Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год пятый

№ 4 (19)

Октябрь - декабрь 2001 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

№ 4 (19), 2001 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

N 4 (19), октябрь - декабрь 2001 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2001 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 27.12.2001.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Что такое вихрь векторного поля

Дворянинов С. В.

В заметке на основе физических соображений вводится важное в математическом анализе понятие вихря (ротора) векторного поля. Изложение доступно школьникам старших классов.

Если вам доведется быть на берегу быстрой речки или ручья, то вы сможете проделать такой несложный, но интересный эксперимент. Смастерите небольшое колесо с лопастями, которое может свободно вращаться на оси. (Можно взять катушку от ниток, приклеить лопасти из целлулоида или тонкой пластмассы и укрепить катушку на проволоке). Опустите в поток воды это колесо так, чтобы ось была вертикальна. Вода раскрутит колесо в определенном направлении — по часовой стрелке или против, если смотреть на колесо сверху, с оси. Угловая скорость вращения или число оборотов колеса в минуту будут некоторыми постоянными в данной точке величинами.

Перемещая колесо в воде, заметим, что в одном месте колесо вращается быстрее, в другом — медленнее, в одной точке — по часовой стрелке, т.е. в отрицательном направлении, в другой — против, т.е. в положительном направлении. В некоторых местах колесо остается неподвижным. Заметим, что угловая скорость вращения не определяется лишь скоростью течения: течение может быть очень быстрым, а колесо при этом будет неподвижно.

После этих экспериментов возникает вопрос: от чего же зависит угловая скорость вращения нашего колеса? Как она может быть вычислена? И здесь мы не обойдемся без математики. Оказывается, угловая скорость вращения определяется некоторой величиной, которая называется *ротор* или *вихрь* векторного поля. Вначале поясним, что такое *векторные поля.*

Рассмотрим, как обычно говорят математики при моделировании явлений природы, идеальный случай — вода течет тонким слоем по плоскости XOY. В каждой точке M с координатами $(x;y)$ скорость течения своя, следовательно, $\bar{\nu}=\bar{\nu}(x;y)$. Скорость течения — величина векторная, обозначим координаты этого вектора так:

$$\bar{\nu}=(P(x;y);Q(x;y)).$$

P и Q — проекции этого вектора на оси. Величина скорости равна

$$\|\bar{\nu}\|=\sqrt{P^2+Q^2}.$$

Нарисовав в каждой точке $(x; y)$ плоскости XOY вектор $(P; Q)$, мы получим *векторное поле* на плоскости.

На рис. 1 показано постоянное векторное поле, в каждой точке

$$\bar{\nu}_1(x; y) = (1; 0)$$

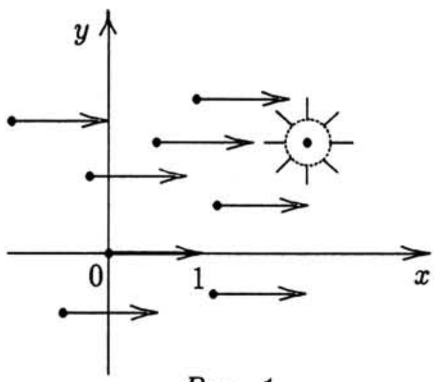


Рис. 1

На рис. 2 изображено векторное поле

$$\bar{\nu}_2(x; y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

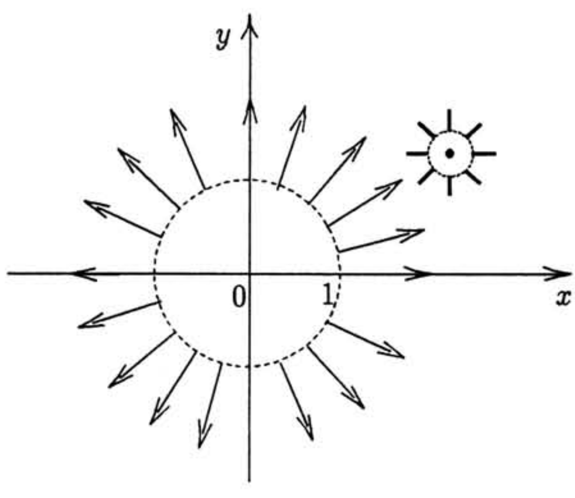


Рис. 2

Каждый вектор этого поля имеет единичную длину, так как

$$\|\bar{\nu}_2\| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2}} = 1.$$

В каждой точке с координатами $(x; y)$ векторы $\bar{\nu}_2$ и $\bar{r} = (x; y)$ коллинеарны, так как $\bar{\nu}_2 = k\bar{r}$. Следовательно, в каждой точке плоскости вектор $\bar{\nu}_2$ имеет направление радиуса-вектора точки $(x; y)$.

Очевидно, каждое из течений, соответствующих этим полям, не раскрутит наше колесо.

Рассмотрим еще одно поле $\bar{\nu}_3 = (-y; x)$. В каждой точке $(x; y)$ скалярное произведение векторов $\bar{\nu}_2$ и $\bar{\nu}_3$ равно нулю:

$$(\bar{\nu}_2, \bar{\nu}_3) = \frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Следовательно, эти векторы взаимно перпендикулярны. На рис. 3 эти два поля нарисованы на единичной окружности.

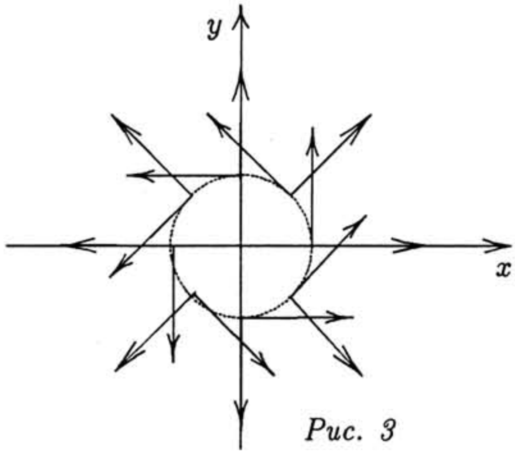


Рис. 3

Теперь вернемся к нашей задаче о вращении колеса с лопастями.

Предположим, что радиус нашего колеса мал, обозначим его ε — так принято обозначать малые величины. Пусть у нашего колеса всего четыре лопасти, и в некоторый момент они расположены так, как показано на рис. 4, то есть лопасти параллельны осям координат.

Пусть x_0 и y_0 — координаты оси колеса. Тогда точки A, B, C, D имеют, очевидно, такие координаты:

$$A(x_0+\varepsilon; y_0),\ B(x_0; y_0+\varepsilon),\ C(x_0-\varepsilon; y_0),\ D(x_0; y_0-\varepsilon).$$

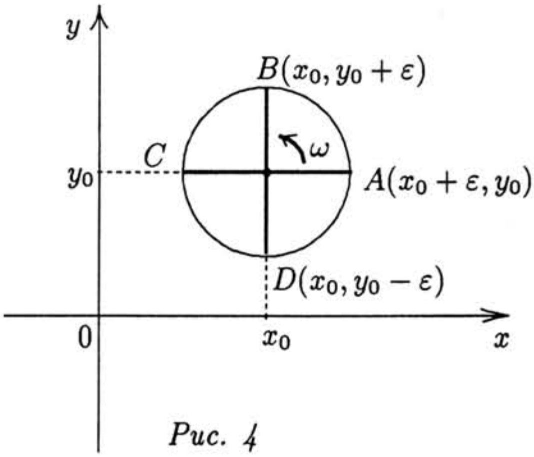


Рис. 4

С какой мгновенной скоростью движется точка A? В этой точке скорость течения $\bar{\nu}_A$ равна $(P(x_0+\varepsilon; y_0); (Q(x_0+\varepsilon; y_0))$, но вращает точку А против часовой стрелки только вторая составляющая этого вектора.

Итак, линейная скорость точки A такова: $\nu_A = Q(x_0 + \varepsilon; y_0)$.

Точку B против часовой стрелки вращает *первая* составляющая вектора $\bar{\nu}_B$, причем эту составляющую следует взять со знаком *минус*!

Итак, линейная скорость точки B такова: $\nu_B = -P(x_0; y_0 + \varepsilon)$. Аналогично находим линейные скорости двух других точек:

$$\nu_C = -Q(x_0 - \varepsilon; y_0), \ \nu_D = P(x_0; y_0 - \varepsilon).$$

Из опыта известно, что колесо вращается равномерно, и потому естественно считать, что в действительности общая линейная скорость точек A, B, C и D есть среднее арифметическое четырех найденных скоростей:

$$\nu_{\textit{средн.}} = \frac{1}{4}(\nu_A + \nu_B + \nu_C + \nu_D).$$

Отсюда, разделив эту величину на радиус, находим угловую скорость вращения колеса

$$\omega = \frac{\nu_{\textit{средн.}}}{\varepsilon} = \frac{1}{4}\left(\frac{Q(x_0+\varepsilon; y_0)}{\varepsilon} - \frac{P(x_0; y_0+\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{Q(x_0-\varepsilon; y_0)}{\varepsilon} + \frac{P(x_0; y_0-\varepsilon)}{\varepsilon}\right).$$

Последнее выражение можно представить таким образом:

$$\omega = \frac{1}{4}\left(\frac{Q(x_0+\varepsilon; y_0) - Q(x_0; y_0)}{\varepsilon} + \frac{Q(x_0-\varepsilon; y_0) - Q(x_0; y_0)}{-\varepsilon} - \right.$$
$$\left. - \frac{P(x_0; y_0+\varepsilon) - P(x_0; y_0)}{\varepsilon} - \frac{P(x_0; y_0-\varepsilon) - P(x_0; y_0)}{-\varepsilon}\right).$$

Чтобы точнее охарактеризовать угловую скорости вращения в точке $(x_0; y_0)$, следует неограниченно уменьшать радиус нашего колеса, то есть величину ε надо устремить к нулю.

Итак, пусть ε стремится к нулю. Рассмотрим отношение

$$\frac{Q(x_0+\varepsilon; y_0) - Q(x_0; y_0)}{\varepsilon}$$

(это отношение — первое слагаемое, заключенное в последней скобке).

Чтобы изучить это отношение, определим функцию

$$q(x) = Q(x; y_0).$$

Здесь y_0 фиксировано, а x меняется. Стало быть, мы имеем привычное нам (мы обращаемся к учащимся 10-11 классов) отношение приращения функции q к приращению аргумента. Приращение аргумента стремится к нулю, следовательно, это отношение стремится к производной функции q. На деле получается производная функции Q. Правда, это не совсем та производная, которую изучают в школе. У нас функция Q зависит еще и от переменной y. Такая производная поэтому называется частной производной функции $Q(x;y)$ по переменной x и обозначается $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Во втором отношении

$$\frac{Q(x_0-\varepsilon;y_0)-Q(x_0;y_0)}{-\varepsilon}$$

также рассматривается отношение приращения функции q к приращению аргумента (только здесь это приращение аргумента x отрицательно и равно $-\varepsilon$). И в этом случае предел этого отношения равен

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{Q(x_0-\varepsilon;y_0)-Q(x_0;y_0)}{-\varepsilon}=\frac{\partial Q(x_0;y_0)}{\partial x}.$$

Два последних слагаемых в выражении для ω также представляют собой отношение приращения функции к приращению аргумента. Этой функцией здесь является функция $P(x_0;y)$ одной переменной y.

Производная этой функции по переменной y называется *частной производной* функции $P(x;y)$ по переменной y. Обозначается эта производная $\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Отметим, что для нахождения частной производной функции по какой-либо переменной другую переменную следует считать постоянной. Приведем простой пример: пусть $f=x^2-xy+5$, тогда $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-x$.

Итак, поставленную задачу мы решили: угловая скорость вращения нашего колеса в точке $(x_0;y_0)$ равна

$$\omega=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Применим полученную формулу к указанным выше векторным полям.

Для поля $\bar{\nu}_1=(1;0)$

$$\omega_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial 0}{\partial x}-\frac{\partial 1}{\partial y}\right)=0.$$

Для поля $\bar{\nu}_2=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

$$\omega_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(y\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-3/2}\,2x-x\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-3/2}\,2y\right)=0.$$

Для каждого из этих двух полей угловая скорость равна нулю. Колесо неподвижно. В обоих случаях эти результаты мы “угадали” раньше на основе соображений симметрии — ни одно из двух возможных направлений вращения колеса не является предпочтительным для наших полей. Каждое из этих двух полей называется *безвихревым*.

Для поля $\bar{\nu}_3 = (-y; x)$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{y}\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

Это значит, что во всех точках поля колесо будет вращаться с одинаковой угловой скоростью против часовой стрелки, в положительном направлении.

Если $\omega < 0$, то вращение происходит по часовой стрелке. Для поля $\bar{\nu}_4 = (y; -x) =$
$= -\bar{\nu}_3$ имеем $\omega = -1$.

Величина $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$. называется *ротором* или *вихрем* плоского векторного поля $(P; Q)$.

Конечно, мы можем продолжить наши эксперименты с колесом: можно помещать его вглубь потока, его ось может располагаться произвольно, а не обязательно вертикально. В таком случае мы должны рассматривать трехмерное пространство с координатами $(x; y; z)$. В каждой точке пространства вектор скорости имеет три составляющие $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$:

$$\bar{\nu}(x,y,z) = (P, Q, R).$$

Ротором этого векторного поля называется векторная величина

$$rot\,\bar{\nu} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

В этой формуле присутствуют частные производные по трем переменным.

Эта величина $rot\,\bar{\nu}$ имеет следующий механический смысл: в каждой точке пространства вектор ротора показывает направление, по которому следует направить ось нашего колеса, чтобы колесо вращалось с наибольшей возможной в данной точке угловой скоростью. Численно эта величина равна

$$\max|\omega| = \frac{1}{2}\|rot\bar{\nu}\|.$$

Получить этот результат нашими простыми средствами трудно, это делается в курсах высшей математики (см., например, *Г. Е. Шилов* “Математический анализ”. Части 1-2, М., 1972, с.335-340).

Мы с вами не решили, конечно, новой задачи. Все это было известно более, чем сто лет назад. Но на этой элементарной задаче мы с вами познакомились с основными этапами решения прикладных задач, увидели, как применяется математика. От физической системы мы пришли к математической модели. Рассмотрели простой, двумерный (как иногда говорят, “плоский”) случай, при этом упростили математическую модель, взяв всего четыре лопасти у колеса. Применили известную “школьную” математику. Оказывается, ее недостаточно! Пришлось обратиться к понятию частной производной. Решили двумерную задачу. Появилось естественное стремление обобщить результат на трехмерное пространство, но для этого необходим более сложный математический аппарат. И тут надо брать в руки вузовские учебники...

Дворянинов Сергей Владимирович
Самарский государственный университет
доцент, к.ф.-м.н.
e-mail: dvoryan@ssu.samara.ru

Три главы из книги по алгебре

В. В. Прасолов

Эта статья состоит из трёх глав моей новой книги «Задачи по алгебре, арифметике и анализу», которая, как я надеюсь, когда-нибудь будет опубликована. Чтобы сделать изложение замкнутым, я включил в эту статью несколько задач из других глав (эти задачи используются при решении задач, включённых в статью). Решения всех задач приведены в конце статьи.

1. Рекуррентные последовательности

Рекуррентной последовательностью порядка k называют последовательность чисел $u_1, u_2, \dots$, где числа $u_1, u_2, \dots, u_k$ произвольные, а при всех $k \geqslant 1$ выполняется соотношение $u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + \dots + a_ku_n$, где $a_1, a_2, \dots, a_k$ — некоторые фиксированные числа.

1.1. Общие свойства

1.1. Пусть $u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + \dots + a_ku_n$. Докажите, что

$$u_1 + u_2x + u_3x^2 + u_4x^3 + \dots = \frac{P_{n-1}(x)}{1 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_kx^k},$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени не выше n.

1.2. Числа Фибоначчи

Числами Фибоначчи называют последовательность чисел $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ при $n \geqslant 3$.

1.2. Докажите, что $u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_nu_{k+1}$.

1.3. Последовательность чисел $a_0 = 0, a_1, a_2, \dots$ такова, что $a_n > 0$ при $n > 0$ и $\text{НОД}(a_m, a_n) = \text{НОД}(a_{m-n}, a_n)$ для любых $m > n \geqslant 1$. Докажите, что $\text{НОД}(a_m, a_n) = a_d$, где $d = \text{НОД}(m, n)$.

1.4. а) Докажите, что числа u_n и u_{n+1} взаимно просты.

б) Докажите, что $\text{НОД}(u_m, u_n) = u_d$, где $d = \text{НОД}(m, n)$.

1.5. Докажите, что

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = u_1 + u_2x + u_3x^2 + u_4x^3 + \cdots$$

1.6. Докажите, что если $a^2 - ab - b^2 = \pm 1$, где a и b — натуральные числа, то $a = u_{n+1}$ и $b = u_n$ для некоторого n.

1.7. Найдите все решения в натуральных числах уравнения $\binom{n}{m-1} = \binom{n-1}{m}$, где $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — биномиальный коэффициент.

1.8. а) Докажите, что $u_{2n+1}u_{2n-1} = u_{2n}^2 + 1$.

б) Докажите, что $u_{2n+1}^2 + u_{2n-1}^2 + 1 = 3u_{2n+1}u_{2n-1}$.

1.9. При каких натуральных a и b число $a^2 + b^2 + 1$ делится на ab?

1.10. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых $a^2 + 1$ делится на b, а $b^2 + 1$ делится на a.

1.11. Докажите, что для любого натурального числа n найдётся число Фибоначчи, делящееся на n.

1.3. Специальные рекуррентные последовательности

1.12. Пусть $a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1$ и

$$a_{n+3} = \frac{(n^2+n+1)(n+1)}{n}a_{n+2} + (n^2+n+1)a_{n+1} - \frac{n+1}{n}a_n$$

при $n \geqslant 1$. Докажите, что a_n — квадрат целого числа для любого $n \geqslant 1$.

1.13. Пусть $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$ и $u_n = u_{n-2} + u_{n-3}$ при $n \geqslant 4$. Докажите, что $u_{2n} - u_{n-1}^2$ и $u_{2n+1} - u_{n+1}^2$ делятся на u_n.

2. Уравнения в целых числах

2.1. Пифагоровы тройки

Натуральные числа a, b, c называют *пифагоровой тройкой*, если $a^2 + b^2 = c^2$. Пифагорову тройку называют *примитивной*, если у чисел a, b, c нет общего делителя.

2.1. Докажите, что если a, b, c — пифагорова тройка, то одно из этих чисел делится на 3, другое (или то же самое) делится на 4, третье — на 5.

2.2. Пусть a, b, c — примитивная пифагорова тройка. Докажите, что одно из чисел a и b чётно, а другое нечётно.

2.3. Пусть a, b, c — примитивная пифагорова тройка, причём число a чётно. Докажите, что существуют взаимно простые числа m и n, для которых $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$.

2.4. Пусть a, b, c — примитивная пифагорова тройка. Докажите, что ab делится на 12.

2.5. Пусть a, b, c — примитивная пифагорова тройка. Докажите, что число $ab/2$ (площадь прямоугольного треугольника с катетами a и b) не может быть полным квадратом.

2.2. Нахождение всех решений

2.6. Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 7 = y^2$.

2.7. Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что число $2/p$ можно единственным способом представить в виде $1/x + 1/y$, где x и y — различные натуральные числа.

2.8. Пусть n — натуральное число. Докажите, что количество решений уравнения $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ в натуральных числах равно количеству делителей числа n^2.

2.9. а) Найдите все натуральные числа x, y, z, для которых

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

б) Найдите все натуральные числа x, y, $z > 1$, для которых

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 1.$$

2.10. а) Найдите все решения уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ в натуральных числах.

б) Найдите все решения уравнения $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu$ в натуральных числах.

2.11. Решите в натуральных числах уравнение $2^n + 1 = 3^m$.

2.3. Нахождение некоторых решений

2.12. а) Докажите, что для любого натурального числа n уравнение $a^n + b^n = c^{n+1}$ имеет бесконечно много различных решений в натуральных числах.

б) Докажите, что если m и n — взаимно простые натуральные числа, то уравнение $a^n + b^n = c^m$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

2.4. Доказательство конечности числа решений

2.13. Докажите, что для любого натурального числа n уравнение $x^3 + y^3 = n$ имеет конечное число целочисленных решений.

2.5. Уравнение Пелля

Уравнение $x^2 - dy^2 = 1$, где d — натуральное число, *свободное от квадратов* (т.е. число, не делящееся на квадрат натурального числа, отличного от 1), называют *уравнением Пелля*. Сначала нам потребуются некоторые вспомогательные свойства так называемых сопряжённых чисел.

2.14. а) Пусть p — простое число. Докажите, что никакое число нельзя представить двумя разными способами в виде $m + n\sqrt{p}$, где m и n — рациональные числа.

б) Докажите аналогичное утверждение для представлений в виде $m+n\sqrt{p}$, где p — произведение попарно различных простых чисел.

Таким образом, для каждого числа z вида $m+n\sqrt{p}$, где m и n — рациональные числа, а p — произведение попарно различных простых чисел, можно определить *сопряженное число* $\bar{z} = m - n\sqrt{p}$.

2.15. Докажите, что если $(a+b\sqrt{p})^n = A_n + B_n\sqrt{p}$, где p — произведение различных простых чисел, а числа a, b, A_n, B_n рациональные, то то $(a-b\sqrt{p})^n = A_n - B_n\sqrt{p}$.

2.16. Докажите, что уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

2.17. Пусть α — иррациональное число. Докажите, что существует бесконечно много пар взаимно простых чисел x, y, для которых $|x/y - \alpha| < 1/y^2$.

2.18. Пусть d — натуральное число, свободное от квадратов. Докажите, что существует константа C, для которой неравенство $|x^2 - dy^2| < C$ имеет бесконечно много целочисленных решений.

Решение уравнения Пелля в натуральных числах с минимальным y_1 будем называть *фундаментальным решением*.

2.19. Докажите, что уравнение Пелля для любого натурального d (свободного от квадратов) имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Более того, если (x_1, y_1) — фундаментальное решение, то любое решение (x_n, y_n) имеет вид

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n.$$

Теперь нам понадобятся некоторые вспомогательные сведения о многочленах по модулю p и о квадратичных вычетах и невычетах.

2.20. Пусть p — простое число, $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что существует не более n различных целых чисел x_i, для которых $0 \leqslant x_i \leqslant p-1$ и $f(x_i)$ делится на p (*Лагранж*).

Целое число a квадратичным *квадратичным вычетом* по модулю p, если $a \equiv b^2 \pmod p$ для некоторого целого числа b. В противном случае число a называют *квадратичным невычетом*.

2.21. Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что среди чисел $1, 2, \dots, p-1$ ровно половина квадратичных вычетов и ровно половина квадратичных невычетов по модулю p.

2.22. Пусть p — простое число, а число a не делится на p. Докажите, что все остатки от деления на p чисел $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$ попарно различны, т.е. каждое число от 1 до $p-1$ встречается среди этих остатков ровно один раз.

2.23. Пусть p — простое число и $1 \leqslant k \leqslant p-1$. Докажите, что число $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$ делится на p.

2.24. Докажите, что если p — простое число и a не делится на p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (*малая теорема Ферма*).

2.25. Пусть $1 \leqslant a \leqslant p-1$, где $p > 2$ — простое число. Докажите, что число a является квадратичным вычетом по модулю p тогда и только тогда, когда $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ (*Эйлер*).

2.26. Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что число -1 является квадратичным вычетом по модулю p тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod{4}$.

2.27. Докажите, что если $d \equiv 3 \pmod{4}$, то уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ не имеет решений в натуральных числах.

2.28. Докажите, что если d — простое число, причём $d \equiv 1 \pmod{4}$, то уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ имеет решение в натуральных числах.

2.29. Докажите, что если уравнение $x^2 - dy^2 = \pm 4$ имеет решение с нечётными x и y, то уравнение $X^2 - dY^2 = \pm 1$ имеет решение в натуральных числах.

2.6. Уравнение Маркова

Уравнением Маркова называют уравнение

$$m^2 + n^2 + p^2 = 3mnp, \tag{1}$$

где числа m, n и p натуральные.

2.30. Докажите, что уравнение Маркова имеет бесконечно много решений.

2.31. Докажите, что все решения уравнения $m^2 + n^2 + p^2 = mnp$ в натуральных числах имеют вид $3m_1$, $3n_1$, $3p_1$, где m_1, n_1, p_1 — решение уравнения Маркова.

2.32. Докажите, что если $k \neq 1$ или 3, то уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = k\,xyz$$

не имеет решений в натуральных числах.

2.33. Докажите, что если m, n, p — решение уравнения Маркова, то числа m, n и p взаимно просты.

3. Происхождение математических терминов

Алгебра — в русском языке с 1717 г. Происходит из немецкого Algebra, которое, в свою очередь, арабского происхождения. Арабский математик Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми (787 — ок. 850), уроженец Хивы, написал книгу под названием «Хисаб ал-джабр ва-л-мукабала» («Исчисление восполнения и противопоставления»). Значительная часть этой книги была посвящена решению уравнений. Для решения уравнений ал-Хорезми применял две основные операции: *ал-джабр* (восполнение) и *ал-мукабала* (противопоставление). Операция ал-джабр заключалась в избавлении от членов со знаком «минус»в одной части уравнения посредством добавления к обеим частям уравнения одного и того же члена. Операция ал-мукабала заключалась в сокращении равных членов в обеих частях уравнения. Словом *ал-джабр* вскоре стали называть все арабские трактаты на эту тему. Затем это слово распространилось на всю теорию уравнений. В таком виде оно пришло в Европу в XIV в. В течение долгого времени алгебра как раз и была теорией уравнений.

Алгоритм — латинизированный вариант имени арабского математика ал-Хорезми (787 — ок. 850). В средневековой Европе *алгоритмом* назывались десятичная система счисления и способы вычисления в ней, поскольку именно благодаря латинскому переводу трактата ал-Хорезми «Книга о сложении и вычитании на основе индийского исчисления» в Европе познакомились с десятичной системой счисления. Десятичную систему счисления ал-Хорезми заимствовал у индийских математиков, что и видно из названия его трактата.

Анализ — из латинского analysis, которое происходит из греческого слова, означающего «разложение, растворение».

Арифметика — от греческого arithmós (число). В греческом языке так называли только натуральные числа и положительные рациональные числа. Важнейший древнегреческий трактат о свойствах натуральных и рациональных чисел назывался «Арифметика и книга о многоугольных числах». Его автором был Диофант.

Иррациональные числа — от латинского irrationalis (неразумный). Первоначально в греческом языке использовался термин arretos, который одновременно означал «иррациональный, не выразимый в числах»и «священный, тайный». Вероятно, это сыграло роль в возникновении легенды, согласно которой математик Гиппас из пифагорейской школы погиб в море из-за того, что нечестиво разгласил непосвященным учение об иррациональных величинах, которое зародилось в пифагорейской школе и хранилось в строгой тайне. Затем появился термин asymmetros, а после него — alogos, калькой которого и является латинское irrationalis.

Катет — от греческого káthetos (перпендикуляр).

Квадрат — от латинского quadrātum (четырехугольник).

Куб — от латинского cubus, которое происходит из греческого языка, первоначально означало «игральная кость».

Линия — от латинского слова linea, которое означает «льняная» (имеется в виду льняная нить).

Математика — от греческого mathēmatikē, которое, в свою очередь, происходит от слова mathēma (наука). На происхождение этого термина большое влияние оказала философская школа пифагорейцев. Пифагорейцы делились на «математиков» и «акусматиков». Акусматики не обучались наукам; им давали лишь устные наставления — «акусмы» (от akustikós — слуховой). Математики же обучались наукам и занимались доказательствами.

Пирамида — от греческого слова pyramís, которым греки называли египетские пирамиды. В свою очередь, греческое слово происходит от древнеегипетского слова «пурама», которым называли пирамиды сами египтяне.

Призма — от греческого слова prísma, которое означает «опиленная» (имелось в виду опиленное бревно).

Пропорция — от латинского proportio; так Цицерон перевёл греческий термин Платона analogia (аналогия).

Радиус — от латинского radius (радиус, луч).

Расстояние — калька французского distance.

Ромб — от латинского rombus, которое происходит из греческого языка и означает «бубен». Раньше бубны имели не круглую форму, а форму квадрата или ромба.

Сфера — от греческого слова sphа́ira, которое означает «мяч».

Точка — от *тыкать, ткнуть*. Аналогично латинское punctum (точка) происходит от pungō (колю). От этих латинских слов происходят русские слова «пункт», «пункция», «пунктуация». В греческом языке первоначально использовался термин sēmе́ion (знак, признак), которому соответствует латинское signum. (Именно такой термин употреблял Евклид.) Позднее, со времён Аристотеля, получил распространение термин stígma (укол), которому как раз и соответствует латинское punctum

Трапеция — от латинского слова trapezium, которое происходит из греческого языка и означает «столик». От этого же корня происходит слово «трапеза», которое по-гречески означает «стол».

Фигура — в русском языке с 1701 г. Происходит из латинского figūra от fingō (образовывать, давать форму). В греческом языке использовался термин schēma (наружный вид, образ, форма). От этого греческого слова происходит русское «схема».

Цилиндр — от латинского слова cylindrus, которое происходит из греческого языка и означает «валик», «каток».

Решения задач

1.1. В произведении $(u_1 + u_2x + u_3x^2 + u_4x^3 + \cdots)(1 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_kx^k)$ коэффициент при x^{n+k-1}, $n \geqslant 1$, равен $u_{n+k} - a_1u_{n+k-1} - \cdots - a_ku_n$. Значит, это произведение представляет собой многочлен $P_{n-1}(x)$ степени не выше $n-1$.

1.2. Применим индукцию по k. При $k=1$ получаем $u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$, а при $k=2$ получаем $u_{n+2} = u_{n-1} + 2u_n = u_{n-1} + u_n + u_n = u_{n+1} + u_n$. База индукции доказана. Предположим теперь, что $u_{n+k-2} = u_{n-1}u_{k-2} + u_nu_{k-1}$ и $u_{n+k-1} = u_{n-1}u_{k-1} + u_nu_k$. Тогда $u_{n+k} = u_{n-1}(u_{k-2} + u_{k-1}) + u_n(u_{k-1} + u_k) = u_{n-1}u_k + u_nu_{k+1}$.

1.3. Для любой пары натуральных чисел $\{m, n\}$, где $m > n$, последовательные операции $\{m, n\} \to \{m-n, n\}$ приводят к паре $\{d, 0\}$, где $d = \text{НОД}(m, n)$. Действительно, операция деления m на n с остатком состоит из нескольких таких операций.

1.4. а) Предположим, что числа u_n и u_{n+1} делятся на целое число $d > 1$. Тогда $u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$ тоже делится на d и т.д. В итоге получим, что $u_2 = 1$ делится на d.

б) Воспользуемся формулой $u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_n u_{k+1}$ (задача 1.2). Положим $m = n + k$. При $m \geqslant k$ получаем $\text{НОД}(u_m, u_k) = \text{НОД}(u_{m-k-1}u_k + u_{m-k}u_{k+1}, u_k) = \text{НОД}(u_{m-k}u_{k+1}, u_k) = \text{НОД}(u_{m-k}, u_k)$, поскольку числа u_k и u_{k+1} взаимно простые. Теперь можно воспользоваться результатом задачи 1.3.

1.5. Ясно, что $(1 - x - x^2)(u_1 + u_2x + u_3x^2 + u_4x^3 + \cdots) = u_1 + (u_2 - u_1)x + (u_3-u_2-u_1)x^2+(u_4-u_3-u_2)x^3+\cdots$ При этом $u_1 = 1$, $u_2-u_1 = 0$, $u_3-u_2-u_1 = 0$, $u_4 - u_3 - u_2 = 0, \ldots$

1.6. Равенство $a^2 = b^2 + ab \pm 1$ показывает, что $a \geqslant b$, причём $a = b$ лишь в том случае, когда оба эти числа равны 1. Поэтому будем считать, что $a > b$. Для пары b, $a - b$ тоже выполняется требуемое равенство, поскольку $b^2 - (a - b)b - (a - b)^2 = -(a^2 - ab - b^2)$. Поэтому после нескольких таких замен мы дойдём до пары $(1, 1)$. Обратное преобразование имеет вид $(x, y) \mapsto (x + y, x)$, поэтому из пары $(1,1)$ мы будем последовательно получать пары (u_{n+1}, u_n) для $n = 2, 3, \ldots$

1.7. Рассматриваемое уравнение эквивалентно уравнению $mn = (n-m)(n-m+1)$. Пусть $d = \text{НОД}(m, n)$, $n = da$ и $m = db$. После сокращения на d получаем уравнение $abd = (a-b)\big((a-b)d+1\big)$. Число d взаимно просто с $(a-b)d+1$, а число ab взаимно просто с $a - b$, поэтому $ab = (a - b)d + 1$ и $d = a - b$. Подставим в первое уравнение выражение $a = b + d$ и заменим $a - b$ на d. В результате получим $b^2 + bd = d^2 + 1$, т.е. $b^2 + bd - d^2 = 1$. В задаче 1.6 приведено решение чуть более общего вида, когда в правой части стоит ±1. Отбросив те решения, которые соответствуют -1, получим $d = u_{2k}$, $b = u_{2k-1}$ и $a = b + d = u_{2k+1}$.

Замечание. *Равенство* $\binom{n}{m-1} = \binom{n-1}{m}$ *эквивалентно равенству* $\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m-2} = \binom{n-1}{m}$.

1.8. а) Применим индукцию по n. При $n = 1$ равенство очевидно. Предположим, что доказано равенство $u_{2n+1}u_{2n-1} = u_{2n}^2 + 1$ для некоторого n. Тогда

$$u_{2n+2}^2 + 1 = (u_{2n+1} + u_{2n})^2 + 1 = u_{2n+1}^2 + 2u_{2n+1}u_{2n} + u_{2n}^2 + 1 =$$

$$u_{2n+1}^2 + 2u_{2n+1}u_{2n} + u_{2n+1}u_{2n-1} = u_{2n+1}(u_{2n+1} + 2u_{2n} + u_{2n-1}).$$

Остаётся заметить, что $u_{2n+1} + u_{2n} + u_{2n-1} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = u_{2n+3}$.

б) Воспользовавшись задачей а), получаем

$$u_{2n+1}^2 + u_{2n-1}^2 - 2u_{2n+1}u_{2n-1} = (u_{2n+1} - u_{2n-1})^2 =$$

$$= u_{2n}^2 = u_{2n+1}u_{2n-1} - 1,$$

а значит, $u_{2n+1} + u_{2n-1} + 1 = 3u_{2n+1}u_{2n-1}$.

1.9. Можно считать, что $a \geqslant b$. Согласно задаче 1.8 числа $(a, b) = (u_{2n+1}, u_{2n-1})$, $n \geqslant 1$, обладают требуемым свойством; числа $(a, b) = (1, 1)$ тоже. Покажем, что никакие другие пары натуральных чисел (a, b), где $a \geqslant b$, этим свойством не обладают. Примени индукцию по a. Прежде всего отметим, что если $a = b$, то число $2a^2 + 1$ делится на a^2, поэтому $a = 1$. Предположим, что $a^2 + b^2 + 1 = kab$, где k — натуральное число и $a > 1$. Положим $a_1 = b$ и $b_1 = kb - a = \frac{b^2+1}{a}$. Тогда $a_1^2 + b_1^2 + 1 = b^2 + k^2b^2 - 2kab + a^2 + 1 = k^2b^2 - kab = kb(kb - 1) = ka_1b_1$, поэтому числа (a_1, b_1) обладают требуемым свойством. Проверим, что $1 \leqslant b_1 \leqslant a_1 < a$. Действительно, $b_1 = \frac{b^2+1}{a} < \frac{b^2+1}{b} < b+1$. Число b_1 целое, поэтому $b_1 \leqslant b = a_1$. Кроме того, $a_1 = b < a$ по условию. Значит, по предположению индукции $b = a_1 = u_{2n+1}$ и $kb - a = b_1 = u_{2n-1}$ для некоторого $n \geqslant 0$ (мы считаем, что $u_{-1} = 1$). Но в таком случае $k = 3$, поэтому

$$a = kb - b_1 = 3u_{2n+1} - u_{2n-1} = 2u_{2n+1} + u_{2n+1} - u_{2n-1} =$$

$$= u_{2n+1} + u_{2n+1} + u_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n+2} = u_{2n+3}.$$

1.10. Формула $u_{2n+1}^2 + u_{2n-1}^2 + 1 = 3u_{2n+1}u_{2n-1}$ из задачи 1.8 показывает, что пара (u_{2n-1}, u_{2n+1}) обладает требуемым свойством. Покажем, что никакая другая пара натуральных чисел (a, b), где $a \leqslant b$, этим свойством не обладает. Применим индукцию по b. Прежде всего заметим, что если $a = b$, то $a^2 + 1$ делится на a, поэтому $a = b = 1$. Пусть $b > 1$, $a \leqslant b$, $a^2 + 1 = \lambda b$ и $b^2 + 1 = \mu a$, где λ и μ — целые числа. Тогда $(a^2+1)^2 = \lambda^2 b^2 = \lambda^2(\mu a - 1)$, поэтому $1 \equiv -\lambda^2 \pmod a$, т.е. $\lambda^2 + 1$ делится на a. Кроме того, $ab \geqslant a(a+1) \geqslant a^2 + 1$, поэтому $\lambda \leqslant a < b$. Воспользовавшись предположением индукции, получим $\lambda = u_{2n-1}$ и $a = u_{2n-1}$. Значит, $b = \frac{u_{2n+1}^2+1}{u_{2n-1}} = \frac{3u_{2n+1}u_{2n+1} - u_{2n-1}^2}{u_{2n-1}} = 3u_{2n+1} - u_{2n-1} = u_{2n+1}$.

1.11. Рассмотрим пары остатков от деления на n соседних чисел Фибоначчи u_k и u_{k+1} для $k = 1, 2, \ldots, n^2 + 1$. Количество различных пар остатков равно n^2, поэтому среди рассматриваемых пар остатков найдутся две одинаковые пары, т.е. числа $u_k - u_l$ и $u_{k+1} - u_{l+1}$ делятся на n для некоторых чисел $1 \leqslant k < l \leqslant n^2 + 1$. Тогда число $u_{k-1} - u_{l-1} = u_{k+1} - u_{l+1} - (u_k - u_l)$ тоже делится на n и т.д. В конце концов получаем, что числа $u_2 - u_{l-k+2}$ и $u_1 - u_{l-k+1}$ делятся на n. Поэтому

$$u_{l-k} = u_{l-k+2} - u_{l-k+1} \equiv u_2 - u_1 \equiv 0 \pmod n.$$

1.12. Рассмотрим последовательность b_n, для которой $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ и $b_{n+2} = nb_{n+1} + b_n$ при $n \geqslant 1$. Возведём в квадрат равенства $b_n = b_{n+2} - nb_{n+1}$ и $b_{n+3} = (n+1)b_{n+2} + b_{n+1}$. Затем, чтобы уничтожить член $b_{n+2}b_{n+1}$, умножим первое из полученных равенств на $n+1$, второе на n и сложим их. В результате получим

$$b_{n+3}^2 = \frac{(n^2+n+1)(n+1)}{n} b_{n+2}^2 + (n^2+n+1)b_{n+1}^2 - \frac{n+1}{n} b_n^2.$$

Кроме того, $b_3 = 1$. Значит, $a_n = b_n^2$.

1.13. Проверим, что при $0 < k < m-2$ имеет место равенство

$$u_m = u_{k+1}u_{m-k} + u_{k+2}u_{m-k-1} + u_k u_{m-k-2}. \qquad (1)$$

При $k = 1$ это равенство очевидно. Поэтому достаточно доказать, что

$$u_{k+1}u_{m-k} + u_{k+2}u_{m-k-1} + u_k u_{m-k-2} = u_{k+2}u_{m-k-1} + u_{k+3}u_{m-k-2} + u_{k+1}u_{m-k-3}.$$

Сократим члены $u_{k+2}u_{m-k-1}$ в обеих частях этого равенства и воспользуемся тем, что $u_{k+1}u_{m-k} = u_{k+1}u_{m-k-2} + u_{k+1}u_{m-k-3}$. После сокращения членов $u_{k+1}u_{m-k-3}$, приходим к очевидному равенству $(u_{k+1} + u_k)u_{m-k-2} = u_{k+3}u_{m-k-2}$.

Положив в равенстве (1) $m = 2n$ и $k = n-1$, получим $u_{2n} - u_{n-1}^2 = 2u_n u_{n+1}$. Положив в равенстве (1) $m = 2n+1$ и $k = n-1$, получим

$$u_{2n+1} - u_{n+1}^2 = u_n(u_{n-1} + u_{n+2}).$$

2.1. Легко проверить, что остаток от деления квадрата целого числа на 3 и на 4 равен 0 или 1, а остаток от деления на 5 равен 0, 1 или 4. Используя только остатки 1 и 4, нельзя добиться выполнения равенства $a^2 + b^2 = c^2$.

2.2. Числа a и b не могут быть оба чётными, потому что иначе число c тоже было бы чётным. Числа a и b не могут быть оба нечётными, потому что иначе число $a^2 + b^2$ делилось бы на 2, но не делилось бы на 4.

2.3. Числа $\frac{c-b}{2}$ и $\frac{c+b}{2}$ взаимно простые, поэтому из равенства $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{c-b}{2} \cdot \frac{c+b}{2}$ следует, что $\frac{c-b}{2} = n^2$ и $\frac{c+b}{2} = m^2$, где m и n — взаимно простые числа. При этом $c = m^2 + n^2$ и $b = m^2 - n^2$.

2.4. Нужно доказать, что для любых взаимно простых натуральных чисел m и n число $mn(m+n)(m-n)$ делится на 6. Если m и n нечётны, то $m+n$ чётно. Если m и n не делятся на 3, то либо числа m и n дают одинаковые остатки при делении на 3 (тогда $m-n$ делится на 3), либо одно из них при делении на 3 даёт остаток 1, а другое даёт остаток 2 (тогда $m+n$ делится на 3).

2.5. Предположим, что существуют взаимно простые натуральные числа m и n, для которых $mn(m+n)(m-n) = s^2$, где s — натуральное число. Будем считать, что s — наименьшее из всех чисел, для которых имеет место равенство такого вида. Числа m, n, $m+n$, $m-n$ попарно взаимно простые, поэтому $m = x^2$, $n = y^2$, $m+n = z^2$ и $m-n = t^2$, где x, y, z и t — натуральные числа. Числа m и n разной чётности, поэтому числа z и t нечётные. Положим $A = \frac{z+t}{2}$ и $B = \frac{z-t}{2}$. Тогда $A^2 + B^2 = \frac{z^2+t^2}{2} = m = x^2$ и $AB = \frac{z^2-t^2}{8} = \frac{n}{4} = \frac{y^2}{4}$. Таким образом, для числа $y/2$ тоже имеет место равенство указанного вида. Поэтому $y^2 \geqslant 4s^2$, т.е. $y^2 \geqslant 4x^2y^2(x^2-y^2)(x^2+y^2)$. Получено противоречие.

2.6. Ответ: $x = 1, y = 3$. Проверим, что других решений нет. Ясно, что $2^2 + 7 = 11$ — не квадрат, поэтому можно считать, что $x \geqslant 3$. Тогда 2^x делится на 8, а значит, $y^2 \equiv 7 \pmod 8$. Но, как легко проверить, квадрат целого числа при делении на 8 может давать только остатки 0, 1 и 4.

2.7. Равенство $1/x + 1/y = 2/p$ можно переписать в виде $p(x+y) = 2xy$. Значит, одно из чисел x и y делится на p. Например, $x = px'$. Тогда $px' + y = 2y$, т.е. $(2x'-1)y = px'$. Если $x' = 1$, то $y = p$ и $x = p$, а по условию числа y и p различны. Если же $x' > 1$, то $2x' - 1 > x'$, поэтому $y < p$. Кроме того, числа $2x' - 1$ и x' взаимно просты. Значит, $2x' - 1 = p$ и $y = x'$. В итоге получаем $y = x' = \frac{p+1}{2}$ и $x = p\frac{p+1}{2}$.

2.8. Данное уравнение можно записать в виде $n^2 = (x-n)(y-n)$. Каждому делителю d числа n^2 соответствует решение $x = n + d$, $y = n + \frac{n^2}{d}$.

2.9. а) Будем считать, что $x \geqslant y \geqslant z$. Тогда $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant \frac{3}{z}$, поэтому $z \leqslant 3$. Ясно также, что $z \neq 1$.

Если $z = 3$, то $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$ и при этом $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leqslant \frac{2}{y}$, значит, $y \leqslant 3$. Но $y \geqslant z = 3$, поэтому $y = 3$ и $x = 3$.

Если $z = 2$, то $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ и при этом $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leqslant \frac{2}{y}$, значит, $2 \leqslant y \leqslant 4$. Ясно, что $y \neq 2$. При $y = 3$ получаем $x = 6$, а при $y = 4$ получаем $x = 4$.

б) Снова будем считать, что $x \geqslant y \geqslant z$. Тогда $z < 3$, т.е. $z = 2$. Поэтому $\frac{2}{y} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2}$, значит, $y < 4$. Если $y = 2$, то число x может быть произвольным. Если $y = 3$, то $\frac{1}{x} > \frac{1}{6}$, т.е. $x = 3$, 4 или 5.

2.10. а) Пусть $x = 2^m x_1$, $y = 2^n y_1$, $z = 2^k z_1$, где числа x_1, y_1, z_1 нечётны. Можно считать, что $m \leqslant n \leqslant k$. Тогда обе части уравнения можно сократить на $(2^m)^2$. В результате получим

$$x_1^2 + 2^{(n-m)} y_1^2 + 2^{(k-m)} z_1^2 = +2^{n+k-m+1} x_1 y_1 z_1,$$

где $n + k - m + 1 \geqslant 1$.

Если $n = m = k$, то при делении на 4 число в правой части этого равенства даёт остаток 3, а число в левой части даёт остаток 0 или 2. Если же $k > n$, то число в правой части даёт остаток 1 или 2, а число в левой части — остаток 0. Значит, уравнение не имеет решений в натуральных числах.

б) Число $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ чётно, поэтому среди чисел x, y, z, u чётное число нечётных чисел.

Если все числа x, y, z, u нечётны, то $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \equiv 0 \pmod 4$, но при этом $2xyzu$ не делится на 4.

Если ровно два из чисел x, y, z, u нечётны, то $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ не делится на 4, а $2xyzu$ делится на 4.

Поэтому все числа x, y, z, u чётны, т.е. $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, $u = 2u_1$. Мы получаем уравнение $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 = 8x_1y_1z_1u_1$. Теперь заметим, что $(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1 \equiv 1 \pmod 8$. Поэтому если все числа x_1, y_1, z_1, u_1 нечётны, то $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2$ не делится на 8. А если ровно два из этих чисел нечётно, то $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2$ не делится даже на 4. Значит, $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$, $u_1 = 2u_2$, и мы получаем уравнение $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2 = 32x_2y_2z_2u_2$. Снова повторив те же самые рассуждения, получим, что x, y, z, u делятся на 2^n при всех n, чего не может быть.

2.11. Ответ: $n = 1$, $m = 1$ или $n = 3$, $m = 2$.

Если $n = 1$, то $m = 1$. Рассмотрим теперь случай, когда $n > 1$. В этом случае $3^m \equiv 1 \pmod 4$. Отметим, что $3^{2k+1} = 3 \cdot 9^k \equiv 3 \pmod 4$. Поэтому $m = 2k$, а значит, $(3^k - 1)(3^k + 1) = 2^n$. Таким образом, числа $3^k - 1$ и $3^k + 1$ — степени двойки, которые отличаются друг от друга на 2. Это возможно лишь в том случае, когда $k = 1$, т.е. $m = 2$ и $n = 3$.

2.12. а) Перепишем уравнение в виде $c = \left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{a}{c}\right)^n$. Будем искать решения вида $a = a_1 c$ и $b = b_1 c$, где a_1 и b_1 — натуральные числа. Тогда $c = a_1^n + b_1^n$, $a = a_1(a_1^n + b_1^n)$ и $b = b_1(a_1^n + b_1^n)$. Легко проверить, что мы действительно получили решение.

б) Выберем натуральные числа p и q так, что $pm - qn = 1$ (это можно сделать с помощью алгоритма Евклида). Положим $c = (a_1^n + b_1^n)^p$, $a = a_1(a_1^n + b_1^n)^q$ и $b = b_1(a_1^n + b_1^n)^q$, где a_1 и b_1 — произвольные натуральные числа. Тогда $a^n + b^n = (a_1^n + b_1^n)(a_1^n + b_1^n)^{qn} = (a_1^n + b_1^n)^{pm} = c^m$.

2.13. Пусть $x + y = a$ и $x^2 - xy + y^2 = b$. Тогда $ab = n$. Число n можно лишь конечным числом способов разложить на множители a и b, поэтому получаем конечное число систем уравнений $x + y = a$, $x^2 - xy + y^2 = b$. Выразим y из первого уравнения и подставим во второе. В результате получим уравнение $x^2 - x(a - x) + (a - x)^2 = b$, которое имеет не более двух решений. Каждому целочисленному решению x этого уравнения соответствует одно целочисленное решение исходной системы, а именно $(x, a - x)$.

2.14. Пусть $m + n\sqrt{p} = m_1 + n_1\sqrt{p}$, причём числа m, n, m_1 и n_1 рациональные. Если $m_1 \neq m$ или $n_1 \neq n$, то $\sqrt{p} = \dfrac{m - m_1}{n_1 - n}$. Это равенство выполняться не может, поскольку $\sqrt{p}$ — иррациональное число.

2.15. Легко проверить, что $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$, т. е. если $(a + b\sqrt{p})(c + d\sqrt{p}) = A + B\sqrt{p}$, то $(a - b\sqrt{p})(c - d\sqrt{p}) = A - B\sqrt{p}$. Следовательно,

$$a_n + b_n = (2 + \sqrt{p})^n + (2 - \sqrt{p})^n = 2A_n \text{ —}$$

целое число.

2.16. Нетрудно найти одно решение этого уравнения, например, $x_1 = 3$ и $y_1 = 2$. Равенство $x_1^2 - 2y_1^2 = 1$ можно записать в виде

$$(x_1 - y_1\sqrt{2})(x_1 + y_1\sqrt{2}) = 1.$$

Ясно, что тогда

$$(x_1 - y_1\sqrt{2})^n(x_1 + y_1\sqrt{2})^n = 1.$$

Кроме того, согласно задаче 2.15 $(x_1 \pm y_1\sqrt{2})^n = x_n \pm y_n\sqrt{2}$. Поэтому

$$x_n^2 - 2y_n^2 = 1,$$

т. е. (x_n, y_n) — тоже решение, причем $x_{n+1} > x_n$, $y_{n+1} > y_n$.

2.17. Фиксируем натуральное число n. Дробные части чисел 0, α, 2α, $\ldots$, $n\alpha$ лежат в полуоткрытом интервале $[0, 1)$, поэтому по крайней мере две из них попадают в один и тот же полуоткрытый интервал $[k/n, (k+1)/n)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Это означает, что

$$|p_1\alpha - [p_1\alpha] - (p_2\alpha - [p_2\alpha])| < 1/n$$

для некоторых $p_1, p_2 \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $p_1 > p_2$. Положим $y = p_1 - p_2$ и $x = [p_2\alpha] - [p_1\alpha]$. Тогда $|y\alpha - x| < 1/n$. Числа x и y здесь можно считать взаимно простыми, поскольку после деления на НОД(x, y) неравенство сохранится. Ясно также, что $0 < y < n$, поэтому $|x/y - \alpha| < \frac{1}{ny} < \frac{1}{y^2}$.

Выберем теперь натуральное число n_1 так, что $|x/y - \alpha| > 1/n_1$. Описанная выше конструкция даёт пару целых чисел x_1, y_1, для которых $|x_1/y_1 - \alpha| < \frac{1}{n_1 y_1} < |x/y - \alpha|$. Так можно получить бесконечно много различных пар чисел x, y.

2.18. Применим задачу 2.17 для $\alpha = \sqrt{d}$. В результате получим, что существует бесконечно много пар взаимно простых чисел x, y, для которых $|x - y\sqrt{d}| < 1/y$. В таком случае

$$|x + y\sqrt{d}| < |x - y\sqrt{d}| + 2\sqrt{d}|y| < \frac{1}{y} + 2\sqrt{d}\,y,$$

а значит,

$$|x^2 - dy^2| = |x + y\sqrt{d}| \cdot |x - y\sqrt{d}| < \frac{1}{y}\left(\frac{1}{y} + 2\sqrt{d}\,y\right) \leqslant 2\sqrt{d} + 1.$$

Таким образом, в качестве константы C можно взять число $2\sqrt{d} + 1$.

2.19. Согласно задаче 2.18 для некоторого целого k уравнение $x^2 - dy^2 = k$ имеет бесконечно много натуральных решений. Выберем два различных решения $x_1^2 - dy_1^2 = k$ и $x_2^2 - dy_2^2 = k$, для которых $y_1 \equiv y_2 \pmod{k}$. Тогда $x_1 \equiv \pm x_2 \pmod{k}$, поэтому решения можно выбрать так, что $x_1 \equiv x_2 \pmod{k}$. В таком случае

$$(x_1x_2 - dy_1y_2)^2 - d(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = (x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) = k^2$$

и $x_1x_2 - dy_1y_2 \equiv x_1^2 - dy_1^2 \equiv 0 \pmod{k}$, $x_1y_2 - x_2y_1 \equiv 0 \pmod{k}$. При этом $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$, поскольку иначе

$$\frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{x_1^2}{x_2^2} = \frac{k + dy_1^2}{k + dy_2^2} \quad \Longrightarrow \quad y_1^2 = y_2^2.$$

Положим $X = k^{-1}(x_1x_2 - dy_1y_2)$ и $Y = k^{-1}(x_1y_2 - x_2y_1) \neq 0$. Тогда $X^2 - dY^2 = 1$, т.е. пара X, Y — решение уравнения Пелля.

Пусть (x_1, y_1) — фундаментальное решение уравнения Пелля. Тогда

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^n(x_1 - y_1\sqrt{d})^n = 1,$$

поэтому пара (x_n, y_n), где $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$, тоже является решением уравнения Пелля. Ясно также, что $x_n - y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{-n}$. Поэтому остаётся проверить, что любое натуральное решение $(x,\ y)$ представляется в виде $x+y\sqrt{d}=$ $=(x_1+y_1\sqrt{d})^n$, где n — натуральное число. Предположим, что натуральное решение $(x,\ y)$ не представляется в таком виде. Тогда можно выбрать натуральное число n так, что

$$(x_1+y_1\sqrt{d})^n<x+y\sqrt{d}<(x_1+y_1\sqrt{d})^{n+1}.$$

После умножения на $(x_1+y_1\sqrt{d})^{-n}=x_n-y_n\sqrt{d}$ получим

$$1<(x+y\sqrt{d})(x_n-y_n\sqrt{d})<x_1+y_1\sqrt{d}.$$

Положим $(x+y\sqrt{d})(x_n-y_n\sqrt{d})=X+Y\sqrt{d}$. Чтобы прийти к противоречию, достаточно показать, что $X^2-dY^2=1$ и $X>0$, $Y>0$. По условию $(x+y\sqrt{d})(x-y\sqrt{d})=1$ и $(x_n-y_n\sqrt{d})(x_n+y_n\sqrt{d})=1$, поэтому $(X+Y\sqrt{d})(X-Y\sqrt{d})=1$, т.е. $X^2-dY^2=1$. Кроме того, $X+Y\sqrt{d}>1$, а значит, $0<X-Y\sqrt{d}<1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 2X &= (X+Y\sqrt{d})+(X-Y\sqrt{d})>1+0>0,\\ 2Y\sqrt{d} &= (X+Y\sqrt{d})-(X-Y\sqrt{d})>1-1=0. \end{aligned}$$

2.20. Применим индукцию по n. При $n=1$ утверждение очевидно. Пусть $f(x_1)$ и $f(x)$ делятся на p (x — целое число). Тогда

$$f(x)-f(x_1)=x^n-x_1^n+a_1(x^{n-1}-x_1^{n-1})+a_{n-1}(x-x_1)=(x-x_1)g(x)$$

делится на p. При этом $g(x)=x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\dots+b_{n-1}$ — многочлен с целыми коэффициентами, зависящими только от $a_1,\ \dots,\ a_n$ и x. Если $0\leqslant x\leqslant p-1$ и $x\neq x_1$, то $x-x_1$ не делится на p. Поэтому на p должно делиться число $g(x)$, и мы можем воспользоваться предположением индукции.

2.21. Сопоставим каждому целому числу x, где $1\leqslant x\leqslant p-1$, остаток от деления на p числа x^2. Числам x и $p-x$ сопоставляется одно и то же число, причём $x\neq p-x$. Кроме того, согласно теореме Лагранжа (задача 2.20) сравнение $x^2\equiv c \pmod p$ не может иметь больше двух решений. Поэтому образ рассматриваемого отображения состоит из $(p-1)/2$ элементов. А этот образ как раз и состоит из квадратичных вычетов.

2.22. Если $xa\equiv ya \pmod p$, то $(x-y)a$ делится на p. Числа a и p взаимно простые, поэтому $x-y$ делится на p. Значит, если $1\leqslant x,y\leqslant p-1$, то $x=y$.

2.23. По определению $\binom{p}{k}=\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{1\cdot2\cdots k}$. Числитель делится на p, а знаменатель не делится на p. Поэтому целое число, которое получается в результате деления числителя на знаменатель, делится на p.

2.24. П е р в о е   р е ш е н и е. Согласно задаче 2.22 набор остатков от деления на p чисел $a,\ 2a,\ \dots,\ (p-1)a$ совпадает с набором $1,\ 2,\ \dots,\ p-1$. Значит,

$$a^{p-1}\cdot1\cdot2\cdots(p-1)\equiv1\cdot2\cdots(p-1)\pmod p.$$

Число $b = 1 \cdot 2 \cdots (p-1)$ не делится на p, поэтому $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Чтобы доказать это, нужно умножить обе части равенства на число $\bar{b}$, для которого $\bar{b}b \equiv 1 \pmod p$.

В т о р о е   р е ш е н и е. Покажем, что для любого натурального n число $n^p - n$ делится на p. Применим индукцию по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что $n^p - n$ делится на p. Тогда число

$$(n+1)^p - (n+1) = \binom{p}{1} n^{p-1} + \binom{p}{2} n^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1} n$$

тоже делится на p, поскольку все числа $\binom{p}{k}$, где $1 \leqslant k \leqslant p-1$, делятся на p (задача 2.23).

Если число n не делится на p, то из того, что $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$ делится на p, следует, что $n^{p-1} - 1$ делится на p.

2.25. Если $a \equiv b^2 \pmod p$, то согласно малой теореме Ферма (задача 2.24) $a^{(p-1)/2} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Поэтому любой квадратичный вычет является решением уравнения $x^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$. Согласно теореме Лагранжа (задача 2.20) количество решений этого сравнения не превосходит $(p-1)/2$, а согласно задаче 2.21 количество квадратичных вычетов равно $(p-1)/2$. Поэтому квадратичные вычеты — это в точности решения сравнения $x^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$.

Если a — квадратичный невычет, то $a^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod p$. Действительно, сравнение $x^2 \equiv 1 \pmod p$ имеет только два решения: $x \equiv \pm 1 \pmod p$.

2.26. Воспользуемся критерием Эйлера (задача 2.25). Если $p = 4k+1$, то

$$(-1)^{(p-1)/2} = (-1)^{2k} = 1,$$

а если $p = 4k+3$, то $(-1)^{(p-1)/2} = (-1)^{2k+1} = -1$.

2.27. Ясно, что d имеет простой делитель $p = 4k+3$. Предположим, что $x^2 - dy^2 = -1$. Тогда $x^2 \equiv -1 \pmod p$, поэтому число -1 является квадратичным вычетом по модулю p. С другой стороны, если $p = 4k+3$ — простое число, то согласно задаче 2.26 число -1 не является квадратичным вычетом по модулю p.

2.28. Пусть (x_1, y_1) — фундаментальное решение уравнения Пелля $x^2 - dy^2 = 1$. Из условия $d \equiv 1 \pmod 4$ вытекает, что $x_1^2 - y_1^2 \equiv 1 \pmod 4$. Следовательно, $x_1 \equiv 1 \pmod 2$ и $y_1 \equiv 0 \pmod 2$. Перепишем равенство $x_1^2 - dy_1^2 = 1$ в виде

$$\frac{x_1+1}{2} \cdot \frac{x_1-1}{2} = d\left(\frac{y_1}{2}\right)^2.$$

По условию число d простое, поэтому либо

$$\frac{x_1+1}{2} = da^2, \quad \frac{x_1-1}{2} = b^2,$$

либо

$$\frac{x_1+1}{2} = a^2, \quad \frac{x_1-1}{2} = db^2.$$

В первом случае получаем $b^2 - da^2 = -1$. Во втором случае получаем $a^2 - db^2 = 1$, что противоречит минимальности решения (x_1, y_1).

2.29. Положим

$$X + Y\sqrt{d} = \left(\frac{x + y\sqrt{d}}{2}\right)^3, \text{ т.е. } X = \frac{x(x^2 + 3dy^2)}{8}, \; Y = \frac{y(3x^2 + dy^2)}{8}.$$

Тогда $x^2 + 3dy^2 \equiv 1 + 15 \equiv 0 \pmod 8$ и $3x^2 + dy^2 \equiv 3 + 5 \equiv 0 \pmod 8$, поэтому числа X и Y целые. Кроме того,

$$X + Y\sqrt{d} = \left(\frac{x + y\sqrt{d}}{2}\right)^3 \left(\frac{x - y\sqrt{d}}{2}\right)^3 = \pm 1.$$

2.30. Предположим сначала, что среди чисел m, n и p есть равные, например, $n = p$. Тогда $m^2 + 2n^2 = 3mn^2$, т. е. $3m = \left(\frac{m}{n}\right)^2 + 2$. Следовательно, $m = dn$, где d — целое число. При этом $d^2 + 2 = 3nd$, т. е. $d(3n - d) = 2$. Поэтому $d = 1$ или 2. В обоих случаях $n = 1$. В результате получаем решения $(1, 1, 1)$ и $(2, 1, 1)$. Назовем их *особыми*.

Возьмем теперь неособое решение (m, n, p), для которого числа m, n, p попарно различны, и рассмотрим квадратный трехчлен

$$f(x) = x^2 - 3xnp + n^2 + p^2$$

Ясно, что $f(m) = 0$, т. е. один корень квадратного трехчлена f равен m. Второй его корень m' можно найти по теореме Виета: $m' = 3np - m$. Ясно, что при этом (m', n, p) — решение уравнения (1). Покажем, что наибольшее из чисел n и p заключено между m и m'. Пусть для определенности $n > p$. Тогда

$$(n - m)(n - m') = f(n) = 2n^2 + p^2 - 3n^2p < 0.$$

Это как раз и означает, что n заключено между m и m'.

Аналогичным образом по решению (m, n, p) можно построить решения (m, n', p) и (m, n, p').

Предположим, что m — наибольшее из чисел m, n, p. Тогда

$$m > \max(n, p) > m', \quad n < m = \max(m, p) < n'.$$

Таким образом, при переходе от решения (m, n, p) к решению (m', n, p) наибольшее из трех чисел уменьшается, а при переходе к решениям (m, n', p) и (m, n, p') увеличивается.

Если начинать с решения (1,1,1), то получим следующее дерево решений:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & (1,1,1) & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & (2,1,1) & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & \longleftarrow & (5,2,1) & \longrightarrow & & \\
 & \swarrow & & & & \searrow & \\
 & (13,1,5) & & & & (29,5,2) & \\
\swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\
(34,1,13) & & (194,13,5) & & (433,5,29) & & (169,29,2) \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Это дерево содержит все решения, поскольку от произвольного решения после нескольких уменьшений максимума мы перейдем к особому решению. Под уменьшением максимума мы подразумеваем переход от решения (m, n, p) к решению (m', n, p), где $m > \max(n, p)$.

2.31. Достаточно доказать, что если $m^2 + n^2 + p^2 = mnp$, то числа m, n и p делятся на 3. Если целое число не делится на 3, то его квадрат при делении на 3 даёт остаток 1. Поэтому если $m^2 + n^2 + p^2$ не делится на 3, то среди чисел m, n и p есть как делящиеся на 3, так и не делящиеся на 3. Но тогда $m^2 + n^2 + p^2 = mnp$ делится на 3, чего не может быть. Значит, $m^2 + n^2 + p^2$ делится на 3, причём числа m, n и p одновременно либо все делятся на 3, либо все не делятся на 3. Второй вариант невозможен, потому что $mnp = m^2 + n^2 + p^2$ делится на 3.

2.32. Случай $k = 2$ — это задача 2.10 а). Поэтому будем предполагать, что $k > 3$. Предположим, что $x^2 + y^2 + z^2 = k\,xyz$, где x, y, z — натуральные числа. Прежде всего покажем, что эти числа попарно различны. Пусть $y = z$. Тогда $x^2 = kxy^2 - 2y^2 = (kx - 2)y^2$, поэтому $x = \lambda y$, где λ — натуральное число. При этом $\lambda^2 = k\lambda y - 2$, т.е. $2 = \lambda(ky - \lambda)$. Значит, $\lambda = 1$ или 2. В обоих случаях $ky = 3$, что противоречит неравенству $k > 3$.

Пусть для определённости $x > y > z$. Рассмотрим квадратный трёхчлен $f(t) = t^2 - kyz\,t + y^2 + z^2$. Один его корень равен x, а второй корень x' по теореме Виета равен $kyz - x$. Ясно, что $(y - x)(y - x') = f(y) = 2y^2 + z^2 - ky^2z < 0$, т.е. $x > y > x'$. Таким образом, по решению x, y, z мы построили новое решение x', y, z, для которого $x', y, z < x$. Повторяя эту конструкцию x раз, приходим к противоречию. (Решающее отличие от уравнения Маркова состоит в том, что здесь нет решения с двумя одинаковыми числами, поэтому операцию уменьшения решения можно применять бесконечно много раз.)

2.33. Предположим, что $m = dm_1$, $n = dn_1$ и $p = dp_1$, где $d > 1$. Тогда $m_1^2+n_1^2+p_1^2 = 3d\,m_1n_1p_1$. Но согласно задаче 2.32 уравнение $x^2+y^2+z^2 = k\,xyz$ не имеет решений в натуральных числах при $k > 3$.

Философия прерывности Н. В. Бугаева и математические импровизации в терминах целой и дробной части числа

Еровенко В. А. Михайлова Н. В.

В статье В. А. Еровенко и Н. В. Михайловой показаны философские истоки интереса выдающегося русского математика и педагога второй половины XIX в. Н. В. Бугаева к теории разрывных функций. Приведена подборка задач, связанных с простейшими разрывными функциями, изучаемыми в средней школе: "целая часть числа" и "дробная часть числа". Статья может быть интересна учителям и учащимся школ с углубленным преподаванием математики, а также в качестве материала для занятий математических кружков и факультативов.

Принято считать, что человеку изначально свойственно проявлять любознательность, и что он постоянно стремится к познанию окружающего мира. Не просто «созерцать» его, а «познавать», что означает, как говорили античные философы, искать именно то, что «видимая поверхность вещей взору не являет», или, иначе говоря, искать их «сущности». Поскольку объекты математики довольно абстрактны и в ней, по мнению известного математика И. Р. Шафаревича, «происходит отвлечение от большого числа случайных свойств». то математика существенно отличается от других форм культурной деятельности. «Как говорил Платон, — напоминает Шафаревич, — в ней больше от познания чистого бытия и меньше — от мнений о предметах внешнего мира, в ней *«как бы грезят о сущем»* [1, с. 4]. Возможно, поэтому в математике различимы закономерности, смутно просматриваемые в других областях. Знаменитый испанский философ и педагог Хосе Ортега-и-Гассет (1883-1955) считал, что хотя у человека есть довольно много различных способностей, но многих способностей ему все равно «не хватает», что и побуждает его предельно использовать все свои интеллектуальные возможности. Современные теории познания стремятся не замечать этого несоответствия между стремлением человека к познанию и его «ограниченными возможностями», несмотря на то, что уже древнегреческий философ Платон (427-347 до н.э.) когда-то заметил, что причина познания, по существу, определяется «трагическим осознанием» того, что человеку все же «не хватает знаний».

Отличительной чертой математики, помимо того, что все ее объекты абстрактны и «в чистом виде» в природе не встречаются, является отношение ее предложений к бесконечному множеству объектов. Поэтому единственным способом проверки их истинности является доказательство, выявляющее, по Аристотелю, сущность вещей, то есть не только «что есть», но и «почему есть». Именно логическое доказательство стало тем решающим и самым значительным в развитии математики моментом, когда она стала складываться как теоретическая наука. Это событие историки связывают с деятельностью древнегреческого математика Фалеса Милетского (ок. 625-547 до н.э.), первым познакомившего греков с геометрией и самостоятельно доказавшего утверждение, что диаметр делит круг на две равные части. Первые теоремы Фалеса Милетского устанавливали очевидные для каждого истины. «Гениальность нужна была не для того, чтобы увериться в справедливости этих положений, — замечает И. Р. Шафаревич, — а для того, чтобы *понять, что они нуждаются в доказательстве*» [1, с. 5]. Явно преувеличивая, Никола Бурбаки даже утверждал, что со времен греков говорить «математика» означало говорить «доказательство». И это несмотря на то, что у самих математиков нет полной ясности в понимании сущности математического доказательства, например, по авторитетному мнению профессора В. А. Успенского, общеупотребительный термин «доказательство» все еще не имеет точного «определения».

Различие существующих взглядов на историю математики в значительной мере определяется тем, что основное «движущее начало» исследователи видят или внутри, или вне самой математики. Еще древнегреческими математиками было обнаружено противоречие геометрии и арифметики, которая оперировала тогда только с целыми и дробными числами, когда обнаружилось, что диагональ квадрата со стороной 1 не имеет длины, или, по современному говоря, имеет иррациональную длину $\sqrt{2}$, что и послужило «изгнанием чисел из геометрии». Однако, начиная с XVII века, ведущей тенденцией развития математики стала, благодаря усилиям великого французского математика и философа Рене Декарта (1596-1650), ее алгебраизация. Хотя Декарт и вернул в геометрию числовой анализ, лишь в конце XIX века противоречие между *дискретностью арифметики* и *непрерывностью геометрии* было в некотором смысле снято построением теории действительных чисел. Определенные надежды на обоснование всей математики в конце XIX века и начале XX были связаны с «философски окрашенными» теоретико-множественными работами выдающегося немецкого математика Георга Кантора (1845-1918). Эти идеи были с сочувствием восприняты в поисковых работах московской философско-математической школы, активно ставшей разрабатывать новые теории множеств и функций.

Выбор, сделанный москвичами, определялся преимущественно научной деятельностью наиболее влиятельного математика конца XIX века Николая Васильевича Бугаева (1837-1903). В 1856-1895 годах он учился на физико-математическом факультете Московского университета. После защиты в 1863 году магистерской диссертации по теории сходимости рядов стажировался во Франции и Германии. Защитив по возвращении в 1866 году докторскую диссертацию по теории чисел, он в 1867 году стал профессором Московского университета, работая в течении ряда лет деканом физико-математического факультета [2, с 115]. Кроме того, Н. В. Бугаев был одним из основателей Московского математического общества, а с 1891 года и до конца жизни президентом этого общества. Среди основных предпочтений его математического творчества была теория чисел с задачей создания универсальных методов получения теоретико-числовых тождеств. В частности, им получены числовые тождества, связанные с функцией целой части числа x, $E(x)$

(в современных обозначениях $[x]$ или $\lfloor x \rfloor$). Философские вопросы математики занимали Н. В. Бугаева, который был дружен со многими московскими философами, на протяжении всей жизни. Он стремился создать математическое мировоззрение, которое должно было преодолеть односторонность аналитического мышления, игнорировавшего разрывные процессы действительности. Бугаев хотел построить «теорию прерывных функций», называя этот раздел математики *«аритмологией»*. «Аритмологические исследования, — указывает историк математики доктор физико-математических наук С. С. Демидов, — находились у него в тесной связи с общефилософскими построениями» [2, с. 116]. Только беря обе части математики, согласно Бугаеву — анализ и аритмологию, можно построить содержательное математическое мировоззрение.

Идея аритмологии Бугаева восходит к древнегреческой мудрости *«Ты все расположил мерою, числом и весом»* и к знаменитому пифагорейскому учению *«Все есть число»*. Своим учением Н. В. Бугаев пытался вывести за рамки математики и областей ее применения новые идеи математического исследования. Так в работе «Математика как орудие философское и педагогическое» (1875) он писал: «Найти меру в области мысли, воли и чувства — вот задача современного философа, политика и художника» (цит. по [3, с. 33]). Уже в ранний период научного творчества у Бугаева появился интерес к моральным проблемам, и под воздействием философии выдающегося немецкого математика и физика Готфрида Вильгельма Лейбница (1646-1716) он строит свою «эволюционную монадологию». В своем понимании взаимодействия наук Лейбниц исходил из «религиозно-идеалистически» трактуемого мирового единства и существования невидимых духовных субстанций тел, то есть «душ» или «монад», обладающих психической активностью и способностью саморазвития. Мировое единство основывается, по Лейбницу, на присущей душам способности отражать сущность Вселенной, а телам — выражать эту сущность в зависимости от степени своего совершенства [4, с. 134]. Монады Лейбница находятся в отношении «предустановленной гармонии» и саморазвитие их происходит непрерывно. В учение Г. В. Лейбница профессор Н. В. Бугаев вносит новые положения, связанные с его аритмологией, а именно, монады различных порядков или типов. Порядок монады, по Бугаеву, вносит разрывы в процессе «внутримонадных изменений». Законы Бугаева о «монадологической инерции» и «монадологической солидарности», отражающие совершенствование монад, в наиболее разработанном виде представлены в статье «Основные начала эволюционной монадологии» (1893). Своей теорией, замечает доктор философских наук Л. А. Петрушенко, «Лейбниц утверждает ... объективную необходимость многообразия и незавершенности вообще» [4, с. 135]. Настоящее, по Лейбницу, «чревато будущим» и именно поэтому *«индивидуальность содержит в себе бесконечное»*.

Философски-математические взгляды Н. В. Бугаева были представлены им в докладе «Математика и научно-философское миросозерцание», прочитанном на 1-ом Международном конгрессе математиков в Цюрихе (1897). Поскольку величины могут изменяться непрерывно или прерывно, то, сообразно с этим, и функции разделяются на непрерывные и прерывные, а сама «чистая математика», по Бугаеву, распадается на два громадных отдела: «теорию непрерывных функций» и «теорию прерывных функций». «Прерывность гораздо разнообразнее непрерывности, — отмечает он. — Можно даже сказать, что непрерывность есть прерывность, в которой изменение идет через бесконечно малые и равные промежутки» [5, с. 86]. Если истины математического анализа претендуют на некоторую общность и универсальность, то «истины аритмологии», согласно философским взглядам Н. В. Бугаева, «носят на себе печать своеобразной индивидуальности» и поэтому привлекают своей таинственностью и поразительной красотой. «Прерывность всегда обнаруживается там, — говорит профессор Бугаев, — где проявляется *самостоятельная индивидуальность*. Прерывность подмечается также и там, где на сцену выступают вопросы о целесообразности, где проявляются эстетические и *этические* задачи» [5, с. 90]. В частности, этим можно объяснить, почему, например, древнегреческие мыслители связывали с целыми числами некоторые проблемы своей «мистической философии». Аритмологическое миросозерцание, убеждает нас Бугаев, не принуждает нас понимать течение событий только в их «роковой и необходимой последовательности», поскольку корни его лежат в самой «сущности вещей» и природе мировых явлений, и тем самым оно «освобождает нас от фатализма».

В соответствии с канторовской теорией множество всех непрерывных функций на отрезке имеет мощность континуума, а множество всех числовых функций — мощность гиперконтинуума, то есть разрывных функций гораздо больше. В связи с этим, возникает вопрос: *«Какие же функции надо изучать?»* Один из разделов современного функционального анализа посвящен исследованию так называемых «обобщенных функций», включающих многие разрывные функции. Некоторые классы «прерывных» функций Бугаева такие, например, как кусочно-непрерывные, подобно функции $E(x)$, пределы последовательностей кусочно-непрерывных, подобно функциям интегрируемым по Лебегу, и функции, заданные в целочисленных точках, которые являются, по существу, односторонними или двусторонними последовательностями, довольно активно используются в разных разделах дискретной и непрерывной математики. Поэтому вполне естественным выглядит рассмотрение простейших разрывных функций в школьном курсе математики. Знаменитого профессора Н. В. Бугаева кроме научных проблем интересовали также проблемы средней школы — он писал учебники и участвовал в работе различных комиссий Московского учебного округа. Поскольку разрывные функции — это существенная часть современной математики, то они должны стать составной частью учебных курсов математики различных уровней, причем сделать это можно уже в школьном курсе. Некоторые импровизации такого рода на тему «функциональных равенств и неравенств», с использованием целой и дробной части числа, мы попытаемся сейчас продемонстрировать.

В одной французской газете однажды было опубликовано объявление: «Нужен тренер по плаванию, умеющий плавать». В такой ситуации мы сами довольно часто оказываемся, когда приступаем к изучению новых для себя разделов математики. Если нужда не заставляет, редко кто самостоятельно начинает обучение с самого «глубокого места» в надежде на то, что он может быть «выплывет». Поэтому мы и предлагаем начать с небольшого математического «лягушатника».

Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Оно обозначается $[x]$ или $E(x)$ (E — первая буква французского entier — целый).

Замечание 1. *Отметим, что $[x]$ может быть определено как целое число, являющееся решением двойного неравенства:*

$$[x] \le x < [x] + 1 \quad \textit{или} \quad x - 1 < [x] \le x.$$

Дробной частью числа x называется разность между x и $[x]$ и в приложениях встречается столь часто, что имеет собственное обозначение $\{x\}$, то есть

$$\{x\} = x - [x] \ \text{ и, поэтому, } \ x = [x] + \{x\}.$$

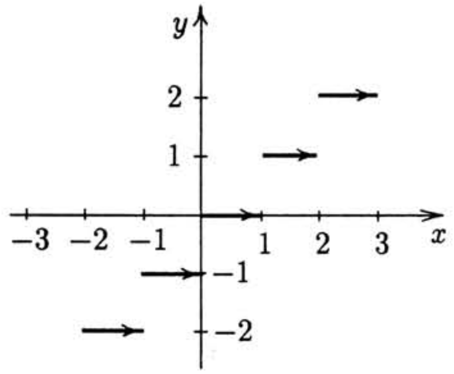
Очевидно, что для всех вещественных x выполняется неравенство $0 \le \{x\} < 1$ и, в частности, в целых точках справедливо утверждение

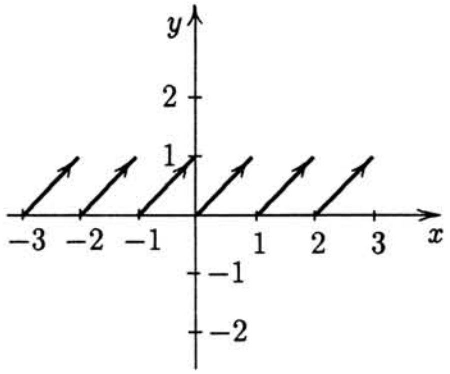
$$x \text{ — целое} \ \Leftrightarrow \ [x] = x \ \Leftrightarrow \ \{x\} = 0,$$

где под обозначением «$\Leftrightarrow$» понимается «тогда и только тогда».

Например, $[0] = 0$, $[-2] = -2$, $[-3,4] = -4$, $\left[\sqrt{2}\right] = 1$, $[-e] = -3$, $\{0\} = 0$, $\{3\} = 0$, $\{-5\} = 0$, $\{0,3\} = 0,3$, $\{-0,3\} = 0,7$, $\left\{\sqrt{2}\right\} = \sqrt{2} - 1$, $\{-e\} = -e + 3$.

Графики функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$ строятся непосредственно по их определениям.





Очевидно, что *функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$ разрывны*, но следует отметить, что их сумма $y = [x] + \{x\} = x$ функция непрерывная.

Прежде чем переходить к задачам различных «уровней сложности», опишем некоторые свойства функций целой и дробной частей числа.

Свойство 1. *Для вещественного x равенство между $[x]$ и целым n равносильно неравенствам:*

$$[x] = n \ \Leftrightarrow \ n \le x < n + 1 \ \Leftrightarrow \ x - 1 < n \le x.$$

Первая эквивалентность непосредственно следует из определения целой части $[x]$ и замечания 1.

Свойство 2. *Для целого n и вещественного x справедливы равенства:*

$$[x + n] = [x] + n, \qquad \{x + n\} = \{x\}.$$

В частности, из второго равенства следует, что функция $y = \{x\}$ является периодической с периодом, равным 1.

Справедливость первого равенства следует из того, что если $x = [x] + \alpha$, где $\alpha = \{x\}$ и $0 \leq \alpha < 1$, то тогда

$$[x+n] = [[x] + \alpha + n] = [[x] + n + \alpha] = [x] + n,$$

а

$$\{x+n\} = \{[x] + \alpha + n\} = \{[x] + n + \alpha\} = \alpha = \{x\}.$$

Свойство 3. *Для вещественных x и y справедливы равенства более общие:*

$$[x+y] = [x] + [y] + [\{x\} + \{y\}],$$

$$\{x+y\} = \{x\} + \{y\} - [\{x\} + \{y\}].$$

Они доказываются так же, как и равенства свойства 2, а именно можно показать, что $[x+y] = [x]+[y]$, если $\{x\}+\{y\} < 1$, и $[x+y] = [x]+[y]+1$, если $\{x\}+\{y\} \geq 1$, а $\{x+y\} = \{x\}+\{y\}$, если $\{x\}+\{y\} < 1$, и $\{x+y\} = \{x\}+\{y\}-1$, если $\{x\}+\{y\} \geq 1$.

Из равенств свойства 3 непосредственно следует, что

$$[x] + [y] \leq [x+y], \quad \{x+y\} \leq \{x\} + \{y\}.$$

Свойство 4. *Для $[-x]$ и $\{-x\}$ справедливы равенства:*

$$[-x] = -[x] - 1, \qquad \{-x\} = 1 - \{x\}.$$

Второе равенство следует из очевидного тождества $\{x\} + \{-x\} = 1$. Проверим справедливость первого равенства, сведя его к предыдущему тождеству. Подставляя в первое равенство $[x] = x - \{x\}$ и $\{-x\} = -x - \{-x\}$, получим $-x - \{-x\} = -(x - \{x\}) - 1$. Откуда следует $-x - \{-x\} = -x + \{x\} - 1$ или $\{x\} + \{-x\} = 1$.

Свойство 5. *Некоторые неравенства между вещественным x и целым n равносильны неравенству с целой частью $[x]$ и n:*

$$[x] < n \;\Leftrightarrow\; x < n, \qquad n \leq [x] \;\Leftrightarrow\; n \leq x.$$

Действительно, если $x < n$, то тогда, в силу неравенства $[x] \leq x$, имеем $[x] < n$. Обратно, если $[x] < n$, то так как $[x]+1 \leq n$ и $x < [x]+1$, имеем, что $x < n$. Вторая эквивалентность проверяется аналогично.

Замечание 2. *Для вещественного x и целого n равносильны следующие неравенства:*

$$[x] \leq n \;\Leftrightarrow\; x < n+1, \qquad n < [x] \;\Leftrightarrow\; n+1 \leq x.$$

Эти утверждения следуют из того, что $[x] \leq n \;\Leftrightarrow\; [x] < n+1$, $\quad n < [x] \;\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\; n+1 \leq [x]$ и соответствующих равносильных неравенств свойства 5.

Рассмотрим, наконец, несколько конструкций с целой и дробной частью. Например, что такое $[[x]]$ для вещественного x? Поскольку $[x]$ — целое число, то $[[x]] = [x]$. Соответственно $\{\{x\}\} = \{x\}$, а $[\{x\}] = 0$ и $\{[x]\} = 0$.

Знаменитый американский математик, профессор Мичиганского университета Пауль Халмош в статье «Сердце математики» (1980) обосновал свое утверждение о том, что сущность математики состоит в широком смысле в задачах и проблемах. Как правило, при решении определенного класса задач используется несколько «эвристических стратегий». Речь идет о стратегиях получения решения задачи, на которую учащиеся и студенты иногда не обращают внимания при разборе решения задачи. Определенная трудность заключается еще и в том, что алгебраические символы сами по себе, вообще говоря, ни о каком конкретном методе или способе решения задачи не говорят. То, что надо увидеть в них, зависит в немалой степени от сущности или требования задачи, к которой они применяются. Но все, в конце концов, замыкается на том, что именно «смотрящий» может или готов заметить. Чтобы каким-то образом «формализовать» стратегию нахождения решений определенного класса задач, содержащих разрывные функции целой и дробной части числа, мы и выделили базовые свойства 1–5, в надежде на лучшее понимание решения.

К задачам высокого уровня можно отнести такие, в которых для определенного множества X и определенного отношения $P(x)$ требуется подтвердить или опровергнуть, что $P(x)$ выполняется при любом $x \in X$. Например, подтвердить или опровергнуть, что равенство $[\sqrt{[x]}] = [\sqrt{x}]$ выполняется для любого вещественного $x \geq 0$ [6]. В такого рода задачи включается «дополнительный уровень неопределенности» относительно результата. О последнем равенстве можно сказать, что оно выполняется всегда. Докажем это в более общем виде, учитывая полезность такого рода соотношений при решении некоторых задач.

Задача-теорема. *Пусть F непрерывная монотонно возрастающая функция, обладающая свойством*

$$F(x) = \text{целое число} \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{целое число}.$$

Тогда, для вещественных x, в которых определены $F(x)$ и $F([x])$, справедливо равенство

$$[F([x])] = [F(x)].$$

Решение. Положим $[F([x])] = n$, тогда по свойству 1 $n \leq F([x]) < n+1$. Поскольку, по условию F — непрерывная монотонно возрастающая функция и существуют такие целые m и p, что $F(m) = n$ и $F(p) = n+1$, то из последнего двойного неравенства вытекает $m \leq [x] < p$. В силу свойства 5 это двойное неравенство эквивалентно тому, что $m \leq x < p$. Следовательно, учитывая свойства функции F, $F(m) \leq F(x) < F(p)$ или $n \leq F(x) < n+1$. Пользуясь опять свойством 1, заключаем, что $[F(x)] = n$ и, таким образом, получаем нужное равенство $[F([x])] = n = [F(x)]$.

Рассмотрим важный частный случай предыдущей задачи-теоремы.

Замечание 3. *Если m и n — целые числа и $n > 0$, то тогда*

$$\left[\frac{[x]+m}{n}\right] = \left[\frac{x+m}{n}\right].$$

Например, если положить $m = 0$, а $n = 2$, то тогда

$$\left[\frac{1}{2}\left[\frac{x}{2}\right]\right] = \left[\frac{x}{4}\right], \qquad \left[\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left[\frac{x}{2}\right]\right]\right] = \left[\frac{x}{8}\right] \qquad \text{и т.д.}$$

Рассмотрим теперь некоторые простейшие типовые примеры (см. также примеры в книге заслуженного учителя И. Кушнира [7]).

Задача 1. Решить уравнение $[ax + b] = c$ $(a \neq 0)$.

Решение. Если $c \notin \mathbb{Z}$, то есть не является целым числом, то решений нет. Пусть $c \in \mathbb{Z}$, то есть c — целое число. Тогда по свойству 1, равенство $[ax + b] = c$ эквивалентно $c \leq ax+b < c+1$, откуда $c-b \leq ax < c+1-b$. Рассмотрим два случая: $a > 0$ и $a < 0$. Если $a > 0$, то последнее двойное неравенство эквивалентно $\frac{c-b}{a} \leq x < \frac{c+1-b}{a}$, а если $a < 0$, то тогда $\frac{c+1-b}{a} < x \leq \frac{c-b}{a}$.

Ответ: если $c \notin \mathbb{Z}$, то решений нет,

если $c \in \mathbb{Z}$ и $a > 0$, то $x \in \left[\frac{c-b}{a}, \frac{c+1-b}{a}\right)$,

если $c \in \mathbb{Z}$ и $a < 0$, то $x \in \left[\frac{c+1-b}{a}, \frac{c-b}{a}\right)$.

Например, если $[2x - 1] = 3$, то $x \in [2; 2,5)$.

Прежде чем перейти к решению следующих задач, отметим, что указанные в свойстве 5 и замечании 2 равносильности, вообще говоря, не верны, если целое число $n \in \mathbb{Z}$ заменить нецелым вещественным $b \in \mathbb{R}$. Действительно, из верного неравенства $[1,5] < 1,4$ не следует неверное неравенство $1,5 < 1,4$, а из $1,4 \leq 1,5$ не вытекает $1,4 \leq [1,5]$. Аналогично, из верного неравенства $1,7 < [2,3]$ не следует неверное неравенство $1,7 + 1 \leq 2,3$, а из $2,3 < 1,7 + 1$ не вытекает $[2,3] \leq 1,7$. В следующих двух замечаниях рассматриваются соответствующие равносильные неравенства.

Замечание 4. *Для вещественного x и нецелого вещественного b, т.е. $b \notin \mathbb{Z}$, равносильны следующие неравенства:*

$$[x] < b \;\Leftrightarrow\; x < [b] + 1, \qquad b \leq [x] \;\Leftrightarrow\; [b] + 1 \leq x.$$

Действительно, если $[x] < b$, то из $b < [b] + 1$ (замечание 1) следует $[x] < [b] + 1$ для целого $[b] + 1$. Поэтому по свойству 5 $x < [b] + 1$. Обратно, если $x < [b] + 1$ для целого $[b]$, то по замечанию 2 имеем $[x] \leq [b]$, а так как для нецелого b, $[b] < b$, то $[x] < b$. Первая равносильность доказана. Отметим, что для нецелого b $[x] < b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow [x] \leq b$.

Рассмотрим другое утверждение. Если $b \leq [x]$, то в силу неравенства $[b] < b$ для нецелого b, имеем $[b] < [x]$ для целого $[b]$. Поэтому по замечанию 2 $[b] + 1 \leq x$. Обратно, если $[b] + 1 \leq x$ для целого $[b] + 1$, то по свойству 5 $[b] + 1 \leq [x]$, а так как $b < [b] + 1$ (замечание 1), то $b \leq [x]$, что доказывает вторую равносильность. Отметим, что для $b \notin \mathbb{Z}$, $b \leq [x] \Leftrightarrow b < [x]$.

Замечание 4. *Для вещественного x и нецелого вещественного b, т.е. $b \notin \mathbb{Z}$, равносильны следующие неравенства:*

$$[x] \leq b \;\Leftrightarrow\; x < [b] + 1, \qquad b < [x] \;\Leftrightarrow\; [b] + 1 \leq x.$$

Доказательства этих утверждений аналогичны проведенным после замечания 4.

Задача 2. Решить неравенства вида:

1. $[ax+b] < c$,

2. $c \le [ax+b]$,

в которых для простоты $a > 0$.

Решение. Пусть $c \in \mathbb{Z}$, тогда неравенства 1 и 2 по свойству 5, соответственно эквивалентны неравенствам $ax+b < c$ и $c \le ax+b$, откуда следует, что $x < \frac{c-b}{a}$ в неравенстве 1 и $\frac{c-b}{a} \le x$ в неравенстве 2.

Пусть теперь $c \notin \mathbb{Z}$, тогда неравенства 1 и 2 по замечанию 4, соответственно, эквивалентны неравенствам $ax+b < [c]+1$ и $[c]+1 \le ax+b$, откуда следует, что $x < \frac{[c]+1-b}{a}$ в неравенстве 1 и $\frac{[c]+1-b}{a} \le x$ в неравенстве 2.

Ответ: 1. Если $c \in \mathbb{Z}$, то $x \in \left(-\infty, \frac{c-b}{a}\right)$, а если $c \notin \mathbb{Z}$, то $x \in \left(-\infty, \frac{[c]+1-b}{a}\right)$.

2. Если $c \in \mathbb{Z}$, то $x \in \left[\frac{c-b}{a}, +\infty\right)$, а если $c \notin \mathbb{Z}$, то $x \in \left(\frac{[c]+1-b}{a}, +\infty\right)$.

Например, пусть $[2x+5] < 3$, тогда решение этого неравенства $x \in (-\infty, -1)$, а для неравенства $[2x+5] \le 3,1$, его решение $x \in (-\infty, -0,5)$, если $1 \le [2x-3]$, то его решение $x \in [2, +\infty)$, а для неравенства $1,4 \le [2x-3]$ получим $x \in [2,5; +\infty)$.

Задача 3. Решить неравенства вида:

1. $[ax+b] \le c$,

2. $c < [ax+b]$,

в которых для простоты $a > 0$.

Для решения этой задачи можно использовать замечание 2 для целых $c \in \mathbb{Z}$ и замечание 5 для $c \notin \mathbb{Z}$.

Ответ: 1. Если $c \in \mathbb{Z}$, то $x \in \left(-\infty, \frac{c+1-b}{a}\right)$, а если $c \notin \mathbb{Z}$, то $x \in \left(-\infty, \frac{[c]+1-b}{a}\right)$.

2. Если $c \in \mathbb{Z}$, то $x \in \left[\frac{c+1-b}{a}, +\infty\right)$, а если $c \notin \mathbb{Z}$, то $x \in \left(\frac{[c]+1-b}{a}, +\infty\right)$.

Прежде чем рассмотреть «квазилинейное» уравнение, содержащее x, $[x]$ и $\{x\}$, рассмотрим некоторые частные случаи. Нетрудно видеть, что уравнению $x = [x] \Leftrightarrow \Leftrightarrow \{x\} = 0$ удовлетворяет любое целое число, $x \in \mathbb{Z}$; уравнению $x = \{x\} \Leftrightarrow [x] = 0$ удовлетворяют числа $x \in [0,\ 1)$; уравнению $[x] = \{x\}$ удовлетворяет только $x = 0$, так как $0 \le \{x\} < 1$, а значит $[x] = 0$.

Задача 4. *Решить квазилинейное уравнение вида*

$$a[x] + b\{x\} + cx = d.$$

Заметим, что подставляя в это уравнение $x = [x] + \{x\}$, получим уравнение вида $(a+c)[x] + (b+c)\{x\} = d$. таким образом, задача 4 свелась к решению квазилинейного уравнения вида

$$a[x] + b\{x\} = c.$$

Рассмотрим, например, случай $ab > 0$.

Решение. Из равенства $a[x] + b\{x\} = c$ следует $[x] = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}\{x\}$, т.е. правая часть целое число. Пусть $[x] = n$, тогда $\frac{c}{a} - \frac{b}{a}\{x\} = n$ или $\{x\} = \frac{c-an}{b}$. Так как $0 \le \{x\} < 1$, то $0 \le \frac{c-an}{b} < 1$ и, учитывая $\frac{a}{b} > 0$, получим двойное неравенство для целого n вида $\frac{c-b}{a} < n \le \frac{c}{a}$. Откуда находим целые значения $n = [x]$, а затем из уравнения

$a[x]+b\{x\}=c$ вычисляем соответствующие дробные части $\{x\}=\frac{c}{b}-\frac{a}{b}[x]=\frac{c}{b}-\frac{a}{b}n$ и, таким образом находим все решения как сумму целой и соответствующей дробной частей $x=[x]+\{x\}$.

Например, для уравнения $2[x]+3\{x\}=4$ имеем, что $[x]\in(\frac{1}{2},2]$, т.е. $[x]$ может быть равна 1 и 2, а $\{x\}$ соответственно равна $\frac{2}{3}$ и 0, и таким образом $x\in\left\{1\frac{2}{3},\,2\right\}$.

Нетрудно видеть, что аналогичным образом решается уравнение $a[x]+b\{x\}=c$ для $ab<0$.

Рассмотрим, наконец, хотя бы одно нелинейное уравнение, частного вида (см. также [7]).

Задача 5. Решить нелинейное уравнение $[x^2]=[x]$.

Решение. Поскольку $0\leq[x^2]$, то в силу равенства $[x^2]=[x]$, из неравенства $0\leq[x]$ по свойству 5 получаем равносильное неравенство $0\leq x$. Очевидно, что все $x\in[0,\,1]$ являются решениями, а $x\in[2,+\infty)$ не удовлетворяют уравнению. Рассмотрим $x\in(1,\,2)$, т.е. $x=1+\{x\}$. Подставляя $x=1+\{x\}$ в уравнение, получим $[(1+\{x\})^2]=[1+\{x\}]$ или $[1+2\{x\}+\{x\}^2]=[1+\{x\}]$. Пользуясь свойством 2, получим $1+[2\{x\}+\{x\}^2]=1+[\{x\}]$, а так как $[\{x\}]=0$, то следовательно $[2\{x\}+\{x\}^2]=0$, что по свойству 1 равносильно неравенству $0\leq\{x\}^2+2\{x\}<1$. Решая уравнение $y^2+2y-1=0$ в области $0\leq y<1$ для $y=\{x\}$, получим $\{x\}\in(0,\,\sqrt{2}-1)$, а так как $x=1+\{x\}$, то таким образом $x\in(1,\,\sqrt{2})$.

Ответ: $x\in[0,\sqrt{2})$.

В заключение с помощью функции целой части числа запишем красивое симметричное равенство для знаменитых «соперничающих» иррациональных чисел π и e:

$$[\pi]^{[e]}+[e]=[e]^{[\pi]}+[\pi].$$

Нестандартные примеры и методы не только стимулируют творческую активность [8], но и дают почувствовать учащимся «сущность математики», которая заключается, как говорил выдающийся немецкий математик Георг Кантор (1845-1918), в «ее свободе».

Когда из тех или иных соображений в математике вводится новый объект, например, новые классы функций, то исследователи, осознавая определенную новизну вводимых математических объектов, могут в тоже время, возможно неосознано, пытаться исследовать их по старым, привычным для них, канонам, не задумываясь о законности такого оперирования с этими терминами. «Именно поэтому, — предостерегал известный финский математик Рольф Неванлинна, — надо проявлять *величайшую осмотрительность* при введении новых терминов и обозначений, ограничиваясь лишь теми случаями, когда их употребление действительно оправдано» [9, с. 251]. Путь познания идет от частного к общему и от конкретного к абстрактному, поэтому и математическое образование должно начинаться в школьном курсе с легко доступных пониманию учащихся понятий, которые можно затем развить в красивые и содержательные теории. «Существует много различных способов хорошо преподавать, а еще больше — преподавать плохо, — отмечал профессор Р. Неванлинна, — а наихудший способ — преподавать скучно» [9, с. 253]. Поэтому результаты обучения зависят не только от математического содержания, а в немалой степени и от мастерства педагога.

Готфрид Лейбниц первым сформулировал *идею о прогрессе*, как постепенном усовершенствовании общества. И хотя он сам считал себя творцом начала непрерывности, заложив основы для развития математического анализа, он все же сознавал и его недостаточность для объяснения многих явлений. Русский поэт и философ, теоретик символизма Андрей Белый (псевдоним Бориса Бугаева) изучал математику в том же Московском Университете, где читал лекции его отец профессор Н. В. Бугаев. «Жизнь во имя абстракции, — считал он, — не живая жизнь», поэтому и *«переживание несоединимо с прогрессом»* [10, с. 201]. Пропагандируемая Н. В. Бугаевым целесообразность рассмотрения математики в философском контексте способствовала созданию благоприятной атмосферы для принятия канторовской теории множеств, благодаря чему его ученики, выдающиеся математики Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин стали создателями известной Московской школы теории функций действительного переменного.

Аритмологическое миросозерцание, считал мудрый «московский чудак» Николай Васильевич Бугаев, приводит нас к убеждению, что добро и зло, красота и справедливость не только иллюзии, «созданные воображением человека», хотя Андрей Белый однажды вдохновенно сказал в своем стихотворении:

Жизнь в безвременье мчится
пересохшим ключом:
все земное нам снится
утомительным сном.

Литература

[1] Шафаревич И.Р. О некоторых тенденциях развития математики // Москва. — 1990, №12, с. 3-5.

[2] Демидов С.С. Н. В. Бугаев и возникновение Московской школы теории функций действительного переменного // Историко-математические исследования. — 1985, вып. 29. — с. 113-124.

[3] Мороз В.В. Взаимосвязь философии и математики в творчестве П.А. Флоренского // Вестник Московского университета. Сер. 7. Философия. — 1997, №3, с. 26-43.

[4] Петрушенко Л.А. Проблема взаимодействия наук в учении Г.В. Лейбница // Вестник Российской Академии Наук. — 1994, т. 64, №2, с. 133-138.

[5] Бугаев Н.В. Математика и научно-философское миросозерцание // Философская и социологическая мысль. — 1989, №5, с. 85-93.

[6] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. — М.: Мир, 1998. — с. 88-124.

[7] Кушнир И. Шедевры школьной математики. Задачи с решениями. Книга 1. — Киев: Астарта, 1995, с. 514-540.

[8] Еровенко В.А., Шкундич Е.И. Роль нестандартных приемов и методов в математическом развитии учащихся и студентов // Педагогические проблемы разноуровневой подготовки школьников и студентов в условиях реформирования образования. — Мн.: АПО, 1998, часть 2, с. 362-368.

[9] Неванлинна Р. Реформа в преподавании математики // Успехи математических наук. — 1967, т. 22, вып. 2, с. 241-253.

[10] Белый А. Незнакомый друг: Стихотворения. Статьи о литературе из книги «Луг зеленый». — М.: Центр-100, 1997, 256 с.

Еровенко В. А.
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры функционального анализа БГУ

Михайлова Н. В.
аспирантка кафедры философии и культурологии
Республиканского института высшей школы БГУ

Методы математической физики. Набла-исчисление (два варианта изложения)

В. В. Цукерман

Виталий Владимирович Цукерман — профессор Московского государственного открытого педагогического университета. Предлагаемая вашему вниманию статья обобщает опыт преподавания курса “Методы математической физики” на отделении физики физико-математического факультета МГОПУ. В ней разъясняется, что в определенных случаях с символами дифференцирования можно обращаться как с компонентами обычных векторов, применяя известные формулы векторной алгебры. Вводятся классы дифференциальных выражений, для которых указанный формализм правомерен. Статья полезна студентам и преподавателям физико-математических специальностей высших учебных заведений. В настоящем номере публикуется первая часть статьи; окончание в следующем номере.

Введение

Набла-исчисление (∇-исчисление) играет важную роль при изучении студентами специальности «физика» ряда предметов учебного плана, особенно электродинамики. Этот метод широко используется, но его применение часто не основывается на строгой теории, что может приводить к серьезным ошибкам. В ∇-исчислении выражение $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ (где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — ортонормированный базис) рассматривается как «векторный дифференциальный оператор» (оператор Гамильтона), позволяющий записать градиент скалярного поля $u(M) = u(x, y, z)$, дивергенцию и ротор векторного поля

$$\mathbf{a}(M) = \mathbf{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

с помощью операций векторной алгебры[1]:

$$\operatorname{grad} u(M) = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla u,$$

[1]В следующих ниже формулах используются обозначения для операций векторной алгебры: $\mathbf{a}u$ — умножение вектора $\mathbf{a}$ на скаляр u, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — соответственно скалярное и векторное произведения векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\nabla, \mathbf{a}),$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = [\nabla, \mathbf{a}].$$

Кратко, суть метода состоит в том, что с выражениями векторной алгебры, содержащими символ ∇ в качестве вектора, можно обращаться так, как будто ∇ — обычный вектор, а не символический. Кроме того, доказывается, что в отношении разного типа произведений векторной алгебры ∇ ведет себя как оператор дифференцирования. В окончательном выражении символы ∇u, $(\nabla, \mathbf{a})$, $[\nabla, \mathbf{a}]$ интерпретируются соответственно, как $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\mathbf{a}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}$. Такой упрощенный подход оказывается недостаточным, чтобы быть основой непротиворечивой теории.

Рассмотрим пример. Пусть требуется найти скалярное произведение $(\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{a})$. Действуя формально, найдем[2]

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \operatorname{rot}\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, [\nabla, \mathbf{a}]) = \langle \mathbf{a}, \nabla, \mathbf{a} \rangle = \langle \nabla, \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = (\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{a}]) = (\nabla, \mathbf{0}) = 0.$$

Но если, например, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + y\mathbf{k}$, то

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & 0 & y \end{vmatrix} = \mathbf{i}, \quad (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (\mathbf{i}, \mathbf{i} + y\mathbf{k}) = 1 \neq 0.$$

Имеются два метода корректного построения ∇-исчисления. Один из них дан Г. Е. Шиловым в [1]. Второй метод — это тензорное обоснование ∇-исчисления.

В части 1 (§§ 1, 2) рассматриваются дифференциальные операции 1-го и 2-го порядка на основе [1]. В части 2 (§§ 3, 4) дается тензорное обоснование ∇-исчисления. Базой изложения здесь является [2].

1. Векторное обоснование ∇-исчисления

§ 1. Дифференциальные операции первого порядка

Пусть $T(\mathbf{p}; M) = T(\mathbf{p}; x, y, z)$ — скалярное или векторное поле, зависящее линейно от вектора $\mathbf{p}$, т.е.

$$T(c_1\mathbf{p}_1 + c_2\mathbf{p}_2, M) = c_1 T(\mathbf{p}_1, M) + c_2 T(\mathbf{p}_2, M),$$

где c_1 и c_2 произвольные действительные числа. Величина $T(\mathbf{p}; M)$ может быть, например, образована из скалярных полей $u(M)$, $v(M)$, ... , векторных полей $\mathbf{a}(M)$,

[2]Ниже используется понятие *смешанного произведения* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$; по определению, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])$. Применяются известные тождества векторной алгебры: смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его аргументов; векторное произведение вектора на коллинеарный вектор равно 0.

$\mathbf{b}(M)$, ... и вектора $\mathbf{p}$ с помощью операций векторной алгебры. Простыми и важными примерами выражений $T(\mathbf{p}; M)$ являются[3]:

1. $\mathbf{p}u$; 2. $(\mathbf{p}, \mathbf{a})$; 3. $[\mathbf{p}, \mathbf{a}]$; 4. $\mathbf{p}uv$ 5. $(\mathbf{p}, u\mathbf{a})$; 6. $[\mathbf{p}, u\mathbf{a}]$;
7. $\langle\mathbf{pab}\rangle = (\mathbf{p}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}])$; 8. $[\mathbf{p}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]]$; 9. $\mathbf{p}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; 10. $(\mathbf{a}, \mathbf{p})u$; 11. $(\mathbf{a}, \mathbf{p})\mathbf{b}$.

Пусть $\mathbf{p} = \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}$ — разложение вектора $\mathbf{p}$ в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Тогда в силу линейности имеем (далее аргумент M для краткости опущен):

$$T(\mathbf{p}) = T(\xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k}) = T(\xi\mathbf{i}) + T(\eta\mathbf{j}) + T(\zeta\mathbf{k}) = \xi T(\mathbf{i}) + \eta T(\mathbf{j}) + \zeta T(\mathbf{k}).$$

Определение 1. Величиной $T(\nabla)$, соответствующей $T(\mathbf{p})$ называем дифференциальное выражение

$$T(\nabla) = \frac{\partial}{\partial x}T(\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y}T(\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z}T(\mathbf{k}), \tag{1}$$

получаемое заменой в разложении $T(\mathbf{p})$ коэффициентов ξ, η, ζ операторами дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$.

Частными случаями определения 1, соответствующими выражениям $T(\mathbf{p}) = \mathbf{p}u$, $(\mathbf{p}, \mathbf{a})$, $[\mathbf{p}, \mathbf{a}]$, являются $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div} \mathbf{a}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{a}$, что обосновывает использование выражений:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u; \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = (\nabla, \mathbf{a}); \quad \operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla, \mathbf{a}].$$

(Заметим, что выражения $\nabla u, (\nabla, \mathbf{a}), [\nabla, \mathbf{a}]$ внутри более сложных выражений в общем случае нельзя интерпретировать как градиент, дивергенцию и ротор соответственно. Это показывает, в частности, рассмотренный во введении пример; подробней об этом будет сказано ниже.)

Фундаментальную роль играет следующее представление $T(\nabla)$ (в произвольной точке M):

$$T(\nabla) = \lim_{(V)\to M} \frac{1}{V} \oiint\limits_{(S)} T(\mathbf{n})dS, \tag{2}$$

где (V) — ограниченная область в трехмерном пространстве, содержащая точку M, V — объем области (V), (S) — граница (V), $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности (S). Предельный переход осуществляется при стягивании области (V) к точке M. Формула (2) является обобщением известного инвариантного выражения для дивергенции.

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{(V)\to M} \frac{1}{V} \oiint\limits_{(S)} (\mathbf{n}, \mathbf{a})dS$$

(формула (2) совпадает с этим выражением, если $T(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \mathbf{a})$). Из формулы (2) следует инвариантность $T(\nabla)$ относительно выбора координатных осей[4].

[3]В приведенных ниже примерах скалярные и векторные величины, кроме вектора $\mathbf{p}$, зависят от $M = (x, y, z)$, поэтому каждое выражение зависит от $\mathbf{p}$ и M.

[4]Эту инвариантность можно вывести и непосредственно из определения (1) на основе изложенного в части II.

Доказательство формулы (2). Представление (2) непосредственно следует из обобщения интегральной формулы Остроградского:

$$\iiint\limits_{(V)} T(\nabla)dV = \oiint\limits_{(S)} T(\mathbf{n})dS \tag{3}$$

(предполагаем непрерывность $T(\mathbf{p}; M)$ вместе с частными производными)[5]. Поэтому достаточно доказать (3). Предположим сначала, что $T(\mathbf{p}) = T(\mathbf{p}; M)$ — скалярное поле. Тогда:

$$\iiint\limits_{(V)} T(\nabla)dV = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial}{\partial x}T(\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y}T(\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z}T(\mathbf{k})\right) dV =$$

$$= \oiint\limits_{(S)} \left(T(\mathbf{i})\cos\alpha + T(\mathbf{j})\cos\beta + T(\mathbf{k})\cos\gamma\right) dS,$$

где α, β, γ углы внешней нормали к поверхности (S) с осями Ox, Oy, Oz. Если $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали, то в силу линейности $T(\mathbf{p})$ найдем

$$\oiint\limits_{(S)} \left(T(\mathbf{i})\cos\alpha + T(\mathbf{j})\cos\beta + T(\mathbf{k})\cos\gamma\right) dS =$$

$$= \oiint\limits_{(S)} T(\cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k})dS = \oiint\limits_{(S)} T(\mathbf{n})dS.$$

Если $T(\mathbf{p})$ векторное поле, то

$$T(\mathbf{p}) = T_1(\mathbf{p})\mathbf{i} + T_2(\mathbf{p})\mathbf{j} + T_3(\mathbf{p})\mathbf{k}.$$

Имеем:

$$\iiint\limits_{(V)} T_1(\nabla)dV = \oiint\limits_{(S)} T_1(\mathbf{n})dS, \tag{3_1}$$

$$\iiint\limits_{(V)} T_2(\nabla)dV = \oiint\limits_{(S)} T_2(\mathbf{n})dS, \tag{3_2}$$

$$\iiint\limits_{(V)} T_3(\nabla)dV = \oiint\limits_{(S)} T_3(\mathbf{n})dS. \tag{3_3}$$

Умножая равенства (3_1), (3_2), (3_3) соответственно на $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и складывая, получим (3). Итак, представление (2) полностью доказано.

[5]Поясним для полноты изложения, как формула (2) выводится из формулы (3). По теореме о среднем значении, тройной интеграл в левой части (3) равен $T(\nabla, M')V$, где $M' \in (V)$. Поделив обе части равенства (3) с учетом этого замечания на V, переходя к пределу при $(V) \to M$ и пользуясь непрерывностью, получаем (2).

Величина $T(\nabla)$ обладает следующими основными свойствами:

1. Если $T(\mathbf{p}; M) = c_1 T_1(\mathbf{p}; M) + c_2 T_2(\mathbf{p}; M)$, то

$$T(\nabla) = c_1 T_1(\nabla) + c_2 T_2(\nabla). \tag{4}$$

Это следует либо непосредственно из определения (1), либо из представления (2).

Например, имеют место равенства:

$$\nabla(c_1 u + c_2 v) = c_1 \nabla u + c_2 \nabla v,$$

$$(\nabla, c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b}) = c_1(\nabla, \mathbf{a}) + c_2(\nabla, \mathbf{b}),$$
$$[\nabla, c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b}] = c_1[\nabla, \mathbf{a}] + c_2[\nabla, \mathbf{b}],$$

выражающие линейное свойство операций градиента, дивергенции и ротора.

В частности, если $T(\mathbf{p}; M) \equiv T_1(\mathbf{p}; M)$, то

$$T(\nabla) = T_1(\nabla) \tag{4'}$$

Из свойства 1 следует, что с выражениями $T(\nabla)$ можно производить любые тождественные преобразования (как если бы ∇ означал действительный вектор, а не символический).

2. Если оператор ∇ применяется к произведению двух величин, то результат представляется в виде суммы двух слагаемых, в каждом из которых один из множителей фиксирован в точке действия ∇, т.е. оператор ∇ в отношении произведения ведет себя аналогично оператору обычного дифференцирования.

Доказательство непосредственно следует из определения (1) и свойства операторов дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$.

Будем отмечать все величины, которые на время считаем постоянными, индексом «c», тогда

$$\nabla(uv) = \nabla(uv_c) + \nabla(u_c v),$$
$$(\nabla, u\mathbf{a}) = (\nabla, u\mathbf{a}_c) + (\nabla, u_c\mathbf{a}),$$
$$[\nabla, u\mathbf{a}] = [\nabla, u\mathbf{a}_c] + [\nabla, u_c\mathbf{a}],$$
$$(\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}_c]) + (\nabla, [\mathbf{a}_c, \mathbf{b}]),$$
$$[\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = [\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}_c]] + [\nabla, [\mathbf{a}_c, \mathbf{b}]],$$
$$\nabla(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a}, \mathbf{b}_c) + \nabla(\mathbf{a}_c, \mathbf{b}).$$

При записи окончательных выражений используются дополнительные соглашения: аргументы, стоящие в выражении $T(\nabla)$ впереди символа ∇, считаются фиксированными (само расположение аргумента перед символом ∇ заменяет индекс «c»). Так вместо записи:

$$\nabla(uv) = \nabla(uv_c) + \nabla(u_c v)$$

можно написать:

$$\nabla(uv) = v_c \nabla u + u_c \nabla v = v\nabla u + u\nabla v,$$

опустив индекс «c».

Кроме того, ∇u иногда рассматривается как цельный символ, обозначающий $\operatorname{grad} u$. Тогда

$$(\nabla u, \mathbf{a}_c) = (\nabla u, \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \nabla u),$$

$$[\nabla u, \mathbf{a}_c] = [\nabla u, \mathbf{a}] = -[\mathbf{a}, \nabla u].$$

Во избежание ошибок опускать индекс «c» целесообразно лишь в самом конце преобразований.

Необходимо иметь в виду следующее: если величины ∇u, $(\nabla, \mathbf{a})$, $[\nabla, \mathbf{a}]$ входят в качестве множителей в различного рода произведения, то их можно интерпретировать как $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div} \mathbf{a}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ заведомо в тех случаях, когда остальные множители считаются фиксированными по отношению к оператору ∇. Это непосредственно следует из определения 1. Если указанное условие не выполнено, то формальная замена ∇u, $(\nabla, \mathbf{a})$, $[\nabla, \mathbf{a}]$ соответственно на $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div} \mathbf{a}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ может привести к ошибке. Так в рассмотренном в начале работы примере была произведена замена $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ на $[\nabla, \mathbf{a}]$ в выражении $(\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{a})$, но это не правомерно. Нужно было написать

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{a}) = ([\nabla, \mathbf{a}], \mathbf{a}_c) = (\mathbf{a}_c, [\nabla, \mathbf{a}]) = \langle \mathbf{a}_c, \nabla, \mathbf{a} \rangle = \langle \nabla, \mathbf{a}, \mathbf{a}_c \rangle = (\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{a}_c]) = \operatorname{div} [\mathbf{a}, \mathbf{a}_c].$$

Если $\mathbf{a} = \mathbf{i} + y\mathbf{k}$, то в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $\mathbf{a}_c = \mathbf{i} + y_0\mathbf{k}$. Следовательно,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}_c] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & y_0 \end{vmatrix} = (y - y_0)\mathbf{j}.$$

И тогда

$$\operatorname{div} [\mathbf{a}, \mathbf{a}_c] = \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) = 1.$$

Казалось бы незначительная неточность (был опущен индекс «c») привела к грубой ошибке.

Для выражений $T(\mathbf{p})$, указанных в примерах 4 – 9 (см. с. 39), получаем

$$\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v, \qquad \operatorname{grad} (uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v; \tag{5}$$

$$(\nabla, u\mathbf{a}) = (\nabla u, \mathbf{a}) + u(\nabla, \mathbf{a}), \qquad \operatorname{div} (u\mathbf{a}) = (\operatorname{grad} u, \mathbf{a}) + u \operatorname{div} \mathbf{a}; \tag{6}$$

$$[\nabla, u\mathbf{a}] = [\nabla u, \mathbf{a}] + u[\nabla, \mathbf{a}], \qquad \operatorname{rot} (u\mathbf{a}) = [\operatorname{grad} u, \mathbf{a}] + u \operatorname{rot} \mathbf{a}; \tag{7}$$

$$(\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{b}, [\nabla, \mathbf{a}]) - (\mathbf{a}, [\nabla, \mathbf{b}]), \qquad \operatorname{div} [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b}); \tag{8}$$

$$\begin{gathered} [\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = (\mathbf{b}, \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a}(\nabla, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{b} - \mathbf{b}(\nabla, \mathbf{a}), \\ \operatorname{rot} [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a}; \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \nabla(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{b} + [\mathbf{b}, [\nabla, \mathbf{a}]] + [\mathbf{a}, [\nabla, \mathbf{b}]] \\ \operatorname{grad} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{b} + [\mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a}] + [\mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b}]. \end{gathered} \tag{10}$$

Каждое из соотношений записано в двух формах, причем там, где это возможно, во второй форме непосредственно вводятся градиент, дивергенция и ротор соответствующих полей.

Для примера докажем соотношение (10). Используем два соотношения векторной алгебры:

$$\mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = [\mathbf{a},[\mathbf{c},\mathbf{b}]] + (\mathbf{a},\mathbf{c})\mathbf{b}, \qquad \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = [\mathbf{b},[\mathbf{c},\mathbf{a}]] + (\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{a}$$

(для проверки этих формул достаточно раскрыть в каждой из них двойное векторное произведение). Получим

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\mathbf{a},\mathbf{b}) &= \nabla(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a},\mathbf{b}_c) + \nabla(\mathbf{a}_c,\mathbf{b}) = \\ &= [\mathbf{b}_c,[\nabla,\mathbf{a}]] + (\mathbf{b}_c,\nabla)\mathbf{a} + [\mathbf{a}_c,[\nabla,\mathbf{b}]] + (\mathbf{a}_c,\nabla)\mathbf{b} = \\ &= (\mathbf{b},\nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a},\nabla)\mathbf{b} + [\mathbf{b},[\nabla,\mathbf{a}]] + [\mathbf{a},[\nabla,\mathbf{b}]] = \\ &= (\mathbf{b},\nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a},\nabla)\mathbf{b} + [\mathbf{b},\operatorname{rot}\mathbf{a}] + [\mathbf{a},\operatorname{rot}\mathbf{b}].\end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее выражение

$$(\mathbf{a},\nabla)\mathbf{b} = (\mathbf{a}_c,\nabla)\mathbf{b}.$$

Пусть $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$. Тогда

$$(\mathbf{a},\nabla)\mathbf{b} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}_c,\mathbf{i})\mathbf{b} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}_c,\mathbf{j})\mathbf{b} + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}_c,\mathbf{k})\mathbf{b} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}P_c\mathbf{b} + \frac{\partial}{\partial y}Q_c\mathbf{b} + \frac{\partial}{\partial z}R_c\mathbf{b} = P\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{b} + Q\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{b} + R\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{b} = (P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z})\mathbf{b}.$$

Таким образом, $(\mathbf{a},\nabla)$ означает оператор $P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}$ (он может быть получен формальным раскрытием скалярного произведения вектора $\mathbf{a}$ и символического вектора ∇). Этот оператор применяют как к скалярному полю, так и к векторному. Применение $(\mathbf{a},\nabla)$ к постоянному полю (скалярному или векторному) дает нуль.

Применим оператор $(\mathbf{a},\nabla)$ к скалярному полю $u = u(M)$:

$$(\mathbf{a},\nabla)u = |\mathbf{a}|\left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|},\nabla\right)u, = |\mathbf{a}|(\boldsymbol{\tau},\operatorname{grad}u) = |\mathbf{a}|\frac{\partial u}{\partial l},$$

где $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$, $\frac{\partial u}{\partial l}$ — производная поля $u(M)$ по направлению вектора $\mathbf{a}$.

С помощью оператора $(\mathbf{a},\nabla)$ можно записать производную векторного поля по направлению вектора $\mathbf{a}$, которая определяется точно так же, как и производная скалярного поля.

Если векторное поле задано в декартовой системе, то вычисление производной по направлению вектора $\mathbf{a}$ может быть проведено покоординатно, т.е. если $\mathbf{b} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, то

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial l} &= \frac{\partial P}{\partial l}\mathbf{i} + \frac{\partial Q}{\partial l}\mathbf{j} + \frac{\partial R}{\partial l}\mathbf{k} = (\boldsymbol{\tau},\nabla)P\mathbf{i} + (\boldsymbol{\tau},\nabla)Q\mathbf{j} + (\boldsymbol{\tau},\nabla)R\mathbf{k} = \\ &= (\boldsymbol{\tau},\nabla)(P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) = (\boldsymbol{\tau},\nabla)\mathbf{b} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}(\mathbf{a},\nabla)\mathbf{b}.\end{aligned} \tag{11}$$

§ 2. Дифференциальные операции второго порядка

Пусть $T(\mathbf{p},\mathbf{q};M)=T(\mathbf{p},\mathbf{q};x,y,z)$ — скалярное или векторное поле[6], линейное относительно $\mathbf{p}$ при фиксированном $\mathbf{q}$ и линейное относительно $\mathbf{q}$ при фиксированном $\mathbf{p}$, т.е. (ниже аргумент M для краткости опущен).

$$T(c_1\mathbf{p_1}+c_2\mathbf{p_2},\mathbf{q})=c_1T(\mathbf{p_1},\mathbf{q})+c_2T(\mathbf{p_2},\mathbf{q}),$$

$$T(\mathbf{p},c_1\mathbf{q_1}+c_2\mathbf{q_2})=c_1T(\mathbf{p},\mathbf{q_1})+c_2T(\mathbf{p},\mathbf{q_2}).$$

Пусть $\mathbf{p}=\xi_i\mathbf{i}+\eta_1\mathbf{j}+\zeta_1\mathbf{k},\ \mathbf{q}=\xi_2\mathbf{i}+\eta_2\mathbf{j}+\zeta_2\mathbf{k}$ тогда:

$$\begin{aligned}T(\mathbf{p},\mathbf{q})=&\ \xi_1\xi_2T(\mathbf{i},\mathbf{i})+\xi_1\eta_2T(\mathbf{i},\mathbf{j})+\xi_1\zeta_2T(\mathbf{i},\mathbf{k})+\\&+\eta_1\xi_2T(\mathbf{j},\mathbf{i})+\eta_1\eta_2T(\mathbf{j},\mathbf{j})+\eta_1\zeta_2T(\mathbf{j},\mathbf{k})+\\&+\zeta_1\xi_2T(\mathbf{k},\mathbf{i})+\zeta_1\eta_2T(\mathbf{k},\mathbf{j})+\zeta_1\zeta_2T(\mathbf{k},\mathbf{k}).\end{aligned}$$

Поскольку $T(\mathbf{p},\mathbf{q})$ линейно относительно $\mathbf{p}$ при фиксированном $\mathbf{q}$, этому выражению можно сопоставить дифференциальное выражение $T(\nabla,\mathbf{q})$ (см. определение 1). Обозначим $T(\nabla,\mathbf{q})$ через $u(\mathbf{q})$. При этом $u(\mathbf{q})$ линейно относительно $\mathbf{q}$. Аналогично при фиксированном $\mathbf{p}$ выражению $T(\mathbf{p},\mathbf{q})$ сопоставляется дифференциальное выражение $T(\mathbf{p},\nabla)$. Обозначим его $v(\mathbf{p})$. Величина $v(\mathbf{p})$ линейна относительно $\mathbf{p}$.

Так как $u(\mathbf{q})$ и $v(\mathbf{p})$ линейны относительно своих векторных параметров, то к ним в свою очередь можно применить определение 1, т.е. построить дифференциальные выражения второго порядка $u(\nabla)$ и $v(\nabla)$. Обозначим $u(\nabla)$ через $T(\nabla,\nabla)$. Повторно применив формулу (1), получаем:

$$\begin{aligned}T(\nabla,\nabla)\ =&\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}T(\mathbf{i},\mathbf{i})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}T(\mathbf{i},\mathbf{j})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}T(\mathbf{i},\mathbf{k})+\\&+\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}T(\mathbf{j},\mathbf{i})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}T(\mathbf{j},\mathbf{j})+\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}T(\mathbf{j},\mathbf{k})+\\&+\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}T(\mathbf{k},\mathbf{i})+\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}T(\mathbf{k},\mathbf{j})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}T(\mathbf{k},\mathbf{k}).\end{aligned}\tag{12}$$

Так как функция $T(\mathbf{p},\mathbf{q})=T(\mathbf{p},\mathbf{q};x,y,z)$ непрерывная по аргументам x,y,z вместе с производными, то смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования. Из этого следует, что $T(\nabla,\nabla)$ можно было бы определить и равенством $T(\nabla,\nabla)=v(\nabla)$, поскольку $u(\nabla)=v(\nabla)$. Итак, получаем следующее

Определение 2. Величиной $T(\nabla,\nabla)$, соответствующей $T(\mathbf{p},\mathbf{q})$, называем дифференциальное выражение второго порядка (12), полученное заменой в разложении $T(\mathbf{p},\mathbf{q})$ коэффициентов $\xi_1,\ \xi_2$ оператором дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}$, коэффициентов $\eta_1,\ \eta_2$ — оператором $\frac{\partial}{\partial y}$, коэффициентов $\zeta_1,\ \zeta_2$ — оператором $\frac{\partial}{\partial z}$.

Укажем основные свойства величины $T(\nabla,\nabla)$.

1. Если $T(\mathbf{p},\mathbf{q})=c_1T_1(\mathbf{p},\mathbf{q})+c_2T_2(\mathbf{p},\mathbf{q})$, где $c_1,\ c_2$ произвольные действительные числа, то

$$T(\nabla,\nabla)=c_1T_1(\nabla,\nabla)+c_2T_2(\nabla,\nabla).\tag{13}$$

[6]Поле предполагается непрерывным вместе со всеми частными производными до второго порядка включительно.

Доказательство непосредственно следует из определения 2. В частности, если $T(\mathbf{p},\mathbf{q}) = T_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$, то

$$T(\nabla,\nabla) = T_1(\nabla,\nabla). \tag{13'}$$

2. Если величина $T(\mathbf{p},\mathbf{q})$ такова, что $T(\mathbf{p},\mathbf{p}) = 0$, то

$$T(\nabla,\nabla) = 0. \tag{14}$$

Заметим: второе свойство не является частным случаем первого свойства (при $c_1 = c_2 = 0$). Второе свойство утверждает, что если $T(\mathbf{p},\mathbf{q})$ тождественно обращается в нуль, хотя бы при совпадающих $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, то и этого уже достаточно, чтобы тождественно выполнялось равенство (14).

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$T(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}+\mathbf{q}).$$

В силу линейности $T(\mathbf{p},\mathbf{q})$ относительно своих векторных параметров имеем:

$$T(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}+\mathbf{q}) = T(\mathbf{p},\mathbf{p}) + T(\mathbf{p},\mathbf{q}) + T(\mathbf{q},\mathbf{p}) + T(\mathbf{q},\mathbf{q}).$$

Но по условию $T(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}+\mathbf{q}) = 0$, $T(\mathbf{p},\mathbf{p}) = 0$, $T(\mathbf{q},\mathbf{q}) = 0$, поэтому

$$T(\mathbf{p},\mathbf{q}) + T(\mathbf{q},\mathbf{p}) \equiv 0. \tag{15}$$

Выражение в левой части (15) есть билинейная функция относительно $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$; поэтому в силу свойства 1 и так как смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования

$$T(\nabla,\nabla) + T(\nabla,\nabla) = 0.$$

Откуда и

$$T(\nabla,\nabla) = 0,$$

что и утверждалось.

3. Пусть величины $T(\mathbf{p},\mathbf{q})$, $T_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$, $T_2(\mathbf{p},\mathbf{q})$ таковы, что при $\mathbf{p} = \mathbf{q}$

$$T(\mathbf{p},\mathbf{p}) \equiv c_1 T_1(\mathbf{p},\mathbf{p}) + c_2 T_2(\mathbf{p},\mathbf{p}),$$

тогда

$$T(\nabla,\nabla) = c_1 T_1(\nabla,\nabla) + c_2 T_2(\nabla,\nabla). \tag{16}$$

Доказательство. Рассмотрим билинейную функцию параметров $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$.

$$Q(\mathbf{p},\mathbf{q}) = T(\mathbf{p},\mathbf{q}) - c_1 T_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) - c_2 T_2(\mathbf{p},\mathbf{q}).$$

Из свойства 1 следует, что

$$Q(\nabla,\nabla) = T(\nabla,\nabla) - c_1 T_1(\nabla,\nabla) - c_2 T_2(\nabla,\nabla).$$

По условию $Q(\mathbf{p},\mathbf{p}) = 0$, тогда по свойству 2 получаем, что $Q(\nabla,\nabla) = 0$, т.е.

$$T(\nabla,\nabla) - c_1 T_1(\nabla,\nabla) - c_2 T_2(\nabla,\nabla) = 0,$$

откуда и следует равенство (16). Таким образом свойство 3 доказано.

Важнейшим следствием свойств 2 и 3 является возможность производить с $T(\nabla, \nabla)$ любые операции, допускаемые векторной алгеброй, обращаясь с символом ∇ как с обыкновенным вектором.

Рассмотрим теперь простейшие операции второго порядка. Исходим из дифференциальных операций первого порядка.

$$\operatorname{grad} u = \nabla u, \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = (\nabla, \mathbf{a}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla, \mathbf{a}].$$

Так как $\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ представляют собой векторные поля, то к ним можно применить операции дивергенции и ротора.

1. $T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{p}, \mathbf{q}u) \to (\mathbf{p}, \nabla u) = (\mathbf{p}, \operatorname{grad} u) \to (\nabla, \operatorname{grad} u) = \operatorname{div}\operatorname{grad} u$. Таким образом,

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla u) = (\nabla, \nabla)u.$$

Формула (12) непосредственно дает

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla)u = \Delta u, \tag{17}$$

где Δ (дельта) — дифференциальный оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = (\nabla, \nabla) = \nabla^2. \tag{17'}$$

2. $T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = [\mathbf{p}, \mathbf{q}u] \to [\mathbf{p}, \nabla u] = [\mathbf{p}, \operatorname{grad} u] \to [\nabla, \operatorname{grad} u] = \operatorname{rot}\operatorname{grad} u$. Следовательно,

$$\operatorname{rot}\ \operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla]u = 0, \tag{18}$$

так как векторное произведение вектора на себя дает ноль.

3. $T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{p}, [\mathbf{q}, \mathbf{a}]) \to (\mathbf{p}, [\nabla, \mathbf{a}]) = (\mathbf{p}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) \to (\nabla, \operatorname{rot} \mathbf{a}) = \operatorname{div}\operatorname{rot} \mathbf{a}$, т.е.

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} \mathbf{a} = (\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]) = \nabla\nabla\mathbf{a} = \mathbf{a}\nabla\nabla = (\mathbf{a}, [\nabla, \nabla]) = 0, \tag{19}$$

так как при любом $\mathbf{p}$ $[\mathbf{p}, \mathbf{p}] = 0$.

4. $T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = [\mathbf{p}, [\mathbf{q}, \mathbf{a}]] \to [\mathbf{p}, [\nabla, \mathbf{a}]] = [\mathbf{p}, \operatorname{rot} \mathbf{a}] \to [\nabla, \operatorname{rot} \mathbf{a}] = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{a}$. Таким образом

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]]. \tag{20}$$

5. Так как $\operatorname{div} \mathbf{a}$ — скалярное поле, то к нему можно применить только операцию градиента.

$$T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \to \mathbf{p}(\nabla, \mathbf{a}) = \mathbf{p} \operatorname{div} a \to \nabla \operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{grad}\ \operatorname{div} \mathbf{a},$$

т.е.

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla(\nabla, \mathbf{a}). \tag{21}$$

Между $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{a}$ и $\operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{a}$ имеет место следующее соотношение

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla, \mathbf{a}) - (\nabla, \nabla)\mathbf{a} = \operatorname{grad}\ \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta\mathbf{a}. \tag{22}$$

Исходя из развитой выше теории для вывода соотношения (22) достаточно было просто раскрыть двойное векторное произведение и учесть формулы (17) и (21).

Литература

1. Г. Е. Шилов, Лекции по векторному анализу, М., 1954.

2. П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1953.

3. В. И. Семянистый, В. В. Цукерман, Задачник-практикум по математической теории поля, М., “Просвещение”, 1976.

Цукерман Виталий Владимирович,
кандидат физико-математических наук,
профессор кафедры высшей математики
Московского государственного открытого
педагогического университета.

email: v.tsuckerman@usa.net

Теорема Понселе в евклидовой и алгебраической геометрии

Заславский А. А., Челноков Г. Р.

В статье приведено доказательство классической теоремы Понселе и ее обобщения, а также рассмотрены смежные геометрические вопросы.

Теорема Понселе и близкие геометрические задачи

Одной из самых сложных и красивых теорем элементарной геометрии, безусловно, является теорема Понселе. Напомним ее формулировку и приведем доказательство ([1], №№ 614, 615).

Теорема. Пусть окружность β лежит внутри окружности α. Из точки A окружности α проведем касательную к окружности β и найдем вторую точку A_1 ее пересечения с α. Из точки A_1 проведем касательную к β и найдем вторую точку A_2 ее пересечения с α и т.д. Если для некоторой точки A точка A_n совпадает с A, то это будет выполнено и для любой другой точки окружности α.

Доказательство. Прежде всего докажем следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть внутри окружности α находится окружность β. На α заданы две последовательности точек $A_1, A_2, \dots$ и $B_1, B_2, \dots$, идущие в одном направлении, и такие, что прямые $A_1A_2, A_2A_3, \dots$, $B_1B_2, B_2B_3, \dots$ касаются β. Тогда прямые $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ касаются одной окружности, соосной с α и β.

Доказательство. Пусть для определенности B_1 лежит на дуге A_1A_2, ограничивающей сегмент, не содержащий β. Обозначим точки касания β с прямыми $A_1A_2, A_2A_3, \dots$, $B_1B_2, B_2B_3, \dots$ через $C_1, C_2, \dots$, $D_1, D_2, \dots$ соответственно (рис. 1), K, L, P — соответственно точки пересечения D_1C_1 и A_1B_1, D_1C_1 и A_2B_2, A_1B_1 и A_2B_2.

В треугольниках A_1KC_1 и D_1LB_2 $\angle KC_1A_1 = \angle LD_1B_2$, $\angle C_1A_1K = \angle D_1B_2L$, следовательно, $\angle C_1KA_1 = \angle D_1LB_2$, т.е. треугольник KLP — равнобедренный, $KP = PL$, и существует окружность γ, касающаяся KP и PL в точках K и L.

Аналогично существует окружность, касающаяся A_2B_2 и A_3B_3 в точках L', M пересечения этих прямых с C_2D_2. Для совпадения этой окружности с γ достаточно совпадения точек L и L'. Но $A_2L/LB_2 = S_{A_2C_1D_1}/S_{B_2C_1D_1} = (A_2C_1 \cdot C_1D_1 \cdot \sin\angle A_2C_1D_1)/(B_2D_1 \cdot C_1D_1 \cdot \sin\angle B_2D_1C_1) = A_2C_1/B_2D_1 = A_2C_2/B_2D_2 = A_2L'/B_2L'$.

При этом отношение касательных, проведенных из любой точки α к β и γ, будет одним и тем же, и значит γ соосна с α и β. Лемма 1 доказана.

В обозначениях леммы 1 теорема Понселе означает следующее: если A_{n+1} совпадает с A_1, то B_{n+1} совпадает с B_1. Предположим, что это не так. Тогда A_1B_1 и A_1B_{n+1} касаются γ, A_1A_2 пересекает γ, B_1, B_{n+1} лежат на дуге A_1A_2. Получается, что из A_1 к γ проведены две касательные, причем их точки касания лежат по одну сторону от секущей A_1A_2. Этого быть не может. Теорема доказана.

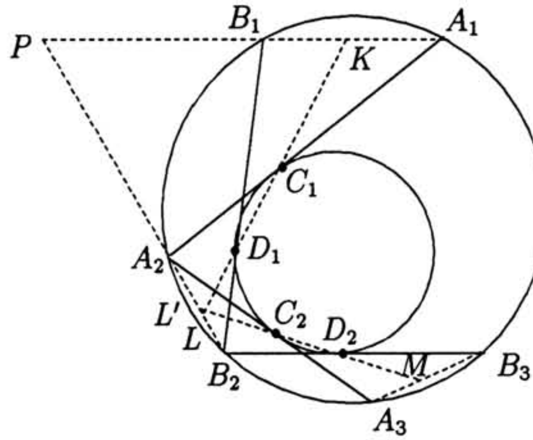


Рис. 1

Теорема Понселе означает, что если некоторый многоугольник вписан в одну окружность и описан около другой окружности, то можно, зафиксировав эти окружности, "вращать" многоугольник между ними. Будем называть такой вращающийся многоугольник многоугольником Понселе. Оказывается, многоугольники Понселе обладают целым рядом интересных свойств.

Прежде всего, изучив приведенное выше доказательство теоремы Понселе, нетрудно заметить, что в лемме 1 соответствующие звенья ломаных A_1A_2... и B_1B_2... могут касаться не одной окружности, а нескольких, соосных друг с другом и внешней окружностью. Поскольку для трех соосных окружностей отношение касательных, проведенных из произвольной точки одной окружности к двум другим, не зависит от выбора точки, доказательство леммы без каких-либо изменений переносится на этот случай. Соответственно, получаем следующее обобщение теоремы Понселе.

Даны $n+1$ соосных окружностей, α и лежащие внутри нее $\beta_1, \dots, \beta_n$. Из точки A окружности α проведена касательная к β_1, вторично пересекающая α в точке A_1, из A_1 проведена касательная к β_2, пересекающая α в A_2 и т.д. Если A_n совпадает с A, то это будет выполняться для любой точки окружности α.

Из обобщенной теоремы Понселе, очевидно,вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ — многоугольник Понселе. Диагонали A_1A_3, $A_2A_4, \dots$, $A_{n-1}A_1$ назовем диагоналями первого типа, диагонали A_1A_4, $A_2A_5, \dots$, $A_{n-2}A_1$ — диагоналями второго типа и т.д. Тогда все диагонали одного типа касаются окружности, соосной с описанной и вписанной окружностями многоугольника.

Особый интерес представляют главные диагонали многоугольника Понселе с четным числом сторон. В этом случае окружность из утверждения 1 вырождается в точку. Точнее, справедливо

Утверждение 2. Главные диагонали 2n-угольника Понселе пересекаются в предельной точке пучка, порожденного его описанной и вписанной окружностями.

Доказательство.

Лемма 2. Пусть окружность β лежит внутри окружности α, A, B — точки α, AB — касается β, M — предельная точка пучка, порожденного α и β, A', B' — вторые точки пересечения прямых AM и BM с α. Тогда $A'B'$ касается β.

Доказательство. Пусть C — точка касания AB и β. Так как $AM/AC = BM/BC$, MC — биссектриса угла AMB. Продолжим MC за точку M до пересечения с $A'B'$ в точке C'. Так как треугольники AMB и $B'MA'$ подобны, $A'C'/AM = B'C'/BM = AC/AM$. По лемме 1 это означает, что отрезки $A'C'$ и $B'C'$ равны касательным, проведенным из A' и B' к β, а это возможно только если прямая $A'B'$ касается β в точке C'.

Теперь утверждение 2 доказывается совсем просто. Действительно, пусть A_0A_1 — сторона вписанно-описанного $2k$-угольника, B_0, B_1 — вторые точки пересечения прямых A_0M, A_1M с α. Покажем, что B_0 совпадает с A_k. Предположим, например, что A_k находится ближе к A_1, чем B_0. Тогда, по лемме 2, B_k находится ближе к B_1, чем A_0, и, следовательно, A_{k+1} ближе к A_0, чем B_1. Таким образом, A_kA_{k+1} не может касаться β. Аналогично разбирается случай, когда A_k находится дальше от A_1, чем B_0.

Отметим, что попутно мы доказали

Утверждение 3. Прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон $2n$-угольника Понселе с вписанной окружностью, проходят через M и являются биссектрисами углов между диагоналями.

На рисунках 2, 3 приведены примеры, иллюстрирующие утверждения 2, 3.

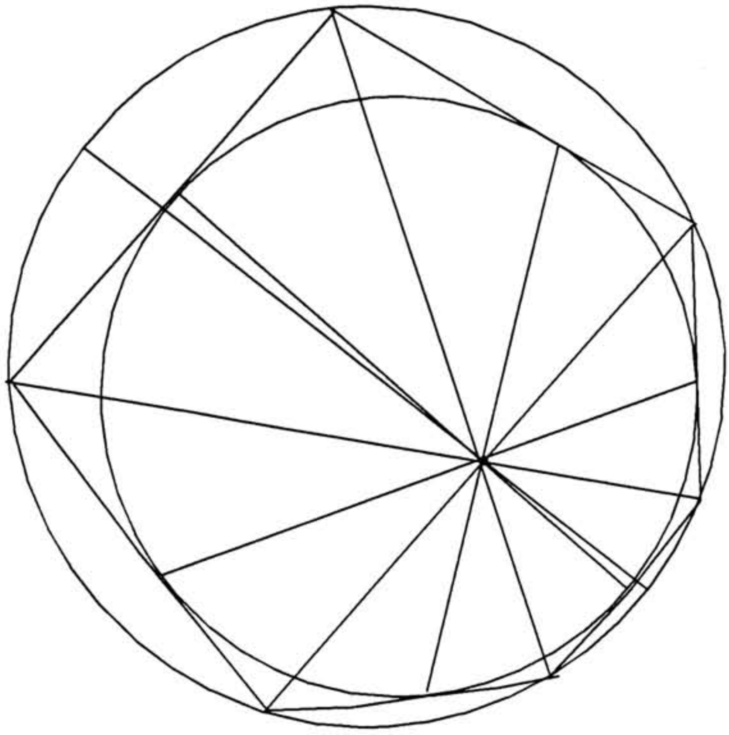


Рис. 2

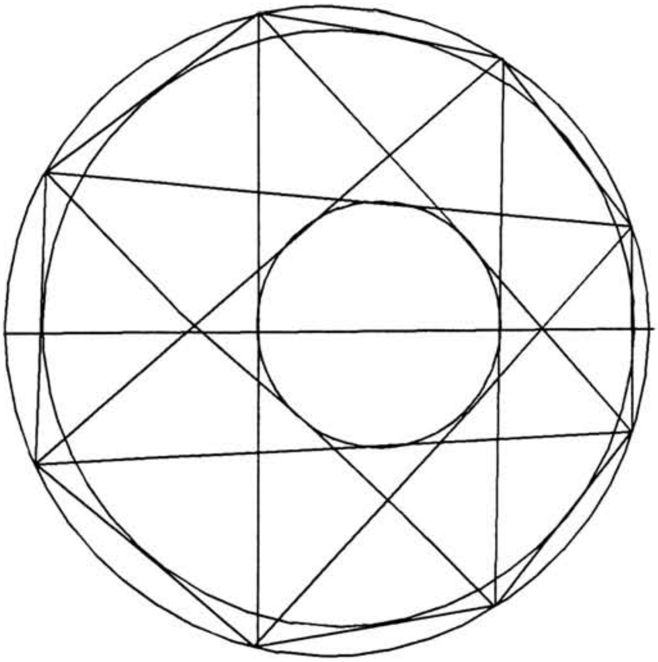


Рис. 3

Обобщенная теорема Понселе дает возможность получать соотношения между радиусами r и R вписанной и описанной окружностей многоугольника и расстоянием d между их центрами. Прежде всего покажем, как, имея n-угольник Понселе, построить $2n$-угольник. Действительно, диагонали первого типа $2n$-угольника образуют два n-угольника с общими вписанной и описанной окружностями. Если взять $2n$-угольник, одна из главных диагоналей которого лежит на линии центров, оба n-угольника будут симметричны относительно этой линии. Поэтому, если дан произвольный n-угольник, то, построив два симметричных n-угольника с теми же вписанной и описанной окружностями, получим вершины вписанно-описанного $2n$-угольника.

Таким образом, проблема построения вписанно-описанных многоугольников сведена к случаю нечетных значений n. Более того, указанный прием позволяет выводить формулу, связывающую значения радиусов R и r описанной и вписанной окружностей и расстояния d между их центрами, для $2n$-угольника, если известна аналогичная формула для n-угольника. Действительно, пусть n- и $2n$-угольники вписаны в окружность радиуса R; r_1, d_1 — радиус вписанной окружности и расстояние между центрами окружностей для n-угольника, r_2, d_2 — для $2n$-угольника. Расположим $2n$-угольник так, чтобы его диагональ A_0A_n лежала на линии центров (рис. 4). Тогда окружность, вписанная в n-угольник, касается прямых, проходящих через точки A_1, A_{n-1} и перпендикулярных линии центров. Введем обозначения $x_i = r_i/(R + d_i)$, $y_i = r_i/(R - d_i)$. Очевидно, что

$$\sin \angle A_1A_0A_n = x_2, \quad \sin \angle A_{n-1}A_nA_0 = y_2,$$

$$A_0B_1 = 2R\cos^2 \angle A_1A_0A_n = 2R(1 - x_2^2), \quad A_nB_{n-1} = 2R(1 - y_2^2)$$

$$r_1 = (2R - A_0B_1 - A_nB_{n-1})/2 = R(x_2^2 + y_2^2 - 1)$$

$$d_1 = R - A_nB_{n-1} - r_1 = R(y_2^2 - x_2^2)$$

и, следовательно,

$$x_1 = (x_2^2 + y_2^2 - 1)/(1 - x_2^2 + y_2^2), \quad y_1 = (x_2^2 + y_2^2 - 1)/(1 + x_2^2 - y_2^2) \tag{1}$$

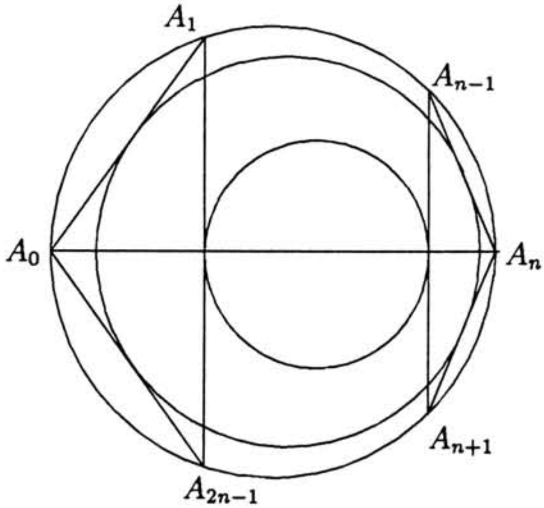


Рис. 4

Теперь, если есть соотношение между x_1 и y_1 вида $f(x_1, y_1) = 0$ (а соотношение между R, r и d всегда можно привести к такому виду), то подставив в него найденные выражения x_1, y_1 через x_2, y_2, получим искомое соотношение между x_2 и y_2. Можно поступить по-другому: решив (1) относительно x_2, y_2, получим:

$$x_2 = \sqrt{(x_1(1+y_1)/(x_1+y_1))}, \quad y_2 = \sqrt{(y_1(1+x_1)/(x_1+y_1))} \tag{2}$$

Если x_1, y_1 заданы параметрически, формулы (2) дают параметрическое выражение для x_2, y_2.

Рассмотрим два примера. Для $n = 3$ имеем формулу Эйлера: $1/r = 1/(R+d) + 1/(R-d)$, т.е. $x + y = 1$ или $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$, $0 < t < \pi/4$. Для $n = 6$ получаем $x = \sin t \cdot \sqrt{1+\cos^2 t}$, $y = \cos t \cdot \sqrt{1+\sin^2 t}$.

Для $n = 4$ имеем $x = \sin t$, $y = \cos t$.

Для n=8 получаем $x = \sqrt{\dfrac{\sin t \cdot (1+\cos t)}{(\sin t + \cos t)}}$, $y = \sqrt{\dfrac{\cos t \cdot (1+\sin t)}{(\sin t + \cos t)}}$.

Продолжая этот процесс, можно получить формулы для всех n вида 2^k и $3 \cdot 2^k$. Но указанный прием позволяет выводить формулы и для нечетных n. Покажем это на примере $n = 5$.

Пусть R — радиус описанной окружности пятиугольника, r_1, r_2 — радиусы окружностей, касающихся соответственно его сторон и диагоналей, d_1, d_2 — расстояния от центров этих окружностей до центра описанной (рис. 5). Определив величины x_i, y_i и рассуждая, как при выводе формулы (1), получим:

$$x_2 = (x_1^2 + y_1^2 - 1)/(1 - x_1^2 + y_1^2), \quad y_2 = (x_1^2 + y_1^2 - 1)/(1 + x_1^2 - y_1^2)$$

$$x_1 = (1 - x_2^2 - y_2^2)/(1 - x_2^2 + y_2^2), \quad y_1 = (1 - x_2^2 - y_2^2)/(1 + x_2^2 - y_2^2)$$

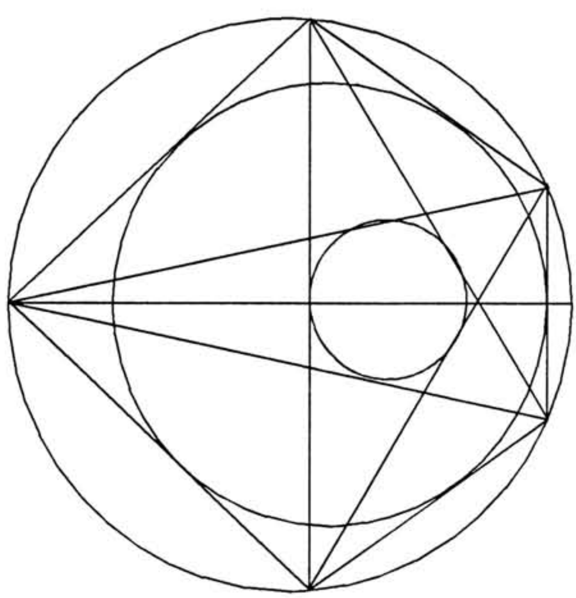


Рис. 5

Решив вторую пару уравнений относительно x_2, y_2, приравняв два выражения для x_2, возведя в квадрат и избавившись от знаменателя, получим (индекс 1 можно отбросить)

$$x(1-y)(1-x^2+y^2)^2 - - - (x+y)(x^2+y^2-1)^2 = 0$$

Непосредственная проверка показывает, что это уравнение обращается в тождество при $x=-1$, $y=0$, $x+y=1$. Разделив на соответствующие множители, получим искомое соотношение:

$$(x+y-1)(x+y+1)^2 = 4xy(x+y)$$

При $n>5$ приходится рассматривать не две, а больше вписанных окружности. Соответственно усложняются и полученные соотношения.

Дальнейшее изучение многоугольников Понселе чисто геометрическими методами представляется затруднительным. Более эффективными оказываются средства алгебраической геометрии. Для начала покажем, как с помощью этих средств получить другое доказательство теоремы Понселе.

Введем на плоскости систему координат, начало которой совпадает с центром описанной окружности, а ось абсцисс — с линией центров. Пусть R, r — радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей, d — расстояние между их центрами, так что центр вписанной окружности имеет координаты $(d,0)$. Координаты точек большой окружности можно задать формулами $x=R(1-t^2)/(1+t^2), y = R\cdot 2t/(1+t^2)$, причем соответствие между точками окружности и значениями t будет взаимнооднозначным, если считать, что точке $(-R,0)$ соответствует $t=\infty$. Такой способ задания кривой называется ее рациональной параметризацией. Пусть $t_0,t_1,\ldots,t_{n-1}$ — значения параметра t, соответствующие вершинам многоугольника. Выведем соотношение, связывающее t_0 и t_1. Для этого напишем уравнение прямой A_0A_1 и используем, что расстояние от точки $(d,0)$ до этой прямой равно r. В результате получим

$$((R+d)^2-r^2)t_0^2t_1^2 - r^2(t_0^2+t_1^2) + 2(R^2-d^2)t_0t_1 + ((R-d)^2-r^2) = 0$$

Мы видим, что значения t_0 и t_1 удовлетворяют уравнению $P(t_0,t_1)=0$, имеющему вторую степень по каждой переменной. В дальнейшем нас про него только это и будет интересовать. Однако сначала отметим, что этот факт про многочлен P можно было установить без всяких вычислений.

В самом деле, наше уравнение мы получили, записав, что прямая, проходящая через точки со значением параметра t_0 и t_1 касается второй окружности. Но верно и обратное утверждение: если числа x и y удовлетворяют уравнению, то соответствующая прямая касается окружности. Если бы уравнение $P(x,y)=0$ имело степень $n\geq 3$ по y, тогда зафиксировав значение t_0, мы получили бы уравнение на t_1 степени n. Оно имеет n корней в комплексных числах, что невозможно — из точки t_0 можно провести не более 2 касательных. Аналогично, степень уравнения по x не может быть больше 2.

Теперь исследуем соотнощение между t_0 и t_2. Из системы $P(t_0,y)=0, P(y,t_2)=0$ можно вывести, что оно имеет вид $P_2(t_0,t_2)=0$, где P_2 имеет степень 4 по каждой из переменных. Однако можно рассуждать, как в случае с P: по точке t_0 можно построить 2 разные точки t_2, и точку t_2 можно построить из 2 разных точек t_0, следовательно степень по каждой из переменных — 2.

Противоречие? Нет! Пусть мы решаем систему $P(x,y)=0$, $P(y,z)=0$. По точке x мы можем построить 2 различные точки y, по y — 2 различные точки z. Значит, по x мы можем построить 4 точки z (отсюда 4 степень по z), но 2 из них всегда будут совпадать с исходным x. Они получаются, если из точки x пойти в любом из двух направлений, а потом вернуться назад. Поскольку такие пути нас не интересуют, мы можем разделить наш многочлен на $(x-z)^2$ (он разделится, поскольку, как отмечалось выше, для любого x, $z=x$ является его корнем кратности 2, если рассматривать его как многочлен от z). Результат деления — многочлен степени 2 по каждой из переменных, отвечающий за 2 пути из точки x без возвратов.

Итак, мы видим, что многочлены P_1 и P_2 имеют степень два по каждой из переменных. Естественно предположить, что это же верно для P_n (многочлена, связывающего t_0 и t_n) при любом n. В самом деле, для любой точки x мы можем по ней построить не более 2 различных образов. Следовательно, степень P_n по второй переменной равна 2. Аналогично равна 2 степень по первой переменной.

Для тех, кому такое рассуждение все еще кажется непривычным, предлагаем провести непосредственное доказательство по индукции.

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы Понселе. Пусть, начав из некоторой точки t_0, мы на n-ном шаге вернулись в нее. Это означает, что выполнена следующая система уравнений: $P_n(t_0,t_n)=0$, $t_0=t_n$. Подставив второе уравнение в первое, получаем уравнение степени, не выше 4 от одной переменной, t_0 является его корнем. Однако очевидно, что его корнями являются также $t_1,t_2,\dots$ и т. д. Однако если у полиномиального уравнения корней больше, чем его степень, то оно тождественно равно нулю, и все числа являются его корнями, что при $n\geq 5$ доказывает теорему Понселе.

Далее можно показать, что все корни полученного уравнения комплексные, что и докажет теорему для всех n. Удобнее, однако, провести это рассуждение в другой терминологии. Прежде всего заметим, что в теореме Понселе речь идет о точках пересечения прямых и касания их с окружностями, т.е. теорема носит проективный характер. Правда, при проективных преобразованиях окружность может перейти в какое-нибудь другое коническое сечение, поэтому теорема Понселе и все связанные с ней утверждения в дальнейшем будут формулироваться для коник.

Удобно также считать, что плоскость, на которой расположены рассматриваемые коники и прямые, комплексная и проективная (т.е дополнена бесконечно удаленной прямой, в точках которой пересекаются параллельные прямые обычной плоскости). Тогда прямая и коника всегда пересекаются в двух точках, а две коники в четырех. Например, две окружности пересекаются в двух бесконечно удаленных точках — $(1:i:0)$ и $(1:-i:0)$ и двух обычных, которые могут быть действительными или комплексными. Пучку соосных окружностей при этом соответствует пучок коник, проходящих через четыре фиксированные точки.

Прежде чем двигаться дальше, давайте попытаемся себя запутать. Возьмем две коники так, что начав из некоторой точки на O_1, мы через 5 ходов не вернемся в нее (так, очевидно, можно сделать). Запишем систему, означающую, что начав из точки t_0, замкнемся через 5 ходов: $P_5(t_0, t_5) = 0$, $t_0 = t_5$ (*). После подстановки второго уравнения в первое имеем полиномиальное уравнение с одной переменной, а оно в комплексных числах должно иметь решение. Но если оно имеет решение, то по только что доказанной теореме все точки являются его решениями, что противоречит выбору коник.

Где обман? Чтобы понять это, выработаем более наглядный язык, чтобы говорить о нашей ситуации. Будем говорить, что из точки t_0 на конике α в точку t_1 ведет стрелка, если хорда t_0t_1 касается коники β. Тогда из каждой точки ведет две стрелки, и все стрелки двусторонние - если из t_0 идет стрелка в t_1, то из t_1 идет стрелка в t_0. Тогда то, что точка t_0 удовлетворяет системе (*) означает следующее: если мы из t_0 по некоторой стрелке пойдем в точку t_1, из нее по другой стрелке пойдем в точку t_2, и так далее, то точка t_5 совпадет с t_0. Означает ли это, что точка t_1 также есть решение системы (*)? Из t_1 можно по стрелке попасть в t_2, из t_2 можно по другой стрелке попасть в t_3, из t_3 по другой стрелке попасть в t_4, из t_4 по другой стрелке попасть в t_0, а из t_0 можно попасть в t_1, но не обязательно стрелки t_0t_1 и t_0t_4 - разные стрелки. Если это одна и так же стрелка, то t_1 совпадает с t_4, тогда t_2 совпадает с t_3, поскольку из t_1 ведет только две стрелки, тогда из t_2 ведет стрелка в нее же саму. Назовем точку, из которой стрелка ведет в нее саму первой *дикой точкой*. Первые дикие точки должны существовать, поскольку они есть решения уравнения $P_1(t_0, t_0) = 0$, которое должно в комплексных числах иметь 4 решения. У этих точек есть и некоторый "геометрический" смысл. Если бы окружности α и β были расположены одна вне другой, то у них были бы 4 общие касательные. 4 точки касания этих касательных с окружностью α и были бы четырьмя первыми дикими точками. В традиционном случае расположения 4 общие касательные тоже существуют, только они комплексные.

Используя 4 первые дикие точки легко построить 4 решения уравнения $P_5(t_0, t_0) = 0$, да и любого уравнения $P_n(t_0, t_0) = 0$ для нечетного n. А как быть с четным?

Попробуем для случая $n = 6$ провести аналогичные рассуждения. Пусть у нас есть точки $t_0, t_1, ..., t_5$, такие, что пары $(t_0, t_1), (t_1, t_2), ..., (t_5, t_0)$ соединены стрелками, причем разными являются стрелки (t_0, t_1) и (t_1, t_2), (t_1, t_2) и (t_2, t_3), и так далее, до пары стрелок (t_4, t_5) и (t_5, t_0). Если стрелки (t_5, t_0) и (t_0, t_1) тоже разные, то все точки $t_0, ..., t_5$ являются решениями уравнения $P_6(x, x) = 0$. Значит, эти стрелки суть одна, тогда $t_1 = t_5$ откуда $t_2 = t_4$. Но тогда из t_3 мы вернулись в ту же точку, из которой в нее пришли. Это возможно, только если из t_3 обе стрелки ведут в t_2.

Когда такое может быть? "Алгебраически" все вполне понятно: если t_3 — такая точка, что уравнение $P_1(t_3, x) = 0$ имеет кратные корни по x. Попробуем выяснить "геометрический" смысл. Представим себе, что мы двигаем точку по окружности α в точку t_3. При этом две касательные к окружности β должны слиться в одну. Это, очевидно, произойдет если и только если точка t_3 есть пересечение окружностей α и β.

По аналогии с предыдущим случаем назовем точки, из которых ведет двойная стрелка, *нулевыми дикими* точками. Используя их, легко построить 4 решения системы $P_{2n}(t_0, t_{2n}) = 0$, $t_0 = t_{2n}$.

Итак 4 решения есть всегда, причем для классического случая они комплексные. Так что, если есть еще одно действительное решение, то все точки являются решениями.

Подытожим наши рассуждения общей формулировкой теоремы Понселе.

Коникой называется множество нулей неприводимого многочлена второй степени от двух переменных.

Теорема. На плоскости даны коники α и β. Из точки A коники α проведем касательную к коники β и найдем вторую точку A_1 ее пересечения с α. Из точки A_1 проведем касательную к β и найдем вторую точку A_2 ее пересечения с α и т.д. Если для пяти различных точек A точка A_n совпадает с A, то это будет выполнено и для любой другой точки коники α.

Приведенное доказательство дословно переносится на общий случай, если иметь в виду следующие факты. У любой коники есть рациональная параметризация, коника пересекается с любой прямой не более, чем по двум точкам, из любой точки к конике можно провести не более двух касательных.

Обобщение теоремы Понселе

Посмотрим, нельзя ли доказать обобщенную теорему аналогичными рассуждениями. Сразу отметим возникающую трудность: наши рассуждения были принципиально комплексными, в формулировке же обобщения существенно используется ориентация, которую нельзя ввести на комплексной окружности.

Итак, начнем доказывать теорему, которую (пока) не можем сформулировать.

Сначала напомним, что окружности, имеющие общую радикальную ось, в комплексных числах описываются очень просто: это все окружности, проходящие через 4 заданные точки, две из которых — те две бесконечно удаленные точки, через которые проходит любая окружность, две другие — те точки, в которых радикальная ось пересекает одну из окружностей (они, очевидно, должны принадлежать и всем остальным). Такое множество окружностей называется пучком.

Параметризуем внешнюю окружность. Как отмечалось выше, существует такой многочлен от двух переменных P_1, что если из точки x, проводя касательную к первой внутренней окружности, можно получить точку y, то $P_1(x, y) = 0$. Назовем этот многочлен многочленом одного шага. Аналогичный многочлен для второй внутренней окружности обозначим P_1'. Имеем систему $P_1(x, y) = 0$, $P_1'(y, z) = 0$. Исключив из нее y получим, что есть некоторый многочлен P_2, связывающий x и z, четвертой степени по каждой из переменных. Докажем, что этот многочлен разлагается в произведение двух многочленов P_2' и P_2'', степени 2 по каждой из переменных, каждый из которых есть многочлен одного шага для некоторой окружности из того же пучка.

Докажем приводимость. Пусть есть многочлен от двух переменных x и y. Значение x такое, что при нем некоторые корни многочлена по y кратные, будем называть точкой ветвления. Зафиксируем любое значение x, не являющееся точкой ветвления. Отметим для него все корни многочлена по y. Теперь будем непрерывно менять значение x, не проходя через точки ветвления. Корни при этом тоже будут непрерывно меняться. Протащим x по петле. Корни при этом перейдут в себя (как множество, но, возможно, переставятся). Стандартный факт из теории Галуа: или многочлен приводим, или, таская x, любой корень можно переставить в любой. При этом, очевидно, нас интересуют только петли, охватывающие какие-нибудь точки ветвления — остальные ничего не переставляют. Значит достаточно разобраться с петлями, охватывающими одну точку ветвления — остальные петли можно соорудить из таких.

Разберемся с точками ветвления многочлена P_2. Напомним, его "геометрический смысл": точке x соответствуют точки y_1 и y_2, y_1 соответствуют $z_{(1,1)}$ и $z_{(1,2)}$, y_2 соответствуют $z_{(2,1)}$ и $z_{(2,2)}$. Напомним, что точки ветвления каждого из этих соответствий одни и те же — это точки пересечения коник в пучке. Причем далее мы будем считать, что все эти 4 точки различны — вырожденный случай, когда некоторые точки совпадают, сводится к невырожденному.

Точки ветвления бывают трех типов: 1) y_1 совпало с y_2, это означает, что x попало в точку ветвления отображения f, тогда $z_{1,1}$ совпало с $z_{2,1}$ и $z_{1,2}$ совпало с $z_{2,2}$. Сразу отметим, что при этом y_1 (он же y_2) не мог попасть в точку ветвления, поэтому $z_{1,1}$ (он же $z_{2,1}$) находится "далеко" от $z_{1,2}$ (он же $z_{2,2}$); 2) y_1 не совпало с y_2, но у одного из игреков совпали образы, например $z_{1,1}$=$z_{1,2}$. Это означает, что y_1 попало в точку ветвления; 3) y_1 не совпало с y_2, но у двух разных игреков совпали зеты, например $z_{1,1}$=$z_{1,2}$.

Пусть x обходит точку ветвления первого типа, тогда y_1 переставляется с y_2, значит $z_{1,1}$ и $z_{1,2}$ перешли (как множество) в $z_{2,1}$ и $z_{2,2}$. Но заметим, что, поскольку игреки не попали в точку ветвления, $z_{1,1}$ находится далеко от $z_{1,2}$, поэтому возможна только перестановка в парах ($z_{1,1}$,$z_{2,1}$) и ($z_{1,2}$,$z_{2,2}$). Заметим, что здесь в чисто алгебраических рассуждениях было использовано такое понятие анализа, как близость точек. Однако это рассуждение можно было бы провести, не выходя за пределы чисто алгебраических понятий.

Пусть x обходит точку ветвления второго типа. Как уже отмечалось, если соответствие f переводит x в y, то y оно переводит в x. Если y делает один оборот вокруг точки ветвления y_0, то его образы (они же – прообразы) x_1 и x_2 делают по пол-оборота вокруг x_0 – образа-прообраза точки ветвления y_0. Значит, если x делает один оборот вокруг x_0, то y_1 делает два оборота вокруг y_0, значит $z_{1,1}$ и $z_{1,2}$ дважды переставились между собой, то есть остались на месте. Итак, обход вокруг точки ветвления второго типа не переставляет корни.

Пусть x обходит точку ветвления третьего типа. y_1 не может переставится с y_2, $z_{1,1}$ является образом y_1 а $z_{2,1}$ – образом y_2, следовательно, и они не могут переставиться.

Итак, четыре корня разбиваются на две пары, только внутри которых корни могут переставляться. Следовательно, многочлен 4 степени представляется в виде произведения 2 многочленов второй степени. Осталось доказать, что каждый множитель задается окружностью из того же пучка.

Рассмотрим множество всех алгебраических отображений окружности в себя, которые:

(*) взаимно-двузначны,

(**) симметричны,

(***) имеют данные 4 точки ветвления.

Это множество, очевидно, алгебраическое, притом имеет размерность 1. У него есть подмножество — отображения, задающиеся окружностью из пучка, проходящего через 4 данные точки. Это подмножество тоже алгебраично, и тоже имеет размерность 1, то есть является алгебраической компонентой.

Мы рассматриваем операцию композиции отображений (двузначную). Она, очевидно, является алгебраической. Нам требуется доказать, что она сохраняет компоненту. Как алгебраическое отображение многообразия размерности 1 в себя, операция композиции действует на компонентах. Но тогда, поскольку некоторые композиции сохраняют компоненту (например, композиция окружности с собой), ее сохраняют все композиции.

Таким образом, композиция нескольких окружностей – это одно из конечного числа отображений, каждое из которых задается окружностью. Если отображение, задаваемое окружностью имеет 5 различных неподвижных точек, то все его точки неподвижны (многочлен 4 степени имеет не больше 4 различных корней).

Итак, доказано следующее утверждение. Даны $n+1$ коник из одного пучка, α и $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Из точки A коники α проведена касательная к β_1, вторично пересекающая α в точке A_1, из A_1 проведена касательная к β_2, пересекающая α в A_2 и т.д. Если для пяти различных точек A. A_n совпадает с A при одинаковом способе проведения касательных (то есть, если одну систему касательных можно получить из другой непрерывным изменением начальной точки) то это будет выполняться для любой точки коники α при том же способе проведения касательных.

Теперь мы можем перейти к формулировке близких фактов.

Пусть даны две окружности, для которых существует n-угольник Понселе (то есть n-угольник, вписанный в одну и описанный около другой). Пусть точка X – центр тяжести вершин многоугольника Понселе для этих окружностей. Тогда ГМТ таких точек X есть окружность.

Доказательство. Пусть внешняя окружность рационально параметризована и $t_0, t_1, t_{-1}, \ldots$ – значения параметров, соответствующих вершинам многоугольника. Тогда из уравнения, связывающего t_0 и t_i по теореме Виета найдем $t_i + t_{-i}$ и $t_i * t_{-i}$. Затем выразим через t_0 суммы координат соответствующих вершин и, просуммировав по i, найдем координаты центра тяжести. Они будут иметь вид $x = P(t_0)/Q(t_0)$, $y = R(t_0)/S(t_0)$.

Утверждение 1: $S = Q$ и $degQ = 2n$. В самом деле, знаменатель рациональной функции определяется ее полюсами, центр тяжести уходит на бесконечность только если одна из точек n-угольника попала в одну из 2 бесконечных точек окружности. То есть Q и S имеют корни именно в этих $2n$ точках. Теперь, выбрав параметризацию, добьемся, чтобы при t_0, стремящемся к бесконечности, центр тяжести на бесконечность не уезжал. Если картинка действительная, то и выбирать нечего — любая параметризация с действительными коэффициентами подходит. Отсюда степени P и R не больше степени Q. Теперь посмотрим, в скольких точках наша кривая может пересекаться с произвольной прямой. Подставив в уравнение прямой рациональные функции степени $2n$, получим уравнение степени $2n$ на t_0, у него $2n$ корней, но каждой точке кривой соответствуют n значений параметра, значит точек на кривой две, (вариант рассуждения: функции степени $2n$ с совпадающими знаменателями параметризуют кривую степени $2n$, но кривая взята с кратностью n (мы нашу окружность на нее n раз намотали), посему степень 2). Итак, наша кривая с каждой прямой пересекается по 2 точкам, то есть она 2-го порядка. Теперь посмотрим, где она пересекает бесконечно удаленную. Если $n-1$ точка стремятся к конечному пределу, а одна - к бесконечному, то центр тяжести едет на бесконечность в том же направлении. Итак, наша коника пересекает бесконечно удаленную прямую в тех же 2 точках, в которых ее пересекает любая окружность, а значит и она — окружность.

Будем теперь вращать два n-угольника $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ так, что A_1B_1 (а значит и A_iB_i при любом i) все время касается некоторой окружности из того же пучка. По доказанному выше, центры тяжести A и B многоугольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ при этом движутся по одной и той же окружности.

Утверждение: хорда AB всегда касается некоторой окружности.

Доказательство. Фактически требуется доказать, что соответствие, переводящее центр тяжести первого n-угольника в центр тяжести второго взаимнодвузначно, симметрично и имеет двумя из своих четырех точек ветвления бесконечно удаленные точки окружности.

ГМТ центров масс n-угольников есть окружность, по точке A на этой окружности (центру масс) n-значно восстанавливается вершина n-угольника A_1, по ней двузначно восстанавливается B_1 и, тем самым, n-угольник $B_1...B_n$; по нему однозначно получим его центр тяжести.

Таким образом, имеем соответствие из окружности в нее же (по одному центру тяжести строим другой). Оно, очевидно, симметрично и двузначно в обе стороны. Если центр тяжести A ушел на бесконечность, то на бесконечность ушел и один из возможных кандидатов в точки A_1, строим по нему B_1, проводя касательную к той окружности, которой должна касаться прямая A_1B_1; касательная получается двойная, что и требовалось доказать.

Из двух последних утверждений вытекает следующий красивый факт. Возьмем kl-угольник Понселе. Раскрасим его вершины периодически в k цветов. Тогда центры тяжести полученных k одноцветных l-угольников сами образуют k-угольник Понселе (рис. 6).

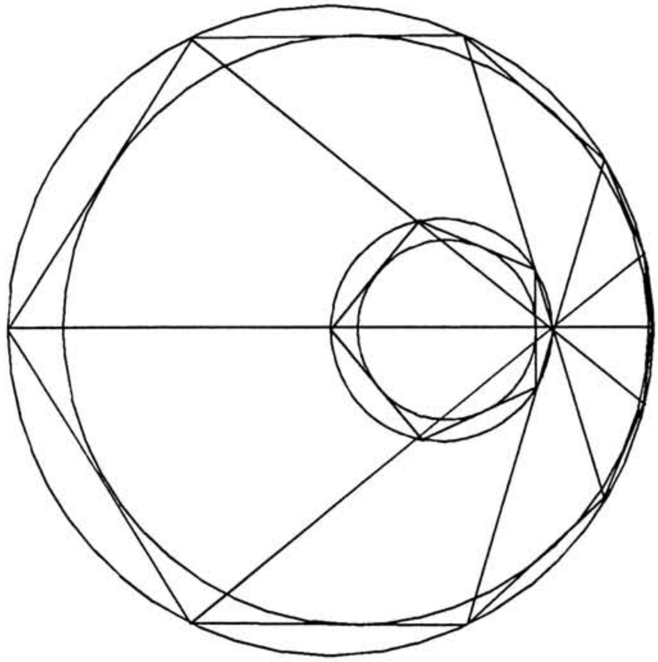


Рис. 6

Исследуем теперь траекторию центра тяжести точек касания сторон с вписанной окружностью. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что он должен двигаться по некоторой окружности. Однако, оказывается, что верен более интересный факт: он вообще не движется.

Доказательство. Если центр тяжести точек касания движется, то его траектория должна пересекать бесконечно удаленную прямую. Очевидно, это может происходить только тогда, когда на бесконечность уходит одна из точек касания. Но в бесконечно удаленных точках вписанная и описанная окружности пересекаются, следовательно, для того чтобы точка касания, например стороны A_1A_2 с вписанной окружностью, ушла на бесконечность, в ту же точку должен уходить один из концов этой стороны, например A_1, а значит, и точка касания с вписанной окружностью стороны A_1A_n. При этом обе точки касания движутся на бесконечность в противоположных направлениях, и поведение центра тяжести определяется поведением середины соединяющего их отрезка.

Воспользуемся теперь тем, что середина отрезка, соединяющего точки касания двух прямых с окружностью, является образом при инверсии относительно этой окружности точки пересечения этих прямых. Введя стандартную параметризацию описанной окружности и использовав хорошо известные формулы для инверсии, нетрудно убедиться, что когда точка A_1 стремится к бесконечности, ее инверсный образ стремится к некоторому конечному пределу. Таким образом, центр тяжести точек касания не уходит на бесконечность и, следовательно, остается неподвижным.

Симметрические многочлены Виета от $t_0, .., t_{n-1}$ есть рациональные функции от t_0 (когда мы "вращаем" n-угольник, значения этих многочленов как-то меняются).

Причем они все линейно выражаются друг через друга. Например, существуют такие числа a и b, что $s_2 = a * s_1 + b$ при любом t_0.

Доказательство. То, что значение многочлена рационально выражается через t_0, очевидно. Доказательство того, что все эти функции линейно зависимы, аналогично доказательству факта про движение центра масс. Рассмотрим две функции f_i и f_j, они имеют одни и те же n простых полюсов, значит, знаменатели степени $n-1$ (один полюс на бесконечности) причем равные, числители степени n.

Посмотрим на кривую с параметризацией $x = f_i(t), y = f_j(t)$. С любой прямой она пересекается не более, чем при n значениях t — это легко усмотреть из степени уравнения, которое получится при подстановке параметризации в линейное уравнение. Но каждой точке на этой кривой соответствует n значений t, значит, кривая степени 1.

Тривиальное следствие. Если на конфигурации Понселе задать такую параметризацию внешней окружности, при которой симметрия относительно общей оси симметрии двух окружностей есть переход от t к $-t$, то все четные многочлены — константы, а все нечетные пропорциональны друг другу.

Пусть $R(x)$ — рациональная функция. Тогда многочлены Виета от $R(t_0), \ldots, R(t_{n-1})$ есть рациональные функции от t_0. Докажите, что они все линейно выражаются друг через друга. Например $s_2 = a * s_1 + b$ при любом t_0.

Обобщение предыдущего утверждения, доказывается совершенно аналогично.

Рассмотрим теперь вместо параметров $t_0, t_1, \ldots$ длины касательных $d_0, d_1, \ldots$, проведенных из вершин многоугольника к вписанной окружности. Очевидно, что каждая из этих длин определена с точностью до знака, но если выбран знак, например, для d_0, то знак d_1 определяется однозначно, ибо длина стороны A_0A_1 тоже определена с точностью до знака. Кроме того, d_0 и d_1 связаны соответствием, которое, очевидно, алгебраично, симметрично и взаимнодвузначно. Следовательно, многочлены Виета от d_i обладают тем же свойством, что и многочлены от t_i, а именно, четные многочлены — константы, а нечетные пропорциональны друг другу. Отсюда нетрудно вывести следующее утверждение.

Рассмотрим действительную конфигурацию Понселе для некоторого n. Тогда, очевидно, есть два n-угольника, симметричных относительно линии центров двух окружностей. Один из них имеет максимальный периметр среди всех n-угольников этой конфигурации, а другой — минимальный.

Доказательство. Полупериметр n-угольника, очевидно, есть сумма длин касательных из всех вершин к внутренней окружности. Его квадрат равен сумме квадратов длин этих касательных и удвоенного второго многочлена Виета от них, значение которого, как доказано выше, постоянно. Но, использовав стандартную параметризацию окружности, нетрудно убедиться, что сумма квадратов длин касательных является линейной функцией от абсциссы центра тяжести многоугольника. Эта абсцисса принимает максимальное и минимальное значение в точках пересечения окружности, по которой движется центр тяжести с осью симметрии, т.е. в точках, которые соответствуют симметричным многоугольникам.

И, в заключение, еще одна задача. Из обобщенной теоремы Понселе следует, что можно вращать вписанный в конику треугольник так, чтобы каждая его сторона все время касалась некоторой коники из данного пучка. Параметризуем некоторым образом коники пучка. Тогда параметры трех коник, касающихся сторон треугольника, должны быть связаны каким-то соотношением. Получить его можно из следующих соображений.

Прежде всего отметим, что без ограничения общности коники можно считать окружностями (две из четырех определяющих пучок точек можно перевести в соответствующие бесконечно удаленные). Будем считать, что центр внешней окружности совпадает с началом координат, ее радиус равен 1, а центры остальных окружностей лежат на оси абсцисс. Тогда пучок параметризуется координатой d центра принадлежащей ему окружности.

Очевидно, что соотношение между d_1, d_2, d_3 является симметричным и имеет степень 2 по каждой переменной. Поэтому его можно записать в виде $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$, где P — многочлен второй степени, а σ_1, σ_2, σ_3 — многочлены Виета от d_1, d_2, d_3. Далее, если одна из трех коник совпадает с внешней, то две другие совпадают друг с другом, поэтому при $d_3 = 0$ имеем $P = (d_1 - d_2)^2$, т.е., с учетом симметричности $P = \sigma_3(a\sigma_3 + b\sigma_2 + c\sigma_1 + d) + \sigma_1^2 - 4\sigma_2$. Если подставить сюда $d_1 = d_2 = d_3 = t$, то получим уравнение 6 степени относительно t. Два из его корней равны нулю, а 4 остальных можно найти, исключая r из следующей системы: $t^2 = 1 - 2r$ (формула Эйлера для треугольника), $l^2 - 1 = (l - t)^2 - r^2$ (условие соосности), где l — абсцисса точки пересечения линии центров и радикальной оси.

В результате получаем

$$P = (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 8l\sigma_3 - 4\sigma_2.$$

Можно рассуждать и по-другому. Среди коник пучка есть три вырожденные, т.е. распадающиеся на пару прямых, соединяющих задающие пучок точки. Касательными к таким коникам являются прямые, проходящие через их центр. Очевидно, что если подставить в уравнение $P = 0$ значения d_1 и d_2, соответствующие каким-нибудь вырожденным коникам (при выбранной нами параметризации они равны ∞, $l + \sqrt{l^2 - 1}$ и $l - \sqrt{l^2 - 1}$), то корни полученного уравнения относительно d_3 будут равны. Отсюда легко найти коэффициенты P.

Литература

1. И. Ф. Шарыгин. Задачник по планиметрии. М., издательство "Дрофа", 1996.

Педальный треугольник (окончание)

А. Руинский

Окончание статьи А. Руинского о задачах, связанных с педальным треугольником, и смежных геометрических вопросах. Начало в №3(18), 2001 г.

Глава 3. Окружности Схоуте

(А) Окружности Аполлония и окружности шести точек.

Пусть дан $\triangle ABC$ и некоторая точка X. Покажем как с помощью окружностей Аполлония $\triangle ABC$ можно построить точки, педальный треугольник которых подобен педальному треугольнику точки X.

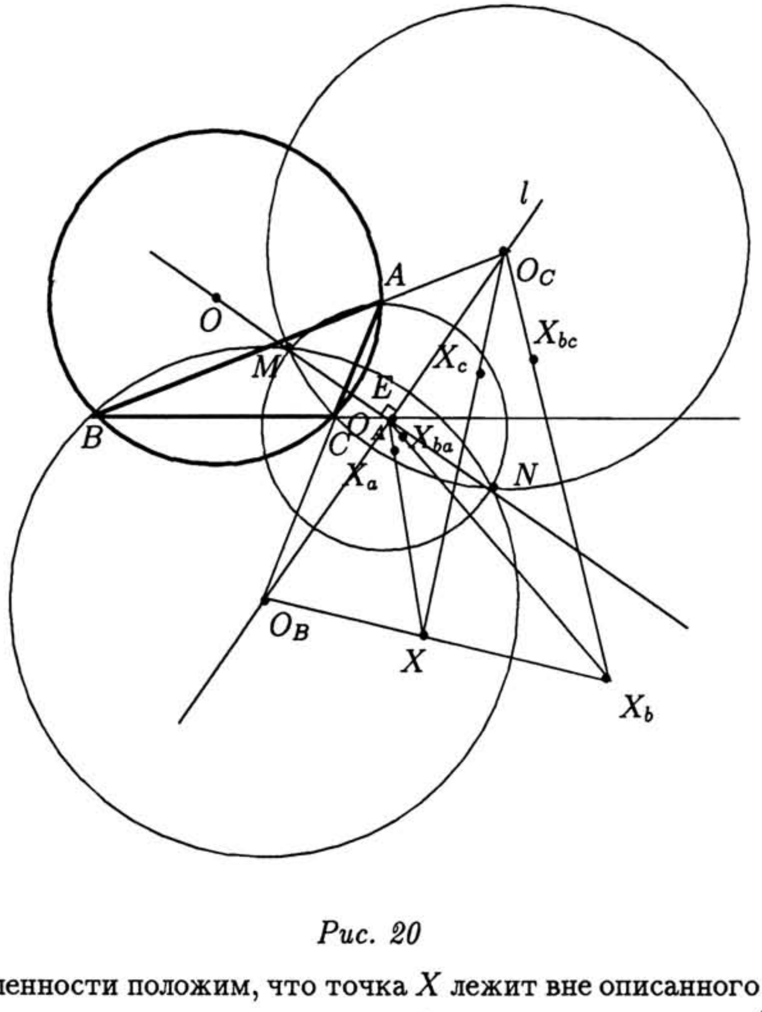


Рис. 20

Для определенности положим, что точка X лежит вне описанного круга $\triangle ABC$. Поскольку описанная окружность ортогональна всем окружностям Аполлония вершин $\triangle ABC$ (см. доказательство теоремы 2), то и все образы точки X относительно

$O_A(r_A)$, $O_B(r_B)$ и $O_C(r_C)$ лежат также вне описанного круга $\triangle ABC$. Обозначим образы точки X относительно $O_A(r_A)$, $O_B(r_B)$ и $O_C(r_C)$ соответственно X_a, X_b и X_c. Образы точки X_b относительно $O_A(r_A)$ и $O_C(r_C)$ обозначим как X_{ba} и X_{bc}. По теореме 5 педальные треугольники точек X_a, X_b, X_c, X_{ba} и X_{bc} подобны педальному треугольнику точки X. Очевидно, окружность, проходящая через X, X_a, X_b ортогональна $O_A(r_A)$ и $O_B(r_B)$ и ее центр лежит на радикальной оси этих окружностей (MN). Но тогда эта окружность ортогональна и $O_C(r_C)$, и поэтому X_c также лежит на ней. Аналогично доказывается, что X_{ba} и X_{bc} также лежат на этой окружности.

Таким образом, все точки, лежащие вне описанного круга, педальные треугольники которых подобны, лежат на окружности, центр которой (S) лежит на прямой MN и ортогональной $O_A(r_A)$, $O_B(r_B)$ и $O_C(r_C)$. Ясно, что точки, инверсные X, X_a, X_b, X_c, X_{ba} и X_{bc} также лежат на окружности ортогональной $O_A(r_A)$, $O_B(r_B)$ и $O_C(r_C)$, находящейся внутри описанного круга.

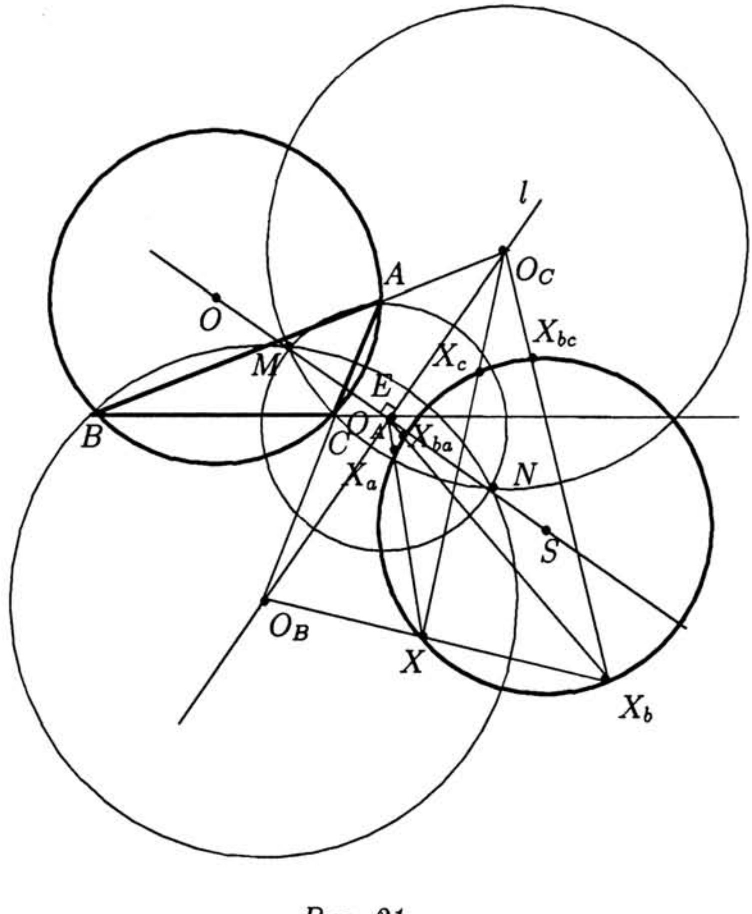


Рис. 21

Очевидно, что обе окружности шести точек инверсны относительно описанной окружности базового треугольника.

Замечание 1. *Интересно, что в рассуждениях использовался только факт существования общей радикальной оси трех окружностей Аполлония $\triangle ABC$. Поэтому точки X_{ab}, X_{ac}, X_{ca}, X_{cb} также лежат на окружности S. Но по теоре-*

ме 6 вне описанного круга есть максимум шесть точек, педальные треугольники которых подобны. Поэтому точки X_{ab}, X_{ac}, X_{ca}, X_{cb} должны совпадать с уже существующими. Действительно, можно показать, что $X_{ab} = X_{ca} = X_{bc}$ и $X_{ac} = X_{cb} = X_{ba}$.

Это свойство инверсии уже не выполняется для любой тройки окружностей, имеющих общую радикальную ось, а лишь для таких окружностей, углы между которыми 60° или 120°. $O_A(r_A)$, $O_B(r_B)$ и $O_C(r_C)$ отвечают этому критерию.

Подробные рассуждения по данной теме лежат за пределами данной статьи. Заметим только, что подобное свойство (совпадение точек при повторной инверсии) верно для любых n окружностей, имеющих общую радикальную ось, углы между которыми $\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \ldots, \frac{(n-1)\pi}{n}$. В этом случае для любой точки X, не принадлежащей ни одной из этих окружностей, существует ровно $2n-1$ разных образов первой и повторной инверсий относительно упомянутых n окружностей.

Замечание 2. *Если точка X лежит на одной из окружностей $O_A(r_A)$, $O_B(r_B)$ или $O_C(r_C)$, то и ее образы лежат на этих окружностях.*

Например, если $X \in O_A$, то $X_a = X$, $X_b \in O_C$, $X_c \in O_b$. Центр окружности, проходящей через X_a, X_b, X_c, лежит на MN, а повторная инверсия ведет к тем же точкам. Таким образом инверсный образ одной окружности Аполлония $\triangle ABC$ относительно другой окружности Аполлония этого треугольника суть третья окружность Аполлония.

Замечание 3. *Если точка X лежит на прямой центров окружностей Аполлония $\triangle ABC$, то и все ее образы лежат на этой прямой. Это единственный случай, когда окружность шести точек вырождается в прямую. Тогда внутри описанного круга окружность шести точек — окружность, проходящая через замечательные точки O, P_1, P_2, T_A, T_B, T_C, L (см. выше).*

(Б) Угол Брокара. Известно, что *угол Брокара* φ связан с углами $\triangle ABC$ следующим соотношением: $\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma$, то есть однозначно определяется углами $\triangle ABC$. С другой стороны есть бесконечно много треугольников с разными углами, для которых величина угла φ сохраняется. Для педальных треугольников $\triangle ABC$ угол Брокара — функция точки X. Известно, что для любого φ_0 геометрическое место точек X, у педальных треугольников которых угол Брокара равен φ_0, состоит из двух окружностей. Одна из этих окружностей лежит внутри описанного круга $\triangle ABC$, а другая снаружи. Эти две окружности называются *окружностями Схоуте* данного $\triangle ABC$ и данного угла Брокара φ_0. Доказательство этого факта можно найти в книге: Прасолов В. В., «Рассказы о числах, многочленах и фигурах». Поскольку для всех подобных треугольников угол Брокара один и тот же, ясно, что окружности шести точек суть окружности Схоуте. Поэтому все свойства окружностей шести точек — свойства окружностей Схоуте. Перечислим эти свойства.

I. *Для фиксированного угла Брокара окружности Схоуте инверсны относительно описанной окружности базового $\triangle ABC$.*

II. *Окружности Схоуте инверсно-симметричны относительно всех трех окружностей Аполлония $\triangle ABC$, а их центры расположены на прямой, проходящей* *через центр описанной окружности, точку Лемуана и изодинамические центры* $\triangle ABC$.

III. *Прямая, проходящая через центры окружностей Аполлония треугольника* ABC, *суть вырожденная окружность Схоуте, соответствующая углу Брокара базового треугольника. Эта же прямая — общая радикальная ось всех окружностей Схоуте данного базового треугольника.*

IV. *Для любой точки* X, *лежащей на некоторой окружности Схоуте, есть ровно пять точек, лежащих на этой окружности, педальные треугольники которых подобны педальному треугольнику точки* X.

Глава 4. Второй педальный треугольник

Опустим из точки X перпендикуляры на стороны ее педального треугольника: $XX'_a \perp X_bX_c$, $XX'_b \perp X_aX_c$ и $XX'_c \perp X_bX_a$. $\triangle X'_aX'_bX'_c$ называется *вторым педальным треугольником* точки X относительно $\triangle ABC$ (см. рис. 22).

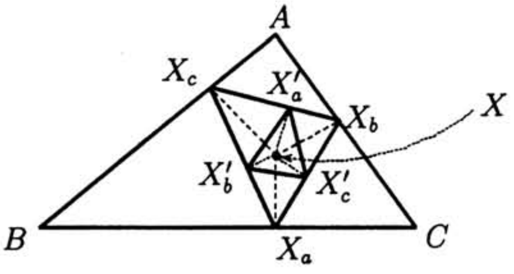


Рис. 22

Продолжая этот процесс, получим третий, четвертый и т.д. педальные треугольники точки X. Известно, что третий педальный треугольник подобен базовому, четвертый — первому и т.д. В этой главе будут освещены вопросы, относящиеся ко второму педальному треугольнику.

(A) Изогонально-сопряженные точки треугольника.

Пусть дан $\triangle ABC$ и X — некоторая точка плоскости. Тогда прямые, симметричные чевианам AX, BX и CX относительно биссектрис углов A, B и C пересекаются в точке Y. Точки X и Y называются *изогонально-сопряженными* относительно $\triangle ABC$. Для любой точки, не лежащей на прямых AB, BC и AC, изогональный образ определяется однозначно. А все точки прямых AB, BC и AC изогонально-сопряжены противоположным вершинам $\triangle ABC$.

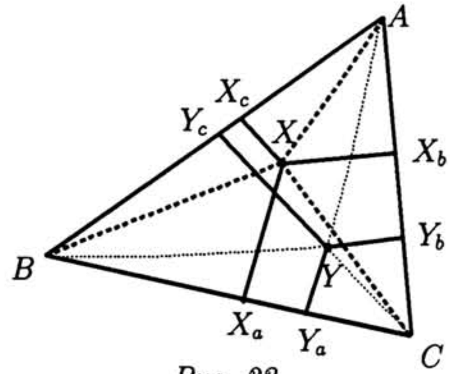


Рис. 23

Отметим свойство изогонально-сопряженных точек, которое будет важно в дальнейшем.

> *Произведения расстояний изогонально-сопряженных точек до сторон $\triangle ABC$ равны.*

То есть:

$$XX_a \cdot YY_a = XX_{ba} \cdot YY_b = XX_c \cdot YY_c.$$

Действительно, $\angle XCX_b = \angle YCY_a$ и $\triangle XCX_b \sim \triangle YCY_a$. Тогда $\frac{XX_b}{YY_a} = \frac{XC}{YC}$.

Аналогично $\triangle XCX_a \sim \triangle YCY_b \Rightarrow \frac{XX_a}{YY_b} = \frac{XC}{YC}$.

Ясно, что $\frac{XX_b}{YY_a} = \frac{XX_a}{YY_b} \Rightarrow XX_a \cdot YY_a = XX_{ba} \cdot YY_b$.

Используя это свойство изогонально-сопряженных точек, докажем следующую ключевую теорему.

Теорема 8. *Пусть точки X и Y изогонально сопряжены относительно $\triangle ABC$ Тогда второй педальный треугольник точки X подобен первому педальному треугольнику точки Y.*

Доказательство. 1. Обозначим стороны педальных треугольников:

x_a; x_b; x_c — первый треугольник точки X,

x'_a; x'_b; x'_c — второй треугольник точки X,

y_a; y_b; y_c — первый треугольник точки Y.

Докажем, что $x'_a : x'_b : x'_c = y_a : y_b : y_c$. Рассмотрим отношение $\frac{x'_a}{x'_b}$. По формулам сторон педального треугольника

$$x'_a = \frac{x_a \cdot XX_a}{2R_*}, \quad x'_b = \frac{x_b \cdot XX_b}{2R_*},$$

где R_* — радиус описанной окружности $\triangle X_aX_bX_c$. Ясно, что $\frac{x'_a}{x'_b} = \frac{x_a \cdot XX_a}{x_b \cdot XX_b}$.

Поскольку $\frac{x_a}{x_b} = \frac{a \cdot XA}{b \cdot XB}$, получим $\frac{x'_a}{x'_b} = \frac{a \cdot XA \cdot XX_a}{b \cdot XB \cdot XX_b}$.

Аналогичным образом $\frac{y_a}{y_b} = \frac{a \cdot YA}{b \cdot YB}$. Тогда $\frac{XA}{YA} = \frac{XX_c}{YY_b}$, $\frac{XB}{YB} = \frac{XX_c}{YY_a} \Rightarrow \frac{XA}{XB} = \frac{YA \cdot YY_a}{YB \cdot YY_b}$.
Поэтому

$$\frac{x'_a}{x'_b} = \frac{a \cdot XA \cdot XX_a}{b \cdot XB \cdot XX_b} = \frac{a \cdot YA \cdot YY_a \cdot XX_a}{b \cdot YB \cdot YY_b \cdot XX_b} = \frac{a \cdot YA}{b \cdot YB} = \frac{y_a}{y_b}.$$

Аналогично доказывается, что $\frac{x'_a}{x'_c} = \frac{y_a}{y_c}$. Тогда $\triangle X'_aX'_bX'_c \sim \triangle Y_aY_bY_c$. Понятно, что также верно $\triangle X_aX_bX_c \sim \triangle Y'_aY'_bY'_c$. Теорема доказана.

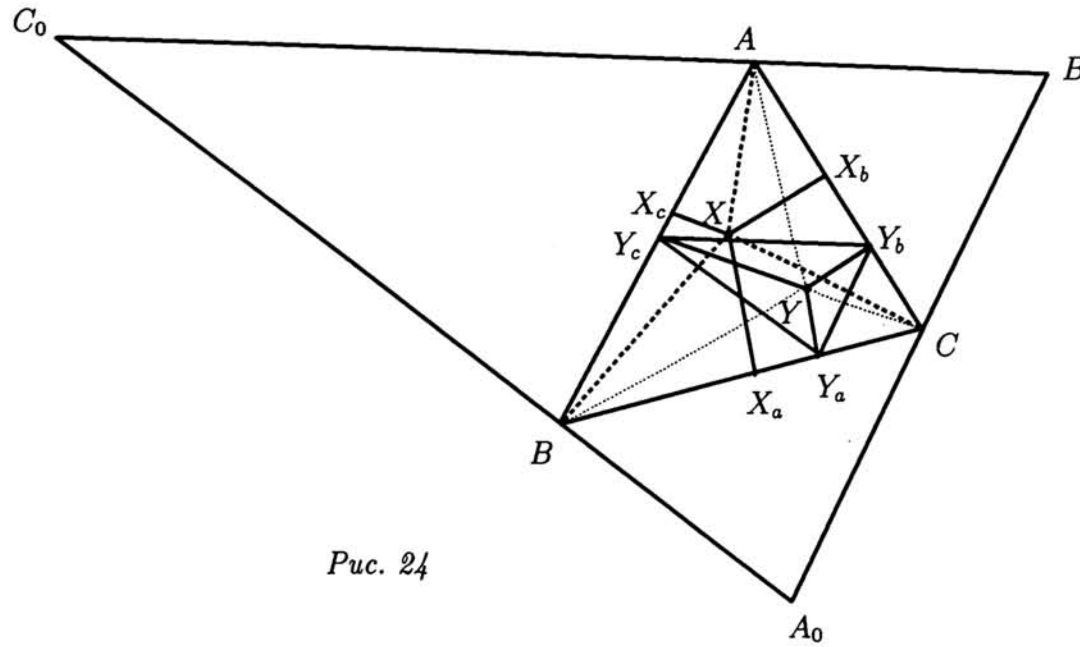


Рис. 24

Замечание 1. *Приведем и другое доказательство теоремы 8.*

Через вершины $\triangle ABC$ проведем прямые, перпендикулярные XA, XB и XC, которые, пересекаясь, образуют новый треугольник $A_0B_0C_0$ (см.рис. 24).

Покажем, что $\triangle A_0B_0C_0 \sim \triangle Y_aY_bY_c$. Действительно,

$$\angle Y_bY_aY_c = \angle YBA + \angle YCA = \angle XBC + \angle XCB = 180^\circ - \angle BXC = \angle A_0.$$

Аналогично доказывается равенство других углов. Тогда $\triangle X'_aX'_bX'_c$ — третий педальный треугольник $\triangle A_0B_0C_0$ и следовательно $\triangle X'_aX'_bX'_c \sim \triangle A_0B_0C_0 \sim \triangle Y_aY_bY_c$.

Замечание 2. *Если точка X лежит на одной из сторон $\triangle ABC$ или ее продолжении, то $\triangle X'_aX'_bX'_c$ вырождается в точку, то есть не имеет смысла. Интересно, что в этом случае точка Y совпадает с вершиной $\triangle ABC$ и ее первый педальный треугольник вырождается в точку.*

Замечание 3. *Из доказанной теоремы очевидно следует, что для точек, изогонально-сопряженных себе, первый и второй педальные треугольники подобны. Очевидно, что точки, неподвижные при изогональном сопряжении, суть центры вписанной и трех вневписанных окружностей $\triangle ABC$. Ясно, что первый и второй педальные треугольники этих точек подобны.*

Следует заметить, что обратное утверждение неверно. То есть из подобия первого и второго педальных треугольников некоторой точки не следует, что эта точка неподвижна при изогональном сопряжении.

(Б) Второй педальный треугольник — прямоугольный.

Определим множество точек, второй педальный треугольник которых — прямоугольный. Докажем более общее свойство изогонально-сопряженных точек.

Теорема 9. *Любая окружность, проходящая через вершины B и C, изогонально сопряжена другой окружности, проходящей через эти вершины.*

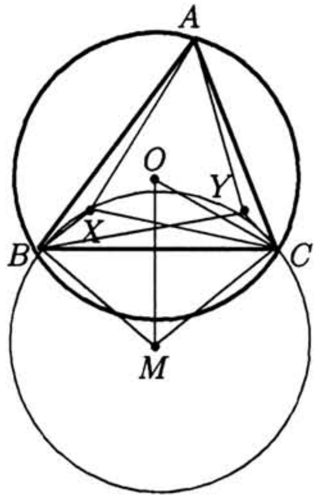


Рис. 25

Доказательство. Пусть точки X и Y — изогонально-сопряжены и точка X лежит на окружности с центром M. Покажем, что $\angle BYC$ не зависит от положения точки X на дуге окружности (рис. 25).

Действительно,

$$\angle XBC + \angle XCB = \angle OMC, \quad \angle YBC = \angle B - \angle YBA = \angle B - \angle XBC$$

и $\angle YCB = \angle C - \angle YCA = \angle C - \angle XCB$. Тогда

$$\angle BYC = 180° - \angle B - \angle C + \angle OMC = \angle A + \angle OMC.$$

Но $\angle A = \angle MOC$. Поэтому $\angle BYC = 180° - \angle OCM$. Теорема доказана.

Следствие. *Поскольку окружность, точки которой определяют прямоугольные первые педальные треугольники, ортогональна описанной окружности, то в этом случае $\angle OCM = 90°$. Тогда $\angle BYC = 90°$. Ясно, что точка Y лежит на окружности, построенной на стороне BC как на диаметре.*

Теорема 10. *Геометрическое место точек, вторые педальные треугольники которых прямоугольны, состоит из трех окружностей, диаметры которых — стороны треугольника. Для прямоугольного $\triangle ABC$ есть только две окружности, так как окружность, построенная на гипотенузе — описанная окружность $\triangle ABC$.*

Замечание. *Интересно, что пересечение окружностей, ортогональных описанной, и окружностей, диаметры которых — стороны $\triangle ABC$, определяет точки, первый и второй педальные треугольники которых прямоугольны. Легко проверить, что в общем случае, таких точек шесть.*

(B) Второй педальный треугольник — равнобедренный.

Напомним, что геометрическое место точек, для которых первый педальный треугольник — равнобедренный, состоит из трех окружностей Аполлония $O_A(r_A)$,

$O_B(r_B)$ и $O_C(r_C)$. Поэтому геометрическое место точек, для которых второй педальный треугольник — равнобедренный, состоит из изогональных образов этих окружностей. Поскольку окружность Аполлония проходит только через одну вершину $\triangle ABC$, ее изогональный образ — более сложная кривая. Докажем следующую интересную теорему.

Теорема 11. *Геометрическое место точек X, для которых $\triangle X_aX_bX_c$ — равнобедренный ($X'_aX'_b = X'_aX'_c$), есть кубика ортоцентров с узловой точкой в вершине A базового треугольника и проходящая через вершины B и C.*

Доказательство. 1. Кубика ортоцентров (см. мою статью «Ортоцентр треугольника и кубические кривые», "Математическое образование", №2(13), 2000 г.) — кривая, являющаяся инверсным образом любой коники относительно центра, расположенного на этой конике. Причем центр инверсии — узловая точка кубики.

2. Докажем более общее утверждение: *Изогональный образ любой окружности проходящей через одну и только одну вершину $\triangle ABC$, есть кубика ортоцентров с узловой точкой в этой вершине.*

Поместим вершину A в начале координат, а стороны AB и AC направим симметрично относительно оси y (рис. 26).

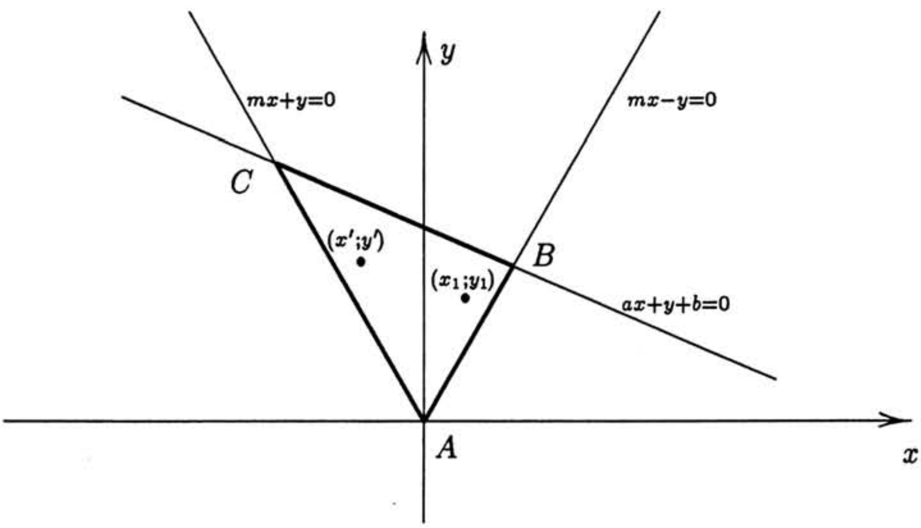


Рис. 26

Пусть точки $(x_1; y_1)$ и $(x'; y')$ изогонально-сопряжены относительно $\triangle ABC$. Выразим координаты $(x_1; y_1)$ через $(x'; y')$.

(а) Из геометрических соображений очевидно, что $\frac{y_1}{x_1} = -\frac{y'}{x'} \Rightarrow y_1 = -\frac{y'}{x'} \cdot x_1$.

(б) Поскольку произведения расстояний точек $(x_1; y_1)$ и $(x'; y')$ до сторон треугольника равны, получим

$$\frac{(mx_1 - y_1) \cdot (mx' - y')}{m^2 + 1} = \frac{(ax_1 + y_1 + b) \cdot (ax' + y' + b)}{(a^2 + 1)}.$$

Подставляя $y_1 = -\frac{y'}{x'} \cdot x_1$, после несложных и не очень долгих преобразований получим выражения:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{bx'(ax'+y'+b)}{\left(\frac{m^2-a^2}{m^2+1}\right)\left(x'^2+y'^2\right)-abx'+by'} \\ y_1 = \dfrac{-by'(ax'+y'+b)}{\left(\frac{m^2-a^2}{m^2+1}\right)\left(x'^2+y'^2\right)-abx'+by'} \end{cases}$$

(в) Пусть точка $(x_1; y_1)$ лежит на окружности $x^2+y^2+cx+dy=0$, проходящей через начало координат. Подставим выражения для $(x_1; y_1)$ в уравнение окружности и получим ее изогональный образ. После упрощений и переобозначения коэффициентов получается кубическое уравнение:

$$\left(x^2+y^2\right)(Ax+By+C)+Dx^2+Ey^2+Fxy=0.$$

Докажем, что полученная кубика — кубика ортоцентров с узловой точкой в начале координат.

(г) Произведем инверсию полученной кубики относительно окружности $x^2+y^2=1$, с помощью формул:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \tilde{y} = \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Легко убедиться, что эта инверсия преобразовывает

$$\left(x^2+y^2\right)(Ax+By+C)+Dx^2+Ey^2+Fxy=0$$

в конику, проходящую через начало координат. Этим доказывается, что полученная кубика суть кубика ортоцентров с узловой точкой A.

3. Можно показать, что если окружность $x^2+y^2+cx+dy=0$ проходит и через другую вершину $\triangle ABC$, то полученная кубика вырождается в окружность, что согласуется с теоремой 9. Если же окружность, проходит через все вершины $\triangle ABC$, то у нее нет изогонального образа. Действительно, известно, что описанная окружность $\triangle ABC$ изогонально-сопряжена с бесконечно удаленной прямой (Прасолов В. В., «Рассказы о числах , многочленах и фигурах.»).

4. Таким образом доказано, что любая невырожденная окружность Аполлония $\triangle ABC$ преобразуется при изогональном сопряжении в кубику ортоцентров. Поскольку $O_A(r_A)$ пересекает стороны AB и AC, то ее изогональный образ (K_A) проходит через B и C. Теорема доказана.

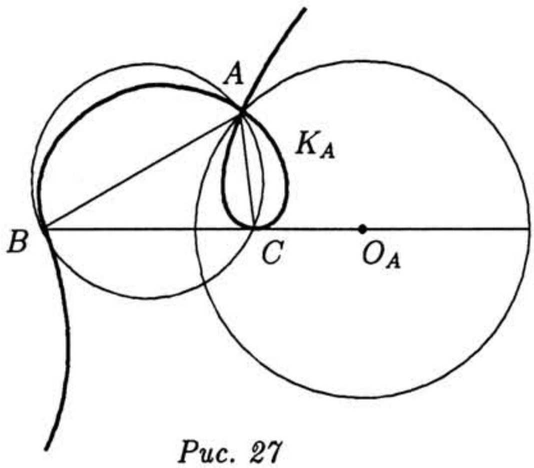


Рис. 27

Замечание 1. *Известно, что изодинамические центры $\triangle ABC$ (точки M и N) изогонально-сопряжены с точками Торричелли этого треугольника. Поэтому:*

1. Точки Торричелли и только они суть точки, второй педальный треугольник которых — равносторонний.

2. Кубики K_A, K_B и K_C пересекаются в пяти точках — вершинах $\triangle ABC$ и в точках Торричелли.

Замечание 2. *В процессе доказательства теоремы было показано, что любая окружность, проходящая через одну и только одну вершину треугольника, изогонально-сопряжена кубике ортоцентров. Проводя все преобразования в обратном порядке, получим следующее интересное свойство кубики. Если одна из вершин треугольника — узловая точка кубики ортоцентров, а две другие лежат на этой кубике, то изогональный образ кубики относительно такого треугольника есть окружность, проходящая через узловую точку кубики.*

(Г) Второй педальный треугольник, подобный данному. Второй педальный треугольник, подобный базовому.

Первый вопрос данного пункта практически решен предыдущими рассуждениями. Действительно, по теореме 6, существуют 12 точек (X_1; X_2; ...; X_{12}), первый педальный треугольник которых подобен данному $\triangle UVW$. Ясно, что по теореме 8, второй педальный треугольник их изогональных образов (X_1'; X_2'; ...; X_{12}') подобен $\triangle UVW$. Поэтому в общем случае существует 12 точек плоскости, второй педальный треугольник которых подобен данному $\triangle UVW$.

Вопрос о вторых педальных треугольниках, подобных базовому, решается аналогично. Рассмотрим все изогональные образы точек O, O_A, O_B, O_C, T_A, T_B, T_C, P_1, Q_1, P_2 и Q_2 (теорема 7).

I. *Изогональный образ центра описанной окружности O есть ортоцентр H.*

Действительно, $\angle OAB = \angle OBA = 90° - \angle C = \angle CAH = \angle CBH$. Тогда прямые AO, AH и BO, BH симметричны относительно соответствующих биссектрис $\triangle ABC$. Тогда второй педальный треугольник ортоцентра подобен $\triangle ABC$. Интересно, что точка H — центр вписанной окружности первого педального треугольника (известный факт). Ясно, что второй и третий педальные треугольники точки H относительно $\triangle ABC$ суть первый и второй педальные треугольники относительно ортотреугольника. Тогда по замечанию 3 к теореме 8, второй и третий педальные треугольники точки H относительно $\triangle ABC$ — подобны, то есть $\triangle H'_a H'_b H'_c \sim \triangle ABC$.

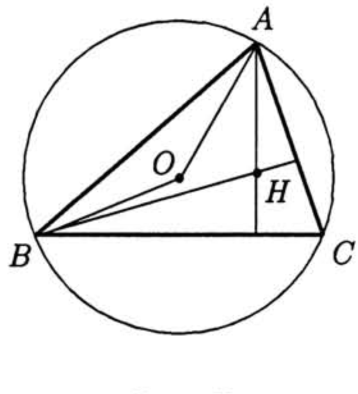


Рис. 28

II. *Центры окружностей Аполлония O_A, O_B, O_C лежат на прямых, содержащих стороны $\triangle ABC$.*

Ясно, что их образ — вершины базового треугольника, для которых педальный треугольник не имеет смысла.

III. Известно, что *точки Брокара P_1 и P_2 изогонально-сопряжены друг другу* (элементарно следует из равенства первого и второго углов Брокара). Тогда *первый и второй педальные треугольники точек Брокара подобны $\triangle ABC$, то есть все педальные треугольники точек Брокара подобны $\triangle ABC$.*

Интересно, что точки Брокара — единственные точки плоскости, все педальные треугольники которых подобны. Можно элементарно показать, что первая точка Брокара P_1 треугольника ABC суть вторая точка Брокара ее первого педального треугольника и наоборот.

IV. Точки T'_A, T'_B, T'_C, изогонально-сопряженные точкам T_A, T_B, T_C, суть точки, второй педальный треугольник которых подобен $\triangle ABC$. Познакомимся с ними подробнее. Докажем следующее утверждение:

Точки T'_A, T'_B, T'_C суть точки пересечения медиан m_a, m_b, m_c с окружностями Аполлония $O_A(r_A)$, $O_B(r_B)$ и $O_C(r_C)$.

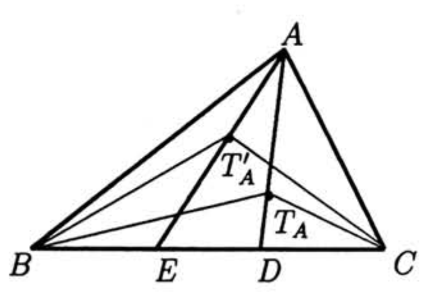


Рис. 29

Доказательство. Покажем, что точка T'_A, изогонально-сопряженная T_A, лежит на пересечении медианы m_a и окружности $O_A(r_A)$.

1. Поскольку T_A лежит на симедиане s_a (AD), то T'_A лежит на медиане m_a (AE).

2. В главе 2 было доказано, что $\angle ABT_A = \angle CAT_A$ и $\angle BAT_A = \angle ACT_A$. Тогда из изогональности T_A и T'_A следует: $\angle ABT_A = \angle CAT_A = \angle T'_ABE = \angle BAT'_A$ и $\angle BAT_A = \angle ACT_A = \angle T'_ACE = \angle CAT'_A$. Поэтому $\triangle AEB \sim \triangle BET'_A \Rightarrow \frac{AB}{T'_AB} = \frac{AE}{BE}$ и $\triangle AEC \sim \triangle CET'_A \Rightarrow \frac{AC}{T'_AC} = \frac{AE}{CE}$. Отсюда $\frac{AB}{AC} = \frac{T'_AB}{T'_AC}$, то есть $T'_A \in O_A\,(r_A)$.

Аналогично для точек T'_B, T'_C.

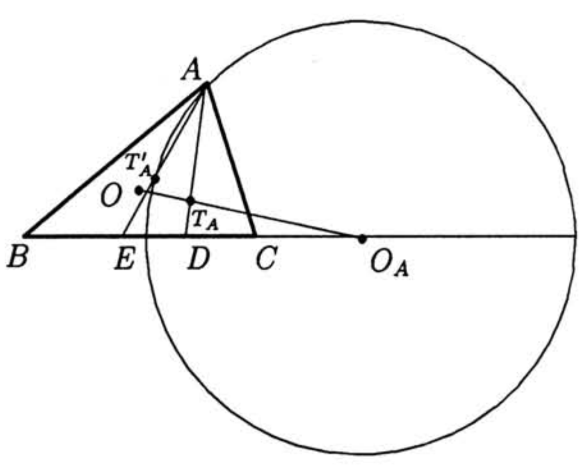


Рис. 30

Замечание 1. *Ясно, что первые педальные треугольники точек T'_A, T'_B, T'_C равнобедренные, а вторые и третьи подобны базовому. У точек T_A, T_B, T_C равнобедренным будет второй педальный треугольник.*

Замечание 2. *Можно показать, что точки T'_A, T'_B, T'_C лежат на окружности, диаметром которой является отрезок, соединяющий ортоцентр и центр тяжести $\triangle ABC$.*

Интересно сравнить эту окружность с окружностью Схоуте точек O, T_A, T_B, T_C, L, P_1, P_2 (см. выше).

V. Точки Q_1 и Q_2 — инверсные образы точек Брокара относительно описанной окружности — лежат на прямой центров окружностей Аполлония $\triangle ABC$, но в отличие от точек O_A, O_B, O_C эти точки не лежат на прямых, содержащих стороны базового треугольника. Поэтому *точки Q'_1 и Q'_2 — изогональные образы Q_1 и Q_2 — суть точки, второй педальный треугольник которых подобен $\triangle ABC$.* Отметим одну интересную линию, на которой лежат точки Q'_1 и Q'_2. В процессе доказательства теоремы 11 были получены выражения, связывающие координаты изогонально-сопряженных точек:

$$x_1 = \frac{bx'\,(ax' + y' + b)}{\left(\frac{m^2-a^2}{m^2+1}\right)\left(x'^2 + y'^2\right) - abx' + by'}; \qquad y_1 = \frac{-by'\,(ax' + y' + b)}{\left(\frac{m^2-a^2}{m^2+1}\right)\left(x'^2 + y'^2\right) - abx' + by'}.$$

Очевидно, что если точка $(x_1; y_1)$ лежит на некоторой прямой, то точка $(x'; y')$ лежит на прямой либо конике. То есть изогональным образом прямой является прямая или коника. Поскольку изогональным образом точек описанной окружности являются бесконечно удаленные точки, ясно, что образом прямой, находящейся вне описанного круга, будет эллипс, описанный около $\triangle ABC$.

Прямая центров окружностей Аполлония всегда лежит вне описанного круга (см. главу 2). Поэтому ее изогональный образ есть эллипс, проходящий через вершины $\triangle ABC$ и точки Q'_1 и Q'_2.

В главе 3 было указано, что угол Брокара всех первых педальных треугольников точек прямой центров равен углу Брокара базового $\triangle ABC$. Тогда угол Брокара всех вторых педальных треугольников точек указанного эллипса равен углу Брокара $\triangle ABC$.

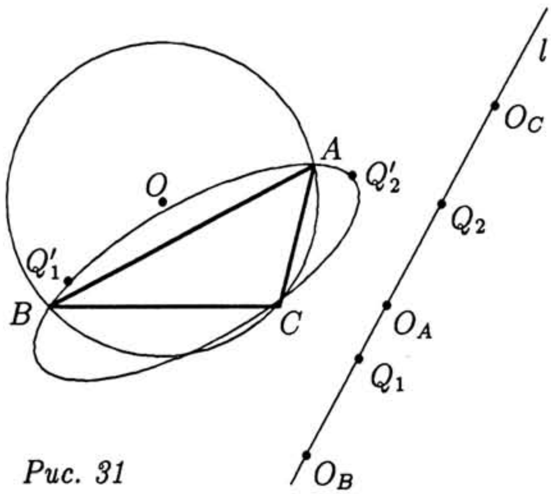


Рис. 31

Итогом предыдущих рассуждений является следующая теорема.

Теорема 12. *Для любого разностороннего базового $\triangle ABC$ существуют 8 и только 8 точек плоскости, вторые педальные треугольники которых подобны $\triangle ABC$. Это точки Брокара $\triangle ABC$, ортоцентр и точки T'_A, T'_B, T'_C, Q'_1 и Q'_2.*

Замечание. *Для равнобедренного треугольника таких точек — три: ортоцентр и две точки Брокара.*

(Д) Базовые треугольники.

Пусть дан $\triangle ABC$. Любая точка плоскости X, отличная от вершин $\triangle ABC$, кроме педальных треугольников разных порядков определяет единственный треугольник $A_0B_0C_0$, для которого $\triangle ABC$ — первый педальный треугольник. Действительно, построим прямые, перпендикулярные XA, XB и XC. Точки пересечения этих прямых — вершины треугольника, базового для $\triangle ABC$.

Рассмотрим следующую задачу: *сколько существует треугольников, подобных данному $\triangle UVW$, являющихся базовыми для $\triangle ABC$?* В свете предыдущих рассуждений задача совсем несложная. Действительно, базовый треугольник $A_0B_0C_0$, полученный с помощью точки X, подобен второму педальному треугольнику этой точки, относительно $\triangle ABC$. Поэтому, например, базовые треугольники $A_0B_0C_0$, построенные с помощью точек Торричелли $\triangle ABC$ и только их — равносторонние.

Для разностороннего $\triangle UVW$ верна следующая теорема.

Теорема 13. *Для любого $\triangle ABC$ и неподобного ему разностороннего $\triangle UVW$ существует 12 и только 12 треугольников, подобных $\triangle UVW$, являющихся базовыми для $\triangle ABC$.*

Случай $\triangle UVW \sim \triangle ABC$ несколько интереснее. Очевидно, что базовые треугольники, построенные с помощью точек H, P_1, P_2, T'_A, T'_B, T'_C, Q'_1 и Q'_2, подобны $\triangle ABC$. Покажем, что с помощью вершин A, B и C также можно построить базовые треугольники (по одному для каждой вершины), подобные $\triangle ABC$.

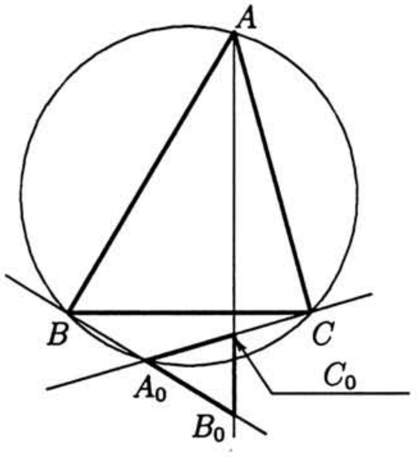


Рис. 32

Проведем через вершины B и C прямые, перпендикулярные сторонам AB и AC. Очевидно, что эти прямые пересекутся в точке A_0, лежащей на описанной окружности $\triangle ABC$. Из вершины A проведем высоту треугольника $\triangle ABC$, пересекающую прямые BA_0 и CA_0 соответственно в точках B_0 и C_0 (см. рис. 32). Ясно, что $\triangle A_0B_0C_0 \sim \triangle ABC$ и педальный треугольник точки A относительно $\triangle A_0B_0C_0$ есть $\triangle ABC$. Единственность $\triangle A_0B_0C_0$ для точки A доказывается разными способами от противного. Например, точка A — центр окружности Аполлония $\triangle A_0B_0C_0$. Ясно, что радиус этой окружности — AA_0 (диаметр описанной окружности $\triangle ABC$). Тогда точки B_0 и C_0 инверсны относительно этой окружности. На прямых BA_0 и CA_0 такая пара инверсных точек может быть только одна. Для точек B и C рассуждения аналогичны. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 14. *Для любого разностороннего $\triangle ABC$ существует 11 и только 11 треугольников, подобных $\triangle ABC$, и являющихся его базовыми треугольниками.*

Руинский Александр,
преподаватель математики колледжа Тель Хай
(Верхняя Галилея, Израиль).

Содержание приложения “Обозрение Z” за 2000–2001 гг.

Предлагаем вниманию читателей содержание всех номеров 2000–2001 гг. научно-популярного приложения “Обозрение Z” к журналу “Математическое образование”. Статьи сгруппированы по рубрикам, справа указан номер приложения, в котором эта статья опубликована. Некоторые статьи отнесены к нескольким рубрикам одновременно и встречаются в оглавлении более одного раза.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, пр-д завода "Серп и Молот", д.3а.

Контактные телефоны: (095) 362-91-70, (095) 362-91-02 (телефон-факс).

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

Страница Фонда в сети Internet: www.fmop.dnttm.ru

e-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2001 год (включая стоимость пересылки) – 35 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2001 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Сбербанке России, г. Москва, Лефортовском отделении №6901 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

С сентября 2000 выходит "Обозрение Z" — научно-популярное приложение к журналу "Математическое образование". Условия подписки (адрес, реквизиты, стоимость одного номера) — те же, что и для журнала.

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 30 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 40 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents