассников.

Станция “алгебра”

1. Дана последовательность $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$. Расставьте в ней плюсы и минусы вместо звездочек так, чтобы получилось наименьшее неотрицательное число.
2. Найти последнюю цифру числа $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 999 \cdot 1000$.
3. Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 1999?
4. За один ход разрешается или удваивать число, или стирать его последнюю цифру. Можно ли за несколько ходов получить из числа 458 число 14?

Станция “комбинаторика”

1. Из чисел от 1 до 11 составляют тройки. Сколько есть троек, в которых нет двух последовательных чисел?
2. Из цифр 1, 6, 9 составляют числа и упорядочивают по возрастанию. Каким по счету будет число 996?
3. Расставьте в ряд числа от 1 до 100 включительно так, чтобы соседние числа отличались не меньше, чем на 50.

Станция “геометрия”

1. Муха ползет по крышке стола размером 40×60 см из одной вершины угла в противоположную вершину (расположенную по диагонали относительно первой) по ломаной линии, которая состоит из отрезков, параллельных сторонам. Какой минимальный путь она проползет, чтобы попасть в противоположную вершину?
2. От треугольника отрезают один угол (это значит, что два других угла должны сохраниться, резать можно, не выходя за среднюю линию, которая отделяет этот угол). Сколько углов может при этом оказаться у полученной фигуры? Попробуйте найти все возможные варианты.
3. Внутри одного четырехугольника поместите другой четырехугольник так, чтобы периметр внутреннего четырехугольника был больше периметра внешнего.
4. Мяч изображает Землю, две точки на нем изображают Москву и Владивосток. Даны нитка и угольники. Найти примерное расстояние от Москвы до Владивостока. (Можно задавать вопросы о размерах Земли.)

Станция «топология»

1. Снять футболку, не снимая надетой поверх нее рубашки. Расстегивать рубашку тоже нельзя.
2. Надо взять веревку двумя руками за 2 конца. Не разжимая рук, завязать узел на веревке.
3. Можно ли переместиться с одного берега реки на другой, не пересекая реку? (По воздуху или под землей нельзя, только по поверхности земли.)
4. Вам завязали глаза и дали в руки не очень длинную веревку, примерно полметра. Расстояние между руками маленькое, 2-3 см. Ассистент подходит и разрезает веревку между руками. Разжимать руки, ощупывать веревку и т.п. нельзя. Как определить, дали вам просто веревку, или веревку, завязанную в кольцо?

Заключение

Заключительная работа, вроде мини-олимпиады.

Разгоняемся:

0.1 (1 балл). Посчитайте сумму чисел от 1 до 100.

0.2 (1 балл). Найдите все такие пары чисел x и y , что $x + y = 2$ и $2x + 3y = 8$.

Взлетаем:

1 (1 балл). Можно ли расставить числа в таблице 5×8 так, чтобы в каждой строке (их 5) сумма была либо 3, либо 5, а в каждом столбце — либо 2, либо 4?

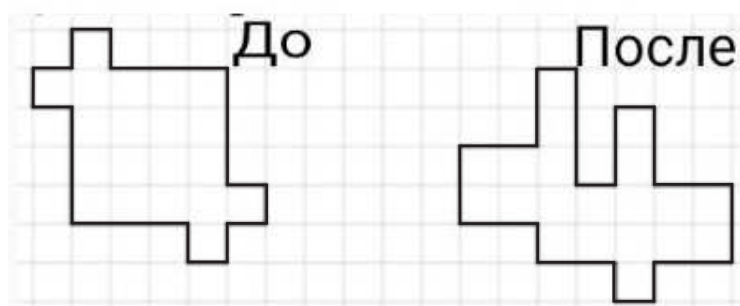
2 (1 балл). Два Бори играют в игру. Боря Б меняет монету, которую дает Боря К, на 5 других. Боря Б победит, если на столе окажется 26 монет. Кто победит?

3 (1 балл). На каждой клетке доски размером 9×9 стоит фишка. Алехандро Доширакович хочет передвинуть каждую фишку на одну из соседних четырех клеток так, чтобы снова ни одна клетка не осталась пустой. Получится ли у него?

4 (2 балла). В банановой республике прошли выборы в парламент, в которых участвовали все жители. Все, голосовавшие за партию «Мандарин», любят мандарины. Среди голосовавших за другие партии 90% не любят мандарины. Сколько процентов голосов набрала партия «Мандарин» на выборах, если ровно 46% жителей любят мандарины?

5 (2 балла). Даны 102 подряд идущих числа. Разрешается к любым двум из них прибавить по единице. Можно ли, проделав это несколько раз, сделать все числа равными?

6 (2 балла). Разрежьте фигуру, изображенную слева, по линиям сетки на две равные части и покажите, как из них сложить фигуру, изображенную справа. (Фигуры можно поворачивать и переворачивать. Равными называются фигуры, которые совмещаются при наложении.)



7 (3 балла). Может ли во время шахматной партии на каждой из тридцати диагоналей оказаться нечетное число фигур?

8 (3 балла). В клетки таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторого столбца или некоторой строки. Доказать, что многократным повторением этой операции можно превратить данную таблицу в такую, у которой суммы чисел, стоящих в каждом столбце и каждой строке, неотрицательны.

9 (3 балла). Грани куба $9 \times 9 \times 9$ разбиты на единичные клетки. Куб оклеен без наложений бумажными полосками 2×1 (стороны полосок идут по сторонам клеток). Докажите, что число согнутых полосок нечетно.

Учащиеся 10 Д класса ГБОУ Школа № 179 г. Москвы:

Ибодова Ева, Хлебникова Ника,

Лесных Лука, Липатов Василий.

Информация

Скончался Виктор Борисович Дроздов

От редакции

Редакция с прискорбием сообщает о кончине постоянного автора нашего журнала Виктора Борисовича Дроздова, г. Рязань. Краткие биографические данные о нем можно найти на <https://fiz.1sept.ru/article.php?ID=200600417>

Одним из неожиданных его увлечений была астрология, которую он считал точной наукой, см. <https://mediaryazan.ru/articles/detail/283323.html>

Мы приводим список публикаций В.Б. Дроздова в нашем журнале.

1. № 4(31), 2004 г. Три заметки о решении математических задач: 1. Возможны варианты...
2. Поиск решения математической задачи. 3. Признак прямоугольного треугольника.
2. № 2(37), 2006 г. Шесть выводов формулы “сложного” радикала.
3. № 4(39), 2006 г. За пределами квадратных уравнений.
- 4-5. № 2(42), 2007 г. Конические сечения — космические орбиты. Еще раз об учебниках и реформе математического образования.
6. № 4(44), 2007 г. Комплексные числа — школьникам, студентам, учителям (учебное пособие).
7. № 1(45), 2008 г. Комплексные числа — школьникам, студентам, учителям. Окончание.
8. № 2(50), 2009 г. Алгебраический метод решения задач с параметрами.
9. № 4(52), 2009 г. Семь геометрических задач.
10. № 1(61), 2012 г. Малоизвестное свойство биссектрис треугольника.
11. № 3(71), 2014 г. В старину решали деды...
12. № 4(72), 2014 г. Пять окружностей.
13. № 2(78), 2016 г. Решение четырехугольников.
14. № 1(81), 2017 г. Формула Фусса.
15. № 4(84), 2017 г. Теорема Архимеда и задача ЕГЭ.
16. № 4(88), 2018 г. Замечательные точки и неравенства.
17. № 3(91), 2019 г. Треугольник и биквадратное уравнение.
18. № 2(94), 2020 г. Интересное уравнение.
19. № 1(97), 2021 г. Интересное свойство треугольника.
20. № 4(100) ч. 2, 2021 г. Две заметки по геометрии.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2023 год (включая стоимость пересылки) – 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2023 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,

к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

D. Volovich. Generalization of the Property of the Number of Divisors Function 2

The article studies the question under what conditions the number of representations of a natural number N as a product m of natural numbers is not divisible by m or coprime with m . The case of a simple m is studied, some generalizations to the case of a composite m are given.

S. Bershadsky, S. Kublanovsky. Remarkable Triangles. Finished 7

Four types of triangles are considered, in which the base is the average (arithmetic, geometric, harmonic, quadratic) of the sides. Some new properties of these triangles are described. The second part of the article contains three paragraphs: 1) construction of wonderful triangles with a compass and ruler; 2) description of right-angled remarkable triangles; 3) description of integer remarkable triangles (in this paper they are called Diophantine).

G. Popov. On an Interesting Property of Pascal's Triangle 22

In this note, we present an interesting new property related to the multiplication of infinite matrices composed by elements of both the classical and the modified Pascal's triangle.

B. Voronin, S. Voronina. Problem Parametrization for a Continuous 2D Random Variable Using Moodle 26

The paper considers the parametrization of the problem of a 2D continuous random variable. The case is taken when the density function is distributed uniformly in the region, a right-angled triangle, and is equal to zero in the rest of the plane. The possibility of parametrization allows to issue a separate task for each student, taking into account the fact that checking the work will not take much time for the inspector.

A. Remisov. Los Caprichos Diferenciales. A Series of Plots about Differential Equations 32

Eight plots are presented related to various natural sciences, described by ordinary differential equations, a distinctive feature of which is the simplicity of the mathematical apparatus necessary for the study.

M. Shechenko. Generalization of the Desnano–Jacobi Identity 48

In this paper, the Desnano-Jacobi identity will be generalized, with the help of which some new identities will be proved.

A. Kovalev. Fractions for $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, Quasi-Pythagorean Triples and the Appearance of the Royal Cubit, Foot and Inch in Egypt during the Old Kingdom. Part II 54

It is hypothesized that in the Old Kingdom, after finding the fraction $47/21$ for $\sqrt{5}$, discovered by Shchetnikov when analyzing the proportions of the burial chamber of the Great Pyramid, an inch was introduced as $1/21$ of the royal cubit. Examples are given from architecture and religious art in which the inch was used. It is shown that a “great foot” of 35.5 cm could appear as a paired module to the main Khesir dimensional module for finding the area of a circle.

Authors' team. Materials of the Summer Mathematical School “Scarlet Sails”, June 2022, Grade 6 67

We bring to the attention of the reader materials for the 6th grade of the 1st shift of the “Scarlet Sails” Summer Mathematical School, June 2022. classes with 6th graders were conducted by high school students from school No. 179 in Moscow, who graduated from the 9th grade in the same year. They are the authors and compilers of these educational materials.

Current Information 75

ISSN 1992-6138



9 771992 613776 >