ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двадцать шестой

№ 4 (104)

октябрь - декабрь 2022 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое учебно-методическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 4 (104), 2022 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2022 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 17.01.2023 г.
Стиль верстки разработан С.А. Кулешовым.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (104), октябрь – декабрь 2022 г.

Содержание

Учащимся и учителям средней школы

Ориентированные углы, обобщенные педальные треугольники и обобщенные прямые Симсона

А. Н. Афанасьев

В статье, при помощи ориентированных углов, вводятся понятия обобщенного педального треугольника и обобщенной прямой Симсона. Для вновь введенных понятий доказывается несколько свойств, аналогичных свойствам педальных треугольников и прямой Симсона.

Педальный треугольник и прямая Симсона

Тема педальных треугольников довольно популярно среди любителей геометрии. Читателям рекомендую большую статью «Педальный треугольник» [1], напечатанную в №№ 3(18), 4(19), 2001 г. этого журнала[1].

В начале напомним читателю основные определения и утверждения, связанные с понятием "педальный треугольник".

Пусть P — любая точка внутри данного треугольника ABC, и пусть перпендикуляры, опущенные из точки P на стороны BC, CA, AB будут PA_1, PB_1 и PC_1 как показано на рисунке 1. Треугольник $A_1B_1C_1$, вершинами которого являются основания этих перпендикуляров, называется *педальным треугольником треугольника* ABC для *педальной точки* P [3].

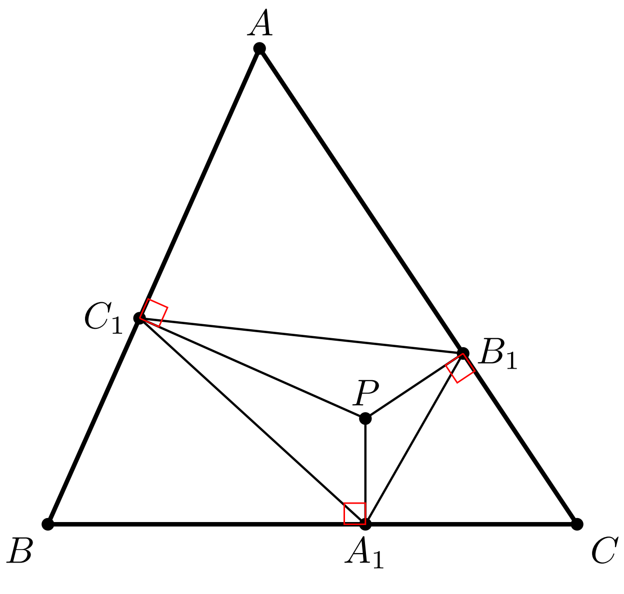


Рис. 1

[1] В ней изучены вопросы о равнобедренном педальном треугольнике, педальном треугольнике, подобном данному, подобном базовому и т.п. —*Прим. ред.*

Заметим, что четырехугольники AB_1PC_1, CA_1PB_1 и BC_1PA_1 вписанные, и следовательно, точка P лежит внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Значит можно построить педальный треугольник $A_2B_2C_2$ треугольника $A_1B_1C_1$, с той же педальной точкой P. Треугольник $A_2B_2C_2$ назовем вторым педальным треугольником треугольника ABC для педальной точки P. А педальный треугольник $A_3B_3C_3$ треугольника $A_2B_2C_2$ для педальной точки P, назовем третьим педальным треугольником ABC для педальной точки P.

Ниже приведем, несколько теорем из [3] и [4], аналоги которых будем доказывать в следующем разделе статьи.

Теорема 1. *Если $A_1B_1C_1$ педальный треугольник треугольника ABC, вписанного в окружность радиуса R, то*
$$B_1C_1 = \frac{BC \cdot PA}{2R}, \quad A_1C_1 = \frac{AC \cdot PB}{2R}, \quad A_1B_1 = \frac{AB \cdot PC}{2R}.$$

Теорема 2. *Третий педальный треугольник подобен исходному.*

На самом деле можно говорить о педальных треугольниках и для педальных точек, не лежащих внутри исходного треугольника. Но в случае, когда педальная точка лежит на описанной около исходного треугольника окружности, педальный треугольник вырождается в отрезок. Об этом следующая теорема.

Теорема 3. *Основания перпендикуляров, опущенных из точки на стороны треугольника, коллинеарны (лежат на одной прямой) тогда и только тогда, когда эта точка лежит на описанной окружности.*

Прямая, о которой идет речь в последней теореме, называется *прямой Симсона*.

Теорема 4. *Величина угла между прямыми Симсона двух точек P и P_1, лежащих на описанной окружности, равна угловой мере величины дуги PP_1.*

Предложение 1. [3]. *Прямые Симсона диаметрально противоположных точек перпендикулярны.*

Ориентированные углы

Ориентированным углом $\measuredangle(l, m)$ между прямыми l и m назовем величину угла, на который нужно повернуть прямую l против часовой стрелки, чтобы получить прямую, параллельную прямой m (или совпадающую с ней). Значение направленного угла определено с точностью до $180°$.

Определим $\measuredangle ABC$ как $\measuredangle(AB, BC)$. Тогда, если точки A, B и D лежат на одной прямой, то
$$\measuredangle ABC = \measuredangle DBC,$$
а если точки B, C и E лежат на одной прямой, то
$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABE.$$

Основные свойства направленных углов:

1. $\measuredangle(l, m) = -\measuredangle(m, l)$; $\measuredangle ABC = -\measuredangle CBA$;
2. $\measuredangle(l, m) + \measuredangle(m, n) = \measuredangle(l, n)$; $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = \measuredangle AOC$;
3. $\measuredangle(l, m) = 0 \Leftrightarrow l \parallel m$; $\measuredangle ABC = 0 \Leftrightarrow A, B, C$ лежат на одной прямой;
4. $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC \Leftrightarrow A, B, C, D$ лежат на одной окружности.

5. Для любых трех прямых l, m, n верно равенство

$$\measuredangle(l,m)+\measuredangle(m,n)+\measuredangle(n,l)=0.$$

В частности, для любых трех A, B, C точек верно равенство

$$\measuredangle ABC+\measuredangle BCA+\measuredangle CAB=0. \tag{1}$$

Об ориентированных углах хорошо написано в [5].

Рассмотрим примеры, показывающие преимущество, которое дает применение ориентированных углов, при решении некоторых задач.

Пример 1. *Пусть окружности ω_1 и ω_2 имеют общую хорду AB, точки M и P расположены на окружности ω_1 а точки N и Q на окружности ω_2 так, что прямая MN проходит через точку A, прямая PQ — через точку B. Докажите, что прямые PM и QN параллельны.*

Решение. Если начнем решать задачу традиционно, то заметим, что придется разбираться как минимум в трех вариантах расположения точек M, N, P и Q относительно прямой AB.

1) Может оказаться, что две точки лежат по одну, а две — по другую сторону от прямой AB;

2) может оказаться, что три точки окажутся по одну, а третья — по другую от прямой AB;

3) может оказаться что все четыре точки окажутся по одну сторону от прямой AB.

А если применить свойства ориентированных углов, то получим очень простое решение: так как точки P, M, A и B лежат на одной окружности, то

$$\measuredangle(MP,PQ)=\measuredangle MPB=\measuredangle MAB,$$

а так как точки A, B, Q и N лежат на одной окружности то

$$\measuredangle(NQ,PQ)=\measuredangle NQP=\measuredangle NAB=\measuredangle MAB.$$

Следовательно,$\measuredangle(MP,PQ)=\measuredangle(NQ,PQ)$, то есть $PM \parallel QN$.

Как вы заметили, нам не понадобился чертеж. Но давайте рассмотрим чертеж, относящийся скажем, к случаю 2) (см. Рис. 2). Как видим, если мы поменяем местами точки M и P, то получим совсем другой рисунок. Это значит, что вариантов взаимного расположения всех шести точек будет гораздо больше, чем вышеперечисленных трех вариантов.

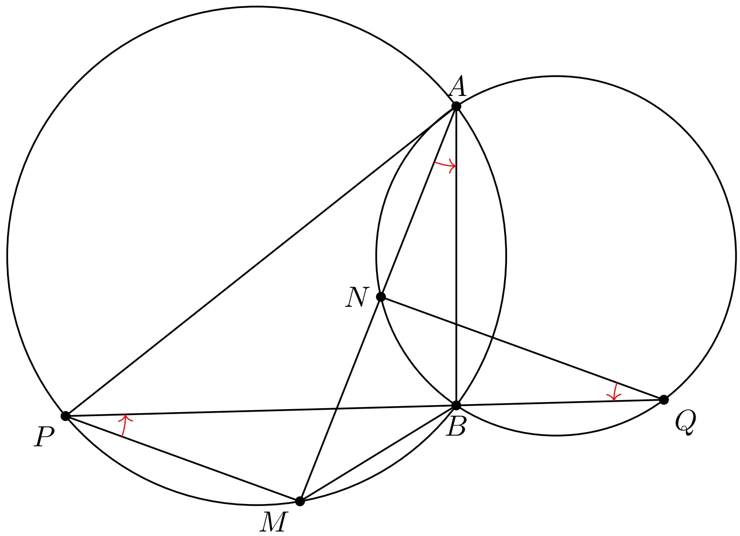


Рис. 2

Следующий пример составлен на основе задачи из журнала "Математика в школе", решение которой было приведено в статье [6] и в книге [7]. Вот сама эта задача.

(**4013, 1995-3**, С.Л. Берлов) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE и CD. Различные точки F и G на стороне AC таковы,что $DF \parallel BC$ и $EG \parallel AB$. Доказать, что четырехугольник $DEFG$ — вписанный.

Мы приводим измененное условие этой задачи, и ее решение с применением ориентированных углов.

Пример 2. *В в произвольном треугольнике ABC проведены высоты AE и CD. Различные точки F и G на стороне AC таковы,что $DF \parallel BC$ и $EG \parallel AB$. Доказать, что точки D, E, F и G лежат на одной окружности.*

Решение. Из условия следует, что $\measuredangle ADF = \measuredangle GEC$. Так как точки A, C, D и E лежат на одной окружности, то с учетом равенства (1)

$$\measuredangle DEC = \measuredangle DEG + \measuredangle GEC = \measuredangle DAC = \measuredangle DAF = \measuredangle DFA + \measuredangle ADF = \measuredangle DFA + \measuredangle GEC.$$

Следовательно, $\measuredangle DEG = \measuredangle DFA = \measuredangle DFG$, что и означает, что точки D, E, F и G лежат на одной окружности.

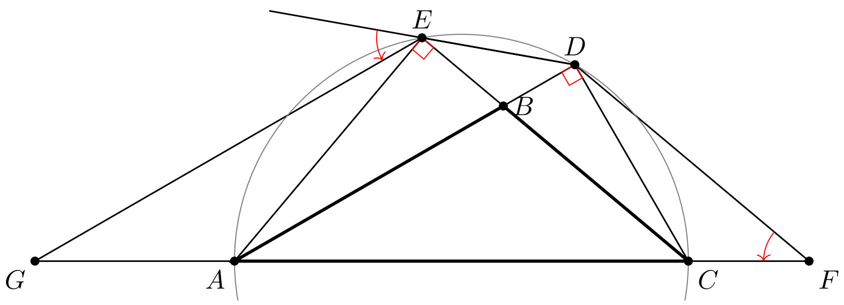


Рис. 3

Обобщенные педальный треугольник и прямая Симсона

Определение. Пусть $-\frac{\pi}{2} < \delta \le \frac{\pi}{2}$, точка P не лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC, а точки A_1, B_1 и C_1 соответственно на сторонах BC, AC и AB (или на их продолжениях) таковы, что $\measuredangle(PC_1, AB) = \measuredangle(PB_1, AC) = \measuredangle(PA_1, BC) = \delta$. Далее в этой статье треугольник $A_1B_1C_1$ будем называть *первым обобщенно-педальным треугольником* треугольника ABC для педальной точки P и угла δ.

Заметим, что при таком определении каждое из множеств точек $\{A, B_1, P, C_1\}$, $\{B, C_1, P, A_1\}$ и $\{C, A_1, P, B_1\}$, всегда является множеством вершин вписанного четырехугольника. Это следует из свойства 4) направленных углов.

Первый обобщенно-педальный треугольник треугольника $A_1B_1C_1$ для педальной точки P и угла δ назовем *вторым обобщенно-педальным треугольником* треугольника ABC, и так далее.

Рассмотрим несколько примеров обобщенных педальных треугольников.

Пример 3. *(Педальная точка — точка Брокара треугольника) Пусть P_1 и P_2 соответственно первая и вторая точки Брокара, а ω — угол Брокара треугольника ABC[2]. Тогда вершинами обобщенно-педального треугольника для педальной точки P_1 и угла $\delta = -\omega$, будут вершины исходного треугольника, но в другом порядке: $A_1 = B$, $B_1 = C$, $C_1 = A$.*

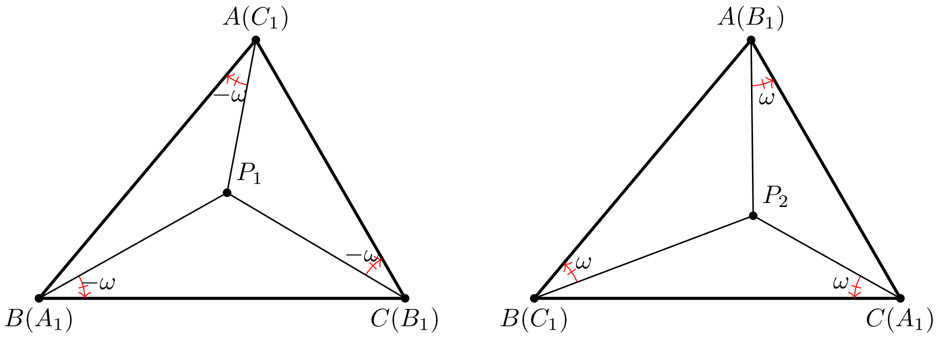
[2] В треугольнике $\triangle ABC$ со сторонами a, b и c, противолежащими вершинам A, B и C соответственно, имеется всего одна точка P такая, что отрезки прямых AP, BP и CP образуют один и тот же угол ω со сторонами c, a и b соответственно: $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. Точка P называется *первой точкой Брокара* треугольника $\triangle ABC$, а угол ω — *углом Брокара* треугольника.

А для педальной точки P_2 и педального угла $\delta = \omega$, получим обобщенно-педальный треугольник с вершинами $A_1 = C$, $B_1 = A$, $C_1 = B$ (см. Рис. 4).

Пример 4. *(Педальная точка — центр вписанной окружности треугольника) Если педальная точка совпадает с центром вписанной окружности треугольника, то вершины обобщенно-педальных треугольников будут лежать на окружности, концентрической вписанной (см. Рис. 5).*

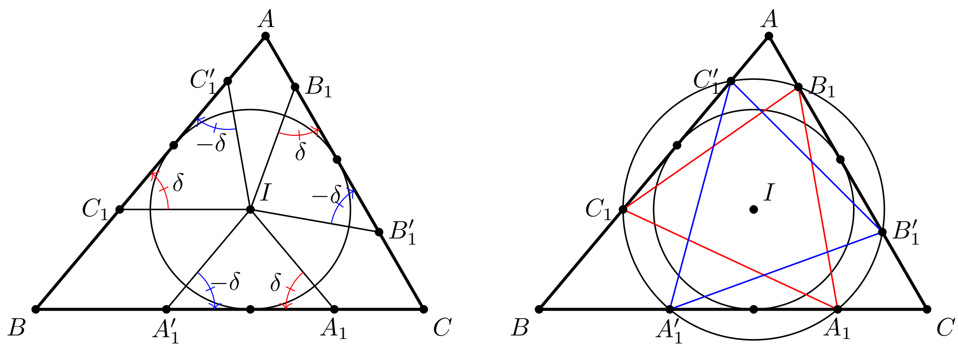
Пример 5. *(Педальная точка — центр описанной окружности треугольника) Пусть P — центр описанной окружности треугольника ABC. Так как четырехугольники AB_1PC_1, BC_1PA_1 и CA_1PB_1 — вписанные (см. Рис. 6), то*

$$\angle B_1A_1C_1 = \angle C_1A_1P + \angle PA_1B_1 = \angle BAP + \angle PAC = \angle BAC.$$



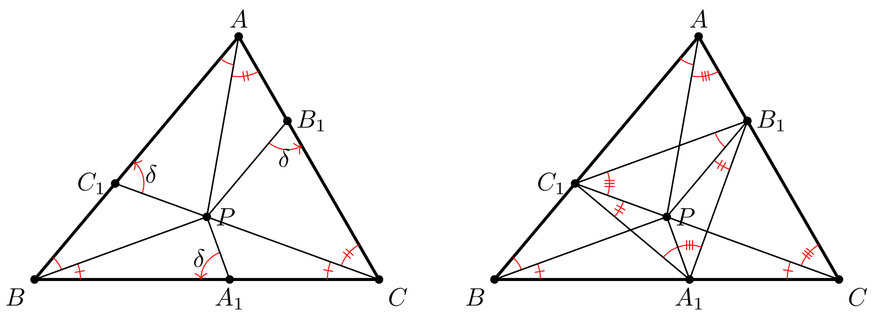
(a) Первая точка Брокара (b) Вторая точка Брокара

Рис. 4



(a) Педальные отрезки для углов δ и $-\delta$. (b) Обобщенно-педальные треугольники

Рис. 5



(a) (b)

Рис. 6

Аналогично,

$$\angle C_1B_1A_1 = \angle CBA, \angle A_1C_1B_1 = \angle ACB.$$

То есть первый обобщенно-педальный треугольник подобен исходному.

Замечание. Точка P будет центром описанной окружности для обобщенно-педального треугольника $A_1B_1C_1$ только в том случае, когда исходный треугольник ABC — правильный.

Теорема 5. (См. Теорему 1.) *Пусть ABC — треугольник, вписанный в окружность радиуса R, P — точка внутри этого треугольника, а $A_1B_1C_1$ — его обобщенно-педальный треугольник для педальной точки P и угла δ. Тогда:*

$$B_1C_1 = \frac{AP \cdot BC}{2R \cdot |\sin\delta|}, \quad A_1C_1 = \frac{BP \cdot AC}{2R \cdot |\sin\delta|}, \quad A_1B_1 = \frac{CP \cdot AB}{2R \cdot |\sin\delta|}.$$

Доказательство. Так как $\measuredangle(PC_1A) = \measuredangle(PC_1, C_1A) = \measuredangle(PC_1, AB) = \measuredangle(PB_1, AC) = \measuredangle(PB_1, B_1A) = \measuredangle(PB_1A) = \delta$. то точки A_1, B_1, P и C_1, по свойству 4 направленных углов лежат на одной окружности. Следовательно:

$$\frac{PA}{|\sin\delta|} = \frac{C_1B_1}{\sin\angle A}. \tag{2}$$

По теореме синусов для треугольника ABC:

$$\frac{BC}{\sin\angle A} = 2R. \tag{3}$$

Из (2) и (3) получаем $B_1C_1 = \dfrac{AP \cdot BC}{2R \cdot |\sin\delta|}$. Для других сторон треугольника $A_1B_1C_1$ рассуждения аналогичны.

Теорема 6. (См. Теорему 2.) *Третий обобщенно-педальный треугольник подобен исходному.*

Доказательство. Соединим точку P с вершинами треугольника ABC. Пусть $\measuredangle PAC = \alpha_1$, $\measuredangle BAP = \alpha_2$, $\measuredangle PBA = \alpha_3$, $\measuredangle CBP = \alpha_4$, $\measuredangle BCP = \alpha_5$, $\measuredangle PCA = \alpha_6$.

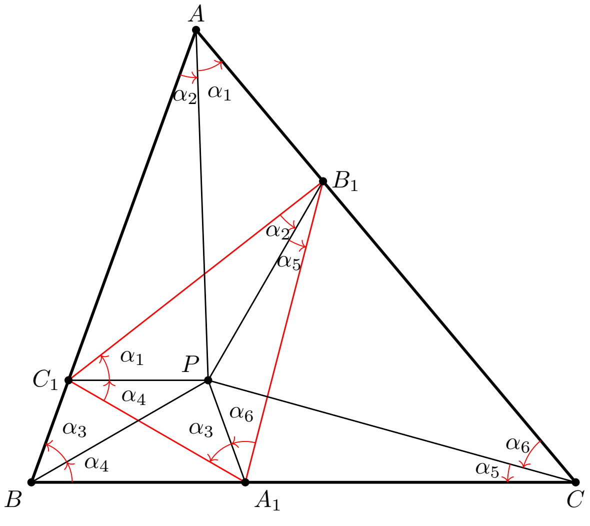


Рис. 7

Так как точки A, B_1, P и C_1 лежат на одной окружности, то $\measuredangle PC_1B_1 = \measuredangle PAB_1 = \measuredangle PAC = \alpha_1$, $\measuredangle C_1B_1P = \measuredangle C_1AP = \measuredangle BAP = \alpha_2$. Аналогично докажем, что

$$\measuredangle PA_1C_1 = \alpha_3, \quad PC_1A_1 = \alpha_4, \measuredangle PB_1A_1 = \alpha_5, \quad \measuredangle PA_1B_1 = \alpha_6.$$

То есть получаются те же углы, но уже в другом порядке. Следовательно, величины шести углов, получающихся при соединении вершин педального треугольника $A_1B_1C_1$ с педальной точкой P получаются перестановкой значений таких же углов исходного треугольника. Обозначим эту перестановку через δ:

$$\delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \alpha_3 & \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_4 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

где верхняя строка — соответственно величины углов $\measuredangle PAC$, $\measuredangle BAP$, $\measuredangle PBA$, $\measuredangle CBP$, $\measuredangle PCB$, $\measuredangle ACP$, а нижняя строка — соответственно величины углов $\measuredangle PA_1C_1$, $\measuredangle B_1A_1P$, $\measuredangle PB_1A_1$, $\measuredangle C_1B_1P$, $\measuredangle PC_1B_1$, $\measuredangle A_1C_1P$. Заметим, что

$$\delta^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_6 & \alpha_3 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где нижняя строка — величины углов $\measuredangle PA_2C_2$, $\measuredangle B_2A_2P$, $\measuredangle PB_2A_2$, $\measuredangle C_2B_2P$, $\measuredangle PC_2B_2$, $\measuredangle A_2C_2P$ соответственно,

$$\delta^3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где нижняя строка — величины углов $\measuredangle PA_3C_3$, $\measuredangle B_3A_3P$, $\measuredangle PB_3A_3$, $\measuredangle C_3B_3P$, $\measuredangle PC_3B_3$, $\measuredangle A_3C_3P$ соответственно, а $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ — второй и третий обобщенно-педальные треугольники.

Следовательно:

$$\begin{aligned} \measuredangle B_3A_3C_3 &= \measuredangle B_3A_3P + \measuredangle PA_3C_3 = \measuredangle BAP + \measuredangle PAC = \measuredangle BAC, \\ \measuredangle C_3B_3A_3 &= \measuredangle C_3B_3P + \measuredangle PB_3A_3 = \measuredangle CBP + \measuredangle PBA = \measuredangle CBA, \\ \measuredangle A_3C_3B_3 &= \measuredangle A_3C_3P + \measuredangle PC_3B_3 = \measuredangle ACP + \measuredangle PCB = \measuredangle ACB, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если в качестве педальной точки взять точку пересечения биссектрис, то первый и второй обобщенно-педальный треугольники подобны.*

Доказательство. Если в (4) и (5) заменить α_2, α_4, α_6 соответственно на α_1, α_3, α_5, то увидим, что $\angle A_1 = \alpha_3 + \alpha_5 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \alpha_1 + \alpha_5 = \angle B_2$, $\angle C_1 = \alpha_1 + \alpha_3 = \angle C_2$.

Теорема 7. (См. Теорему 3.) *Пусть ABC — треугольник, вписанный в окружность ω, P — точка на окружности ω, а точки A_1, B_1 и C_1 соответственно на сторонах BC, AC и AB (или на их продолжениях) таковы, что $\measuredangle(PC_1, AB) = \measuredangle(PB_1, AC) = \measuredangle(PA_1, BC)$. Тогда точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой (обобщенная прямая Симсона).*

Доказательство. Так как точки A, B, C и P лежат на одной окружности, а точки A_1, B, C_1 и P лежат на другой окружности, то

$$\measuredangle APC = \pi - \measuredangle CBA = \pi - \measuredangle A_1BC_1 = \measuredangle C_1PA_1. \tag{7}$$

Заметим, что

$$\measuredangle CPA_1 = \measuredangle CPC_1 + \measuredangle C_1PA_1 = \measuredangle CPC_1 + \measuredangle APC = \measuredangle APC + \measuredangle CPC_1 = \measuredangle APC_1. \tag{8}$$

Следовательно, так как точки C, B_1, P и A_1 лежат на одной окружности, то

$$\measuredangle CB_1A_1 = \measuredangle CPA_1 = \measuredangle APC_1 = \measuredangle AB_1C_1, \tag{9}$$

а это и значит, что точки A_1, B_1 и C_1 — лежат на одной прямой.

