Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год пятый

№ 3 (18)

Июль - сентябрь 2001 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

№ 3 (18), 2001 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (18), июль – сентябрь 2001 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2001 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.10.2001.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 5,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Тезисы по геометрии

Земляков А.Н.

Продолжаем публикацию учебных материалов одного из ведущих центров углубленной физико-математической подготовки старших школьников — СУНЦ при МГУ. В настоящем номере публикуются учебные материалы — "тезисы" по геометрии для одногодичного потока. Материалы изучались на одногодичном потоке в третьей четверти.

ГЕОМЕТРИЯ ПОД МИКРОСКОПОМ

(ПРЕДИСЛОВИЕ)

Ты спросишь, кто велит?
— Всесильный бог деталей ...
Борис Пастернак

Публикуемый ниже учебный текст представляет собой фрагмент курса математики в одногодичном потоке ФМШ № 18 (ныне СУНЦ) при МГУ им. М. В. Ломоносова — в том виде, в каком он предлагался учащимся в 1976–78 гг. Этот рассчитанный на месяц кусочек курса непосредственно примыкал к полугодовому курсу алгебры, материалы которого опубликованы в трех предыдущих номерах журнала «***МО***».

Введение темы, весьма условно названной «*Аксиоматический подход к геометрии*», преследовало две равнозначимые[1] цели. ***Первая***: показать, как алгебраические структуры — конкретно, *поля*, — связаны (или *могут быть связаны*) с аксиоматически задаваемыми геометрическими «моделями»[2]. Существенно, что здесь речь идет не о, так сказать, «банальных» *группах* геометрических преобразований, неявно присутствующих и в общеобразовательном курсе геометрии[3], а о более «богатых» структурах с двумя операциями.

---

[1]По крайней мере, для нас с А. Б. Сосинским (см. «*Предисловие*» к «*Тезисам по алгебре*» — «Математическое образование», 2000, № 4(15), с. 2–5).

[2]Недаром раздел математики, к которому можно отнести представленную тематику, иногда называется *геометрической алгеброй* — см., например, далеко не устаревшую монографию: *Артин Э. Геометрическая алгебра.* — М., Наука, 1969.

[3]Мы имеем в виду группы *параллельных переносов, движений, преобразований подобия*; *групповые свойства* этих совокупностей преобразований теперь уже *явно* формулируются в школьных учебниках (хотя и без соответствующей терминологии).

Вторая цель — познакомить учащихся, хотя бы чуть-чуть, с тем, что со времен Гильберта принято называть *основаниями геометрии*[4]. О том, что геометрия — наука аксиоматическая, знают все и почти «с детского сада». Но что это в действительности означает, как можно, нужно, до́лжно выбирать аксиомы — об этом не говорится не только в школе, но и в вузе, даже в университете!

Не вдаваясь в бо́льшие подробности (они, отчасти, содержатся в нижеследующих материалах), отметим, что за спланированный на данную тему месяц (а больше времени, в рамках одногодичного курса для одногодичного потока уделить не было возможности) довольно трудно дать законченное изложение, так что нижеизложенное носит характер скорее эскиза на заданную тему, составленного из «мазков» — тезисов (каждый из которых носит-таки законченный характер — разве что, как и в «*Тезисах по алгебре*», доказательства, решения, ответы в большинстве случаев опущены!). Однако, надеюсь, ознакомление с темой хотя бы в этом виде было небесполезно для школьников и будет таковым и для читателей журнала[5].

[4]См.: *Гильберт Д. Основания геометрии.* — М.–Л., Гостехиздат, 1948 (вот книга, которая, подобно «*Началам*» Евклида, еще долго не устареет!).

[5]Другой вариант изложения материала, касающегося *конечных геометрий* (и, заодно, конечных полей), можно найти в брошюре: *Белага Э. Г. Мини-геометрии* (*Четыре фрагмента математики XX века*). — М., Знание, 1977 (с. 53–64). Совсем подробно этот материал дается в книге: *Картеси Ф. Введение в конечные геометрии.* — М., Наука, 1980; в ней представлен соответствующий курс, читавшийся в Будапештском университете.

Аксиоматический подход к геометрии

(ТЕЗИСЫ)

I. Геометрия: аксиомы соединения

«... Откинув незабудки,
здесь помещенные для шутки...»
(Козьма Прутков)

1. Теперь мы попытаемся понять, **что же такое «геометрия».** В основном мы будем заниматься геометрией плоскости (и часто будем говорить «геометрия» или «плоскость» вместо слов «геометрия плоскости» — когда как удобнее).

2. Прежде всего, перечислим *основные объекты и понятия* геометрии. Это:
плоскость, точка, прямая, параллельные прямые,
углы, перпендикулярные прямые,
расстояния между точками и прямыми, окружности и другие фигуры,
перемещения плоскости (переносы, повороты, симметрии),
конгруэнтные фигуры, гомотетия и преобразование подобия,
подобные фигуры, площади фигур, длины кривых; вроде бы всё.

Поскольку нельзя объять необъятное, ограничимся пока анализом первых из перечисленных объектов и понятий. Они в действительности, составляют *фундамент геометрии: плоскость, прямые, точки, параллельность прямых.*

3. Что такое **плоскость?** — Какое-то *множество точек* π;
прямая? — *Подмножество точек* $k \subset \pi$;
параллельные прямые? — Непересекающиеся или совпадающие прямые.

Как известно, прямыми являются вовсе не любые подмножества плоскости: среди всех подмножеств $M \subset \pi$ имеется выделенное семейство подмножеств, называемых прямыми — *семейство всех прямых* $\mathcal{L}$.

4. Любое множество π, элементы которого мы будем называть точками, с выделенным семейством подмножеств $\mathcal{L}$ называется *моделью* $(\pi, \mathcal{L})$. Отнюдь не любую модель имеет смысл считать *геометрией* (плоскостью) — прямые должны обладать «хорошими» свойствами (прямыми мы называем подмножества из семейства $\mathcal{L}$). Выделим *основные свойства* прямых, откинув все «детали».

(2) *Через любые две различные точки проходит единственная прямая*:

$$\forall A, B \in \pi \ A \neq B \ \Rightarrow \ \exists! \, l \in \mathcal{L} \ \ l \supset \{A, B\} \quad (\text{обозначение } l = (AB)).$$

(3) *Существуют* 3 *точки, не лежащие на одной прямой*:

$$\exists A, B, C \in \pi \ \ A \neq B \ \& \ C \notin (AB).$$

(1) *Через любую данную точку можно провести единственную прямую, параллельную данной прямой*:

$$\forall A \in \pi \ \ \forall k \in \mathcal{L} \ \ \exists!\, l \in \mathcal{L} \ \ l \ni A \ \ \& \ \ l || k \qquad (l||k \overset{\text{опр}}{\iff} l = k \ \vee \ l \cap k = \varnothing).$$

5. Определение. Модель $(\pi, \mathcal{L})$ называется *аффинной плоскостью* (иногда вместо этих слов мы будем говорить просто «плоскость» или «геометрия»), если выполнены **аксиомы соединения** (2), (3), (1).

Пример. Обычная плоскость Π с обычными прямыми является аффинной плоскость.

Вопросы. Являются ли аффинными плоскостями:

а) обычное пространство с обычными прямыми?

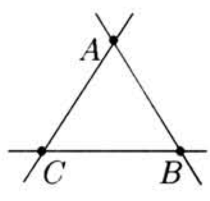
б) обычная плоскость Π с выделенным семейством $\mathcal{L}$, состоящим из всех окружностей? из всех лучей?

(Укажите, какие из аксиом соединения выполнены, какие — нет.)

6. Нас особенно будет интересовать простейший из возможных случаев — когда π состоит из конечного числа точек; такие модели $(\pi, \mathcal{L})$ называются *конечными*. Точки конечной модели удобно изображать точками на плоскости, а прямые — «условными» линиями, проходящими через все точки прямой. Например, модель

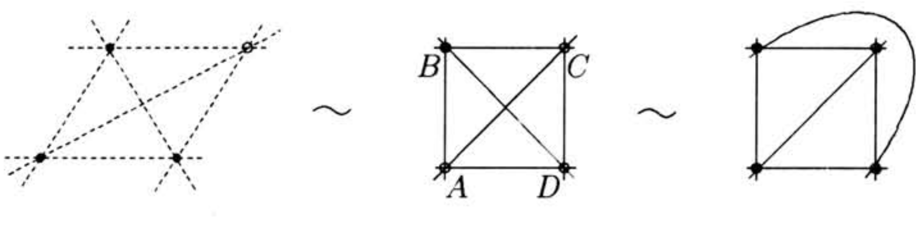
$$\pi = \{A, B, C\}, \qquad \mathcal{L} = \{\{A, B\}, \ \{A, C\}, \ \{B, C\}\},$$

обозначаемая M_3, изображается так:



Вопрос. Является ли модель M_3 аффинной геометрией?

7. Попробуйте дополнить модель M_3 до аффинной геометрии. **Решение** — модель M_4:



— это простейшая из всех возможных геометрий — π_4! Сейчас мы покажем, что проще геометрий нет, а заодно выведем кое-какие следствия из аксиом.

8. Теорема. Пусть модель $(\pi, \mathcal{L})$ является аффинной плоскостью. Тогда справедливы следующие утверждения:

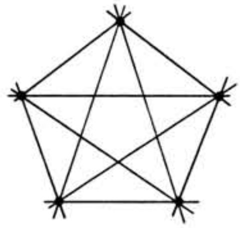
а) в $\mathcal{L}$ по крайней мере 3 различные прямые;

б) $\varnothing \notin \mathcal{L}$;

в) на каждой прямой $k \in \mathcal{L}$ по крайней мере 2 точки;

г) на плоскости π по крайней мере 4 точки, $(\pi, \mathcal{L}) \supset \pi_4$ (в естественном смысле: $\pi \supset \{A, B, C, D\}$ и прямые в $\mathcal{L}$ содержат прямые модели $\pi_4 = M_4(A, B, C, D)$).

9. Далее естественно рассмотреть модель M_5:



Вопрос. Будет ли эта модель аффинной геометрией?

10. В модели M_5 и в следующих аналогичных моделях M_n, $n \geq 6$ (M_n — вершины n-угольника, прямые — пары точек — диагонали и стороны) выполнены аксиомы (2) и (3), но не выполнена аксиома (1). Если вместо аксиомы (1) (V постулат Евклида!) ввести аксиому параллельности Лобачевского:

$$(1_{\text{Л}}) \qquad \forall A \in \pi \ \ \forall k \in \mathcal{L} \quad \exists l_1, l_2 \in \mathcal{L} \quad l_1 \ni A,\ l_2 \ni A;\ l_1 || k,\ l_2 || k;\ l_1 \neq l_2,$$

то модели M_n при $n \geq 5$ удовлетворяют аксиомам $(1_{\text{Л}})$, (2), (3). Такие модели называются *аффинными плоскостями Лобачевского*. Если «перейти к пределу» при $n \to \infty$, то из моделей M_n получается непрерывная аффинная модель плоскости Лобачевского:

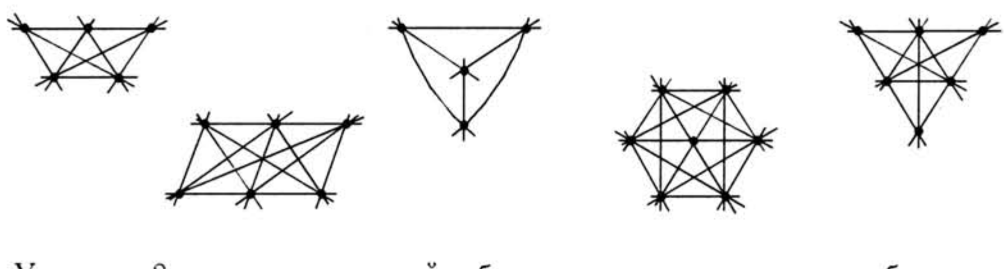
π — множество точек круга, исключая точки границы круга,

$\mathcal{L}$ — множество всех хорд круга π.

(Точки границы круга исключать не обязательно, однако эти точки по некоторым причинам удобно считать «бесконечно удаленными» точками плоскости Лобачевского.)

11. Мы будем изучать обычные (евклидовы) аффинные модели. Пока что нам известна только одна такая модель из конечного числа точек — π_4.

Задание. Проверьте аксиомы (1), (2), (3) для следующих моделей:



12. Укажите 8 конечных моделей, обладающих следующими «наборами выполненностей» аксиом соединения:

(1)	+	+	+	−	−	−	−	+
(2)	+	+	−	−	−	+	+	−
(3)	+	−	−	−	+	+	−	+

13. Вопрос. Зачем все это нужно (конечные и разные другие геометрии)?

Ответ. А. Чтобы глубже понять науку геометрию, в частности, чтобы осознать роль различных аксиом в геометрии (см. т. 14).

Б. Конечные геометрии имеют приложения — например, в сельском хозяйстве!

В. По ходу дела мы откроем кое-что неожиданное и интересное.

14. При аксиоматическом построении геометрии (и любой другой математической теории) выбор аксиом достаточно произволен — различные системы аксиом могут быть эквивалентны друг другу. Однако любая разумная система аксиом должна удовлетворять следующим двум требованиям.

А. Непротиворечивость, т.е. существование хотя бы одной модели, в которой выполнены все аксиомы.

Б. Независимость, т.е. невозможность вывести часть аксиом из остальных (тогда список аксиом можно без ущерба уменьшить).

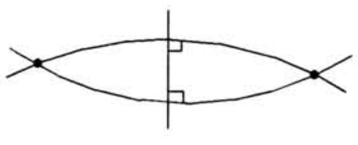
В данном случае (системы аксиом соединения (1), (2), (3)) модель π_4 демонстрирует непротиворечивость, а модели из т. 12 — независимость (скажем, если бы из (1) и (2) следовало бы (3), то не существовало бы модели $(1,2,3) = (+,+,-)$!).

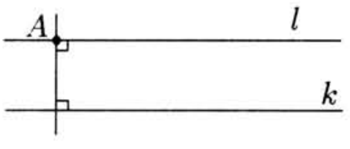
(Иногда независимостью аксиом удобно пожертвовать — ввести «лишние» аксиомы: например, так построен школьный курс геометрии.)

15. Традиционный подход к геометрии вместо аксиомы (1) предполагает справедливость более слабого утверждения — V постулата Евклида, гласящего:

(1_E) через любую данную точку A проходит не более одной прямой, параллельной данной прямой k.

Существование хотя бы одной параллельной можно при этом вывести из других аксиом — конкретно, из существования осевой симметрии плоскости. (Сначала доказывается единственность перпендикуляра, а затем, проводя два перпендикуляра, получаем искомую параллельную — поясните.)





16. Постройте конечную модель $(\pi, \mathcal{L})$, в которой были бы выполнены аксиомы (1_E), (2), (3), но не выполнялась бы аксиома (1).

17. Постройте конечную модель $(\pi, \mathcal{L})$, в которой были бы выполнялись аксиомы (1) и (3), а вместо аксиомы (2) — аксиома (2_A): через любые 2 точки $A \neq B$ проходит *более одной* прямой!

18. Придумайте конечную аффинную геометрию из 5 точек.

19. Пусть $\pi = \mathbb{R}^2$ — координатная плоскость Oxy. Проверьте аксиомы соединения (1), (2), (3) для следующих семейств графиков:

$$\text{(А)} \quad x = a \quad \text{и} \quad y = x^2 + px + q \quad (a, p, q \in \mathbb{R}),$$

$$\text{(Б)} \quad x = a \quad \text{и} \quad y = |x - p| + q \quad (a, p, q \in \mathbb{R}).$$

20. Плоскость Гильберта. Пусть $\pi = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L}$ состоит из графиков:

(a) $x = a$; $y = kx + l$, $l \in \mathbb{R}$ и $k \leqslant 0$;

(b) $y = \begin{cases} k(x-a), & x \leqslant a, \\ \frac{k}{2}(x-a), & x > a, \end{cases}$ где $a \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

Проверьте справедливость аксиом соединения.

II. Конечные аффинные геометрии

«Видите ли вы это множество голосов, составляющих наши большие музыкальные хоры? Они все сливаются в таком совершенстве, что кажется, будто они передают уху один единственный звук. Среди этих голосов есть высокие, есть низкие, есть средние всех степеней. ... Каждый из них, так сказать, скрыт в массе и, тем не менее, они все проявляют свой различный характер.»

(Сенека)

21. Пока что мы знаем только один пример конечной аффинной геометрии — π_4. Конечно, это мало; чтобы построить еще примеры (мы не хотим строить вслепую!), обратимся к исследованию взаимного расположения прямых.

Теорема. В любой аффинной геометрии $(\pi, \mathcal{L})$

$$\forall k, l, m \in \mathcal{L} \qquad k||l \ \& \ l||m \implies k||m.$$

(Докажите.)

22. Теорема 21 (транзитивность отношения параллельных прямых) говорит о том, что семейство всех прямых $\mathcal{L}$ распадается на пучки параллельных.

Определение. Пучком λ_l прямой l называется множество всех прямых, параллельных l:

$$\lambda_l = \{k \in \mathcal{L} \mid k||l\}.$$

Обозначение. Если прямые $l, m \in \mathcal{L}$ имеют общую точку A, то либо $l = m$, либо $l \cap m = \{A\}$ (поясните). Во втором случае будем писать $l \pitchfork m$ и говорить, что *прямые* l и m *пересекаются*.

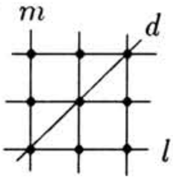
Теорема. (А). Если $l \pitchfork m$, то $\forall l_1 \in \lambda_l \ \ \forall m_1 \in \lambda_m \quad l_1 \pitchfork m_1$.

(Б). Если $\lambda_l \cap \lambda_m \neq \varnothing$, то $\lambda_l = \lambda_m$.

(Докажите.)

23. Таким образом, для двух разных (непересекающихся) пучков λ_l и λ_m каждая прямая $l_1 \in \lambda_l$ пересекается с каждой прямой $m_1 \in \lambda_m$.

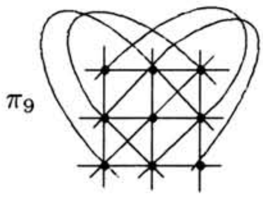
Теперь нарисуем два пучка по 3 прямых в каждом. В их пересечении получится 9 точек. Рассмотрим еще одну прямую — «диагональ» d:

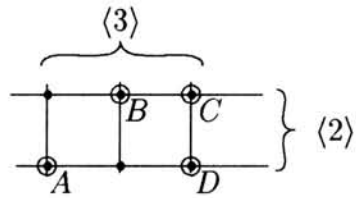


Задание. (А). Нарисуйте пучок прямых, параллельных прямой d так, чтобы выполнялись аксиомы (1) и (2).

(Б). Постройте аффинную геометрию из 9 точек, дополнив полученную картинку (модель).

24. Итак, построена аффинная геометрия из 9 точек — π_9. Можно попытаться аналогичным образом построить геометрию из 6 точек — дополнить пучки $\langle 2\rangle$ и $\langle 3\rangle$. Попробуйте: проведите (AB) и найдите $(AB)\cap(CD)$!





25. Чтобы понять, какие еще конечные геометрии, кроме π_4 и π_9, можно построить (или имеет смысл пытаться строить), вернемся к пучкам параллельных в произвольной аффинной геометрии $(\pi, \mathcal{L})$.

Лемма. Пусть пучок λ_l состоит из n прямых. Тогда любая прямая $k \notin \lambda_l$ (т.е. $k \pitchfork l$) состоит в точности из n точек. (Докажите.)

26. Теорема. Пусть $(\pi, \mathcal{L})$ — произвольная аффинная плоскость. Тогда между точками любых двух прямых $k, l \in \mathcal{L}$ можно установить биективное соответствие. (В частности, любые две прямые *конечной* аффинной плоскости состоят из одинакового числа точек!)

(Докажите. **Указание:** рассмотрите пучок ... .)

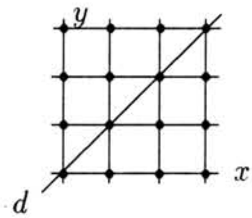
Замечание. Несмотря на некоторую неожиданность этого следствия из аксиом соединения, результат весьма естественный — все прямые в конечной (или бесконечной!) геометрии «равноправны» — одна «не хуже» другой!

27. Следствие. Если n — число точек на каждой из прямых конечной аффинной геометрии $(\pi, \mathcal{L})$, то общее число точек плоскости π равно n^2.

(Докажите. **Указание:** рассмотрите ... .)

28. Итак, любая конечная аффинная плоскость может состоять только из n^2 точек, $n \geqslant 2$. Поэтому **не** существует плоскостей из 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 17, ... точек — следующая возможность — это геометрия π_{16} из 16 точек. Займемся построением этой геометрии.

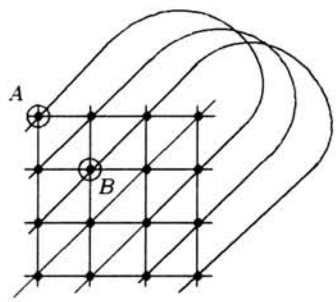
29. Рассмотрим два разных пучка λ_x и λ_y в этой геометрии (предположим, что она существует). Каждый пучок состоит из 4 прямых, а в их пересечении получатся все 16 точек нашей геометрии:



Заметим, что любая другая прямая $d \in \mathcal{L}\,(d \notin \lambda_x,\ d \notin \lambda_y)$ должна пересекать каждую прямую обоих пучков λ_x и λ_y (в одной точке). Переставив, если нужно, прямые пучков λ_x и λ_y, расположим произвольную 9-ю прямую d по диагонали.

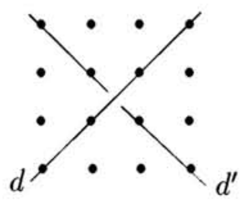
Задание. Нарисуйте пучок прямых, параллельных d.

30. Напрашивается такая картинка:



Проведите теперь прямую (AB)!

31. Ну, как?! Пойдем другим путем. Заметим, что «вторая диагональ» — прямая d' — параллельна прямой d.



Задание. (А). Дополните d и d' до пучка параллельных.

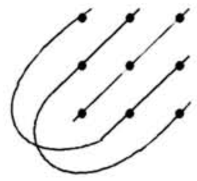
(Б). Нарисуйте все остальные пучки. (Вопрос: сколько их должно быть?)

32. Итак, построена геометрия π_{16}. (Через π_4, π_9, π_{16} мы обозначаем именно *построенные нами* геометрии; оказывается, что в этих случаях *любая* геометрия из 4, 9, 16 точек *устроена*, как и построенные нами. В общем случае правильнее говорить о геометрии *типа* π_{n^2}, поскольку может, в принципе, существовать несколько *различно устроенных* геометрий из n^2 точек; слово «тип» иногда удобно опускать.) Следующие возможности — геометрии из 25, 36,49, 64 точек. Комбинаторный подход (перебор возможных пучков, например) весьма сложен уже для 16 точек — нужны **идеи**! Пока — небольшое отступление.

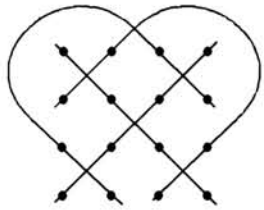
33. Рассматривая 2 различных пучка λ_x и λ_y в геометрии π_{n^2}, мы можем расположить n^2 точек этой плоскости в виде решетки $n \times n$. Сейчас нам удобнее вместо решетки рассмотреть квадратную таблицу $n \times n$ — клетки (i, j) этой таблицы суть точки плоскости π_{n^2}.

Возьмем произвольный третий пучок λ_k ($\neq \lambda_x$, $\neq \lambda_y$), обозначим его прямые латинскими буквами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и расставим эти буквы в клетках, принадлежащих соответствующим прямым. Получившаяся таблица латинских букв $n \times n$ обладает следующими свойствами: символы A_i (всего их n штук) встречаются в каждом столбце и в каждой строке таблицы (причем ровно один раз). (Объясните, почему?) Таблицы, обладающие таким свойством, называются *латинскими квадратами*. Определенный выше латинский квадрат обозначим через $[\lambda_k]$.

Примеры: латинские квадраты 3×3 и 4×4:



$$\longrightarrow \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{pmatrix}$$



$$\longrightarrow \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$$

Вопрос. Любой ли латинский квадрат получается как $[\lambda_k]$ (из аффинной геометрии)? Сколько существует латинских квадратов 3×3? 4×4?

34. Латинские квадраты находят применение в планировании экспериментов, например, в сельском хозяйстве, медицине, биологии, социологии.

Пример. (Рональд Фишер, проф. генетики Кембриджского университета, 1920.)

Требуется с минимальной затратой времени и средств выяснить, как влияет на рост пшеницы n различных удобрений $A_1, \ldots, A_n$ и при этом учесть различность плодородия разных участков почвы (исключить случайность). Для этого поле можно разделить на клетки так, чтобы получился квадрат $n \times n$, а затем применить в каждой клетке удобрение по схеме произвольного латинского квадрата $n \times n$! В этом случае каждое удобрение будет проверено на практически всех сортах почвы (в обоих направлениях), и тем самым случайность «почти исключена».

В других случаях клетками квадрата могут быть пациенты, листья деревьев, люди различных социальных (например, профессиональных) групп.

35. Продолжение примера. Пусть заодно нужно испробовать наши удобрения $A_1, \ldots, A_n$ на n разных сортах пшеницы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Пшеницу нужно высевать также в соответствии со схемой некоторого латинского квадрата $n \times n$ — из греческих букв $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, причем этот квадрат следует выбрать так, чтобы при наложении его на квадрат удобрений (латинских букв) получился бы квадрат, в котором встречается каждая из n^2 пар $\alpha_i A_j$!

Такие два латинских квадрата $n \times n$ принято называть *ортогональными*, а квадрат, получающийся наложением двух ортогональных друг другу квадратов — *греко-латинским*.

Задание. Дополните латинские квадраты т. 33 до греко-латинских.

Вопросы. (А). Существует ли греко-латинский квадрат 2×2? (Б). Любой ли латинский квадрат (скажем, 4×4) можно дополнить до греко-латинского?

36. Задание. (А). Укажите греко-латинские квадраты 5×5, $(2k+1) \times (2k+1)$ при произвольном k (во втором случае покажите, как построить такой квадрат). **Наводящее соображение:** проинтерпретируйте греко-латинские квадраты с помощью пучков параллельных.

(Б). Придумайте способ построения греко-латинских квадратов $(4k) \times (4k)$.

37. Внимание к греко-латинским квадратам привлек Леонард Эйлер.

Задача Эйлера. В n полках служат по n офицеров n различных званий. Можно ли выстроить их в **каре** (квадратом) так, чтобы в каждой шеренге и в каждой колонне было n офицеров из разных полков, причем различных званий?

Ответ Эйлера. Можно, если n нечетно или делится на 4 (см. т. 36).

Гипотеза Эйлера. Нельзя, если $n = 4k + 2$ (при $n = 2, 6, 10, 14, \dots$).

38. Историю гипотезы Эйлера мы обсудим потом. Отметим, что геометрия из n^2 точек дает хороший способ построения греко-латинских квадратов: в ситуации т. 33 два различных пучка параллельных λ_k и λ_l дают пару взаимно ортогональных латинских квадратов — $[\lambda_k]$ и $[\lambda_l]$, — т.е. один греко-латинский квадрат. Для планирования экспериментов с учетом взаимодействия большого числа параметров нужны системы нескольких взаимно-ортогональных латинских квадратов; геометрии π_{n^2} дают такие системы (совокупности пучков параллельных — см. дальше).

Обратно, система взаимно ортогональных латинских квадратов $n \times n$ определяет некоторую модель $(\pi, \mathcal{L})$ (поясните, каким образом?). В этой модели выполнены аксиомы (3), (1), но не обязана выполняться аксиома (2) (поясните); однако, в этой модели через две различные точки не может проходить более одной прямой (почему?).

39. Число прямых и пучков в конечных геометриях.

Допустим, имеется геометрия из n^2 точек. Найдите:

(А) число прямых, выходящих из одной точки;

(Б) общее число прямых;

(В) число различных пучков параллельных прямых.

40. Задача. Каково наибольшее число попарно ортогональных друг другу латинских квадратов $n \times n$? [Дайте оценку сверху при произвольном n (точную оценку!).]

III. Геометрии над полями

«... Все точки, в отличие от людей, совершенно одинаковы и, следовательно, мы в состоянии различать их, лишь прикрепив к ним какие-нибудь ярлыки. Имена, которые мы используем, оказываются парами ... (x_1, x_2).»

(Герман Вейль)

41. Вспомним, что на обычной плоскости П можно выбрать систему координат Oxy и считать эту плоскость координатной плоскостью:

$$\Pi = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Прямые на этой плоскости задаются уравнениями $ax + by = c$, где $(a, b) \neq (0, 0)$. Именно эта алгебраическая интерпретация прямых неудобна тем, что одна и та же прямая может быть задана многими уравнениями, отличающимися друг от друга числовыми сомножителями. Однако любая прямая *однозначно* задается уравнением вида

$$x = x_0 \qquad \text{или} \qquad y = kx + l, \tag{$*$}$$

и наоборот, каждое такое уравнение задает прямую.

42. Вопросы. (А) Как на языке алгебры сформулировать такие геометрические утверждения:

а) две прямые пересекаются?

б) две прямые параллельны?

Указание: прямой соответствует уравнение, двум прямым — два уравнения.

(Б). Как по коэффициентам уравнений прямых на координатной плоскости (вида $(*)$) выяснить, будут ли прямые параллельными или пересекающимися?

43. Напрашивается следующее

Определение. Координатной плоскостью над произвольным полем F называется модель $(\pi, \mathcal{L})$, где

$$\pi = F^2 = F \times F = \big\{(x, y) | \, x \in F, \ y \in F\big\},$$

а $\mathcal{L}$ состоит из подмножеств π, задаваемых уравнениями

$$x = x_0, \ x_0 \in F \quad \text{(«вертикальные» прямые)}$$
$$\text{или } y = kx + l, \ k, l \in F \quad \text{(«наклонные» прямые).}$$

Теорема. Координатная плоскость $(\pi, \mathcal{L}) = F^2$ над произвольным полем F является аффинной плоскостью.

Для доказательства нужно проверить аксиомы (1), (2), (3), что мы сейчас сделаем в несколько этапов.

44. Как и на обычной плоскости, коэффициент $k \in F$ будем называть *угловым коэффициентом* прямой $y = kx + l$. Для вертикальных прямых удобно полагать $k = \infty$.

Лемма. $\forall k \in F \cup \{\infty\}$ $\forall A = (x_0, y_0) \in F^2$ через A проходит единственная прямая с угловым коэффициентом k. (Докажите: сначала существование, затем — единственность.)

45. Проверьте для модели F^2 аксиому (2) — покажите, что через любые две точки $A = (x_A, y_A)$ и $B = (x_B, y_B)$ проходит единственная прямая.

(**Указание:** воспользуйтесь леммой 44.)

46. Лемма. Прямые модели F^2 параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты $k_1, k_2 \in F \cup \{\infty\}$ одинаковы. (Докажите.)

47. Проверьте аксиому (1) в модели F^2 (используйте леммы 44 и 46).

48. Наконец, проверим аксиому (3). В качестве трех точек, не лежащих на одной прямой, предъявим

$$A = (0, 0), \qquad B = (1, 0), \qquad C = (1, 0).$$

(Докажите, что эти три точки действительно не лежат на одной прямой.)

49. Итак, по любому полю F мы построили аффинную плоскость F^2. В частности, если $F = \mathbb{Z}_p$, где p простое, мы получим конечную плоскость $F^2 = \mathbb{Z}_p^2$ (из ? точек). Можно, с другой стороны, взять $F = \mathbb{C}$ — получится т. н. *комплексная координатная плоскость* $\mathbb{C}^2 \approx \mathbb{R}^4$!

Вопрос. Где в наших рассуждениях мы использовали, что F — поле, а не произвольное кольцо — ведь уравнения вида $y = kr + l$ имеет смысл рассматривать и над произвольным кольцом!)?

50. Пример. Геометрия $\mathbb{Z}_3^2$.

Нарисовав «систему координат» Oxy в $\mathbb{Z}_3^2$, изобразим все пучки параллельных. Их будет 4, соответственно четырем возможным значениям углового коэффициента, $k = \infty, 0, 1, 2$, и они задаются совокупностями уравнений

$$\{x = x_0\}, \quad \{y = y_0\}, \quad \{y = \widetilde{1}x + l\}, \quad \{y = \widetilde{2}x + l\} \quad (l \text{ пробегает } \mathbb{Z}_3).$$

Удобно сначала написать таблицы точек прямых этих пучков:

$$\begin{array}{lllllll} & & x & = & \widetilde{0} & \widetilde{1} & \widetilde{2} \\ y & = & \widetilde{1}x & = & \widetilde{0} & \widetilde{1} & \widetilde{2} \\ y & = & \widetilde{1}x+\widetilde{1} & = & \widetilde{1} & \widetilde{2} & \widetilde{0} \\ y & = & \widetilde{1}x+\widetilde{2} & = & \widetilde{2} & \widetilde{0} & \widetilde{1} \end{array} \qquad \begin{array}{lllllll} & & x & = & \widetilde{0} & \widetilde{1} & \widetilde{2} \\ y & = & \widetilde{2}x & = & ? & ? & ? \\ y & = & \widetilde{2}x+\widetilde{1} & = & ? & ? & ? \\ y & = & \widetilde{2}x+\widetilde{2} & = & ? & ? & ? \end{array}$$

Нарисовав по таблицам эти пучки на сетке координат, узнаём нашу старую знакомую — геометрию π_9! (Разумеется, $\mathbb{Z}_2^2 = \pi_4$.)

51. Следующее конечное поле $F = \mathbb{Z}_5$ дает геометрию из 25 точек — π_{25}.

Задание. Нарисуйте на координатной плоскости $\mathbb{Z}_5^2$ пучки

$$\lambda(k) = \{y = kx + l \mid l \in \mathbb{Z}_5\} \quad \text{для } k = 1 \text{ и } 2.$$

52. Вопрос. А какому же полю отвечает геометрия π_{16}?! Ведь мы не знаем полей из 4 элементов! Может такого поля и нет (а геометрия π_{16} есть!)? А может, π_{16} отвечает кольцу $\mathbb{Z}_4$?

53. Рассмотрим модель $\mathbb{Z}_4^2$ (она определяется как в т. 43). **Вопрос.** В скольких точках пересекаются прямые $y = \widetilde{0}$ и $y = \widetilde{2}x$?(!)

Таким образом, модель $\mathbb{Z}_4^2$ не является аффинной плоскостью, и $\pi_{16} \neq \mathbb{Z}_4^2$.

Вопрос. Является ли аффинной плоскостью модель $\mathbb{Z}_6^2$?

54. Пойдем другим путем: попробуем построить поле F_4 из 4-х элементов. Вспомните, как по известным полям мы строили новые поля: например, по $\mathbb{R}$ поле $\mathbb{C}$! Попытаемся и тут расширить поле $\mathbb{Z}_2$, присоединив к нему корень какого-нибудь неприводимого уравнения.

55. Над полем $\mathbb{Z}_2$ всего четыре квадратных трехчлена:

$$x^2, \quad x^2+1, \quad x^2+x, \quad x^2+x+1.$$

Неприводимым из них будет только последний (покажите, что остальные приводимы!). Обозначим его «корень» через i и присоединим (символ) i к $\mathbb{Z}_2$. Рассмотрим множество

$$F_4 = \mathbb{Z}_2[i] = \{\alpha + \beta i |\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2\} = \{0,\, 1,\, i,\, 1+i\}.$$

Операции сложения и умножения на F_4 определяются как обычно (вспомните), только при умножении следует считать $i^2 = -i-1$ (так как $i^2+i+1 = 0$). Обозначив для краткости $1 + i = j$, составим таблицу умножения в F_4:

	1	i	j
1	1	i	j
i	i	j	?
j	j	?	?

Из таблицы видно, что умножение в F_4 обратимо. Нетрудно проверить, что и остальные аксиомы поля выполнены (не совсем очевидна лишь проверка ассоциативности умножения).

56. Итак, построено поле $F_4 = \mathbb{Z}_2[i] = \{0, 1, i, j\}$ из четырех элементов.

Задание. Выпишите таблицы пучков прямых в геометрии F_4^2 и нарисуйте эти пучки на координатной плоскости F_4^2 — что получится?!

57. Покажите, что существуют аффинные плоскости из 81 и 625 точек — расширьте поля $\mathbb{Z}_3$ и $\mathbb{Z}_5$ по неприводимым *квадратным* многочленам (нужно показать, что такие многочлены есть!).

58. Покажите, что существует аффинная плоскость из 64 точек, построив поле из 8 элементов. (Как его построить?)

59. Итак, с помощью метода координат мы научились строить геометрии из n^2 точек, где n — число элементов какого-нибудь поля F. Якобы известным нам полям из 2, 3, 4, 5, ... ?, 7, 8, 9 элементов отвечают плоскости из 4, 9, 16, 25, 49, 64, 81 точек. В этом ряду «блестит своим отсутствием»[1] 36. Возникает вопрос: существует ли поле из 6 элементов? плоскость из 36 точек?

60. Теорема. Поля из 6 элементов не существует.

Докажите эту теорему. **Указание:** предположите противное, рассмотрите в F_6 элементы $0,\ 1,\ 2 = 1+1,\ 3 = 1+1+1$ и т.д. и покажите, что либо $3 = 0$, либо $2 = 0$. (Это еще, конечно, не противоречие!) Далее, если, скажем, $3 = 0$, $2 \neq 0$, то в F_6 кроме 0, 1 и 2 есть какой-то элемент «a». Постройте с его помощью 7(!) *различных* элементов в F_6. Аналогично получается противоречие и в случае $2 = 0$ (тогда $3 = 1$).

Замечание. Из этой теоремы еще не следует, что не существует плоскости из 36 точек, ибо мы не знаем, любая ли плоскость получается из некоторого поля или нет! Следующий вопрос как раз и будет состоять в исследовании обратного перехода — от **геометрии** к **алгебре**. (Отметим, что в задаче Эйлера (т. 37) первый нетривиальный случай тоже 36!)

[1] Е. Н. Волков.

IV. Геометрическая алгебра

«По-видимому, поле является простейшей алгебраической структурой, которую можно придумать.»
(Герман Вейль)

61. Мы теперь умеем по любому полю F строить отвечающую ему аффинную плоскость F^2. Возникает естественный вопрос: нельзя ли, наоборот, по данной аффинной плоскости построить «отвечающее» ей поле?! (Можно ли придумать естественную структуру поля, исходя из аксиом геометрии?) Попытаемся найти ответ.

62. Вспомним геометрическое построение поля $\mathbb{R}$ из обычной плоскости.

Шаг 1. Выберем произвольную прямую k и отмечаем на ней две точки — 0 и $1 \neq 0$; Это будет ось координат Ox.

Шаг 2. Определяем на оси Ox операции сложения и умножения. Обычно при этом поступают так: каждую точку $M \in k$ задают координатой x_M:

$$M \in k \mapsto x_m = \pm|OM|/|01|,$$

где $\pm$ выбирается соответствующим образом, — а затем складываются и перемножаются *координаты* точек.

63. Первый шаг этой программы тривиален для любой аффинной плоскости, но второй...?!? В произвольной аффинной геометрии нет понятия расстояния между точками. Пойдем другим путем.

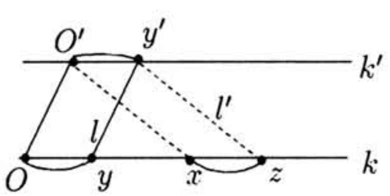
Задание. Вспомните геометрическое построение суммы и произведения двух точек x и y — точнее, отвечающих им отрезков $[OX]$ и $[OY]$.

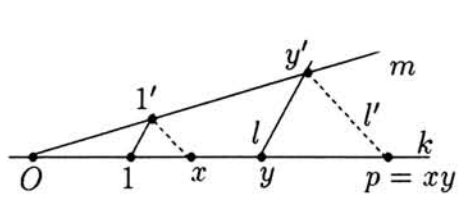
64. Построения из т. 63 наводят на следующую естественную конструкцию.

Пусть $(\pi, \mathcal{L})$ — произвольная (конечная или бесконечная) аффинная модель. Зафиксируем прямую $k \in \mathcal{L}$ и точки $0, 1 \in k$. Определим операции сложения и умножения на прямой k такими правилами.

А. **Сложение.** Зафиксируем прямую $k' || k$, $k' \neq k$ и точку $O' \in k'$. Для $x, y \in k$ положим:

$$x + y = z = l' \cap k, \quad \text{где } l' || (O'x),\ l' \ni y';\ y' = l \cap k',\ l || (OO'),\ l \ni y.$$





$\left(\frac{p}{x} = \frac{y}{1}\right)$

Б. **Умножение.** Зафиксируем прямую $m \ni O$, $m \neq k$ и точку $1' \in m$, $1' \neq O$. Для $x, y \in k$ положим

$$xy = p = l' \cap k, \quad \text{где } l' || (1'x);\ l' \ni y';\ \ y' = l \cap m,\ l || (11'),\ l \ni y.$$

65. Осталось «немного» — проверить аксиомы поля для $(k, +, \cdot)$.

Задание. А. Проверьте, что $0 + y = y$ и $x + 0 = x$.

Б. Проверьте, что $1 \cdot y = y$ и $x \cdot 1 = x$.

В. Докажите, что $\forall x\ \exists y$ т.ч. $x + y = 0$.

66. Коммутативность операций сложения и умножения при нашем определении совсем не очевидна.

Задание. Сформулируйте геометрические теоремы, отвечающие коммутативности:

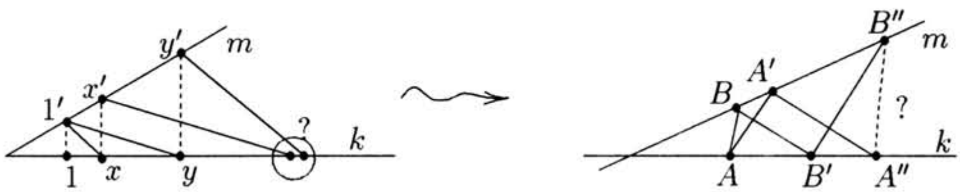
а) сложения $x + y = y + x$,

б) умножения $xy = yx$.

67. Комментарий. Коммутативность умножения соответствует так называемой *теореме Паппа*:

Если $k \pitchfork m$, то для точек $A, B', A'' \in k$, $B, A', B'' \in m$ выполнено

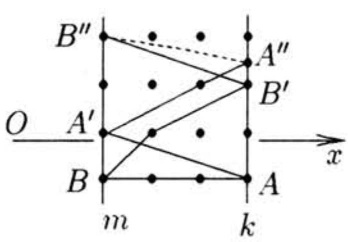
$$(AA')||(B'B'')\ \&\ (BB')||(A'A'') \quad \Longrightarrow \quad (A''B'')||(AB).$$



Та же самая (по формулировке) теорема в случае $m||k$ соответствует коммутативности сложения.

Вопрос. Вытекает ли теорема Паппа из аксиом соединения???

68. Ответ: Нет!!! Контрпример к теореме Паппа для $m||k$ легко построить на плоскости Гильберта (т. 20):



69. Конечно, можно включить теорему Паппа в качестве аксиомы в список аксиом соединения — это самый легкий выход. (Отметим, что для аффинной плоскости F^2 над полем F эта теорема-аксиома выполнена — поясните!) Однако остается целый ряд вопросов:

а) ассоциативность (сложения и умножения),

б) дистрибутивность,

в) обратимость умножения.

Даже нарисовать геометрические конфигурации, отвечающие этим аксиомам поля — довольно сложная задача (попробуйте). Мы отбросим пока вопрос о коммутативности и попробуем понять, как можно доказать ассоциативность наших операций.

70. Заметим, что определенные в т. 64 операции сложения и умножения допускают интерпретацию с помощью геометрических преобразований — в случае обычной плоскости, именно:

$$x + y = z \Leftrightarrow \overrightarrow{Oy} + \overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{Oz},$$

$$xy = p \Leftrightarrow \mathrm{H}_O^y \circ \mathrm{H}_O^x = \mathrm{H}_O^p,$$

где $\overrightarrow{AB}$ — параллельный перенос, т.е. вектор, заданный точками A и B, H_O^k — центральная гомотетия с центром O и коэффициентом «k». (Напомним, что сумма векторов — это композиция этих параллельных переносов, так что первую из наших формул можно записать в виде $\overrightarrow{Oy} \circ \overrightarrow{Ox} = \overrightarrow{Oz}$.)

Попытаемся на произвольной аффинной плоскости $(\pi, \mathcal{L})$ ввести понятие вектора (параллельного переноса) и центральной гомотетии. Решающим здесь оказывается следующее соображение: векторы (переносы) и центральные гомотетии любую прямую $k \in \mathcal{L}$ отображают на прямую $k' || k$, т.е. эти отображения сохраняют пучки параллельных, а они (пучки) определены на любой аффинной плоскости!

71. Определение. *Гомотетией* f аффинной плоскости $(\pi, \mathcal{L})$ называется биективное отображение $f : \pi \longrightarrow \pi$, обладающее следующими свойствами:

(а) $\forall k \in \mathcal{L}\ f(k) \in \mathcal{L}$ (инвариантность семейства прямых), и

(б) $\forall k \in \mathcal{L}\ f(k) || k$ (инвариантность пучков параллельных прямых).

Примеры: $\overrightarrow{a}$ и H_O^k на обычной плоскости.

Обозначим через G множество всех гомотетий аффинной плоскости $(\pi, \mathcal{L})$.

Теорема. (1) $f, g \in G \Rightarrow f \circ g \in G$;

(2) $E \in G$ и $\forall f \in G\ f^{-1} \in G$ (E — тождественное отображение).

(Докажите. Указание к п. (2): рассмотрите $l = (AB)$, где $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ — точки прямой $k \in \mathcal{L}$; покажите, что $(f(l) = k \Rightarrow f^{-1}(k) = l)$.)

72. Теорема. Если $f \in G$ и $f(O) = O$ для некоторой точки $O \in \pi$, то $\forall k \in \mathcal{L}$ $k \ni O \Rightarrow f(k) = k$. (Докажите.)

Описанные в теореме гомотетии называются *центральными*, с центром в точке O; мы для них будем писать $f = h_O$.

Следствие. Если $h_O(A) = B$, $A \neq O$, то $\forall C \notin (OA)\ \ h_O(C) = (OC) \cap b$, где $b \ni B$, $b || (AC)$ (Докажите.)

Таким образом, мы пришли к «старому» пониманию гомотетии h_O.

73. Следствие. Если $f \in G$ и $\exists O_1, O_2 \in \pi$ такие, что $f(O_1) = O_1$, $f(O_2) = O_2$, то $f = E$ (т.е. $\forall A\ f(A) = A$). (Докажите.)

Итак, для любой гомотетии $f \in G$ либо $f = E$ (и все точки «неподвижны»), либо $f = h_O$ (и f имеет ровно одну неподвижную точку — O), либо $\forall A\ \ f(A) \neq A$ (т.е. не имеет неподвижных точек). Гомотетии третьего типа называют *параллельными переносами*.

74. Пусть $\mathcal{T}$ — множество всех (параллельных) переносов плоскости, дополненное тождественным преобразованием E.

Теорема. (1) $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T} \Longrightarrow \tau_1 \circ \tau_2 \in \mathcal{T}$;

(2) $\tau \in \mathcal{T} \Longrightarrow \tau^{-1} \in \mathcal{T}$.

(Докажите.)

75. Теорема. Если $\tau \in \mathcal{T}$ и $\tau(A) = B$, то $\forall C \notin (AB)$ $\tau(C) = C' = c \cap b$, где $c \ni C$, $c||(AB)$ и $b \ni B$, $b||(AC)$.

(Докажите.)

Таким образом, мы опять пришли к «обычному» конструктивному понятию переноса! В ситуации этой теоремы будем писать $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CC'}$ (и $\tau = \overrightarrow{AB}$).

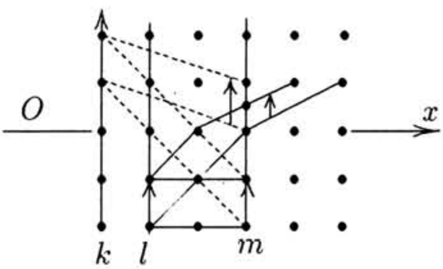
76. Для определения операции сложения на «оси k» (см. т. 70) нам нужно как раз конструктивное определение переноса (нужны переносы Ox!). Займемся ими подробнее.

Определение. Для $A \neq B$ перенос $\tau = \overrightarrow{AB}$ определяется так:

а) для $C \notin (AB)$ $\tau(C) = C'$ т.ч. $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$ (см. формулировку теоремы 75),

б) для $C \in (AB)$ $\tau(C) = C'$ т.ч. $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$, где $D \notin (AB)$ и $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AB}$, (т.е. $D' = \tau(D)$ — определяется как в п. а)).

В п. б) мы произвольно выбирали точку $D \notin (AB)$, поэтому возникает **вопрос:** корректно ли наше определение? **Ответ: нет!!! Контрпример** можно построить, опять-таки, на плоскости Гильберта:



77. Малая аксиома Дезарга (МАД). Если $k||l||m$; $K, K_1 \in k$; $L, L_1 \in l$; $M, M_1 \in m$, то

$$(KL)||(K_1L_1) \;\&\; (LM)||(L_1M_1) \implies (KM)||(K_1M_1).$$

Из примера 76 видно, что (МАД) *не следует* из аксиом соединения. Добавим ее к списку аксиом.

Теорема. (1) Из аксиом (1), (2), (3), (МАД) вытекает корректность определения 76.

(2) При этом отображения $\tau = \overrightarrow{AB}$, определенные в т. 76, являются параллельными переносами плоскости $(\pi, \mathcal{L})$, т.е. $\tau \in \mathcal{T}$.

Замечание. Покажите, что если (МАД) не выполнена для аффинной модели $(\pi, \mathcal{L})$, то определение 76 не корректно (без (МАД) нельзя обойтись!)

78. Итак, чтобы определить перенос $\overrightarrow{AB}$ для произвольных точек $A \neq B$, пришлось ввести еще одну аксиому соединения. Плоскости, в которых выполнена аксиома МАД, называются (мало) *дезарговыми*. Остальные, недезарговы плоскости «плохи» тем, что у них «мало» переносов.

Теорема. Любая плоскость F^2 (над полем F) является дезарговой.

(Докажите.)

79. Теперь мы в состоянии провести первый шаг в построении поля по аффинной дезарговой плоскости — мы можем определить операцию сложения на прямой (оси) $k = 01$, положив для $x, y \in k$

$$x + y = z \qquad \text{т. ч.} \qquad \overrightarrow{Oz} = \overrightarrow{Oy} + \overrightarrow{Ox}.$$

(Сумма векторов-переносов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ определяется как их композиция:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}.)$$

Лемма. Определенная выше точка $x = x + y$ принадлежит прямой k. (Докажите.)

80. Итак, на прямой k определена операция сложения.

Теорема. Операция «+» ассоциативна, обладает нейтральным элементом 0 ($00 = 0 = E$) и обратима ($\forall x \in k \;\; \exists y \in k \;\; x + y = y + x = 0$).

(Докажите — поясните.)

Вопрос о коммутативности сложения (справедливость теоремы Паппа для параллельных прямых) опять-таки пока остается открытым.

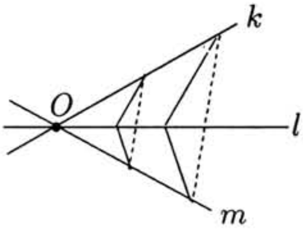
Заключительные замечания

А. Оказывается, $\forall \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T} \;\; \tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$ (это совсем нетривиальный факт — композиция произвольных (например, центральных) гомотетий не коммутативна (вообще говоря)). Таким образом, с аксиомами сложения все в порядке.

Б. Для определения умножения (как в т. 70) нам нужны гомотетии h_O^x с центром O, переводящие точку $1 \in k$ в точку $x \in k$. Их конструктивное определение (оно основывается на следствии 72) оказывается некорректным, если не выполнена

Большая аксиома Дезарга (БАД): Если $k, l, m \ni O$ и $K, K_1 \in k$; $L, L_1 \in l$; $M, M_1 \in m$, то

$$(KL) || (K_1 L_1) \;\&\; (LM) || (L_1 M_1) \implies (KM) || (K_1 M_1).$$



В. Из (БАД) следует (МАД), и дезарговыми плоскостями принято на самом деле называть модели $(\pi, \mathcal{L})$, в которых выполнены аксиомы (1), (2), (3), (БАД). Пример недезарговой плоскости — плоскость Гильберта (тт. 20, 68, 76).

Г. В любой дезарговой геометрии на оси $k = (01)$ наряду со сложением можно определить и умножение — как в т. 70, с помощью центральных гомотетий. При таком определении очевидны ассоциативность и обратимость умножения, можно проверить дистрибутивность, но не удается доказать коммутативность умножения (т.е. вывести из аксиом дезарговой плоскости теорему Паппа для пересекающихся прямых)!

Д. Подобные алгебраические объекты — «почти-поля», в которых не выполнена только коммутативность умножения, — называются *телами*.

Алгебраическая теорема. Любое конечное тело является полем.

Таким образом, для конечных геометрий *с помощью алгебры* удается из аксиом (1), (2), (3), (БАД) вывести теорему Паппа. Геометрическое ее доказательство пока неизвестно!!

Е. Алгебраическая теорема. Любое конечное поле имеет p^k элементов, где p — некоторое простое число.

Следствие. (из теорем Д и Е). Не существует дезарговых плоскостей из 36, из 100, из 144, из 196, из 225 и т.д. точек. В частности, не существует дезарговых геометрий из $(4k+2)^2$ точек.

Ж. Это следствие имеет некоторое отношение к гипотезе Эйлера (т. 37). Оказывается, что не существует и *недезарговых* аффинных геометрий из 36 точек. Более того, не существует греко-латинских квадратов 6×6. Это было выяснено в 1901 году французским математиком Тарри **перебором!!!**

З. Наконец, в 1959 году американские математики Паркер, Боус и Штрикхель показали, что гипотеза Эйлера при всех остальных $n = 4k+2$, начиная с 10, **неверна!!!** Ниже изображен греко-латинский квадрат 10×10, где буквы α и A заменены цифрами от 0 до 9 — проверьте!

00	47	18	76	29	93	85	34	61	52
86	11	57	28	70	39	94	45	02	63
95	80	22	67	38	71	49	56	13	04
59	96	81	33	07	48	72	60	24	15
73	69	90	82	44	17	58	01	35	26
68	74	09	91	83	55	27	12	46	30
37	08	75	19	92	84	66	23	50	41
14	25	36	40	51	62	03	77	88	99
21	32	43	54	65	06	10	89	97	78
42	53	64	05	16	20	31	98	79	87

Александр Николаевич Земляков,
кандидат педагогических наук,
ведущий научный сотрудник
лаборатории дифференциации образования
Института общего среднего образования
Российской академии образования (ИОСО РАО).

E-mail: zemmm@yandex.ru

О шестиугольнике-параллелограмме

Н. М. Седракян

Наири Седракян — учитель математических классов г. Еревана, автор нашего журнала (№2 (13), 2000 г.). В статье изучаются свойства специального класса плоских шестиугольников.

Рассмотрим выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 1). Назовем противоположными пары сторон AF и CD, AB и DE, BC и EF, а диагонали AD, BE и CF — главными диагоналями.

Определение. Назовем шестиугольником-параллелограммом выпуклый шестиугольник, противоположные стороны которого параллельны.

Теорема 1. Если $ABCDEF$ шестиугольник-параллелограмм, то

$$\frac{AF-CD}{\sin\angle B}=\frac{BC-EF}{\sin\angle A}=\frac{DE-AB}{\sin\angle C}.$$

Доказательство. Действительно, предположим $AF-CD>0$. Рассмотрим параллелограмм $AMDN$ (рис. 2). Имеем $\triangle MBC\sim\triangle NEF$, следовательно,

$$\frac{BC}{MC}=\frac{EF}{FN}. \tag{1}$$

Поэтому, $\frac{BC}{MC}=\frac{BC-EF}{MC-FN}=\frac{BC-EF}{AF-CD}$. Имеем, что $\frac{BC}{MC}=\frac{\sin\angle M}{\sin\angle B}=\frac{\sin\angle A}{\sin\angle B}$, следовательно, $\frac{AF-CD}{\sin\angle B}=\frac{BC-EF}{\sin\angle A}$ (если $AF=CD$, то $MC=NF$, а из (1) получим, что $BC=EF$). Аналогично получим, что $\frac{AF-CD}{\sin\angle B}=\frac{DE-AB}{\sin\angle C}$.

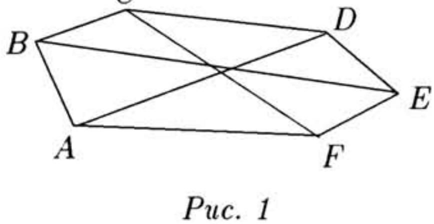


Рис. 1

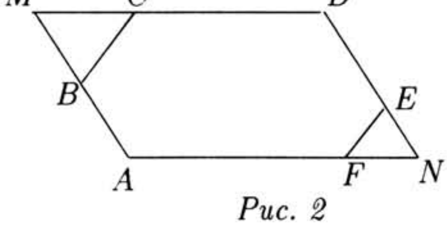


Рис. 2

Следствие 1. Если $ABCDEF$ шестиугольник-параллелограмм, то разности длин противоположных сторон $AF - CD$, $BC - EF$ и $DE - AB$ или одновременно равны нулю, или имеют один и тот же знак.

Определение. Назовем шестиугольным параллелограммом шестиугольник-параллелограмм, противоположные стороны которого равны.

Проведем главные диагонали шестиугольника-параллелограмма (рис. 3). Из следствия 1 следует, что отрезки A_0C_0, C_0E_0 и A_0E_0 содержат середины E_1, A_1 и C_1 диагоналей CF, BE и AD соответственно. Таким образом, верно

Следствие 2. Если в шестиугольнике-параллелограмме главные диагонали пересекаются в одной точке, то точка пересечения делит каждую из диагоналей пополам.

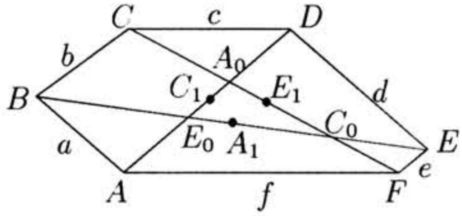


Рис. 3

Следовательно, диагонали шестиугольника-параллелограмма пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда он является шестиугольным параллелограммом.

Заметим, что $E_1C_1 || AF$ и $E_1C_1 = \frac{|CD-AF|}{2}$. Аналогично $A_1E_1 = \frac{|CB-EF|}{2}$, $A_1C_1 = \frac{|ED-AB|}{2}$.

Теорема 2. Если $ABCDEF$ шестиугольник-параллелограмм, то

$$S_{\triangle BDF} = S_{\triangle ACE}.$$

Доказательство. Имеем, что $S_{\triangle BDF} = S_{\triangle BDE_0} + S_{\triangle DA_0F} + S_{\triangle BC_0F} + S_{\triangle A_0B_0C_0} = S_{\triangle AE_0E} + S_{\triangle AA_0C} + S_{\triangle CC_0E} + S_{\triangle A_0B_0C_0} = S_{\triangle ACE}$ (рис. 3).

Приведем также другое доказательство этой теоремы.

Рассмотрим рис. 4 а и 4 б.

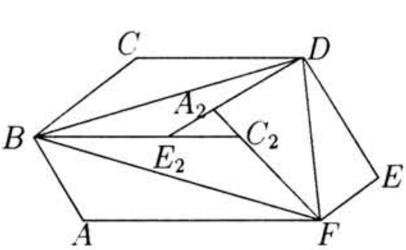


Рис. 4 а)

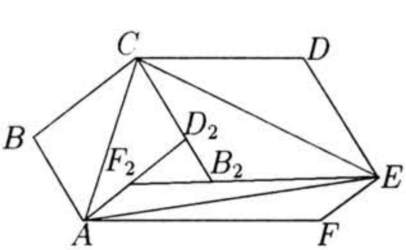


Рис. 4 б)

Имеем

$$S_{\triangle BDF} = \frac{1}{2}(S + S_{\triangle A_2E_2C_2}), \quad S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2}(S + S_{\triangle B_2F_2D_2}),$$

где $S = S_{ABCDEF}$. С другой стороны $\triangle A_2E_2C_2 = \triangle B_2F_2D_2$, так как

$$A_2E_2 = |BC - EF| = F_2D_2 = 2A_1E_1, \qquad A_2C_2 = 2A_1C_1 = B_2D_2,$$

$$E_2C_2 = 2E_1C_1 = F_2B_2.$$

Следовательно, $S_{\triangle BDF} = S_{\triangle ACE}$. Из вышесказанного следует

Следствие 1. Если $ABCDEF$ шестиугольник-параллелограмм, то имеет место неравенство

$$\frac{S}{2} \leq S_{\triangle ACE} \leq \frac{S}{2} + 2S_{\triangle A_0C_0E_0}.$$

(см. рис. 3).

Следствие 2. Если главные диагонали шестиугольника-параллелограмма пересекаются в одной точке, то $S_{\triangle ACE} = \frac{S}{2}$.

Теорема 3. Для того, чтобы вокруг шестиугольника-параллелограмма можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы его три главные диагонали были равны.

Доказательство необходимости очевидно.

Доказательство достаточности. Пусть главные диагонали шестиугольника-параллелограмма равны. Тогда прямые, содержащие биссектрисы внутренних углов треугольника $A_0C_0E_0$, пересекающиеся в одной точке, являются срединными перпендикулярами сторон шестиугольника-параллелограмма. Таким образом, вокруг шестиугольника-параллелограмма можно описать окружность, центр которой совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник $A_0C_0E_0$.

Теорема 4. Существует плоскость, ортогональная проекция на которую данного шестиугольника параллелограмма является шестиугольником-параллелограммом с равными главными диагоналями.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. Если $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ попарно не параллельные векторы, такие, что $\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b} + \nu\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$, где $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \neq 0$, то для существования плоскости, ортогональные проекции на которую данных векторов равны (по модулю), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$|\lambda| \leq |\mu| + |\nu|, \qquad |\mu| \leq |\lambda| + |\nu|, \qquad |\nu| \leq |\mu| + |\lambda|. \tag{2}$$

Для доказательства необходимости выполнения неравенства (2) выберем точки A, B и C такими, что $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mu\overrightarrow{b}$. Тогда $\overrightarrow{CA} = \nu\overrightarrow{c}$. Пусть на плоскости α модули ортогональных проекций векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ равны a (ясно, что $a \neq 0$). Рассмотрим ортогональные проекции точек A, B и C на плоскость α — A_1, B_1 и C_1. Имеем $A_1B_1 = |\lambda|a$, $B_1C_1 = |\mu|a$, $A_1C_1 = |\nu|a$, поэтому имеют место неравенства (2).

Теперь докажем достаточность условий (2). Пусть

$$\min\left(\frac{AB}{|\lambda|}, \frac{BC}{|\mu|}, \frac{AC}{|\nu|}\right) = \frac{AB}{|\lambda|}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \left(\sqrt{AB^2 - x^2\lambda^2} + \sqrt{CB^2 - x^2\mu^2} - \sqrt{AC^2 - x^2\nu^2}\right) \times$$

$$\times \left(\sqrt{AB^2 - x^2\lambda^2} + \sqrt{AC^2 - x^2\nu^2} - \sqrt{CB^2 - x^2\mu^2}\right),$$

которая непрерывна на отрезке $\left[0; \frac{AB}{|\lambda|}\right]$. Имеем $f(0) > 0$ и $f\left(\frac{AB}{|\lambda|}\right) \le 0$, следовательно, существует $x_0 \in \left(0; \frac{AB}{|\lambda|}\right]$, в которой $f(x_0) = 0$. Пусть

$$\sqrt{AB^2 - x_0^2\lambda^2} + \sqrt{CB^2 - x_0^2\mu^2} = \sqrt{AC^2 - x_0^2\nu^2}.$$

Возьмем точки A_1, B_1 и C_1, для которых выполняются условия $A_1B_1 = |\lambda|x_0$, $B_1C_1 = |\mu|x_0$ и $A_1C_1 = |\nu|x_0$. Существование таких точек следует из (2). В точках B_1 и C_1 восстанавливаем перпендикуляры к плоскости $(A_1B_1C_1)$ (рис. 5) и выберем на них точки M и N так, что $A_1M = AB$, $MN = BC$, тогда

$$A_1N = \sqrt{x_0^2\nu^2 + \left(\sqrt{AB^2 - x_0^2\lambda^2} + \sqrt{CB^2 - x_0^2\mu^2}\right)^2} = AC.$$

Лемма доказана.

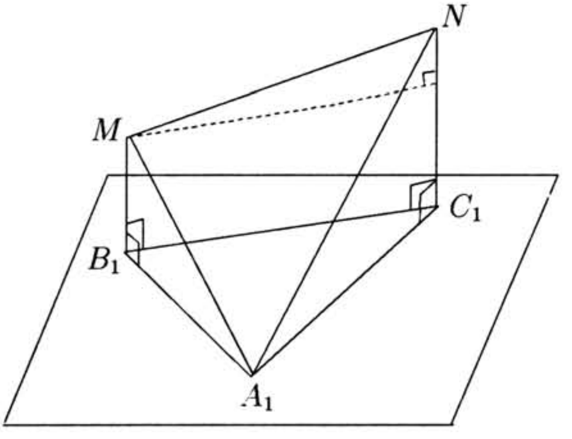


Рис. 5

В случае

$$\sqrt{AB^2 - x_0^2\lambda^2} + \sqrt{AC^2 - x_0^2\nu^2} = \sqrt{CB^2 - x_0^2\mu^2}$$

доказательство леммы получается аналогично.

Доказательство теоремы 4 следует из леммы и следующих соотношений:

$$\overrightarrow{A_0C_0} = \left(1 - \frac{c}{f+c} - \frac{e}{b+e}\right)\overrightarrow{CF}, \qquad \overrightarrow{C_0E_0} = \left(1 - \frac{a}{d+a} - \frac{e}{b+e}\right)\overrightarrow{EB},$$

$$\overrightarrow{E_0A_0} = \left(1 - \frac{c}{f+c} - \frac{a}{d+a}\right)\overrightarrow{AD}$$

(см. рис. 3). Проверка условия выполнения леммы необходима.

Теорема 5. Вокруг шестиугольника-параллелограмма можно описать эллипс или окружность.

Доказательство. Пусть $ABCDEF$ шестиугольник-параллелограмм, α — та плоскость, ортогональные проекции на которую главных диагоналей данного шестиугольника равны. Если $\alpha \parallel (ABC)$, то вокруг $ABCDEF$ можно описать окружность. Если $\alpha \nparallel (ABC)$, то из вершин шестиугольника $ABCDEF$ опустим перпендикуляры на плоскость α (рис. 6). Из теоремы 3 следует, что существует сфера, которая касается всех этих перпендикуляров. По две стороны от плоскости $(ABCDEF)$ возьмем две сферы, касающиеся перпендикуляров и плоскости $(ABCDEF)$ в точках K и N. Точки касания этих сфер с перпендикулярами являются вершинами прямой шестиугольной призмы $A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2B_2C_2D_2E_2F_2$.

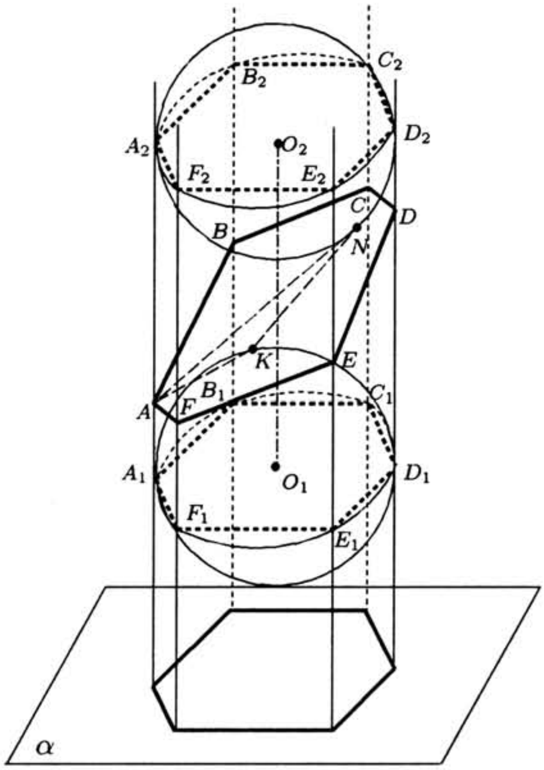


Рис. 6

Имеем $AN + AK = AA_2 + AA_1 = A_1A_2 = B_1B_2 = BN + BK = \cdots = FN + FK$, следовательно, точки A, B, C, D, E и F находятся на эллипсе с фокусами в точках N и K. Заметим, что фокусы эллипса, описанного вокруг шестиугольника-параллелограмма, находятся внутри шестиугольника. Ясно, что отрезок, соединяющий центры этих сфер, параллелен прямой A_1A_2 и проходит через середину отрезка NK, т.е. через центр эллипса (окружности).

Поскольку отрезки, соединяющие середины противоположных сторон шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, проходят через центр описанной вокруг него окружности, а параллельная A_1A_2 проекция $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ на плоскость $(ABCDEF)$ является $ABCDEF$, то имеет место следующая задача.

Задача 1. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон шестиугольника-параллелограмма, проходят через центр описанного вокруг него эллипса (окружности).

Обобщением этой задачи является задача М1329 из журнала «Квант», которая гласит:

Задача 2. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого шестиугольника $ABCDEF$, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется условие $S_{\triangle BDF} = S_{\triangle ACE}$.

Задача 3. Стороны треугольников ACE и BDF в шестиугольнике-параллелограмме $ABCDEF$ пересекаются в точках A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 и F_1 (рис. 7). Доказать, что главные диагонали шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ пересекаются в одной точке.

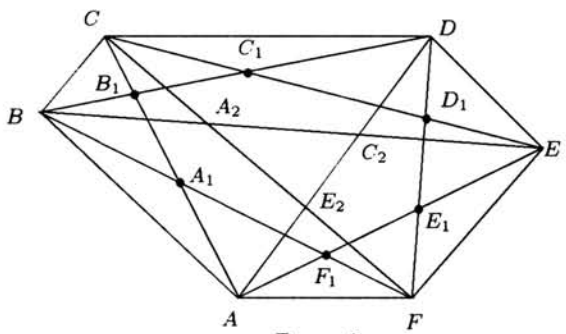


Рис. 7

Доказательство. Используя теорему синусов, получим

$$\frac{\sin\angle AE_2F_1}{\sin\angle FE_2F_1} = \frac{AF_1}{FF_1}\cdot\frac{\sin\angle E_2AF_1}{\sin\angle E_2FF_1} = \frac{\sin\angle AFB}{\sin\angle EAF}\cdot\frac{\sin\angle E_2AF_1}{\sin\angle E_2FF_1} =$$

$$= \frac{AB}{EF}\frac{\sin\angle BAF}{\sin\angle AFE}\cdot\frac{AE}{\sin\angle E_2FE_1}\cdot\frac{\sin\angle E_2AF_1}{BF} = \frac{AB\cdot ED}{EF\cdot BC}\cdot\frac{\sin\angle BAF}{\sin\angle AFE}\cdot\frac{\sin\angle ADE}{\sin\angle BCF} =$$

$$= \frac{AB\cdot ED}{EF\cdot BC}\cdot\frac{\sin\angle CDE}{\sin\angle BCD}\cdot\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CFE} = \frac{\sin\angle DE_2C_1}{\sin\angle CE_2C_1}.$$

Следовательно, $\angle AE_2F_1 = \angle DE_2C_1$, т.е. точки E_2, F_1 и C_1 находятся на одной прямой. Аналогично доказывается, что $A_2 \in (B_1E_1)$ и $C_2 \in (A_1D_1)$. Для доказательства того, что отрезки E_2F_1, C_2D_1, A_2B_1 пересекаются в одной точке, проверим выполнение условия теоремы Чевы для треугольника $A_2C_2E_2$ в следующем виде:

$$\frac{\sin\angle AE_2F_1}{\sin\angle FE_2F_1}\cdot\frac{\sin\angle EC_2D_1}{\sin\angle DC_2D_1}\cdot\frac{\sin\angle CA_2B_1}{\sin\angle BA_2B_1} =$$

$$= \frac{AB\cdot DE}{FE\cdot BC}\cdot\frac{CD\cdot AF}{AB\cdot DE}\cdot\frac{EF\cdot CB}{CD\cdot AF}\cdot\frac{\sin\angle A}{\sin\angle F}\cdot\frac{\sin\angle E}{\sin\angle D}\cdot\frac{\sin\angle C}{\sin\angle B}\times$$

$$\times\frac{\sin\angle ADE}{\sin\angle FCB}\cdot\frac{\sin\angle AFC}{\sin\angle BED}\cdot\frac{\sin\angle EBC}{\sin\angle FAD} =$$

$$= \frac{\sin\angle ADE}{\sin\angle BED}\cdot\frac{\sin\angle AFC}{\sin\angle FAD}\cdot\frac{\sin\angle EBC}{\sin\angle FCB} = \frac{C_2E}{C_2D}\cdot\frac{AE_2}{E_2F}\cdot\frac{CA_2}{BA_2} = \frac{BE}{AD}\cdot\frac{AD}{CF}\cdot\frac{CF}{BE} = 1.$$

Задачу 3 можно доказать также, воспользовавшись теоремой 4 и следующей задачей.

Задача 4. Если в окружность вписаны два треугольника (вокруг окружности описаны два треугольника), стороны которых пересекаются в точках A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, то главные диагонали шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ пересекаются в одной точке.

Доказательство этой задачи аналогично доказательству задачи 3, если точки на окружности, принадлежащие треугольникам, обозначить буквами A, B, C, D, E, F.

Ясно, что $\triangle F_1B_1D_1 \sim \triangle C_1E_1A_1$ (см. рис. 8), где $ABCDEF$ шестиугольник-параллелограмм. Поэтому преобразование гомотетии с центром в точке O, при которой $C_1 \mapsto F_1$ и $A_1 \mapsto D_1$, имеем $E_1 \mapsto B_1$. Таким образом, верна следующая задача.

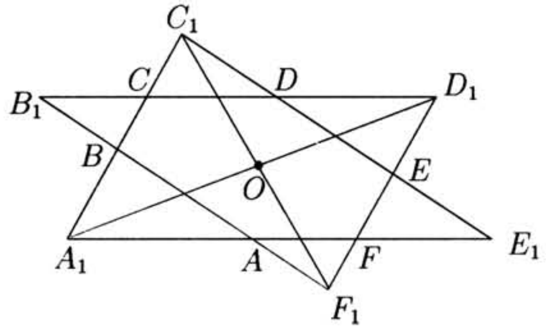


Рис. 8

Задача 5. Если $ABCDEF$ шестиугольник-параллелограмм, то главные диагонали шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ пересекаются в одной точке (см. рис. 8) и каждая из главных диагоналей делит шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ на две равновеликие фигуры.

Верно и обратное утверждение.

Если каждая из главных диагоналей выпуклого шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ делит его на две равновеликие фигуры, то его главные диагонали пересекаются в одной точке.

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что $B_1D_1||A_1E_1$, $C_1E_1||B_1F_1$, $D_1F_1||A_1C_1$ и воспользоваться первой частью задачи 5. Заметим также, что точка пересечения главных диагоналей шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ совпадает с центром преобразования гомотетии, при которой $\triangle F_1B_1D_1$ переходит в $\triangle C_1E_1A_1$.

Далее следуют задачи, которые придуманы автором данной статьи (а также задачи 1–4).

Задача 6. Для шестиугольника-параллелограмма $ABCDEF$ верно неравенство $R_A + R_C + R_E \geq p$, где R_A, R_C, R_E радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников FAB, BCD, DEF соответственно, а p — полупериметр шестиугольника $ABCDEF$.

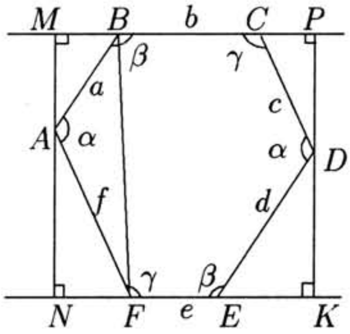


Рис. 9

Доказательство. Рассмотрим рис. 9. Имеем $BF \geq MN$, $BF \geq PK$, откуда следует $BF \geq \frac{MN+PK}{2}$, или $2R_A \sin\alpha \geq \frac{(a\sin\beta + f\sin\gamma)+(c\sin\gamma + d\sin\beta)}{2}$. Следовательно, $R_A \geq \frac{1}{4}(a+d)\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{1}{4}(f+c)\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Аналогично получим

$$R_C \geq \frac{1}{4}(f+c)\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} + \frac{1}{4}(b+e)\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \text{ и } R_E \geq \frac{1}{4}(b+e)\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} + \frac{1}{4}(d+a)\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Складывая полученные неравенства с использованием неравенства $x + \frac{1}{x} \geq 2$ $(x > 0)$, получим $R_A + R_C + R_E \geq \frac{1}{2}(a+d) + \frac{1}{2}(f+c) + \frac{1}{2}(b+e) = p$.

Заметим, что $R_A + R_C + R_E = p$ имеет место тогда и только тогда, когда шестиугольник $ABCDEF$ правильный.

На рис. 10 изображен шестиугольный параллелограмм, который будем рассматривать как параллепипед, поэтому имеем

$$BE^2 + AD^2 + CF^2 + MN^2 = 2(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + EF^2 + FA^2),$$

откуда следует $AD^2 + CF^2 + BE^2 \leq 2(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + EF^2 + FA^2)$, последнее неравенство приводит к следующей задаче.

Задача 7. В произвольном шестиугольнике сумма квадратов главных диагоналей не превосходит удвоенной суммы квадратов сторон.

Доказательство. Пусть задан шестиугольник $ABCDEF$ (рис 11.).

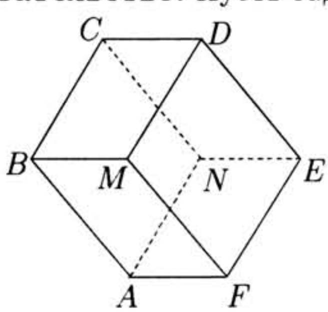


Рис. 10

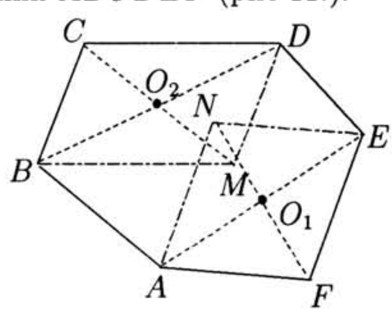


Рис. 11

Рассмотрим параллелограммы $BCDM$ и $AFEN$. Ясно, что

$$2(BC^2 + CD^2) + 2(EF^2 + FA^2) + 2(AB^2 + DE^2) =$$

$$= BD^2 + CM^2 + AE^2 + FN^2 + 2(AB^2 + ED^2) =$$

$$= (BD^2 + AE^2 + AB^2 + ED^2) + (CM^2 + FN^2 + AB^2 + ED^2) \geq$$

$$\geq AD^2 + BE^2 + CM^2 + FN^2 + \frac{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED})^2}{2} = AD^2 + BE^2 + CM^2 + FN^2 + 2\left(\overrightarrow{O_1O_2}\right)^2 =$$

$$= AD^2 + BE^2 + CM^2 + FN^2 + \frac{(\overrightarrow{FM} + \overrightarrow{NC})^2}{2} \geq$$

$$\geq AD^2 + BE^2 + \frac{(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{FN})^2}{2} + \frac{(\overrightarrow{FM} + \overrightarrow{NC})^2}{2} \geq$$

$$\geq AD^2 + BE^2 + \left(\frac{\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{FN} + \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{NC}}{2}\right)^2 = AD^2 + BE^2 + FC^2.$$

Здесь мы воспользовались неравенством $BD^2 + DE^2 + AE^2 + AB^2 \geq AD^2 + BE^2$, которое можно получить из неравенства $\frac{\vec{a}^2 + \vec{b}^2}{2} \geq \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}\right)^2$.

Заканчивая заметку, сформулируем три задачи, решение которых, мы надеемся, будет полезно читателю.

Задача 8. В шестиугольнике-параллелограмме $ABCDEF$ известно, что

$$AB + DE = BC + EF = CD + FA.$$

Доказать, что $\angle D_1OE_1 = \frac{1}{2}\angle DEF$, где точки A_1, B_1, D_1 и E_1, соответственно, середины сторон AB, BC, DE и EF; а точка O является общей для отрезков A_1D_1 и B_1E_1.

Задача 9. В шестиугольнике-параллелограмме обозначены точками A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, соответственно, середины сторон AB, BC, CD, DE, EF и FA. Доказать, что

а) из отрезков A_1D_1, B_1E_1 и C_1F_1 можно построить треугольник,

б) $\frac{1}{2}S_{\Delta BDF} < S_1 \leq S_{\Delta BDF}$, где S_1 — площадь треугольника со сторонами A_1D_1, B_1E_1 и C_1F_1.

Задача 10. В шестиугольнике-параллелограмме $ABCDEF$ известно, что

$$AB + DE = BC + EF = CD + FA.$$

Докажите, что периметр шестиугольника $ABCDEF$ не превосходит суммы длин главных диагоналей.

Педальный треугольник.

А. Руинский

Продолжаем публикацию серии геометрических статей постоянного автора нашего журнала Александра Руинского. В настоящей статье изучается ряд задач, связанных с педальным треугольником, рассматриваются также смежные вопросы. Статья печатается с продолжением, окончание — в следующем номере.

Введение.

Данная работа является продолжением и обобщением моей статьи «Заметки об окружности Аполлония» (Математическое образование 2-3, апрель-сентябрь 1999 г.).

Основная проблема, рассматриваемая в той статье — равнобедренный педальный треугольник. В этой статье будет исследована более общая задача — педальный треугольник, подобный данному. Кроме того, в статье будет освещен ряд других интересных задач: прямоугольный педальный треугольник, педальный треугольник, подобный базовому, окружности Схоуте и др.

Основные определения и обозначения.

1. Базовый треугольник — $\triangle ABC$. Его стороны — a; b; c.

2. Радиус описанной окружности базового треугольника — R.

3. Расстояние от точки X до вершин $\triangle ABC$ — R_a; R_b; R_c.

4. Пусть дан $\triangle ABC$ и X — некоторая точка плоскости. Из точки X проведем $XX_a \perp BC$, $XX_b \perp AC$ и $XX_c \perp AB$. $\triangle X_aX_bX_c$ называется ***педальным треугольником*** точки X.

5. Стороны педального треугольника т. X — x_a; x_b; x_c. Для сторон педального треугольника справедливы следующие формулы:

$$x_a = \frac{a \cdot R_a}{2R}; \qquad x_b = \frac{b \cdot R_b}{2R}; \qquad x_c = \frac{c \cdot R_c}{2R}.$$

6. *Окружность Аполлония вершины* A треугольника ABC — окружность Аполлония точек B и C с отношением $\frac{AB}{AC} = k_a$ — будем обозначать $O_A\,(r_A)$, а ее центр — O_A.

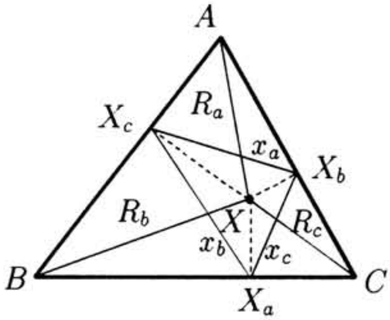


Рис. 1

Глава 1. Педальный треугольник, подобный данному.

Пусть $\triangle ABC$ — некоторый базовый треугольник и $\triangle UVW$ — произвольный треугольник, стороны которого u, v, w. Сформулируем следующие основные вопросы:

1. Существуют ли точки плоскости, педальные треугольники которых относительно $\triangle ABC$ подобны $\triangle UVW$? Сколько таких точек?

2. Как построить упомянутые точки?

Понятно, что кроме ответов на основные вопросы, будет интересно исследовать свойства этих точек.

(А) Пересечение окружностей Аполлония.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Для любого базового $\triangle ABC$ и произвольного $\triangle UVW$ есть* **максимум** *точек, педальные треугольники которых подобны $\triangle UVW$.*

Доказательство. Пусть u, v, w — стороны $\triangle UVW$. Тогда $\triangle X_aX_bX_c$ подобен $\triangle UVW$, если стороны этих треугольников пропорциональны. Например, $x_a : x_b : x_c = u : v : w$. Очевидно, что перестановкой одной из сторон пропорции, можно получить 6 разных пропорций, определяющих искомое подобие.

Поскольку $x_a = \frac{a \cdot R_a}{2R}$; $x_b = \frac{b \cdot R_b}{2R}$; $x_c = \frac{c \cdot R_c}{2R}$, получим: $aR_a : bR_b : cR_c = u : v : w$. Тогда $\frac{R_a}{R_b} = \frac{bu}{av} = k_1$, $\frac{R_a}{R_c} = \frac{cu}{aw} = k_2$ и $\frac{R_b}{R_c} = \frac{cv}{bw} = k_3$. Если существует точка X, удовлетворяющая этим условиям, то она является общей точкой трех окружностей Аполлония: точек A и B с отношением k_1, точек A и C с отношением k_2 и точек B и C с отношением k_3. Заметим, что если любые две окружности (из трех) пересекаются, то третья проходит через точки пересечения, и что у двух окружностей есть максимум две общие точки. Поэтому для существования точки X необходимо и достаточно пересечение или касание двух упомянутых окружностей. Таким образом, соотношению $x_a : x_b : x_c = u : v : w$ могут удовлетворять максимум две точки X_1 и X_2.

Ввиду существования шести пропорций, в оптимальном случае существуют 12 точек $X_1, X_2, ..., X_{12}$, педальные треугольники которых подобны $\triangle UVW$. Теорема доказана.

Замечание. *Если точки X_1 и X_2 существуют, то они инверсны друг другу относительно описанной окружности $\triangle ABC$, или (что равносильно) описанная окружность — суть окружность Аполлония точек X_1 и X_2.*

В самом деле, для X_1 верно $\frac{AX_1}{BX_1} = k_1$ и для X_2:

$$\frac{AX_2}{BX_2} = k_1 \Rightarrow \frac{AX_1}{BX_1} = \frac{AX_2}{BX_2} \Rightarrow \frac{AX_1}{AX_2} = \frac{BX_1}{BX_2}.$$

То есть вершины A и B лежат на окружности Аполлония точек X_1 и X_2. Аналогично $\frac{AX_1}{AX_2} = \frac{BX_1}{BX_2} = \frac{CX_1}{CX_2}$, что доказывает утверждение.

Ясно, что тогда прямая X_1X_2 проходит через центр описанной окружности $\triangle ABC$. Интересно, что прохождение прямой X_1X_2 через центр описанной окружности $\triangle ABC$ является следствием более общей теоремы. Приведем ее, несмотря на некоторое отклонение от основной темы.

Теорема 2. *Дан $\triangle ABC$. Пусть S_1 — некоторая окружность Аполлония точек A и B, и S_2 — некоторая окружность Аполлония точек A и C. Тогда радикальная ось окружностей S_1 и S_2 проходит через центр описанной окружности $\triangle ABC$.*

Доказателльство.

1. Лемма. *Покажем, что если S — окружность Аполлония точек M и N, то любая окружность, проходящая через M и N, ортогональна S.*

Действительно, точки M и N инверсны относительно S. Пусть окружность с центром O проходит через M и N и пересекает S в точке L. Тогда при инверсии относительно S точка L переходит в себя, а M и N друг в друга.

Ясно, что окружность с центром O переходит в себя, то есть ортогональна S. Отсюда следует, что касательная, проведенная из O к окружности S, равна радиусу окружности с центром O (OL).

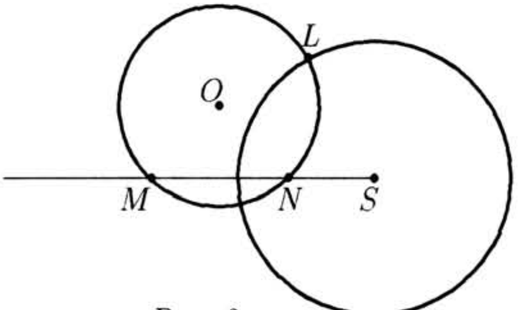


Рис. 2

2. Понятно, что описанная окружность треугольника ABC ортогональна S_1 и S_2. Тогда касательные к этим окружностям, проведенные из центра описанной окружности, равны ее радиусу, то есть равны друг другу.

Ясно, что тогда центр описанной окружности треугольника ABC лежит на радикальной оси S_1 и S_2. Теорема доказана.

(Б) Педальный треугольник с заданным углом. Прямоугольный педальный треугольник

В уже упоминавшейся статье «Заметки об окружности Аполлония» доказывается следующее свойство углов педального треугольника.

Пусть $\triangle X_aX_bX$ педальный треугольник точки X. Тогда

$$\angle X_bX_aX_c = \angle XBA + \angle XCA,$$

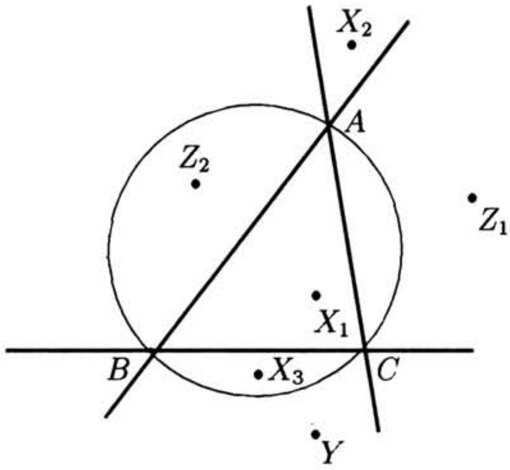


Рис. 3

если X лежит или внутри $\triangle ABC$ (т. X_1), или внутри угла вертикального внутреннему углу A (т. X_2), или внутри угла A между стороной BC и дугой описанной окружности (т. X_3). Если точка Y лежит внутри угла, но вне описанной окружности, то

$$\angle Y_bY_aY_c = 360^\circ - (\angle YBA + \angle YCA).$$

Если точка Z лежит внутри внешних углов A, то

$$\angle Z_bZ_aZ_c = |\angle ZBA - \angle ZCA|.$$

Докажем с помощью этого своиства следующую важную теорему.

Теорема 3. *Пусть O — центр описанной окружности базового $\triangle ABC$ и M — центр некоторой окружности S, проходящей через вершины B и C. Прямая BC делит эту окружность на две дуги, одна из которых лежит в полуплоскости $\triangle ABC$. Тогда для любой точки X, принадлежащей этой дуге, выполняется $\angle X_bX_aX_c = \angle OBM$. Для точек дуги, лежащей в другой полуплоскости $\angle X_bX_aX_c = 180^\circ - \angle OBM$.*

Доказательство. Пусть дуга BC окружности S, лежащая в полуплоскости базового треугольника, пересекает сторону AB. Рассмотрим два положения точки X.

1. Внутри $\triangle ABC$. Тогда $\angle X_bX_aX_c = \angle XBA + XCA$. Но

$$\angle XBA + XCA = 180^\circ - (\angle A + \angle XBC + \angle XCB).$$

Кроме того, $\angle A = \angle BOM$ и $\angle XBC + \angle XCB = \angle BMO$. Поэтому

$$\angle X_bX_aX_c = 180 - (\angle BOM + \angle BMO) = \angle OBM.$$

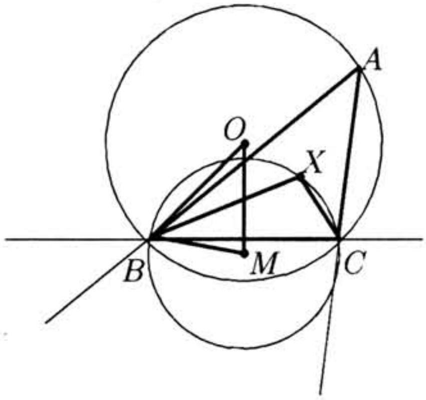


Рис. 4

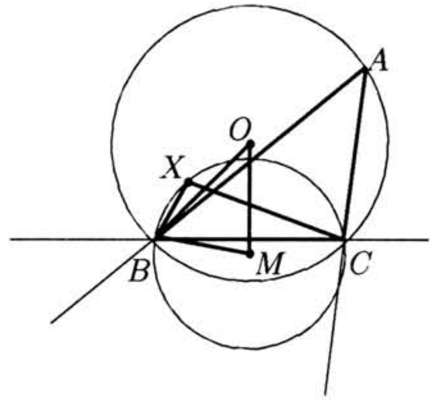


Рис. 5

2. Вне $\triangle ABC$. В этом случае $\angle X_bX_aX_c = \angle XCA - XBA$. Кроме того,

$$\angle XCA = 180° - (\angle A + \angle ABC + \angle XCB) \text{ и } \angle XBA = \angle XBC - \angle ABC.$$

То есть $\angle XCA - XBA = 180° - (\angle A + \angle XCB + \angle XBC)$. И как в предыдущем случае, $\angle X_bX_aX_c = 180° - (\angle BOM + \angle BMO) = \angle OBM$.

Рассмотрим расположения точки X на дуге BC вне полуплоскости базового треугольника. Пусть точка X внутри $\angle A$.

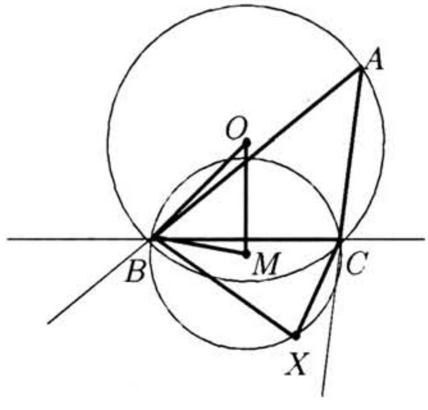


Рис. 6

Понятно, что в этом случае точка X лежит вне описанной окружности. Тогда $\angle X_bX_aX_c = 360° - (\angle XBA + \angle XCA)$. Поскольку

$$\angle XBA + \angle XCA = 360° - (\angle A + \angle BXC) \quad \text{и} \quad \angle A = \angle BOM, \quad \angle BXC = \angle BMO,$$

получим $\angle X_bX_aX_c = \angle BOM + \angle BMO = 180° - \angle OBM$.

Аналогичными рассуждениями можно доказать утверждение теоремы и во всех остальных случаях. Теорема доказана.

Следствие 1. *Геометрическое место точек X, для которых угол $\angle X_bX_aX_c$ педального треугольника принимает данное значение ψ, состоит из дуг двух окружностей, проходящих через вершины B и C базового $\triangle ABC$. Центры M_1 и M_2 этих окружностей лежат на серединном перпендикуляре стороны BC, так что $OBM_1 = \psi$ (берется дуга в полуплоскости $\triangle ABC$) и $OBM_2 = 180° - \psi$ (дуга вне полуплоскости $\triangle ABC$). Для точек, лежащих на двух других дугах этих окружностей, $\angle X_bX_aX_c = 180° - \psi$.*

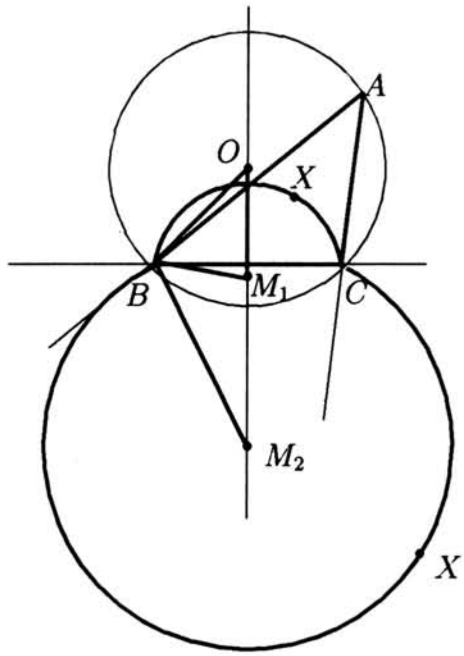


Рис. 7

Правильность утверждения для точек этих дуг следует из теоремы 3. Отсутствие других точек элементарно доказывается от противного.

Замечание 1. *Легко доказывается (например, с помощью углов), что указанное геометрическое место точек (пара дуг) переходит в себя при инверсии относительно описанной окружности $\triangle ABC$. Кроме того, точки, инверсные друг другу, определяют пару подобных педальных треугольников.*

Последнее свойство доказано в уже упоминавшейся статье (см. стр. 90, теорема 3).

Замечание 2. *Если точка X лежит на прямой BC, то, считая ее основанием перпендикуляра (X_a), получим педальный треугольник, у которого $\angle X_bX_aX_c = 180^\circ - \angle A$ для внутренних точек отрезка BC и $\angle X_bX_aX_c = \angle A$ для внешних точек (проверяется элементарно). Поскольку прямая BC при инверсии относительно описанной окружности $\triangle ABC$ переходит в окружность, проходящую через точки B, C и O, то: геометрическое место точек для которых $\psi = \angle A$, состоит из внешней части прямой BC и внутренней дуги окружности, проходящей через B, C и O; геометрическое место точек для которых $\psi = 180^\circ - \angle A$, состоит из отрезка BC и внешней дуги этой окружности.*

Замечание 3. *В свете предыдущего ясно, что геометрическое место точек, в педальном треугольнике которых есть угол ψ, состоит из шести дуг окружностей, которые могут вырождаться в прямые. В любом случае вся эта фигура симметрична (инверсна себе) относительно описанной окружности $\triangle ABC$.*

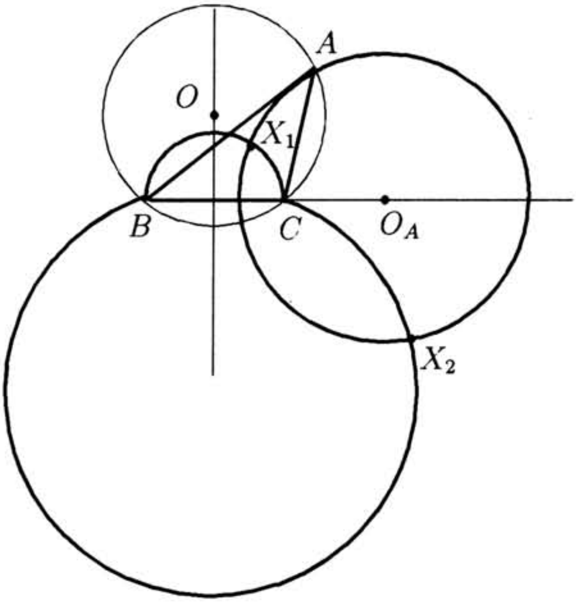


Рис. 8

Замечание 4. *Пусть $O_A(r_A)$ — окружность Аполлония вершины A треугольника ABC. Известно, что педальные треугольники точек этой окружности — равнобедренные ($x_b = x_c$). Тогда $O_A(r_A)$ пересекает пару дуг точек B и C в точках X_1 и X_2, педальные треугольники которых равнобедренны и подобны, с углом при вершине ψ. Если $\psi < 90°$, то $O_A(r_A)$ пересекает дуги точек A и C в точках A и Y, причем педальный треугольник точки Y равнобедренный с углом при основании ψ. Если $\psi \geqslant 90°$, то $O_A(r_A)$ пересекает эту пару дуг только в точке A. Аналогично для дуг точек A и B.*

Следствие 2. *Геометрическое место точек X, для которых педальный треугольник — прямоугольный, состоит из трех окружностей, каждая из которых проходит через две вершины $\triangle ABC$ и ортогональна описанной окружности. Если $\triangle ABC$ — прямоугольный, то одна из окружностей вырождается в прямую, содержащую гипотенузу $\triangle ABC$.*

Правильность утверждения следует из совпадения точек M_1 и M_2.

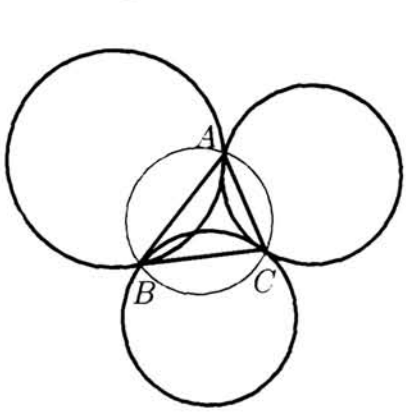


Рис. 9

Замечание 1. *Ясно, что окружность $O_A(r_A)$ пересекает окружность точек B и C в двух точках, педальные треугольники которых прямоугольны и равнобедренны. Двух других окружностей $O_A(r_A)$ касается в точке A. Таким образом, на каждой из трех окружностей, составляющих данное геометрическое место, есть две и только две точки, педальные треугольники которых прямоугольны и равнобедренны. Очевидно, что на плоскости таких точек шесть.*

Замечание 2. *Для любой точки окружности точек B и C выполняется соотношение $R_a^2a^2 = R_b^2b^2 + R_c^2c^2$, что элементарно проверяется. Ясно, что для двух других окружностей выполняются аналогичные соотношения. Интересно, что частный случай равенства $R_a^2a^2 = R_b^2b^2 + R_c^2c^2$ для правильного треугольника — $R_a^2 = R_b^2 + R_c^2$.*

Последнее можно доказать с помощью момента инерции (Прасолов. «Задачи по планиметрии», задача 14.19).

(B) Подобные педальные треугольники

Пусть $\triangle ABC$ — некоторый базовый треугольник и $\triangle UVW$ — произвольный треугольник, углы которого α_u, α_v, α_w. Определим точки X так, что $\angle X_bX_aX_c = \alpha_u$ и $\angle X_aX_bX_c = \alpha_v$. Понятно, что $\triangle X_aX_bX_c \sim \triangle UVW$. Очевидно, что $\alpha_u + \alpha_v < 180°$.

Рассмотрим следующие варианты.

I. $\alpha_u \neq \angle A; \alpha_v \neq \angle B$.

(Ia) $\alpha_u > \alpha_v$. Пусть $\angle OCM_a = \angle OCE = \alpha_u$. Тогда $\angle OCM'_a = 180° - \alpha_u$. Поэтому дуга S_a, расположенная над BC, и дуга S'_a, расположенная под BC, определяют ГМТ, для которых $\angle X_bX_aX_c = \alpha_u$.

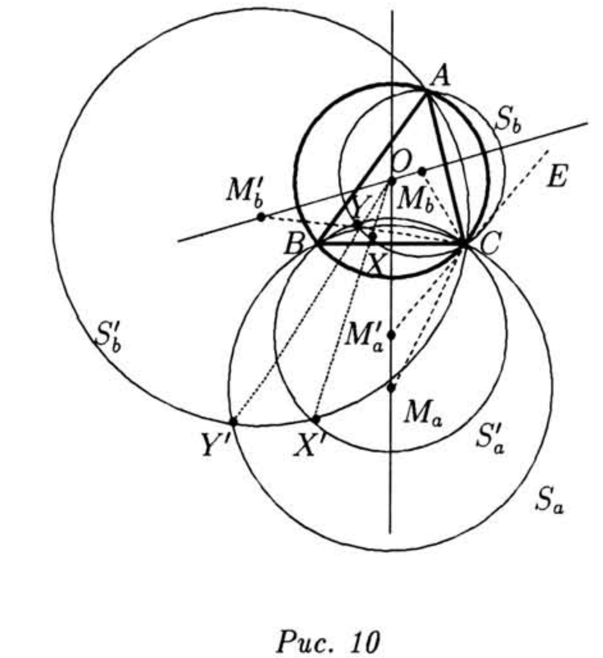


Рис. 10

Две другие дуги этих окружностей определяют ГМТ, для которых $\angle X_bX_aX_c = 180° - \alpha_u$. Аналогично, $\angle OCM_b = \angle OCM'_b = \alpha_v$. Тогда дуги S_b и S'_b, находящиеся слева от AC, определяют ГМТ, для которых $\angle X_aX_bX_c = \alpha_v$. Все четыре окружности имеют общую точку C. Легко проверить, что среди них нет касающихся, поскольку $\angle OCM_a + \angle OCM_b = \alpha_u + \alpha_v \neq 180°$. Поэтому четыре точки пересечения S_a и S'_a с S_b и S'_b определяют точки X и X', для которых $\angle X_bX_aX_c = \alpha_u$ и $\angle X_aX_bX_c = \alpha_v$, и точки Y и Y', для которых $\angle Y_bY_aY_c = 180° - \alpha_u$ и $\angle Y_aY_bY_c = \alpha_v$.

Таким образом существуют две и только две точки (X и X'), для которых $\angle X_bX_aX_c = \alpha_u$ и $\angle X_aX_bX_c = \alpha_v$. Естественно, что X и X' инверсны относительно описанной окружности.

Замечание. *Если $\alpha_u = 90°$, то окружности S_a и S'_a совпадают. Тогда S_b и S'_b пересекают эту окружность в двух точках. Поскольку $180° - \alpha_u = 90° = \alpha_u$, в этом случае существуют две и только две точки, для которых $\angle X_bX_aX_c = \alpha_u$ и $\angle X_aX_bX_c = \alpha_v$.*

(Iб) $\alpha_u < \alpha_v$. Этот случай аналогичен предыдущему.

(Iв) $\alpha_u = \alpha_v$. В этом случае окружности S_a и S'_b и окружности S_b и S'_a касаются в точке C. Таким образом, не существует точек, для которых $\angle Y_bY_aY_c = 180° - \alpha_u$ и $\angle Y_aY_bY_c = \alpha_v$. Ясно, что педальные треугольники точек X и X' равнобедренны.

II. $\alpha_u = \angle A$; $\alpha_v \neq \angle B$. $\alpha_u = 180° - \angle A; \alpha_v \neq \angle B$

По теореме 3 (см. второе замечание к первому следствию) ГМТ, для которых $\angle X_bX_aX_c = \angle A$ или $\angle X_bX_aX_c = 180° - \angle A$, суть объединение прямой BC (S_a) и окружности, проходящей через точки B, C и O (S'_a) . Напомним, что $\angle X_bX_aX_c = \angle A$ получается для точек, лежащих вне отрезка BC и на внутренней дуге S'_a. Пересечение S_b и S'_b с этим ГМТ суть точки X и X'. Ясно, что педальный треугольник этих точек удовлетворяет условию $\angle X_bX_aX_c = \angle A$ и $\angle X_aX_bX_c = \alpha_v$

Пересечение точек отрезка BC и внешней дуги S'_a с S_b и S'_b суть точки Y и Y', для которых $\angle Y_bY_aY_c = 180° - \angle A$ и $\angle Y_aY_bY_c = \alpha_v$. Заметим, что существование точек Y и Y' обусловленно неравенством $\alpha_v < \angle A$. Основной вывод рассмотренного случая — существование двух и только двух точек, для которых $\angle X_bX_aX_c = \alpha_u$ и $\angle X_aX_bX_c = \alpha_v$.

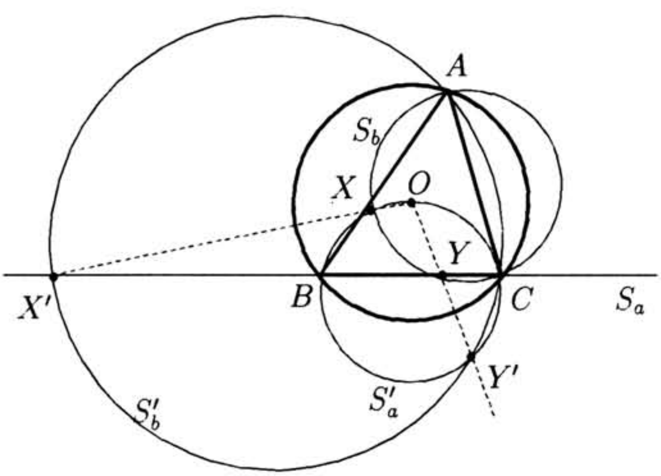


Рис. 11

Замечание. *Случай $\alpha_u = \angle A, \alpha_v = \angle B$ ведет к педальному треугольнику, подобному базовому.*

Этот случай будет подробно рассмотрен в дальнейшем. Интересно, что в рассуждениях этого параграфа получается один и тот же результат при любых соотношениях между углами $\triangle ABC$ и $\triangle UVW$.

Итогом проведенного исследования является следующее утверждение:

Теорема 4. *Для любого $\triangle UVW$, неподобного базовому $\triangle ABC$, существуют две и только две точки плоскости, для педального треугольника которых выполняется $\angle X_bX_aX_c = \alpha_u$ и $\angle X_aX_bX_c = \alpha_v$. Указанные точки инверсны друг другу относительно описанной окружности $\triangle ABC$.*

Ясно, что аналогичное утверждение верно для случаев

$$\angle X_bX_aX_c = \alpha_u \quad \text{и} \quad \angle X_aX_cX_b = \alpha_v.$$

Таким образом должны существовать четыре точки, педальный треугольник которых подобен $\triangle UVW$ и $\angle X_bX_aX_c = \alpha_u$. Столь осторожная формулировка, объясняется возможностью совпадения некоторых точек. Следующая важная теорема красиво решает данную проблему.

Теорема 5. *Педальные треугольники точек, инверсных друг другу относительно любой окружности Аполлония $\triangle ABC$, подобны.*

Доказательство. 1. Пусть $O_A(r_A)$ — окружность Аполлония вершины A треугольника ABC, точки F и G — концы диаметра, точки X и X' инверсны относительно $O_A(r_A)$. Обозначим $BX = R_b$, $CX = R_c$, $BX' = R'_b$, $CX' = R'_c$.

2. Проведем окружность через точки B, C и X. Поскольку точки B и C инверсны относительно $O_A(r_A)$, то по лемме (см. теорему 2) эта окружность ортогональна $O_A(r_A)$ и, следовательно, проходит через точку X'. Очевидно, что X и X' всегда лежат в одной полуплоскости относительно BC. Поэтому для педальных треугольников точек X и X' выполняется $\angle X_bX_aX_c = \angle X'_bX'_aX'_c$.

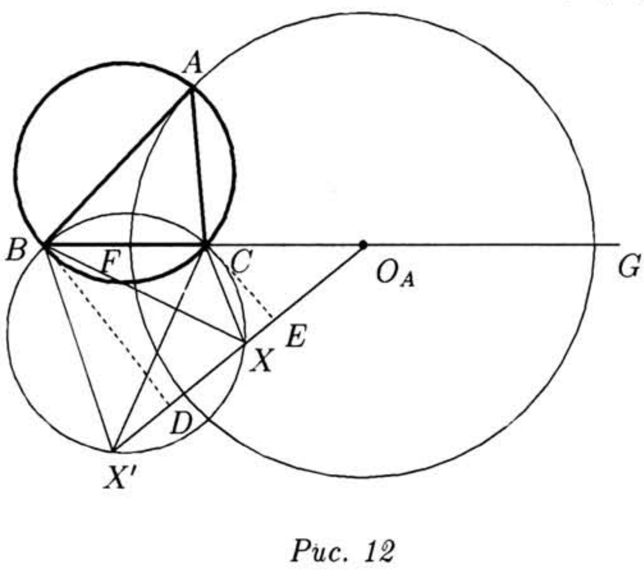


Рис. 12

3. Поскольку $\angle XBX' = \angle XCX'$, получим $\frac{S_{\triangle XBX'}}{S_{\triangle XCX'}} = \frac{R_b \cdot R'_b}{R_c \cdot R'_c}$. Из точек B и C опустим $BD \perp XX'$ и $CE \perp XX'$. Тогда $\frac{S_{\triangle XBX'}}{S_{\triangle XCX'}} = \frac{BD}{CE}$. Из очевидного подобия $\triangle BDO_A \sim \sim \triangle CEO_A$ получим $\frac{BD}{CE} = \frac{BO_A}{CO_A} = \frac{S_{\triangle XBX'}}{S_{\triangle XCX'}}$. Таким образом, $\frac{R_b \cdot R'_b}{R_c \cdot R'_c} = \frac{BO_A}{CO_A}$.

4. По определению окружности Аполлония $\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$ и $\frac{BG}{GC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$. Тогда $\frac{BF \cdot BG}{FC \cdot GC} = \frac{c^2}{b^2}$. Заметим, что

$$BF \cdot BG = (BO_A)^2 - r_A^2, \quad FC \cdot GC = r_A^2 - (CO_A)^2 \quad \text{и} \quad BO_A \cdot CO_A = r_A^2.$$

Поэтому

$$\frac{BF \cdot BG}{FC \cdot GC} = \frac{(BO_A)^2 - r_A^2}{r_A^2 - (CO_A)^2} = \frac{(BO_A)^2 - BO_A \cdot CO_A}{BO_A \cdot CO_A - (CO_A)^2} = \frac{BO_A}{CO_A} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Сравнивая полученное равенство с результатом предыдущего пункта, получим

$$\frac{R_b \cdot R'_b}{R_c \cdot R'_c} = \frac{c^2}{b^2}.$$

5. Из последнего равенства следует $b^2 \cdot R_b \cdot R'_b = c^2 \cdot R_c \cdot R'_c$. Разделим обе части на $4R^2$, где R — радиус описанной окружности $\triangle ABC$. Получаем

$$\frac{b \cdot R_b}{2R} \cdot \frac{b \cdot R'_b}{2R} = \frac{c \cdot R_c}{2R} \cdot \frac{c \cdot R'_c}{2R}.$$

Тогда $x_b \cdot x'_b = x_c \cdot x'_c$ или $\frac{x_b}{x_c} = \frac{x'_c}{x'_b}$. То есть $\triangle X_b X_a X_c \sim \triangle X'_b X'_a X'_c$. Теорема доказана.

Замечание 1. *В случае расположения точек X и X' на прямой BC доказательство аналогично.*

Замечание 2. *Поскольку при инверсии точек X и X' относительно описанной окружности $\triangle ABC$, получаются еще две точки, педальные треугольники которых подобны $\triangle X_b X_a X_c$ и $\triangle X'_b X'_a X'_c$, то в общем случае существуют четыре точки (две внутри описанной окружности и две снаружи), педальные треугольники которых подобны данному $\triangle UVW$ и у которых $\angle X_b X_a X_c = \alpha_u$. Если же точка X лежит на окружности $O_A(r_A)$, то ее педальный треугольник — равнобедренный, и $X = X'$. То есть если $\triangle UVW$ — равнобедренный и α_u — угол при вершине, то существуют две точки (одна внутри описанной окружности и одна снаружи), педальные треугольники которых подобны данному $\triangle UVW$ и у которых $\angle X_b X_a X_c = \alpha_u$.*

Обобщая сказанное, получим следующую интересную теорему.

Теорема 6. *Для любого разностороннего $\triangle UVW$, неподобного базовому треугольнику ABC, существуют 12 и только 12 точек плоскости, педальные треугольники которых подобны $\triangle UVW$. Если $\triangle UVW$ — равнобедренный, то указанных точек — шесть, а если $\triangle UVW$ — равносторонний, то таких точек только две.*

Доказательство непосредственно следует из последнего замечания. Достаточно рассмотреть случаи $\angle X_a X_b X_c = \alpha_u$ и $\angle X_b X_c X_a = \alpha_u$.

По теореме 1 больше двенадцати точек быть не может. Если $\triangle UVW$ — равнобедренный или равносторонний, получаются свойства, доказанные в предыдущей статье. Настоящая теорема обобщает все случаи, кроме $\triangle UVW \sim \triangle ABC$.

В заключение заметим, что половина этих точек лежит внутри описанной окружности $\triangle ABC$ и половина — снаружи.

Замечание. *Если $\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = AC$), то окружность $O_A(r_A)$ вырождается в прямую (ось симметрии треугольника). В этом случае инверсия (симметрия относительно окружности) заменяется обычной симметрией. Тогда для любых точек X и X', симметричных относительно оси симметрии базового равнобедренного $\triangle ABC$, верно $\triangle X_b X_a X_c \cong \triangle X'_b X'_a X'_c$. То есть соответственные педальные треугольники не только подобны, но и конгруэнтны. Для правильного базового треугольника существуют 12 точек (шесть внутри описанной окружности и шесть снаружи), педальные треугольники которых подобны. Причем все «внутренние» треугольники и все «внешние» треугольники конгруэнтны.*

Глава 2. Педальный треугольник, подобный базовому.

(A) Окружности Аполлония базового треугольника.

Окружность Аполлония точек B и C с отношением $\frac{AB}{AC} = k_a$ будем обозначать $O_A(r_A)$, а ее центр O_A. Аналогично определяются окружности Аполлония других вершин $\triangle ABC$ и обозначаются $O_B(r_B)$ и $O_C(r_C)$.

Известно, что все три окружности Аполлония неравностороннего $\triangle ABC$ пересекаются в двух точках. Эти точки называются изодинамическими центрами $\triangle ABC$ (точки M и N). Ясно, что прямая, проходящая через точки M и N — радикальная ось всех трех окружностей Аполлония. Поэтому по теореме 2 центр описанной окружности $\triangle ABC$ лежит на прямой MN. Заметим, что точки M и N инверсны относительно описанной окружности, то есть $OM \cdot ON = R^2$. Прямая l — серединный перпендикуляр отрезка MN — содержит O_A, O_B и O_C. Ясно, что центры этих окружностей Аполлония лежат на продолжении соответствующих сторон $\triangle ABC$.

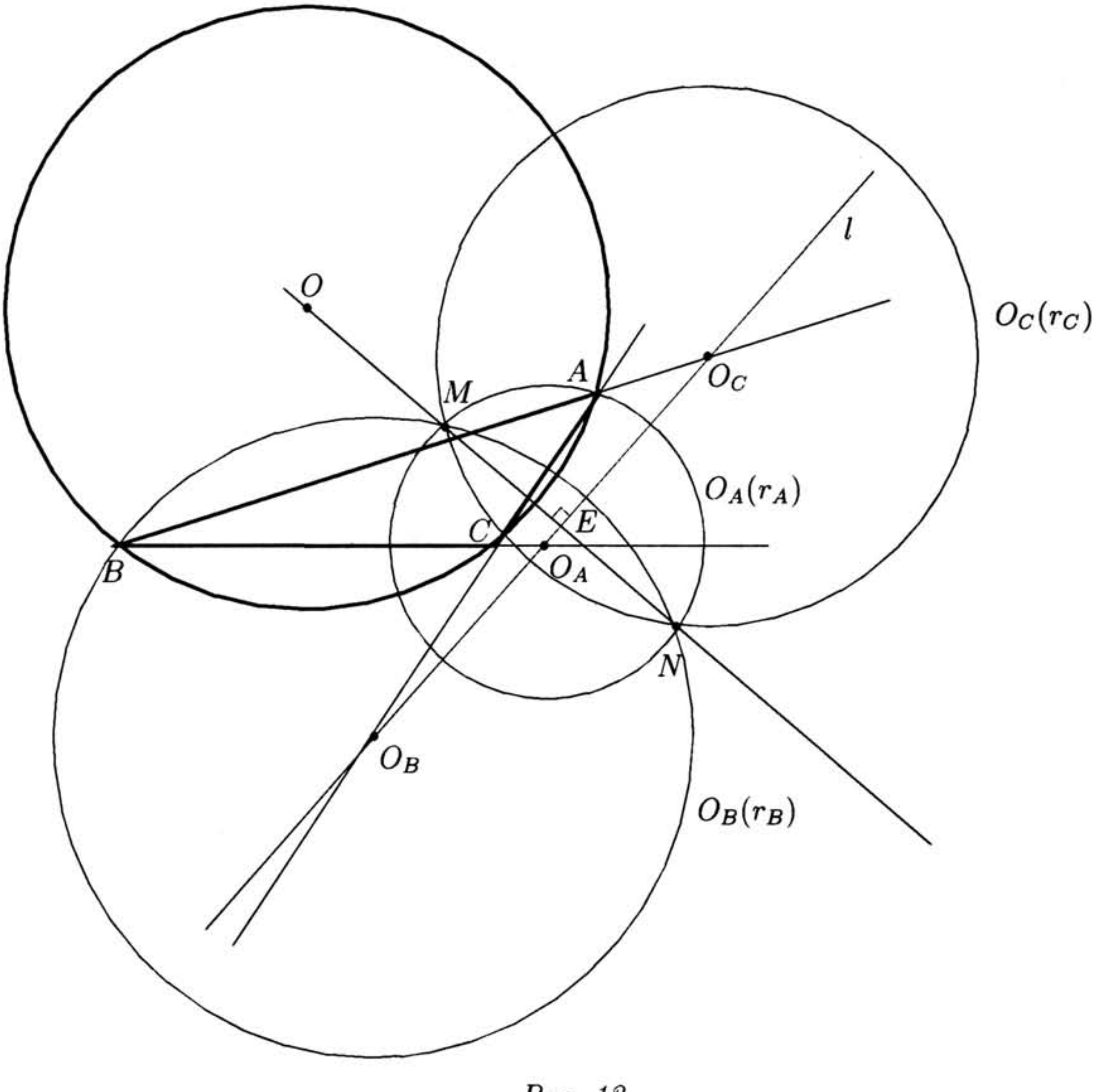


Рис. 13

Важно, что прямая центров (l) вся лежит вне описанной окружности $\triangle ABC$. Действительно, прямая l проходит через середину MN (т. E). Тогда $OE \perp l$ и $OE = \frac{OM+ON}{2}$. С другой стороны, $R = \sqrt{OM \cdot ON}$. Ясно, что $OE > R$ по неравенству средних. Это свойство будет важно в дальнейшем.

Окружности Аполлония $\triangle ABC$ обладают многими интересными свойствами. С некоторыми из них мы встретимся в процессе изложения.

(Б) Замечательные точки треугольника.

Основной вопрос данного параграфа — точки, педальный треугольник которых подобен $\triangle ABC$. Некоторые из этих точек известны, другие не имеют названия. Понятно, что $\triangle X_aX_bX_c \sim \triangle ABC$ в следующих случаях.

I. $x_a : x_b : x_c = a : b : c$ (полное соответствие). Ясно, что есть только один такой вариант. Понятно, что для углов выполняется $\angle X_bX_aX_c = \angle A$, $\angle X_aX_bX_c = \angle B$ и $\angle X_bX_cX_a = \angle C$.

II. $x_a : x_b : x_c = a : c : b$, или $\angle X_bX_aX_c = \angle A$, $\angle X_aX_bX_c = \angle C$ и $\angle X_bX_cX_a = \angle B$. Одна пара соответствующих сторон (в данном случае x_a и a), а две другие нет. Таких вариантов — три.

III. $x_a : x_b : x_c = b : c : a$, или $\angle X_bX_aX_c = \angle B$, $\angle X_aX_bX_c = \angle C$ и $\angle X_bX_cX_a = \angle A$. Нет соответствующих сторон. Легко проверить, что таких возможностей две. Проанализируем все случаи.

I. *Центр описанной окружности.* Известно и совершенно очевидно, что педальный треугольник точки O подобен $\triangle ABC$ (срединный треугольник). Тем не менее для порядка изложения и доказательства единственности приведем обоснование этого утверждения.

Действительно,

$$x_a : x_b : x_c = a : b : c \Rightarrow \frac{a \cdot R_a}{2R} : \frac{b \cdot R_b}{2R} : \frac{c \cdot R_c}{2R} = a : b : c \Rightarrow R_a = R_b = R_c = R.$$

Этот же вывод получается методом ГМТ. Действительно, ГМТ, для которых

$$\angle X_bX_aX_c = \angle A, \quad \angle X_aX_bX_c = \angle B \quad \text{и} \quad \angle X_bX_cX_a = \angle C$$

внешние части прямых, содержащих стороны $\triangle ABC$, и внутренние дуги окружностей, проходящих через центр O, встречаются только в одной точке (O). Единственность точки объясняется отсутствием инверсного образа точки O.

II. *Центр окружности Аполлония и его инверсный образ.*
Пусть $x_a : x_b : x_c = a : c : b$, или $\angle X_bX_aX_c = \angle A$, $\angle X_aX_bX_c = \angle C$ и $\angle X_bX_cX_a = \angle B$. Покажем, что точки, удовлетворяющие этому условию — центр O_A окружности Аполлония $O_A(r_A)$ и точка T_A — инверсный образ O_A относительно описанной окружности. Действительно, по замечанию 2 к первому следствию теоремы 3 имеем $\angle X_bO_AX_c = \angle A$. Поскольку окружность $O_A(r_A)$ и описанная окружность ортогональны, то O_AA — касательная описанной окружности. Тогда $\angle O_AAC = \angle B$. Равенство углов $\angle O_AAC = \angle O_AX_cX_b$ следует из вписанности четырехугольника $AX_bO_AX_c$. Для точки T_A доказательство следует из ее определения. Таким образом, для разностороннего базового треугольника педальные треугольники точек O_A, T_A, O_B, T_B, O_C, T_C подобны $\triangle ABC$.

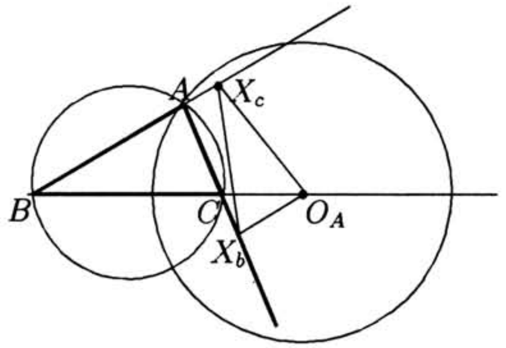


Рис. 14

Замечание 1. *Поскольку точки O_A, O_B, O_C лежат на одной прямой (прямая центров), точки T_A, T_B, T_C лежат на окружности, проходящей через центр O описанной окружности базового треугольника.*

Покажем, что одним из диаметров этой окружности является отрезок OL, где L — точка Лемуана (пересечение симедиан) базового $\triangle ABC$.

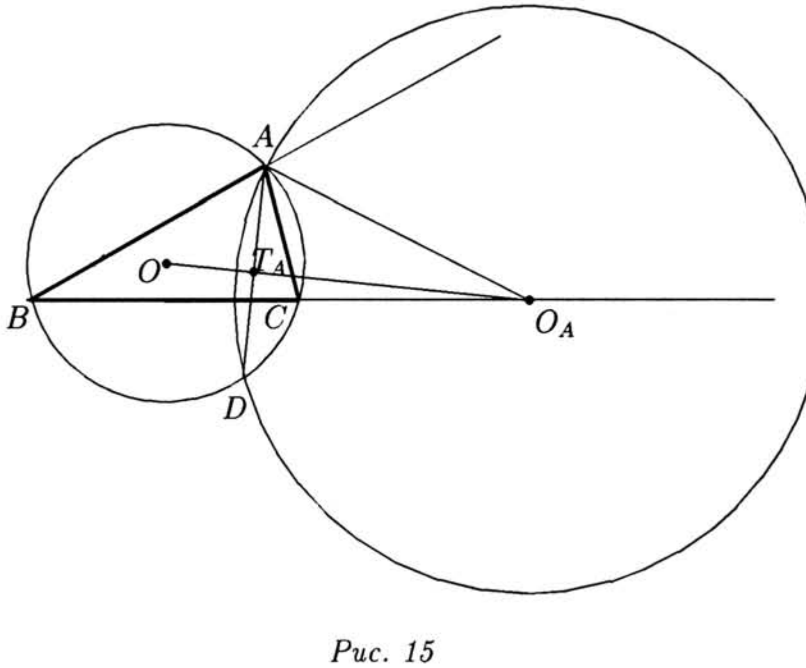


Рис. 15

Действительно, так как $AT_A \perp OO_A$ (стандартное построение инверсной точки), то прямая AT_A проходит через вторую точку пересечения $O_A(r_A)$ и описанной окружности (т. D). Тогда прямая AT_A содержит s_a — симедиану $\triangle ABC$ (см. Прасолов. «Задачи по планиметрии» (стр.121)). Поэтому если OL — диаметр окружности точек T_A, T_B, T_C, то $L \in s_a$. Аналогично доказывается, что $L \in s_b$ и $L \in s_c$. То есть L — точка Лемуана $\triangle ABC$. С этой замечательной окружностью мы еще встретимся в дальнейшем.

Интересно, что поскольку окружность точек T_A, T_B, T_C — инверсный образ прямой центров, то прямая OL перпендикулярна этой прямой, то есть проходит через изодинамические центры $\triangle ABC$ (точки M и N).

Замечание 2. *Из пропорции $x_a : x_b : x_c = a : c : b$ следует:*

$$\frac{aR_a}{2R} : \frac{bR_b}{2R} : \frac{cR_c}{2R} = a : c : b.$$

То есть $R_a^2 = R_b \cdot R_c$ и $\frac{R_a}{R_b} = \frac{R_c}{R_a} = \frac{b}{c}$.

Для точки O_A эти равенства очевидно следуют из инверсности точек B и C относительно $O_A(r_A)$. Рассмотрим эти равенства для точки T_A.

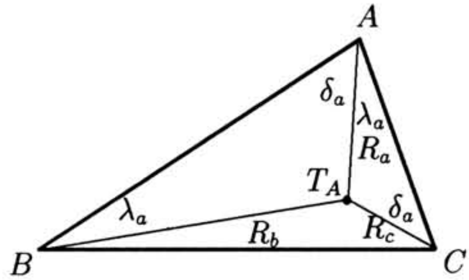


Рис. 16

Из очевидного подобия $\triangle ABT_A \sim \triangle CAT_A$ получим $\angle ABT_A = \angle CAT_A = \lambda_a$ и $\angle BAT_A = \angle ACT_A = \delta_a$. Тогда углы λ и δ можно определить из равенств $\operatorname{ctg} \lambda_a = 2 \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta$ и $\operatorname{ctg} \delta_a = 2 \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma$, где $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ — углы $\triangle ABC$. Эти равенства элементарно получаются с помощью теоремы синусов.

III. *Точки Брокара и их инверсный образ.* Пусть точка P_1 расположенна так, что $\angle P_1AB = \angle P_1BC = \angle P_1CA = \varphi$. Тогда точку P_1 называют первой точкой Брокара, а угол φ — первым углом Брокара $\triangle ABC$. Вторая точка Брокара P_2 получается в случае $\angle P_2BA = \angle P_2CB = \angle P_2AC = \psi$. Известно, что $\varphi = \psi$, то есть первый и второй углы Брокара равны (см. рис. 17).

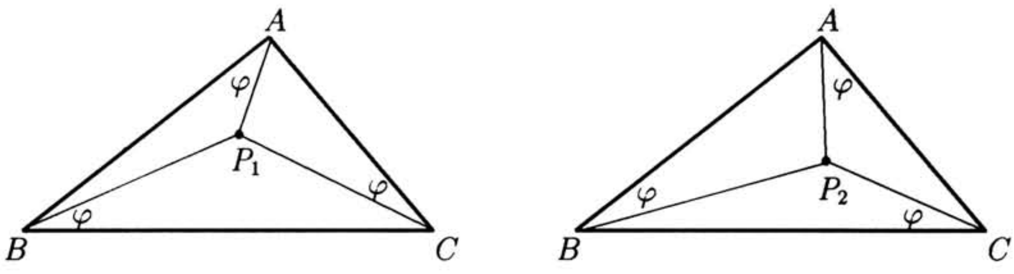


Рис. 17

Свойства точек Брокара подробно изучены. Нас будут интересовать только свойства, относящиеся к педальным треугольникам. Более подробно о точках Брокара можно прочитать: Прасолов. «Задачи по планиметрии» (стр.119-120); Прасолов. «Рассказы о числах, многочленах и фигурах».

Известно, что педальные треугольники точек P_1 и P_2 подобны $\triangle ABC$. Покажем, что точки Брокара соответствуют случаям $x_a : x_b : x_c = b : c : a$ и $x_a : x_b : x_c = c : a : b$.

Рассмотрим первый случай: $x_a : x_b : x_c = b : c : a$ (рис. 18). Тогда $\angle X_bX_aX_c = \angle B$, $\angle X_aX_bX_c = \angle C$ и $\angle X_bX_cX_a = \angle A$. Пусть M — центр окружности, проходящей через B и C. Тогда если $\angle OCM = \angle B$, то для любой точки X, лежащей на дуге

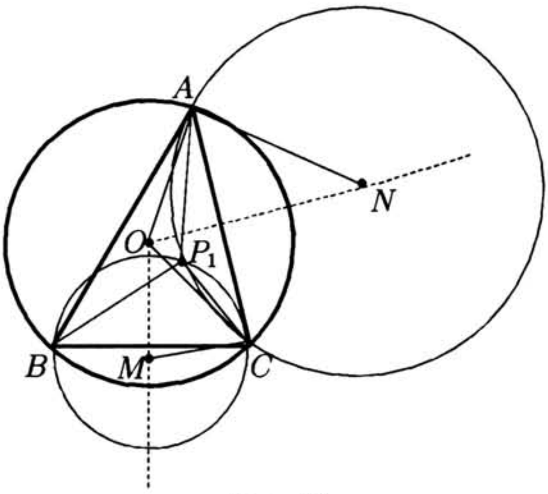


Рис. 18

BC внутри $\triangle ABC$, выполняется $\angle X_b X_a X_c = \angle B$ (теорема 3). Аналогично, если $\angle OAN = \angle C$, то для любой точки дуги AC, лежащей внутри $\triangle ABC$, выполняется $\angle X_a X_b X_c = \angle C$.

Обозначим P_1 точку пересечения этих дуг. Понятно, что $\angle P_b P_a P_c = \angle B$ и $\angle P_a P_b P_c = \angle C$. Покажем, что P_1 — первая точка Брокара.

Действительно, $\angle OCM = \angle B$ и, очевидно, $\angle AOC = 2\angle B \Rightarrow \angle ACO = 90° - \angle B$. Тогда $AC \perp MC$, то есть AC — касательная окружности M. Отсюда $\angle P_1 BC = \angle P_1 CA$. Аналогично доказывается, что $\angle P_1 AB = \angle P_1 CA$.

Случай $x_a : x_b : x_c = c : a : b$ ведет к точке P_2. Обозначим $Q_1 = I_R^O(P_1)$ и $Q_2 = I_R^O(P_2)$. Ясно, педальные треугольники точек Q_1 и Q_2 подобны $\triangle ABC$. Причем для P_1 и Q_1 верно $x_a : x_b : x_c = b : c : a$, а для P_2 и Q_2 — $x_a : x_b : x_c = c : a : b$.

Замечание. Приведем без доказательства несколько дополнительных свойств точек P_1, Q_1, P_2 и Q_2.

(а) *Точки Брокара лежат на окружности точек T_A, T_B, T_C, проходящей также через центр O и точку Лемуана L.*

(б) *Точки Q_1 и Q_2 лежат на прямой центров O_A, O_B, O_C окружностей Аполлония $\triangle ABC$.*

(в) *Пусть $O_A(r_A)$ — окружность Аполлония $\triangle ABC$. Тогда инверсные образы точек T_B и T_C относительно $O_A(r_A)$ суть точки Брокара, а инверсные образы центров O_B и O_C — точки Q_1 и Q_2.*

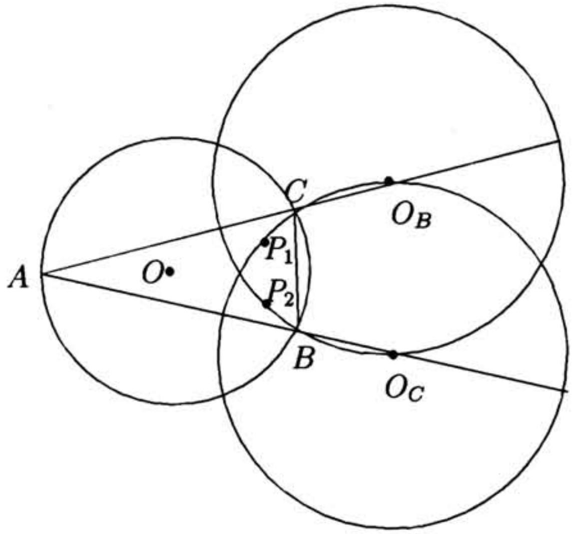


Рис.19

Аналогичные свойства выполняются для двух других окружностей Аполлония $\triangle ABC$. В свете теоремы 5 это свойство особенно важно. Оно показывает, что инверсии найденных точек относительно окружностей Аполлония $\triangle ABC$ не образуют новых точек, педальные треугольники которых подобны $\triangle ABC$.

Подводя итог всех предыдущих рассуждений, получим следующую интересную теорему.

Теорема 7. *Для любого разностороннего базового $\triangle ABC$ существуют 11 и только 11 точек плоскости, педальные треугольники которых подобны $\triangle ABC$.*

Замечание. Можно показать, что *если $\triangle ABC$ — равнобедренный* ($AB = AC$), *то есть только 5 точек, педальные треугольники которых подобны $\triangle ABC$. Эти точки — центр описанной окружности O, две точки Брокара P_1 и P_2 и центры O_B и O_C* (рис. 19).

Руинский Александр,
преподаватель математики колледжа Тель Хай
(Верхняя Галилея, Израиль).

Логика и жизнь (размышления читателя)

И. П. Костенко

Игорь Петрович Костенко — доцент, действительный член Международной педагогической академии. В предлагаемой вашему вниманию статье он в качестве читателя делится впечатлениями о содержании современной серии журнала "Математическое образование", а также, основываясь на анализе публикаций журнала, поднимает важный и сложный вопрос о путях и эффективности реформирования российского математического образования.

Уважаемая редакция!

Случайно познакомился с вашим журналом, начал читать и увлекся. Журнал замечательный. Интересны **все** статьи — нет ни одной бессодержательной. Изюминка журнала в том, что он соединяет культуру и глубину математико-педагогической мысли прошлого с современностью.

Современную мысль журнал также представляет лучшими образцами -- И. Р. Шафаревич, М. М. Постников, В. И. Арнольд и др. Читать изложение математических вопросов большими математиками всегда поучительно. Для молодежи это еще и вдохновляюще.

Характерна и широта мысли, представленной в журнале. Вот, например, две небольших статьи, помещенных в №2 за 1997 г.: В. И. Арнольд — "Математика и математическое образование в современном мире" (с. 109-112) и М. М. Постников — "Является ли математика наукой?" (с. 83-88). Поистине, испытываешь интеллектуальное наслаждение, следя за свободным "математико-философским" мышлением первого и тончайшим логическим анализом второго.

Забавно, что они приходят к прямо противоположным результатам. В. И. Арнольд: "Математика является экспериментальной наукой — частью теоретической физики и членом семейства естественных наук" (с. 110). М. М. Постников почти строго математически доказывает обратное: "математика не есть наука о моделях окружающего мира, а есть наука о схемах этих моделей. Так как естественные науки есть науки, изучающие модели мира, то, следовательно, математика такой наукой не является" (с. 85). Верится и тому, и другому.

Вывод, который напрашивается, — математики могут строго доказать все, что угодно. Но это, конечно, поверхностный вывод. Математики широкой мысли сознают ограниченность математического метода и не претендуют на окончательную истинность своих утверждений, когда они относятся к явлениям жизни.

Вот как об этом заключает М. М. Постников: "в такого рода философских, или точнее, полуфилософских рассуждениях какие-либо уточнения понятий просто вредны. ... чрезмерное уточнение смысла используемых слов убивает мотивировки, и многие подразумеваемые аспекты просто пропадают." Между прочим, эта мысль важна для педагогики математики — чрезмерно строгое ее изложение сильно затрудняет понимание.

Живая мысль ученого не останавливается на этом. Далее он объясняет нам необходимость и ценность подобных неопределенных рассуждений. "Человеку свойственно пытаться рассуждать о вещах, которые он еще не полностью понимает, но очень хочет их понять ... и попытки такого мудрствования — это и есть философия. После того, как в результате длительного обсуждения что-нибудь четко выкристаллизовывается, возникает уже четкая наука, которая отпочковывается от философии" (с.88).

Надо признать, что соблазн применять точные методы там, где они не применимы, свойственен современным представителям естественных наук. Пример такого увлекающего моделирования дан в статье В. А. Дементьева "Как живет-умирает наша страна" (МО, 1998, №1, с. 85-96, №3-4, с.151-164).

Он постулирует: сколько тепла приходит на Землю, столько должно и уходить (с.151). Думается, здесь неправомерное упрощение. Ведь энергия может переходить в иные формы. И, что более важно, — существует энергия Жизни, в частности, психическая энергия. А знаем ли мы, как она связана с физическими энергиями[1]? Ученый-естественник закономерно пренебрегает этими факторами. А они-то и задают границы применимости его метода.

Включать модель Дементьева в курс "Концепции современного естествознания" — значит создавать у молодежи "научно обоснованное" представление о всесилии естественно-научного метода. Наверное, и сам автор согласится, что это представление ложное.

В связи со сказанным, следует особо выделить вот какой феномен. В новое время сформировалось немаломощное множество математиков, характеристическое свойство которых заключается в самоуверенном преувеличении логических возможностей рассуждений, выходящих за рамки строгих логических систем. Этот феномен разрушительно проявляет себя в педагогике математики. Пример дает Колмогоровская реформа 70-х гг., а также современные учебники (школьные и вузовские).

Мы как-то не замечаем, что из учебников сегодня изгнана методика. В обоснование для этого придуман следующий постулат: "принципы, лежащие в ее основе недоказуемы" (?!) (Л. Д. Кудрявцев[2]). Очевидно, "недоказуемость" математик понимает здесь в строго логическом смысле. Стоит ли объяснять, что в жизни су-

---

[1]В науке уже есть гипотеза о связи энергии космических излучений с пассионарной энергией этносов (Л.Н.Гумилев) — гипотеза, подкрепленная фактами.

[2]Л. Д. Кудрявцев. Мысли о современной математике и ее изучении. М.: Наука, 1977, с. 82. (Цитата дана в сжатом виде.)

ществуют и иные критерии доказательности? В частности, в педагогике главным является критерий практики, — его схема отражена в логически несовершенном принципе “неполной индукции”.

Вместо разнообразных приемов классической методики, основанных на тонком понимании психологии восприятия математических абстракций, современные авторы учебников руководствуются одним простым правилом: “Лучший способ разъяснить понятие — это дать его точную формулировку. Лучший способ объяснить теорему — это доказать теорему”. (Л. Д. Кудрявцев[3]). Обратите внимание: “разъяснить” — равносильно “дать формулировку”, “объяснить” — равносильно “доказать”(?!).

Надо бы задаться вопросом: почему в математическом образовании удалось выполнить это необратимое преобразование?

Для ответа на этот вопрос хочу особо привлечь внимание читателей к статье А. К. Власова “Какие стороны элементарной математики представляют ценность для общего образования?” (МО, №3, 1997, с.66-74).

Строго говоря, это не статья, а “речь, произнесенная” на 2-м Всероссийском съезде преподавателей математики в 1913 г. Это мысли нашего соотечественника, идущие к нам из Прошлого. А воспринимаются они сегодня, как ориентир Будущего. Они освещают нам наши ошибки и восстанавливают потерянный нами Путь Истины, который умели видеть наши предки.

Напомню, что путь общего математического образования, выбранный математиками-управленцами в 60-70-х гг., поставил заманчивой целью “формирование научного мировоззрения”[4]. Средством для достижения этой цели был указан новый дидактический принцип “высокого теоретического уровня” (ВТУ) преподавания и, соответственно, ВТУ-изложения математики в учебниках (в школе и вузе).

Жизнь (не логика!) **доказала**, что этот путь ведет к обратному результату — к деградации качества элементарных математических знаний и умений. Математика стала для учащихся непонятной и нелюбимой. Но мы страшимся это признать.

И вот оказывается, что путь этот наметился еще в начале века: “в официальных объяснительных записках к различным программам дается решение поставленного вопроса (см. заголовок статьи А. К. Власова — И. К.) примерно в таком виде: задача средней школы — дать учащимся общее научное образование. Из этого положения выводится, что цель преподавания математики — развитие строго логического мышления. Средством достижения этой цели является изучение способов доказательств математических истин и систематическое изложение предмета”.

Не правда ли, сказано то, что является для нас общим местом, — ведь математическое обучение сегодня на всех уровнях просто копирует научную систему. К этому мы настолько привыкли, что не задумываемся над педагогическим смыслом такого обучения и вряд ли способны поставить его под сомнение.

---

[3] Л. Д. Кудрявцев. Математический анализ.- М.: Высшая школа, 1973, с. 7.

[4] А. И. Маркушевич. Преподавание в школе естественно-математических наук и формирование научного мировоззрения. // Математика в школе, 1976, №2, с. 10-16.

Но если мы когда-то все-таки признаем крах отечественного математического образования, то придется поставить вопрос о причинах. И здесь нам поможет серьезная мысль наших предков, — если только захотим и сумеем ее понять.

Давайте вдумаемся в начало рассуждений А. К. Власова. Не ощутите ли вы разительное качественное отличие его мысли от современной?

“Но что значит дать общее научное образование? ... Я думаю, все согласятся, что нельзя считать имеющим общее образование того, у кого ограниченный кругозор. Одними простыми сведениями, как бы ни были они обширны, нельзя расширить своего кругозора, нельзя достичь общего образования. Надо эти сведения пережить (! — И. К.), надо, чтобы в этом переживании что-то в прежнем кругозоре уступило после борьбы место чему-то новому, приводящему уже приобретенное в большую гармонию. Общее образование в целом не может быть получено в средней школе; средняя школа лишь закладывает основание ему, подготавливает восприимчивость (! — И. К.) ученика к расширению кругозора”.

“Говорить о строго логическом мышлении как цели, независимо от содержания этого мышления, по-моему, едва ли возможно ... содержание (смысл — И. К.) того, что доказывается, представляет большую ценность. ... Если такова будет главная задача, то содержание постепенно может быть видоизменено, подменено другим малоценным или даже не имеющим никакой цены. Такое явление наблюдается, например, в эволюции содержания задач по математике”.

Оцените — ведь это предсказание, которое оказалось пророческим. “Выхолощенное и формализованное преподавание математики на всех уровнях сделалось, к несчастью, системой.” (В. И. Арнольд[5]). Ложная цель и ложный принцип ВТУ-обучения математике как раз и привели к выхолащиванию ее смысла, и, как следствие, к непонимаемости учебного предмета и отвращению от математики большей части школьников и студентов.

Замечательно, что журнал дает возможность найти истоки этой ложной цели, а значит, лучше понять закономерности процесса, приведшего к нынешней деградации образования. Истоки можно рассмотреть в 1895 г. в статье Вс. Шереметевского “Математика как наука и ее школьные суррогаты” (МО, 1999, №4. С. 63-74).

Основная мысль Вс. Шереметевского сжата в заглавии статьи и варьируется в тексте: главная задача общеобразовательной школы — “дать понятие о сущности и значении математики как науки” (с.65), “вывести математику школы из области анахронизмов, внести в элементы общего образования представление о ней, как о науке нового времени, и указать хоть исходные пункты тех путей, по которым движется современная наука” (с. 74). Обратите внимание на совершенную определенность суждений, их напор и жесткость стиля (ярлык “анахронизмов”).

Стиль мышления и речи А. К. Власова иной — мягкий, глубоко вдумчивый, многомерный. Он не утверждает свое решение, он видит всю сложность задачи реформирования и призывает “подвергнуть тщательной разработке и критике все возможные здесь направления и принципы, чтобы выяснить, какая реформа могла

[5]Математическое образование, 1997, №2, с. 109

бы привести к действительному (!) прогрессу" (с. 66). Он видит опасности непродуманных реформ, наших реформ.

А. К. Власов начинает с "непраздного" вопроса, который перед Вс. Шереметьевским даже не возникает: "да нужна ли математика всякому образованному человеку и просто человеку?" (с. 67).

И посмотрите, как нетривиально, тактично, проникновенно он отвечает на этот вопрос — после вдумывания, всматривания в неуловимую живую ткань проблемы: "Я и предполагаю (!), что цель преподавания такой математики, хотя бы и элементарной, заключается в том, чтобы вызвать (!) в учащемся математическое мышление (!), соответствующее корням (!) этого мышления, как аналитическое так и геометрическое, ... , которое могло бы служить для него орудием познания мира .... Такое мышление может быть различных степеней .... Где бы оно для данного лица не кончалось, оно представляет для него ценность. Поэтому возражение, что такое мышление доступно только математикам, а не всем, отпадает" (с. 70-71).

Посмотрим теперь, как обосновывает свою цель Вс. Шереметевский. Он постулирует "исключительную отсталость среднеучебного курса математики" (с. 65). "Что бы вы сказали, если бы в наших гимназиях проходили физику по трактату Аристотеля, географию — по Страбону, ... Все, заканчивающие свои занятия математикой вместе с курсом средней школы, так и не заглядывают в великое здание науки, остаются в его подвалах, еще не свободных от традиционного мрака" (с. 64).

Что вы скажете на такие доводы? Эмоциональные, напыщенные фразы, ярлык "отсталости". Содержательных доводов просто нет, нет даже понимания проблемы. Ну, правомерно ли сравнение преподавания элементарной математики с преподаванием географии по Страбону? Страбон (I в. до н.э.) многого не знал и его география содержала много ошибок, в этом смысле она "устарела". А что "устарело" в элементарной математике? "Устарела" ли теорема Пифагора (VI в. до н.э.), открытая до Страбона? "Устарели" ли формулы Виета? И пр., и пр.

Другой довод: "ни в одном предмете средней школы не стараются (?), как в математике, искусственными урезками загородить учащегося от главного, существенного содержания науки" (с.65). Выясняя далее это существенное содержание, Вс. Шереметевский приходит к выводу, что математику следует определить "как науку о законах изменения величин ..., как учение о функциях" (с. 69). Из этого делается не очень логичное заключение: "ясно, что элементарный курс должен группироваться вокруг основного понятия о функциональной зависимости" (с. 71).

"Этот большой шаг ... еще не раздвинул бы узких рамок программы". Ставится вопрос: "в какую сторону подвинуть их?" После некоторых рассуждений дается четкий ответ: "счисление бесконечно малых есть та часть математики, которой она обязана своим значением.... Его элементы и должны (?) стать достоянием общеобразовательной школы" (с. 74).

Заканчивается статья хорошим предостережением: "Не следует ли заранее подумать о том, как достигнуть цели, не увеличивая, а уменьшая (?) шансы того переутомления, которое унылой тенью легло на наше школьное юношество?" Это, конечно, очень желательно, если бы только было возможно.

Сравнение мысли и ее выражения у А. К. Власова и у Вс. Шереметевского очень поучительно. На фоне А. К. Власова отчетливо прорисовываются характерные качества реформаторов — ослепленность инновационой идеей, отсутствие сомнений, критичности и вдумчивости, эмоциональный напор, поверхностность аргументации, рассчитанной на впечатление. Даже логика им изменяет.

Продолжить сравнение двух подходов к реформированию математического образования можно на материалах 1-го (1911 г.) и 2-го (1913 г.) Всероссийских съездов преподавателей математики, опубликованных журналом в №2-3 (9-10) за 1999 г.

Р. З. Гушель, представляющая эту подборку, кратко и выпукло рисует общую картину европейского реформаторского движения начала XX века. Создается впечатление единодушного, вдохновенного, прогрессивного движения, которое неплохо было бы возродить. Однако, при внимательном прочтении резолюций замечаешь, что международная идея модернизации имела весьма осторожную поддержку российской педагогической и научной общественности.

В резолюции первого съезда сказано: "ознакомить учащихся с простейшими и наиболее[6] доступными (!) им идеями аналитической геометрии и анализа" (с.154). И далее: "Сознавая всю сложность (!) высказанных здесь пожеланий, съезд признает необходимым проявить соответствующую осторожность (!) при всех начинаниях, касающихся проведения их в жизнь" (с.156).

Второй съезд уточнил желательные меры: "а) пересмотр программ аналитической геометрии и анализа; б) назначение на эти предметы достаточного количества времени; в) установление связи анализа с предыдущими частями курса; г) более правильная методическая постановка преподавания аналитической геометрии и анализа" (с. 158).

Таким образом, мы видим, что речь идет не о коренном "обновлении" программ общеобразовательной школы, а о введении новых учебных предметов. И не "**за счет** (выделено мною — И. К.) отказа от второстепенных и устаревших разделов", как пишет Р.З.Гушель (с. 152), а при условии добавления достаточного учебного времени. "Освобождение курса от отделов, утративших свое значение" признавалось желательным (с. 158).

Более того, К. А. Поссе в своем докладе на первом съезде резко ставит вопрос, который не интересовал Вс. Шереметевского: "Можно ли составить такую программу математики в средней школе, которая удовлетворяла бы общеобразовательным задачам ее и специальным требованиям высшей школы ("интересам науки" — по Вс. Шереметевскому)? Я утверждаю, что общей, обязательной для всех учеников, программы такого рода составить невозможно (!)" (с. 162).

К. А. Поссе предложил ввести дополнительный "специальный курс математики ... в специальных математических классах" (с.163). Съезд признал "желательной

[6]Наши реформаторы-70, привлекая решения первого съезда себе в поддержку, исказили эту цитату — вместо слова "наиболее" поставили "несомненно". См. сборник "На путях обновления школьного курса математики". М.: Просвещение. 1978. С. 5. Составители: А. И. Маркушевич, Г. Г. Маслова, Р. С. Черкасов. Призыв съезда к "осторожности" не цитировался.

подробную разработку вопроса" (с. 155).

Невысказанные опасения участников первых Всероссийских съездов, к несчастью, подтвердились жизнью. Жизнь доказала ошибочность фантазий Вс. Шереметевского и оправданность сомнений А. К. Власова.

Планируемая реформаторами начала века модернизация преподавания математики была практически реализована на Западе в 50-60-х гг.. Ее итоги подвел III Международный конгресс по математическому образованию (ФРГ, Карлсруэ, 1976), где "подчеркивалось практически во всех докладах, что реформа не оправдала возлагавшихся на нее надежд"[7].

Ранее, на II съезде (Англия, Эксетер, 1972) в докладе выдающегося французского математика Рене Тома была подвергнута сокрушительной критике вся идеология модернизаторов. "Со злой иронией" говорил он об их "догматизме" и заключил: "настало время перестать давать обещания, которые являются простым обманом (!)"[8].

Еще ранее, в 1966 г. другой крупнейший математик, Рольф Неванлинна изложил свои взгляды на реформаторское движение, отсчитываемое им с "эрлангенской программы"[9] (1876) Феликса Клейна, в статье, написанной для журнала "Amer. Math. Monthly". Он подчеркивал "узость мысли", которую "проявляют иной раз те, кто сам внес существенный вклад в современную математику"[10]. Его общая характеристика деятелей движения такова: "несерьезные попытки "модернизации" преподавания исходили от людей, которые были обуреваемы близоруким восхищением перед всяческими новшествами, но не понимали основных особенностей развития математики за последние годы"[11].

Итак, ложность реформаторских идей, как будто, понята и, более того, доказана жизнью. Логично было ожидать, что последует исправление ошибок. В жизни же происходит опять иное. Реформа возобновляется. В России. В 70-х гг. После краха ее на Западе. Как это можно объяснить?

Следует знать, что готовилась "наша" реформа исподволь и задолго. Еще в 30-х гг. группа элитных московских математиков настойчиво пыталась заменить учебники и навязать школе научную строгость[12]. Тогда это не удалось, потому что были еще крепки традиции дореволюционной русской школы. Немало было

---

[7]На путях обновления школьного курса математики. М. 1976. С.287. (Цитата дана в сжатом виде.)

[8]Там же, с. 274.

[9]Программа систематизации геометрических наук с единой, групповой точки зрения, которую предложил Ф. Клейн в лекции, прочитанной им при вступлении в должность профессора по кафедре геометрии университета г. Эрлангена в 1876 г. Подробнее об этой программе и о связанной с ней программой реформирования школьной математики см. книгу Ф. Клейн, "Элементарная математика с точки зрения высшей", т.1. М.: Наука. 1987., с. 6-9. Интересно, что программа Ф. Клейна абсолютно совпадает с Шереметевской даже в средствах: "Чтобы сделать возможным это нововведение (функциональная база и введение начал анализа — И. К.), мы готовы отказаться от многих частей материала, входящего в состав действующих программ" (там же, с.18-19).

[10]9. На путях обновления..., с. 234.

[11]Там же, с. 238.

[12]И. П. Костенко. "Вузовский учебник: история реформы-60, результаты", статья вторая. Университетская книга. 1997, №8, с. 21-22.

носителей традиций и педагогической культуры. Это можно почувствовать, читая выступления участников Всероссийского совещания преподавателей математики средней школы 1935 г.[13]. П. С. Александров в своем докладе, тем не менее, мечтал о времени, когда "преподавание математики в нашей советской школе достигнет того уровня, который соответствует современному развитию науки"[14].

В 1949 г. А. И. Маркушевич прочел перед АПН РСФСР доклад "О повышении идейно-теоретического уровня преподавания математики в средней школе", в котором повторил аргумент В. П. Шереметевского (программы и учебники безнадежно "устарели"), привел примеры и предложил вернуться к вопросу, который "настойчиво ставился" на первом и втором Всероссийских съездах преподавателей математики — к вопросу о реформе математического образования.

"К этому вопросу, но уже с принципиально иных позиций, позиций, которые должны отражать интересы культуры самого передового в мире социалистического государства, идущего к коммунизму, следует вернуться, чтобы, наконец, разрешить его и претворить в жизнь"[15].

В 60-х гг. А. И. Маркушевич стал заместителем министра просвещения СССР и "претворил"-таки в жизнь программу Шереметевского-Клейна. Причем, именно **за счет** выбрасывания методически необходимых частей курса — "несколько (?) тесня традиционный и включая новый материал"[16]. Т.е. путем разрушения исторически сложившейся, педагогически выверенной системы преподавания и перемешивания старого материала с новым. А ведь именно это считал "недопустимым" К. А. Поссе. И здесь жизнь подтвердила правоту мудрой осторожности наших предков.

Один пример. Как академик АПН проф. А. И. Маркушевич учил учителей, что "следует критически пересмотреть традиционное отношение к арифметическим методам решения задач и остатки "культа" этих задач изжить из нашей школы. Это будет одним из шагов на пути сближения школы с жизнью (?), сделав который мы сбережем время и силы учащихся и повысим уровень обучения математике в школе"[17].

На самом же деле, он отнял у детей "лесенку" (В. Арнольд), неторопливо поднимаясь по которой, учащиеся развивали осмысленное понимание и тренировали содержательное мышление. В результате сегодня лишь около 27% наших старшеклассников могут решить смысловую задачу с помощью уравнений (в 40-х гг. их было 73%)[18].

Вот как описывает результаты реформы-70 ее участник, академик РАО, заслуженный учитель РФ Ю.М.Колягин. "После первого выпуска (в 1978 г.) учащихся средней школы, завершивших изучение математики на теоретико-множественной

[13]Материалы совещания преподавателей математики средней школы. М. ОГИЗ. Учпедгиз. 1935.

[14]Там же, с. 8.

[15]На путях обновления ... с. 18.

[16]Там же, с. 20.

[17]Там же, с. 42-43.

[18]Всероссийская конференция "Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков." Дубна, сентябрь 2000.- М.: МЦНМО.- 2000, с.164-165.

основе и пришедших поступать в МГУ, МФТИ, МИФИ и другие престижные вузы (т.е. лучших выпускников наших школ), среди ученых-математиков АН СССР и преподавателей вузов началась паника. Абитуриенты оказались практически неподготовленными к изучению математики в вузе. Было повсеместно отмечено, что математические знания выпускников школ страдают формализмом, навыки вычислений, элементарных алгебраических преобразований, решения уравнений практически отсутствуют. Шок от результатов этой реформы был так велик, что вызвал реакцию в ЦК КПСС и правительстве страны. Началось "исправление ошибок"[19].

Идеологию реформы глубоко проанализировал академик Л. С. Понтрягин. Его вывод: "главный порок, конечно же, в самом ложном принципе — от более совершенного его исполнения школа не выиграет"[20]. Осудило реформу и Отделение математики АН СССР (декабрь 1978 г.)[21]. Орган ЦК КПСС, журнал "Коммунист" взял ситуацию "под контроль". Министерство же вместо "исправления ошибок" стало их "совершенствовать", заинтересовав этим делом (написание новых учебников) академиков и оставляя незыблемым сам "ложный принцип" реформы — принцип ВТУ.

И какой результат? Принцип ВТУ продолжает разлагать математическое образование до сего дня. Ни Академии наук, ни ЦК КПСС не удалось остановить реформу, задуманную Вс. Шереметевским! Кто же сможет объяснить, почему?

Сегодня математики-реформаторы вновь оживились. Журнал "Математика в школе" открывает дискуссию на тему "Математика в школе XXI века"[22]. Проводится Всесоюзная конференция (Дубна-2000), объявленная цель которой: "выработка концепции ... для ... поднятия математического образования на новый (?) уровень, соответствующий требованиям времени"[23]. Ведущий деятель современного математического образования Г. В. Дорофеев представляет проект новой концепции, который акад. РАН С. П. Новиков назвал "бредом", а акад. РАО Ю. М. Колягин "американизацией"[24].

Г. В. Дорофеев теоретически обосновывает реанимацию "теоретико-множественного подхода"[25]. Под руководством Г. В. Дорофеева этот "подход" реализован Н. Я. Виленкиным и Л. Г. Петерсон в учебнике для начальной школы. Новые реформаторы начали сегодня повышать "научную" культуру первоклашек. Они учат детишек, что $\{K\,O\,T\} = \{T\,O\,K\}$[26], объясняя им, что эти множества состоят из одинаковых элементов, значит, по-научному их следует считать равными. Но ведь ребенок воспринимает показываемые ему "множества", прежде всего, как слова. Уравнивая разные слова, разные **смыслы**, новые методисты на корню разрушают

---

[19] Ю. М. Колягин. Русская школа и математическое образование. Орел. 1996, с.126-127.

[20] Коммунист. 1980. №14, с. 106.

[21] Там же, с. 109.

[22] Математика в школе. 2000. №1, с. 2-6.

[23] Математика в школе. 2000. №5.

[24] Учительская газета. 1999. №47, с. 16.

[25] Начальная школа. 1997. №1, с.57-59. Критику статьи Г. В. Дорофеева см. в №4 за 1999 г., с.102-108.

[26] Начальная школа. 1999. №4, с.102.

осмысленное восприятие детей.

Наследники реформаторов-70, среди которых есть активные участники той реформы, опять берут на вооружение имя А. Н. Колмогорова[27]. Они "думают" сегодня над той же "проблемой" — что бы еще выкинуть из традиционного курса математики? А. М. Абрамов предлагает "освобождение от архаичного материала (например, тем "Логарифмы" и "Тригонометрические формулы")", а также "от задач". Правда, формулируется это благопристойно: "от бессодержательных задач с псевдодидактическими целями"[28]. Его поддерживает Р. Г. Хазанкин: "уже нет никакой необходимости заниматься тригонометрическими изощренностями, трудными задачами ... и прочими тупиковыми (?) задачами"[29]. Предлагается обратно ввести в программу комплексные числа и комбинаторику, но умалчивается, что это то самое "архаичное", что было выкинуто ими в 70-х гг.

Уместно напомнить здесь предостережение акад. В. И. Арнольда из цитированной ранее его статьи: "Хочу предупредить возможных российских реформаторов-последователей: математика — живой организм, вдобавок подобный лестнице, в которой выкидывание даже отдельных ступенек чрезвычайно опасно" (с.112). Но психология реформаторов всегда неизменна — они не слышат никаких аргументов, потому что для их целей они им не нужны.

Реформаторы настойчиво подчеркивают, что "речь ни в коем случае (!?) не должна идти об отказе от уже сделанного"[30] (в 70-х — И. К.), в частности, "сомнительна идея полного отказа от изучения элементов анализа; не раскрыты идеи аксиоматического метода и т.д."[31]. Значит, по-прежнему не будем исправлять ошибки, — будем их "совершенствовать"?

Элементы анализа действительно нельзя включать в программу общеобразовательной школы, потому что они **всегда** останутся **непонятыми**. Это понимал К. А. Поссе. Это доказано жизнью. И надо, наконец, отдать себе отчет, — почему так происходит. Чтобы не повторять ошибок бесконечно.

Ответ, опять же, подсказывает нам жизнь, история математических идей. Вспомните, — ведь сами математики XVIII в. очень плохо понимали основы анализа. Понадобилось столетие, чтобы они разобрались в логике нового математического мышления.

Суть основ анализа — в новом **качестве** мышления. В этом и главная трудность преподавания. В этом коренная причина непонимания его учащимися даже высшей школы. Необходимо длительное время привыкания к новой интуиции, к новой усложненной логике, плохо увязывающейся с интуицией. Похоже, что в жизни эта логика, в конце концов, отторгается любым специалистом-нематематиком. Ну, а для школьников примитивное изложение частичной техники дифференцирования (даже без понятия предельного перехода) и интегрирования приводит их, как все непонятое, только к отвращению от математики.

---

[27]Всероссийская конференция "Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков". МЦНМО. М. 2000, с.3, 5, 37, 53.

[28]Там же, с. 52.

[29]Там же, с. 38.

[30]Там же, с.37.

[31]Там же, с. 52.

В заключение еще раз сравним мысль А.К.Власова и мысль Вс.Шереметевского.

А. К. Власов ищет ответ на сложный вопрос — что может дать изучение математики развитию познавательных сил учащегося? Он хочет "вызвать (!!) в учащемся математическое мышление ..., которое могло бы служить для него орудием познания мира" (с. 70-71). Вс. Шереметевский не ставит вопросов и не ищет ответов — он хочет, чтобы школьники знали современную ему науку — математику (или ее "элементы" - ?). Он даже не задается вопросом — возможно ли это? Вопроса "зачем?" для него тоже не существует: "пока этого не сделано, почти все образованное общество будет чувствовать себя чужим в созидаемом вокруг него мире науки и техники" (с.65).

Мысль Власова идет осторожно, она как будто неопределенна и даже не очень понятна, как сама жизнь. Мысль Шереметевского очень категорична, логически проста, эмоционально разукрашена, очень понятна.

Вот в чем сила реформаторских идей — они просты и понятны. Они абстрагируются от сложности и противоречивости живой жизни, снимая тем самым трудность познания Истины. Они легко увлекают активных деятелей красивыми миражами. И даже крах реализации таких идей не приводит их адептов к переосмысливанию — они продолжают мечтать о "дальнейшем совершенствовании".

Благодарю редакцию журнала за радость прикосновения к забытой глубокой русской мысли. Желаю увеличения тиража, быстрого роста числа читателей, активизации общественной педагогической мысли.

30 июня 2001 г., Краснодар.

Игорь Петрович Костенко,
кандидат физ.-мат. наук, доцент,
действительный член Международной
педагогической академии.
email: i_kostenko@mail.ru
danilov@fpm.kubsu.ru

Преподавание математики в историческом контексте

Щетников А. И., Щетникова А. В.

В статье обсуждается интересный, сложный и актуальный для преподавания математики вопрос — в какой мере преподавание математики как учебного предмета должно учитывать историческое развитие математической науки и, более широко, математической деятельности как составной части человеческой культуры. Обсуждаются конкретные примеры введения исторического контекста в преподавание.

1. Как соотносятся между собой преподавание математики и ее история?

1.1. Математика в ее отношении к историческому времени может рассматриваться двояко. С одной стороны, мы можем видеть в ней систему связанных между собой *вечных вневременных фактов.* Деятельность математиков сводится к открытию этих фактов и к прояснению дедуктивных связей между ними; соответственно, история математики представляет собой "эволюционный прогресс, по ходу которого математика становится лучше и лучше; при этом подразумевается, что математика прошлого постепенно отвергается как неуместная, неточная и имеющая изъяны" [14, 107].

С другой стороны, мы можем смотреть на математику как на *человеческую деятельность*, разворачивающуюся *в культурном времени.* Эта вторая точка зрения не отменяет собой первую, но дополняет ее, открывая возможности для конструктивного обсуждения *логики открытий* ([2], [4]), *математизации* и *моделирования.* И она позволяет нам увидеть, что в деятельности математиков, открывающих новое знание, и в деятельности преподавателей и учащихся, имеющих дело с уже открытым знанием, есть нечто общее, поскольку и в этой последней деятельности элемент содержательного общения, открытия и творчества оказывается очень важным, если только мы стремимся к *осмысленности* учебного процесса.

1.2. Традиционная форма преподавания математики такова, что основные математические курсы являются по существу своему внеисторическими, а экскурсы в историю прилагаются к ним "для общего познавательного развития", но не в целях собственно математического образования. Так в педагогическом институте история математики читается обычно на последнем курсе; тем самым молчаливо подразумевается, что история ничего не может дать для освоения самого предмета.

Однако современная математика слишком абстрактна, слишком оторвалась от своих исторических корней, чтобы быть легко понятной и хорошо усваиваемой. Постоянное изменение предмета в сторону все большей его абстрактности вкупе с устоявшимся представлением о его неизменности делают ситуацию в математическом образовании все более иррациональной. Мысль о необходимости реформы математического образования постоянно обсуждается людьми, входящими в математическое сообщество; однако число продуктивных идей в этой сфере весьма невелико ([7], [13]). И возможно, ключ к решению проблемы состоит в том, чтобы изменить точку зрения на соотношение математики и ее истории и начать систематически рассматривать происхождение математических идей и разыгрывать драму их возникновения не только в факультативных курсах истории математики, но (и прежде всего!) в основных математических курсах.

Как указывает ЖАН-ПЬЕР ФРЕЙДЕЛЬМЕЙЕР, "взгляд назад на историю позволит преподавателю математики найти в ней исходные задачи, и тем самым он сможет вернуть смысл математическим терминам и понятиям, которые часто вычищаются математиками из подтекста, поскольку они слишком конкретны или слишком интуитивны, и слишком неоднозначны для их целей. Он также будет способен показать ступени создания фундаментальных понятий и методов, и помочь своим учащимся выделить их критический смысл и осознать необходимость строгости, показав, как некоторые решения оказывались неудовлетворительными. Таким образом его учащиеся смогут увидеть необходимость *этого* определения или *этой* теоремы" [13, 121].

2. Метод доказательств и опровержений в преподавании анализа

2.1. Базу для содержательного приложения результатов историко-математических исследований к преподаванию математики дает *метод доказательств и опровержений*, введенный в эпистемологию ИМРЕ ЛАКАТОСОМ. На примере теоремы ДЕКАРТА-ЭЙЛЕРА о многогранниках ЛАКАТОС показал, что "строгие" математические понятия вырастают из попыток доказать первоначальную "наивную" догадку, относящуюся к тому или иному положению дел. Последовательно выдвигаемые доказательства и их опровержения, как правило, полностью "уничтожают" основные первоначальные понятия (в примере ЛАКАТОСА — наивное понятие многогранника), и заменяют их *понятиями, рожденными доказательством.* Тем самым смысл доказываемого (что, собственно говоря, доказывается) открывается по-настоящему только в процессе доказательства и анализа доказательства. Согласно ЛАКАТОСУ, "неформальная квазиэмпирическая математика не развивается как монотонное возрастание количества несомненно доказанных теорем, но только через непрерывное улучшение догадок при помощи размышления и критики, при помощи логики доказательств и опровержений" [2, 15].

Фундаментальные теоремы современного математического анализа (и других разделов современной математики) исторически были осмыслены и сформулированы лишь через несколько столетий после возникновения самих этих дисциплин.

Работа по обоснованию основных понятий анализа оказалась весьма тонкой и сложной, и она привела к сильному переосмыслению самих этих понятий. К примеру, БЕРНАРД БОЛЬЦАНО и ОГЮСТ ЛУИ КОШИ дали определение непрерывной функции с целью зафиксировать в нем интуитивное представление о непрерывной линии (то есть такой линии, которую можно провести, не отрывая карандаша от бумаги); но после того, как это определение было выдвинуто, открылась возможность строить такие функции, которые очень слабо подходили к исходному воззрению (а именно, функции, разрывные всюду; непрерывные функции, не имеющие производных ни в одной точке, и т. п.) (см. [3], [11, 12-24]).

2.2. С чем же сталкиваются первокурсники, приступающие сегодня к изучению математического анализа? Знакомясь с объектами, не согласующимися с их интуитивным представлением, они испытывают своего рода шок. К примеру, со школы у первокурсника имеются некоторые представления, связанные со словом "функция". Эти представления похожи на те интуиции, которые имелись у математиков XVIII века: функция — это формула, в которой знаками арифметических действий соединены числа и "иксы", а также содержатся такие значки, как sin или log. График такой функции обычно является гладкой непрерывной линией, иногда уходящей в бесконечность. Изредка встречаются изломы (если в формуле встречается знак "модуль") и скачки. В результате, узнав про *всюду разрывную* функцию ДИРИХЛЕ, многие первокурсники спрашивают неуверенно: "А разве это — *функция?*" Если их отослать к определению, они посмотрят, подумают и скажут: "Да, получается, что *это — функция...*". Но ведь знакомясь с определением, излагаемым формально, они такого шока не испытали — а значит, не поняли, о чем оно говорит и зачем оно так сформулировано.

Что касается самых первых теорем курса анализа, то их утверждения очевидны настолько, что многие студенты недоумевают: а зачем это вообще доказывать? Но доказательства этих теорем — весьма изощренные и нетривиальные. Тем самым в сознании студента доказательство отрывается от теоремы, вместо того чтобы быть ее органической частью, в которой только и раскрывается действительное содержание теоремы. Поэтому смысл теоремы остается не понятым; в дальнейшем начинает ускользать и смысл предмета в целом. Как указывает ЛЕО РОДЖЕРС, "стандартный способ изложения зачастую производит на студентов впечатление полной бессмыслицы, поскольку они ничего не знают ни о причинах, по которым преподаватель выбрал такой подход, ни о том, чем руководствовались математики, когда ставили свои задачи" [14, 105].

2.3. С эпистемологической точки зрения, фундаментальные понятия анализа могут быть действительно **усвоены** лишь в контексте *рациональной реконструкции истории математических идей.* Смысл понятия раскрывается, если восстановлены и прожиты основные этапы его становления: от первичных интуитивных представлений через попытки оформить эти представления в "строгие" определения и теоремы к их дальнейшей критике и исправлению путем предъявления *парадоксальных примеров* и *контрпримеров*, а в итоге — к переосмыслению собственных представлений и получению нового знания.

Еще сто лет назад АНРИ ПУАНКАРЕ писал об этом так: "Наши предки думали, что знают, что такое дробь, непрерывность, площадь кривой поверхности; лишь мы заметили, что они этого не знали. Точно так же наши ученики думают, что они это знают, когда уже принимаются серьезно за изучение математики. Если я, без предварительной подготовки, скажу им: "нет, вы этого не знаете, вы не понимаете того, что вам казалось понятным; я должен доказать вам то, что вы считаете очевидным", — и если я в своих доказательствах буду опираться на посылки, которые им кажутся менее очевидными, чем заключения, то что подумают эти несчастные? Они подумают, что математическая наука есть не что иное, как груда бесполезных умствований; и они либо почувствуют к ней отвращение, либо будут забавляться ею как игрою и в умственном отношении уподобляться греческим софистам. Напротив, позже, когда ученик освоится с математическим суждением и ум его созреет в этой продолжительной работе, сомнения станут возникать сами собой, и тогда ваше доказательство будет своевременным. Оно разбудит новые сомнения, и вопросы предстанут перед юношей в той последовательности, в какой они представлялись нашим отцам; и это будет продолжаться до тех пор, пока он не разовьется в такой мере, что его будут удовлетворять только совершенно строгие определения. Недостаточно еще во всем сомневаться, нужно знать, почему возникает сомнение" [5, 359].

2.4. Наши первые попытки вводить на основе метода доказательств и опровержений систему понятий математического анализа, связанных с идеей *непрерывности функций и числовых областей*, представляются нам весьма продуктивными. Эти попытки осуществлялись в форме семинара в режиме погружения. Мы думаем, что такой семинар следовало бы проводить перед началом обучения; он выполнил бы функцию перехода от школы к институту. Пока такой переход не явлен, многие студенты продолжают не то что думать, но и вести себя по-школьному. А время идет!

Стартовой задачей семинара послужила известная задача про паломника, который в первый день поднимается на гору, а во второй день спускается с нее, причем движение в оба дня начинается и завершается в одно и то же время; требуется доказать, что в какой-то точке пути паломник находился в одно и то же время суток в оба дня. Задача решается с помощью удачной догадки: нужно изобразить зависимость высоты подъема от времени на графике, и совместить графики движения за оба дня. Поскольку графики непрерывны, то они должны где- то пересечься (рис. 1).

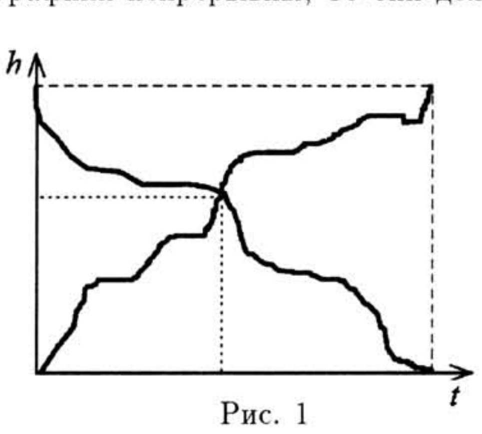


Рис. 1

От обсуждения существенных особенностей движения ("паломник проходит одну за другой все точки, ведь он не способен к нуль-транспортировке") мы переходим к формулировке задачи на языке математики: пусть функция $f(x) = f_2(x) - f_1(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и принимает значения $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$; требуется доказать, что существует такая точка $x_0 \in [a, b]$, что $f(x_0) = 0$. Первые попытки доказывать это утверждение "в лоб" упираются в необходимость дать *определение* непрерывной функции (хорошо, если ведущий семинара поставит также вопрос о том, что это значит: "дать определение").

Путь к определению идет через отрицание: *непрерывной на отрезке* будет такая функция, которая нигде на этом отрезке не имеет разрывов. Разрыв функции в точке определяется на неформализованном $\varepsilon - \delta$ языке с привлечением соответствующих картинок: при убывающе малом изменении аргумента функция испытывает конечный скачок значения. Попутно мы определяем вспомогательное понятие функции, *непрерывной в точке.*

Построенные понятия и выдвинутые на их счет догадки могут быть проверены на объем и прочность с помощью набора парадоксальных примеров и контрпримеров. Может показаться, что точки разрыва всякой функции обязательно отделены одна от другой интервалами непрерывности; это мнение опровергается примером всюду разрывной функции. Может также показаться, что всякая функция, будучи непрерывной в некоторой точке, обязательно окажется непрерывной также и в некоторой окрестности этой точки; контрпримером к этому мнению служит функция, непрерывная в единственной точке. Полезно также рассмотреть более сложный пример функции, разрывной во всех рациональных и непрерывной во всех иррациональных точках (см. [1], [11]).

Теперь можно вернуться к решению основной задачи. Интуиция непрерывности говорит нам, что искомая точка x_0 обязательно существует, но ее еще предстоит "*поймать*", *опираясь на определение* непрерывной функции. Опыт уже проведенных семинаров показывает, что учащиеся могут попытаться "поймать" эту точку двумя способами (и дело ведущего — помочь им оформить эти способы). *Первый способ* связан с последовательным движением от одного из концов отрезка; он основан на том, что мы всегда можем отойти от конца отрезка на такое расстояние, что знак функции еще не изменится. Но ведь рано или поздно этот знак должен измениться! Оформление этого способа приводит к идее доказательства, основанной на понятии верхней грани множества (РИХАРД ДЕДЕКИНД). Во *втором способе* используется метод дихотомии, когда искомая точка охватывается системой вложенных отрезков (БЕРНАРД БОЛЬЦАНО, ГЕОРГ КАНТОР). И после того, как эта точка "схвачена", нам остается показать, что рассматриваемая функция не может принять в ней ни положительного, ни отрицательного значения; следовательно, это значение равно нулю.

Заключительная часть семинара связана с выделением базовых лемм, на которых основываются построенные доказательства. Одну из этих лемм следует принять за *аксиому о непрерывности системы действительных чисел*, тогда остальные будут ближайшими следствиями этой первой леммы. Можно проследить по разным учебникам, что так и происходит: один автор принимает одну аксиому о непрерывности системы действительных чисел, другой — другую. Но все эти аксиомы эквивалентны друг другу. Особенно интересно заметить, что каждая из этих лемм превращается в мощное орудие для дальнейших доказательств различных теорем.

3. Понятие параллельных прямых в школьном курсе геометрии

3.1. Еще одно направление наших работ, в котором историко-математические и эпистемологические исследования интегрированы с прикладными педагогическими разработками, связано с проектом учебного курса геометрии для 7-11 класса средней школы ([8], [9]). Одна из основных идей этого курса состоит в том, чтобы те или иные блоки геометрических знаний осваивались учащимися не в порядке формального следования от аксиом ко все более и более сложным теоремам, но путем сведения теорем *неочевидного* содержания к элементарным геометрическим фактам.

Систематическую часть курса геометрии предлагается открыть комплексом, связанным с теоремой о сумме углов треугольника и понятием параллельных прямых. Теорема о том, что *сумма внутренних углов всякого треугольника равна развернутому углу*, представляет собой утверждение неочевидного характера, приводимое к очевидности с помощью простого дополнительного построения (рис. 2). Если мы проведем через вершину A произвольного треугольника ABC прямую DE, параллельную стороне BC, то угол DAB будет равен углу ABC, а угол EAC будет равен углу ACB, и поэтому сумма углов треугольника ABC будет равна сумме углов DAB, BAC, CAE, то есть будет равна развернутому углу DAE.

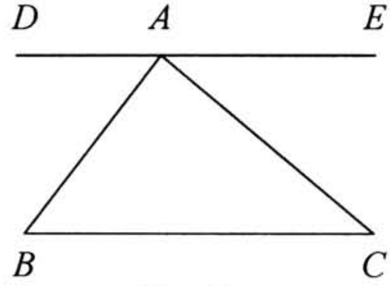


Рис. 2

Именно так эту теорему доказывали математики древней пифагорейской школы (см. [6, 474]). Данное доказательство воспринималось сперва как самодостаточное, опирающееся на очевидные факты и не требующее дальнейшего обоснования. Понятие параллельных прямых выступало в нем как *эпистемологический синкрет* (ср. [15, 258]), в котором были слиты воедино различные свойства: идти рядом на одном расстоянии, не встречаться при продолжении, пересекать секущую под равными накрестлежащими углами и пр.

После того, как теорема о сумме углов треугольника доказана, мы можем на ее основе развернуть *конструктивную* или *синтетическую* линию рассматриваемого блока геометрических знаний. В нее входят теоремы о сумме углов четырехугольника и произвольного многоугольника, понятие о внешнем угле многоугольника (в том числе — об отрицательном внешнем угле при невыпуклой вершине), теоремы о сумме углов пятиконечной звезды и произвольного звездчатого многоугольника.

3.2. Обращение же к основаниям предъявленного доказательства задает движение по противоположной (не вширь, а вглубь) *аналитической* линии. Первая проблема появляется вместе с вопросом: “А как вы будете *проводить* прямую DE, чтобы она была параллельна BC?” Если ответить: “Мы проведем ее так, чтобы угол DAB был равен углу ABC”, то тогда возникает еще один вопрос: “А откуда вы знаете, что и угол EAC при этом будет равен углу ACB?” Если последует ответ: “Но ведь BC и DE — параллельные прямые”, то следующий вопрос будет таким: “А что вы называете параллельными прямыми? Какое *определение* параллельных прямых вы даете?” И как только параллельные прямые определяются как *непересекающиеся при продолжении*, тут же выставляется требование связать свойства прямых *не пересекаться при продолжении* и *образовывать с секущей равные накрестлежащие углы* двумя взаимно обратными теоремами.

Именно такое расчленение синкрета “параллельные прямые” было предпринято математиками платоновской Академии — современниками АРИСТОТЕЛЯ (возможно, не без активного влияния последнего). Свидетельства о том, как шла соответствующая дискуссия, сохранились в *Аналитиках* АРИСТОТЕЛЯ; их детальному обсуждению посвящена статья [10].

Основываясь на исторической реконструкции перехода от синкретического *представления* о параллельных к детализованному *понятию*, мы хотели бы попробовать разыграть этот переход на уроках геометрии. Мы полагаем. что при правильной организации учебной коммуникации учащиеся 7 класса способны:

(1) вычленить из набора своих представлений о параллельных прямых *определение параллельных прямых как не встречающихся при их продолжении*;

(2) установить, что теорема о сумме углов треугольника основывается на двух взаимно обратных теоремах: *если две прямые пересекают секущую под равными накрестлежащими углами, то они не встречаются при их продолжении* (эта теорема нужна для построения параллельных прямых) и *если две прямые не встречаются при их продолжении, то они пересекают секущую под равными накрестлежащими углами.*

3.3. Попытки доказать две вышеназванные теоремы приводят нас в самое ядро рассматриваемого комплекса геометрических знаний. Содержательным основанием для доказательства первой теоремы (равенство накрестлежащих углов $\longrightarrow$ параллельность) служит идея *отсутствия достаточного основания*: почему рассматриваемые прямые должны пересечься скорее с одной стороны от секущей, нежели с другой? Формализация этой идеи приводит к построению первого в курсе *доказательства от противного* и к вычленению аксиомы о том, что *через две различные точки проходит только одна прямая.*

Эта же теорема может быть доказана и на основе вспомогательной теоремы о том, что *внешний угол треугольника больше внутреннего, с ним не смежного* (именно так она доказывается в Началах ЕВКЛИДА). Однако мы полагаем, что вычленение такой вспомогательной теоремы и само ее доказательство будут представляться учащимся более искусственными, нежели "симметрийное" рассуждение.

Что касается доказательства второй теоремы (параллельность $\longrightarrow$ равенство накрестлежащих углов), то оно должно основываться на принятии какой-либо аксиомы о параллельных прямых, эквивалентной пятому постулату ЕВКЛИДА. Думается, что с дидактической точки зрения будет полезным, если учитель сперва продемонстрирует доказательство, основанное на аксиоме о том, что *через точку вне прямой проходит только одна прямая, параллельная данной*, а затем обсудит с учащимися *эквивалентность* этой аксиомы некоторым другим утверждениям о параллельных прямых (таким, как *если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой*, или *если прямая проходит через точку внутри угла, то она пересекает по крайней мере одну из сторон этого угла*). Во-первых, у учащихся появится представление о свободе выбора аксиом в рамках одной и той же системы фактов; во вторых, они получат возможность попрактиковаться в построении косвенных доказательств.

Рассуждения о существовании неевклидовых геометрий вряд ли будут по-настоящему поняты учащимися в этом месте курса. Мы полагаем, что адекватной формой для введения соответствующих представлений может служить учебный семинар "Геометрия на сфере", который имеет смысл проводить в 10 классе в режиме погружения (см. [12]).

Библиография

1. ГЕЛБАУМ Б., ОЛМСТЕД ДЖ. *Контрпримеры в анализе.* М.: Мир, 1967.

2. ЛАКАТОС И. *Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы.* М.: Наука, 1967.

3. *Непрерывность функций и числовых областей: Б. Больцано, Л. О. Коши, Р. Дедекинд, Г. Кантор.* Новосибирск: АНТ, 1997.

4. ПОЙА Д. *Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание.* М.: Наука, 1970.

5. ПУАНКАРЕ А. *О науке.* М.: Наука, 1983.

6. *Фрагменты ранних греческих философов. Часть I: От эпических космогоний до возникновения атомистики.* Подг. изд. А. В. Лебедев. М.: Наука, 1989.

7. ШЕХОВЦОВ С. Г. Математическое и естественнонаучное образование в современной России: тенденции и перспективы. *Материалы XI Межгосударственной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем".* М.: МГУ, 2000. Ч. II, с. 239-253.

8. ЩЕТНИКОВ А. И. Материалы к проектированию курса геометрии для средней школы. *Математическое образование*, 3 (14), 1999, с. 35-42.

9. ЩЕТНИКОВ А. И. *Геометрия: Учебник для 7-11 классов средней школы.* Новосибирск: АНТ, 2000.

10. ЩЕТНИКОВ А. И. Параллельные прямые у Евклида и его предшественников. *В печати.*

11. ЩЕТНИКОВ А. И., ЩЕТНИКОВА А. В. *Роль контрпримеров в развитии основных понятий математического анализа.* Новосибирск: АНТ, 1999.

12. ЩЕТНИКОВА А. В. Учебный семинар "Геометрия на сфере". *В печати.*

13. FREIDELMEYER J.-P. What history has to say to us about the teaching of analysis. *Teaching mathematics: the relationship between knowledge, curriculum and practice.* Topiques Éditions, 1996, p. 109-122.

14. ROGERS L. Is the historical reconstruction of mathematical knowledge possible? *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique*, IREM de Montpellier, 1995, p. 105-114. Имеется перевод: РОДЖЕРС Л. Историческая реконструкция математического знания. *Математическое образование*, №1 (16), 2001, с. 74-85.

15. STENIUS E. Foundations of mathematics: ancient Greek and modern. *Dialectica*, 32, 1978, p. 255-290.

Щетников Андрей Иванович,
научный консультант "Центра образования",
г. Междуреченск.
e-mail: schetnikov@yandex.ru

Щетникова Анастасия Васильевна,
учитель математики и информатики,
г. Новосибирск.
e-mail: nastya_contact@mail.ru

О деятельности международной комиссии по преподаванию математики в начале XX столетия

Р.З.Гушель

Продолжаем публикацию материалов по истории математического образования, представленных постоянным автором нашего журнала Ревеккой Залмановной Гушель. Настоящая подборка дает представление о деятельности международной комиссии по математическому образованию в начале XX века.

О деятельности международной комиссии по преподаванию математики в начале XX столетия

К концу XIX века во многих странах Европы и Северной Америки начали раздаваться голоса о необходимости реформы существовавшей в то время системы среднего образования как по содержанию, так и по организационным формам. Развитие промышленности требовало специалистов совсем иного профиля, нежели могли дать классические гимназии с двумя древними языками. И в ряде крупнейших стран Европы первые годы XX столетия были ознаменованы серьезными реформами средней школы.

К началу XX века во Франции существовало два типа школ: классические школы с древними языками, дававшие доступ в университет, и новые школы, где языки изучались только новые, а программы по математике были больше, чем в классических школах. Выпускники новых школ могли поступать в любые высшие учебные заведения, кроме университетов. В результате реформы 1902 года во Франции была создана единая школа с различными подразделениями. Построение обучения было концентрическим, и в каждом концентре (кроме начальной школы) осуществлялась фуркация на несколько отделений. В старшем классе математического профиля изучались элементы дифференциального и интегрального исчисления, конические сечения и другие вопросы, традиционно относимые к программе высшей школы [I].

Серьезная попытка реформирования и модернизации русской школы была предпринята при министре народного просвещения Н.П.Боголепове. В 1900 году по его инициативе в С.-Петербурге работала Высочайше учрежденная комиссия по вопросу об улучшениях в средней общеобразовательной школе [2]. Было признано желательным одновременное существование различных типов школ (до пяти) с неодинаковым объемом курса математики в школах разных типов. Тогда же было решено дать реалистам право поступления в университет, право, которого они до этого были лишены. Для этого в реальных училищах предполагалось ввести дополнительный, восьмой класс. Смерть Н.П.Боголепова в 1901 году помешала реализации решений этой комиссии, но вопрос о реалистах не был снят с повестки дня.

В 1907 году в реальных училищах был введен дополнительный класс. Программа по математике для этого класса, составленная комиссией во главе с профессором К.А.Поссе, предусматривала изучение основ анализа бесконечно малых и аналитической геометрии [3]. По этой программе реальные училища работали до 1917 года, позже к ним присоединились и кадетские корпуса.

Наибольший резонанс в мире получили реформы в Германии, осуществленные под руководством выдающегося немецкого математика Феликса Клейна (1849-1925). В центр новых программ по математике, принятых в 1905 году на съезде естествоиспытателей и врачей в г.Меране, была поставлена задача формирования ФУНКЦИОНАЛЬНОГО МЫШЛЕНИЯ. Большое значение германские реформаторы придавали модернизации школьного курса математики и его прикладной направленности.

И во многих других странах также готовились или уже реализовывались реформы преподавания математики в средней школе.

В апреле 1908 года в Риме состоялся IV Международный Математический Конгресс. На секции математического образования было принято решение о создании Международной Комиссии по преподаванию математики. Эта комиссия должна была подготовить к следующему конгрессу в Кембридже в 1912 году отчет о состоянии и тенденциях математического образования в разных странах мира. По приглашению конгресса президентом комиссии стал Ф.Клейн, вице-президентом — ДЖ.Гринхилл, генеральным секретарем - А.Фер (они составили так называемый Центральный Комитет).

Центральный Комитет осенью того же года собрался в Кельне и составил “Предварительный доклад об организации комиссии и общем плане ее работ” [4]. Этот доклад помещен в Приложении 1.

В работе комиссии поначалу приняло участие 18 стран, затем к ним присоединились и другие. Странам-участницам было предложено делегировать педагогов-математиков для работы в комиссии. Кроме того, в каждой стране необходимо было создать национальную подкомиссию для подготовки к 1911 году национального отчета.

Помимо известных педагогов-математиков, в работе комиссии приняли участие многие видные ученые, в том числе Ф.Клейн (Германия), Г.Кастельнуово и Ф.Энриквес (Италия),П.Аппель, Г.Дарбу и Э.Борель (Франция) и другие. Русскую национальную подкомиссию возглавил академик Н.Я.Сонин (см.Приложение 2 и 3). Отчеты национальных подкомиссий должны были составляться в соответствии с теми задачами, которые сформулированы в Предварительном докладе.

В Приложении 3 помещен отчет о первом заседании русской подкомиссии. Из него видно, что многие замечательные педагоги вызвались принять участие в работе этой подкомиссии. Впечатляет также и тот объем работ, который им предстояло выполнить. К 1912 году было подготовлено и представлено 18 отчетов русской национальной подкомиссии. Также активно работали над своими отчетами и другие национальные подкомиссии. Впоследствии, однако, составление отчетов перестало быть главной задачей комиссии. Первостепенное значение имело общение педагогов разных стран и обмен опытом.

Международная комиссия проводила регулярные съезды. На съезде в Брюсселе в августе 1910 года центральным был доклад К.Бурле "Взаимопроникновение чистой и прикладной математики в среднем образовании" [5]. На съезде в Милане в сентябре 1911 года главными темами были: 1) вопрос о систематичности и слиянии, 2) математическое образование, теоретическое и практическое, которое надо давать изучающим науки физические и естественные [6]. На V Международном Математическом Конгрессе в Кембридже также обсуждались вопросы работы комиссии. Д.Смит выступил с докладом "Интуиция и опыт в преподавании математики". Математической подготовке физиков в университете был посвящен доклад К.Рунге [7]. Последний перед войной съезд состоялся в Париже весной 1914 года. На этом съезде обсуждались результаты введения в старших классах начал дифференциального и интегрального исчисления и вопрос о месте и роли математики в высшем техническом образовании [8].

Начавшаяся мировая война надолго приостановила работу комиссии. Деятельность ее возобновилась в двадцатых годах, но Советская Россия в этой работе уже не участвовала.

Более подробно о деятельности Международной Комиссии по преподаванию математики можно познакомиться по докладу члена русской делегации, профессора Харьковского университета Д.М.Синцова, сделанному им на II Всероссийском съезде преподавателей математики в 1914 году [9]. А о дальнейшей истории комиссии можно узнать из статьи в журнале "Математика в школе" [10].

Литература

I. Каган В.Ф. О реформе преподавания математики в средних учебных заведениях Германии и Франции // Борель Э. Элементарная математика. Одесса, 1911. Ч.I.

2. Труды Высочайше учрежденной комиссии по вопросу об улучшениях в средней общеобразовательной школе // СПб., 1900. Вып.I-8.

3. Программа математики для дополнительного класса реальных училищ // ЖМНП. 1907. №1.

4. Международная Комиссия по преподаванию математики. Предварительный доклад // ЖМНП. 1909. Т.27. Вып.I.

5. Синцов Д.М. Международная Комиссия по преподаванию математики. Математика на выставке в Брюсселе // ВОФЭМ. 1910. №524, 525.

6. Синцов Д.М. Международная Комиссия по преподаванию математики. Съезд в Милане 5-7 (18-20) сентября 1911 года // ВОФЭМ. 1911. №550.

7. Синцов Д.М. V Международный Математический Конгресс в Кембридже // ВОФЭМ. 1912. №569; МОб. 1913. №4; МОб. 1999. №I(8).

8. Поссе К.А. Международная Комиссия по преподаванию математики. Конференция в Париже 1-4 (н.ст.) апреля 1914 года // ВОФЭМ. 1914. №607.

9. Синцов Д.М. Доклад о Международной Комиссии по преподаванию математики (на II Всероссийском съезде преподавателей математики) // МОб. 1914. №1. С.5-20.

10 Бычков Б.П. Международная Комиссия по математическому образованию // МШ. 1970. №5.

Список сокращений

ВОФЭМ — Вестник опытной физики и элементарной математики. Журнал.
ЖМНП — Журнал Министерства народного просвещения.
МОб. — Математическое образование. Журнал.
МСк. — Математический сборник. Журнал.
МШ. — Математика в школе. Журнал.

Приложение 1

Международная комиссия по математическому образованию.

Предварительный доклад об организации комиссии и общий план ее работ

А. Введение

В секции философии и истории преподавания IV международного математического конгресса в Риме 6-11 апреля 1908 г. был заслушан ряд докладов о преподавании математики в важнейших странах. По инициативе проф. Д.Смита, автора доклада, относящегося к Сев.-Американским Соединенным Штатам, секция постановила представить конгрессу резолюцию об организации международной комиссии с целью изучения успехов преподавания математики в различных странах. Это предложение было уже высказано упомянутым нью-йоркским профессором в 1905 году в его ответе на анкету журнала “L'Enseignement mathematigue”, именно по вопросу “о реформах, подлежащих осуществлению”. Это предложение было энергично поддержано конгрессом, который на заседании 11 апреля принял следующую резолюцию: “Признавая чрезвычайно важным совместное изучение методов и планов преподавания математики в средних школах различных стран, конгресс поручает профессорам Клейну, Грингиллю и Феру организовать международную комиссию, которая займется изучением этих вопросов и представит следующему конгрессу общий доклад”.

Как известно, следующий съезд состоится в Кембридже в августе 1912 года.

Комитет конституировался следующим образом: президент проф.Ф.Клейн (Готтинген), вице-президент Грингилль (Лондон), главный секретарь проф. М.Фер (Женева).

Комитет не замедлил приступить к работе и в заседании, имевшем место в Кельне в сентябре 1908 года, принял настоящий Предварительный Доклад об организации комиссии и об общем плане ее деятельности.

B. Организация комиссии

I. Делегации

a) Комиссия составляется из делегатов, представляющих все те страны, которые приняли участие, по крайней мере, в двух международных математических конгрессах и имели в составе последних не менее двух членов. Страны, которые имели в среднем не менее десяти представителей, могут иметь в комиссии двух или трех делегатов, но при голосованиях и суждениях комиссии каждая страна имеет только один голос.

К непосредственному участию в трудах комиссии сообразно этому приглашаются следующие страны: Германия (2 или 3 делегата), Австрия (2 или 3), Бельгия (1), Дания (1), Испания (1), Сев.-Амер. Штаты (2 или 3), Франция (2 или 3), Греция (1), Голландия (1), Венгрия (2 или 3), Великобритания (2 или 3), Италия (2 или 3), Норвегия (1), Португалия (1), Румыния (1), Россия (2 или 3), Швеция (1), Швейцария (2 или 3). Эти страны будут считаться Участвующими в комиссии.

b) Страны, которые не отвечают поставленному выше условию, но которые по своим установлениям могут содействовать успехам науки, также будут приглашены командировать в комиссию по одному делегату; этим последним будет предоставлено следить за работами комиссии, однако, без участия в голосовании.

Эти страны называются Приобщенными странами. Вот первый их перечень, который можно будет пополнить, если в этом встретится надобность: Аргентина, Австралия, Болгария, Бразилия, Канада, Чили, Китай, Капская колония, Египет, Английская Индия, Япония, Мексика, Перу, Сербия, Турция.

c) Национальные подкомиссии. Все делегации приглашаются организовать у себя на родине подкомиссии, состоящие из представителей различных отраслей преподавания математики в общеобразовательных учреждениях и в технических или профессиональных школах. Эти подкомиссии имеют целью помогать делегатам в составлении докладов, о которых речь будет ниже в рубрике G.

2. Центральный комитет

Комиссия управляется особым комитетом, состоящим из трех членов, назначенных 4-м международным математическим конгрессом. Этот комитет будет называться Центральным Комитетом; он имеет самые широкие полномочия; в частности, с одобрения комиссии он сохраняет за собой все права, касающиеся организации комиссии опубликования общих ее докладов.

Что касается образования самой комиссии, то Комитет озаботится привлечь лиц, проявивших особенный интерес к успехам преподавания математики. Комитет будет просить этих лиц своевременно войти в сношения со своими правительствами, дабы последние были уже осведомлены о целях и об организации комиссии, когда они получат официальное предложение одобрить предложение Комитета относительно делегации, а также предложение делегатов относительно национальной подкомиссии. В виду чрезвычайно обширной задачи, которая падает на делегации, в высшей степени желательно, чтобы их занятия могли начаться в самом непродолжительном времени.

3. Средства комиссии.

Так как IV международный конгресс не уделил комиссии никакой субсидии, то правительства участвующих стран будут приглашены представить в распоряжение своих делегаций некоторую сумму, позволяющую целиком покрыть расходы делегации, подкомиссии, а также принять участие в общих расходах комиссии.

На общие расходы комиссии (именно расходы главного секретаря и Центрального Комитета) будет образован особый фонд, составляемый из ежегодных взносов в размере 100 франков каждой участвующей страны. Эти взносы имеют поступить к главному секретарю в январе 1909, 1910, 1911 и 1912 годов или, если угодно, единовременно в январе 1909 года. Генеральный секретарь представит финансовый отчет общему собранию комиссии, которая состоится в Кембридже, во время V международного конгресса. Что касается делегатов приобщенных стран, то они приглашаются непосредственно снестись с своими правительствами по вопросу о средствах, которыми может располагать делегация, но Комитет оставляет за собою право установить и для этих стран некоторый взнос на общие расходы комиссии, если в этом представится надобность.

C. Официальный орган комиссии, публикация отчетов подкомиссий

Органом комиссии будет служить журнал “L’Enseignement mathematigue”, выходящий под редакцией Лезана и Фера.

В этом журнале будет опубликован предварительный доклад, а также будет сообщен состав делегаций. Впоследствии этот журнал будет правильно помещать отчеты о трудах комиссии и подкомиссий.

Само собою разумеется, что воспроизведение этих отчетов в периодических изданиях и других печатных органах будет предоставлено всем желающим.

Подкомиссии будут публиковать свои доклады по собственному соглашению. Центральный Комитет выражает, однако, свое желание, чтобы эти доклады печатались в формате журнала “L’Enseignement mathematigue” и чтобы делегации различных стран присылали по 75 экземпляров главному секретарю, который разошлет их всем членам комиссии.

D. Официальные языки.

Корреспонденции и доклады должны быть составлены по выбору авторов на одном из четырех языков, допущенных на международных математических конгрессах. Эти языки суть: немецкий, английский, французский и итальянский.

E. Общая задача комиссии

Сообразно различным пожеланиям, которые были формулированы в Риме, Центральный Комитет полагает, что главная цель комиссии должна заключаться в следующем: "Произвести анкету и опубликовать общий отчет о современных направлениях в преподавании математики в различных странах." Необходимо принять во внимание не только методы преподавания и планы обучения, но также и организацию самого обучения; однако, излагать эту последнюю сторону дела во всей ее полноте, а также историческое ее развитие нет необходимости. Комиссия отнюдь не может заняться работой чисто статистической.

Комиссия должна стараться, главным образом, выяснить, каковы важнейшие принципы, долженствующие вдохновлять учителя, а не стремиться к установлению единообразия в деталях в программах различных учреждений.

F. Организация занятий комиссии.

Для того, чтобы занятия, общий характер которых мы наметили выше, принесли реальные результаты делу преподавания, необходимо, чтобы все делегаты и их национальные подкомиссии вносили в это дело деятельное и согласованное сотрудничество.

Делегации участвующих в комиссии стран будут прежде всего приглашены представить план относительно общего хода работ комиссии; затем, в первый период, они установят характер своего доклада при содействии своих подкомиссий в согласии с общим планом работ в том виде, в каком он будет окончательно установлен Центральным Комитетом. Для стран приобщенных представление такого доклада является необязательным.

Весьма желательно, чтобы главные пункты доклада были в каждой стране подвергнуты предварительному обсуждению в собрании профессоров и преподавателей, в научных и технических обществах, а также и в других учреждениях, которые интересуются успехами преподавания математики. Было бы также очень хорошо, если бы текст сопровождался библиографическими указаниями, по возможности, более полными и более точными. В печатном виде эти отчеты должны быть представлены главному секретарю в начале 1911 года.

Во время пасхальных каникул 1911 года комиссия соберется на общее заседание, в котором будет подвергнута обсуждению вся совокупность вопросов, намеченных в общей программе, а также будут установлены основания общего доклада. Что касается редактирования последнего, то Центральный комитет имеет еще обсудить те меры, которые должны быть приняты, чтобы этот отчет мог быть представлен комиссии на Кембриджском съезде.

G. Предмет занятий комиссии.

I. Общие соображения

В самом тексте резолюции Римского конгресса речь идет только о преподавании математики в средней школе; но, принимая во внимание, что цель этих школ и продолжительность обучения в них значительно меняется от одного государства к другому, Комитет намерен распространить свою работу на всю совокупность математического образования, начиная с первых шагов и вплоть до высшего обучения. Он не ограничится изучением общих школ, подготовляющих молодых людей в университет, но займется также преподаванием математики в технических и профессиональных школах. В виду возрастающего значения, которое приобретают последние школы, а также в виду тех требований, которые в этих школах предъявляются к обучению математике, предпринимаемая анкета должна уделить много места прикладной математике.

Дело сводится, таким образом, к тому, чтобы ознакомиться с постановкою математического образования во всей его совокупности в различных школах на различных его ступенях; это изучение будет иметь главной своей задачей представить в объективной форме существующие тенденции этого преподавания. Труды комиссии будут всегда опираться на те доклады, которые вырабатывают делегаты участвующих стран при помощи своих местных подкомиссий по общему плану, установленному Центральным Комитетом. В Первой части своей эти доклады дадут обзор Современной организации обучения математике, системы экзаменов, методов обучения и приготовления преподавательского персонала. Лишь после того, как будут выяснены все эти стороны дела, можно будет исследовать и ясно представить, каковы собственно тенденции существующего преподавания, которые часто обнаруживаются в характере реформ, предпринятых в последнее время. Этому будет посвящена Вторая Часть, в которой будут сохранены те же подразделения, что и в первой.

II. Общий план занятий

Часть первая

Современное состояние преподавания и методов обучения математике.

Глава I. Различные типы школ.

В этой главе должно быть дано систематическое перечисление различных учебных заведений, в которых производится обучение математике, с указанием цели каждой школы. Необходимо принять также во внимание и женские школы. Учреждения должны быть распределены по следующей классификации:

a) начальные школы, низшие, элементарные и высшие;

в) средние учебные заведения (лицеи, гимназии, реальные училища и т.д.);

c) средние профессиональные училища (технические, коммерческие и т.п.);

d) нормальные школы для подготовления учителей (учительские семинарии, институты и т.д.);

e) высшие учебные заведения: университеты и политехнические институты.

Очень желательно, чтобы в этой главе был также дан общий обзор последовательности и взаимной связи между различными учреждениями с указанием среднего возраста воспитанников.

Глава II. Цель математического образования и различные отделы, преподаваемые в школах.

Необходимо разобрать этот вопрос по отношению ко всем вышеупомянутым типам учебных заведений, а также указать, преподается ли в школах данного типа прикладная математика, в особенности механика. Цель математического образования не только меняется от одного учреждения к другому, но большей частью она подверглась в течение последнего столетия значительным изменениям даже в школах одного и того же типа. Эта цель может быть чисто формальной; оставаясь формальной, она может все же отводить место интуиции; она может заключаться в том, чтобы одновременно стремиться к логическому развитию, не пренебрегая в то же время утилитарными задачами; она может, наконец, носить исключительно практический характер. Далее, можно иметь в виду, главным образом, развитие памяти или, напротив того, отдавать предпочтение развитию математических способностей.

Какие отделы математики преподаются в школах различного типа? Здесь нужно указать время, которое уделяется преподаванию каждого отдела, и размеры программ. В какой мере указывается при преподавании на связь, существующую между различными ветвями, а также на связь между математикой и ее приложениями (разумея под этим механику) и физикой?

Глава III. Экзамены.

Не подлежит сомнению, что система экзаменов оказывает большое влияние на метод преподавания. Необходимо, следовательно, дать сводку всего того, что касается экзаменов в школах различных категорий, в особенности, экзаменов на аттестат зрелости, на звание бакалавра, на звание учителя и т.д.

Глава IV. Методы преподавания.

Какие методы преобладают в различных учреждениях, начиная от первоначального обучения и вплоть до высшего? Материал преподавания, математические модели. Руководства, учебники, сборники задач и упражнений. Теоретические упражнения; задачи, заимствуемые из прикладных наук. Практические занятия.

Глава V. Приготовление кандидатов на замещение учительских должностей.

Здесь вновь нужно рассмотреть различные типы и указать, какой требуется в каждой школе от учителя ценз a) в смысле теоретического образования и b) в смысле практической подготовки.

Часть вторая

Глава I. Современные идеи, относящиеся к организации школы.

Реформы в деле обучения, новые типы школ, вопрос о совместном обучении обоих полов.

Глава II. Современные тенденции, относящиеся к целям математического образования и к различным отделам преподавания.

Цель обучения; указание новых отделов или новых глав, которыми следовало бы заместить бесполезные части действующих программ; отделы, имеющие небольшое значение, но сохраняемые вследствие традиции или рутины.

В виду быстрого развития математических наук и их приложения, Комитет предполагает вновь чрезвычайно тщательно исследовать, какие отделы этой области знаний вносят больше всего в общее развитие культуры. Из различных предметов, которые в настоящее время претендуют на то, чтобы им было уделено место в элементарном преподавании, следует, с одной стороны, указать на дифференциальное и интегральное исчисление, на аналитическую геометрию, на некоторые части начертательной и проективной геометрии, а также на изучение физики с математической точки зрения. С другой стороны, многие предполагают ввести в преподавание новые вопросы, носящие более специальный характер или же ввести новые, основные понятия (таковы понятия о функции, о группах, об ансамбле). Было бы очень желательно, чтобы предпринимаемая анкета выяснила, в какой мере можно считаться с этими требованиями, каков необходимый минимум познаний из элементов евклидовой геометрии, начертательной и проективной геометрии, алгебры, дифференциального и интегрального исчисления, тригонометрии и аналитической геометрии, составляющих основу дальнейшего высшего образования. Тот же вопрос возникает и по отношению к учреждениям профессионального характера. Какие отделы признаются полезными в различных специальностях?

Глава III. Экзамены.

Проекты, касающиеся преобразования существующей системы экзаменов, а также полного их устранения.

Глава IV. Методы преподавания.

Современные идеи, касающиеся методов преподавания на различных ступенях и в школах различных типов. Связь между различными ветвями математики; связь между математикой и другими отраслями знания; упражнения и практические занятия; модели и инструменты, употребление руководств.

Некоторые замечания к последней главе.

1. *Со времени Песталоцци соображения психологического характера играют весьма важную роль в первоначальном обучении.*

В последнее время с ними считаются также в известной мере при разработке программ для средне-учебных заведений. Было бы в высшей степени желательно выяснить, каковы результаты, которые дает психология по отношению к преподаванию математики, и в какой мере с нею целесообразно считаться при реформе этой науки. В особенности было бы желательно выяснить, что дает здесь эвристическая метода преподавания, а также насколько необходимо предпосылать теоретическому курсу интуитивный пропедевтический курс.

С другой стороны, с каждого момента должны получить преобладающее значение соображения чисто логического характера, например, при преподавании геометрии и дифференциального или интегрального исчисления.

2. *Практические приложения.*

Многие школы посвятили уже много внимания и споров вопросу о том, какую роль можно уделить соображениям практического и экспериментального характера.

a) Так, например, в элементарном преподавании можно пользоваться складыванием бумаги, вести работы на открытом воздухе, пользоваться простейшими измерительными приборами; можно указывать на практические и приближенные методы вычисления (степень приближения, логарифмы с различным числом десятичных знаков, употребление счетной линейки), на общий вопрос о применении графиков в алгебре, на применение клетчатой бумаги, получившее в последнее время широкое распространение.

b) В последние годы заходила речь также о математических лабораториях. Что сделано в этом направлении и какие получены результаты? — Математические модели, изготавливаемые учащимися; роль коллекций моделей.

Какие средства могли бы привести к тому, чтобы в популярном преподавании (в народных университетах) математике было уделено больше места? Отделение математических принадлежностей в музеях. Все это дало бы средства бороться с предвзятым отношением к математике.

3. *Связь между различными отделами математики.*

Было бы очень полезно исследовать, в какой мере было бы возможно стереть условные границы, установившиеся между различными отделами чистой математики, например, между алгеброй и геометрией, между алгеброй и дифференциальным и интегральным исчислением, между евклидовой и аналитической геометрией, между геометрией и тригонометрией. Следовало бы не только выяснить возможность такой реформы, но нужно было бы также и учитывать неудобства и опасности, которые могли бы от этого проистечь; все это вопросы большой важности.

Было бы также желательно познакомиться с результатами следующих преобразований, которые были частью предложены, частью выполнены в последние годы: a) место, которое может быть отведено геометрическим демонстрациям в алгебре,

b) слияние плоской геометрии со стереометрией, c) более тесное соединение дифференциального исчисления с интегральным и попытки предпослать интегральное исчисление дифференциальному.

4. *Связь между математикой и другими ветвями знания.*

В том же порядке идей было бы весьма полезно выяснить точки соприкосновения, которые существуют между математикой и другими ветвями знания. Так, например, отношение математики: a) к черчению (геометрическому, техническому и художественному), b) к прикладным наукам, c) к другим ветвям знания (к физике, химии, биологии, географии т.д.), d) к философии, e) к задачам повседневной жизни.

Все эти точки соприкосновения имеют большую важность в применении к практическому обучению. Здесь недостаточно только ознакомиться с возможными и общими пожеланиями, важно выяснить, что в этом направлении действительно сделано, достигнуты ли успехи и какие возникают на этой почве опасения. Так, например, те, которые настаивают на более тесной связи между математикой и физикой, должны будут точно установить, каковы те геометрические сведения, которые могут получить непосредственное применение в физике, а также указать те вопросы элементарной физики, которые приводятся к уравнениям первой степени, к уравнениям второй степени с одной или несколькими неизвестными, к прогрессиям и т.д.

5. *Исторические соображения.*

Высказывалось пожелание, чтобы некоторое время было уделено истории развития математики. В какой мере это желательно?

Глава V. Приготовление учительского персонала.

Каким условиям должна удовлетворять рациональная подготовка учительского персонала? Как нужно организовать теоретические и практические курсы?

Успех преподавания непосредственно зависит от подготовки учителей. Это обстоятельство большой важности. Занятия кандидатов на учительские места и требования, которые к ним предъявляются, естественно меняются от страны к стране; они зависят в большой мере от количества кандидатов и от тех средств, которые уделяются делу обучения. Комитет полагает поэтому, что было бы желательно ознакомиться с теми реформами или с проектами реформ, которые имеются в виду осуществить в деле подготовления учительского персонала, удовлетворяющего современным требованиям; и это относится не только к преподавателям начальных и средних учебных заведений, но даже к преподавателям университетов.

Настоящая анкета должна, следовательно, выяснить:

a) какие математические занятия требуются от кандидатов;

b) каково должно быть их собственное участие в научных изысканиях;

c) какие лучшие средства изложения теоретической и практической педагогики (понимая под последней науку о воспитании);

d) вопрос о роли преподавателя на различных ступенях обучения;

е) наконец, вопрос о времени, которое следовало бы уделять истории преподавания математики, вопросы о математических развлечениях и общей литературе, касающейся математического образования.

Общие замечания.

В каждой из этих глав желательно кратко подчеркнуть, с одной стороны, то, что относится к предполагаемым реформам, а, с другой стороны, опасности, которых следует при этом избегать, а также аргументы и возражения, которые противопоставляются этим проектам. Вот некоторые из важнейших вопросов, которые должны быть подвергнуты обсуждению;

1) Желание сделать изложение привлекательным может понизить серьезность преподавания — результат, который мог бы быть гибельным как для самой науки, так и для практических приложений математики.

2) Психология, дурно понятая, могла бы привести к тому, что преувеличенно выдвигалось бы значение логических основ математики, результатом чего могла бы быть постоянная неуверенность ученика.

3) Не менее вредным могло бы показаться пренебрежение и абстрактной стороной математики, которая представляется необходимой, чтобы математические истины неизгладимо запечатлелись в душе ученика.

4) Если не отдавать себе отчета, что такой отдел, как геометрия, как её в настоящее время понимают, приводит к результатам иного рода, нежели те, которые дает алгебра, то и это может иметь вредные влияния. Таким образом, соединение этих двух отделов могло бы привести к урону для некоторых важных моментов каждого отдела. Те же вопросы возникают и для других предметов.

Возможны опасности ещё и другого рода. Комитет полагает, что необходимо их все тщательно изучить для того, чтобы реформы, действительно подлежащие осуществлению, не обманули возложенных на них надежд.

(Журнал "Вестник опытной физики и элементарной математики". 1909. №475-'476. С.438-448.)

Приложение 2

Организация русской делегации и её воззвание

В мартовской книге ЖМНП помещено официальное извещение об организации Комиссии и о назначении русской делегации; именно, напечатан известный уже читателям нашего журнала "предварительный доклад", за которым следует воззвание русской делегации, о составе которой было сообщено в предыдущем номере "Вестника". Это воззвание, любезно присланное нам академиком Н.Я.Сониным, мы помещаем ниже. "Предварительный доклад" выпущен также делегацией в виде небольшой отдельной брошюры.

Воззвание

В январе 1909 года президент Центрального Комитета проф.Клейн обратился от имени Комитета к академику Н.Я.Сонину с приглашением взять в свои руки все дело, поскольку оно касается России.

Сознавая всю трудность и обременительность поставленной международным конгрессом математиков задачи, Н.Я.Сонин, в виду особого положения, занимаемого им в центральном управлении Министерства Народного Просвещения по должности председателя Ученого Комитета, равно как и приглашенные им к участию в делегации профессор математики в С.-Петербургском технологическом институте Б.М.Коялович и директор С.-Петербургского 2-го реального училища К.В.Фохт, как члены Ученого Комитета признали себя нравственно обязанными посвятить свое время и труд наилучшему выполнению того, что выпадет на долю России в международном предприятии.

Г.Министр Народного Просвещения утвердил трех названных лиц делегатами от России в составе международной комиссии.

Объявляя об этом, русские делегаты выражают твердую уверенность, что они встретят энергичную и деятельную поддержку в выполнении лежащей на них обязанности со стороны гг.профессоров и преподавателей математики и связанных с ней наук (механики, физики) в учебных заведениях различных типов и ведомств.

Лица, желающие принять участие в составлении докладов по намеченным в предварительном докладе Комиссии вопросам, благоволят присылать свои заявления на имя Н.Я.Сонина в Ученый Комитет Министерства Народного Просвещения (С.-Петербург, Офицерская, 39).

Доклады могут быть составлены или прямо на одном из четырех принятых на международном конгрессе языков, или на русском языке; в последнем случае на обязанности делегатов лежит озаботиться переводом их на французский или немецкий языки.

(Журнал "Вестник опытной физики и элементарной математики". 1909. №487)

Приложение 3

Первое совещание русской подкомиссии

После организации русской делегации председатель её, академик Н.Я.Сонин, обратился от имени делегации к отдельным лицам, хорошо осведомленным в вопросе о постановке у нас преподавания математики, и к компетентным учреждениям с просьбой о содействии в деле организации русской национальной подкомиссии. В частности, Н.Я.Сонин обратился в физико-математические факультеты всех университетов с просьбой делегировать представителей в состав подкомиссии. Когда таким образом определился контингент лиц, готовых принять участие в работах подкомиссии, члены её были приглашены на совещание, состоявшееся в С.-Петербурге 21 ноября в помещении Ученого Комитета Министерства Народного Просвещения под председательством Н.Я.Сонина.

Вследствие того, что совещание состоялось среди семестра, не все делегаты имели возможность приехать. В совещании приняли участие, помимо членов русской делегации, следующие лица: профессор М.Д.Гатцук (С.-Петербург), профессор С.П.Глазенап (С.-Петербург), профессор Д.Н.Горячев (Варшава), прив-доцент В.Ф.Каган (Одесса), профессор Р.В.Колосов (Юрьев), директор 8-ой гимназии В.А.Кондратьев (С.-Петербург),профессор П.В.Котурницкий (С.-Петербург), директор Педагогического Музея военно-учебных заведений генерал З.А.Макшеев (С.-Петербург), преподаватель С.-Петербургского Педагогического института Н.С.Михельсон, профессор К.А.Поссе (С.-Петербург), профессор Д.Д.Мордухай-Болтовский (Варшава), член Ученого Комитета В.И.Соллертинский (С.-Петербург), директор Константиновского Межевого института В.Б.Струве (Москва), приват-доцент Т.Э.Фризендорф (С.-Петербург). Кроме этого, многие лица, не имевшие возможности прибыть в С.-Петербург на совещание, сообщили, что они готовы принять участие в трудах подкомиссии.

Открывая заседание, Н.Я.Сонин вновь вкратце ознакомил собрание с историей возникновения Международной Комиссии и с содержанием предварительного доклада, в котором намечен общий план работы. Согласно этому плану делегация должна около Пасхи 1911 года представить Центральному Комитету свой доклад. Этот доклад должен представлять собою сводку и обработку тех материалов, которые будут представлены членами подкомиссии и отдельными лицами, отозвавшимися на воззвание русской делегации. Имея в виду, что настоящее совещание должно дать руководящие указания лицам, которые будут подготовлять доклады, Н.Я.Сонин обратил внимание на то, что по плану, указанному в предварительном докладе, каждый вопрос трактуется дважды: во-первых, устанавливается современное состояние вопроса, а затем излагаются новые течения и тенденции, которые поэтому получили распространение в стране. Что касается первой стороны, то здесь легко, конечно, оставаться на объективной почве, хотя дать полную картину постановки преподавания математики в различных русских учебных заведениях не так легко. Что касается второй части, то здесь задача гораздо ответственнее, так как очень трудно выяснить, в какой мере автор того или другого доклада сообщает взгляды, действительно выражающие существующее в стране течение, а не излагает собственную точку зрения. В особенно затруднительном положении в этом отношении находится делегация, которой придется обрабатывать этот материал для представления в Центральный Комитет. Отнюдь не желая отказаться вовсе от второй части плана, председатель предложил обсудить, как направить работы по этой части таким образом, чтобы отразить действительно существующие стремления, а не мнения отдельных лиц, а главное, снять с делегации ответственность за правильное освещение этих стремлений в окончательном докладе.

При обсуждении этого вопроса некоторые члены совещания высказывали мнение, что по изготовлении докладов должно состояться совещание подкомиссии, в котором все тезисы должны быть подвергнуты обсуждению и голосованию. Но это встретило возражение, что этого рода вопросы вообще вряд ли поддаются решению путем голосования, а тем менее, в условиях работы подкомиссии; далее, чтобы обсудить и голосовать все вопросы, которые намечены в докладах, нужно было бы не совещание, а продолжительный ряд заседаний. Вследствие этого было решено, что делегация представит свой доклад лишь по первой части плана; члены же подкомиссии в своих докладах будут разрабатывать и вторую часть плана, руководствуясь литературой и теми суждениями, которые будут высказываться при дебатировании этих вопросов в различных ученых и педагогических обществах. Эти доклады будут переведены на французский язык (если они не будут сразу составлены на одном из языков, принятых комиссией) и будут переданы в Центральный Комитет за ответственностью их авторов.

Далее, председатель обратил внимание на то, что в программе Центрального Комитета имеются такие вопросы, которые отнюдь не относятся к преподаванию математики, а к педагогическому делу вообще; сюда относится, например, вопрос о совместном обучении обоих полов, вопрос об экзаменах. Совещание приняло предложение вовсе не касаться вопроса о совместном обучении полов, а вопрос об экзаменах изложить в порядке первой части программы.

Далее, председатель обратил внимание на то, что при том широком обращении ко всем интересующимся лицам, которое нашло себе место в воззвании делегации, нельзя не предвидеть, что могут получиться и такие доклады, которые вряд ли можно будет печатать. Принимая на себя обязательство напечатать все доклады членов подкомиссии, делегаты полагали бы, однако, нужным сохранить за собой право в случае полной необходимости отказаться от печатания доклада, написанного посторонним лицом. Собрание с этим согласилось.

Затем собрание перешло к наиболее важной задаче — к распределению работ. Доклады были распределены следующим образом:

В.И.Соллертинский: низшие учебные заведения, учительские институты и семинарии.

В.А.Кондратьев: мужские гимназии, женские институты Ведомства учреждений Императрицы Марии.

Н.С.Михельсон: женские гимназии МНП (С.-Петербургского учебного округа) и Ведомства учреждений Императрицы Марии, Женский Педагогический институт и артиллерийские училища.

Д.Н.Горячев: женские гимназии Варшавского учебного округа.

В.Б.Струве: женские гимназии Московского учебного округа, Межевой институт и землемерные училища.

К.Ф.Фохт: реальные училища.

П.В.Котурницкий и А.Д.Гатцук: низшие и средние технические училища.

З.А.Макшеев: подготовка преподавателей для кадетских корпусов.

К.А.Поссе: университеты, институты: Электротехнический, Гражданских инженеров и Путей сообщения.

Д.Д.Мордухай-Болтовский: Варшавский политехнический институт.

М.Г.Попруженко: военные училища (кроме специальных) и кадетские корпуса.

Б.М.Коялович: С.-Петербургские Высшие женские курсы, Технологический институт и Инженерная Академия.

В.Ф.Каган: Одесские Высшие женские курсы; подготовка преподавателей.

Г.В.Колосов: Рижский Политехнический институт.

Сделав эти поручения, совещание признало, однако, весьма желательным, чтобы теми же вопросами занялись и другие лица, в целях возможно более разностороннего их освещения. Кроме того, относительно учебных заведений, которые не были представлены в совещании, русская делегация обратиться к компетентным лицам для получения соответствующих сведений.

В заключении было принято предложение, что доклады должны составляться со всею краткостью, какая возможна при обстоятельной разработке вопросов. Доклады должны быть доставлены председателю подкомиссии к 1 октября 1910 года.

Поблагодарив собравшихся за готовность, с которою они приняли предложение принять участие в предстоящих трудах русской подкомиссии, и выразив надежду, что в случае надобности члены подкомиссии не откажутся собраться ещё раз, Н.Я.Сонин закрыл заседание.

(Журнал "Вестник опытной физики и элементарной математики". 1909. №502.)

Гушель Ревекка Залмановна,
старший преподаватель кафедры геометрии
Ярославского педагогического университета.

Содержание приложения “Обозрение Z”

Предлагаем вниманию читателей содержание очередных номеров научно-популярного приложения “Обозрение Z” к журналу “Математическое образование”. Напоминаем, что как электронная, так и бумажная версии приложения распространяются только по предварительным заказам. Об условиях заказа см. страницу о Фонде математического образования и просвещения (предпоследняя страница журнала).

№5, март, 2001 года

Живая планета

А. Н. Моталов. Грибки — друзья или враги?

От редакции

В. В. Витальев. Инволюция человека

Языки искусствоведения

В. Н. Каледин. “Шла машина темным лесом”

Историческая радуга

И. Р. Шафаревич. Христианство и экологический кризис (окончание)

Рубрика КДХ

И. Б. Герасимов. Слово о предках

№6, апрель, 2001 года

Горизонты технологий

Пилотируемой космонавтике — 40 лет

Панорама естествознания

В. Н. Ларин. Гипотеза изначально гибридной Земли

Рубрика ШТЛ

Избранные задачи по астрономии и геофизике

Живая планета

В. В. Витальев. Инволюция человека (окончание)

Б. В. РАУШЕНБАХ (некролог)

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, пр-д завода "Серп и Молот", д.3а.

Контактные телефоны: (095) 362-91-70, (095) 362-91-02.

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

Страница Фонда в сети Internet: www.fmop.dnttm.ru

e-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2001 год (включая стоимость пересылки) – 35 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2001 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

С сентября 2000 выходит "Обозрение Z" — научно-популярное приложение к журналу "Математическое образование". Условия подписки (адрес, реквизиты, стоимость одного номера) — те же, что и для журнала.

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 30 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 40 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов

Contents