Заметим, что равенства (7), (8) и (9) верны независимо от того, как расположена точка P на окружности относительно точек A, B и C. На рисунке 8 показан случай при $\alpha = 60°$, $\beta = 50°$, $\gamma = 70°$, $\delta = 45°$, а точка P расположена на дуге AC, не содержащей точку B.

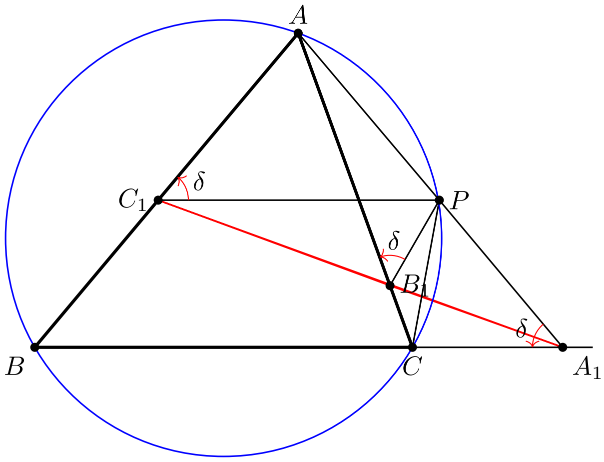


Рис. 8

Теорема 8. (См. Теорему 4.) *Величина угла между обобщенными прямыми Симсона двух точек P и P', лежащих на описанной окружности, равна величине вписанного угла, опирающегося на дугу PP' (меньшую).*

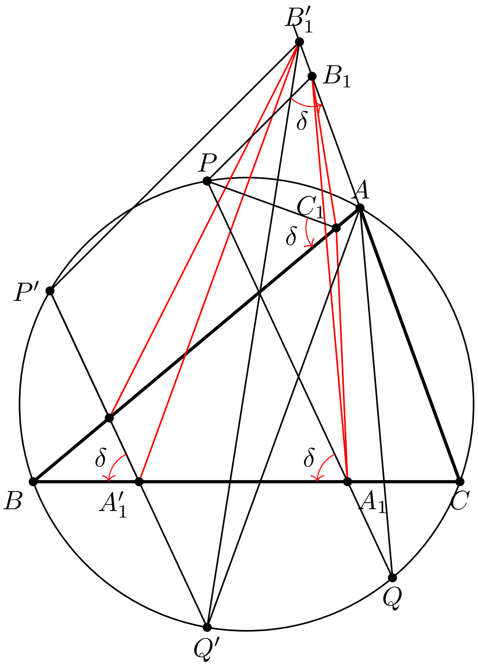


Рис. 9

Доказательство. Пусть точки P и P' на описанной окружности треугольника ABC, а точки A_1 и A_1' на стороне BC, точки B_1 и B_1' на стороне AC, точки C_1 и C_1' на стороне AB (или на их продолжениях) таковы, что

$$\measuredangle(PC_1, AB) = \measuredangle(PB_1, AC) = \measuredangle(PA_1, BC) = \delta; \quad \measuredangle(P'C_1', AB) = \measuredangle(P'B_1', AC) = \measuredangle(P'A_1', BC) = \delta.$$

Пусть Q — вторая точка пересечения прямой PA_1 с описанной окружностью. Тогда, так как точки A, C, P, Q, также как и точки C, A_1, B_1, P, коцикличны, то

$$\measuredangle AQP = \measuredangle ACP = \measuredangle B_1A_1P,$$

и следовательно прямая Симсона параллельна прямой AQ. Если Q' — вторая точка пересечения прямой $P'A_1'$ с описанной окружностью, то вторая прямая Симсона параллельна прямой AQ'. А так как $PQ \parallel P'Q'$, то величины дуг PP' и QQ' равны, и следовательно, величина угла между двумя обобщенными прямыми Симсона равна величине угла $\angle QAQ' = \angle PQP'$.

Как следствие получаем следующее предложение.

Предложение 2. (См. Предложение 1.) *Обобщенные прямые Симсона диаметрально противоположных точек перпендикулярны.*

Литература

[1] Руинский А. Педальный треугольник // Математическое образование. - № 3(18). - 2001. - С. 31-48.

[2] Руинский А. Педальный треугольник // Математическое образование. - № 4(19). - 2001. - С. 65-78.

[3] Грейтцер С.Л., Коксетер Г.С.М. Новые встречи с геометрией. - М.: “Наука”, 1978.

[4] Куланин Е.Д. О прямых Симсона, кривой Штейнера и кубике Мак-Кэя // Математическое просвещение. - № 10. - 2006. - С. 243-264.

[5] Evan Chen. Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads. - The Mathematical Association of America, 2016.

[6] Афанасьев А.Н. Простые геометрические факты, помогающие решить задачу по геометрии // Математическое образование. - № 2(94). - 2020. - С. 2-17.

[7] Афанасьев А.Н. Олимпиадные задачи по геометрии. - Илекса, 2022.

Афанасьев Александр Николаевич,
доцент кафедры теории и методики обучения
математике и информатике
Института математики и информатики
Северо-Восточного Федерального Университета,
им. М.К. Аммосова, г. Якутск,
кандидат педагогических наук.

E-mail: an.afanasev@s-vfu.ru, afalnik@mail.ru

О формуле классической вероятности в опытах с бесконечным числом исходов

О. П. Виноградов

В статье, предназначенной для школьников и преподавателей средней и высшей школы, показано как понятие равновозможности наступления случайных событий может быть использовано при изучении опытов с неравнозможными исходами. В частности, показано, как, используя правильную монету, можно организовать опыт, в котором вероятность наступления одного из исходов этого опыта равна любому наперед заданному числу $(0 < p < 1)$.

В обыденной жизни под вероятностью некоторого события понимают степень уверенности в том, что это событие осуществится. Если некоторое событие почти наверняка не наступит (например, выигрыш автомобиля в лотерее по одному билету), то говорят о маловероятном событии. Если же событие заключается в том, что в лотерее вы не выиграете автомобиль, то это событие почти обязательно произойдет, и говорят об очень вероятном событии.

При некоторых предположениях относительно характера рассматриваемых событий вероятности их наступления могут быть выражены неотрицательными действительными числами, не превосходящими единицы. Таким образом, в этом случае вероятности являются величинами, над которыми можно производить арифметические действия, т.е. их сравнивать, складывать, вычитать, умножать и делить. Рассмотрим несколько простых примеров.

Пример 1. Пусть имеется 30 одинаковых шаров. Покрасим 10 из них в красный цвет, 10 — в синий и 10 — в черный. Положим их в ящик и тщательно перемешаем. Затем, не глядя в ящик, вытащим из него один шар. О такой процедуре будем говорить, что шар вытащен наудачу. Так как число шаров каждого цвета одно и то же (равное 10), то мы не имеем никаких оснований предполагать, что вытащить шар определенного цвета, например черного, более вероятно, чем какого-то другого цвета, например красного. Поэтому естественно назвать эти три случая или события — появление красного, синего или черного шара — *равновозможными* или *равновероятными* событиями.

Обычно в теории вероятностей события обозначаются большими латинскими буквами (например, A, B, C, A_1, B_2).

Пример 2. Бросим игральную кость один раз. Так как мы рассматриваем идеализированные опыты, то мы предполагаем, что игральная кость имеет форму идеального куба и сделана из однородного материала. Поэтому выпадение каждой грани одинаково вероятно и шесть событий: выпадение единицы, двойки, ... , шестерки являются равновозможными или равновероятными событиями. Рассмотрим теперь событие A_1, которое заключается в том, что выпадет грань, на которой написано число, меньшее трех, и событие A_2 — что выпадет грань, на которой написано число, большее или равное четырем. Эти события уже не будут равновозможными, т.к. событие A_1 наступит, когда выпадет одна из 2-х граней (выпадет 1 или 2), а A_2 — когда выпадет одна из 3-х граней (выпадет 4 или 5, или 6).

Как говорилось выше, вероятность “измеряет” степень нашей уверенности в наступлении того или иного события. Если эту уверенность мы хотим характеризовать действительным числом, то в примере 1 разумно приписать каждому из 3-х рассмотренных там событий одну и ту же вероятность. В примере 2 наступление события A_2 более вероятно, чем наступление события A_1, т.к. событие A_2 произойдет, если наступит одно из трех равновозможных событий, а событие A_1 — одно из двух равновозможных событий. Поэтому событию A_2 нужно приписать бóльшую вероятность, чем событию A_1.

Пусть в некотором опыте может произойти N равновозможных исходов или событий и пусть одно из этих событий обязательно произойдет. Предположим также, что если наступит какое-нибудь из этих событий, то никакое другое событие произойти не может (такие события называются несовместными).

Определение 1. Вероятность каждого из N равновозможных несовместных событий, одно из которых обязательно произойдет, равна $\frac{1}{N}$.

Замечание. Определение 1 означает, что выполнен так называемый “принцип равновозможности”. А именно, будем рассматривать опыты, которые обладают свойством “симметрии” в том смысле, что каждый исход в некотором смысле “равноправен” с любым другим исходом (пример 1). Поэтому, если мы хотим характеризовать некоторым числом степень уверенности наступления исходов “симметричного” опыта, то всем возможным исходам нужно приписать одно и то же число. Исходя из этого определения вероятность каждого из трех событий примера 1 равна $\frac{1}{3}$.

Определение 2. Пусть событие A наступит, если наступит одно из $m(m \leq N)$ равновозможных несовместных событий. Если выполнены условия определения 1, то вероятность события A равна $\frac{m}{N}$.

Это равенство принято записывать в виде

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1}$$

Формула (1) носит название *формулы классической вероятности.*

Во 2-м примере событие A_1 наступит, если произойдет два из шести равновозможных событий. В силу определения 2 вероятность события A_1 равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Аналогично, вероятность события A_2 равна $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, т.е. $P(A_1) = \frac{1}{3}$, $P(A_2) = \frac{1}{2}$.

Число m называется числом *благоприятных исходов (или событий)*, а число N — числом *всевозможных исходов (или событий).*

Пример 3. Бросим правильную монету 4 раза. Чему равна вероятность того, что орел выпадет ровно 2 раза?

Иногда начинающие изучать теорию вероятностей делят 2 на 4 и получают ответ $\frac{1}{2}$. Это грубая ошибка. Разберем подробно решение этой задачи. Нетрудно показать, что число всевозможных исходов равно $2^4 = 16$. Выпишем все благоприятные исходы: (P, P, O, O), (P, O, P, O), (P, O, O, P), (O, P, P, O), (O, P, O, P), (O, O, P, P). Таким образом, имеется 6 благоприятных исходов. Из определения 2 вытекает, что ответ на поставленную задачу равен $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Пример 4. Покажем, как, исходя из понятия равновозможности, можно организовать опыт с конечным числом исходов, причем вероятности этих исходов — некоторые наперед заданные рациональные числа, сумма которых равна единице.

Пусть задано n несократимых дробей: $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, ..., \frac{a_n}{b_n}$, причем a_k, $b_k (k = 1, ..., n)$ — целые положительные числа $(a_k < b_k)$, такие, что $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = 1$.

Обозначим через β_n произведение знаменателей этих дробей, т.е. $\beta_n = b_1 b_2 ... b_n$. Для $1 \leq k \leq n$ положим также $\alpha_k = \frac{a_k \beta_n}{b_k}$, т.е. $\alpha_1 = a_1 b_2 ... b_{n-1} b_n$, $\alpha_2 = b_1 a_2 b_3 ... b_{n-1} b_n$, ..., $\alpha_n = b_1 b_2 ... b_{n-1} a_n$.

Тогда

$$\frac{\alpha_k}{\beta_n} = \frac{a_k}{b_k}\,. \tag{2}$$

Заметим, что т.к. $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = 1$, то $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \beta_n$.

Наш опыт будет состоять в следующем: положим в урну β_n неразличимых на ощупь шаров. На каждом из них написано одно из чисел 1, ..., n, причем число шаров, на которых написано число k равно α_k. Тщательно перемешав эти шары, выберем из урны, не глядя, один шар. Вычислим вероятность того, что мы вытащим шар, на котором написано число k. Обозначим это событие через A_k. По формуле классической вероятности из (2) получаем

$$P(A_k) = \frac{\alpha_k}{\beta_n} = \frac{a_k}{b_k}.$$

Пример 5. Приведем пример опыта, в котором число исходов бесконечно.

Будем бросать правильную монету до тех пор, пока впервые не выпадет орел. После этого бросание монеты прекращается, и наш опыт считается законченным. Очевидно, что число бросаний может превзойти как угодно большое наперед заданное число. Например, если в первой сотне бросаний выпала решка, то число бросаний будет больше 100.

Возникает естественный вопрос: как задать вероятности возможных исходов, ведь число всех исходов равно бесконечности и формула классической вероятности в этом случае неприменима?

Заметим, что возможные исходы в рассматриваемом опыте можно записать в следующем виде: ω_1, ω_2, ..., где исход ω_n заключается в том, что орел впервые выброшен в n-м бросании.

Определение 3. События ω_1, ω_2, ... будем называть *элементарными событиями*, а множество этих элементарных событий — *пространством элементарных событий.*

Другим словами, пространство элементарных событий — это множество, элементами которого являются элементарные события.

Если мы бросим один раз правильную монету, то вероятность выбросить орла равна вероятности выбросить решку и равна $\frac{1}{2}$. Поэтому вероятность элементарного события ω_1 равна $\frac{1}{2}$. Запишем это в виде $P(\omega_2) = \frac{1}{4}$.

Аналогично, $P(\omega_n) = \frac{1}{2^n}$, т.к. всего равновозможных исходов 2^n и один благоприятный. Легко проверить, используя формулу для суммы бесконечно убывающей прогрессии, что $\sum_{k=1}^{\infty} P(\omega_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

Таким образом, исходя из понятия равновозможных событий, мы рассмотрели более сложный случай, чем опыт с конечным числом равновероятных исходов. А именно, тот случай, когда число исходов бесконечно и разные исходы имеют разные вероятности.

Пример 6. Покажем, как используя правильную монету, можно организовать опыт, в котором вероятность наступления одного из исходов этого опыта равна любому наперед заданному числу p $(0 < p < 1)$. Обратим внимание, что это число может быть как рациональным, так и иррациональным. Как и в примере 5, будем бросать правильную монету до тех пор, пока не выпадет орел.

Объясним этот способ на трех частных случаях. Известно, что любое действительное число p $(0 < p < 1)$ может быть однозначно представлено в виде

$$p = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + ...,$$

где каждая из величин a_1, a_2, a_3, ... есть или 0, или 1.

Это известное двоичное разложение числа p $(0 < p < 1)$, и чтобы обеспечить единственность, условимся записывать обрывающиеся разложения в форме, в которой все двоичные цифры, начиная с некоторого места, равны 0. Так, например, запишем

$$0,75 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + ...,$$

а не

$$0,75 = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ...$$

Таким образом, имеет место равенство $(0,75)_{10} = (0,11)_2$[1].

[1]На сайте https://programforyou.ru/calculators/number-systems имеется калькулятор перевода числа из одной система счисления в другую.

Пусть, например, $p = 0,640625$. В двоичной системе счисления это число записывается в виде $(0,101001)_2$, так как нетрудно проверить, что

$$0,640625 = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{1}{2^6}.$$

Нас будет интересовать последовательность после запятой, а именно, последовательность (101001). В этой последовательности единицы стоят на 1-м, 3-м и 6-м местах. Вероятность того, что для первого выпадения орла нам потребуется либо 1 либо 3 либо 6 бросаний равна $\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 0,640625 = p$. Это равенство следует из теоремы сложения для несовместных событий.

Пусть $p = (0,875)_{10} = (0,111)_2$. Вероятность того, что нам потребуется либо 1 либо 2 либо 3 бросаний равна $\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 0,875 = p$.

Пусть $p = (\frac{1}{3})_{10} = (0,01010101...)_2$, тогда вероятность того, что бросание прекратится на бросании с четным номером, равна $p = \frac{1}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}}$.

В общем случае нужно записать число в двоичной системе счисления, выписать номера мест после запятой, на которых стоит единица. Пусть эти номера равны $i_1 < i_2 < ...$ Обозначим это множество через A, которое может быть как конечным, так и бесконечным. Тогда $p = \sum_{i_k \in A} \frac{1}{2^{i_k}}$.

Таким образом, если событие заключается в том, что номер броска, при котором впервые выпал орел, принадлежит множеству A, то вероятность такого события равна заданному p.

Пример 7. Обобщим пример 4 на случай опыта, в котором число исходов бесконечно. Мы хотим организовать опыт с бесконечным числом исходов ω_1, ω_2, ... , причем $P(\omega_n) = \frac{a_n}{b_n}$ $(n = 1, 2, ...)$, где a_n, b_n — некоторые наперед заданные целые положительные числа $(a_n < b_n)$, такие что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Пусть имеется бесконечное количество урн.

Пусть в первой урне находится b_1 шаров, из которых a_1 белых и $b_1 - a_1$ черных.

Пусть во второй урне находится $b_1 b_2 - a_1 b_2 = b_2(b_1 - a_1)$ шаров, из которых $b_1 a_2$ белых и остальные — черные.

Пусть в третьей урне находится $b_1 b_2 b_3 - (a_1 b_2 b_3 + b_1 a_2 b_3) = b_3(b_1 b_2 - a_1 b_2 - b_1 a_2)$ шаров, из которых $b_1 b_2 a_3$ белых и остальные — черные.

...

Пусть в n-й урне $(n > 1)$ находится

$$b_1 b_2 ... b_{n-1} b_n - (a_1 b_2 ... b_{n-1} b_n + b_1 a_2 ... b_{n-1} b_n + ... + b_1 b_2 ... b_{n-2} a_{n-1} b_n)$$

шаров, из которых $b_1 b_2 ... b_{n-1} a_n$ белых и остальные черные.

Наш опыт будет состоять в следующем: вытаскиваем шар из первой урны.

Если он белый, то наш опыт прекращается. Если вытащенный шар черный, то вытаскиваем шар из второй урны. Если он белый, то наш опыт прекращается. Если вытащенный шар черный, то вытаскиваем шар из третьей урны и т.д. Событие ω_n заключается в том, что из урн с номерами 1,2, ..., $n-1$ вытащен черный шар, а из урны с номером n вытащен белый шар. Покажем, что

$$P(\omega_n) = \frac{a_n}{b_n}.$$

Для $n = 1$ это очевидно. По формуле классической вероятности для $n = 2$ имеем

$$P(\omega_2) = \frac{(b_1 - a_1) b_1 a_2}{b_1 b_2 (b_1 - a_1)} = \frac{a_2}{b_2}.$$

$$P(\omega_3) = \frac{(b_1 - a_1)(b_1 b_2 - a_1 b_2 - b_1 a_2) b_1 b_2 a_3}{b_1 b_2 (b_1 - a_1) b_3 (b_1 b_2 - a_1 b_2 - b_1 a_2)} = \frac{a_3}{b_3}.$$

...
Для произвольного n доказательство предоставляется читателю.

Виноградов Олег Павлович,
профессор механико-математического факультета МГУ,
доктор физ.-мат. наук.

E-mail: ovinogradov@mail.ru

Производная и монотонность

М. А. Горелов

В статье приведено несколько доказательств возрастания функции с положительной производной, которые не используют развитого аппарата дифференциального исчисления — теорем Ферма, Ролля, Лагранжа. Обсуждаются вопросы принципиальной неэлементарности подобных доказательств, а также целесообразности включения этой тематики в школьный курс математики.

1. Введение

17 марта 2021 г. на семинаре учителей математики в МЦЦМО был сделан доклад П.В. Семенова под названием «От монотонности функции к тождеству Эйлера. Как обосновать аккуратно, но без теорем Лагранжа, Ролля, Ферма, Вейерштрасса утверждение «если $f' > 0$, то f возрастает»». Постановка вопроса мне кажется весьма уместной: доказательства этого утверждения в большинстве учебников прекрасно демонстрируют мощь развитых аналитических методов, но не очень хорошо раскрывают суть дела. Это подходит для студентов, но, наверное, не очень хорошо для начинающих.

Мне не удалось получить доступ к материалам доклада, но кое-что из аннотации позволяет предположить, что его автором выбран не очень правильный путь решения. А именно, там говорится, что требуется «3-4 “листочка” по 6-8 задач». Между тем данная задача — не очень сложная «двухходовка».

Ниже будет приведено три ее решения. Первый шаг во всех решениях общий — несложное преобразование определения производной. Второй шаг состоит в сведении задачи к одной из трех теорем:

- теореме Дедекинда о существовании точной верхней грани;
- принципу вложенных отрезков;
- теореме Вейерштрасса о компактности отрезка.

Таким образом, для понимания решения нужно только хорошее владение понятием производной и определенные представления о «тонкой структуре» множества действительных чисел.

Мне могут возразить, что перечисленные три теоремы не совсем «школьные» и потому более предпочтительным будет более длинное, но и более элементарное доказательство. Увы, такого элементарного доказательства (без ссылок на одну из этих трех теорем или эквивалентных им утверждений) не существует. И это будет *доказано* ниже.

Собственно, в данной статье нет новой математики. Все изложенное давно и хорошо известно. Речь пойдет о чисто педагогической задаче. Вернее о двух таких задачах. Первая из них — локальная: доказать нужное утверждение так, чтобы было понятно начинающему. Вторая — глобальная: как включить этот материал в общий курс математики (и нужно ли это делать)? Бо́льшая часть статьи посвящена первой задаче. О второй будет кратко сказано в последнем разделе.

Итак, перейдем к доказательству интересующей нас теоремы.

2. Формулировка теоремы

Собственно, речь должна идти не об одной теореме, а о целом ряде однотипных утверждений. Каждое из них в той или иной ситуации может понадобиться, поэтому нужно уметь формулировать и доказывать любое из них, хотя, наверное, не стоит их все заучивать. Сформулируем одно из этих утверждений.

Основная теорема. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема во всех точках интервала (a, b) и ее производная $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда функция $f(x)$ возрастает на интервале (a, b).*

Это утверждение можно модифицировать сразу в нескольких направлениях, получая верные и полезные утверждения.

Можно поменять знак «больше» на знак «меньше»: если $f'(x) < 0$, то функция убывает.

Можно заменить знак строгого неравенства знаком нестрогого: если $f'(x) \geq 0$, то функция не убывает.

Можно заменить открытый интервал на замкнутый. Тогда теорема будет звучать примерно так. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех точках интервала (a, b), а ее производная $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a, b]$.

Разумеется, можно рассматривать также неограниченные и «полуоткрытые» интервалы.

Все подобные модификации можно сочетать друг с другом. Оставляю точные формулировки читателю.

Приведенная выше теорема названа основной только потому, что в дальнейшем для определенности мы будем обсуждать именно ее. Все остальные теоремы не менее интересны и важны, но о них мы говорить больше не будем. Доказать их можно либо небольшой модификацией доказательства основной теоремы, либо редукцией к ней. Но каждый раз могут возникнуть определенные тонкости.

Для полноты остановимся на обратной теореме. Строго говоря, утверждение, обратное к утверждению основной теоремы, не верно: функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на интервале $(-1, 1)$, то ее производная в точке $x = 0$ не является положительной. Однако справедливо чуть более слабое утверждение: пусть функция $f(x)$ дифференцируема во всех точках интервала (a, b) и возрастает на интервале (a, b); тогда ее производная $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Об этом утверждении еще будет повод вспомнить.

3. Геометрический смысл производной

Все счастливые семьи счастливы одинаково,
каждая несчастливая семья несчастна по-своему.
Л.Н. Толстой.

Понятие производной глубоко и многогранно. Нас будет интересовать один аспект, который, перефразируя Толстого, можно описать так: все дифференцируемые функции устроены одинаково, каждая недифференцируемая функция устроена по-своему. Чтобы объяснить смысл этой фразы, обратимся к графику какой-нибудь дифференцируемой функции.

На рисунке 1а приведен график функции $f(x) = x^2 + x$ в квадрате $[-1, 1] \times [-1, 1]$ (для сравнения на том же рисунке нарисована прямая $y = x$). График вполне индивидуален: «человек с улицы» вполне может сказать, что нарисована парабола и даже определить коэффициенты соответствующего квадратного трехчлена.

Теперь выделим в центре квадрата $[-1, 1] \times [-1, 1]$ маленький квадратик $[-0.1, 0.1] \times [-0.1, 0.1]$ и увеличим его в десять раз. Мы получим рисунок 1б. Отрезок прямой на этом рисунке остался тем же, а вот график функции $f(x)$ в значительной степени потерял свою индивидуальность и узнать на этом рисунке параболу уже не просто.

Проделаем ту же операцию еще раз: выберем в центре рисунка 1б маленький квадратик и увеличим его в десять раз. Получим рисунок 1в. На нем уже график функции $f(x)$ практически сливается с прямой $y = x$.

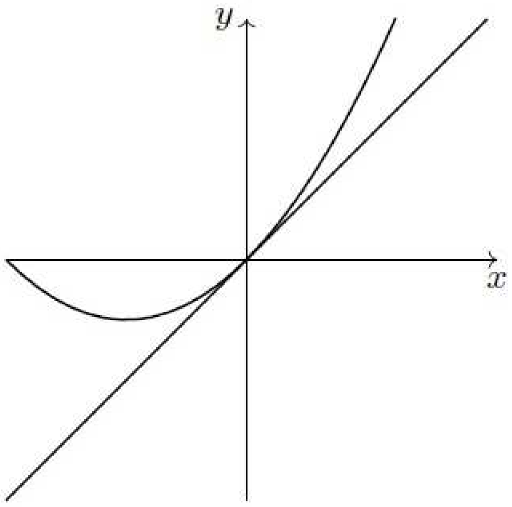


Рис. 1а

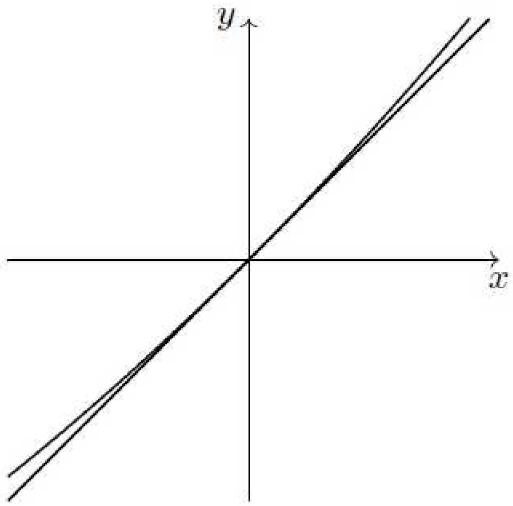


Рис. 1б

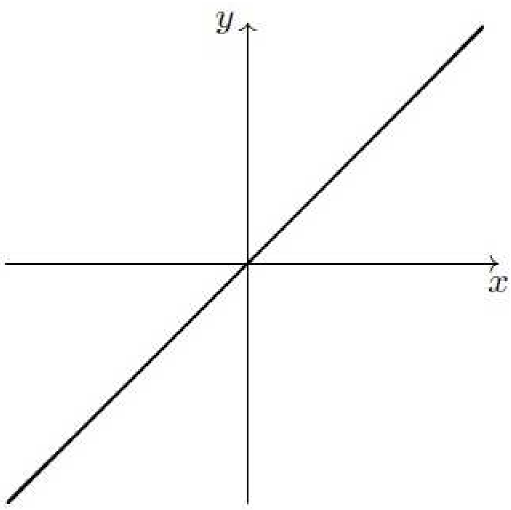


Рис. 1в

С помощью современных компьютерных средств[1] нетрудно проделать эксперимент с другими дифференцируемыми функциями и убедиться, что качественно картина останется той же: при достаточно большом увеличении график функции становится неотличим от некоторой прямой (именно эту прямую называют касательной). В зависимости от функции и точки, вблизи которой рассматривается график, может меняться эта прямая, а также масштаб увеличения, при котором происходит «слияние» (например, график функции $\sin x$ вблизи точки $x = 0$ уже при десятикратном увеличении практически неотличим от прямой). Но в целом все происходит так, как описано выше.

Вторая часть парафраза Толстого в дальнейшем не понадобится, но все же скажем о ней несколько слов.

На рисунке 2 приведен график недифференцируемой функции $f(x) = |x|$ в квадрате $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Понятно, что как не увеличивай этот рисунок, он останется неизменным.

[1] впрочем, может быть полезно и построить эти графики на доске вручную, проведя необходимые оценки.

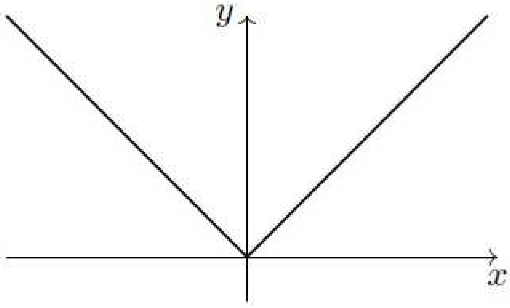


Рис. 2

На рисунке 3а приведен график функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ в квадрате $[-1, 1] \times [-1, 1]$. При достаточно сильном увеличении мы получим картинку, изображенную на рис. 3б.

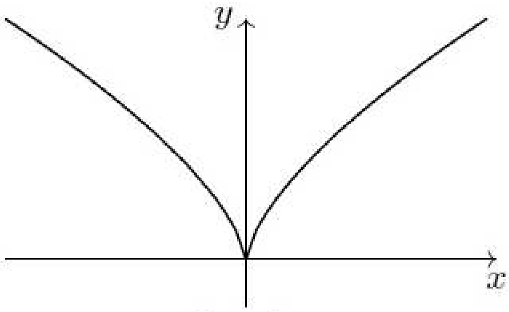


Рис. 3а

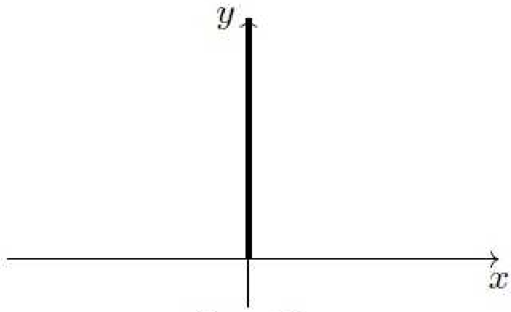


Рис. 3б

Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0, \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases}$$

не дифференцируема в точке $x = 0$. Нарисовав график этой функции вблизи нуля с достаточно сильным увеличением, мы получим репродукцию известной картины (какой?). Эта функция в нуле еще и разрывна, но это не меняет сути дела: репродукцию той же картины можно получить и рисуя график непрерывной функции

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2}\sin\frac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0, \\ 0, \text{ если } x = 0. \end{cases}$$

Для начинающего математика рассмотрение подобных примеров будет интересным и небесполезным.

4. Набросок доказательства

Вернемся к основной теореме. Пусть производная функции $f(x)$ положительна на интервале (a, b). Нужно доказать, что если выбрать на этом интервале любые две точки c и d так, что $c < d$, то будет верно неравенство $f(c) < f(d)$.

Производная $f'(c)$ по условию положительна. А эта производная – старший коэффициент уравнения касательной к графику функции $f(x)$ в точке c.

Значит, касательная – это график возрастающей линейной функции. Действительно, если $\alpha > 0$ и $c < d$, то $\alpha c + \beta < \alpha d + \beta$.

Но на каком-то достаточно малом интервале (c, c_1) график функции $f(x)$ неотличим от касательной, следовательно, $f(c) < f(c_1)$.

Но производная $f'(c_1)$ тоже положительна. Значит, по аналогичным причинам $f(c_1) < f(c_2)$ для некоторого $c_2 > c_1$. А тогда $f(c) < f(c_2)$.

Продолжая подобную процедуру мы будем сдвигаться по оси абсцисс вправо до тех пор, пока не доберемся до точки d, и тем самым неравенство $f(c) < f(d)$ будет доказано.

По сути проведенные рассуждения вполне корректны. Но может возникнуть два вопроса. Где-то, например, на экзамене, подобные рассуждения могут посчитать недостаточно строгими. А, кроме того, могут возникнуть сомнения, а действительно ли мы доберемся до точки d, используя подобную процедуру? [2]. Разберемся с этими вопросами. Начнем с формализации.

5. Локальное свойство

Многие вещи становятся более понятными, если дать им название, пусть и не очень благозвучное. Видимо, в данном случае это так. Поэтому придумаем название.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на интервале (a, b) называется *локально возрастающей в точке* $c \in (a, b)$, если существует такое число $\delta > 0$, что $f(x) < f(c)$ при всех $x \in [c - \delta, c)$ и $f(x) > f(c)$ при $x \in (c, c + \delta]$.

Сделаем два замечания.

1. По техническим причинам удобнее рассматривать интервалы с «присоединенными концами».

2. Если функция $f(x)$ локально возрастает в точке c то при соответствующем δ для двух точек $x', x'' \in [c - \delta, c + \delta]$ из неравенства $x' < x''$, вообще говоря, не следует неравенство $f(x') < f(x'')$.

Теперь можно сделать первый шаг к доказательству основной теоремы.

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке c и $f'(c) > 0$. Тогда функция $f(x)$ локально возрастает в точке c.*

Доказательство. По определению производной для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta' > 0$, что для любого $x \in (c - \delta', c + \delta')$ выполняется неравенство

$$f'(c) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < f'(x) + \varepsilon.$$

Положим, например, $\varepsilon = \frac{f'(c)}{2}$, зафиксируем соответствующее δ' и выберем δ так, что $0 < \delta < \delta'$.

Тогда для $x \in (c, c + \delta]$ выполняются неравенства

$$0 < f'(c) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

и, значит, $f(x) > f(c)$.

Случай $x \in [c - \delta, c)$ рассматривается аналогично.

Лемма доказана.

Таким образом, остается доказать, что если функция локально возрастает во всех точках интервала (a, b), то она (глобально) возрастает на всем этом интервале. Подобные проблемы возникают в анализе нередко (см. [1]). Например, известная теорема Вейерштрасса утверждает, что из непрерывности (локальное свойство!) функции во всех точках замкнутого отрезка следует ее равномерная непрерывность (глобальное свойство!) на этом отрезке. Часто переход от локальных свойств к глобальным оказывается довольно тонким. Это имеет место и в данном случае.

Приведем три способа такого перехода.

6. Доказательство с помощью теоремы Дедекинда

Теорема Дедекинда утверждает, что всякое непустое ограниченное сверху множество действительных чисел имеет точную верхнюю грань, т.е. существует такое число h, что

[2]здесь уместно вспомнить апорию Зенона об Ахиллесе и черепахе.

- для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \leq h$;
- для любого $l < h$ найдется такое $x \in X$, что $x > l$.

Напомнив это, приступим к завершению доказательства основной теоремы.

Пусть $a < c < d < b$. Рассмотрим множество $X = \{x \in (c,d) : f(x) > f(c)\}$.

Функция $f(x)$ локально возрастает в точке c, поэтому множество X не пусто. Действительно, существует такое δ, что неравенство $f(x) > f(c)$ выполняется для всех $x \in [c, c+\delta]$. Множество X ограничено сверху, например, числом d. Значит, по теореме Дедекинда существует точная верхняя грань h этого множества. Поскольку d – одна из верхних граней, выполняется неравенство $h \leq d$.

Предположим, $h < d$. Функция $f(x)$ локально возрастает в точке h, поэтому существует такое число $\delta > 0$, что $f(x) < f(h)$ при всех $x \in [h-\delta, h)$ и $f(x) > f(h)$ при $x \in (h, h+\delta]$. Число h – точная верхняя грань, поэтому существует число $y \in X$ для которого $y > h - \delta$. Тогда $f(c) < f(y) < f(h) < f(h+\delta)$ (первое неравенство следствие включения $y \in X$, остальные – следствие локального возрастания). Но тогда число $h+\delta$ принадлежит множеству X, что противоречит выбору числа h. Значит, неравенство $h < d$ невозможно.

Пусть $h = d$, но $h \notin X$. Функция $f(x)$ локально возрастает в точке h, поэтому существует такое число $\delta > 0$, что $f(x) < f(h)$ при всех $x \in [h-\delta, h)$ и $f(x) > f(h)$ при $x \in (h, h+\delta]$. Тогда существует $y \in X \cap [h-\delta, h)$ и для этого y выполняются условия $f(c) < f(y) < f(h)$, что противоречит условию $h \notin X$.

Остается случай $h \in X$ а в этом случае неравенство $f(c) < f(d)$ верно.

Основная теорема доказана.

7. Доказательство с помощью принципа вложенных отрезков

Нужная нам теорема утверждает, что если задана бесконечная последовательность таких отрезков $[c_n, d_n]$, $n = 0, 1, 2, ...$, что для всех n $[c_{n+1}, d_{n+1}] \subset [c_n, d_n]$, то существует число m, принадлежащее всем этим отрезкам.

Будем доказывать основную теорему от противного: предположим, что существует локально возрастающая во всех точках интервала (a, b) функция $f(x)$ и числа c_0 и d_0 такие, что $a < c_0 < d_0 < b$, но $f(c_0) > f(d_0)$.

Построим отрезки $[c_n, d_n]$, $n = 1, 2, ...$ следующим образом. Если $f(c_n) > f\left(\frac{c_n+d_n}{2}\right)$, то положим $c_{n+1} = c_n$, $d_{n+1} = \frac{c_n+d_n}{2}$. В противном случае выполняется неравенство $f\left(\frac{c_n+d_n}{2}\right) > f(d_n)$ и мы положим $c_{n+1} = \frac{c_n+d_n}{2}$, $d_{n+1} = d_n$.

Таким образом построена последовательность отрезков $[c_n, d_n]$, $n = 0, 1, 2, ...$, для которых $[c_{n+1}, d_{n+1}] \subset [c_n, d_n]$ и $f(c_n) > f(d_n)$ для всех n.

Пусть m – общая точка этих отрезков. Функция $f(x)$ локально возрастает в точке m, значит существует такое число $\delta > 0$, что $f(x) < f(m)$ при всех $x \in [m-\delta, m)$ и $f(x) > f(m)$ при $x \in (m, m+\delta]$.

Из аксиомы Архимеда следует, что при достаточно большом n длина отрезка $[c_n, d_n]$ меньше δ. При таком n выполняются неравенства

$$m - \delta < c_n \leq m \leq d_n < m + \delta,$$

причем лишь одно из нестрогих неравенств может обратиться в равенство. Тогда в силу локального возрастания $f(c_n) \leq f(m) \leq f(d_n)$, а, значит, $f(c_n) \leq f(d_n)$. А по построению $f(c_n) > f(d_n)$.

Полученное противоречие доказывают основную теорему.

8. Доказательство с помощью теоремы Вейерштрасса

Напомним, что множество называется *компактным*, если из всякого покрытия его открытыми интервалами можно выделить конечное подпокрытие. Теорема Вейерштрасса утверждает, что любой замкнутый ограниченный отрезок действительной прямой компактен.

Пусть функция $f(x)$ локально возрастает на интервале (a, b) и отрезок $[c, d] \subset (a, b)$.

Для каждой точки $x \in [c, d]$ существует δ, удовлетворяющее определению локального возрастания. Поэтому соответствующие открытые интервалы $(x - \delta, x + \delta)$ покрывают отрезок $[c, d]$. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие.

Если в этом подпокрытии существует такой интервал, что его можно убрать, а все остальные отрезки все равно будут покрывать отрезок $[c, d]$, то выбросим этот интервал и перейдем к меньшему подпокрытию. И будем продолжать так до тех пор, пока ни оного интервала удалить уже нельзя. Соответствующее «минимальное» подпокрытие зафиксируем.

Пусть $m_1, m_2, ..., m_n$ — середины интервалов этого подпокрытия перенумерованные так, что $m_1 < m_2 < ... < m_n$ (подумайте, почему числа $m_1, m_2, ..., m_n$ различны). Пусть (c_i, d_i) — интервал из выбранного подпокрытия с центром m_i.

Если $n = 1$, то есть в покрытии используется всего один интервал, то в силу локального возрастания $f(c) < f(m_1) < f(d)$ и неравенство $f(c) < f(d)$ а с ним и основная теорема доказаны.

В противном случае можно воспользоваться индукцией по n.

Сначала заметим, что $d \in (c_n, d_n)$. Действительно, если $d \notin (c_n, d_n)$ но $d \in (c_i, d_i)$ при каком-то $i < n$, то $(c_n, d_n) \subset (c_i, d_i)$ и интервал (c_n, d_n) можно выбросить, а выбранное покрытие – минимальное. По аналогичным причинам $c_n \in (c_{n-1}, d_{n-1})$.

Теперь возможны два случая.

Если $c_n < m_{n-1} < m_n$, то отрезок $[c, m_{n-1}]$ покрыт $n - 1$ интервалом и по предположению индукции $f(c) < f(m_{n-1})$. А в силу локального возрастания $f(m_{n-1}) < f(m_n) < f(d)$, откуда следует неравенство $f(c) < f(d)$.

Если же $m_{n-1} \leq c_n < d_{n-1}$, то можно применить предположение индукции к отрезку $[c, c_n]$ и получить неравенство $f(c) < f(c_n)$. А локальное возрастание позволит доказать неравенства $f(c_n) < f(m_n) \leq f(d)$, откуда вновь получается неравенство $f(c) < f(d)$.

Теорема доказана.

Третье доказательство чуть сложнее двух предыдущих (и чуть ближе к «олимпиадной» математике). Здесь оно приведено из-за той роли, которую играет понятие компактности в современном анализе.

9. Возможно ли элементарное доказательство?

Теорема Дедекинда, принцип вложенных отрезков и теорема Вейерштрасса — это не совсем «школьные» теоремы. А может быть существует доказательство, пусть более сложное, но не использующее такого рода неэлементарных утверждений? Оказывается, что такого доказательства быть не может. И это несложно строго доказать. Чуть труднее объяснить точный смысл этого утверждения. С этого и начнем.

Множество действительных чисел — это множество, на котором определены две бинарных операции (сложение и умножение) и отношение «больше», которые удовлетворяют следующим аксиомам[3].

Первые четыре аксиомы описывают операцию сложения.

1. $a + b = b + a$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$.

[3]Этот список аксиом взят из учебника [2]. Выбор определен лишь тем, что мне читал лекции по анализу Сергей Михайлович Никольский. В других книгах аксиомы могут быть немного другими (в основном, это относится к аксиоме 16), но сути дела это не меняет.

3. Существует такое число 0 что $a + 0 = a$.

4. Для каждого a существует такое число $-a$, что $a + (-a) = 0$.

Еще четыре аксиомы описывают операцию умножения.

5. $ab = ba$.

6. $(ab)c = a(bc)$.

7. Существует такое число 1 что $a \cdot 1 = a$.

8. Для каждого $a \neq 0$ существует такое число a^{-1}, что $a \cdot a^{-1} = 1$.

Следующая аксиома «связывает» операции сложения и умножения.

9. $(a + b)c = ac + bc$.

Три аксиомы описывают отношение «больше».

10. Для любых чисел a и b выполняется ровно одно отношение $a > b$, $b > a$ или $a = b$.

11. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

12. Если $a > b$, то существует такое число c, что $a > c > b$.

Две аксиомы связывают отношение «больше» с арифметическими операциями.

13. Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

14. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.

Эти аксиомы в известном смысле элементарны. Следующая аксиома чуть менее элементарна.

15. Для любого числа a в сумме[4] $1 + 1 + ... + 1$ можно взять такое число слагаемых, что будет выполнено неравенство $1 + 1 + ... + 1 > a$.

И последняя аксиома совсем не элементарна.

16. Если последовательность $a_1, a_2, ...$ не убывает и ограничена сверху числом M, то она имеет предел $a \leq M$.

Эти аксиомы описывают множество действительных чисел однозначно (с точностью до изоморфизма). Из них следуют и использованные выше теоремы Дедекинда и Вейерштрасса и принцип вложенных отрезков. Более того, можно поменять аксиому 16 на утверждение одной из этих трех теорем, и тогда утверждение аксиомы, а с ним и остальные теоремы могут быть получены как следствия нового списка аксиом.

Как показано выше, основная теорема следует из аксиом 1–16. А вот из аксиом 1–15 ее вывести нельзя.

Чтобы доказать это, можно придумать числовую систему, для которой аксиомы 1–15 выполнены (а аксиома 16 — нет) и предложить пример функции, определенной на этой числовой системе, для которой утверждение основной теоремы неверно.

На ум сразу приходит подходящая числовая система: множество рациональных чисел. Для них можно предложить определения предела, производной и т.д. и доказать аналоги многих привычных теорем, дословно повторяя рассуждения из какого-нибудь учебника анализа. Таким образом может быть «продублирована» значительная часть классического дифференциального исчисления. Например, будут верны правило дифференцирования произведения и необходимое условие максимума в форме Ферма. Будет справедливо и утверждение «обратное» к основной теореме: пусть функция $f(x)$ дифференцируема во всех точках интервала (a, b) и возрастает на интервале (a, b); тогда ее производная $f'(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Будет верна и доказанная выше лемма о локальной монотонности (доказательство проходит дословно).

А вот сама основная теорема будет неверна (а, значит, и доказать ее нельзя!). Контрпример строится без проблем.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{-x}{x^2-2}$ (см. ее график на рисунке 5). Если рассматривать ее как функцию определенную на множестве рациональных чисел, то она будет непрерывной и даже дифференцируемой во всех точках «рациональной прямой». Ее производная положительна во всех точках области определения. А вот монотонной эта функция не является: $0 = f(0) > f(2) = -1$.

[4]наличие многоточия в этой сумме как раз и связано с «неэлементарностью» этой аксиомы.

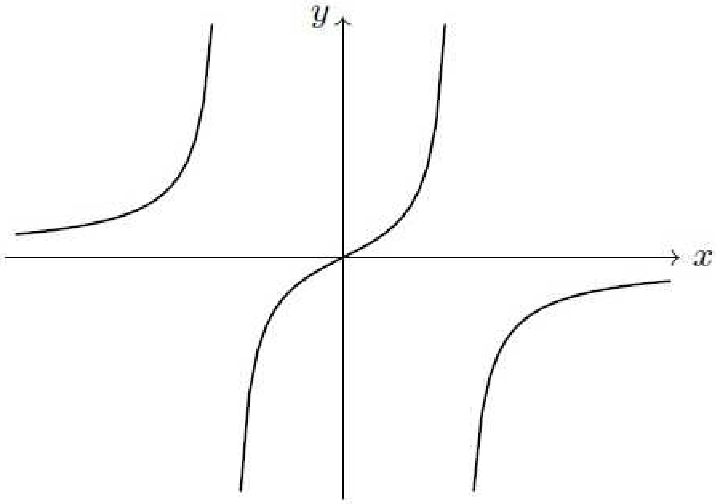


Рис. 4

В данном случае можно явно вычислить величину δ из определения локального возрастания по заданному ε и посмотреть, как она уменьшается о мере приближения к точке $x = \sqrt{2}$. Тогда будет наглядно видно, что в данном случае Ахиллес действительно не догонит черепаху.

Причина понятна: в области определения нашей функции имеется большое число «мелких дырочек». Заметим кстати, что даже наличие одной «дырки» в области определения функции делает утверждение основной теоремы неверным. Рассмотрим, например, функции, определенные на объединении$(-1, 0) \cup (0, 1)$ двух интервалов обычной действительной прямой, дифференцируемые и имеющие положительную производную во всех точках области определения. Далеко не все из них будут возрастающими. Пример – функция $f(x) = \frac{-1}{x}$.

Немного отвлекаясь в сторону, скажем, что если рассматривать функции, определенные только на множестве рациональных чисел, то дифференцируемыми могут оказаться весьма «экзотические» функции. Например, функция, определенная и дифференцируемая на всем множестве рациональных чисел, может быть не ограниченной на любом, сколь угодно малом, интервале. Именно поэтому классический анализ строят на множестве действительных чисел.

10. Глобальная задача

Скажем несколько слов о целесообразности включения изложенного материала в курс школьной математики.

Казалось бы, картинки вроде приведенного выше рисунка 1 должны присутствовать в любом учебнике анализа для начинающих. Однако мне таких видеть не приходилось. У меня нет сомнений в том, что подобные картинки должны появляться в головах у учащихся в самом начале изучения дифференциального исчисления. Тем более, что современные средства обучения позволяют сделать такие картинки весьма эффектными.

То, что приведенный выше набросок доказательства основной теоремы может и должен в каком-то виде появляться при изучении темы об использовании производной для исследования функций, вызывает мало сомнений.

А вот по поводу изучения теорем о «тонкой структуре» множества действительных чисел в курсе средней школы есть разные мнения [3, 4, 5]. Дискуссия об этом длится до сих пор, порой становясь весьма эмоциональной [6, 7]. Наверное, здесь все зависит от направленности соответствующего курса математики.

В «гуманитарных» классах, скорее всего, достаточно рассказать набросок доказательства, заготовив «отмазку» на случай, если кто-то из учеников сам спросит об «Ахиллесе и черепахе». В серьезных математических классах теоремы вроде принципа вложенных отрезков и так изучаются. Основная теорема дает хороший повод увидеть, как «высокая» теория оказывается необходимой при доказательстве теоремы с очевидной прикладной направленностью. Здесь уже стоит подумать, стоит ли приводить несколько доказательств, или лучше ограничиться одним.

Если кого-то из учеников эта тема особенно заинтересует, то здесь есть темы для небольших самостоятельных исследований. Например, у трех использованных выше неэлементарных теорем есть еще одно эквивалентное утверждение – теорема о существовании предела у каждой фундаментальной последовательности. Мне не удалось придумать простого доказательства основной теоремы с использованием этого утверждения. А было бы интересно. То же относится и к аксиоме 16 (здесь просматривается выход на канторовскую теорию ординальных чисел).

Для тех, кто планирует связать свою судьбу с математикой, было бы полезно пораньше получить представление о локальных и глобальных свойствах и их взаимосвязи. Эта теорема — удобный повод в какой-то форме поговорить об этом.

Тема об отсутствии элементарных доказательств у основной теоремы явно факультативна. В молодые годы утверждения о невозможности что-то доказать у меня вызывали большой интерес. Но доказательств соответствующих утверждений в доступных тогда источниках не было. В данном случае все относительно просто и при желании с этим примером можно разобраться.

Литература

[1] Александров П.С., Урысон П.С. Мемуар о компактных топологических пространствах. - М.: Наука, 1971. - 144 с.

[2] Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 1. - М.: Наука, 1983. - 464 с.

[3] Виленкин Н.Я., Шварцбурд С.И. Математический анализ. - М.: Просвещение, 1969. - 576 с.

[4] Понтрягин Л.С. Математический анализ для школьников. - М.: Наука, 1980. - 88 с.

[5] Зельдович Я.Б., Яглом И.М. Высшая математика для начинающих физиков и техников. - М.: Наука, 1982. - 512 с.

[6] Понтрягин Л.С. Жизнеописание Л.С. Понтрягина, математика, составленное им самим. - М.: ИЧП «Прима В», 1998. - 304 с.

[7] Арнольд В.И. Что такое математика? - М.: МЦНМО, 2002. - 104 с.

Горелов Михаил Александрович,
ведущий научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: griefer62@gmail.com

Обобщение понятия центроида при решении стереометрических задач

С. В. Жаров

В заметке рассмотрено понятие центроида системы точек в пространстве (для точек с одинаковой единичной массой) и приведены примеры решения стереометрических задач при помощи этого понятия.

Одним из базовых понятий аналитической геометрии на плоскости и в пространстве является центроид системы точек (центр тяжести или центр масс). Для физики (раздел механики) это понятие является одним из основных. Если сделать небольшой обзор аффинных задач из учебных пособий по аналитической геометрии, то автору удалось найти их только в замечательной книге «Аналитическая геометрия» [Лопшиц, [2], 41-42] известного в 60-е годы профессора А.М. Лопшица, у которого довелось учиться в ЯГПИ имени К.Д. Ушинского и быть лично знакомым в течение многих лет. Задачи аффинного и метрического характера отражены в книге [Гашков, [1], 5-16], изучаются различные способы нахождения центроида различных фигур на плоскости и в пространстве.

В настоящей статье нас интересует изучение свойств центроида системы точек при решении стереометрических задач.

В учебной литературе рассматриваются основные геометрические положения, связанные с центроидом системы точек. Приведем общее определение этого понятия и несколько частных утверждений, которыми будем широко пользоваться при решении последующих задач.

Определение. *Центроидом системы точек* $A1, A2, ..., An$ называется такая точка G, что

$$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} + ... + \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}. \tag{1}$$

Если в качестве начала (полюса) выбрать некоторую точку O, то получим *радиус-вектор* (термин А.М. Лопшица) $\overrightarrow{OG}$ точки G, который выражается зависимостью $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + ... + \overrightarrow{OA_n} = n \cdot \overrightarrow{OG}$. Доказательство этого утверждения посильно любому старшекласснику средствами векторной алгебры, а также можно проконсультироваться в учебном пособии [2].

Центроидом системы двух точек является середина отрезка, соединяющего данные точки. Центроид треугольника представляет собой точку пересечения его медиан. Для четырехугольника такой точкой является центр параллелограмма, составленного из середин его сторон. Центроид произвольного многоугольника можно находить различными способами, группируя вершины в непересекающиеся системы точек.

Найдем одну из зависимостей расположения центроида, например, системы пяти точек, в векторном виде. Если дан пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ и его центроид G, то имеем $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} + \overrightarrow{GA_4} + \overrightarrow{GA_5} = 0$ или $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} = -(\overrightarrow{GA_4} + \overrightarrow{GA_5})$. Первая сумма есть радиус-вектор центроида M_1 треугольника $A_1A_2A_3$, а справа — вектор середины M_2 отрезка A_4A_5 со знаком минус, т.е. $3\overrightarrow{GM_1} = -2\overrightarrow{GM_2}$. Это векторное равенство означает, что точка G делит отрезок M_1M_2 в отношении $2:3$, считая от точки M_1. Аналогично можно найти зависимость положения центроида при разделении на одну и четыре точки.

Приведенный способ рассуждения позволяет доказать **обобщенную теорему о центроиде системы точек**: если рассмотреть n точек $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, для которых M_1 — их центроид, и k точек $B_1, B_2, B_3, ..., B_k$, для которых M_2 — их центроид, то центроид G всей системы $n+k$ точек делит отрезко M_1M_2 в отношении $k:n$, считая от точки M_1 или, в векторном виде, $n\overrightarrow{GM_1} = -k\overrightarrow{GM_2}$. Это соотношение поможет решать различные задачи не только на плоскости, но и в пространстве.

Для плоскости можно сформулировать такую задачу относительно центроида не в очень серьезных терминах. На берегу озера растут шесть сосен. Известно, что если взять два треугольника так, что вершины одного из них находились в основаниях трех сосен, а вершины другого – в основаниях трех других сосен, то в середине отрезка, соединяющего точки пересечения медиан этих треугольников, на дне озера находится клад. Неизвестно только, каким образом разбивать данные шесть точек на две тройки. Сколько раз придется опуститься на дно озера, чтобы наверняка отыскать клад? Ответ кроется в сформулированной теореме.

Рассмотрим решение стереометрических задач на основе понятия центроида системы точек.

Задача 1. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$. Вершина C соединена с точкой M пересечения медиан грани SAB. В каком отношении CM делится высотой пирамиды?

Решение. В силу обобщенной теоремы центроид пирамиды находится на ее высоте SO и делит ее в отношении $3 : 1$ считая от вершины. Отсюда непосредственно следует искомый результат.

Другое решение можно предложить, если рассмотреть треугольник SCN, где N — середина стороны AB, при этом применить известную теорему Менелая для треугольника SNO и секущей CN.

Задача 2. Дан правильный тетраэдр $SABC$. Из вершины C опущена высота CH на грань SAB. В каком отношении CH делится высотой пирамиды?

Эта задача аналогична предыдущей.

Задача 3. Высота SO правильной пирамиды $SABC$ разделена точкой M в отношении $3 : 1$. На продолжении высоты AH треугольника ABC взята точка D такая, что $AH = HD$. В каком отношении отрезок MD делит SH?

При решении этой задачи необходимо заметить, что точка M есть центроид пирамиды $SABC$. Тогда MD разделит SH в отношении $4 : 1$, и искомая точка G будет являться центроидом пирамиды $SABDC$. Если рассмотреть сечение плоскостью SAD, этот результат можно также получить с помощью теоремы Менелая для треугольника SOH и секущей MD.

Задача 4. Основаниями призмы $ABCA_1B_1C_1$ являются правильные треугольники с центрами O и O_1. Вершина A_1 проектируется в центр O треугольника ABC. На высоте A_1O пирамиды A_1ABC выбрана точка M такая, что $A_1M : MO = 3 : 1$. В каком отношении OO_1 делит отрезок MN, где N — середина B_1C_1?

Точка M является по сути дела центроидом пирамиды A_1ABC, а точка N — центроидом отрезка B_1C_1. Поэтому отрезок OO_1 разделит отрезок MN в отношении $2 : 4 = 1 : 2$, считая от точки M. В ответе можно убедиться и с помощью теоремы Менелая для треугольника MA_1N и секущей OO_1.

Данная задача сводится к поиску центроида системы шести точек, которые образуют не шестиугольник, а призму. При этом все множество точек разбито на две группы в четыре и две точки. Интересная конфигурация получается, если рассмотреть сечение этой призмы плоскостью AA_1N, тогда выявляется одно из аффинных свойств параллелограмма.

Существует множество задач аффинного двумерного и трехмерного пространства, которые можно решать в основном курсе геометрии с помощью центроида системы точек. Необходимо заметить, что все приведенные задачи имеют выход на известную теорему Менелая [Лопшиц, [2], 50].

Литература

1. Гашков С.Б. Центры тяжести и геометрия.- М.: МЦНМО, 2015 г. - 64 с.
2. Лопшиц А.М. Аналитическая геометрия. - М.: Учпедгиз, 1948. - 588 с.

Жаров Сергей Викторович,
доцент ЯПГУ имени К.Д. Ушинского,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: szharv@rambler.ru

До сих пор "неопределенный интеграл"

Е. М. Воробьев

В работе обсуждаются математические и методические проблемы, связанные с понятием "неопределенный интеграл". Обосновывается важность включения интервала, на котором следует вычислить неопределенный интеграл, в его обозначение или, по крайней мере, в формулировки задач на его вычисление. В последних также полезно указывать класс функций, к которому должна принадлежать первообразная. Это обеспечит однозначность (с точностью до константы) вычисления первообразных. Появление многочисленных онлайн калькуляторов неопределенных интегралов, каждый из которых снабжает пользователей своими собственными ответами, а также пошаговыми инструкциями вычисления и графиками первообразных, приводит к необходимости существенно изменить методику преподавания раздела "неопределенный интеграл".

1. Введение

Появление онлайн калькуляторов неопределенных интегралов сделало актуальной ранее несущественную проблему неполноты обозначения Лейбница для этого математического объекта. Практически во всех отечественных учебниках математического анализа *первообразной функции* $f(x)$ ***на интервале*** Δ называется такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$, $x \in \Delta$. Однако интервал Δ отсутствует в обозначении $\int f(x)dx$ неопределенного интеграла. Это приводит к неоднозначности ответа как при ручном вычислении, так и при использовании различных онлайн калькуляторов. Ниже в Таблице 1 приведены результаты вычислений первообразной функции $f(x) = \dfrac{1}{1+2\cos(x)}$ онлайн калькуляторами, которые мы обозначили через IC [1], ВНИ [2] и WA [3].

Онлайн калькулятор	Аналитическое выражение для первообразной
IC	$\frac{1}{3}(\ln(\lvert\mathrm{tg}(x/2)\rvert + \sqrt{3}) - \ln(\lvert\mathrm{tg}(x/2)\rvert - \sqrt{3}))$
IC+Maxima	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\dfrac{\lvert\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1} - \sqrt{3}\rvert}{\lvert\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1} + \sqrt{3}\rvert}\right)$
ВНИ	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \ln\left(\left\lvert\frac{\mathrm{tg}(\frac{x}{2}) - \sqrt{3}}{\mathrm{tg}(\frac{x}{2}) + \sqrt{3}}\right\rvert\right)$
WA	$\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arth}\left(\frac{\mathrm{tg}(x/2))}{\sqrt{3}}\right)$

Таблица 1. Аналитические выражения для первообразных функции $f(x) = \dfrac{1}{1+2\cos(x)}$

Вторая строка в Таблице 1 содержит ответ системы Maxima, которым наряду с собственным результатом снабжает пользователей онлайн калькулятор IC. Первые три ответа являются разными представлениями одной и той же функции с областью определения, совпадающей с областью определения подынтегральной функции.

Последняя есть объединение интервалов $\left(-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi\,n,\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi\,n\right)$ и $\left(\dfrac{2\pi}{3}+2\pi\,n,\ \dfrac{4\pi}{3}+2\pi\,n\right)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Четвертый ответ представляет функцию с областью определения, являющейся объединением интервалов только первого вида, на которой эта функция совпадает с тремя предыдущими.

Наличие несовпадающих по форме ответов одной и той же математической задачи ставит не только студентов, но и более опытных пользователей в затруднительное положение. Все ли ответы правильные? Какой из ответов выбрать? Каким образом наиболее просто решать эти вопросы? Каждый из нас со школьной скамьи привык к тому, что математическая задача имеет единственное решение, и именно оно дается в разделе “Ответы” в сборниках задач. Множественность ответов свидетельствует о том, что традиционная задача “Вычислить неопределенный интеграл $\int f(x)dx$” является недоопределенной, и это требует исправления.

Онлайн калькуляторы пользуются большой популярностью у студентов и позволяют им, не особо задумываясь, выполнять домашние задания или, с помощью смартфонов, решать в аудиториях задачи контрольных работ. Это обстоятельство требует от преподавателей разработки методов проверки усвоения студентами понятия “неопределенный интеграл”. По нашему мнению, проблема анализа полученных первообразных выходит в этом смысле на передний план.

Изучение любого раздела математики проходит гораздо успешнее, если студенты обладают хотя бы минимальным предпониманием материала. Опытный лектор прибегает с этой целью к предварительному объяснению “на пальцах”. Удачный термин также способствует пониманию. “Решето Эратосфена”, “метод бисекций” и некоторые другие являются удачными терминами, так как содержат в сжатом виде сущность метода. В англоязычной литературе вместо “неопределенный интеграл” часто употребляется выразительный термин antiderivative (антипроизводная). Вычисление неопределенного интеграла называется “antidifferentiation” (антидифференцированием), что можно перевести как “действие обратное к дифференцированию”, каковым оно в сущности и является. “Антипроизводная” как термин была бы неплохой альтернативой “неопределенному интегралу”.

Недоразумения с неопределенным интегралом начинаются с его названия. Словосочетание “неопределенный интеграл” есть катахреза, т.е. фигура речи, которая характеризуется неправильным, необычным или аномальным употреблением слов с несовместимыми традиционными значениями. В самом деле, толковые словари дают следующие ближайшие к слову “неопределенный” синонимы: “неясный, нечёткий, смутный, неотчётливый, двусмысленный, загадочный, неконкретный, непонятный, незнакомый, не заданный, точно не установленный” [4]. Значениями этих слов, образующих так называемый *синонимический ряд*, руководствуется человек, впервые встречающийся с термином “неопределенный интеграл”. Если интеграл не определен, не задан, не конкретен и т.д., то о каком объекте идет речь? Если же определения в учебниках наличествуют, а так оно и есть, то почему он неопределенный? Студенты реагируют на это обстоятельство словами: “В этой математике понять ничего невозможно”.

С математической точки зрения императив: “Вычислить $\int f(x)dx$” — не определяет, что следует считать результатом вычисления, так как оставляет неясным, какому классу функций должна принадлежать первообразная и на каком интервале ее следует вычислить. Это приводит к тому, что в разных учебниках, сборниках задач и на разных интернет-сайтах приводятся различные формулы для первообразных, часто имеющих несовпадающие области определения. Разобраться с этим богатством бывает затруднительно.

2. На какие вопросы не дается ответов при традиционном преподавании раздела "неопределенный интеграл"

Напомним определения первообразной и неопределенного интеграла, имеющиеся в вузовских учебниках математического анализа Зорича [5, стр. 301], Ильина, Садовничего, Сендова [6, стр. 291], Кудрявцева [7, стр. 453], Никольского [8, стр. 36], Тер-Крикорова, Шабунина [9, стр. 275], Фихтенгольца [10, стр.11] и др. Они ни в чем существенном не отличаются друг от друга. Возьмем поэтому наугад определения из учебника Кудрявцева.

> **Определение первообразной** [7, стр. 453]. Функция F называется первообразной функцией для функции f на промежутке $\triangle$, если дифференцируема на $\triangle$ и в каждой точке этого промежутка производная функции F равна значению функции f:
>
> $$F'(x) = f(x), \quad x \in \triangle.$$
>
> **Определение неопределенного интеграла** [7, стр.454]. Пусть функция f определена на некотором промежутке. Совокупность всех ее первообразных на этом промежутке называется неопределенным интегралом от функции f и обозначается
>
> $$\int f(x)dx \tag{1}$$

Рассмотренные определения порождают следующие вопросы. Коль скоро неотъемлемой составляющей определений первообразной и неопределенного интеграла является промежуток $\triangle$, то почему он отсутствует в символе (1)? На каком промежутке следует вычислять первообразную, если этот промежуток не указан ни в формулировке задачи, ни в символе (1)? В каком классе функций следует вычислять первообразную? Возможны следующие ответы на эти вопросы. Первый и наиболее естественный: первообразную следует вычислять на области определения $D(f)$ функции f. Однако область определения часто не представляет собой интервал, как это отмечено в определении первообразной, а распадается на совокупность интервалов. На каком из них нужно вычислить первообразную? Встречаются также случаи, когда f определена на множестве, содержащим интервал $\triangle$, но по каким-то причинам требуется вычислить первообразную именно на $\triangle$. Такой причиной может быть необходимость вычислить определенный интеграл по промежутку $\triangle$ с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Второй ответ на поставленный вопрос: первообразную следует вычислять, где получится. Авторы учебников и сборников задач придерживаются в основном этой точки зрения. Приятным исключением является [11], авторы которого являются сторонниками первого ответа и "сшивают", где это возможно, первообразные, вычисленные на смежных интервалах.

Наиболее частый ответ на третий вопрос: первообразную следует вычислять в классах элементарных или столь же хорошо изученных в математике функций. Однако первообразная в классе элементарных функций существует не для всех подынтегральных функций на области их определения, хотя может существовать на частичных интервалах этой области. Поэтому требование вычислить первообразную в классе элементарных функций должно сопровождаться указанием интервала, на котором следует вычислить интеграл.

Формулировка задач на вычисление неопределенных интегралов, содержащаяся в учебниках и сборниках задач, без вариантов следующая: "Вычислить $\int f(x)dx$". Она не содержит, как мы уже отмечали, ни указания интервала, на котором нужно вычислить интеграл, ни уточнения, в каком классе функций вычисляется первообразная. Если принять, что под интервалом $\triangle$ понимается область определения функции f, то для непрерывной на $\triangle$ функции f корректно утверждать, что первообразная $F(x)$ задается формулой

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{для } x,\, a \in \triangle. \tag{2}$$

До тех пор, пока не уточнен класс функций, которому должна принадлежать первообразная, формула (2) полностью решает задачу вычисления неопределенного интеграла. Ясно, что первообразная (2) совершенно бесполезна для вычисления определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница. Поэтому, как правило, где-то в тексте уточняется, что нужно вычислять первообразные в классе элементарных функций или в каком-либо другом, заранее фиксированном классе. Оказывается, что в случае вычисления первообразной в классе элементарных функций первообразная, вообще говоря, зависит от интервала $\triangle$.

3. Первообразные и области их определения детерминируются подстановками, с помощью которых они вычисляются

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{3+\sin(x)}$, определенную на всей вещественной оси, и неопределенный интеграл [5, стр. 315; 12, стр. 208]

$$\int \frac{dx}{3+\sin(x)}\,. \tag{3}$$

В [5, 12] для вычисления интеграла (3) применяется рекомендуемая во всех учебниках подстановка $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, и авторы получают первообразную

$$F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1+3\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sqrt{2}}\right). \tag{4}$$

Функция $F_1(x)$ дифференцируема на интервале $(-\pi,\pi)$, но терпит разрывы первого рода на концах этого интервала, если ее продолжить с помощью формулы (4) на более широкий интервал (см. Рисунок 1, a)). Следовательно, (4) является первообразной подынтегральной функции на интервалах вида $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$, хотя подынтегральная функция определена и непрерывна на всей вещественной оси. Эта же первообразная вычисляется на Интернет-ресурсе [1].

Функцию $F_1(x)$ нельзя применять для вычисления определенных интегралов по отрезкам, содержащим точки разрыва этой функции. Рассмотрим, например, интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{3+\sin(x)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

Если его вычислять по формуле Ньютона-Лейбница с использованием первообразной $F_1(x)$, то результат будет равен

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{3+\sin(x)} = F_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F_1\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2})\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2})\right) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Результат отрицательный, что противоречит тому, что подынтегральная функция положительна.

Применим для вычисления интеграла (3) подстановку $t = -\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)$. Она приводит к первообразной

$$F_2(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1+3\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sqrt{2}}\right) \tag{5}$$

Функция $F_2(x)$ является первообразной на интервалах $(2n\pi, 2\pi(n+1))$ — иных, нежели функция $F_1(x)$. На концах рассматриваемых интервалов $F_2(x)$ терпит разрывы первого рода (см. Рисунок 1 b)). С помощью первообразной $F_2(x)$ вычисление определенного интеграла

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{3+\sin(x)}$$

дает правильный ответ

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{3+\sin(x)} = F_2\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F_2\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2})\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2})\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Подстановка $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}\right)$ приводит к новой первообразной, отличной от $F_1(x)$ и $F_2(x)$. В самом деле, после подстановки интеграл (3) принимает вид

$$\int \frac{dx}{3+\sin(x)} = \int \left(\frac{1}{t^2-2t+3} + \frac{1}{3t^2+2t+1}\right) dt \Big|_{t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}\right)} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}(\frac{x}{4})-1}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}(\frac{x}{4})+1}{\sqrt{2}}\right)).$$

Обозначим вычисленную функцию через $F_3(x)$. Эта функция является первообразной на интервале $(-2\pi, 2\pi)$ и на всех интервалах, полученных сдвигами рассматриваемого на расстояния кратные 4π. На концах интервалов функция $F_3(x)$ терпит разрывы первого рода (см. Рисунок 1 c)).

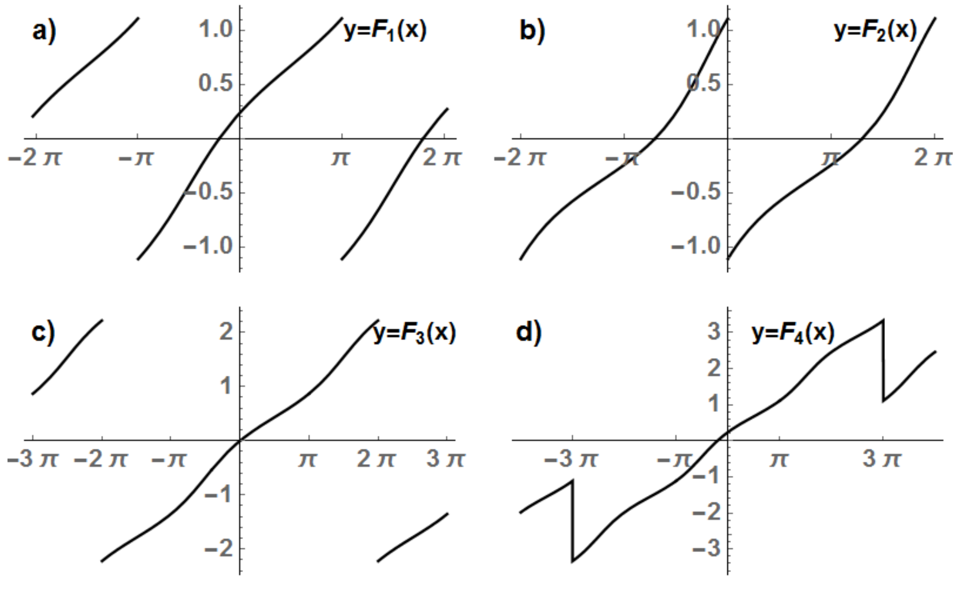


Рисунок 1. a) график функции $F_1(x)$, b) график функции $F_2(x)$, c) график функции $F_3(x)$, d) график функции $F_4(x)$.

Для получения первообразной на $\mathbb{R}^1$ необходимо сшить любую из функций $F_1(x)$, $F_2(x)$ или $F_3(x)$ на концах максимальных интервалов, на которых они являются первообразными. Рассмотрим, например, функцию $F_1(x)$. Нетрудно видеть, что производные функции $F_1(x)$ слева и справа от точек разрыва $(2n+1)\pi$ совпадают, так как они равны значениям непрерывной подынтегральной функции в этих точках. Следовательно, нужно позаботиться только о непрерывности самой первообразной в рассматриваемых точках. С этой целью вычисляем пределы функции $F_1(x)$ слева и справа от точек $(2n+1)\pi$. Поскольку рассматриваемая функция периодична с периодом 2π, достаточно вычислить пределы в точке π:

$$\lim_{x\to\pi-} F_1(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad \lim_{x\to\pi+} F_1(x) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Разность пределов справа и слева равна $\frac{\pi}{-\sqrt{2}}$, поэтому для того, чтобы вычислить первообразную на интервале $(-3\pi, 3\pi)$ втрое большем исходного, полагаем на интервале $(-3\pi, -\pi)$ первообразную равной $F_1(x) - \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, на интервале $(-\pi, \pi)$ равной $F_1(x)$, а на интервале $(\pi, 3\pi)$ равной $F_1(x) + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Обозначим эту функцию через $F_4(x)$ (см. Рисунок 1 d)).

Интернет-ресурс [13] дает следующую первообразную

$$F_5(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3\sin(x) + \cos(x) + 1}{2\sqrt{2(\cos(x)+1)}}\right).$$

Эта первообразная тригонометрическими преобразованиями приводится к виду $F_1(x)$.

Интересно заметить, что в [14, с. 497] для интеграла

$$\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos(x)}, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

дан ответ

$$\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg}\left(\frac{\mathrm{x}}{2}\right)\right).$$

Эта функция не годится для вычисления определенного интеграла по отрезку $(0, 2\pi)$, так как терпит разрыв первого рода в точке π. В то же время, в том же сборнике задач [14, с.186] в разделе, где содержатся задачи на вычисление определенных интегралов с помощью неопределенных, имеется правильно вычисленный определенный интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos(x)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Следовательно, если студенты для вычисления определенного интеграла воспользуются первообразной из задачника, то они получат неверный ответ.

4. Некорректные преобразования, выполняемые в процессе вычисления первообразных, могут изменить их область определения

С целью “упрощения” результата в некоторых задачах на вычисление первообразных проводятся преобразования с обратными тригонометрическими функциями: сложение двух или более функций от разных аргументов, переход от арктангенса к арккотангенсу и т.п. При этом в результате некорректных вычислений часто изменяются области определения первообразных. На эту проблему ранее было обращено внимание в работе [16].

Начнем с простейших соотношений. Справедлива формула:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arcctg}(x) + A(x), \tag{6}$$

где ступенчатая функция $A(x)$ принимает значение $-\pi$ при $x < 0$ и значение при $x > 0$. Из (6) и формулы $\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arcctg}(x) = \frac{\pi}{2}$ следует соотношение

$$\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = B(x), \tag{7}$$

где $B(x) = A(x) + \frac{\pi}{2}$. Для суммы арктангенсов справедлива следующая формула:

$$\operatorname{arctg}(u) + arctg(v) = \operatorname{arctg}\left(\frac{u+v}{1-uv}\right) + C(u,v), \tag{8}$$

где $C(u,v)$ принимает значение $\operatorname{sign}(u)\pi$ при выполнении условия $uv > 1$ и значение 0 при $uv < 1$. Как правило, функция $C(u,v)$ игнорируется при преобразовании различных формул, содержащих сумму арктангенсов, что приводит к появлению точек разрыва первообразных.

Пример 1. В [14, стр. 156, задача № 1712] рассматривается задача о вычислении первообразной рациональной функции

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1}$$

Ее область определения совпадает с $\mathbb{R}^1$, следовательно, и первообразную естественно было бы вычислять на $\mathbb{R}^1$. Однако в [14, стр. 489] дается следующий ответ

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right). \tag{9}$$

Вычисленная первообразная (9) имеет точку разрыва первого рода при $x = 0$. Таким образом, правая часть формулы (9) является первообразной либо на полуинтервале $x < 0$, либо на полуинтервале $x > 0$. Выясним, как возникла функция в правой части формулы (9).

Стандартный метод разложения на простые дроби приводит к ответу

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,x+1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,x-1)\right). \tag{10}$$

Такой же ответ вычисляют онлайн-калькуляторы [1, 3, 13]. Правая часть равенства (10) является первообразной на $\mathbb{R}^1$. Автор [14] "упростил" результат (10), прибегнув к тождеству (8), с помощью которого сумму арктангенсов в правой части (10) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,x+1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,x-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}C(\sqrt{2}\,x+1, \sqrt{2}\,x-1). \tag{11}$$

Для дальнейшего преобразования формулы (11) в формулу (9) автор, по-видимому, использовал соотношение (7).

Из (7) и (11) следует соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1) =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{2}\,x}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}C(\sqrt{2}\,x+1, \sqrt{2}\,x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}B\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{1-x^2}\right), \tag{12}$$

правая часть которого совпадает с арктангенсом в правой части ответа (9) с точностью до суммы

$$\frac{1}{\sqrt{2}}C(\sqrt{2}x+1, \sqrt{2}x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}B\left(\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right).$$

Эта сумма упрощается и становится равной $\frac{1}{\sqrt{2}}B(x)$.

Следовательно, формула (9) определяет первообразную на частичных интервалах $x < 0$ и $x > 0$, но при добавлении в ее правую часть кусочно-постоянной функции $\frac{1}{\sqrt{2}}B(x)$ правая часть (9) становится первообразной на $\mathbb{R}^1$. Слагаемое $\frac{1}{\sqrt{2}}B(x)$ ускользнуло из поля внимание автора [14], поскольку он, по-видимому, считал важным только выполнение соотношения $F'(x) = f(x)$ между первообразной и подинтегральной функцией, а интервал, на котором выполняется это соотношение, его не интересовал. Подобные некорректные упрощения содержатся также в [14, задачи номер 1884 и 1885], [9, с.307, пример 5в].

Рассмотрим еще один пример невнимания вычислителя к области, в которой следует найти первообразную.

Пример 2. В [9, стр. 312] приведен следующий результат

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\right). \tag{13}$$

Вычисленная первообразная имеет разрыв первого рода в нуле, между тем как подынтегральная функция непрерывна на всей вещественной прямой. Результат (13) получен подстановкой $t = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$. В то же время подстановка $t = \frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$, обратная к рассмотренной авторами, приводит к первообразной

$$\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}}\right)$$

определенной на $\mathbb{R}^1$.

5. Анализ первообразных

В этом разделе мы рассмотрим, какова может быть реакция математического педагогического сообщества на широкое распространение систем математических вычислений “Математика”, “Мэйпл”, “Маткад” и др., а также на многочисленные онлайн-калькуляторы неопределенных интегралов.

Пример 3. Пусть требуется вычислить интеграл [14, задача № 1683]

$$\int \frac{dx}{x}.$$

Сборник задач [14], а также Интернет-ресурс [13] дают первообразную

$$F_6(x) = -\arcsin\left(\frac{1}{|x|}\right).$$

Она может быть получена подстановкой $t = 1/x$. Интернет-ресурсы [1,3] дают первообразную

$$F_7(x) = \mathrm{arctg}(\sqrt{x^2-1}),$$

полученную подстановкой $t = \sqrt{x^2-1}$. На Рисунке 2 воспроизведена пошаговая инструкция вычисления рассматриваемого интеграла с сайта [1].

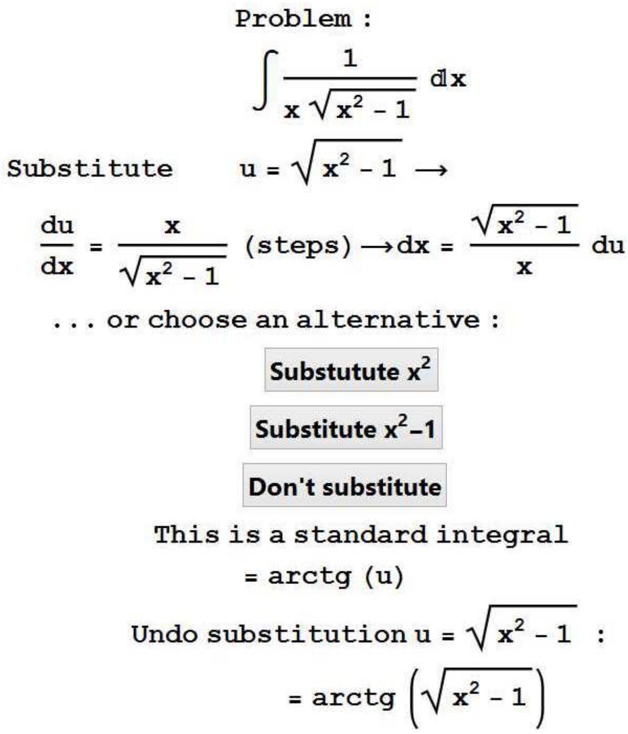


Рисунок 2. Пошаговые инструкции вычисления интеграла с сайта [1].

Поскольку область определения подынтегральной функции состоит из интервалов $(-\infty; -1)$ и $(1; \infty)$, обе первообразные корректно определены. Хорошим вопросом на понимание сути интегрирования будет вопрос: каково соотношение между первообразными $F_6(x)$ и $F_7(x)$? Хорошим ответом на поставленный вопрос будет утверждение, что поскольку области определения этих функций совпадают и поскольку производные от этих функций на их общей области определения равны подынтегральной функции, то $F_6(x)$ и $F_7(x)$ отличаются на константы, быть может, разные на разных открытых лучах $(-\infty; -1)$ и $(1; \infty)$. Если вычислить значения функций $F_6(x)$ и $F_7(x)$ в точках $x = \pm 1$, то можно убедиться, что эти константы совпадают и равны $\pi/2$.

6. Заключение

В обозначении Лейбница для неопределенного интеграла $\int f(x)\,dx$ содержатся четкие указания на выполняемую операцию, подынтегральную функцию и переменную интегрирования. Последнее необходимо в случае, когда подынтегральная функция зависит от параметров. Этот символ удобен для выполнения замен и интегрирования по частям, но он не содержит никакой информации о том, что считается результатом вычисления неопределенного интеграла. Это приводит к несогласованности результатов вычисления одного и того же интеграла различными онлайн-калькуляторами и возникающим в результате этого недоразумениям, с которыми сталкиваются студенты, а также к ошибкам при применении первообразных для вычисления определенных интегралов.

Было бы неплохо, если бы в символе неопределенного интеграла указывался бы также класс функций, к которым должны принадлежать первообразные. Как правило, в вузе учат вычислять неопределенный интеграл в классе элементарных функций, не включающем гиперболические и другие специальные функции. Между тем онлайн-калькуляторы часто дают ответы именно в классе специальных функций даже в тех случаях, когда можно получить первообразные, относящиеся к классу элементарных функций. Однако включение класса функций в символ неопределенного интеграла сделало бы этот символ слишком громоздким.

Выше мы привели следующие аргументы в пользу включения интервала интегрирования либо в постановку задач вычисления неопределенного интеграла, либо непосредственно в его символ.

1. Включение интервала интегрирования обеспечивает единственность решения задачи "Вычислить $\int f(x)\,dx$ на интервале $(a;b)$".

2. Включение интервала интегрирования позволяет находить корректную первообразную для вычисления определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.

3. Исследование областей определения первообразных позволяет объяснить появление разных первообразных, предоставляемых различными онлайн-калькуляторами, и помогает понять их взаимоотношение.

Символ для неопределенного интеграла мог бы выглядеть так, как он представлен на Рисунке 3.

a) $\int_{(a,b)} f\ (x)\ dx$ b) $\int^{(a,b)} f\ (x)\ dx$

Рисунок 3. . Предлагаемые варианты a) и b) обозначения для неопределенного интеграла по интервалу .

Литература

[1] Integral Calculator. URL: https://www.integral-calculator.com

[2] Вычисление неопределенного интеграла: онлайн калькулятор. URL: https://function-x.ru/indefint-calculator.html

[3] WolframAlpha Online Integral Calculator. URL: https://www.wolframalpha.com/calculators/integral-calculator

[4] Карта слов и выражений русского языка. URL: https://kartaslov.ru/тезаурус/неопределенный

[5] Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1.- М.: МЦНМО, 2012. - 710 с.

[6] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. - М.: Изд-во Московского университета, 1985. - 600 с.

[7] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. - М.: Дрофа, 2003. - 703 с.

[8] Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т. 2. - М.: Дрофа, 2004. - 508 с.

[9] Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. - М.: Физматлит, 2001. - 672 с.

[10] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. - М.: Физматлит, 2011. - 800 с.

[11] Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл. Справочное пособие по высшей математике, т. 1. - М.:Едиториал УРСС, 2001. - 360 с.

[12] Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: Пособие для университетов, пед. вузов. 3-е изд., испр. Ч.1: Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Дрофа, 2001. - 725 с.

[13] Math Portal. URL: https://mathportal.org/calculators/calculus/integral-calculator.php

[14] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М.: АСТ, Астрель, 2005. - 558 с.

[15] Бегунц А.В., Горянин Д.В. Об актуальных подходах к преподаванию темы “Неопределенный интеграл” // Математика в высшем образовании. - Том 14. - 2016. - с. 7-14.

[16] Dos Santos B.M.R. Ideas for the best teaching integrals: we are teaching wrongly and how to do this right. URL: https://arxiv.org/pdf/1608.04997.pdf

Воробьев Евгений Михайлович,
профессор НИУ ВШЭ, г. Москва,
доктор физико-математических наук.

E-mail: emvorobiev@mail.ru

Поток векторного поля через гладкую поверхность и его представление поверхностным интегралом 2-го рода[1]

С. В. Шведенко

В статье предлагается уточнение требований к параметризации гладкой двумерной поверхности в трехмерном пространстве, так чтобы можно было корректно определить поток векторного поля через поверхность.

1. В предположении, что гладкая двусторонняя[2] поверхность S расположена в той части пространства $\mathbb{R}^3_{xyz}$, где задано векторное поле $\vec{F}$, *поток* этого векторного поля через указанную поверхность в направлении выбранного на ней поля $\vec{n}$ единичной нормали представляют (формализуя наглядные соображения) как "поверхностный интеграл" $\iint\limits_S (\vec{F}, \vec{n})\, dS$, для вычисления которого следует, используя параметрическое представление $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ поверхности S, заменить символ dS (неофициально называемый *элементом площади поверхности*) подынтегральным выражением из формулы *площади гладкой поверхности* (см., например, [**1**], n° **626**; [**2**]):

$$dS = \sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2}\, dudv = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{matrix} \right\| dudv = \sqrt{EG - F^2}\, dudv\,,^3 \qquad (*)$$

где $E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2$, $G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2$, $F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$; в частном случае поверхности S, заданной как *график функции* $z = z(x,y)$, $dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy$.

В результате указанный "поверхностный интеграл" преобразуется в *двойной интеграл* по плоской фигуре D совокупного изменения параметров u и v :

$$\iint\limits_S (\vec{F}, \vec{n})\, dS = \iint\limits_D (\vec{F}, \vec{n}) \sqrt{EG - F^2}\, dudv,$$

2. *Гладкость* поверхности S в случае ее параметрического задания — как образ плоской фигуры[4] $D \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ при отображении $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ — часто сводят к требованиям существования у отображающих функций непрерывных производных и равенства *двум* ранга составленной из них матрицы

[1] Или *2-го типа* в терминологии, принятой у Г.М. Фихтенгольца [1].

[2] Единого и всеохватного определения *гладкой поверхности* не существует (характерно, что его нет в пятитомной Математической энциклопедии). В зависимости от способа задания поверхности и решаемой задачи требование *гладкости* может иметь разные выражения. Геометрически наглядным является требование существования в каждой точке поверхности касательной к ней плоскости, положение которой непрерывно зависит от точки касания и на которую поверхность в пределах окрестности точки касания проектируется взаимно однозначно. Поверхность называется *двусторонней*, если на *всей* этой поверхности существует непрерывное поле единичной нормали.

[3] Последнее равенство есть выражение того, что *квадрат модуля векторного произведения векторов* $\{x'_u, y'_u, z'_u\}$ *и* $\{x'_v, y'_v, z'_v\}$ *равен произведению квадратов модулей этих векторов минус квадрат их скалярного произведения.*

[4] Ограниченной кусочно гладким контуром, включаемым в эту фигуру (возможно, частично) или нет.

$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$ в любой точке $(u,v) \in D$. Следует при этом иметь в виду, что без добавления требования *взаимной однозначности* отображения (*разные* точки $(u,v) \in D$ должны переходить в *разные* точки $(x,y,z) \in S$) поверхность S нередко оказывается весьма экзотически устроенной из-за возможных самопересечений и самоналожений. Придать смысл *потоку векторного поля* через такую поверхность не всегда оказывается разрешимой задачей. С другой стороны, добавление требования *взаимной однозначности* отображения, устраняя отмеченную экзотику, заметно сужает запас параметрически задаваемых гладких поверхностей (в частности, в него не входит *сфера*). Предложение потребовать *взаимную однозначность* отображения не всей фигуры D, а исключая некоторую "пренебрежимую" ее часть (например, подмножество *нулевой площади*) также проблемы не решает: конус $S: x^2+y^2=z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant h$, являющийся образом прямоугольника $D=\{0 \leqslant u < 2\pi,\ 0 \leqslant v \leqslant h\}$ при отображении[5] $\begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\sin u \\ z = v \end{cases}$, нельзя считать *гладкой поверхностью*[6] .

Напрашивается вывод: дать в терминах *параметризующих отображений* исчерпывающее определение *гладкой поверхности* вряд ли возможно.

3. Возвращаясь к определению *потока векторного поля* $\vec{F}=\{P,Q,R\}$ через двустороннюю поверхность S, заданную как образ плоской фигуры $D \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ при отображении $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$, следует вначале сформулировать требования к этому отображению, позволяющие придать смысл "поверхностному интегралу" $\iint\limits_S (\vec{F},\vec{n})\,dS$ $\bigl($в скалярной записи $\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS\bigr)$[7] и обеспечивающие возможность его вычисления.

В качестве набора таких требований можно принять следующий:

а) отображающие функции имеют непрерывные производные в любой точке (u,v) фигуры D;

б) ранг матрицы $\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$ равен *двум* в любой *внутренней* точке фигуры D;

в) *разные* точки, лежащие *внутри* фигуры D, переходят в *разные* точки поверхности S.

Данному набору требований удовлетворяют, например:

отображение $\begin{cases} x = a\cos u \sin v \\ y = a\sin u \sin v \\ z = a\cos v \end{cases}$ прямоугольника $D=\{0 \leqslant u \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant v \leqslant \pi\}$ (замкнутого) или прямоугольника $D=\{0 \leqslant u < 2\pi,\ 0 \leqslant v \leqslant \pi\}$ (незамкнутого), служащее параметризацией сферы $S: x^2+y^2+z^2=a^2$, — без сомнения, *гладкой* поверхности;

отмеченная в конце предыдущего пункта параметризация конуса $S: x^2+y^2=z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant h$, не являющегося *гладкой* поверхностью (из-за наличия "острия").

Замечание. Граница плоской фигуры, являясь *множеством нулевой площади*[8], не влияет на значение двойного интеграла по этой фигуре. Это позволяет в дальнейших действиях по выводу расчетной формулы потока векторного поля через параметризуемую поверхность не принимать во внимание точки (u,v) фигуры D, не являющиеся ее *внутренними* точками.

[5] *Взамно однозначном* на всем прямоугольнике D, исключая точки $(u,0)$.

[6] Напротив, образ прямоугольника $D=\{0 \leqslant u < 2\pi,\ 0 < v \leqslant h\}$ ("конус без вершины") следует считать таковой.

[7] Где P, Q, R — компоненты векторного поля $\vec{F}$, а α, β, γ — углы, образуемые вектором единичной нормали $\vec{n}$ с базисными ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

[8] Ее можно накрыть конечным числом прямоугольников сколь угодно малой суммарной площади.

Лемма. Если отображение $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$, $(u,v) \in D$, задающее двустороннюю поверхность S, удовлетворяет набору требований а), *б)*, *в)*, то произведение *поля единичной нормали*[9] и *элемента площади* имеет вид: $\vec{n}\,dS = \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\,dv \equiv \pm \left\{ \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \right\} du\,dv.$

В случае задания поверхности S как *график функции* $z = z(x,y)$ над (под) плоской фигурой $D \subset \mathbb{R}^2_{xy}$, $\vec{n}\,dS = \pm\{-z'_x, -z'_y, 1\}\,dx\,dy$.

Доказательство. Ввиду выполнения требования *б)* для любой точки $(u_0, v_0) \in D$ существует ее окрестность, в которой хотя бы один из определителей $\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$ не равен нулю. Если, к примеру, $\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$, то в окрестности точки $(x_0, y_0) = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0))$ плоскости xOy определено отображение $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$, обратное к $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, в силу чего[10] в пределах некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ поверхность S является *графиком функции* $z = z(u(x,y), v(x,y))$ и как следствие имеет в точке (x_0, y_0, z_0) *касательную плоскость* с уравнением $z - z_0 = z'_x(x - x_0) + z'_y(y - y_0)$ и *вектор нормали* $\vec{N} = \pm\{-z'_x, -z'_y, 1\}$. Подстановка вытекающих из соотношений $\begin{cases} z'_u = z'_x x'_u + z'_y y'_u \\ z'_v = z'_x x'_v + z'_y y'_v \end{cases}$ значений $z'_x = \dfrac{\begin{vmatrix} z'_u & y'_u \\ z'_v & y'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}$ $z'_y = \dfrac{\begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}$ дает:

$\vec{N} = \pm \left\{ \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \right\} \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^{-1}$, откуда с учетом формулы $(*)$ для dS следует:

$$\vec{n}dS = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}dS = \pm \frac{\left\{ \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \right\}}{\sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2}} dS = \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\,dv.$$

В случае, когда поверхность S является графиком функции $z = z(x,y)$, роль параметров u и v выполняют переменные x и y, поэтому $\vec{n}dS = \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} dx\,dy = \pm\{-z'_x, -z'_y, 1\}\,dx\,dy.$

4. Если поверхность S расположена в той части пространства $\mathbb{R}^3_{xyz}$, где задано векторное поле $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ с непрерывными компонентами P, Q, R, то при выполнении условий *леммы* п. **3**

$$\iint\limits_S (\vec{F}, \vec{n})\,dS = \pm \iint\limits_D \left(\{P, Q, R\}, \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \right) du\,dv \equiv$$

$$\equiv \pm \left(\iint\limits_D P \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\,dv + \iint\limits_D Q \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} du\,dv + \iint\limits_D R \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} du\,dv \right).$$

[9] Это поле существует в силу самого определения двусторонней поверхности (см. подстрочное примечание[2]).
[10] С учетом выполнения требования *в)*.

Выбор знака перед интегралами в правой части осуществляется сравнением *знаков* какой-либо компоненты вектора нормали $\vec{n}$ в какой-либо точке поверхности S и той же компоненты вектора $\left\{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}\right\}$ в соответствующей точке фигуры D совокупного изменения параметров u и v: при их совпадении пред интегралами ставится $+$ (или, что то же самое, знак удаляется), в противном же случае перед интегралами ставится $-$, для удаления которого достаточно изменить порядок следования параметров (с u, v на v, u).

Преобразование трех последних интегралов предпочтительнее начать с последнего (по причине более привычного расположения координатных осей). Суть преобразования — *замена переменных* $(u,\, v) \to (x,\, y)$ в двойных интегралах:

$$\iint\limits_D R \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} dudv \overset{R=R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))}{=} \iint\limits_{D^+} R \left|\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}\right| dudv - \iint\limits_{D^-} R \left|\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}\right| dudv =$$

$$= \iint\limits_{S^+_{xy}} R(x, y, z^+(x, y))dxdy \; - \iint\limits_{S^-_{xy}} R(x, y, z^-(x, y))dxdy,$$

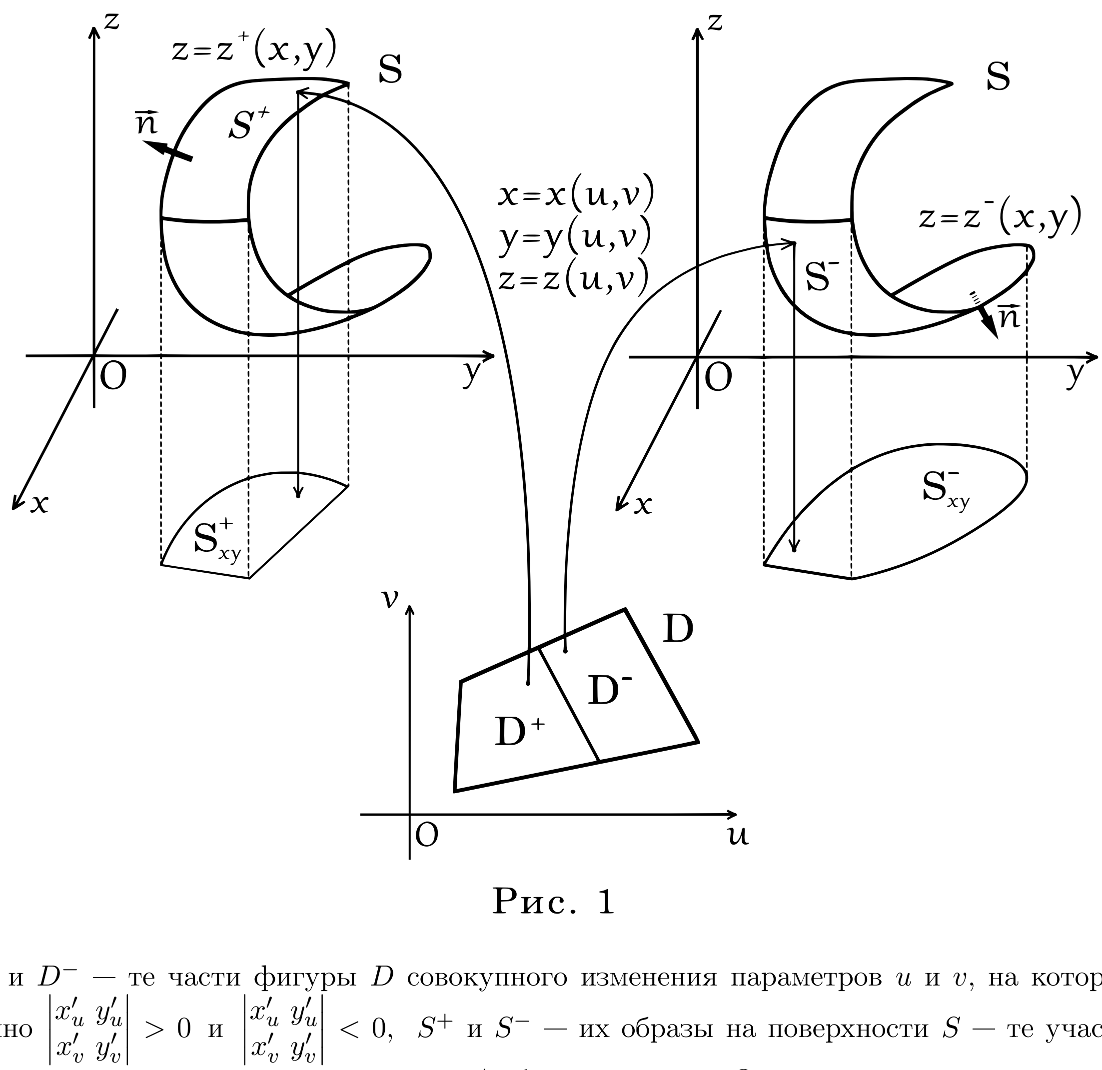


Рис. 1

где: D^+ и D^- — те части фигуры D совокупного изменения параметров u и v, на которых соответственно $\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} > 0$ и $\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} < 0$, S^+ и S^- — их образы на поверхности S — те участки этой поверхности, на которых вектор нормали $\vec{n}$ образует с осью Oz соответственно *острый* и *тупой* углы[11], S^+_{xy} и S^-_{xy} — проекции указанных участков S^+ и S^- на плоскость xOy (в общем случае эти проекции устроены не так просто, как на рис. 1, а состоят из отдельно рассматриваемых фигур плоскости xOy, возможно, налегающих друг на друга), $z^+(x,y)$ и $z^-(x,y)$ — функции, графиками которых служат участки S^+ и S^- поверхности S.

Правая часть последней формулы есть обозначаемый символом $\iint\limits_S R(x,y,z)dxdy$ *поверхностный интеграл 2-го рода* (точнее, частный его случай). Понимать и вычислять его следует именно как разность *двойных интегралов* в правой части формулы.

Подобным же образом

$$\iint\limits_D Q \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} dudv \overset{Q=Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))}{=} \iint\limits_{D^+} Q \left|\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}\right| dudv - \iint\limits_{D^-} Q \left|\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}\right| dudv =$$

$$= \iint\limits_{S^+_{zx}} Q(x, y^+(z,x), z))dzdx - \iint\limits_{S^-_{zx}} Q(x, y^-(z,x), z))dzdx,$$

где на сей раз D^+ и D^- служат обозначениями частей фигуры D, на которых соответственно $\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} > 0$ и $\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} < 0$, S^+ и S^- — обозначениями их образов на поверхности S — тех ее участков, на которых вектор нормали $\vec{n}$ образует с осью Oy соответственно *острый* и *тупой* углы[12]; S^+_{zx} и S^-_{zx} — это обозначения проекций на плоскость zOx указанных участков S^+ и S^- поверхности S, а $y^+(z,x)$ и $y^-(z,x)$ — обозначения функций, графиками которых и являются эти участки S^+ и S^- поверхности S.

Разность двух последних *двойных интегралов* имеет обозначение $\iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx$ и также является частным случаем *поверхностного интеграла 2-го рода*.

Наконец,

$$\iint\limits_D P \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv \overset{P=P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))}{=} \iint\limits_{D^+} P \left|\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}\right| dudv - \iint\limits_{D^-} P \left|\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}\right| dudv =$$

$$= \iint\limits_{S^+_{yx}} P(x^+(y,z), y, z))dydz - \iint\limits_{S^-_{yz}} P(x^-(y,z), y, z))dydz$$

с обозначением правой части $\iint\limits_S P(x,y,z)dydz$.

Сумма трех определенных выше частных случаев поверхностного интеграла 2-го рода, записанная как

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy,$$

есть общий вид *поверхностного интеграла 2-го рода*[13]. Необходимо подчеркнуть существенность порядка следования сомножителей в произведениях $dydz$, $dzdx$, $dxdy$: он отражает порядок следования

[11] Или, что то же самое, векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{n}$ составляют соответственно *правую* и *левую* тройки.

[12] Или, что то же самое, векторы $\vec{k}$, $\vec{i}$ и $\vec{n}$ составляют соответственно *правую* и *левую* тройки

[13] Понимаемого именно как сумма трех отдельно вычисляемых интегралов.

базисных ортов в тройках $\vec{j},\,\vec{k},\,\vec{n},\ \ \vec{k},\,\vec{i},\,\vec{n},\ \ \vec{i},\,\vec{j},\,\vec{n}$ при определении интегралов

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz,\ \iint\limits_S Q(x,y,z)dzdx,\ \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy.$$

Подводя итог этому пункту, следует отметить, что выведенные в нем соотношения[14]

$$\iint\limits_S (\vec{F},\vec{n})dS = \pm\iint\limits_D \left(P\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v\end{vmatrix} + Q\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v\end{vmatrix} + R\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v\end{vmatrix}\right)dudv =$$

$$= \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

устанавливают равносильность двух представлений (и способов вычисления) одной и той же величины — *потока векторного поля* $\vec{F} = \{P,\,Q,\,R\}$ через заданную сторону поверхности S.

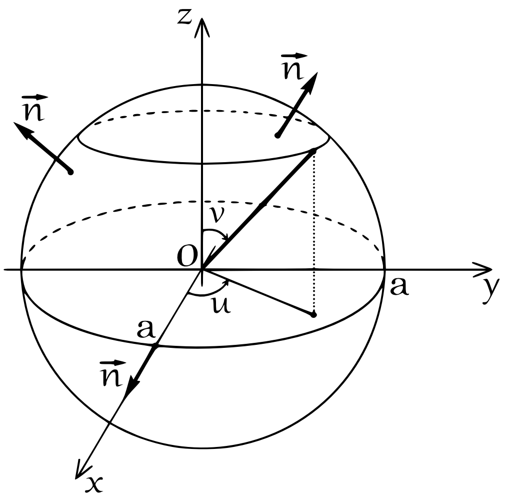


Рис. 2 (к примеру 1)

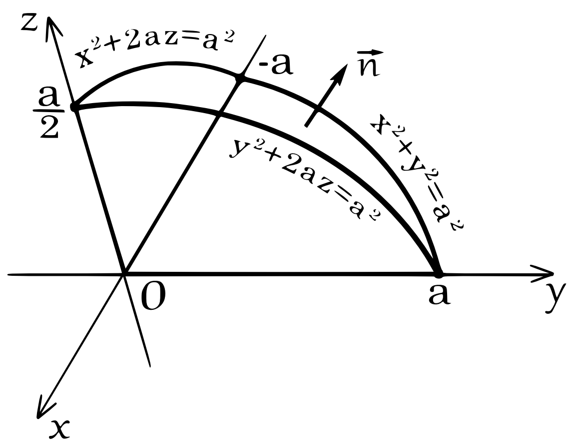


Рис. 3 (к примеру 2)

Пример 1. Вычислить $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ по внешней стороне сферы $S: x^2+y^2+z^2 = a^2$.

В соответствии с описанным в п.**4** правилом $\iint\limits_S zdxdy = \iint\limits_{S^+_{xy}} z^+(x,y)dxdy - \iint\limits_{S^-_{xy}} z^-(x,y)dxdy$, где S^+_{xy} (соответственно S^-_{xy}) — проекция на плоскость xOy той части S^+ (соответственно S^-) сферы S, на которой вектор нормали к ней образует с осью Oz *острый* (соответственно *тупой*) угол; $z^+(x,y)$ и $z^+(x,y)$ — функции, графиками которых являются указанные части S^+ и S^- поверхности S. С учетом этих замечаний

$$\iint\limits_S zdxdy = \iint\limits_{x^2+y^2<a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy\ - \iint\limits_{x^2+y^2<a^2}(-\sqrt{a^2-x^2-y^2})dxdy = 2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,rdr = \tfrac{4}{3}\pi a^3.$$

При вычислении $\iint\limits_S y\,dzdx$ в качестве частей S^+ и S^- поверхности S выступают правая и левая полусферы (на которых вектор нормали $\vec{n}$ образует с осью Oy соответственно *острый* и *тупой* углы). Поэтому

[14] При надлежащем выборе знака перед двойным интегралом по фигуре D совокупного изменения параметров u и v (см. правило *выбора знака* в начале этого пункта).

$$\iint\limits_S y\,dz\,dx = \iint\limits_{z^2+x^2<a^2} \sqrt{a^2-z^2-x^2}\,dz\,dx \;-\; \iint\limits_{z^2+x^2<a^2} (-\sqrt{a^2-z^2-x^2})\,dz\,dx = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr = \tfrac{4}{3}\pi a^3.$$

Наконец,

$$\iint\limits_S x\,dy\,dz = \iint\limits_{y^2+z^2<a^2} \sqrt{a^2-y^2-z^2}\,dy\,dz \;-\; \iint\limits_{y^2+z^2<a^2} (-\sqrt{a^2-y^2-z^2})\,dy\,dz = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr = \tfrac{4}{3}\pi a^3.$$

Окончательно: $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \iint\limits_S x\,dy\,dz + \iint\limits_S y\,dz\,dx + \iint\limits_S z\,dx\,dy = 4\pi a^3.$

Другой способ вычисления этого интеграла основан на его интепретации как потока поля радиуса -вектора $\vec{r} = \{x,\, y,\, z\}$ через сферу $S\,:\, x^2+y^2+z^2 = a^2$ в направлении внешней нормали $\vec{n}$. Из школьного курса геометрии известно, что в данном случае $\vec{n} = \vec{r}/|\vec{r}| = \vec{r}/a$, поэтому

$$\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \iint\limits_S (\vec{r},\vec{n})dS = \iint\limits_S a\,dS = 4\pi a^3 \quad (4\pi a^2 \text{ — площадь сферы } S).$$

Иной путь вычисления потока $\iint\limits_S (\vec{r},\vec{n})dS$ — привлечение параметризации $\begin{cases} x = a\cos u \sin v \\ y = a \sin u \sin v\,, \\ z = a\cos v \end{cases}$ $0 \leqslant u < 2\pi,\ 0 \leqslant v \leqslant \pi$, (рис. 2) и *леммы* из п. **3**, согласно которой

$$\vec{n}dS = \pm\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\,dv = \pm\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin u \sin v & a\cos u \sin v & 0 \\ a\cos u\cos v & a \sin u \cos v & -a\sin v \end{vmatrix} du\,dv.$$

Для выбора знака перед определителем достаточно заметить, что в ближайшей к наблюдателю точке сферы $(a,\,0,\,0)$ (для которой $u=0,\ v=\pi/2$) первая компонента вектора $\vec{n}$ равна 1, так как в этой точке $\vec{n} = \vec{i}$ (см. рис. 2); с другой стороны, первая компонента вектора $\vec{n}dS$ в указанной точке равна $-a^2\cos 0 \sin^2 \pi/2$. Следует вывод: перед определителем должен стоять знак $-$. С учетом этого

$$\iint\limits_S (\vec{r},\vec{n})dS = \iint\limits_{\substack{0\leqslant u<2\pi\\0\leqslant v\leqslant\pi}} \Big(\underbrace{\{a\cos u\sin v\,,\, a\sin u \sin v\,,\, a\cos v\}}_{\vec{r}},\, \underbrace{a^2\{\cos u \sin^2 v,\ \sin u\sin^2 v,\ \sin v\cos v\}du\,dv}_{\vec{n}dS}\Big) =$$

$$= \iint\limits_{\substack{0\leqslant u<2\pi\\0\leqslant v\leqslant\pi}} a^3(\cos^2 u \sin^3 v + \sin^2 u \sin^3 v + \sin v \cos^2 v)\,du\,dv = \int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_0^{\pi} a^3 \sin v\,du\,dv = 4\pi a^3.$$

<u>Пример 2</u>. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = \{x^2,\, y^2,\, z^2\}$ через верхнюю сторону поверхности S — части параболоида $x^2+y^2+2az = a^2$ $(a>0)$, лежащей во 2-м октанте (рис. 3).

Эквивалентная формулировка: вычислить $\iint\limits_S x^2dy\,dz + y^2dz\,dx + z^2dx\,dy$ по верхней стороне поверхности $S : x^2+y^2+2az = a^2,\ x<0,\ y>0,\ z>0\ \ (a>0)$.

<u>Первое решение</u>. Поверхность S является графиком функции $z = (a^2-x^2-y^2)/(2a)$ над четвертью круга $x^2+y^2 < a^2,\ x<0,\ y>0$, поэтому $\vec{n}dS = \pm\{-z'_x, -z'_y,\, 1\}dx\,dy = \{x/a,\, y/a, 1\}dx\,dy$. Соответственно

$$\iint\limits_S (\vec{F},\vec{n})\,dS = \int\limits_{\substack{x^2+y^2<a^2\\x<0,\ y>0}} \big(\{x^2,\, y^2,\, ((a^2-x^2-y^2)/(2a))^2\}, \{x/a,\, y/a, 1\}\big)dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\substack{x^2+y^2<a^2\\x<0,\ y>0}} \big(x^3/a + y^3/a + \big((a^2-x^2-y^2)^2/4a^2\big)dx\,dy \overset{\substack{x=r\cos\varphi\\y=r\sin\varphi}}{=}$$

$$= 1/a\int\limits_0^a r^4dr \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)d\varphi \;+ \int\limits_0^a \big((a^2-r^2)^2/(4a^2)\big)\,r\,dr \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi = 0 \;+\; \pi a^4/48.$$

Второе решение. При вычислении интеграла $\iint\limits_S z^2\,dxdy$ той частью S^+ поверхности S, на которой вектор нормали $\vec{n}$ образует *острый* угол с осью Oz, является вся поверхность S, а ее проекцией S^+_{xy} на плоскость xOy служит четверть круга $x^2+y^2<a^2,\ x<0,\ y>0$. Поэтому

$$\iint\limits_S z^2\,dxdy = \iint\limits_{S^+_{xy}} \Big(\underbrace{(a^2-x^2-y^2)/(2a)}_{z}\Big)^2 dxdy \overset{\substack{x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi}}{=} \int\limits_0^a \big((a^2-r^2)^2/(4a^2)\big)r\,dr \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \ = \pi a^4/48.$$

При вычислении интеграла $\iint\limits_S y^2\,dzdx$ частью S^+ поверхности S (на которой вектор нормали $\vec{n}$ образует *острый* угол с осью Oy) также является вся поверхность S, на сей раз рассматриваемая как график функции $y=\sqrt{a^2-x^2-2az}$ над (если смотреть сбоку) фигурой плоскости zOx, ограниченной линиями $x^2+2az=a^2,\ z=0,\ x=0$. Поэтому $\iint\limits_S y^2\,dzdx = \iint\limits_{S^+_{zx}} (a^2-x^2-2az)\,dzdx$.

При вычислении же интеграла $\iint\limits_S x^2\,dydz$ вся поверхность S совпадает с той своей частью S^-, на которой вектор нормали $\vec{n}$ образует *тупой* угол с осью Ox, и ее следует рассматривать как график функции $x=-\sqrt{a^2-y^2-2az}$, имеющий в качестве проекции на плоскость yOz фигуру, ограниченную линиями $y^2+2az=a^2,\ z=0,\ y=0$. Поэтому $\iint\limits_S x^2\,dydz = -\iint\limits_{S^-_{yz}} (a^2-y^2-2az)\,dydz$.

Сравнение с предыдущим вычислением интеграла $\iint\limits_S y^2\,dzdx$ дает: $\iint\limits_S x^2\,dydz = -\iint\limits_S y^2\,dzdx$, в силу чего

$$\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy = \iint\limits_S z^2dxdy = \pi a^4/48.$$

Литература

[**1**] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. М.: Наука, 1966.

[**2**] Шведенко С. В. Простой вывод формулы площади гладкой поверхности // Математическое образование. - 2021. - № 4 (100). - С. 96-98.

Шведенко Сергей Владимирович,
доцент кафедры высшей математики
Национального исследовательского ядерного
университета (МИФИ), кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: sershvedenko@mail.ru

Матбои 179-й школы и отборы на матбой в команду 2-й школы

Материал предоставил А. Я. Канель-Белов

В первой части подборки приведены задачи математических боев 179-й школы г. Москвы. Они происходили в конце 70-х годов прошлого века. Во второй части приведены задачи отборов на математические бои в команду 2-й школы г. Москвы. Кроме того, дана не систематизированная подборка задач различных олимпиад. На взгляд редакции, она имеет определенную ценность ввиду содержательности задач. Вторая часть охватывает период конца 70-х – конца 80-х годов прошлого века.

Отметим, что традиция матбоев жива до сих пор, например, в 179-й школе в текущем учебном году матбои проводятся. Правила матбоев можно посмотреть в выпуске “Памяти Валерия Анатольевича Сендерова”, стр. 6–18, по адресу https://matob.ru/files/senderov_final.pdf

Математические бои московской школы № 179

Каждый из представленных матбоев содержит довольно мало задач — обычно 6, иногда 4 или даже две. Хорошо ли это? Вопрос дискуссионный. С одной стороны, экономится время, можно разобрать и обсудить решения, их идеи, фактически — провести занятие. С другой стороны, больше роль случайностей и меньше спортивный интерес. Не все школьники заняты решением. Надо сокращать команду. Мне кажется, что 6 задач — это правильно, а 4 или две — это уже не бой. (Комментарий А. Канель-Белова.)

9 класс

1. Дано квадратное уравнение $x^2 + p_1x + q_1 = 0$. Находят его вещественные корни $p_2 < q_2$. С уравнением $x^2 + p_2x + q_2 = 0$, если это возможно, проводят ту же процедуру. Докажите, что этот процесс конечен.

2. Докажите, что числа $49, 4489, 444889$, ... (Каждое получается вставкой 48 в середину предыдущего) являются квадратами.

3. Множество A натуральных чисел имеет больше семи элементов, среди которых нет взаимно простых, НОК$(A) = 210$. Их произведение делится на 1920 и не является квадратом. Найдите A.

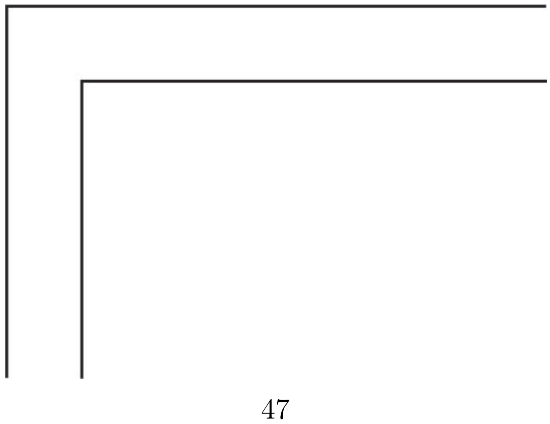
4. Постройте центр окружности с помощью одного циркуля.

5. Найдите множество точек внутри правильного треугольника, таких, что расстояния от каждой до его сторон сами служат длинами некоторого треугольника.

6. Докажите иррациональность числа $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Матбой, 9 класс

1. Грабители страны Флатландия должны вынести из банка чемодан золота. Прямоугольный коридор, которым им предстоит выбираться, имеет ширину 1 метр, см. рисунок. В каком чемодане (произвольной формы, жестком) им удастся вывезти наибольшее количество золота?



2. Найдите минимум функции:

$$Y = |X - A_1| + ... + |X - A_N|, \quad \text{где} \quad A_1 < ... < A_N.$$

3. Докажите, что $X^2 + 1$ не делится на 103.

4. Сколько разных слов могут знать грабители из первой задачи, если в алфавите языка Флатландии N букв, все слова содержат каждую букву ровно два раза, и никакая буква не может стоять два раза подряд?

5. N костей домино уложены в прямоугольную коробку. Две рядом лежащие доминошки, касающиеся длинными сторонами, можно повернуть на 90 градусов. Докажите, что любую укладку можно сориентировать одинаково.

6. Докажите, что прямую нельзя представить в виде счетного числа непересекающихся отрезков (точка считается отрезком).

7. Одним циркулем построить все вершины квадрата по двум его смежным вершинам.

Матбой

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 2/(1/x_n + 1/x_2) \\ ... \\ x_k = 2/(1/x_{k-1} + 1/x_{k+1}) \\ ... \\ x_n = 2/(1/x_{n-1} + 1/x_1) \end{cases}$$

2. При каком значении A сумма площадей двух криволинейных треугольников, ограниченных графиком функции $Y = \sin x$ и прямыми $x = a$ (a — из интервала $]0, \pi/2[$), $y = 0$, $y = 1$ будет максимальной?

3. Докажите, что если $2N + 1$ и $3N + 1$ — квадраты, то N делится на 8.

4. Сумма координат вектора B равна нулю. Докажите, что его координаты можно поменять местами так, чтобы новый вектор B^* образовывал с данным вектором острый, а не тупой угол.

5. Три окружности равного радиуса с центрами в точках A, B, C пересекаются в одной точке O. Докажите, что площади 3-х множеств точек, принадлежащих только одной окружности, равны удвоенной площади треугольника ABC.

Матбой

1. Докажите, что сумма цифр степени двойки стремится к бесконечности.

2. Верно ли, что равновеликие многоугольники равносоставлены? (Т.е. один можно разрезать на части, из которых можно сложить другой.)

3. По правилам турнира, если два рыцаря дрались с третьим, то они не дерутся между собой. Найдите минимальное число поединков, если в турнире участвуют $2N$ рыцарей.

4. Если многочлен тождественно неотрицателен, то он — сумма квадратов двух многочленов. Доказать.

5. A — алгебраическое число и не корень многочлена G с рациональными коэффициентами. Тогда для другого многочлена F с рациональными коэффициентами $F(A) \cdot G(A) = 1$.

6. Если любые три из N выбранных кругов имеют общую точку, то общую точку имеют все.

Матбой

1. Лестница состоит из 100 ступенек. Коля хочет спустится вниз, при этом он движется прыжками вверх и вниз по очереди. Прыжки бывают трех типов: на 6 ступенек (через 5-ю на 6-ю), на 7 и на 8. Два раза на одну ступеньку Коля не становится. Сможет ли он спустится?

2. Из бумаги вырезан выпуклый четырехугольник $ABSD$, а из картона — $PQRS$. Картонный положили на бумажный так, что по одной его вершине попало на каждую сторону бумажного и

перегнули оставшиеся части бумажного, при этом картонный оказался закрыт в один слой. Докажите, что либо у бумажного четырехугольника есть параллельные стороны либо перпендикулярные диагонали.

3. Какую цифру надо поставить вместо "?" в числе 8...(50 раз)...8?9...(50 раз)...9, чтобы получившиеся число делилось на 7?

4. Можно ли нарисовать на поверхности кубика Рубика замкнутый путь, не проходящий через вершины квадратиков и обходящий их все по одному разу?

Матбой

1. Сколько сторон может быть у выпуклого многоугольника, все диагонали которого равны?

2. Вычислить $\sqrt{0,1...1}$ (100 знаков).

а) с точностью до сотого знака.

б) до 101-го.

(Ответ: $0,3...31$, 100 троек)

Матбой

1. Докажите, что при всех достаточно больших N выполнено неравенство:

$$\prod_{1\le K,M\le N,\, K\text{ не равно }M} (K^{1/K} - M^{1/M}) < N(1+1/N)^{N/2^2}.$$

2. Можно ли на окружности радиуса 1 отметить 1985 точек так, чтобы длина любой соединяющей их хорды была рациональным числом?

Решение: длина хорды $= 1/\cos$(суммы дуг, дополняющих ее до полуокружности). Воспользоваться тождеством:

$$(4N/(N^2+1))^2 + ((2N^2-2)/(N^2+1))^2 = 2^2.$$

Матбой

1. Любая проекция выпуклого многоугольника M имеет длину не меньше единицы. Докажите, что внутри него можно поместить окружность радиуса $1/3$.

2. На прямой расположено конечное число одинаковых упругих шариков. Докажите, что через некоторое время столкновения между ними прекратятся.

Указание: график движения. Они меняются скоростями, и только.

А если массы произвольны?

3. Последовательность натуральных чисел такова, что

$$\lim_{n\to\infty} A(N)/(A(1)\cdot\ldots\cdot A(N-1)) = 0.$$

Докажите, что сумма всех $A(N)$ сходится к иррациональному числу.

4. Треугольники — ? (Задача не восстановлена.)

Матбой 24.12

1. С помощью циркуля с раствором не более 10 см и линейки длиной 10 см соединить точки, отстоящие друг от друга на 1 метр.

2. $ABCD$ — трапеция. Положим: B_1 — середина AC, C_1 — середина BD; далее B_{N+1} — середина AC_N, C_{N+1} — середина DB_N. Пусть длина BC равна X, а длина AD равна Y.

1) найти длину B_NC_N;

2) найти предел длины B_NC_N при $N\to\infty$;

3) когда все эти длины одинаковы?

Матбой 29.12

1. Докажите, что для любого целого N существует число, кратное N, десятичная запись которого содержит только нули и единицы.

2. Пусть S — площадь четырехугольника со сторонами A, B, C, D. Докажите, что $S \leq (1/2)(AC+BD)$.

3. См. Предыдущий бой, задачу 2.

4. Докажите, что числа 2^M-1 и 2^N-1 взаимно просты тогда и только тогда, когда M и N взаимно просты.

Задачи к матбою

1. Последовательность A_N состоит из неотрицательных чисел, и для любых M и N $A_{M+N} \leq A_M + A_N$. Докажите, что существует предел последовательности A_N/N.

2. См. Предыдущий бой, задачу 1.

3. Существует ли последовательность, у которой множество предельных точек есть

1) 1, 1/2, ..., $1/N$, ... ;

2) то же, плюс точка 0?

4. Сколько цифр содержит десятичная запись числа 2^{100}?

5. Пусть N — фиксированное число. Указать все такие A, что числа $[A]$,$[2A]$, ..., $[NA]$ все различны и $[1/A]$, $[2/A]$, ..., $[N/A]$ — тоже различны.

Отборы на матбой в команду 2-й школы

Устные олимпиады-отборы в команду на матбой (проводил учитель 2-й школы Сендеров В.А.).

Эти отборы (как обратила внимание Фотиева З.М.) служили не столько для отбора, сколько для общения, являясь по сути жесткой формой кружка. В результате команда 2-й школы побеждала остальные школы (в т.ч. 57-ю) с разгромным счетом и набрала рекордное число премий на олимпиадах высокого уровня. Простейший рецепт — заставлять решать много олимпиадных задач — на удивление эффективен. Такова в общих чертах методика Рукшина и примерно так же готовят команду для участия в международной олимпиаде, что говорит о принципиальной возможности обучить многих решению олимпиадных задач. (Комментарий времен проведения отборов.)

Хорошие, по мнению составителей, задачи отмечены восклицательным знаком, трудные задачи — звездочкой.

Отборы в команду для боя с 91-й школой: Отбор № 1

1. На сколько частей разбивают пространство 4 плоскости общего положения? N плоскостей?

2. Решить уравнение:

$$1/(1+1/(1+1/...)...)\ \ (N \text{ раз дробная черта}) = x.$$

Справка: рекуррентная формула для чисел Фибоначчи:

$$U(N) = (1/\sqrt{5}) \cdot \left(((\sqrt{5}+1)/2)^N - ((\sqrt{5}-1)/2)^N\right).$$

3. Сколько решений имеет уравнение в рациональных числах:

$$x^2+x+1=y^2\,?$$

4!. $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, $P(x)=Q(x)(x+a)^n$. Докажите, что $P(x)$ имеет хотя бы $n+1$ ненулевой коэффициент.

5. Окружность касается сторон угла. Рассматриваются треугольники, две стороны которых лежат на сторонах угла со вписанной данной окружностью. Найдите множество центров их описанных окружностей.

Отбор № 2 — нет данных.

Отбор № 3

1. Дан треугольник ABC, BB_1 и CC_1 — его биссектрисы. Известно, что углы $\angle B_1C_1A : \angle CC_1A = \angle C_1B_1A : \angle BB_1A$. Верно ли, что треугольник ABC равнобедренный ?

2!. Между числами X_1, X_2, ... X_N расставляют знаки "+" или "−". Докажите, что можно получить либо ноль, либо числа, модули которых различаются не менее чем в 2^N раз.

3. Дан звездчатый многоугольник (т.е. есть точка O внутри него, из которой видны все его стороны). Если две его стороны образуют угол больше 180°, то к ним приклеивают параллелограмм, построенный на этих сторонах. Докажите, что рано или поздно получится выпуклый многоугольник.

4!. X_i — попарно различные целые числа.

а) Докажите неравенство:

$$\sum X_i^7 + \sum X_i^5 \geq 2\left(\sum X_i^3\right)^2.$$

б) Докажите, что равенство выполняется, если X_i — последовательные целые числа.

Отбор № 4 (добор)

1. Сколько различных дробей можно получить, расставляя скобки в выражении: $X_1 : X_2 : ... : X_N$? (Все X_i — различные простые числа.)

2. A_1, ..., A_{10} — числа от 1 до 10, $B_I = A_I + I$. докажите, что при некоторых M и N разность $B_M - B_N$ делится на 10.

3. Дан треугольник ABC. Провести прямую, которая делит пополам его площадь и периметр.

4!*. В коробке первой величины содержатся две коробки второй величины. В коробках (k)-ой величины содержатся две коробки ($k+1$)-ой величины. В коробках последней (N)-ой величины лежит по одной монете. За один ход разрешается в одной из коробок любой величины перевернуть все монеты. Доказать, что за N ходов можно уравнять число монет, лежащих орлом вверх, с числом монет, лежащих решкой вверх.

Отбор в команду 9-10 классов для боя с 444-й школой.

1. Отмечено 9 точек целочисленной решетки, так, что любые 3 образуют треугольник. Докажите, что найдутся такие 3 отмеченные точки a, b и c, что точка пересечения медиан треугольника $авс$ тоже лежит на решетке.

2. На основании AD трапеции $ABCD$ взята точка K. Постройте точку X на основании BC, такую, чтобы площадь пересечения треугольников BKC и AXD была максимальной.

3. Последовательность a_N состоит из чисел 1 и −1. Известно, что $a_K = a_{(K-L)} \cdot a_{(K-M)}$ при $K > L$, M, $M < L$.

А) Доказать периодичность с самого начала.

Б) Пусть $T(L, M)$ — наименьшее общее кратное всех периодов при различных последовательностях a_K. Докажите, что $T(L, M) = T(L, M - L)$.

4*. $0 < A_0 < ... < A_N$. Докажите, что тригонометрический многочлен $A_0 + A_1\cos(X) + ... + A_N\cos(NX)$ на участке от 0 до π ровно N раз обращается в 0. (Из книги Пойя и Сеге.)

Добор в команду 9-10 классов для боя с 444-й школой

1. Что больше

$$4^N \quad \text{или} \quad \binom{2N}{N}?$$

2!*. Найти многочлен минимальной степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

3. p — простое число, большее двух. Докажите, что число

$$(2+\sqrt{5})^p - 2^{p+1} \text{ делится на } p.$$

4!*. Дана строго возрастающая последовательность целых чисел $U(N)$. Известно, что $U(1) = 1$, $U(2) = 2$ и, если $(M, N) = 1$, то $U(MN) = U(M)U(N)$. Доказать, что $U(K) = K$.

5*. Биссектрисы разбивают треугольник ABC на 6 треугольничков, в каждый из которых вписана окружность. Докажите, что если 4 из этих окружностей равны, то треугольник правильный.

Отбор в команду матбоя с 57-й школой

1. Существует ли тетраэдр, такой, что существовало бы 9 различных шаров, касающихся плоскостей всех его граней?

2. Многочлены $P_1(X)$ и $P_2(X)$ принимают целые значения в одних и тех же точках. Докажите, что их сумма либо разность — константа.

3. Пусть $a_1 \cdot \ldots \cdot a_N = 1$; $F(a_1, \ldots, a_N) = 1/(a_1+1) + \ldots + 1/(a_N+1)$. В каких интервалах заключены значения F?

4!. В треугольнике ABC проведены прямые AA_1, BB_1, и CC_1, где A_1, B_1, C_1 — точки на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC, пересекающиеся в одной точке O. Построить точку O так, чтобы площадь треугольника $A_1B_1C_1$ была наибольшей.

Сендеровский письменный конкурс

(По записям М. Севрюка[1])

Вывешивались задачи. Удивительно, что их переписывали, решали и сдавали. М. Севрюк говорил, что их было семь человек, но это ему дало столько же, сколько остальная школа. Задача об оценке длины ломаной, соединяющей N точек в квадрате, привела его к изучению неравенств, и еще школьником он опубликовал статью в “Кванте”.

1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде разности квадрата и куба натуральных чисел.

2. Известно, что если зафиксировать одну переменную, то функция $F(X, Y)$ по другой будет многочленом. Докажите, что она будет сама многочленом от двух переменных.

3. Можно ли построить треугольник по основанию, углу при вершине и отрезку, соединяющему основания биссектрис других углов?

4. Пусть $A + 1$ делится на простое P, но не на его квадрат. Тогда $A^{P^K} + 1$ не делится на P^{K+3}. Докажите это.

5. Существует ли коммутативное кольцо с делителями нуля, у которого всякий элемент разлагается на неприводимые?

6. Разрежьте два правильных треугольника на 5 многоугольников и составите один правильный треугольник.

7. А) докажите, что три стержня можно связать нитями так, чтобы они не соприкасались, но образовывали жесткую конструкцию.

[1]Ученик академика В. И. Арнольда.

1979–1984: студент механико-математического факультета МГУ. Дипломная работа: “Автодуальные диффеоморфизмы и векторные поля” (научный руководитель В.И. Арнольд).

1984–1987: аспирант кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ.

С 1987 года по настоящее время: сотрудник Института энергетических проблем химической физики АН СССР (с 1991 года РАН), Москва (имени В.Л. Тальрозе с 2012 года). В настоящее время — главный научный сотрудник.

1988: кандидатская диссертация “Обратимые динамические системы” (научный руководитель В.И. Арнольд).

2003: докторская диссертация “Динамический анализ атомно-молекулярных столкновений” (научный консультант Л.Ю. Русин).

Б) какое минимальное к число нитей нужно для этого?

В) при каких B и L можно составить такую конструкцию, в которой все стержни имеют длину B, а нити — L?

8. N-элементное множество есть объединение $N+1$-го подмножеств. Докажите, что его можно представить в виде их объединения хотя бы двумя способами.

1. Докажите, что при простом P многочлен деления круга $(X^P-1)/(X-1)$ не разлагается в произведение множителей с натуральными коэффициентами.

2. Найдите многочлен наименьшей степени с целыми коэффициентами, для которого число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ является корнем.

3. Через метацентр (точку пересечения медиан) и центр вписанной окружности треугольника ABC проведена прямая. Докажите, что если она перпендикулярна биссектрисе угла C, то $(a+b+c)/3 = 2/(1/a+1/b)$.

4. В арифметической прогрессии с разностью, меньшей 1976, расположено подряд 11 простых (возможно, отрицательных) чисел. Найдите все такие прогрессии.

5. Из A в B ведут две непересекающиеся дороги. Если два автомобиля, связанные тросом длины $2L$ могут проехать по разным дорогам из A в B, не порвав трос, то могут ли разминуться два круглых воза радиуса L каждый, едущие навстречу друг другу по разным дорогам?

1. Докажите, что если среди каждых четырех участников олимпиады хотя бы один знаком с остальными тремя, то найдется участник олимпиады, знакомый со всеми вообще. Найдите минимальное число таких всезнаек в зависимости от числа участников.

2. Какова максимальная длина несамопересекающейся ломаной, идущей по сторонам клеток ведущей из угла клеточного $M \times N$ прямоугольника в угол, ему противоположный?

3. А) докажите, что шахматный конь не может обойти все поля доски $4 \times N$ по одному разу и вернуться в исходное поле.

Б) при каких N он все же может это сделать, не возвращаясь в исходное поле?

4. Может ли сумма двух периодических функций с наименьшими периодами 1 и $\sqrt{2}$ снова быть периодической функцией?

5. Найдите множество четвертых вершин ромбов, три вершины каждого из которых лежат на сторонах данного квадрата.

6. Из центра правильного P-угольника (P — простое) проведены векторы в его вершины. Докажите, что сумма части из них не может равняться нулю.

7. Докажите, что если число $2^{2K}+2^K+1$ — простое, то оно делитель $2^{2^K+1}-1$.

8. Докажите, что для любого N найдется окружность, на которой лежит ровно N узлов клетчатой бумаги.

Олимпиады

Устная Олимпиада, 8-10 класс, КОНСТАНТИНОВСКИЙ ЛАГЕРЬ, Калмат Ярв, 15 августа 1986 г.

Составили: Д. Фомин, Г. Кондаков

М а р с и а н е

1. Марсианин рождается в полночь и живет ровно 100 суток. Известно, что всего марсиан было нечетное количество. Докажите, что дней, в которые жило нечетное число марсиан, по крайней мере 100.

Р а з р е з а н и е

2. Из квадрата 8×8 вырезали угловую клетку. Можно ли его разрезать на 17 равновеликих треугольников?

Д и а м е т р ы

3. Сумма диаметров набора многоугольников меньше диаметра их объединения. Докажите,что их можно разделить прямой.

4. F — непрерывная функция из $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая, что для любой точки x при некотором N имеем $F^{(N)}(x) = 1$. Чему равно $F(1)$?

Р а с к р а с к а

5*. Дерево покрашено в 2 цвета. Если в какую-то вершину приходят только ребра одного цвета, то их все можно перекрасить в противоположный. Можно ли все ребра покрасить в 1 цвет?

М а р ш р у т ы !*

6*. Проведите на плоскости прямые и отметьте несколько точек так, чтобы на любой прямой лежало 4 отмеченных точки и через каждую отмеченную точку проходило бы ровно 4 прямых.

С т а к а н ы !*

7*. У 3-х алкоголиков есть бесконечно большие стаканы. В них натуральное число литров. Один может переливать другому столько, сколько у того уже есть. Всегда ли они могут перелить всю жидкость в 2 стакана?

К в а д р а т ы

8. Даны два квадрата со стороной 1. Какова минимальная сторона квадрата, в котором они могут быть расположены без пересечений?.

Устная олимпиада ИПУ[2], 9 класс, 6 декабря 1987 г.

Составили: Г. Кондаков, А. Белов

1. Целое число N таково, что число $3N$ представимо в виде $X^2 + 2Y^2$, где X, Y — целые числа. Докажите, что само число N представимо в таком виде.

2!*. На поверхности солнца есть пятна. Каждое пятно — круг, площадь которого меньше половины площади сферы. Пятна не пересекаются. Докажите, что найдутся две диаметрально противоположные точки на сфере, не покрытые пятнами.

3!. В N-мерном кубе покрашено более половины вершин. Ребро называется покрашенным, если покрашены обе ограничивающие его вершины. Докажите, что покрашено не менее N ребер.

4. Построить прямоугольный треугольник по высоте и радиусу вписанной окружности.

5. Имеет ли решения уравнение: $X^3 - Y^3 = 1985$?

6!. Допустим, что любую конечную карту на плоскости можно правильно раскрасить в четыре цвета. Докажите, что тогда бесконечную карту тоже можно правильно раскрасить в четыре цвета.

7!*. Решетка из правильных треугольников раскрашена в N цветов. Для любой ли раскраски верно, что найдется точка, из которой улитка может проползти 100 см по одноцветным ребрам без повторений? (Решить задачу в зависимости от N, раскрашены ребра, длина ребра 1 см.)

8. Сколько необходимо черных шаров, чтобы закрыть точечный источник света в пространстве?

9*. Множество состоит из 1000 элементов. Каково максимальное число подмножеств, несравнимых по включению?

Олимпиада ИПУ, 8-10 класс, 6 декабря 1987 г.

Составил: Г. Кондаков

1. Построить прямоугольный треугольник по высоте и радиусу вписанной окружности.

2. Имеет ли решения уравнение: $X^3 - Y^3 = 2003$?

[2]Институт проблем управления, олимпиады ИПУ были организованы Г. Кондаковым в середине 80-х годов.

3. Сколько необходимо черных шаров, чтобы закрыть точечный источник света в пространстве?

4. Решить систему:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + ... + X_N & = & 3 \\ 1/X_1 + 1/X_2 + ... + 1/X_N & = & 3 \end{cases}$$

5. Докажите, тождество:

$$1/\sin(2X) + 1/\sin(4X) + ... + 1/\sin(2^N X) = \mathrm{ctg}(X) - \mathrm{ctg}(2^N X),$$

где $X \neq M^n/(2^K)$, $K = 0,...,\ N$, M — целое.

Олимпиада ИПУ, 8 класс, 7 декабря 1986 г.

1. Показать, что большинство шестизначных чисел не представимо в виде произведения двух трехзначных.

2. В разных точках прямой сидят паук и муха. Покажите, что паук сможет догнать муху, если его скорость в 2 раза больше скорости мухи (паук близорук).

3. Всякий ли трехгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный треугольник?

4. Найти последнюю значащую цифру числа 1000!

5. Последовательность из 36 нулей и единиц такова, что в ней встречаются любые сочетания из 5 нулей и единиц подряд. Начинается она с 10100. Чем она кончается?

6. На плоскости расположено N точек, причем каждая соединена отрезком с ближайшей к ней. Верно ли, что отрезки могут пересекаться только в вершинах?

7. $A(1) + A(2) + ... + A(N) = 1$; $A(I) \geq 0$; найти MAX $[A(1) \cdot A(2) + ... + A(N-1) \cdot A(N)]$.

8. Дан многогранник с $10N$ гранями. Найдется ли у него N граней с одинаковым числом вершин?

Вступительная олимпиада, 8 класс, Киров-88

Составили: Ю.М. Бурман, К.Н. Игнатьев, Г.В. Кондаков

1. Хулиган Вася решил в целых числах уравнение: $x^2 + 2xy + 2y^2 = 13$ и утверждает, что оно имеет 4 решения. Прав ли он?

2. Хулиган Вася обещает наказать пионера Костю, если он не докажет неравенство: $ab \leq a^3/3 + 2b^{1,5}/3$. Скорее помогите ему!

3. В трапеции углы при нижнем основании в сумме равны 90°. Хулиган Вася не очень силен в геометрии. А теперь вычислите, что больше, полуразность оснований или отрезок, соединяющий середины оснований.

4. Может ли хулиган Вася в свободное время построить ломаную в квадрате со стороной 1, которую никакая прямая, параллельная стороне квадрата, не пересекает дважды?

А) Ломаная имеет длину $1,9$.

Б) Ломаная имеет длину $2,0$.

5. В вершинах куба написаны числа. Вместо каждого числа записывают среднее арифметическое чисел, стоящих в трех соседних вершинах (числа заменяют одновременно). После 10 таких операций в вершинах оказались исходные числа. Могут ли в вершинах находиться различные числа?

6. Может ли девочка Катя замостить плоскость семиугольниками:

А) одинаковыми?

Б) выпуклыми?

В) выпуклыми, одинаковыми?

7. Зурбаган. Вокруг города Зурбагана проходит кольцевая дорога. Все улицы начинаются или кончаются только на этой дороге и никакие 2 улицы не имеют 2-х различных пересечений. Части, на

которые улицы разбивают город, называются микрорайонами. В городе ввели одностороннее движение на всех улицах и кольцевой дороге. Докажите, что хотя бы один микрорайон можно объехать по правилам.

8. Начальник марсианского метро хулиган Вася утверждает, что всегда можно закрыть одну станцию так, чтобы с любой оставшейся станции можно было бы проехать на любую другую. Прав ли он?

Запасная задача про неотличимый кубик — нет данных.

Курчатовская олимпиада, 7 класс, 30 ноября 1986 г.

1. Построить график уравнения

$$\sqrt{X^2 + X + 1/4} = X - Y$$

2. Найти наименьшее значение выражения:
а) $X + a/X$;
б) $X + a/X$ $(X > 0,\ a > 0)$.

3. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ найти точку O, такую, чтобы сумма $AO + BO + CO + DO$ имела наименьшее значение.

Курчатовская олимпиада, 8 класс, 30 ноября 1986 г.

1. Докажите, что для любых чисел X и Y, отличных от нуля, выполняется неравенство (нет данных).

2. На доске в строку записаны числа

$$1 \quad 1/2 \quad 1/3 \quad 1/4 \quad \ldots \quad 1/10 \quad 1/11 \quad 1/12.$$

Докажите, что как бы мы не расставляли знаки '+' и '−' между этими числами, полученная сумма не будет равна нулю.

3. Даны прямая L и точки A и B, лежащие по одну сторону от L. Построить (при помощи циркуля и линейки) окружность, проходящую через точки A и B, касающуюся данной прямой L.

4. Решить уравнение

$$x + \sqrt{x + 1/2 + \sqrt{x + 1/4}} = a,$$

где a — действительное число.

Курчатовская олимпиада, 9 класс, 30 ноября 1986 г.

1. Решить уравнение

$$x + \sqrt{x + 1/2 + \sqrt{x + 1/4}} = a,$$

где a — действительное число.

2. Решить уравнение (нет данных).

3. В квадратную таблицу размера 4×4 (см. ниже) записаны числа $1, 9, 8, 5$. Можно ли в остальные клетки таблицы вписать действительные числа так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце таблицы стояла арифметическая прогрессия?

	9		
1			
			5
		8	

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отношение длин диагоналей BD и AC равно K. Найти отношение площади этого четырехугольника к площади ромба, вершины которого лежат на сторонах четырехугольника, а стороны параллельны диагоналям четырехугольника

Курчатовская олимпиада, 10 класс, 30 ноября 1986 г.

1. Решить уравнение

$$x + \sqrt{x + 1/2 + \sqrt{x + 1/4}} = a,$$

где a — действительное число.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} X + Y + Z = 3 \\ X + Y + Z = 3 \\ X + Y + Z = 3 \end{cases}$$

где N — натуральное число.

3. Решить уравнение (нет данных).

4. Известно, что в данном треугольнике каждая медиана больше любой его высоты. Доказать, что наибольший угол этого треугольника больше 150°.

Ленинградская городская олимпиада, 07 марта 1988 г., 5 класс. Основные задачи

1. В клетках таблицы 3×3 стоят нули. Можно выбирать квадрат 2×2 и увеличить в нем все числа на 1. Докажите, что за несколько таких операций невозможно получить таблицу ниже.

4	9	5
10	18	12
6	13	7

2. Каждый из 30 игроков и ведущий записали все числа от 1 до 30 в некотором порядке. Затем записи сравнили. Каждому игроку дали столько очков, сколько раз у него и у ведущего на одинаковых местах стоят одинаковые числа. Оказалось, что все игроки набрали разные количества очков. Докажите, что чья-то запись полностью совпала с записью ведущего.

3. Можно ли натуральные числа от 1 до 100 выписать в строку так, чтобы разность любых двух соседних (из большего вычитается меньшее) была не меньше 50?

4. Существуют ли такие целые числа A и B, отличные от нуля, что одно из них делится на их сумму, а другое — на их разность?

Дополнительные задачи

5. На столе лежит куча из 1001 камня. Ход состоит в том, что из какой-либо кучи выбрасывают камень, а затем одну из куч делят на две. Однажды выброшенный камень вторично выбрасывать нельзя. Можно ли добиться того, чтобы через несколько ходов на столе остались только кучи, состоящие из трех камней?

6. Замок состоит из 64 квадратных комнат, образующих квадрат 8×8. Во всех стенах, разделяющих две комнаты, есть двери. Полы в комнатах покрашены в белый и зеленый цвета. По замку начинает гулять маляр, который заходя в комнату, перекрашивает белый пол в черный, а зеленый пол — в белый. Может ли он гулять так, чтобы в некоторый момент оказалось, что полы в комнатах покрашены в белый и черный цвета в шахматном порядке?

Ленинградская городская олимпиада, 07 марта 1988 г., 7 класс. Основные задачи

1. Известно, что $0 \le Y,\ X \le 1$; докажите, что

$$\frac{X}{1+Y} + \frac{Y}{1+X} \le 1\,.$$

2. В остроугольном треугольнике ABC высота AH пересекается с медианой BM в точке L, а с биссектрисой CK — в точке N. BM и CK пересекаются в точке P. Точки L, N, P попарно различны. Докажите, что треугольник LNP не может быть равносторонним.

3. Докажите, что если каждое из натуральных чисел a, $в$, c, d делится на $ав - cd$, то $|ав - cd| = 1$.

4. За круглым столом сидят 25 человек. У каждого в руках — две карточки, на каждой из которых написано число от 1 до 25, причем каждое число — ровно на двух карточках. Раз в минуту по сигналу ведущего каждый из сидящих передает соседу слева карточку с меньшим числом. Игра кончается, когда у каждого из сидящих окажутся две карточки с одинаковыми числами. Докажите, что игра когда-нибудь кончится.

Дополнительные задачи

5. Докажите, что пятиконечную звезду нельзя нарисовать так, чтобы было $ab < bc$, $cd < de$, $ek < km$, $mo < op$, $pm < ma$:

b

m a c d

p e

m

o k

6. На клетчатом листе бумаги размером 21×21 вершины клеток раскрашены в красный и синий цвета, причем все крайние верхние и все крайние правые вершины, кроме самой нижней, — красные, а все остальные крайние вершины — синие. Докажите, что найдется клетка с двумя красными и двумя синими вершинами, причем красные вершины лежат на одной ее стороне.

6 класс

1. См. Задачу 3 5-го кл. 2. См. Задачу 1 5-го кл.

3. См. Задачу 3 7-го кл. 4. См. Задачу 5 7-го кл.

5. См. Задачу 4 7-го кл.

6. На столе лежат 100 спичек. Двое ходят по очереди. За один ход можно взять $1, 2, 4, 8, \ldots$ (любую степень двойки) спичек. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его партнер?

Вступительная олимпиада ВМШ-88/89, 5-6 класс

1. Король решил уволить в отставку премьер-министра, но не хотел его обидеть. Когда премьер-министр пришел к королю, тот сказал: «в этот портфель я положил два листа бумаги. На одном из них написано “останьтесь”, на другом — “уходите”. Листок, который вы сейчас не глядя вытяните из портфеля, решит вашу судьбу.»

Премьер-министр догадался, что на обоих листках написано “уходите”. Однако ему удалось сделать так, чтобы король его оставил. Как поступил премьер-министр?

(Ж.-К. Байиф)

2. Перед вами два брата-близнеца. Одного из них зовут Ваня, другого — Веня. Один из братьев всегда говорит правду, а другой всегда врет. Вы можете задать один вопрос одному из братьев, на который тот ответит “да” или “нет”. Попробуйте выяснить, кого из близнецов как зовут.

(Р. Смаллиан)

3. Три соседа A, B, C живут в трех домиках, которые стоят в парке, окруженном забором. По утрам сосед A имеет привычку выходить из дома и идти к калитке a, и аналогично соседи B и C (см. рисунок). Соседи сердиты друг на друга и не хотят встречаться. Как им проложить дорожки от своих домов к калиткам, так, чтобы эти дорожки не пересекались?

(С. Ллойд)

```
-  -  -  -  -  -  -  -  -  -  -
|                             |
|  B   A                      |
|                             |
|  C                          |
|                             |
|                             c
|                             |
-  -  -  -  -  -  -  -  a  -  b
```

4. Две ракеты, одна со скоростью 15000 км/ч, другая — со скоростью 9000 км/ч, вылетают навстречу друг другу из точек, находящихся на расстоянии 258197 км друг от друга. Подсчитать, каким будет расстояние между ними за 1 мин до столкновения.

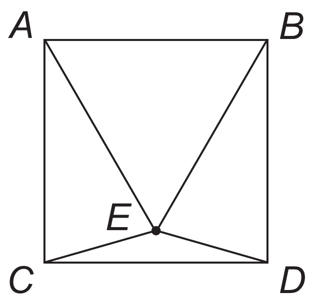
(М. Гарднер)

5. В трех коробочках лежат по два шарика: в первой — два черных, во второй — черный и белый, в третьей — два белых. На коробочках висят таблички чч, чб и бб, но ни одна из них не соответствует истине. Какое наименьшее количество шариков требуется вынуть из коробочек, чтобы узнать, где что лежит?

Задачи для 7-8 класса

На стороне квадрата $ABCD$ построен равнобедренный треугольник CDE ($ED = EC$) с углом ECD, равным 15 градусам. Точка E находится внутри квадрата. Доказать, что треугольник ABE — равносторонний.

(Г. Коксетер, С. Грейцер)



7. Разрезать прямоугольный треугольник на остроугольные.

8. Почему швейцарскому парикмахеру выгоднее побрить двух французов, чем одного немца?

(М. Гарднер)

9. Какие часы вы бы выбрали (и почему): которые показывают точное время один раз в год, или два раза в сутки?

(Л. Кэролл)

10. Доказать, что любое простое число p, оканчивающееся на цифры 017, представимо в виде $a^b + b^a$, где a и b — целые числа (например: $17 = 2^3 + 3^2$).

Олимпиада 16.09.1989 г.

1. Решить в целых числах уравнение $2^N + 7 = X^2$. (Найти все решения и доказать, что других нет).

2. Биссектрисы BD и CE треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что если $OD = OE$, то либо треугольник равнобедренный, либо его угол при вершине A равен 60 градусам.

3. На остове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встретятся два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.) Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

4. Найти максимальное число вершин невыпуклого несамопересекающегося 8-угольника, таких,что из них нельзя провести ни одной внутренней диагонали.

5. С упорядоченными наборами из нулей и единиц разрешается проделывать две операции: изменить первую (слева) цифру; изменить цифру, следующую после первой (слева) единицы. Доказать, что из любого набора можно получить любой другой.

Школа № 43, 8 класс, Домашняя олимпиада, 17-31 октября 1989 г.

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_2 + X_3 + X_4 = 0 \\ \ldots \\ X_{99} + X_{100} + X_1 = 0 \\ X_{100} + X_1 + X_2 = 0 \end{cases}$$

(5 баллов)

2. Существует ли натуральное число N, такое, что числа N, $N+1$, ..., $N+999$ — составные ?

(4 балла)

3. Коридор покрыт ковровыми дорожками так, что каждая его точка покрыта ими, причем, возможно, в несколько слоев. Докажите, что можно убрать часть дорожек так, что при этом все точки коридора по-прежнему будут покрыты, но уже не более, чем в два слоя.

(10 баллов)

4. Вырезанный из бумаги многоугольник сложили вдвое по прямой линии. Докажите, что периметр полученного многоугольника не больше периметра исходного многоугольника.

(3 балла)

5. Двое играют в крестики-нолики на доске 3×3. Ходят по очереди. Ходящий игрок может поставить в любую свободную клетку на доске крестик или нолик по желанию. Выигрывает тот игрок, после хода которого на доске будут стоять три одинаковых знака (крестика или нолика) подряд по вертикали, горизонтали или диагонали (независимо от того, кто их поставил). Кто выигрывает при наилучшей игре обоих — начинающий игру или его партнер?

(8 баллов)

Концепция образования в лицейских классах при РГГУ (проект)

А. В. Гладкий

Представляем читателю проект А.В. Гладкого (1928–2018) концепции среднего гуманитарного образования, который автор, в узком смысле, предназначал для лицейских классов РГГУ, но несомненно имеющий общекультурное значение.

I. Принципы гуманитарного среднего образования

1. Выражение "гуманитарное образование" до недавнего времени применялось только к высшему образованию — для обозначения образования, которое дают факультеты, готовящие специалистов по гуманитарным наукам. О гуманитарном среднем образовании стали говорить, видимо, только в 80-е годы, когда появились школы и классы с "гуманитарным уклоном", часто называемые теперь лицеями, гимназиями, лицейскими и гимназическими классами. Обучение в них строится, как правило, по тому же принципу ранней специализации, что и в возникших в 60-х годах школах "с математическим уклоном": отводится больше времени на гуманитарные предметы и ослабляется внимание к изучению естественных наук и математики. (Последнее на словах часто отрицается, но на деле происходит почти всегда.) Другой общей особенностью "математических" и "гуманитарных" школ является стремление приблизить учебные планы и программы к учебным планам и программам высших учебных заведений. В частности, в учебные планы гуманитарных школ включаются такие дисциплины, как философия, история философии, история социально-политических учений. Считается, что такая специализированная школа наилучшим образом подготовит детей к обучению в высших учебных заведениях по гуманитарным специальностям и в конечном счете к работе в таких областях, как юриспруденция, психология, социология, экономика, преподавание гуманитарных дисциплин в средней и высшей школе, научные исследования гуманитарного профиля.

В то же время существует и другое представление о гуманитарном образовании: как об образовании, направленном не на узко специальную подготовку, а на всестороннее развитие человека, ставящем себе главной целью облагородить личность и приобщить ее к культурному наследию предков. Называть такое образование гуманитарным стали тоже недавно; прежде его называли просто образованием, потом общим образованием в отличие от профессионального. Во всяком случае, речь идет об образовании, ставящем на первый план человека, что, может быть, оправдывает применение к нему термина "гуманитарное". Только такое образование может дать человеку то, что принято называть общей культурой; а без общей культуры невозможно стать хорошим специалистом ни в одной области умственного труда и в особенности в таких обращенных к человеку профессиях, каковы профессии педагога, врача, юриста, психолога, социального работника, экономиста. Тем более невозможно без нее стать серьезным ученым.

Однако гуманитарное образование в указанном широком смысле не может строиться на привилегированном положении гуманитарных учебных дисциплин по сравнению с другими. Гуманитарные и естественные науки — одинаково неотъемлемые составные части общечеловеческой культуры. Человек живет среди природы и является ее частью, и с тех пор, как он стал человеком, он неизменно стремится познать ее и тем самым понять свое место в ней, без чего он не может познать и самого себя. Без хорошего знания основ естественных наук невозможно, в частности, серьезное изучение философии, истории культуры, психологии.

Что касается математики, то она по праву может рассматриваться как один из краеугольных камней культуры. Основательное изучение ее совершенно необходимо для дисциплинирования ума и приобретения привычки к упорядоченному мышлению, без которой невозможно обойтись, например, юристу. (Л.Б. Келдыш, преподававшая в 20-е годы на заочном отделении физмата МГУ, рассказывала, что среди заочников было тогда много старых юристов, и все они учились очень хорошо: потеряв после революции возможность работать по специальности, они пошли в школу преподавать математику.) Привычка к строгому логическому мышлению, вырабатываемая прежде всего изучением математики (которое не может быть заменено в этом отношении изучением логики) необходима также и для работы в большинстве других "чисто гуманитарных" областей, а многие из них требуют и фактических математических знаний (экономика, психология, социология, лингвистика и др.).

Ранняя специализация вредна еще и потому, что преждевременное сужение круга интересов приводит к утрате гибкости ума и сильно затрудняет впоследствии овладение смежными областями знаний и понимание новых идей даже в пределах избранной узкой области. В конечном счете ранняя специализация есть путь к воспитанию недоучек.

Поэтому первым принципом гуманитарного среднего образования должно быть *равноправие учебных дисциплин.* Они не должны делиться на "главные" и "второстепенные" или "профилирующие" и "базовые". Все предметы должны преподаваться на одинаково высоком уровне и с одинаково высокими требованиями. Понимание гуманитарной школы как школы, где гуманитарные предметы усилены за счет остальных, должно быть категорически отвергнуто.

2. Вторым принципом гуманитарного среднего образованней долина быть *основательность.* Это значит, во-первых, что школа должна давать такие знания, которые могли бы послужить надежной основой для дальнейшего образования и самообразования; во-вторых, что все содержание обязательных программ должно в самом деле усваиваться; в-третьих, что школа должна приучать учеников избегать всякого верхоглядства. Чтобы обучение было основательным, необходимо возродить старую традицию, по которой важнейшей составной частью среднего образования было изучение древних языков. Сейчас, через семьдесят пять лет после того, как прекратилось преподавание латинского языка во всех средних школах России (греческий был отменен несколькими годами раньше), мы можем в полной мере оценить глубину упадка культуры, к которому это привело.

Основательное изучение древних языков необходимо по следующим причинам. Во-первых, без знания этих языков всякое изучение античной и средневековой европейской культуры, истории христианства, культуры Возрождения — т.е. практически всего, что лежит в основе нашей цивилизации, — неизбежно будет поверхностным и легковесным; и даже в европейской культуре Нового Времени ряд явлений не может быть до конца понят без знания классических языков, поскольку ими владели и активно пользовались многие из людей, создавших эту культуру. Во-вторых, изучение древних языков представляет собой незаменимую школу для развития ума, дисциплинирующую его и подготавливающую к восприятию логики, философии, истории. (А.Н. Уайтхед — философ и математик, много занимавшийся проблемами образования — говорил об этом так: "Если ваше дальнейшее занятие — думать, воздайте хвалу Провидению за то, что в течение 5 лет юности вам приходилось раз в неделю писать латинские сочинения и ежедневно разбирать латинских авторов".) В-третьих, в новых европейских языках, в том числе в русском, много греческих и латинских элементов, и понимание их структуры и происхождения поднимает владение иностранными и даже родным языком на существенно более высокий уровень.

Принцип основательности требует также, чтобы во всех учебных курсах глубине отдавалось предпочтение перед широтой охвата материала. "Верхушечных" курсов не должно быть не только среди обязательных, но и среди курсов по выбору.

3. Третьим принципом должно быть *соответствие содержания и методов обучения возрасту учащихся.* Ни в коем случае нельзя копировать университетские курсы, перегружать уроки абстрактными концепциями. В частности, в преподавании истории общества и культуры основное внимание должно уделяться фактам, а не теориям, изучению первоисточников должно отдаваться предпочтение перед изучением обобщающих трудов. Курс математики должен быть традиционным с добавлением небольшого числа более современных понятий, необходимых для общего образования (первоначальные понятия теории множеств, теории вероятностей, математической логики).

Такие дисциплины, как философия, логика, история философии, история общественных учений, вообще не должны входить в учебный план, поскольку их изучение требует известной зрелости ума и основательных фактических знаний, которыми школьники еще не обладают. Любая попытка изучать эти дисциплины в средней школе, хотя бы и элитарной, может послужить только воспитанию верхоглядства. (Недаром тот же А.Н.Уайтхед считал, что философию рано изучать даже в университете, к ее изучению человек может быть готов только в зрелом возрасте.) Элементы формальней логики могут быть включены в курс математики.

4. Четвертым принципом должно быть *приучение учеников к самостоятельной работе.* Непременным условием осуществления этого принципа является строгое ограничение времени, отводимого на классные занятия. Если школьник перегружен классными занятиями, то на самостоятельную работу у него просто не остается времени. Поэтому недельная классная нагрузка учащихся не должна превышать 26 ч. в 5 кл., 28 ч. в 6 и 7 кл. и 30 ч. в 8 — 11 кл. (включая два урока физического воспитания, которым ни в коем случае нельзя пренебрегать). Разумеется, это приведет к значительному сокращению числа часов, отводимых на все предметы; но если учащиеся научатся работать самостоятельно, время будет использоваться гораздо эффективнее, и при этом знания будут более глубокими и прочными.

Уменьшение числа классных занятий облегчит также решение еще одной важнейшей задачи — эстетического воспитания. Гуманитарная школа не будет заслуживать этого имени и не принесет никакой пользы, если не оградит своих учеников ОТ влияния “поп-культуры” и не поможет им выработать хороший вкус. Но вряд ли этого удастся добиться путем включения в учебный план еще одного или двух предметов типа “художественной культуры” или “музыкальной культуры”. Гораздо эффективнее будут кружки, посещение концертов, музеев, выставок и т.п. А это опять-таки невозможно, если ученики перегружены классными занятиями.

(Впрочем, если в школе будут и начальные классы, там будут вполне уместны уроки художественного воспитания.)

Для развития самостоятельности очень полезно также, чтобы каждый ученик, начиная примерно с 8 класса, должен был изучать спецкурсы (курсы по выбору). Тематика их должка быть достаточно разнообразной, чтобы каждый мог выбрать спецкурсы, отвечающие его интересам.

5. Пятым принципом должно быть *органическое единство учебного процесса.* Необходимо, чтобы все учебные дисциплины образовывали целостную систему, программы отдельных курсов согласовывались между собой и преподаватели работали в постоянном контакте. Например, математика должна преподаваться в “гуманитарном стиле”, с основным акцентом на ее логическую структуру, ее общеобразовательное значение и связь с естественным языком; преподавание новых языков должно вестись с опорой на знание латыни и греческого, а преподавание второго иностранного языка также и на знание первого; знание древних и новых языков должно использоваться при изучении истории, русского языка, зарубежной и русской литературы, знание основ математики и естественных наук — при изучении истории культуры. Разумеется, все это предполагает очень высокие требования к квалификации преподавателей.

6. Образование, отвечающее указанным принципам, не может, разумеется, быть всеобщим и вряд ли станет в обозримом будущем массовым. Однако для возрождения культуры в России совершенно необходимо создать для начала хотя бы несколько таких школ. Одной из них мог бы стать гуманитар-

ный лицей (или пока хотя бы лицейские классы) при РГГУ. Университету, взявшему на себя задачу возрождения традиций высшего гуманитарного образования в России, естественно заботиться и о возрождении среднего образования — тем более, что это одновременно будет заботой о собственном пополнении. И уж во всяком случае не к лицу университету такого класса, чтобы курируемая им средняя школа была всего лишь одной из многочисленных школ “с уклоном”, культивирующих то, что Ю.Н. Тынянов назвал “развратом полузнания”.

II. Проект учебного плана и пояснительная записка

1. Проект учебного плана

Классы	5	6	7	8	9	10	11
Математика	5	5	5	4	3	3	3
Русская словесность	6	6	5	-	-	-	-
История русского языка	-	-	-	2	-	-	-
Современный русский язык	-	-	-	-	2	2	-
История русской литературы	-	-	-	2	2	2	2
История зарубежной литературы	-	-	-	1	1	1	1
Знакомство с историей	3	-	-	-	-	-	-
Краеведение	2	-	-	-	-	-	-
История общества и культуры	-	2	2	2	2	2	2
Латинский язык	-	5	5	3	2	1	1
Греческий язык	-	-	-	4	4	3	3
1-й иностранный язык	5	5	4	3	1	1	1
2-й иностранный язык	-	-	-	-	3	3	3
Естествознание	3	3	3	2	2	2	-
Физика	-	-	2	2	2	2	2
Химия	-	-	-	-	2	2	2
Спецкурсы	-	-	-	2	2	4	8
Физвоспитание	2	2	2	2	2	2	2
Всего	25	28	28	29	30	30	30

2. Пояснительная записка

а) В курсе математики должны выделяться традиционные учебные предметы: арифметика, алгебра и геометрия, но разделение часов между ними оставлено на усмотрение учителя. В преподавании математики на первом плане должны быть не вычисления, а рассуждения; умение обосновать решение задачи и грамотно изложить его должно считаться не менее важным, чем умение до него додуматься; ученики должны учиться говорить и писать на математические темы, причем от них нужно требовать не только логической корректности, но также ясности и хорошего стиля.

б) Уровень изучения древних языков должен быть таким, чтобы в результате этого изучения ученик мог читать латинских и греческих авторов.

в) Предлагается в младших классах объединить курсы русского языка и литературы в один учебный предмет под названием “Русская словесность”; при его изучении дети должны знакомиться с лучшими образцами русской литературы, учиться грамотно и живо говорить и писать. Затем должны последовать курсы истории русского языка (8 кл.), современного русского языка (9 — 10 кл.) и истории русской литературы (8 — 11 кл.). Курс истории русской литературы должен начинаться с фольклора и древнерусской литературы. Параллельно должна изучаться история зарубежной литературы.

г) Изучение древних языков позволит более основательно и с меньшей затратой времени изучать новые языки. Каждый ученик должен изучить два иностранных языка. При этом изучению языков необходимо придать гуманитарный характер, для чего прежде всего следует отказаться от модной сейчас утилитарной (по существу потребительской) установки, при которой язык рассматривается исключительно как средство. Должно уделяться достаточное внимание грамматике, истории языка, умению писать на нем; изучение языка должно сопровождаться ознакомлением с историей, культурой и литературой (в первую очередь классической) соответствующей страны. Первым иностранным языком не обязательно должен быть английский. Напротив, изучение в качестве первого языка французского или немецкого предпочтительнее ввиду более тесных связей французской и немецкой культуры с русской.

д) Изучение истории начинается с предварительного курса "Знакомство с историей", состоящего из отдельных живых и занимательных очерков о разных периодах всеобщей и отечественной истории. Главная цель этого курса — пробуждение интереса к систематическому изучению истории, которое начинается в 5 классе. История общества и история культуры образуют единый учебный предмет.

е) В гуманитарной школе особое внимание должно уделяться связи между разными науками. В этих целях представляется целесообразным объединить биологию и географию в один учебный предмет — естествознание (куда должны, вероятно, войти также начала астрономии).

ж) Уменьшение числа классных занятий не означает уменьшения нагрузки учителей. Напротив, она увеличится, потому что перенос центра тяжести на самостоятельную работу потребует больших затрат времени на разработку и проверку заданий, на индивидуальные консультации и беседы с учениками, не говоря уже о том, что уменьшение числа уроков позволит проводить их в более напряженном темпе, и на подготовку к ним понадобится больше труда. Поэтому введение предлагаемого учебного плана потребует отказа от учета нагрузки преподавателей только по числу уроков.

Алексей Всеволодович Гладкий (1928–2018),
профессор, доктор физ.-мат. наук.

Об Алексее Всеволодовиче Гладком

Моя дружба с Алексеем Всеволодовичем продолжалась чуть менее 20 лет. Он был замечательным математиком и филологом, учеником выдающегося математика П.С. Новикова, активно работавшим в области математической лингвистики. Он сыграл огромную роль в становлении компьютерной лингвистики в нашей стране. Он плодотворно работал в математической лингвистике, теории формальных грамматик, внёс огромный вклад в теорию и практику автоматического синтаксического анализа естественного языка. В созданной им уникальной теории синтаксических групп интегрально объединялось представление синтаксиса предложения в формализмах зависимостей и непосредственных составляющих. Широкой известностью пользовалась книга «Элементы математической лингвистики», написанная А.В. Гладким в соавторстве с И.А. Мельчуком.

Очень важной частью деятельности Алексея Всеволодовича было развитие образования в нашей стране, в первую очередь школьного математического образования. Он был фактическим организатором отделения математической лингвистики Новосибирского государственного университета, которое было открыто в 1962 году, и стал основным лектором этого отделения.

С 1972 года он преподавал математику и математико-лингвистические дисциплины в Тверском государственном университете и Шуйском филиале Ивановского государственного университета. С 1991 по 2000 год работал в РГГУ, на факультете теоретической и прикладной лингвистики. В последние годы преподавал математику в нескольких математических школах Москвы, работал над созданием учебников.

Вместе со своим другом А.И. Фетом Алексей Всеволодович предпринял несколько попыток издавать независимый журнал для интеллигенции. В 1989 году в Москве вышел единственный номер журнала «Современные проблемы», почти полностью составленный из их статей и переводов. Второго номера уже не было — по не зависящим от них причинам. В 1996–1997 годах в Санкт-Петербурге стал выходить «Новый педагогический журнал», в издании которого А.В. Гладкий активно участвовал. Вышло четыре номера, но пятый уже не состоялся. Два номера сборника «Современные проблемы», изданные в 1997 и 2001 годах Гладким, Фетом и Хлебопросом, переросли в сайт «Современные проблемы. Библиотека», созданный ими в 2003 году.

Я познакомился с ним в 1991 году на мероприятии для школьников в Нижнем Тагиле, организованном замечательным педагогом Б. Гельрудом. Для меня лично образовательная деятельность, в частности составление подборок олимпиадных задач, важна прежде всего как инструмент построения классификации идей и стереотипов решения задач, для исследования человеческого мышления. Имеющиеся олимпиадные книги и статьи а также классификаторы являются шагами в этом направлении. Такое исследование представляется полезным в связи с работами по искусственному интеллекту.

С этой точки зрения имеется интерес к комбинаторике, в частности, к комбинаторной геометрии. Результаты, полученные в рамках преподавательской деятельности (в частности, создание олимпиадных задач) имеют значение прежде всего для верификации правильности вычленения идей и стереотипов. В этой связи Алексей Всеволодович обратил мое внимание на то, что своего рода «литературоведческое» исследование математических текстов перекликается с NLP и с известными работами В. Проппа об исторических корнях волшебной сказки.

К сожалению, в наше печальное время почти все профессора ограничиваются узкопрофессиональной областью. В этом отношении Алексея Всеволодовича можно считать посланником из прошлого, с широким взглядом на вещи, культурологию, свойственным прошлому поколению.

А.Я. Канель-Белов

А.В. Гладкий был автором нашего журнала, его статьи напечатаны в №№ 4(15), 2000 г. и 3(51), 2009 г. — *Прим. ред.*

Информация

О деятельности ФМОП в 2022 г.

От редакции

В 2022 г. Фонд математического образования и просвещения (ФМОП) осуществлял следующие виды деятельности по разделам: поддержка образовательных инициатив, издательская деятельность, благотворительная деятельность:

- Методическая поддержка и обеспечение экспериментальными учебными материалами учащихся старших классов ГБОУ Школа № 179 г. Москвы.
- Поддержка мероприятий по работе со школьниками: Турнир Городов, Турнир Ломоносова, Летняя конференция Турнира Городов, Летние математические лагеря.
- Выпуск журнала "Математическое образование", издателем и учредителем которого ФМОП является; в 2022 г. вышли номера 1(101), 2(102), 3(103), 4(104).
- Участие (очное и он-лайн) в мероприятиях по популяризации математического образования и просвещения.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей математической Олимпиады школьников ТИИМ (ранее САММАТ), гг. Самара и Москва.
- Предоставление изданий Фонда для участников летнего математического лагеря "Алый Парус".
- Предоставление изданий Фонда для участников Всероссийского семинара «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом».
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей и участников Космической Олимпиады школьников, г. Королев.
- Предоставление безвозмездных транспортных услуг организациям и физическим лицам, работающим в области математического образования.
- Организация бесплатной подписки на журнал "Математическое образование" ряду организаций и физических лиц, работающих в области математического образования.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2022 год (включая стоимость пересылки) – 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2022 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >